Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

**В. В. ГОРЯЙНОВ, К. Г. МАЛЮТІН,
І. І. КОЗЛОВА**

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

Підручник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2020

УДК 517.5(075)
Г71

Рецензенти:

С. Ю. Фаворов — доктор фізико-математичних наук, професор (Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна);
Л. А. Фільштинський — доктор фізико-математичних наук, професор (Сумський державний університет)

Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету як підручник
(протокол №6 від 08 грудня 2016 року)

Горяйнов В. В.
Г71 Комплексний аналіз : підручник / В. В. Горяйнов, К. Г. Малютін, І. І. Козлова. — Суми : Сумський державний університет, 2020. — 120 с.
ISBN 978-966-657-814-6

Підручник написано відповідно до діючої програми курсу теорії функцій однієї комплексної змінної для студентів математичних і фізичних спеціальностей класичних університетів України. Він складається з теоретичної частини та вправ. Підручник буде корисний також студентам природничих і технічних спеціальностей ЗВО, аспірантам та науковцям.

УДК 517.5(075)

ISBN 978-966-657-814-6

Зміст

Передмова

Неможливо уявити собі сучасну науку без широкого використання функцій комплексної змінної. Аналіз властивостей функцій неможливий без виходу в комплексну площину. Розглянемо простий приклад: функція $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ — нескінченно диференційовна на всій дійсній осі, однак її ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - \ldots$$

не є збіжним за $|x| \geqslant 1$. Причину цього неможливо зрозуміти залишившись у множині дійсних чисел: граничні точки $x = \pm 1$ множини збіжності та розбіжності ряду нічим не відрізняються від інших точок дійсної осі. Вихід у комплексну площину відразу пояснює явище: на колі $|z| = 1$ лежать точки

$$z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

в яких функція $f(x)$ перетворюється на нескінченність, через що ряд перестає бути збіжним.

Перехід до комплексного аналізу дає можливість глибше вивчити елементарні функції та встановити цікаві зв'язки між ними. Так, тригонометричні функції виявляються комбінаціями показникових, наприклад,

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right)\,.$$

У теорії функцій дійсної змінної вивчаються лише однозначні функції, а многозначні, зазвичай, не розглядаються. В комплексному аналізі вдається з'ясувати природу і багатозначності та побудувати чітку теорію багатозначних функцій.

Комплексний аналіз дає ефективні методи обчислення інтегралів та отримання асимптотичних оцінок, способи досліджень розв'язків диференціальних рівнянь та ін. Функції комплексної змінної описують плоскі векторні поля, які найбільш цікаві для застосувань — одночасно потенціальні та соленоїдальні. Тому комплексний аналіз набуває широкого використання в різноманітних сферах: гідродинаміці, аеродинаміці, електротехніці.

У передмові до своєї книги "Введение в комплексный анализ" Б. В. Шабат писав: Одной из отличительных и привлекательных черт комплексного анализа является его подлинная комплексность. В нем сочетаются аналитические и геометрические, вполне классические и самые новые методы. Наряду с очень конкретными и прикладными в нем решаются весьма общие и абстрактные задачи. В комплексном анализе встречаются и разные разделы математики, и разные прикладные науки. Его понятия служат основной моделью, источником и отправным пунктом многих исследований в функциональном анализе, алгебре, топологии, алгебраической и дифференциальной геометрии, уравнениях с частными производными и других разделах математики.

Початкові ідеї теорії функції комплексної змінної зародилися в другій половині 18-го століття і пов'язані насамперед із працями Леонарда Ейлера (1707–1783). Ідеї Ейлера в кінці XVIII століття Ж. Лагранж поклав в основу свого обгрунтування диференціального числення. Основна теорія була побудована в 19-му столітті завдяки працям Карла Гаусса (1777–1855), Огюстена Коші (1789–1857), Бернарда Рімана (1826-–1866) та Карла Вейєрштрасса (1815–1897). Гаусс висунув теорію спеціальних функцій, рядів, чисельних методів розв'язання задач математичної фізики. Створив математичну теорію потенціалу. Досить довго і успішно займався еліптичними функціями. Коші плідно працював в галузі комплексного аналізу, зокрема, створив теорію інтегральних лишків. У математичній фізиці глибоко вивчив крайову задачу з початковими умовами, яка з тих пір називається «задачею Коші». Йому також належать дослідження в геометрії (про многогранники), в теорії чисел, алгебрі та в інших галузях математики. В докторській дисертації Ріман започаткував геометричний напрямок теорії аналітичних функцій; ним були введені ріманові поверхні, важливі при дослідженнях многозначних функцій, розроблена теорія конформних відображень і визначені основні ідеї топології, вивчені умови існування аналітичних функцій всередені областей різного виду (принцип Діріхле). Розроблені Ріманом методи отримали широке застосування в його подальших працях з теорії алгебраїчних функцій і інтегралів, з аналитичної теорії диференціальних рівнянь (зокрема, рівнянь, що визначають гіпергеометричні функції), аналитичної теорії чисел (Ріманом вказаний зв'язок розподілу простих чисел з властивостями дзета-функції, зокрема, з розподілом її нулів в комплексній області — гіпотеза Рімана, справедливість якої до сих пір не доведена). Дослідження Вейєрштрасса суттєво збагатили математичний аналіз. Вейєрштрасс довів, що поле комплексних чисел — єдине комутативне розширення поля дійсних чисел без дільників нуля.

В наші дні теорія функцій однієї комплексної змінної набула цілком завершеного вигляду. Однак і тут є невирішені проблеми як у зв'язку з новими математичними задачами, так і в зв'язку з застосуваннями теорії функції комплексної змінної.

Цей матеріал викладався і викладається в Донецькому державному університеті, Московському фізико-технічному інституті (державний університет), Сумському державному університеті та Волзькому гуманітарному інституті Волгоградського державного університету. Поштовхом до написання підручника було бажання викласти достатньо лаконічно доведення основних теорем теорії аналітичних функцій, не використовуючи традиційних нечітких геометричних описів, що істотно знижують рівень строгості міркувань. Зазвичай рівень строгості викладення теорії аналітичних функцій визначається доведенням теореми Коші. По суті, в цій теоремі потрібно здійснити перехід від локального результату до глобального. Тому на перший план виходять топологічні розгляди. У цьому підручнику необхідні міркування проводяться на основі поняття індексу точки відносно замкненої кривої. Поняття індексу робить також наочнішими доведення принципу аргументу і теорем про локальні властивості аналітичних функцій. Під час вивчення локально рівномірної збіжності послідовностей аналітичних функцій використовують деякі результати з курсу функціонального аналізу. Зокрема, теорема Арцела дозволяє значно скоротити доведення принципу компактності Монтеля. Підручник складається із 7 розділів та списку літератури. Наприкінці кожного розділу сформульовані задачі і вправи, під час розв'язування яких студенти матимуть можливість перевірити достатність рівня засвоєння вивченного матеріалу. Ми сподіваємося, що підручник буде корисним для студентів усіх математичних спеціальностей університетів та педагогічних інститутів.

Підготовку матеріалів підручника її автори розподілили між собою таким чином: розділ 1 написала І. І. Козлова, розділи 2, 6 та 7 — К. Г. Малютін, розділи 3, 4 та 5 — В. В. Горяйнов.

Розділ 1

Комплексні числа

Вступ

Числа вигляду $a+b\sqrt{-1}$, де a і b – дійсні числа, виникли наприкінці 16-го століття. Кардан (1501–1576) застосував комплексні числа для розв'язування квадратних та кубічних рівнянь. У 18-му столітті функції комплексної змінної застосовував Ейлер для розв'язування диференціальних рівнянь. Виявилося, що більшість проблем дійснозначних функцій можуть бути легко розв'язані з використанням комплексних чисел та функцій комплексної змінної. Однак при всій їх корисності комплексні числа до середини 19-го століття недостатньо використовували. Декарт (1596–1650), наприклад, виключав комплексні корені рівнянь і вигадав термін "уявний"для таких коренів. Ейлер також вважав, що комплексні числа існують тільки в уяві та розглядав комплексні корені рівнянь, щоб показати, що рівняння не має розв'язку.

Більш широке сприйняття комплексних чисел дає їх геометричне подання, яке повною мірою було розвинене та сформульоване у працях Карла Гаусса (1777–1855). Він розумів, що було помилковим припускати, що була деяка темна загадка в цих числах. У геометричному представленні, писав Гаусс, інтуїтивний сенс комплексних чисел цілком зрозумілий і більше немає потреби допускати ці величини в область арифметики. Праця Гаусса просунула далеко вперед дослідження коплексних числових систем. Однак перше повне та формальне означення було запропоноване його сучасником Вільямом Гамільтоном (1806–1865). Ми почнемо з його означення, а потім розглянемо геометрію комплексних чисел.

1.1 Поле комплексних чисел

Зазначимо, що комплексні числа z можуть бути записані у вигляді $z = a+bi$, де a і b – дійсні числа, а i — уявна одиниця така, що задовольняє умову $i^2 = -1$. Це є так званий алгебраїчний запис комплексного числа.

Відзначимо, що це не є формальним означенням, оскільки це припускає систему, в якій корінь квадратний із -1 має сенс. Такі системи ми й будемо вивчати. Крім того, операції додавання та множення, які з'являються у виразі $a + bi$, поки що не визначені. Формальне визначення цих виразів дамо нижче в термінах упорядкованих пар.

Означення 1.1 *Комплексне поле $\mathbb{C}$ є множиною упорядкованих пар дійсних чисел (a, b) із додаванням та множенням, визначених за такими правилами:*

$$\begin{aligned}&(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d;\\&(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d);\\&(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)\,.\end{aligned}$$

Асоціативні, дистрибутивні та комутативні закони випливають із добре відомих властивостей дійсних чисел. Адитивною одиницею, або нулем, є пара $(0, 0)$, протилежним до (a, b) є $(-a, -b)$. Мультиплікативною одиницею є пара $(1, 0)$. Визначимо обернене (x, y) до ненульової пари (a, b), припустивши, що

$$(x,y)(a,b) = (1,0)\,.$$

Це рівняння еквівалентне системі рівнянь

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & - & by & = & 1,\\ bx & + & ay & = & 0\end{array}\right.$$

та має єдиний розв'язок

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad y = -\frac{b}{a^2+b^2}\,.$$

Таким чином, множина комплексних чисел $\mathbb{C}$ утворює поле.

Поставимо у відповідність комплексному числу $(a, 0)$ дійсне число a. Тоді

$$(a,0) + (c,0) = (a+c,0) \text{ відповідає } a+c$$

та

$$(a,0)(c,0) = (ac,0) \text{ відповідає } ac.$$

Отже, відповідність між $(a, 0)$ і a зберігає арифметичні операції та не створює непорозуміння при заміні пари $(a, 0)$ дійсним числом a. У цьому сенсі множина комплексних чисел вигляду $(a, 0)$ ізоморфна множині дійсних чисел і надалі ми будемо утотожнювати їх. Тому ми можемо говорити, що пара $(0, 1)$ є коренем квадратним з -1, оскільки

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1\,.$$

Надалі $(0, 1)$ будемо позначати символом i. Зауважимо також, що

$$a \cdot (b,c) = (a,0) \cdot (b,c) = (ab, ac)\,,$$

отже, ми можемо записати будь-яке комплексне число у вигляді

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + ib\,.$$

Цю форму запису комплексного числа ми будемо надалі скрізь використовувати.

Повертаючись до питання квадратного кореня, відзначимо, що є фактично два комплексних квадратних корені з -1: i та $-i$. Більше того, є два квадратні корені з будь-якого комплексного числа $a + ib$. Щоб помітити це, розв'яжемо рівняння

$$(x + iy)^2 = a + ib\,,$$

еквівалентне системі рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b\,, \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} 4y^4 & + & 4ay^2 & - & b^2 & = & 0 \\ x & & & & & = & b/2y\,. \end{array} \right.$$

Розв'яжемо перше рівняння відносно y та визначимо два розв'язки:

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2}}, \quad x = \frac{b}{2y} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2}} \times (\operatorname{sign} b)\,,$$

де

$$\operatorname{sign} b = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{if } b > 0, \\ 0 & \text{if } b = 0, \\ -1 & \text{if } b < 0\,. \end{array} \right.$$

Приклад.

i. Корінь квадратний із $8i$ є $2+2i$ і $-2-2i$.

ii. Корінь квадратний з $5-24i$ є $4-3i$ і $-4+3i$.

Будь-яке квадратне рівняння з комплексними коефіцієнтами має розв'язок у полі комплексних чисел. Щоб довести це, зведемо рівняння

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0\,,$$

до вигляду

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,,$$

та одержимо два розв'язки:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \tag{1.1}$$

1.2 Комплексна площина

Поняття комплексного числа як пари дійсних чисел (a, b) тісно пов'язане з геометричною інтерпретацією поля комплексних чисел, яку дослідив Джон Валліс (1616–1703) та пізніше розвинули Франсуа Арганд (1750—1803) та Карл Гаусс. Кожному комплексному числу $a+bi$ можна поставити у відповідність точку (a, b) у декартовій площині. Числу 0 ставиться у відповідність початок координат. Таку площину називатимемо комплексною (z-площиною) і позначатимемо, як і поле комплексних чисел, через $\mathbb{C}$. Дійсні числа асоціюються з точками осі абсцис, яку називатимемо дійсною віссю. Чисто уявні числа bi відповідають точкам осі ординат, яку називатимемо уявною віссю.

Додавання та множення коплексних чисел можуть бути також введені шляхом геометричної інтерпретації. Сумі z_1 і z_2 відповідає векторна сума: якщо вектор із 0 до z_2 паралельно змістити таким чином, що його початок збігається з кінцем вектора з 0 до z_1, то в результаті одержимо точку $z_1 + z_2$. Це є так зване правило паралелограма.

Геометричний метод отримання добутку $z_1 z_2$ більш складний. Для комплексних чисел установлюються відношення $=$, $\neq$, але не відношення $<$ і $>$. Запис $z_1 > z_2$ означає «числа z_1 і z_2 – дійсні і z_1 більше, ніж z_2».

Із числом $z = a + bi$ пов'язані наступні такі:
$a = \mathrm{Re}z$, *a є дійсною частиною числа z*;

$b = \mathrm{Im} z$, b *є уявною частиною числа* z;
$\bar{z}$ *є спряжене до числа* z *є* $a - bi$.

Геометрично $\bar{z}$ є дзеркальним відображенням z відносно дійсної осі.

Комплексне спряження є інволюцією, що виражається рівністю

$$\bar{\bar{z}} = z\,.$$

Дійсна та уявна частини комплексного числа z алгебраїчно виражаються через $\bar{z}$ і z:

$$\mathrm{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,.$$

Фундаментальною властивістю спряження є те, що

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2\,.$$

Доведемо, наприклад, першу рівність. Нехай $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тоді

$$\begin{aligned} &\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)i = \\ &= a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\,. \end{aligned}$$

Оскільки частка z_1/z_2 є розв'язком рівняння $zz_2 = z_1$ і $\bar{z}\bar{z}_2 = \bar{z}_1$ (унаслідок другої рівності), то

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\,.$$

Крім того, якщо $R(z_1, z_2, \ldots)$ – раціональний вираз, складений з комплексних чисел $z_1, z_2, \ldots$, то

$$\overline{R\left(z_1, z_2, \ \ldots\right)} = R\left(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ \ldots\right).$$

Звідси випливає, що якщо ζ — корінь рівняння

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0\,,$$

то $\bar{\zeta}$ — корінь рівняння

$$\bar{c}_0 z^n + \bar{c}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{c}_{n-1} z + \bar{c}_n = 0\,.$$

Зокрема, якщо всі коефіцієнти дійсні, то ζ і $\bar{\zeta}$ є коренями одночасно.

Відзначимо також, що добуток $z\bar{z} = a^2 + b^2$ завжди невід'ємний. Його невід'ємний квадратний корінь називається *модулем*, або *абсолютною величиною* комплексного числа z, і позначається $|z|$. Зазначимо основні властивості модуля. З означення випливає, що $z\bar{z} = |z|^2$ і $|z| = |\bar{z}|$. Для добутку одержимо

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

і тому

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|\,.$$

Якщо $b \neq 0$, то для частки a/b, виконуючи очевидні перетворення:

$$b \cdot \frac{a}{b} = a \Rightarrow |b| \cdot \left|\frac{a}{b}\right| = |a|\,,$$

одержимо

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\,.$$

Відзначимо деякі нерівності, що постійно використовуються в комплексному аналізі. Для цього потрібно пам'ятати, що множина комплексних чисел не впорядкована. Тому всі нерівності повинні бути між дійсними числами. З означення модуля негайно випливають нерівності:

$$-|z| \leqslant \mathrm{Re} z \leqslant |z|, \quad -|z| \leqslant \mathrm{Im} z \leqslant |z|\,.$$

Рівність $\mathrm{Re} z = |z|$ має місце в тому і лише тому випадку, якщо z — дійсне число і $z \geqslant 0$, а рівність $\mathrm{Im} z = -iz$, якщо z — уявне число і $iz \leqslant 0$; $|z| = |x+iy|$ — абсолютне значення або модуль z дорівнює $\sqrt{x^2+y^2}$, тобто це є довжина вектора z. Зауважимо також, що $|z_1 - z_2|$ є евклідовою відстанню між z_1 і z_2. Тому ми можемо розуміти z_2 як відстань між $z_1 + z_2$ і z_1 і, таким чином, отримаємо доведення нерівності трикутника:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\,.$$

Наведемо також алгебраїчне доведення цієї нерівності:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \\
&\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2\,.
\end{aligned}$$

Із доведення зрозуміло, що рівність досягається лише в тому разі, якщо $z_1\bar{z}_2 \geqslant 0$.

Якщо для визначення точки $z = a + bi \neq 0$ на комплексній площині використати полярну систему координат (r, φ), то матимемо $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Це приводить до *тригонометричної форми* запису комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Водночас $r = |z|$, а полярний кут φ називається *аргументом* комплексного числа і позначається $\arg z$.

Розглянемо два комплексні числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Їх добуток записується у вигляді

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]\,.$$

Використовуючи теореми косинусів і синусів суми кутів, одержимо:

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Із цієї рівності випливає правило: *Аргумент добутку дорівнює сумі аргументів співмножників.*

У цьому правилі закладена деяка умовність, яка з часом все більше себе виявляє. По суті, в наших міркуваннях співвідношення $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ швидше виражає рівність кутів, ніж рівність чисел. Значення $\arg z$ визначається, взагалі кажучи, неоднозначно. До цього питання нам доведеться неодноразово повертатися. Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Тоді

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]\,.$$

Застосовуючи правило для добутку, одержимо: *при діленні комплексних чисел аргументи віднімаються.*

Відзначимо, що для нуля аргумент зовсім не визначений.

Симетричними відносно кола називають такі дві точки, які лежать на одному промені, що виходить з центра кола, а добуток відстаней від яких до центра кола дорівнює квадрату радіуса.

Неважко помітити, що z і $1/\overline{z}$ є точками, *симетричними* відносно одиничного кола з центром в початку координат.

Ефективність тригонометричного запису комплексних чисел особливо виявляється під час дослідження *біноміального рівняння* $z^n = a$. З правил множення одержимо для $z = \rho(\cos\theta + +i\sin\theta)$:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin\theta).$$

У разі $\rho = 1$ ця формула називається формулою *Муавра.* Таким чином, рівняння $z^n = a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ повністю еквівалентне рівностям:

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Це дозволяє всі корені рівняння $z^n = a$ записати такою формулою:

$$z = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

де $k = 0, 1, \dots, n-1$. Це — всі корені n-го степеня з числа $z \neq 0$. Вони мають один і той самий модуль, а їх аргументи рівномірно розподілені.

Зокрема, при $a = 1$ одержимо корені з одиниці:

$$1, w \dots, w^{n-1},$$

де

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

1.3 Аналітична геометрія

У класичній аналітичній геометрії геометричне місце точок виражається у вигляді співвідношень між x і y. Їх легко перевести в терміни z і $\overline{z}$. При цьому потрібно пам'ятати, що комплексне рівняння зазвичай еквівалентне двом дійсним, і при виділенні кривої вони повинні виражати одне й те саме.

Наприклад, рівняння кола $|z - a| = r$ в алгебраїчній формі може бути записане у вигляді $(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = r^2$. Те, що це рівняння інваріантне при комплексному спряженні, свідчить про факт вигляду дійсного рівняння.

Пряма в комплексній площині задається параметричним рівнянням $z = a + bt$, де a і $b \neq 0$ — комплексні числа, а параметр t пробігає всі дійсні числа. Два рівняння $z = a + bt$ і $z = a' + b't$ задають одну й ту саму пряму в тому і лише в тому випадку, коли $a' - a$ і b' відрізняються від b лише дійсними множниками. Напрям прямої можна ідентифікувати з $\arg b$. Кут між прямими $z = a+bt$ і $z = a'+b't$ виражається числом $\arg b'/b$ (він залежить від порядку переліку прямих). Ортогональність прямих еквівалентна тому, що b'/b — чисто уявне.

Нерівність $|z - a| < r$ описує внутрішність круга. Аналогічно, пряма $z = a + bt$ визначає праву півплощину нерівністю $\operatorname{Im}\{z - a)/b\} < 0$ і ліву півплощину — нерівністю $\operatorname{Im}\{(z - a)/b\} > 0$.

1.4 Стереографічна проекція

У дійсному аналізі при визначенні таких понять, як верхня і нижня границі числової послідовності, дійсна вісь $\mathbb{R}$ розширюється додаванням двох ідеальних елементів плюс нескінченність і мінус нескінченність. У комплексному аналізі виявляється природним введення одного ідеального елемента – нескінченність. Корисність такого розширення комплексної площини можна побачити, наприклад, під час аналізу нулів і полюсів раціональної функції, а також при вивченні властивостей дробово-лінійних перетворень.

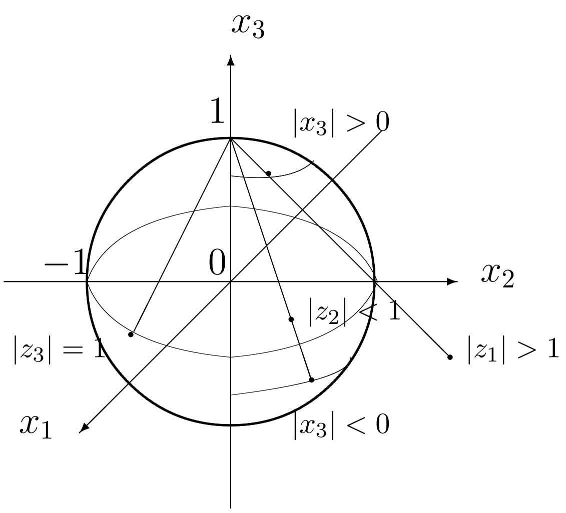
Таким чином, з різних причин корисне розширення системи $\mathbb{C}$ комплексних чисел введенням *нескінченно віддаленої точки* ∞. Відзначимо, що точка $z = \infty$ — це ідеальний елемент. На відміну від скінченних точок $z \neq \infty$ нескінченно віддалена точка не бере участі в алгебраїчних діях. Її зв'язок із скінченними числами виражається співвідношеннями $a + \infty = \infty + a = \infty$ для скінченних a і $b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$ для всіх $b \neq 0$, включаючи $b = \infty$. Проте неможливо визначити $\infty + \infty$ і $0 \cdot \infty$ без втрати правил арифметики. Спеціально виділяють випадки $a/0 = \infty$ для $a \neq 0$ і $b/\infty = 0$ для $b \neq \infty$. Компактифіковану площину комплексних чисел (тобто площину $\mathbb{C}$, доповнену нескінченно віддаленою точкою) ми називатимемо *замкненою площиною* і позначимо $\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. Якщо потрібно підкреслити відмінність, ми називатимемо $\mathbb{C}$ *відкритою площиною.*

Наочним доповнення площини $\mathbb{C}$ до $\overline{\mathbb{C}}$ стає при стереографічній проекції. Для цього розглянемо сферу S, що в тривимірному просторі задається рівнянням $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Із кожною точкою w на сфері S, виключаючи точку (0;0;1), можна асоціювати комплексне число

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Таким чином, кожній точці $z \in \mathbb{C}$ відповідає точка перетину із S променя, що виходить з північного полюса сфери $(0, 0, 1)$ і проходить через точку z. Це — взаємно-однозначна відповідність.



Дійсно,
$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} = \frac{1+x_3}{1-x_3}$$
і, отже,
$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$
Подальші обчислення приводять до
$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \qquad x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(1 + |z|^2)}.$$

Це відображення доповнюється відповідністю $(0,0,1) \leftrightarrow \infty$. Зауважимо, що півсфера $x_3 < 0$ відповідає кругу $|z| < 1$, півсфера $x_3 > 0$ — зовнішності $|z| > 1$, коло $x_3 = 0$ відповідає одиничному колу $|z| = 1$.

Геометрично очевидно, що стереографічна проекція перетворює кожне коло на сфері на коло або пряму в z-площині. Для доведення цього зауважимо, що коло на сфері лежить у площині $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_0$, де можна вважати $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ і $0 \leqslant \alpha_0 < 1$. У термінах z і $\overline{z}$ це рівняння має вигляд
$$\alpha_1(z + \overline{z}) - \alpha_2 i(z - \overline{z}) + \alpha_3(|z|^2 - 1) = \alpha_0(|z|^2 + 1),$$
або, якщо $z = x + iy$, вигляд
$$(\alpha_0 - \alpha_3)(x^2 + y^2) - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y + \alpha_0 + \alpha_3 = 0\,.$$
При $\alpha_0 \neq \alpha_3$ це рівняння задає коло, а при $\alpha_0 = \alpha_3$ — пряму.

1.5 Сферична метрика

Можна в комплексній площині ввести відстань $d\,(z, z')$, яка виражала б евклідову відстань між їх образами на сфері Рімана. Якщо (x_1, x_2, x_3) і (x_1', x_2', x_3') — відповідні точки на сфері S, то
$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 = 2 - 2(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3').$$
Із формул, що зв'язують точки площини і точки сфери, одержимо
$$x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' =$$
$$= \frac{(z + \overline{z})(z' + \overline{z'}) - (z - \overline{z})(z' - \overline{z'}) + (|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1)}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} =$$

$$= \frac{(1+|z|^2)(1+|z'|^2) - 2|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}.$$

Отже,

$$d\,(z,z') = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}.$$

При $z' = \infty$ формула набирає вигляду

$$d(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Вправи

1 Обчисліть значення $(1+i)^n + (1-i)^n$.

2 Якщо $z = x + iy$, знайдіть дійсні і уявні частини виразів:

$$z^4, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{1}{z^2}.$$

3 Покажіть, що

$$\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1.$$

4 Доведіть тотожність:

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

5 Знайдіть абсолютні величини чисел

$$-2i(3+i)(2+4i)(1+i), \qquad \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}.$$

6 Доведіть, що

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1,$$

якщо $|a| = 1$ або $|b| = 1$.

7 Знайдіть умови, за яких у нерівності Коші досягається рівність.

8 Доведіть, що

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1,$$

якщо $|a| < 1$ і $|b| < 1$.

9 Знайдіть точки, симетричні до a відносно бісектрис кутів утворених координатними осями.

10 Доведіть, що точки a_1, a_2, a_3 є вершинами рівностороннього трикутника тоді і лише тоді, коли $a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$.

11 Припустимо, що a і b — дві вершини квадрата. Знайдіть дві інші вершини в усіх можливих варіантах.

12 Спростіть вирази $1 + \cos\varphi + \ldots + \cos n\varphi$ і $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

13 Знайдіть центр і радіус кола, що проходить через точки a_1, a_2, a_3.

14 Запишіть рівняння еліпса, гіперболи і параболи в комплексній формі.

15 Доведіть, що всі кола, які проходять через a і $1/\overline{a}$, перетинають коло $|z| = 1$ під прямим кутом.

Розділ 2

Функції комплексної змінної

2.1 Границя функції

Теорія функцій комплексної змінної поширює основні поняття математичного аналізу функцій дійсного змінного на комплексну область. При цьому диференціювання та інтегрування набувають деякого нового значення. Крім того, сфера застосування їх істотно звужується і приводить до класу аналітичних або голоморфних функцій.

В основному ми будемо дотримуватися традиційного розуміння функції як відображення однієї множини комплексних чисел на іншу. У такому розумінні функція повинна бути однозначною, хоча глибше проникнення в природу аналітичних функцій змушує нас відступити від однозначності.

Означення 2.1 *Нехай $a \neq \infty$, $A \neq \infty$. Говорять, що функція $f(z)$ має границю A за $z \to a$ і записують так:*

$$\lim_{z \to a} f(z) = A, \tag{2.1}$$

якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(z) - A| < \varepsilon \quad \textit{якщо} \quad 0 < |z - a| < \delta.$$

Формулювання легко видозмінюється для випадку, коли $a = \infty$ або $A = \infty$ (або обидва разом). Наприклад, за $a = \infty$, $A \neq \infty$, потрібно писати

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0 : |f(z) - A| < \varepsilon \quad \text{за} \quad |z| > R\,.$$

Якщо $a \neq \infty$, $A = \infty$, то потрібно писати

$$\forall R > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(z)| > R \quad \text{за} \quad 0 < |z - a| < \delta\,.$$

А якщо $a = \infty$ і $A = \infty$, то

$$\forall R > 0 \quad \exists R_1 > 0 : |f(z)| > R \quad \text{за} \quad |z| > R_1 \, .$$

Добре відомі з дійсного аналізу результати, що стосуються границі суми, добутку і частки, залишаються правильними і в комплексному аналізі. Дійсно, їх доведення грунтуються лише на властивостях модуля:

$$|ab| = |a|\,|b| \qquad \text{і} \qquad |a + b| \leqslant |a| + |b| \, .$$

Відзначимо також, що умова (2.1) еквівалентна

$$\lim_{z \to a} \overline{f(z)} = \overline{A} \, . \tag{2.2}$$

Якщо $A \neq \infty$, то з (2.1) і (2.2) випливають також співвідношення:

$$\lim_{z \to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} A, \quad \lim_{z \to a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} A \, .$$

Навпаки, якщо виконані останні співвідношення, то виконуються і (2.1), (2.2).

Якщо припустити, що $A \neq 0$, і вибрати належним чином значення $\arg f$, то (2.1) можна переписати в полярних координатах:

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = |A|, \quad \lim_{z \to a} \arg f(z) = \arg A \, .$$

Означення 2.2 *Функція $f(z)$ називається неперервною в точці $a \in \overline{\mathbb{C}}$, якщо*

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a) \, ;$$

якщо $f(a) \neq \infty$, говоритимемо про неперервність у сенсі $\mathbb{C}$;
якщо $f(a) = \infty$ – про неперервність в сенсі $\overline{\mathbb{C}}$ (або узагальненій неперервності).

Термін «*неперервна функція*» будемо застосовувати у випадку, якщо f неперервна в усіх точках, де вона визначена.

Сума $f(z) + g(z)$ та добуток $f(z)g(z)$ двох неперервних функцій є неперервними; частка $f(z)/g(z)$ визначена і неперервна в точці a, якщо $g(a) \neq 0$. Крім того, якщо $f(z)$ неперервна, то такими є $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ і $|f(z)|$.

2.2 Аналітичні функції

Похідна функції визначається як границя відношення приростів залежної та незалежної змінних. Таким чином, за формою комплексне диференціювання цілком аналогічне дійсному:

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} .$$

Це означення і збіг правил арифметики комплексних і дійсних чисел показують, що звичайні правила диференціювання суми, добутку та частки виконуються і в комплексному випадку. Виконується також правило диференціювання складеної функції.

Однак на відміну від поняття неперервності, що зводиться просто до неперервності дійсної та уявної частин, умова диференційовності приводить до абсолютно несподіваних властивостей функції.

Теорема 2.1 *Для диференційовності функції*

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

у точці z у комплексному сенсі необхідно і достатньо, щоб вона була диференційовна в дійсному сенсі (тобто диференційовні функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$) і виконувалися співвідношення:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{2.3}$$

Доведення. Дійсна диференційовність функції f у точці $z = x + iy$ означає зображення приростів:

$$u(x + \xi, y + \eta) - u(x, y) = u'_x \xi + u'_y \eta + o(|\zeta|),$$

$$v(x + \xi, y + \eta) - v(x, y) = v'_x \xi + v'_y \eta + o(|\zeta|),$$

де $\zeta = \xi + i\eta$.

З іншого боку, комплексна диференційовність функції f у точці z еквівалентна зображенню

$$f(z + \zeta) - f(z) = f'(z)\zeta + o(|\zeta|).$$

Відокремлюючи в цій рівності дійсну та уявну частини, одержимо ($f'(z) = \alpha + i\beta$):

$$u(x + \xi, y + \eta) - u(x, y) = \alpha\xi - \beta\eta + (|\zeta|),$$
$$v(x + \xi, y + \eta) - v(x, y) = \alpha\eta + \beta\xi + (|\zeta|).$$

Внаслідок єдиності диференціала для дійснозначних функцій u і v одержимо

$$u'_x = \alpha, \quad u'_y = -\beta, \quad v'_x = \beta, \quad v'_y = \alpha,$$

що еквівалентно (2.3).

Таким чином, із комплексної диференційовності випливає дійсна диференційовність і виконання умов (2.3).

Навпаки, якщо f диференційовна в дійсному сенсі і задовольняє рівність (2.3), то, очевидно, має місце її комплексна диференційовність. $\square$

Відзначимо, що з доведення теореми випливає рівність

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Насправді, ми можемо записати чотири різні вирази $f'(z)$. Наведені дві рівності дають комплексний запис рівнянь (2.3):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}\,. \tag{2.4}$$

Означення 2.3 *Функцію f, визначену на відкритій множині D, будемо називати аналітичною, або голоморфною, у D, якщо вона диференційовна в комплексному сенсі в кожній точці D.*

Будемо говорити, що f аналітична на довільній множині $E \subset \mathbb{C}$, якщо вона аналітична в деякій відкритій множині D, що містить E.

Нарешті, функція f називається аналітичною в ∞, якщо функція $g(z) = f(1/z)$ аналітична в точці $z = 0$.

Система рівнянь (2.3), яку задовольняють дійсна та уявна частини голоморфної функції, називається *системою рівнянь Коші — Рімана* і має ряд цікавих властивостей. Зокрема, якщо припустити, що функції u і v є двічі неперервно диференційовними, то з (2.3) випливає

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0\,,$$

тобто u — *гармонійна* функція. Аналогічно перевіряється гармонійність функції v.

Відзначимо ще одну важливу рівність, що випливає з системи (2.3):

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Ця рівність показує, що $|f'(z)|^2$ є якобіаном відображення $(x, y) \to (u, v)$.

Відзначимо ще одне формальне зображення умов (2.3) або (2.4), яке проливає деяким чином світло на природу аналітичних функцій. Відразу ж зауважимо, що це зображення має лише формальне, а не доказове значення.

Скористаємося інваріантністю форми першого диференціала і формальною заміною dx, dy на dz, $d\overline{z}$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\overline{z}) = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\overline{z}\,.$$

Цей запис спонукає ввести формальні диференціальні оператори: $\partial/\partial z$ і $\partial/\partial\overline{z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Із (2.4) бачимо, що рівняння Коші — Рімана можна записати у вигляді

$$\partial f/\partial\overline{z} = 0\,.$$

Це приводить до висновку, що аналітична функція не залежить від $\overline{z}$, а є лише функцією від z.

Уточнимо поняття функція від z, в якому z — комплексна змінна. Комплексна змінна може розглядатися як пара дійсних змінних, тоді функція від z буде функцією двох дійсних змінних. Є функції, які є прямо функціями від $z = x + iy$, а не просто функціями від x і y.

Розглянемо, наприклад, функцію $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy$. Ця функція прямо залежить від $x + iy$ оскільки $x^2 - y^2 + 2ixy == (x + iy)^2$; це є квадратична функція. З іншого боку, функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ixy$ не виражається як поліном від $x + iy$. Таким чином, ми виділимо клас функцій прямо або явно залежних від $x + iy$.

Теорема 2.2 *Нехай f — аналітична в крузі $|z - a| < r$ функція і $f'(z) \equiv 0$. Тоді $f(z) \equiv const$.*

Доведення. Якщо $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то внаслідок зробленого припущення $u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$. Застосовуючи одновимірну теорему, одержимо постійність u та v на всіх горизонтальних і вертикальних прямих. Звідси і з того, що кожні дві точки круга можна з'єднати ламаною з вертикальними та горизонтальними ланками, випливає твердження теореми. □

2.3 Раціональні функції

Виділимо деякі прості аналітичні функції. Кожна константа є аналітичною в $\mathbb{C}$ функцією з похідною, що дорівнює нулю. Оскільки сума і добуток двох аналітичних функцій — це знову аналітична функція, то поліном

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

є аналітичною в $\mathbb{C}$ функцією. Якщо $a_n \neq 0$, то число n називається *степенем* полінома P. При цьому його похідна

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$$

є поліномом степеня $n-1$. Нульову константу можна розглядати як поліном. Проте з багатьох причин її доводиться виключати з алгебри поліномів.

При $n > 0$ рівняння $P(z) = 0$ за основною теоремою алгебри має, щонайменше, один корінь α_1. Тоді $P(z) = (z - \alpha_1)P_1(z)$, де P_1 — поліном степеня $n - 1$. Повторення цього процесу приводить до зображення

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1) \times \cdots \times (z - \alpha_n)\,, \tag{2.5}$$

де корені $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не обов'язково різні. З розкладання $P(z)$ на множники і відсутності дільників нуля в полі комплексних чисел випливає, що $P(z)$ не може перетворюватися на нуль в жодній точці, відмінній від $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Більше того, наведена факторизація єдина з точністю до порядку множників.

Якщо α_j повторюється в зображенні (2.5) k_j раз, то k_j називається *порядком нуля* α_j полінома $P(z)$. Таким чином, рахуючи кожен нуль стільки разів, з урахуванням кратності можна заначити, що поліном степеня n має рівно n коренів.

Порядок нуля можна виразити в термінах похідних. Дійсно, якщо α — нуль k-го порядку полінома $P(z)$, то $P(z) = (z - \alpha)^k P_k(z)$, де P_k — поліном степеня $n - k$ і $P_k(\alpha) \neq 0$. Послідовне диференціювання показує, що

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0\,,$$

тоді як $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Іншими словами, порядок нуля дорівнює порядку першої відмінної від нуля похідної в цій точці. Нуль першого порядку називається *простим* нулем і характеризується такими умовами: $P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) \neq 0$.

Наступний крок щодо розширення класу аналітичних функцій приводить до розгляду раціональних функцій

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

що є відношенням двох поліномів. Припускатимемо, що $P(z)$ і $Q(z)$ не мають спільних множників, а отже, і нулів. Крім того, розглядаючи $R(z)$ як функцію із значеннями з розширеної комплексної площини, можна вважати її неперервною. Нулі $Q\,(z)$ називаються *полюсами* функції $R(z)$ і їм приписують той самий порядок. Похідна

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - Q'(z)P(z)}{(Q(z))^2}$$

існує в усіх точках z, де $Q(z) \neq 0$. Проте вона визначена як раціональна функція з тими самими полюсами, що $R(z)$. Порядок кожного полюса функції $R'(z)$ зростає на одиницю порівняно з функцією $R(z)$.

Більша єдність досягається, коли дозволяють z пробігати всю розширену комплексну площину $\overline{\mathbb{C}}$ ($R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ є неперервною у сферичній метриці). Отже $R(\infty)$ можна визначити граничним переходом. Проте це не дає можливості визначити порядок нуля або полюса в ∞. Тому доцільніше розглянути функцію $R_1(z) = R(1/z)$, яка також є раціональною функцією, і припустити, що

$$R(\infty) = R_1(0)\,.$$

Якщо $R_1(0) = 0$ або ∞, то порядок нуля або полюса в ∞ визначається як відповідний порядок нуля або полюса функції $R_1(z)$ у точці $z = 0$. Якщо

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}\,,$$

то

$$R_1(z) = z^{m-n} \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}\,,$$

де z^{m-n} залежно від знаку $m-n$ потрапляє в чисельник або знаменник дробу. Якщо $m > n$, то $R(z)$ має нуль порядку $m-n$ у ∞, а якщо $m < n$, тоді полюс порядку $n - m$. У разі $m = n$ маємо $R(\infty) = a_n/b_n$.

Можна тепер підрахувати загальну кількість нулів і полюсів раціональної функції в розширеній площині. При зроблених припущеннях відносно нескінченно віддаленої точки загальне число нулів дорівнює найбільшому з чисел m та n та загальному числу полюсів. Це загальне число для нулів і полюсів називається *порядком* раціональної функції.

Якщо a — довільна константа, то раціональна функція $R(z) - a$ має таку саму загальну кількість полюсів (вони просто збігаються), що і $R(z)$. Таким чином, їх порядки збігаються. Проте нулі функції $R(z) - a$ є коренями рівняння $R(z) = a$, і ми одержимо такий результат.

Теорема 2.3 *Раціональна функція $R(z)$ порядку k має k нулів і k полюсів. Крім того, кожне рівняння $R(z) = a$ має в точності k коренів.*

Приклад. Раціональна функція $R(z) = \dfrac{z^2+2z-3}{z-2}$ має порядок $k=2$. Вона має $k=2$ нулів: $z_1 = 1$, $z_2 = -3$ і $k=2$ полюсів: $z_3 = 2$, $z_4 = \infty$. Крім того, кожне рівняння $R(z) = a$ має в точності $k = 2$ коренів, що є коренями рівняння $z^2 + (2-a)z + (2a-3) = 0$.

2.4 Степеневі ряди

Послідовністю комплексних чисел називається функція $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Образ $n \in \mathbb{N}$ позначимо через z_n, а саму послідовність — через $\{z_n\}$. Поняття границі послідовності, як і границі функції, в комплексному аналізі вводиться за допомогою модуля абсолютно аналогічно дійсному випадку.

Число $a \in \mathbb{C}$ називається границею послідовності $\{z_n\}$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\{|z_n - a| < \varepsilon\},$$

і це записується так:

$$a = \lim_{n\to\infty} z_n, \quad \text{або} \quad z_n \to a \, (n \to \infty)\,. \tag{2.6}$$

Послідовність, що має границю, називається збіжною. Якщо позначити $z_n = x_n + iy_n$, то комплексній послідовності $\{z_n\}$ будуть відповідати дві дійсні послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$.

Теорема 2.4 *Для того щоб послідовность $\{z_n\}$ збігалася до $a = a_1 + ia_2$, необхідно й достатньо, щоб послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збігалися до a_1та a_2 відповідно.*

Доведення. Справедливість цієї теореми випливає з нерівностей

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - a_1| \\ |y_n - a_2| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - a| \leqslant |x_n - a_1| + |y_n - a_2|\,. \tag{2.7}$$

Справді, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $|z_n - a| \to 0 \ (n \to \infty)$, і, отже, згідно з лівою частиною (2.7) $|x_n - a_1| \to 0 \, (n \to \infty)$ і $|y_n - a_2| \to 0 \, (n \to \infty)$. Подібно, використовуючи праву частину (2.7), доводимо достатність.

У випадку $a \neq 0, \neq \infty$ можна вважати, що $z_n \neq 0, \neq \infty$, і позначити $a = re^{i\varphi}$, $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$; тоді (2.6) має місце тоді й лише тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi\,,$$

причому друга рівність має місце за належного вибору значень φ_n (якщо значення φ_n вибирати довільно, то $\{\varphi_n\}$ може і не збігатися при збіжності $\{z_n\}$).

Під час дослідження питання збіжності також важливу роль відіграє поняття фундаментальної послідовності і має місце критерій Коші. Абсолютно аналогічно дійсному випадку будується теорія абсолютно збіжних рядів з комплексними членами. Що стосується умовно збіжних рядів, то в комплексному випадку ця теорія ширша, але ми не маємо можливості на її детальне обговорення. Деякі особливості умовно збіжних рядів із комплексними членами відображені у вправах.

Абсолютно без змін формулюється поняття рівномірної збіжності функціональних послідовностей і рядів. При цьому границя рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій є неперервною функцією, і якщо функціональний ряд мажорується абсолютно збіжним числовим рядом, то він рівномірно збігається (ознака Вейєрштрасса).

Під *степеневим рядом* розуміють функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \ldots , \tag{2.8}$$

де a_n — комплексні числа, які називаються коефіцієнтами ряду, а z — комплексна змінна. Можна розглянути більш загальний вигляд степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, але при його вивченні не виникає істотних особливостей. Він відразу ж набирає вигляду (2.8) після заміни змінної $\zeta = (z - z_0)$.

Майже тривіальний, але важливий приклад степеневого ряду являє собою так званий *геометричний* ряд $1 + z + z^2 + \ldots$. Його часткові суми можна записати у вигляді

$$1 + z + \ldots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} .$$

Оскільки $z^n \to 0$ при $|z| < 1$ і $|z^n| \geqslant 1$ при $|z| \geqslant 1$, то геометричний ряд збігається до $1/(1-z)$ при $|z| < 1$ і розбігається при $|z| \geqslant 1$. Виявляється, що ситуація з геометричним рядом є типовою. Насправді, для кожного степеневого ряду існує свій круг збіжності.

Теорема 2.5 (Абеля — Коші — Адамара). *Для кожного степеневого ряду* (2.8) *число*

$$R = 1/\left(\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right) , \tag{2.9}$$

що називається радіусом збіжності, задовольняє такі умови:

(i) *У кожному крузі* $|z| \leqslant \rho < R$ *ряд* (2.8) *збігається абсолютно й рівномірно.*

(ii) *Якщо* $|z| > R$, *то ряд* (2.8) *розбіжний.*

(iii) *Сума ряду є аналітичною в крузі* $|z| < R$ *функцією і її похідна є сумою почленно продиференційованого ряду* (2.8).

Доведення. Нехай $\rho < R$. Виберемо $\rho' \in (\rho, R)$. Оскільки

$$\frac{1'}{\rho} > \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,,$$

то знайдеться такий номер N, що $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho'$ за всіх $n \geqslant N$. Отже, для всіх z із круга $|z| \leqslant \rho$

$$|a_n z^n| = |a_n| \cdot |z^n| \leqslant \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n,$$

при $n \geqslant N$. Це означає, що в крузі $|z| \leqslant \rho$ ряд (2.8) мажорується геометричною прогресією. Оскільки $\rho/\rho' < 1$, то мажорантний ряд збігається і (i) доведено.

Для доведення (ii) відзначимо, що якщо $|z| > R$, то можна вибрати ρ таке, що $|z| > \rho > R$ і внаслідок

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} > \frac{1}{\rho}$$

знайдеться нескінченне число індексів n, для яких $\sqrt[n]{|a_n|} > 1/\rho$. Але тоді для цих індексів

$$|a_n z^n| > \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n.$$

Це означає, що необхідна умова збіжності ряду $\sum a_n z^n$ (збіжність до нуля загального члена) не виконується, і він розбіжний.

Розпочинаючи доведення (iii), відзначимо, що почленно продиференційований ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ має той самий радіус збіжності, що й даний ряд (2.8). Це випливає з формули (2.9) та умови $\sqrt[n]{n} \to 1$ за $n \to \infty$. Позначимо

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\,.$$

Тоді $f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$ і $g(z) = \lim_{n\to\infty} S_n'(z)$, оскільки $S_n'(z)$ — часткові суми ряду $g(z)$.

Зафіксуємо тепер довільно z_0, $|z_0| < R$, і виберемо $\rho > 0$ з умови $|z_0| < \rho < R$. Тоді для будь-якого $z \neq z_0$ з круга $|z| \leqslant \rho$ матимемо

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)\right| &\leqslant \left|\frac{S_N(z)-S_N(z_0)}{z-z_0} - S_N'(z_0)\right| + \\
+|S_N'(z_0) - g(z_0)| &+ \left|\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z^n - z_0^n)\right| = \\
&= \left|\frac{S_N(z)-S_N(z_0)}{z-z_0} - S_N'(z_0)\right| + \\
+|S_n'(z_0) - g(z_0)| &+ \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1})\right| \leqslant \\
\leqslant \left|\frac{S_N(z)-S_N(z_0)}{z-z_0} - S_N'(z_0)\right| &+ |S_N'(z_0) - g(z_0)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо N так, щоб

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1} < \varepsilon/3$$

і $|S_N'(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon/3$. Існування такого N випливає зі збіжності ряду

$$\sum n|a_n|\rho^{n-1}$$

та умови $S_n'(z_0) \to g(z_0)$ за $n \to \infty$. Потім внаслідок аналітичності S_N як полінома можна вибрати δ, $0 < \delta < \rho - |z_0|$, так, щоб виконувалася нерівність

$$\left|\frac{S_N(z)-S_N(z_0)}{z-z_0} - S_N'(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при $0 < |z - z_0| < \delta$. Але тоді за цих z матимемо

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Відзначимо, що формула (2.9) називається формулою *Коші — Адамара*. З доведення бачимо, що допускаються випадки $R = 0$ і ∞.

2.5 Експонента і тригонометричні функції

Одна з причин введення експоненціальної функції пов'язана з розв'язуванням диференціального рівняння $f'(z) = f(z)$ із початковою умовою $f(0) = 1$.

Припускаючи, що

$$f(z) = \sum a_n z^n, \qquad f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}\,,$$

ми одержуємо такі співвідношення для коефіцієнтів: $a_{n-1} = n a_n$ і $a_0 = 1$. Індуктивне міркування приводить до рівності $a_n = 1/n!$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким чином, розв'язок повинен визначатися степеневим рядом

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Із формули Коші — Адамара та граничного співвідношення $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ за $n \to \infty$ випливає збіжність цього ряду в усій комплексній площині.

Відзначимо деякі властивості експоненти. З диференціального рівняння, що визначає її, випливає так звана *теорема додавання*:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Дійсно, для будь-якого фіксованого $a \in \mathbb{C}$ маємо

$$(e^z \cdot e^{a-z})' = e^z \cdot e^{a-z} - e^z \cdot e^{a-z} = 0\,,$$

і, отже $e^z \cdot e^{a-z} \equiv e^a$ (значення при $z = 0$). Припустивши, що в цій тотожності $a = z_1 + z_2$ і $z = z_1$, одержимо рівність теореми додавання. Застосування теореми додавання, зокрема, дає $e^z \cdot e^{-z} \equiv 1$, звідси випливає, що $e^z \neq 0$ ні за якого $z \in \mathbb{C}$. Далі, з виду степеневого ряду бачимо, що $e^x > 1$ за $x > 0$, а з рівності $e^x e^{-x} = 1$ одержуємо $0 < e^x < 1$ за $x < 0$. Нарешті, внаслідок дійсності коефіцієнтів розкладання має місце рівність

$$e^{\overline{z}} = \overline{e^z}\,.$$

Отже, для будь-якого $y \in \mathbb{R}$ маємо $|e^{iy}|^2 = e^{iy} e^{-iy} = 1$ і

$$|e^{x+iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x.$$

Однією з переваг комплексного аналізу є те, що в ньому найбільш повно розкриваються зв'язки між елементарними функціями. Відзначимо, що степеневий ряд експоненти можна розглядати як продовження в комплексну площину її дійсного ряду. У зв'язку з цим виправдане введення тригонометричних функцій за допомогою рівностей:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,.$$

При цьому

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\,.$$

Для дійсних z одержимо ряди Тейлора відповідних функцій дійсної змінної. Безпосередньо з визначення косинуса і синуса випливає *формула Ейлера*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,,$$

а також основна тригонометрична тотожність:

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1\,.$$

Використовуючи теорему додавання для експоненти, легко виводяться формули:

$$\cos(a + b) = \cos\,\cos b - \sin\,\sin b\,,$$

$$\sin(a + b) = \cos\,\sin b + \sin\,\cos b\,.$$

Із вигляду розвинень $\sin z$ та $\cos z$ (або просто з означення і формули $(e^z)' = e^z$) випливають формули диференціювання:

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z\,.$$

Звичайним способом через $\sin z$ і $\cos z$ визначають інші тригонометричні функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\sec z$ і $\operatorname{cosec} z$, а також гіперболічні функції $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$. Відзначимо лише, що всі вони є раціональними функціями від e^{iz}.

Періодичність. Говорять, що функція f має період c, якщо $f(z+c) = f(z)$ за всіх $z \in \mathbb{C}$. Умова на c бути періодом експоненти виражається рівністю

$$e^{z+c} = e^z \Rightarrow e^c = 1\,.$$

Вважаючи $c = \alpha + i\beta$, одержуємо $\alpha = 0$ і $\cos\beta + i\sin\beta = 1$, звідси $\beta = 2k\pi$, де k — ціле. Таким чином, періоди функції e^z визначаються рівністю

$$c = i2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

З алгебраїчної точки зору експонента встановлює гомоморфізм, що діє з адитивної групи комплексних чисел у мультиплікативну. Зокрема, $w = e^{iy}$ — гомоморфізм між адитивною групою дійсних чисел і мультиплікативною групою комплексних чисел з абсолютною величиною, що дорівнює 1.

Разом з експонентою потрібно вивчити обернену до неї функцію — *логарифм.* Оскільки e^z не перетворюється на нуль, то рівняння $w = e^z$ (його розв'язок — $z = \ln w$) не має розв'язку за $w = 0$. Іншими словами, логарифм нуля не існує. За $w \neq 0$ рівняння $e^{x+iy} = w$ еквівалентне системі

$$e^x = |w|, \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}\,.$$

Перше рівняння має єдиний розв'язок:

$$x = \ln|w|\,,$$

де справа — *дійсний логарифм* додатного числа. Друге рівняння має нескінченно багато розв'язків, що відрізняються один від одного на число, кратне $2\pi i$. Таким чином, *кожне комплексне число, відмінне від нуля, має нескінченно багато логарифмів, що відрізняються один від одного на доданок, кратний* 2π. Уявна частина $\ln w$ називається *аргументом* числа w і позначається $\arg w$. Геометрично він виражає кут між додатним напрямом дійсної осі та променем $(0, w)$. Згідно з цим означенням аргумент має нескінченно багато значень, і

$$\ln w = \ln|w| + i\arg w\,.$$

Якщо позначити $|z| = r$ і $\arg z = \theta$, то одержимо дуже поширений запис комплексного числа:

$$z = re^{i\theta}\,.$$

Із теореми додавання для експоненціальної функції випливає також, що

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \pmod{2\pi i}\,,$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}\,.$$

Використовуючи логарифм, можна ввести поняття *комплексного степеня*:

$$a^b = \exp(b\,\ln a)\,,$$

якщо $a \neq 0$. Як і логарифм, a^b має, взагалі кажучи, нескінченно багато значень, що відрізняються множниками $e^{2\pi inb}$.

Розглянемо тепер область $D = \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}^- \cup 0\}$. Фіксуючи для кожної точки $z \in D$ одне значення $\ln z$, ми одержуємо однозначну функцію, що називається *віткою* логарифма. Серед віток виділяють *головну вітку*, яка визначається умовою $|\operatorname{Im} \ln z| < \pi$. Будемо її позначати $w = \ln z$. Неважко помітити, що так визначена функція $\ln z$ буде неперервною в D. Отже, $\Delta w \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Тому

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{w \to 0} \frac{1}{\Delta z / \Delta w} = \frac{1}{dz/dw} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}\,.$$

Тобто $\ln z$ є в D *аналітичною* функцією і

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

Будь-яка інша неперервна вітка $\ln z$ у D відрізняється адитивною константою $2\pi i n$ і має ту саму похідну: $1/z$.

В одиничному крузі вітку функції $-\ln(1-z)$, перетворювану на нуль за $z = 0$, можна подати у вигляді суми степеневого ряду

$$S(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\,.$$

Дійсно, цей ряд збігається в одиничному круз, і, отже $S(z)$ є аналітичною в одиничному крузі функцією. Крім того, $S(0) \;=\; 0$, і

$$\frac{d}{dz}\left(S(z) \;+\; \ln(1-z)\right) \;\equiv\; 0.$$

Таким чином $S(z) \;\equiv\; -\ln(1-z)$.

Аналогічно виділяються однозначні вітки показникової функції:

$$a^z, \quad a \neq 0\,.$$

Вправи

1 Покажіть, що нестала аналітична функція в крузі $|z-a| < r$ не може мати тотожно сталу абсолютну величину.

2 Покажіть, що гармонічна функція $u(x,y)$ задовольняє диференціальне рівняння з формальними похідними

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

3 Доведіть, що функції $f(z)$ і $\overline{f(\overline{z})}$ є одночасно аналітичними.

4 Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = A.$$

5 Доведіть, що ряд із комплексних членів, кожна частина якого збігається повинен збігатися абсолютно.

6 Доведіть, що якщо ряд $\sum |a_n|$ розбіжний, то існує принаймні один *напрям скупчення* α, що має таку властивість: яким би не було $\varepsilon > 0$, ряд абсолютних величин тих членів ряду $\sum a_n$, розміщених у куті $\alpha - \varepsilon < \arg z < \alpha + \varepsilon$, є розбіжним.

7 Визначте радіуси збіжності таких степеневих рядів:

$$\sum n^p z^n, \quad \sum q^{n^2} z^n \quad (|q| < 1), \quad \sum z^{n!}.$$

8 Якщо ряд $\sum a_n z^n$ має радіус збіжності R, то які радіуси збіжності рядів $\sum a_n z^{2n}$ і $\sum a_n^2 z^n$?

9 Якщо $f(z) = \sum a_n z^n$, то як можна охарактеризувати ряд $\sum n^3 a_n z^n$?

10 Для яких z збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n ?$$

11 Якщо числа $z_1, z_2, \ldots$ лежать у куті

$$-\alpha \leqslant \arg z \leqslant \alpha, \quad \alpha < \pi/2\,,$$

то ряди

$$z_1 + z_2 + \cdots \quad \text{і} \quad |z_1| + |z_2| + \cdots$$

обидва збіжні, чи обидва розбіжні?

12 Нехай числа $z_1, z_2, \ldots$ лежать у півплощині $\mathrm{Re} z \geqslant 0$. Якщо збігаються обидва ряди

$$z_1 + z_2 + \ldots \quad \text{і} \quad z_1^2 + z_2^2 + \ldots,$$

то чи збігається також ряд $|z_1| + |z_2| + \ldots$?

13 Знайдіть значення $\sin i$, $\cos i$.

14 Знайдіть значення тих z, для яких e^z дорівнює $2, -1, i$.

15 Визначте всі значення 2^i, i^i.

Центральним індексом $\nu(r)$ степеневого ряду $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$, $|z| = r$, називається індекс (номер) максимального члена $\mu(r) =$

$\max\limits_n |a_n z^n|$: $\mu(r) = |a_{\nu(r)}||z|^{\nu(r)}$. Якщо серед чисел $|a_n z^n|$ є декілька рівних $\mu(r)$, то за $\nu(r)$ приймається найбільший із індексів цих чисел. Тут припускається $|z| > 0$. *Максимум модуля* функції $f(z)$ на колі $|z| = r$ позначається через $M(r)$. *Число нулів* функції $f(z)$ в замкненому крузі $|z| \leqslant r$ позначається через $n(r)$.

16 Обчислити $\mu(r)$ та $\nu(r)$ для степеневого ряду

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots .$$

17 Обчислити $M(r)$ та $n(r)$ для степеневого ряду

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots .$$

18 Обчислити $\mu(r)$ та $\nu(r)$ для степеневого ряду

$$\frac{1}{1!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots + \frac{z^n}{(2n+1)!} + \cdots .$$

19 Обчислити $M(r)$ та $n(r)$ для

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{1!} - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \cdots + \frac{(-z)^n}{(2n+1)!} + \cdots .$$

20 Обчислити $\nu(r)$ для геометричної прогресії

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots .$$

21 Обчислити $n(r)$ для геометричної прогресії

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots .$$

22 Для будь-якого поліному n-го степеня

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

має місце співвідношення

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\mu(r)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \nu(r) = n\,.$$

Розділ 3

Аналітичні функції як відображення

3.1 Топологія комплексної площини

Тут ми розглянемо деякі властивості множин комплексної площини (або розширеної комплексної площини), інваріантні відносно неперервних відображень.

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число. Під *ε-околом точки* $a \in \overline{\mathbb{C}}$ будемо розуміти круг

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}(a, \varepsilon) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z - a| < \varepsilon\},$$

якщо $a \neq \infty$, і

$$\mathcal{O}(\infty, \varepsilon) = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1/\varepsilon\right\}.$$

З кожною множиною $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ можна пов'язати розбиття $\overline{\mathbb{C}}$ на три множини, що не перетинаються.

Точка $a \in E$ називається *внутрішньою*, якщо вона належить E разом із кожним ε-околом. Сукупність усіх внутрішніх точок називається *внутрішністю* множини E і позначається як $\operatorname{Int} E$.

Зовнішністю множини E називається внутрішність її доповнення $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ і позначається як $\operatorname{Ext} E$.

Множина точок $\overline{\mathbb{C}}$, що не належать ні внутрішності, ні зовнішності множини E, називається *межею* множини E і позначається як ∂E. Очевидно, що $a \in \partial E$ в тому і лише в тому випадку, якщо будь-який її ε-окіл містить одночасно як точки множини E, так і точки її доповнення.

Так, на рисунку 1 $\operatorname{Int} E$ — внутрішність круга, $\operatorname{Ext} E$ — зовнішность круга, ∂E — коло.

Множина E називається *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою, тобто $E = \operatorname{Int} E$. Сукупність відкритих множин визначає топологію. Доповнення до відкритих множин називаються *замкненими*. Їх можна визначити за допомогою операції замикання. Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ називається *граничною* для множини E, якщо будь-який її ε-окіл $\mathcal{O}(a,\varepsilon)$ містить нескінченно багато точок з E. Операція *замикання* полягає в приєднанні до E всіх її граничних точок, а її результат позначається як $\overline{E}$. Множина E замкнена в тому і лише в тому разі, якщо $\overline{E} = E$. Відзначимо, що $\partial E = \overline{E} \setminus \operatorname{Int} E$.

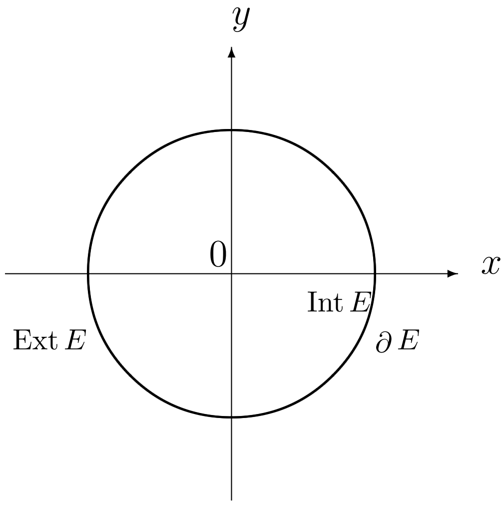


Рисунок 1

Фундаментальними властивостями відкритих і замкнених множин є такі.

Об'єднання будь-якого числа і перетин скінченного числа відкритих множин є відкритою множиною. Перетин будь-якого числа та об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкненою множиною. Порожня множина і вся розширена комплексна площина є одночасно відкритими і замкненими множинами.

Як відомо з дійсного аналізу ($\mathbb{C}$ можна розглядати як $\mathbb{R}^2$), будь-яка обмежена замкнена множина $E \subset \mathbb{C}$ є *компактною*. Властивість компактності виражається в двох фундаментальних результатах: *лемі Гейне — Бореля* і *принципі Больцано — Вейєрштрасса*. Згідно з першим *з будь-якого відкритого покриття компактної множини можна вибрати скінченне підпокриття*. Згідно з другим *будь-яка нескінченна підмножина компактної множини має хоча б одну граничну точку*.

У розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ будь-яка замкнена множина є компактною.

Зазвичай у дійсному аналізі (і в курсі топології) доводиться *інваріантність* компактності при неперервних відображеннях. Добре відомі також властивості неперервних дійснозначних функцій, визначених на компакті. Зокрема, кожна така функція є рівномірно неперервною і досягає свого максимуму та мінімуму.

Зупинимося детальніше на топологічному понятті «*зв'язність*».

Означення 3.1 *Множина* $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ *називається* *зв'язною*, *якщо не існує двох відкритих множин* G_1 *і* G_2, *що задовольняють умови:*

(i) $E \subseteq G_1 \bigcup G_2$;

(ii) $E \bigcap G_1 \bigcap G_2 = \emptyset$

(iii) $G_1 \bigcap E \neq \emptyset$, $G_2 \bigcap E \neq \emptyset$.

Інтуїтивно зв'язність означає, що E складається з одного куска.

Означення 3.2 *Нехай* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Множина* $[z_1, z_2] = \{z : z = \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *називається відрізком із кінцями в точках* z_1, z_2.

Теорема 3.6 *Відрізок прямої — зв'язна множина. При цьому допускається, щоб один із кінців відрізка був нескінченно віддаленою точкою, а сам відрізок був відкритим, замкненим або напіввідкритим.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто знайдуться дві відкриті множини G_1 і G_2, для яких виконані умови (i) — (iii), де E — наш відрізок. Тоді на E знайдуться дві скінченні точки $a \in G_1$ і $b \in G_2$. Очевидно, що умови (i) — (iii) також виконуються у разі заміни E на підінтервал $E_1 = [a, b]$. Розіб'ємо E_1 навпіл і виберемо ту його частину E_2, яка є інтервалом з кінцями в різних множинах G_1 і G_2. Продовжуючи цей процес, одержуємо послідовність замкнених вкладених відрізків $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, довжини яких прямують до нуля. За теоремою Кантора, існує єдина точка ξ, що належить всім відрізкам послідовності $\{E_n\}$. З умов $(i), (ii)$ випливає, що ξ належить одній із множин G_1 або G_2. Нехай це для визначеності буде G_1. Через відкритість G_1 і прямування довжин E_n до нуля випливає, що $E_n \subset G_1$ за достатньо великих номерів n. Проте це суперечить умовам вибору E_n. □

Означення 3.3 *Непорожня, зв'язна, відкрита множина називається областю.*

Наведене вище означення зв'язності у випадку відкритої множини E означає, що не існує непорожніх, відкритих множин G_1 і G_2, що не неперетинаються, для яких $E = G_1 \cup G_2$.

Зауваження. *Ми можемо тепер підсилити теорему 2.2, замінивши круг* $|a - z| < r$ *на довільну область.*

Наступний результат дає характеристичну властивість області в інших термінах.

Теорема 3.7 *Непорожня відкрита множина E зв'язна в тому і лише в тому разі, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати ламаною, розміщеною в E. Водночас ламану можна вибрати так, щоб її ланки були паралельними координатним осям.*

Доведення. Нехай E зв'язна і $a \in E$ — довільна точка. Позначимо через G_1 множину тих точок з E, які можна з'єднати в E з точкою a ламаною з ланками, паралельними координатним осям. Через G_2 позначимо ті точки з E, які не задовольняють цю умову. Очевидно, що G_1 і G_2 є відкритими множинами, і $E = G_1 \bigcup G_2$. Через зв'язність E одна з множин — G_1 або G_2, повинна бути порожньою. Неважко помітити, що $G_1 \neq \emptyset$, і в один бік твердження доведене.

Навпаки, нехай E — відкрита множина і будь-які дві її точки можна з'єднати ламаною, розміщеною в E. Тоді зв'язність E легко встановлюється міркуванням від супротивного. Дійсно, якщо G_1 і G_2 — дві відкриті, непорожні, що не перетинаються множини, і $E = G_1 \bigcup G_2$, то для точок $a \in G_1$ і $b \in G_2$ знайдеться така ламана, яка з'єднує їх і розміщена в E. На цій ламаній знайдеться відрізок, кінці якого розміщені в різних множинах G_1 і G_2. Але це буде суперечити зв'язності цього відрізка. $\square$

Наступний результат дозволяє конструювати зв'язні множини і порівняно просто визначати зв'язність у ряді випадків.

Теорема 3.8 *Нехай $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — сукупність (сім'я) зв'язних множин і $\bigcap_\alpha E_\alpha \neq \emptyset$. Тоді $E = \bigcup_\alpha E_\alpha$ — зв'язна множина.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто знайдуться такі відкриті множини G_1 і G_2, що для $E = \bigcup E_\alpha$ виконуються умови (i) — (iii). Виберемо довільну точку a з $\bigcap E_\alpha$. Унаслідок (i) вона належить одній із множин: G_1 або G_2. Нехай для визначеності $a \in G_1$. У $E \bigcap G_2$ виберемо довільну точку b. За визначенням E, знайдеться таке $\alpha' \in A$, що $b \in E_{\alpha'}$. Але тоді для $E_{\alpha'}$ і множин G_1 і G_2 виконуються всі умови (i) — (iii), що суперечить зв'язності множини $E_{\alpha'}$. $\square$

У ряді випадків доводиться мати справу з множинами довільної структури. Під час їх аналізу першою сходинкою є розкладання її на компоненти зв'язності. *Компонентою K множини E називатимемо зв'язну підмножину, яка не є власною підмножиною жодної іншої зв'язної частини множини E.*

Теорема 3.9 *Кожна множина єдиним чином може бути подана як об'єднання своїх компонент.*

Доведення. Нехай E — довільна множина. Для кожної точки $a \in E$ через $C(a)$ позначимо об'єднання всіх зв'язних підмножин у E, що містять a. Завдяки попередній теоремі $C(a)$ зв'язна, а безпосередньо з означення випливає її максимальність. Таким чином $C(a)$ — компонента множини E. Для завершення доведення залишається показати, що дві компоненти $C(a)$ і $C(b)$ або співпадають, або не перетинаються.

Нехай $d \in C(a) \bigcap C(b)$. Тоді з означення $C(d)$ випливає, що $C(a) \subseteq C(d)$. Звідси одержимо: $a \in C(d)$ і через означення $C(a)$ маємо включення $C(d) \subseteq C(a)$. Таким чином $C(a) = C(d)$. Аналогічно встановлюється рівність $C(b) = C(d)$. $\square$

Означення 3.1 *Область $D \subseteq \mathbb{C}$ називається однозв'язною, якщо $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ зв'язна.*

Іншими словами, область D називається однозв'язною, якщо її доповнення $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ складається з однієї компоненти. Необхідно зазначити, що тут важлива умова розширеної комплексної площини. Про це свідчить приклад смуги.

Теорема 3.10 *При неперервних відображеннях образ зв'язної множини є зв'язним.*

Доведення. Нехай $w = f(z)$ — неперервна функція, яка переводить зв'язну множину E у Q. Припустимо, що H_1 і H_2 — відкриті множини, що задовольняють умови $Q \subseteq H_1 \bigcup H_2$ і $Q \bigcap H_1 \bigcap H_2 = \emptyset$. Потрібно довести, що тоді одна з множин — $Q \bigcap H_1$ або $Q \bigcap H_2$ — порожня. Визначимо множини

$$E_1 = \{z \in E : f(z) \in H_1\},\ E_2 = \{z \in E : f(z) \in H_2\}.$$

Через зроблені припущення $E_1 \bigcap E_2 = \emptyset$ і $E_1 \bigcup E_2 = E$. Далі, якщо z_0 — довільна точка в E_1 і $w_0 = f(z_0)$, то через відкритість H_1 знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що $\mathcal{O}(w_0, \varepsilon) \subseteq H_1$. Із неперервності f знайдеться таке $\delta > 0$, що $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$, тобто $\mathcal{O}(z_0, \delta) \bigcap E \subseteq E_1$. Таким чином, існує відкрита множина G_1, для якої $G_1 \bigcap E = E_1$. Аналогічно встановлюється існування відкритої множини G_2, для якої $G_2 \bigcap E = E_2$. Але тоді через зв'язність E одна з множин E_1, або E_2, повинна бути порожньою. Нехай це буде E_1. Але разом з нею буде порожньою множиною і $Q \bigcap H_1$. $\square$

Зауваження 3.1 *Серед багатьох застосувань доведеної теореми відзначимо такі два:*

1. *Неперервна дійснозначна функція, яка визначена на зв'язній множині і не перетворюється на нуль, зберігає знак.*

2. *Відрізок і квадрат не є топологічно еквівалентними.*

3.2 Конформність

У цьому параграфі розглянемо геометричні наслідки аналітичності. Ми не можемо наочно уявити функцію комплексної змінної за допомогою графіка. Цей недолік можна компенсувати спостереженням за образами сімей кривих.

Уточнимо спочатку означення, пов'язані з кривими. В аналітичній геометрії під кривою зазвичай розуміють множину точок, координати яких задовольняють деяке рівняння або задаються параметричним способом. Для наших цілей ближче друге подання, що дозволяє інтерпретувати криву як траєкторію рухомої точки. Крім того, в наших міркуваннях буде неістотною швидкість проходження траєкторії, але будудть важливими напрям і кратність проходження ділянок траєкторії. Перейдемо тепер до точних визначень та формулювань.

Означення 3.2 *Шляхом ми називатимемо неперервне відображення $z = z(t)$ відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ у $\mathbb{C}$ (або $\overline{\mathbb{C}}$). Точки $z(\alpha) = a$ і $z(\beta) = b$ називаються початком і кінцем шляху відповідно. Шлях називається замкненим, якщо $a = b$.*

Поняття шляху є початковим. Поняття кривої пов'язане з тим, що ми будемо не розрізняти деякі шляхи. Говоритимемо, що шляхи $z = z_1(t)$, $\alpha_1 \leq t \leq \beta_1$, і $z = z_2(t)$, $\alpha_2 \leq t \leq \beta_2$, *еквівалентні*, якщо існує неперервна зростаюча функція $\tau = \tau(t)$, $\alpha_1 \leq t \leq \beta_1$, така, що $\tau(\alpha_1) = \alpha_2$, $\tau(\beta_1) = \beta_2$ і $z_1(t) = z_2(\tau(t))$ при $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Неважко помітити, що введене поняття еквівалентності шляхів має властивості рефлексивності, симетрії та транзитивності. Отже, вся множина шляхів розпадається на класи еквівалентності, що не перетинаються.

Означення 3.3 *Кривою γ називають клас еквівалентних шляхів. Представника $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, із класу еквівалентності називатимемо параметризацією кривої γ.*

Відзначимо, що всі шляхи, які подають одну й ту саму криву γ, мають спільні початок і кінець. Крім того, завжди можна як параметризуючий відрізок вибрати $[0, 1]$. Отже, початок, кінець і напрям руху траєкторією є характеристиками всієї кривої, а не окремо взятого шляху з класу еквівалентності. Зокрема, крива називається *замкненою*, якщо її параметризації замкнені, тобто збігаються початок і кінець кривої.

Крива γ називається *жордановою*, якщо параметризація $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, здійснює топологічне відображення відрізка $[\alpha, \beta]$. Крива називається *замкненою жордановою*, якщо параметризація здійснює топологічне відображення півінтервалу $[\alpha, \beta)$ і $z(\alpha) = z(\beta)$. Іншими словами, замкнена жорданова крива — це топологічне відображення кола в площину.

Визначимо тепер на множині кривих дві операції. Під зміною *орієнтації* кривої γ з параметризацією $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, розуміють криву $-\gamma$ (часто пишуть також γ^-), що визначається параметризацією $z = z(-t)$, $-\beta \le t \le -\alpha$. Отже, при зміні орієнтації змінюється напрям обходу.

Далі, якщо кінець кривої $\gamma_1 : z = z_1(t)$, $\alpha_1 \le t \le \beta_1$, співпадає з початком кривої $\gamma_2 : z = z_2(t)$, $\alpha_2 \le t \le \beta_2$, то під сумою кривих γ_1 і γ_2 розумітимемо криву $\gamma_1 + \gamma_2$ з параметризацією

$$z = \begin{cases} z_1(\alpha_1 + 2t(\beta_1 - \alpha_1)) & \text{при} \quad 0 \le t \le 1/2, \\ z_2(\alpha_2 + (2t-1)(\beta_2 - \alpha_2)) & \text{при} \quad 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Явним чином (за індукцією) визначається скінченна сума кривих. Відзначимо, що сума визначена не для кожної пари кривих і не має властивості комутативності. Проте так визначена операція має властивість асоціативності.

Виділимо тепер сукупність гладких кривих. Шлях

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \le t \le \beta\,,$$

називається *гладким*, якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ є неперервно диференційовними на $[\alpha, \beta]$ і $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \ne 0$ при $t \in [\alpha, \beta]$. Еквівалентність гладких шляхів визначається за допомогою заміни $\tau = \tau(t)$, що неперервно диференційовна і $\tau'(t) > 0$ за всіх t. Похідні в кінцевих точках, наприклад $\tau'(\alpha)$, розуміють як односторонні. Клас еквівалентності гладких шляхів називається *гладкою кривою.*

Відзначимо, що гладка крива $\gamma : z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, у кожній точці $z(t)$ має дотичну з напрямом $\arg z'(t)$. Очевидно, що орієнтація кривої індукує орієнтацію дотичної. Під *кусково-гладкою кривою* розумітимемо скінченну суму гладких кривих, таких, що кінець попереднього відрізка є початком наступного.

Нехай тепер $w = f(z)$ — аналітична в області D функція. Будемо говорити, що f *однолиста* в D, якщо з рівності $f(z_1) = f(z_2)$ випливає $z_1 = z_2$ для будь-якої пари точок із D. Припустимо, що $f'(z) \neq 0$ в D. Оскільки $|f'(z_0)|^2$ — якобіан відображення $w = f(z)$ у точці z_0, то, за теоремою про неявну функцію [3, теорема 17.3.1] в околі точки $w_0 = f(z_0)$ існує обернена функція $z = f^{-1}(w)$. Очевидно, що вона також буде аналітичною, і

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta w / \Delta z} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Таким чином, аналітична в області D функція з похідною, що не перетворюється на нуль є *локально однолистою*. З локальної однолистості не випливає глобальна (тобто в усій області D). Прикладом цього може служити функція $f(z) = z^2$, що розглядається в кільці $1 < |z| < 2$.

Розглянемо гладку криву $\gamma : z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, розміщену в області D. Тоді рівняння $w = f(z(t))$ визначатиме деяку гладку криву γ^* у w-площині. Дійсно, з рівності

$$w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t) \tag{3.1}$$

та умов на γ і f випливає, що $w'(t) \neq 0$. Крім того, з рівності (3.1) випливає, що напрям дотичної до кривої γ^* в точці $w_0 = w(t_0)$ пов'язаний з напрямом дотичної до кривої γ в точці $z_0 = z(t_0)$ рівністю:

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0). \tag{3.2}$$

Рівність (3.2) доводить геометричний зміст аргументу похідної й показує, що кут між напрямами дотичних до кривих γ та γ^* у відповідних точках z_0 і w_0 дорівнює $\arg f'(z_0)$. Отже, цей кут не залежить від вибору кривої γ, а криві, що проходять через точку z_0 і мають у ній спільну дотичну, переходять за допомогою f у криві, що проходять через точку w_0 і мають в ній спільну дотичну. Більше того, дві криві γ_1 і γ_2, що утворюють в точці z_0 кут θ, переходять у криві γ_1^* і γ_2^*, які перетинаються в точці w_0 під тим самим кутом θ (з урахуванням напряму відліку). Цю властивість називають *консерватизмом кутів*, або *конформністю* відображення $w = f(z)$ у точці z_0.

З'ясування геометричного сенсу модуля похідної також приводить до деякої властивості відображення. З рівності

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

бачимо, що при відображенні $w = f(z)$ нескінченно малий елемент довжини в точці z_0 розтягується або стискається в $|f'(z_0)|$ разів. Іншими словами, $|f'(z_0)|$ є коефіцієнтом спотворення масштабу на кривих у точці z_0, і цей коефіцієнт не залежить від напряму. Взагалі кажучи, цей коефіцієнт змінюється від точки до точки.

Нехай тепер $w = f(z)$ визначена в області D і неперервно диференційовна в дійсному сенсі, тобто існують і неперервні в D частинні похідні $\partial f/\partial x$ і $\partial f/\partial y$. Розглянемо питання, які властивості матиме f, якщо припустити конформність відображення $w = f(z)$ або постійність спотворення масштабу. При зроблених припущеннях похідну від функції $w(t) = f(z(t))$ можна подати у вигляді

$$w'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y'(t_0).$$

У термінах $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ ця рівність набирає вигляду

$$w'(t_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) z'(t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \overline{z'(t_0)},$$

звідси одержимо

$$\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)}. \tag{3.3}$$

Консерватизм кутів відображення $w = f(z)$ у точці z_0 означає, що

$$\arg\left[\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)}\right]$$

не залежить від $\arg z'(t_0)$. Це еквівалентно тому, що права частина (3.3) має постійний аргумент. Проте у разі повної зміни $\arg z'(t_0)$ права частина рівності (3.3) описує коло з центром у точці $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right]$ і радіусом $\left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right|$.

Таким чином, із консерватизму кутів випливає рівність нулю радіуса цього кола, що виражається у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Це, як ми бачили раніше, і є рівняння Коші — Рімана, записані в комплексній формі.

Аналогічна постійність спотворення лінійного елемента приводить до умови незалежності модуля правої частини (3.3) від $\arg z'(t_0)$. Це можливо лише за умови виродження кола, що описує права частина (3.3), або умови потрапляння його центра в початок координат. Наслідком першої умови, як ми щойно довели, є система рівнянь Коші — Рімана, тобто аналітичність функції f. Друга умова еквівалентна рівності

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ця рівність виражає той факт, що $\overline{f(z)}$ є аналітичною функцією. У цьому разі кути зберігаються за величиною, але змінюється їх напрям. Така властивість називається *антиконформністю.*

Відображення, яке здійснюється аналітичною однолистою в області D функцією f, називають *конформним відображенням* цієї області. Відображення, здійснюване функцією $\overline{f}$, називають *антиконформним відображенням* області D.

3.3 Дробово-лінійні перетворення

Загальні властивості. Серед усіх аналітичних функцій найбільш прості відображаючі властивості мають раціональні функції 1-го порядку. Вони мають численні визначні властивості, які виводять їх далеко за рамки елементарної теорії. Крім того, вільне володіння їх властивостями складає основу достатньо ефективної обчислювальної техніки.

Будь-яке дробово-лінійне перетворення записується у вигляді

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{3.4}$$

де a, b, c, d — комплексні числа, що називаються *коефіцієнтами дробово-лінійного перетворення*, і задовольняють умову

$$ad - bc \neq 0\,. \tag{3.5}$$

Ця умова відповідає за невиродженість відображення $w = L(z)$. Дійсно, числа $-b/a$ і $-d/c$ є нулями чисельника і знаменника дробу (3.4). Умова (3.5) означає, що це різні числа.

Як невироджена раціональна функція першого порядку дробово-лінійне перетворення L здійснює топологічне відображення розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$ на себе, оскільки для будь-якого $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$ рівняння $L(z) = \zeta$ має в $\overline{\mathbb{C}}$ єдиний розв'язок. Водночас $L(\infty) = a/c$ и $L(-d/c) = \infty$. Зазначаючи також, що

$$L'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

доходимо висновку про конформність L у $\mathbb{C}\backslash\{-d/c\}$.

Відзначимо властивості сукупності всіх дробово-лінійних перетворень. Якщо

$$L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

— довільні два дробово-лінійні перетворення, то їх композиція

$$L(z) = L_1 \circ L_2(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

також є дробово-лінійним перетворенням і $ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2)$. Таким чином, дробово-лінійні перетворення замкнені щодо операції композиції. Крім того, обернена функція

$$z = L^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

також є дробово-лінійним перетворенням. Отже, сукупність усіх дробово-лінійних перетворень утворює групу щодо операції композиції. Необхідно зазначити, що це некомутативна група.

Ангармонічне відношення. Встановимо спочатку результат, згідно якого відповідність трьох точок цілком визначає дробово-лінійне відображення.

Теорема 3.11 *Нехай z_1, z_2, z_3 — різні точки в $\overline{\mathbb{C}}$. Тоді існує і єдине дробово-лінійне перетворення T, що переводить ці точки відповідно в $1, 0$ і ∞.*

Доведення. У разі скінченних точок z_1, z_2 і z_3 це відображення можна подати формулою

$$T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \Bigg/ \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

У разі якщо одна з цих точок нескінченно віддалена, потрібне відображення задається однією з формул:

$$T = \begin{cases} \dfrac{z - z_2}{z - z_3} & \text{при} \quad z_1 = \infty, \\ \dfrac{z_1 - z_3}{z - z_3} & \text{при} \quad z_2 = \infty, \\ \dfrac{z - z_2}{z_1 - z_3} & \text{при} \quad z_3 = \infty, \end{cases}$$

які отримують відповідними граничними переходами.

Доведемо тепер єдиність цього відображення. Дійсно, нехай S — дробово-лінійне перетворення з тими самими властивостями. Тоді дробово-лінійне перетворення $L = S \circ T^{-1}$ залишає нерухомими точки 1, 0 і ∞. З умови $L(\infty) = \infty$ випливає, що $L(z) = az+b$. Використовуючи тепер умови $L(0) = 0$ і $L(1) = 1$, одержуємо тотожність $L(z) = z$. Звідси випливає, що $S(z) = T(z)$.

$\square$

Означення 3.4 *Під ангармонічним відношенням* (z_1, z_2, z_3, z_4) *чотирьох різних точок* z_1, z_2, z_3 *і* z_4 *розуміють образ точки* z_1 *при її відображенні за допомогою дробово-лінійного перетворення, що переводить точки* z_2, z_3 *і* z_4 *в 1,* 0 *і* ∞ *відповідно.*

Важливість ангармонічного відношення зумовлена тим, що воно є інваріантом для дробово-лінійних перетворень.

Теорема 3.12 *Нехай* z_1, z_2, z_3, z_4 *— чотири різні точки і* L *— дробово-лінійне перетворення. Тоді*

$$(L(z_1), \dots, L(z_4)) = (z_1, \dots, z_4).$$

Доведення. Нехай $T(z) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Тоді $T \circ L^{-1}$ переводить точки $L(z_2), L(z_3)$ і $L(z_4)$ відповідно в 1,0 і ∞. Отже

$$(L(z_1), L(z_2), L(z_3), L(z_4)) = T \circ L^{-1} \circ L(z_1) = T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

$\square$

Наслідок. Для будь-яких різних трьох точок z_1, z_2, z_3 у z-площині і різних трьох точок w_1, w_2, w_3 у w-площині існує таке єдине дробово-лінійне перетворення L, що $L(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$. Необхідне відображення визначається зі співвідношення

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3)^{-1}.$$

Кругова властивість. Відзначимо спочатку, що колу на сфері Рімана при стереографічній проекції відповідає на комплексній площині коло або пряма. Це наводить на думку про доцільність розглядати пряму в $\overline{\mathbb{C}}$ як коло, що проходить через нескінченно віддалену точку. Тому надалі під колом у $\overline{\mathbb{C}}$ будемо розуміти таке розширене його значення.

Твердження 3.1 *Прообразом дійсної осі для будь-якого дробово–лінійного перетворення є коло в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доведення. Нехай L визначається рівністю (3.4) з умовою (3.5) на його коефіцієнти. Нам потрібно знайти множину точок z, для яких $\operatorname{Im} L(z) = 0$, тобто таких, що задовольняють умову

$$\frac{az+b}{cz+d} - \frac{\overline{a}\,\overline{z}+\overline{b}}{\overline{c}\,\overline{z}+\overline{d}} = 0\,.$$

Цю рівність можна переписати в еквівалентній формі:

$$(a\overline{c} - c\overline{a})|z|^2 + (a\overline{d} - c\overline{b})z + (b\overline{c} - d\overline{a})\overline{z} + (b\overline{d} - d\overline{b}) = 0\,. \tag{3.6}$$

Якщо $a\overline{c} - c\overline{a} = 0$, то рівняння (3.6) визначає в комплексній площині пряму, тобто коло в $\overline{\mathbb{C}}$.

Припустимо, що $a\overline{c} - c\overline{a} \neq 0$. Тоді рівняння (3.6) можна переписати в еквівалентному вигляді

$$|z|^2 + \frac{a\overline{d} - \overline{b}c}{a\overline{c} - c\overline{a}}z + \frac{b\overline{c} - \overline{a}d}{a\overline{c} - c\overline{a}}\overline{z} + \frac{b\overline{d} - \overline{b}d}{a\overline{c} - c\overline{a}} = 0$$

або після виділення повного квадрата модуля у вигляді

$$\left| z + \frac{b\overline{c} - a\overline{d}}{a\overline{c} - c\overline{a}} \right| = \left| \frac{ad - bc}{a\overline{c} - c\overline{a}} \right|\,,$$

що визначає коло. □

Твердження 3.2 *Ангармонічне відношення* (z_1, z_2, z_3, z_4) *дійсне в тому і лише в тому разі, якщо точки* z_1, z_2, z_3, z_4 *лежать на одному колі в* $\overline{C}$.

Доведення. Твердження випливає з попереднього результату, застосованого до дробово-лінійного перетворення $T(z) = = (z, z_2, z_3, z_4)$. □

Теорема 3.13 *При дробово-лінійних перетвореннях кола в $\overline{\mathbb{C}}$ переходять у кола в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доведення. Нехай L — довільне дробово-лінійне перетворення, і C — коло в z-площині. Виберемо на ньому три різні точки z_1, z_2, z_3. Через інваріантність ангармонічного відношення

$$(z, z_1, z_2, z_3) \equiv (L(z), L(z_1), L(z_2), L(z_3)) .$$

Згідно з твердженням 3.2 ліва частина останньої тотожності дійсна в тому і лише в тому разі, якщо $z \in C$. Застосування твердження 3.2 до правої частини тотожності показує, що $L(z)$ пробігає коло, що проходить через $L(z_1), L(z_2)L(z_3)$ і $L(z_3)$, якщо z пробігає C. $\square$

Принцип симетрії. Якщо дробово-лінійне перетворення визначається дійсними коефіцієнтами, то воно переводить дійсну вісь на себе, а точки z і $\overline{z}$, симетричні відносно дійсної осі, — в симетричні. З огляду на кругову властивість можна чекати виконання цього і в більш загальній ситуації. Щоб міркування були однаково застосовними до прямої й кола, природно використовувати ангармонічне відношення. Як бачимо з твердження 3.2, в його термінах легко визначається потрапляння поточної точки на коло, що обумовлюється трьома своїми точками. Виявляється, ангармонічне відношення відображає й точніше розміщення точок відносно кола.

Твердження 3.3 *Нехай z_1, z_2, z_3 — три різні точки в $\mathbb{C}$ і C — коло (або пряма), що проходить через них. Тоді точки z і z^* симетричні відносно C у тому і лише в тому разі, якщо виконується співвідношення*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} . \tag{3.7}$$

Доведення. Оскільки $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ є взаємнооднозначним відображенням $\overline{\mathbb{C}}$ на себе, то досить показати, що з умови (3.7) випливає симетрія точок z і z^*. Виділимо в доведенні два випадки.

1. Нехай C — пряма. У цьому разі $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ дійсне, і умова (3.7) набирає вигляду

$$\frac{z^* - z_2}{z^* - z_3} = \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z} - \overline{z_3}} .$$

Але тоді з рівності

$$\arg \frac{z^* - z_2}{z^* - z_3} = -\arg \frac{z - z_2}{z - z_3}, \qquad \frac{|z^* - z_2|}{|z^* - z_3|} = \frac{|z - z_2|}{|z - z_3|}$$

випливає подібність трикутників з вершинами z^*, z_2, z_3 і z, z_2, z_3.

Оскільки в них ще й спільна сторона, то вони рівні. Звідси випливає симетричність z^* і z.

2. Нехай C — коло з центром в a і радіусом R. Систематичне використання інваріантності ангармонічного відношення приводить до

$$\begin{aligned}(z^*, z_1, z_2, z_3) &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = \overline{(z-a,\ z_1-a,\ z_2-a,\ z_3-a)} \\ &= \left(\overline{z}-\overline{a}, \frac{R^2}{z_1-a}, \frac{R^2}{z_2-a}, \frac{R^2}{z_3-a}\right) = \\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}, z_1-a,\ z_2-a,\ z_3-a\right) \\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}+a,\ z_1,\ z_2,\ z_3\right).\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$z^* = a + R^2/(\overline{z}-\overline{a}) \quad \text{і} \quad (z^*-a)(\overline{z}-\overline{a}) = R^2 .$$

Таким чином,

$$\arg(z^*-a) = \arg(z-a) \quad \text{і} \quad |z^*-a|\cdot|z-a| = R^2 .$$

□

Теорема 3.14 *Якщо дробово-лінійне перетворення L переводить коло C_1 у коло C_2 (у розширеному сенсі), то воно перетворить кожну пару точок, симетричних відносно C_1, на пару точок, симетричних відносно C_2.*

Доведення. Нехай z_1, z_2, z_3 — три різні точки на колі C_1. Тоді симетричність точок z і z^* відносно C_1 виражається рівністю

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} .$$

Через інваріантність ангармонічного відношення маємо

$$(L(z^*), L(z_1), L(z_2), L(z_3)) = \overline{(L(z), L(z_1), L(z_2), L(z_3))} ,$$

це означає симетричність точок $L(z^*)$ і $L(z)$ відносно кола, що визначається точками $L(z_1), L(z_2)$ і $L(z_3)$, тобто C_2. □

Підсумовуючи одержані результати, ми бачимо, що будь-які два круга в $\overline{\mathbb{C}}$ (тобто круг або півплощина) є конформно еквівалентними. Необхідне конформне відображення здійснюється дробово-лінійним перетворенням. Для його знаходження можна скористатися відповідністю трьох точок і шукати його, розв'язуючи рівняння

$$(ww_1, w_2, w_3) = (zz_1, z_2, z_3)\,,$$

де z_1, z_2, z_3 — точки на одному колі, а w_1, w_2, w_3 — точки на його образі. Проте цей шлях приводить до громіздких формул. Більш логічним є шлях, що використовує принцип симетрії.

Знайдемо для прикладу всі дробово-лінійні перетворення, що відображають верхню півплощину на одиничний круг і одиничного круга — на себе. У першому випадку припустимо, що A, $\mathrm{Im}A > 0$, — точка, що переходить у початок координат. Через принцип симетрії $z = \overline{A}$ буде переходити в точку $w = \infty$. Проте точками, що переходять у нуль і нескінченність, дробово-лінійне перетворення визначається однозначно з точністю до постійного множника

$$w = k\frac{z - A}{z} - \overline{A}\,. \tag{3.8}$$

Оскільки $|x - A| = |x - \overline{A}|$ за $x \in \mathbb{R}$, то умова відповідності дійсній осі одиничному колу приводить до рівності $|k| = 1$. Таким чином, загальний вигляд необхідного відображення визначається формулою (3.8), в якій комплексні числа A і k відіграють роль параметрів і задовольняють умови $\mathrm{Im}A > 0$ і $|k| = 1$.

Аналогічно встановлюється, що загальний вигляд дробово-лінійного перетворення, яке відображає одиничний круг на себе, визначається формулою

$$w = k\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\,,$$

де $|a| < 1$ і $|k| = 1$.

3.4 Елементарні конформні відображення

Конформне відображення, що асоціюється з аналітичною функцією, дозволяє одержати наочне уявлення про неї подібно графіку в разі функції дійсної змінної. Крім того, в більшість областей математики теорія функції комплексної змінної входить через конформне відображення. Однією з найбільш важливих проблем, що виникають при цьому, є задача знаходження конформного відображення однієї області на іншу. Щоб мати уявлення про розв'язуваність цього питання в рамках елементарних функцій, потрібно добре знати їх відображуючі властивості. Останнє досягається, зазвичай, з'ясуванням питання, як перетворяться ті чи інші сім'ї кривих. Найбільш загальний підхід полягає у вивченні образів координатних прямих $x = x_0$ або $y = y_0$. Якщо записати $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то образом прямої $x = x_0$ буде крива, що задається параметричними рівняннями $u = u(x_0, y)$, $v = v(x_0, y)$, $-\infty < y < \infty$. Образи прямої $y = y_0$ описуються аналогічно. Разом вони утворюють ортогональну сітку у w-площині. У деяких випадках зручно використовувати полярні координати й вивчати образи концентричних кіл і прямолінійних променів, що виходять із початку координат.

Основними інструментами в практиці конформного відображення є дробово–лінійні перетворення, степенева функція, експонента і логарифм.

Степенева функція $w = z^\alpha$, $0 < \alpha < \infty$. Раніше ми бачили, що в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ виділяється однозначна вітка функції z^α. Оскільки

$$|w| = |z|^\alpha, \qquad \arg w = \alpha \arg z\,,$$

то концентричні кола з центром на початку координат переводяться в кола цієї ж сім'ї, а промені, що виходять із початку координат, переводяться в такі ж промені. З рівності

$$(z^\alpha)' = \alpha \frac{w}{z}$$

випливає, що степенева функція здійснює відображення, конформне в усіх точках $z \neq 0$, а кут θ на початку координат перетвориться на кут розтину $\alpha\theta$.

Таким чином, у разі $0 < \alpha \leqslant 1$ степенева функція однолиста в області $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ і конформно відображає її на сектор $\{w \,:\, -\alpha\pi < \arg w < \alpha\pi\}$. У разі $\alpha > 1$ степенева функція не є однолистою в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Проте вона буде однолистою в будь-якому секторі $\{w \,:\, -\pi/\alpha < \arg w < \pi/\alpha\}$.

Експонента $w = e^z$ переводить прямі $x = x_0$ і $y = y_0$ у кола з центром на початку координат і в промені, що виходять із початку координат відповідно. Будь-яка інша пряма в z-площині переходить у логарифмічну спіраль. Експонента є однолистою в кожній області, що не містить жодної пари точок, різниця яких кратна $2\pi i$. Зокрема, горизонтальна смуга $\{z \,:\, y_1 < \mathrm{Im} z < y_2\}$ при $y_2 - y_1 < 2\pi$ відображається на сектор $\{w \,:\, y_1 < \arg w < y_2\}$, який у разі $y_2 - y_1 = \pi$ є півплощиною.

На завершення цього параграфа розглянемо раціональну функцію

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1 + z^2}{2z}\,,$$

що називається функцією *Жуковського*, який застосував її для аеродинамічного розрахунку крил. Вона має два прості полюси в точках $z = 0$ і ∞. Її похідна

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

відмінна від нуля скрізь у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, окрім точок $z = \pm 1$.

З'ясуємо тепер умови однолистості функції Жуковського в якій-небудь області $D \subset \mathbb{C}$. Нехай z_1, z_2 — довільні дві точки в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тоді

$$z_1 + \frac{1}{z_1} - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right),$$

і ми бачимо, що D є областю однолистості функції Жуковського в тому і лише в тому разі, якщо вона не містить пари точок z_1, z_2, для яких $z_1 \cdot z_2 = 1$. Простими такими областями є внутрішність і зовнішність одиничного круга. Для наочності відображення, здійснюваного функцією Жуковського, припустимо $z = r\,e^{i\theta},\ w = u + iv$. Тоді

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\,.$$

Із цих рівностей бачимо, що кола $|z| = r_0,\ r_0 > 1$, переходять в еліпси з півосями

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$$

і фокусами в точках $w = \pm 1$, оскільки $a^2 - b^2 = 1$. При $r_0 \to 1$ маємо $b \to 0$, й еліпси стягуються до відрізка $[-1, 1]$. Промені $\theta = \theta_0$, $1 < r < \infty$, перетворяться на частини гіпербол

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta_0} - \frac{v^2}{\sin^2\theta_0} = 1$$

з тими самими фокусами ± 1. Через конформність сім'я цих гіпербол ортогональна вищеописаній сім'ї еліпсів.

Вправи

1 Доведіть, що E є зв'язним у тому і лише в тому разі, якщо його не можна подати у вигляді об'єднання двох непорожніх множин E_1 і E_2, які не перетинаються, так, щоб $E_1 \bigcap \overline{E_2} = \emptyset$ і $\overline{E_1} \bigcap E_2 = \emptyset$.

2 Доведіть, що клас зв'язних множин не зміниться, якщо у визначенні зв'язності умову (ii) замінити на $G_1 \bigcap G_2 = \emptyset$.

3 Доведіть, що замикання зв'язної множини є зв'язною множиною.

4 Доведіть, що відображення

$$L \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

яке діє з групи всіх дробово-лінійних перетворень у групу матриць 2×2 відносно множення, є гомоморфізмом.

5 Покажіть, що відображення вигляду

$$w = z + a, \quad w = bz, \quad w = 1/z\,,$$

де a і $b \neq 0$ — комплексні числа, можна розглядати як систему твірних у групі всіх дробово-лінійних перетворень.

6 Доведіть, що будь-яке дробово-лінійне перетворення, що переводить дійсну вісь на себе, можна записати з дійсними коефіцієнтами.

7 Нехай дробово-лінійне перетворення переводить пару концентричних кіл в іншу пару концентричних кіл. Доведіть, що відношення радіусів кіл при цьому зберігається.

8 Знайдіть дробово-лінійне перетворення, яке переводить $|z| = 1$ і $\mathrm{Re} z = 2$ в концентричні кола. Чому дорівнює відношення їх радіусів ?

9 Якщо ціла раціональна функція

$$z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n$$

однолиста в одиничному крузі $|z| < 1$, то тоді

$$n|a_n| \leqslant 1\,.$$

10 Якщо функція $w = f(z)$ однолисто відображає одиничний круг $|z| < 1$ на область G і $\varphi(w)$ однолиста в G, то тоді $\varphi[f(z)]$ однолиста в крузі $|z| < 1$.

Розділ 4

Комплексне інтегрування

4.1 Означення та основні властивості інтеграла

Нехай $\gamma \,:\, z = z(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$ — деяка крива в $\mathbb{C}$. Під її довжиною розуміють величину

$$\operatorname{length}(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{n} |z(t_i) - z(t_{i-1})|,$$

де супремум беруть по всьому розбиттю $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ інтервалу $[\alpha, \beta]$ (або кривої γ). Якщо цей супремум скінченний, то крива γ називається *спрямованою*. Для кожного розбиття кривої γ і функції f, визначеної на цій кривій (точніше, на множині $\{z = z(t) \,:\, t \in [\alpha, \beta]\}$) розглянемо два типи інтегральних сум:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z(\tau_i))(z(t_i) - z(t_{i-1})),\ \sum_{i=1}^{n} f(z(\tau_i))|z(t_i) - z(t_{i-1})|\,,$$

де $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, n$. Із теорії криволінійних інтегралів першого і другого родів, застосованої до дійсної та уявної частин цих сум, випливає існування їх границь за умови спрямованості γ і неперервності f, якщо $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_i - t_{i-1}| \to 0$. Ці границі будемо відповідно позначати:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} (u\,dx - v\,dy) + i \int\limits_{\gamma} (u\,dy + v\,dx)\,,$$

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,|dz| = \int\limits_{\gamma} u\,ds + i \int\limits_{\gamma} v\,ds\,,$$

де $f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy$, а ds — елемент довжини. У випадку кусково-гладкої кривої маємо

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt, \qquad \int\limits_{\gamma} f(z)\,|dz| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))|z'(t)|\,dt\,.$$

Із властивостей криволінійних інтегралів відразу ж випливають аналогічні властивості введених інтегралів:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma} (af + bg)\,dz \;&=\; a\int\limits_{\gamma} f\,dz + b\int\limits_{\gamma} g\,dz \quad \text{(iii)},\\ \int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} f\,dz \;&=\; \int\limits_{\gamma_1} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f\,dz \qquad \text{(i)}\,. \end{aligned}$$

У цих двох рівностях dz можна замінити на $|dz|$. Проте

$$\int\limits_{-\gamma} f\,dz = -\int\limits_{\gamma} f\,dz, \qquad \int\limits_{-\gamma} f\ |dz| = \int\limits_{\gamma} f\ |dz|.$$

Застосовуючи нерівність трикутника до інтегральних сум, одержимо таку нерівність:

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz|.$$

Відзначимо, що при $f(z) \equiv 1$ останній інтеграл дорівнює довжині кривої γ, тобто

$$\int\limits_{\gamma} |dz| = \mathrm{length}(\gamma)\,.$$

Інший аспект інтегрального числення пов'язаний, як і в дійсному аналізі, з розглядом інтегрування як операції, оберненої до диференціювання. У зв'язку з цим аналітичну в області D функцію F називатимемо *первісною* функції f, якщо $F'(z) = f(z)$ для всіх $z \in D$. Іншими словами, $f(z)\,dz$ є *повним диференціалом* в області D.

Ці дві концепції інтегрування зв'язує така теорема.

Теорема 4.15 *Нехай f — неперервна в області D функція. Тоді інтеграл*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$$

визначається лише кінцевими точками кривої γ, розміщеної в області D, і не залежить від її форми в тому і лише в тому разі, якщо $f(z)\,dz$ є повним диференціалом в області D.

Доведення. Нехай $f(z)\,dz$ — повний диференціал, тобто існує така аналітична в області D функція F, що $F'(z) = f(z)$ при $z \in D$. Якщо $\gamma\ :\ z = z(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — кусково-гладка крива в області D, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt =$$

$$= F(z(\beta)) - F(z(\alpha))\,.$$

Випадок довільної спрямованої кривої легко досягається шляхом апроксимації її ламаними. Проте ми не будемо активно цим користуватися і надалі матимемо справу в основному з кусково-гладкими кривими.

Навпаки, нехай інтеграл $\int_\gamma f(z)\,dz$ не залежить від форми кривої в області D. Зафіксуємо довільну точку $z_0 \in D$ і визначимо функцію

$$F(z) = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz,$$

де γ — ламана, що з'єднує z_0 з поточною точкою z. Унаслідок зроблених припущень функція F коректно визначена. Покажемо, що вона голоморфна в D і $F'(z) = f(z)$. Дійсно, нехай z — довільна точка області D і $\varepsilon > 0$. Через відкритість D і неперервність f знайдеться таке $\delta > 0$, що $(z+\zeta) \in D$ і $|f(z+\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ при $|\zeta| < \delta$. Тоді

$$F(z+\zeta) - F(z) = \int\limits_{[z,z+\zeta]} f(\xi)\,d\xi\,,$$

де $[z, z+\zeta]$ — відрізок, що з'єднує z і $z+\zeta$. Оскільки

$$\int\limits_{[z,z+\zeta]} f(\xi)\,d\xi = \zeta \cdot f(z) + \int\limits_{[z,z+\zeta]} [f(\xi) - f(z)]\,d\xi\,,$$

то

$$\left|\frac{F(z+\zeta) - F(z)}{\zeta} - f(z)\right| = \frac{1}{|\zeta|}\left|\int\limits_{[z,z+\zeta]} [f(\xi) - f(z)]\ d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{|\zeta|} \operatorname{length}([z, z+\zeta]) = \varepsilon\,.$$

Як застосування доведеної теореми відзначимо, що для будь-якої замкненої кривої γ і цілого невід'ємного n

$$\int\limits_{\gamma} (z-a)^n \, dz = 0\,.$$

Дійсно, функція $(z-a)^{n+1}/(n+1)$ є первісною підінтегральної функції в усій комплексній площині, а через замкненість γ її початкова і кінцева точки збігаються. Якщо n від'ємне, але не дорівнює -1, то аналогічний результат має місце для будь-якої замкненої кривої γ, що не проходить через точку a, оскільки в області $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ вищенаведена функція є первісною. При $n = -1$ це вже виконується не завжди. Розглянемо круг $\Delta = \{z \,:\, |z-a| < r\}$. Через $\partial\Delta$ позначимо додатно-орієнтовану межу цього круга. Надалі в разі таких простих областей, як круг, трикутник, прямокутник, будемо під *додатно-орієнтованою межею* розуміти коло або відповідну ламану, яка однократно обходиться так, що обмежена нею область залишається зліва.

Отже, параметризацію $\partial\Delta \,:\, z = a + re^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, можна розглядати як представника додатньо орієнтованої межі круга Δ. Тоді $z' = ire^{it}\,dt$, і

$$\int\limits_{\partial\Delta} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{0}^{2\pi} i\,dt = 2\pi i\,.$$

У разі, якщо крива γ міститься в деякій півплощині, яка не містить точки a, має місце рівність

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0\,,$$

оскільки в цій півплощині можна виділити однозначну вітку $\ln(z-a)$, що буде первісною підінтегральної функції.

4.2 Теорема Коші в опуклій області

У попередньому параграфі ми встановили, що існування первісної функції f в області D еквівалентне умові незалежності інтеграла $\int_\gamma f\,dz$ від форми кривої. Останнє рівносильне перетворенню на нуль цього інтеграла по будь-якій замкненій кривій γ в D.

Дійсно, якщо γ_1 і γ_2 — дві криві у D з одними й тими самими кінцевими точками, то $\gamma_1 - \gamma_2$ буде замкненою кривою, і рівність нулю інтеграла $\int_{\gamma_1-\gamma_2}$ приводить до рівності $\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$. Результати, що встановлюють рівність нулю інтегралів від аналітичних функцій уздовж кривих або систем кривих, називаються *теоремами Коші.*

У цьому параграфі ми встановимо теорему Коші для опуклої області. Випадок більш складних областей потребує розвитку додаткових топологічних засобів. Наступний результат належить Гурсу й іноді називається *основною лемою інтегрального числення.*

Лемма 4.1 *Нехай f — аналітична функція в області D і трикутник Δ міститься в D разом зі своїм замиканням. Тоді*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0\,.$$

Доведення. Введемо для інтеграла вздовж додатно-орієнтованої межі трикутника Δ позначення

$$\eta(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\,.$$

З'єднуючи середини сторін трикутника Δ, розіб'ємо його на чотири конгруентних трикутники $\Delta^{(1)},\ldots,\Delta^{(4)}$. Очевидно, що

$$\eta(\Delta) = \eta(\Delta^{(1)}) + \ldots + \eta(\Delta^{(4)})\,,$$

оскільки інтегрування вздовж спільних сторін взаємно знищуються. З цієї рівності випливає, що знайдеться серед $\Delta^{(1)},\ldots,\Delta^{(4)}$ трикутник, позначимо його Δ_1, для якого $|\eta(\Delta_1)| \geqslant \dfrac{1}{4}|\eta(\Delta)|$. Розіб'ємо Δ_1 на чотири конгруентних трикутника $\Delta_1^{(1)},\ldots\Delta_1^{(4)}$ і виберемо з них Δ_2 так, щоб виконувалася нерівність $|\eta(\Delta_2)| \geqslant \geqslant \frac{1}{4}|\eta(\Delta_1)|$. Продовжуючи цей процес, одержимо послідовність вкладених трикутників $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, що задовольняють умову $|\eta(\Delta_n)| \geqslant \dfrac{1}{4}|\eta(\Delta_{n-1})|$. Отже, при всіх натуральних n

$$|\eta(\Delta_n)| \geqslant \frac{1}{4^n}|\eta(\Delta)|\,. \tag{4.1}$$

Неважко помітити, що центри трикутників Δ_n утворюють збіжну послідовність, і через замкненість трикутників ми одержуємо існування точки $z^* \in \Delta$, яка належить усім трикутникам послідовності.

Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta > 0$ так, щоб окіл $\mathcal{O}(z^*\delta)$ містився в області D і при $z \in \mathcal{O}(z^*\delta)$ виконувалася нерівність

$$\left|\frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*)\right| < \varepsilon\,. \tag{4.2}$$

Оскільки периметри трикутників Δ_n пов'язані з периметром початкового трикутника співвідношенням

$$\mathrm{length}(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\lambda\,,$$

де $\lambda = \mathrm{length}(\partial\Delta)$, то знайдеться такий номер n, що $\Delta_n \subset \mathcal{O}(z^*\delta)$. Відзначимо також, що

$$\int\limits_{\partial\Delta_n} dz = 0, \qquad \int\limits_{\partial\Delta_n} z\,dz = 0\,,$$

оскільки dz і $z\,dz$ є повними диференціалами в $\mathbb{C}$. Але тоді

$$\eta(\Delta_n) = \int\limits_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)]\ dz$$

і внаслідок (4.2)

$$|\eta(\Delta_n)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\partial\Delta_n} |z - z^*| \cdot |dz|\,.$$

Підінтегральний вираз не перевищує периметра трикутника Δ_n, тобто величини $\lambda/2^n$, і ми можемо продовжити оцінювання:

$$|\eta(\Delta_n)| \leqslant \varepsilon\frac{\lambda^2}{4^n}.$$

Порівнюючи її з нерівністю (4.1), одержимо

$$|\eta(\Delta)| \leqslant \varepsilon\lambda^2\,.$$

Оскільки ε було довільним, то $\eta(\Delta) = 0$, і лема доведена. $\square$

Теорема 4.16 *Нехай f —аналітична функція в опуклій області D. Тоді $f(z)\,dz$ — повний диференціал в D, і*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

для будь-якої замкненої кривої γ в D.

Доведення. Зафіксуємо довільну в області D точку a і визначимо в D функцію

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta\,.$$

Із доведеної леми випливає, що

$$F(z+\zeta) - F(z) = \int_{[z,z+\zeta]} f(\xi)\,d\xi$$

за будь-яких $z \in D$ і ζ, для якого $(z+\zeta) \in D$. Тут ми використовуємо також опуклість області D.

Повторюючи міркування, проведені під час доведення теореми попереднього параграфа, доходимо висновку про дифференційовність функції F і виконання рівності $F'(z) = f(z)$. Таким чином, $f(z)\,dz$ є повним диференціалом в області D і теорема доведена. $\square$

Зауваження. Одержаний результат приводить до *локальної* теореми існування первісної голоморфної функції. Якщо f голоморфна в довільній області D, то в будь-якому крузі $\Delta \subset D$ вона має первісну. Питання існування глобальної первісної істотно залежить від топологічних властивостей області D. У попередньому параграфі ми бачили, що вже в кільці воно може вирішуватися негативно. З іншого боку, опуклість області зовсім не обов'язкова.

4.3 Індекс. Ланцюги і цикли

Щоб активніше включити аналітичний апарат під час вивчення властивостей, введемо відразу поняття *індексу* для кусково-гладких кривих, хоча це — чисто топологічне поняття. Крім того, аналітичне визначення індексу дозволить надалі ефективніше його використовувати в обчисленнях.

Означення 4.1 *Нехай γ — кусково-гладка замкнена крива, що не проходить через точку a. Тоді індексом $J(\gamma, a)$ точки a відносно кривої γ називається число*

$$J(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a}\,.$$

Іноді $J(\gamma, a)$ називають *порядком* кривої γ відносно точки a. З'ясуємо геометричний зміст індексу. Нехай $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — параметризація кривої γ. Оскільки відстань від a до γ додатня, то знайдеться таке розбиття $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ інтервалу $[\alpha; \beta]$, що кожна з кривих

$$\gamma_k \,:\, z = z(t),\ t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k,\ k = 1, \ldots, n$$

міститься в деякому крузі Δ_k (кожна в своєму), що не містить точку a. Очевидно, що $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ і

$$J(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a}\,.$$

З іншого боку, в кожному крузі Δ_k можна виділити однозначну вітку функції $\ln(z-a)$ і

$$\int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a} = \ln \left| \frac{z(t_k) - a}{z(t_{k-1}) - a} \right| + i \arg \frac{z(t_k) - a}{z(t_{k-1}) - a}\,.$$

Вираз у правій частині цієї рівності не залежить від вибору вітки $\ln(z-a)$ в крузі Δ_k, а уявна частина його дорівнює приросту (в радіанній мірі) кута, що описує вектор $z-a$ на дузі γ_k. Підсумовуючи ці рівності за k від 1 до n, одержуємо чисто уявне число, що виражає повний приріст кута повороту вектора $z-a$ на всій кривій γ. Враховуючи нормувальний множник у визначенні $J(\gamma, a)$, доходимо висновку, що індекс точки a відносно кривої γ виражає число обертів вектора, що з'єднує a з точкою $z(t)$, коли вона обходить криву γ. Звідси випливає, зокрема, що індекс набуває лише цілочислових значень.

Відзначимо інші властивості індексу. Безпосередньо з визначення випливає, що

$$J(-\gamma, a) = -J(\gamma, a)\,.$$

Теорема 4.17 *Як функція точки a індекс $J(\gamma, a)$ є постійним у кожній компоненті зв'язності множини $\mathbb{C} \setminus \gamma$ і перетворюється на нуль у зовнішній компоненті зв'язності.*

Доведення. Нехай дві точки a і b належать одній компоненті зв'язності множини $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Тоді в цій компоненті зв'язності їх можна з'єднати ламаною. Таким чином, перша частина твердження буде доведена, якщо ми покажемо, що $J(\gamma, a) = J(\gamma, b)$ у разі, якщо відрізок $[a, b]$ не перетинається з γ.

Оскільки відображення $w = (z-a)/(z-b)$ переводить зовнішність відрізка $[a, b]$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{-}$, то в зовнішності цього відрізка виділяється однозначна вітка функції $\ln \dfrac{z-a}{z-b}$. При цьому

$$\left(\ln \frac{z-a}{z-b}\right)' = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$$

і, отже,

$$\int\limits_{\gamma} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) dz = 0\,,$$

що означає рівність $J(\gamma, a) = J(\gamma, b)$.

Залишилося показати, що в зовнішній компоненті $J(\gamma, a) = \ 0$. Це випливає з постійності індексу в ній і того, що інтеграл

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

прямує до нуля, якщо $a \to \infty$.

Розглянемо випадок, коли $\gamma = \partial\Delta$ — додатно-орієнтована межа круга $\Delta = \{z : |z-a| < r\}$. Із геометричного змісту (або з обчислень, проведених у кінці § 1) випливає, що $J(\partial\Delta, a) = 1$. Унаслідок доведеної теореми $J(\partial\Delta, \zeta) = 1 \quad \forall\zeta \in \Delta$ і $J(\partial\Delta, \zeta) = 0$ при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$. Цим виправдовується термін додатно-орієнтована межа. Зробимо ще одне важливе спостереження. Якщо криву γ неперервно деформувати не зачіпаючи точки a, то $J(\gamma, a)$ буде змінюватися неперервно. Проте через цілочисловість індексу $J(\gamma, a)$ залишатиметься при цьому постійним. Це може бути ефективно використано під час обчислення індексу відносно складних кривих.

Відзначаючи, нарешті, топологічний характер індексу, накреслимо шлях визначення $J(\gamma, a)$ у разі довільної замкненої кривої γ, що проходить через точку a. Для цього криву γ розбивають на дуги $\gamma_1, \ldots \gamma_n$, кожна з яких перебуває в деякому крузі, що не містить точки a. Позначаючи через σ_k відрізок, що з'єднує початок і кінець дуги γ_k, визначимо ламану $\sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ і припустимо, що $J(\gamma, a) = J(\sigma, a)$.

Як уже наголошувалося, узагальнення теореми Коші розвиватимемо в двох напрямах. З одного боку, шукатимемо найбільш широкий клас областей, для яких твердження теореми залишається в силі. З іншого боку, вважаючи область довільною, шукатимемо системи кривих, на яких результат інтегрування будь-якої аналітичної функції буде нулем.

Спочатку розглянемо розширення поняття кривої в рамках інтегрування. Як відправний пункт візьмемо рівність

$$\int\limits_{\gamma_1+\ldots+\gamma_n} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz\,, \tag{4.3}$$

що має місце в разі, якщо $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, утворюють розбиття кривої $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. Відзначимо, що права частина в (4.3) має сенс і тоді, коли $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — довільна сукупність кривих. У цьому разі формальну суму

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \gamma \tag{4.4}$$

назвемо *ланцюгом.* Очевидно, що різні формальні суми (4.4) можуть представляти один і той самий ланцюг. Іншими словами, під *ланцюгом* необхідно розуміти клас еквівалентних формальних сум (4.4), а *еквівалентними* вважати ті ланцюги, які дають одне й те саме значення інтеграла (4.3) при будь-якій неперервній функції f. Очевидно, що наступні операції не виводять за клас еквівалентності:

(*i*) перестановка двох кривих γ_i і γ_j;

(*ii*) розбиття кривої на дуги та об'єднання дуг в одну спільну криву;

(*iii*) анулювання двох протилежно орієнтованих дуг.

Очевидно визначається сума двох ланцюгів. Це досягається з'єднанням двох сум в одну загальну суму. У разі суми еквівалентних ланцюгів зручно позначити результат як кратне. У такій термінології кожний ланцюг можна подати у вигляді

$$\gamma = m_1\gamma_1 + \ldots + m_n\gamma_n\,, \tag{4.5}$$

де m_j — додатні цілі; γ_j — різні криві. Для протилежно орієнтованих кривих можна записати

$$m(-\gamma) = -m\gamma\,,$$

і тоді (4.5) перетвориться на суму, в якій відсутні пари протилежно орієнтованих кривих, але коефіцієнти m_j можуть бути від'ємними цілими. Припускаючи також нульові коефіцієнти, можна будь-які два ланцюги подати у вигляді

(4.5) з одними й тими самими кривими γ_j. Тоді їх сума буде простим підсумовуванням коефіцієнтів при однойменних кривих. Під *нульовим* ланцюгом розумітимемо або порожню суму, або суму з нульовими коефіцієнтами.

Ланцюг γ називатимемо *циклом*, якщо його можна подати у вигляді (4.5), де всі γ_j є замкненими кривими. Будемо також говорити, що ланцюг (або цикл) міститься в області D, якщо вона допускає зображення (4.5), в якому всі криві γ_j розміщені в D. У цьому контексті цикли відіграють роль замкнених кривих. Зокрема, для будь-якого циклу γ і точки $a \notin \gamma$ (тобто γ допускає зображення (4.5), кожна крива γ_j якого не проходить через a) визначений індекс

$$J(\gamma, a) = \sum_{j=1}^{n} m_j J(\gamma_j, a)\,.$$

Він має ті самі властивості, що були встановлені вище, якщо криві замінити на цикли.

Означення 4.2 *Цикл γ в області D називається гомологічним нулю відносно області D, якщо $J(\gamma, a) = 0$ для будь-якої точки $a \notin D$. При цьому записують $\gamma \sim 0$ (mod D), або просто $\gamma \sim 0$, якщо зрозуміло, відносно якої області.*

Поняття $\gamma_1 \sim \gamma_2 \pmod D$ означає, що $\gamma_1 - \gamma_2 \sim 0 \pmod D$. Запас циклів в області D, гомологічних нулю, залежить від її топологічних властивостей, тобто є топологічною характеристикою області. Можна піти трохи далі і ввести в розгляд групу гомологій.

Теорема 4.18 *Область $D \subseteq \mathbb{C}$ однозв'язна в тому і лише в тому разі, якщо будь-який цикл γ в D є гомологічним нулю відносно області D.*

Доведення. Припустимо спочатку, що D однозв'язна, і цикл γ розміщений у D. Оскільки $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ зв'язна і містить ∞, то вона міститься в зовнішній компоненті зв'язності множини $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$. Отже, за теоремою 4.17 маємо $J(\gamma, a) = 0$ для всіх $a \notin D$, що означає $\gamma \sim 0 \pmod D$.

Навпаки, припустимо, що $A = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ не є зв'язною. Це означає існування таких відкритих множин G_1 і G_2, що $A_1 = A \cap G_1$ і $A_2 = A \cap G_2$ непорожні $A = A_1 \cup A_2$, і

$$G_1 \cap G_2 \cap A \neq 0\,. \tag{4.6}$$

Із замкненості множини A випливає замкненість A_1 і A_2. Дійсно якщо, наприклад, припустити, що $\zeta \in A_2$ є граничною точкою множини A_1, то

$\mathcal{O}(\zeta;\varepsilon) \cap A_1 \neq 0$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Проте через відкритість множини G_2 знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що $\mathcal{O}(\zeta;\varepsilon) \subseteq G_2$. У результаті ми одержали суперечність з умовою (4.6).

Одна з множин, нехай це буде для визначеності A_2, містить ∞. Тоді множина A_1 буде обмеженою, і нехай $\delta > 0$ менше ніж відстань від A_1 до A_2. Виберемо точку $a \in A_1$ і виконаємо розбиття площини на квадрати зі сторонами $\delta/2$ проведенням сітки прямих, паралельних координатним осям, так, щоб a було центром одного з квадратів Q_0. Занумеруємо також решту квадратів $Q_1, \ldots, Q_n$, замикання яких має непорожній перетин з A_1. Оскільки A_1 обмежена, то їх буде скінченне число, а внаслідок вибору δ перетин будь-якого з квадратів із множиною A_2 порожній. Розглянемо цикл

$$\gamma = \sum_{j=0}^{n} \partial Q_j \,. \tag{4.7}$$

Оскільки для кожного з квадратів, окрім Q_0, точка a є зовнішньою, то

$$J(\gamma, a) = \sum_{j=0}^{n} J(\partial Q_j, a) = J(\partial Q_0, a) = 1 \,.$$

Отже, після анулювання сторін квадратів, що входять до γ з протилежною орієнтацією, цикл γ буде розміщений у D. Дійсно, кожна сторона, що має непорожній перетин з A_1, входить до суми (4.7) як частина меж двох суміжних квадратів із протилежною орієнтацією. Таким чином, ми знайшли цикл γ в D, який не є гомологічним нулю відносно D. $\square$

4.4 Загальна теорема Коші

Поняття циклу, гомологічного нулю, дозволяє сформулювати найбільш загальний вигляд теореми Коші.

Теорема 4.19 *Нехай f — голоморфна функція в області D і γ — цикл гомологічний нулю відносно області D. Тоді*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \,.$$

Доведення. Виконаємо спочатку розбиття γ на дуги γ_1, ..., γ_n так, щоб кожна γ_j містилася в крузі $\Delta_j \subset D$. Оскільки $f(z)\,dz$ — повний диференціал в Δ_j, то

$$\int\limits_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int\limits_{\lambda_j} f(z)\,dz\,,$$

де λ_j — ламана, що з'єднує в Δ_j кінці дуги γ_j і має ланки, паралельні координатним осям. Сума $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ є циклом, що складається із замкнених ламаних із ланками, паралельними координатним осям. Отже,

$$\int\limits_{\lambda} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\,. \tag{4.8}$$

Відзначимо, що (4.8) має місце для будь-якої аналітичної функції f у D . Зокрема, якщо $a \notin D$, то $1/(z-a)$ є аналітичною в D і $J(\lambda, a) = J(\gamma, a) = 0$, тобто $\lambda \sim 0$.

Далі, через кожну вершину λ проведемо прямі, паралельні координатним осям. У результаті ми отримаємо сітку, що розбиває всю площину на скінченне число прямокутників Q_1, ..., $Q_{n'}$ і необмежених областей $H_1, \ldots, H_{n''}$ типу півсмуг або кутів. Виключаючи тривіальний випадок, коли λ розміщене на одній прямій, існує хоча б один прямокутник, тобто $n' \neq 0$. Позначимо через a_j центри прямокутників Q_j і покажемо, що λ можна подати у вигляді

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n'} J(\lambda, a_j)\partial Q_j\,. \tag{4.9}$$

Для цього потрібно показати, що

$$\sigma = \lambda - \sum_{j=1}^{n'} J(\lambda, a_j)\partial Q_j$$

є нульовим циклом.

Припустимо спочатку, що σ_{ij} — спільна сторона для двох прямокутників Q_i і Q_j. Вважатимемо, що σ_{ij} орієнтована як у ∂Q_i. Припустимо також, що σ_{ij} входить до σ з коефіцієнтом k. Тоді цикл $\sigma - k\partial Q_i$ не містить σ_{ij}, і точки a_i, a_j належать одній і тій самій компоненті зв'язності множини $\mathbb{C}\setminus(\sigma - k\partial Q_i)$. За теоремою 4.17

$$J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) = J(\sigma - k\partial Q_i, a_j)\,. \tag{4.10}$$

З іншого боку, використовуючи рівність $J(\partial Q_r, a_s) = \delta_{rs}$ — *символ Кронекера*, одержимо

$$J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) = J\left(\lambda - \sum_{r=1}^{n'} J(\lambda, a_r)\partial Q_r - k\partial Q_i, a_i\right) =$$

$$= J(\lambda, a_i) - J(\lambda, a_i) \cdot J(\partial Q_i, a_i) - kJ(\partial Q_i, a_i) = -k$$

і

$$J(\sigma - k\partial Q_i, a_j) = J(\lambda, a_j) - J(\lambda, a_j) \cdot 1 - k \cdot 0 = 0\,.$$

Таким чином, через рівність (4.10) маємо $k = 0$, і відрізок σ_{ij} не входить до σ.

Аналогічно розглядається випадок, коли σ_{ij} є суміжною стороною прямокутника Q_i і необмеженої області H_j. У цьому разі з точки a_i можна провести промінь, розміщений в $Q_i \cup H_j$. Це означає, що a_i знаходиться в зовнішній компоненті множини $\mathbb{C} \setminus (\sigma - k\partial Q_i)$, і, отже, $J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) = 0$. З іншого боку, проведені вище обчислення дають $J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) = -k$, і ми одержимо $k = 0$.

Таким чином, зображення (4.9) доведене. Покажемо тепер, що це зображення є внутрішнім відносно області D. Точніше, що до суми (4.9) входять із ненульовими коефіцієнтами лише ті ∂Q_i, для яких $Q_i \subset D$. Дійсно, нехай $a \in \overline{Q_i}$ і $\notin D$. Оскільки $\lambda \sim 0 \pmod{D}$, то $J(\lambda, a) = 0$. Крім того, в цьому разі відрізок $[a_i, a]$ не перетинає λ, і за теоремою 4.17 $J(\lambda, a_i) = J(\lambda, a) = 0$, тобто коефіцієнт перед ∂Q_i в сумі (4.9) дорівнює нулю.

Із теореми Коші для опуклої області для прямокутників $Q_i \subset D$ має місце рівність

$$\int\limits_{\partial Q_i} f(z)\, dz = 0\,,$$

звідси випливає рівність

$$\int\limits_{\lambda} f(z)\, dz = 0\,,$$

яка внаслідок (4.8) доводить теорему. $\square$

Із доведеної теореми і гомологічного опису однозв'язної області (теорема 4.18) випливає

Теорема 4.20 *Якщо f — аналітична функція в однозв'язній області D і γ — замкнена крива в D, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0\,.$$

У традиційних курсах теорії аналітичних функцій немає згадки про гомології і не використовується явно поняття індексу. Зазвичай під γ розуміють систему кривих, що утворюють повну межу деякої підобласті в D і орієнтованих так, що при їх обході підобласть, яка виділяється, залишається зліва. Проте при строгому викладенні потрібні значні зусилля, щоб надати точного змісту цьому інтуїтивному зображенню. Основне заперечення проти такого підходу[1] полягає в необхідності більшу частину часу присвятити периферійним, із точки зору предмета досліджень, питанням. У контексті наших міркувань легко виділити класичний випадок шляхом введення наступного поняття.

Означення 4.3 *Будемо говорити, що цикл γ обмежує область D, якщо індекс $J(\gamma, a)$ визначений і дорівнює 1 для будь-якої точки $a \in D$ і або не визначений, або дорівнює нулю для точок $a \notin D$.*

Відзначимо, що якщо γ обмежує D і $D \cup \gamma$ міститься в більш широкій області D', то $\gamma \sim 0 \pmod{D'}$.

Теорема 4.21 *Нехай цикл γ обмежує область D і f — аналітична функція на множині $D \cup \gamma$. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0\,.$$

[1] L. V. Ahlfors. Complex analysis, New York. — McGraw-Hill, 1966. — C. 150.

4.5 Інтегральна формула Коші й деякі її наслідки

Теорема 4.22 *Нехай f — аналітична функція в області D і γ — цикл, гомологічний нулю відносно області D. Тоді для будь-якої точки $a \in D \setminus \gamma$ виконується рівність*

$$J(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z - a}\,. \tag{4.11}$$

Доведення. Оскільки $D \setminus \gamma$ є відкритою множиною, то для достатньо малих $r > 0$ круг $\Delta = \{z \,:\, |z - a| \leqslant r\}$ міститься в $D \setminus \gamma$. Неважко помітити, що цикл $\gamma - J(\gamma, a) \cdot \partial\Delta$ буде гомологічний нулю відносно проколотої області $D \setminus \{a\}$. Відзначимо також, що в проколотій області функція $f(z)/(z - a)$ є аналітичною, і, застосовуючи теорему Коші, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z - a} = J(\gamma, a) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(z)\, dz}{z - a}\,. \tag{4.12}$$

Проте

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(z)\, dz}{z - a} - f(a) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant r \cdot \max_{z \in \partial\Delta} \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right|$$

і може бути зроблене як завгодно малим при $r \to 0$. Здійснюючи в (4.12) граничний перехід при $r \to 0$, одержуємо (4.11). $\square$

Зауваження. Найчастіше застосування доведеної теореми належить до випадку, коли цикл γ обмежує область D, і функція f є аналітичною на множині $D \cup \gamma$. У цьому випадку для всіх $z \in D$ має місце рівність:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}\,. \tag{4.13}$$

Її називають *інтегральною формулою Коші*. Вона дозволяє знайти значення функції f у середині області D за її значеннями на межі γ.

Інтегральна формула Коші дає ідеальний інструмент для дослідження локальних властивостей аналітичних функцій. Водночас за γ ми можемо брати таке коло, яке обмежує круг, розміщений в D. Зокрема, ми можемо тепер довести, що аналітична функція має похідні всіх порядків, які є аналітичними функціями. Для цього виділимо окремо конструкцію, що міститься в (4.11) і (4.13).

Нехай γ — деяка крива, і φ — задана на ній неперервна функція. Тоді вираз

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \notin \gamma\,,$$

називають *інтегралом Коші* зі щільністю φ. Формула (4.13) виражає той факт, що f являє собою всередині D інтеграл Коші.

Лемма 4.2 *Нехай φ — неперервна на кривій γ. Тоді функції*

$$F_n(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^n},$$

$n = 1, 2, \ldots,$ є аналітичними в кожній з областей, визначених γ і

$$F_n'(z) = nF_{n+1}(z)\,.$$

Доведення. Доведемо спочатку неперервність F_1. Для довільної точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ виберемо $\delta > 0$ так, щоб $\mathcal{O}(z_0, \delta)$ не перетиналося з γ. Тоді для $z \in \mathcal{O}(z_0, \delta/2)$ матимемо

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| = |z - z_0| \left| \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right|$$

$$\leqslant |z - z_0| \frac{2}{\delta^2} \int_\gamma |\varphi(\zeta)||d\zeta|\,,$$

звідси випливає неперервність F_1 у точці z_0.

Відзначимо тепер, що відношення різниць

$$\frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}$$

має ту саму структуру, що й F_1 зі щільністю $\varphi/(\zeta - z_0)$. Тому з доведеного її границя при $z \to z_0$ існує й дорівнює $F_2(z_0)$. Таким чином, рівність $F_1'(z) = F_2(z)$ встановлена.

Скористаємося тепер методом індукції і припустимо, що доведене співвідношення $F_{n-1}'(z) = (n-1)F_n(z)$. Тоді із зображення

$$F_n(z) - F_n(z_0) = \left[\int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} - \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^n}\right] +$$

$$+(z - z_0)\int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)}$$

можна одержати неперервність F_n. Дійсно, при $z \to z_0$ вираз у квадратних дужках прямує до нуля за припущенням індукції, застосованим до щільності $\varphi/(\zeta - z_0)$, а інтеграл при $(z - z_0)$ є обмеженим. Поділивши обидві частини рівності на $z - z_0$ і використавши припущення індукції та неперервність F_n із щільністю $\varphi/(\zeta - z_0)$, одержимо

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F_n(z) - F_n(z_0)}{z - z_0} = (n-1)F_{n+1}(z_0) + F_{n+1}(z_0) = nF_{n+1}(z_0)\,,$$

що й потрібно було довести. □

Наслідок. *Із леми та зауваження до теореми 4.22 випливає нескінченна диференційовність аналітичної функції. Крім того, в умовах справедливості формули (4.13) виконується також рівність*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\,, \tag{4.14}$$

що доводиться з леми індукцією і називається інтегральною формулою Коші для похідних.

Наведемо ще декілька наслідків інтегральної формули Коші.

Теорема 4.23 (Морера) *Якщо f визначена і неперервна в області D і*

$$\int\limits_\gamma f\,dz = 0$$

для будь-якої замкненої кусково-гладкої кривої γ в D, то f аналітична в D.

Доведення. Умова теореми означає, що $f\,dz$ — повний диференціал у D. Отже, знайдеться аналітична функція в D F, для якої $F'(z) = f(z)$. Таким чином, f аналітична як похідна аналітичної функції. $\square$

Наступний результат часто використовують у додатках.

Теорема 4.24 *Нехай f — аналітична функція в однозв'язній області D і $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тоді в D виділяють однозначні вітки $\ln f(z)$ і $(f(z))^a$, $a \in \mathbb{C}$.*

Доведення. Оскільки f' також аналітична в D і f не перетворюється на нуль у D, то f'/f є аналітичною в D і за теоремою Коші для однозв'язної області має в D первісну F, тобто $F' = f'/f$. Для деякої точки $z_0 \in D$ фіксуємо значення $\ln f(z_0)$ і нормуємо F за умови $F(z_0) = \ln f(z_0)$. Тоді, оскільки

$$\left(f(z)e^{-F(z)}\right)' = f'(z)e^{-F(z)} - F'(z)f(z)e^{-F(z)} = 0\,,$$

скрізь у D і $f(z_0)e^{-F(z_0)} = 1$, то $f(z)e^{-F(z)} \equiv 1$ і $f(z) \equiv e^{F(z)}$. Остання рівність означає, що $F(z) = \ln f(z)$. Виділення степеня f^a визначається за формулою $f^a = e^{a \ln f}$. $\square$

Наступний класичний результат відомий як *теорема Ліувілля.*

Теорема 4.25 *Якщо функція f голоморфна в усій площині $\mathbb{C}$ та обмежена, то вона тотожно постійна.*

Доведення. Нехай $|f(z)| \leqslant M$ при всіх $z \in \mathbb{C}$. Припускаючи, що в (4.14) $z = z_0$ і вибираючи в ролі γ додатно-орієнтовану межу круга $|z - z_0| < r$, одержуємо

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant n!Mr^{-n}\,. \tag{4.15}$$

Здійснюючи граничний перехід при $r \to \infty$, одержуємо $f^{(n)}(z_0) = 0$. Оскільки точка z_0 вибиралася довільною, то

$$f^{(n)}(z) \equiv 0\,.$$

При $n = 1$ ми отримуємо потрібне. $\square$

З доведеного результату випливає основна теорема алгебри.

Наслідок. *Будь-який многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має хоч один комплексний корінь.*

Доведення. Нехай $P(z)$ – многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами. Припустимо від супротивного, що $P(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Тоді функція $1/P(z)$ голоморфна в усій площині $\mathbb{C}$ та обмежена. За теоремою 4.25 вона тотожно постійна, що неможливо. $\square$

Нерівності (4.15) називаються нерівностями Коші. Наведемо ще одну геометричну властивість аналітичних функцій.

Теорема 4.26 (Про середнє) *Нехай f голоморфна в області D і $\mathcal{O}(a, r) \subset D$. Тоді*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

Доведення. Вибираючи в (4.13) $z = a$ і $\gamma\ :\ \zeta = a + re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, приходимо до твердження теореми. $\square$

Вправи

1 Використовуючи зображення

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{r^2}{z}\right)$$

на колі $|z| = r$, обчисліть інтеграл

$$\int\limits_{\partial\Delta} x\, dz\,,$$

де $\Delta = \{z\ :\ |z| < r\}$.

2 Обчисліть інтеграл

$$\int\limits_{\partial\Delta} |z - 1| \cdot |dz|\,,$$

де $\Delta = \{z\ :\ |z| < 1\}$.

3 Припустимо, що функція f аналітична на замкненій кривій γ і f' неперервна на ній. Доведіть, що

$$\int\limits_{\gamma} \overline{f(x)} f'(z)\, dz$$

є чисто уявним.

Розв'язання. Оскільки $\int \overline{f} f' \, dz = \int \overline{w} \, dw$ і $(u - iv) \, d(u + +iv) = (u \, du + v \, dv) - i(v \, du - u \, dv)$, то $\operatorname{Re} \int \overline{f} f' \, dz = \int u \, du + v \, dv = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int d(u^2 + v^2) = 0$ (замкненість кривої).

4 Припустимо, що f аналітична в області D і задовольняє нерівність $|f(z) - 1| < 1$ при $z \in D$. Припускаючи для зручності неперервність f', доведіть, що

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = 0$$

для будь-якої замкненої кривої γ в D.

5 Нехай за означенням $\int\limits_\gamma f \, d\overline{z} = \overline{\int\limits_\gamma \overline{f} \, dz}$. Покажіть, що якщо $P(z)$ — поліном і $\Delta = \{z \, : \, |z - a| < r\}$, то

$$\int_{\partial\Delta} P(z) \, d\overline{z} = -2\pi i r^2 P'(a) \, .$$

Розв'язання. Нехай

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z - a)^k \Rightarrow \overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{b_k} \frac{r^{2k}}{(z - a)^k}$$

і

$$\int_{\partial\Delta} \overline{P} \, dz = 2\pi i \overline{b_1} r^2 \, .$$

6 Покажіть, що вищенаведене означення $J(\gamma, a)$ не залежить від ламаної σ.

7 Покажіть, що нове означення індексу співпадає з колишнім на кусково–гладких кривих.

8 Доведіть теорему 4.17 для довільних замкнених кривих.

9 Обчислити інтеграл

$$\int_L (1 + i - 2\overline{z}) \, dz \, ,$$

де L — відрізок прямої між точками $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i$.

10 Обчислити інтеграл

$$\int_L (\overline{z}) \, dz \, ,$$

де L — лінія, що з'єднує точки $z_1 = -1$ і $z_2 = 1$, якщо

1) L — відрізок дійсної осі від точки -1 до точки 1;

2) L — верхнє півколо $|z| = 1$.

11 Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\, dz\,.$$

Розділ 5

Ізольовані особливі точки і розвинення в ряди

5.1 Локальна рівномірна збіжність

Надалі для області $D \subset \mathbb{C}$ через $\mathcal{H}(D)$ будемо позначати сукупність усіх голоморфних в D функцій.

Означення 5.1 *Послідовність функцій $f_n \in \mathcal{H}(D_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, збігається локально рівномірно в області D до функції f, якщо для кожної точки $z_0 \in D$ знайдуться такі окіл $\mathcal{O}_\varepsilon(z_0)$ і натуральне число N, що $\mathcal{O}_\varepsilon(z_0) \subset D_n$ при $n \geqslant N$ і $f_n(z) \to f(z)$ рівномірно в $\mathcal{O}_\varepsilon(z_0)$ при $n \to \infty$.*

Зауваження 5.1 *Наведене означення можна подати в термінах компактних підмножин області D : $f_n \to f$ локально рівномірно в $D \Leftrightarrow$ якщо $\forall$ компактної множини $K \subset D$ знайдеться такий номер N, що $K \subset D_n$ при $n \geqslant N$ і $f_n(z) \to f(z)$ рівномірно на K.*

Приклад: $f_n(z) = z/(1 + 2z^n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тут функція f_n є аналітичною в крузі $D_n = \{z : |z| < 2^{-1/n}\}$ і $f_n \notin \mathcal{H}(D)$, $D = \{z : |z| < 1\}$. З іншого боку, $f_n(z) \to z$ локально рівномірно в D. Необхідно звернути увагу на те, що гранична функція $f(z) \equiv z$ є аналітичною в усій комплексній площині $\mathbb{C}$.

Теорема 5.27 (Вейєрштрасса) *Нехай $f_n \in \mathcal{H}(D_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, і $f_n(z) \to f(z)$ локально рівномірно в D. Тоді $f \in \mathcal{H}(D)$ і $f_n'(z) \to f'(z)$ локально рівномірно в D.*

Доведення. Враховуючи локальний характер наших тверджень, зафіксуємо довільну точку z_0 і виберемо число $0 < r < < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тоді $\mathcal{O}_r(z_0)$ міститься в D разом зі своїм замиканням, і за умовою теореми знайдеться такий номер N, що $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D_n$ при $n \geqslant N$. При цьому $f_n \to f$ рівномірно на $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$. Отже, f є неперервною функцією і для будь-якої кусково-гладкої замкненої кривої $\gamma \subset \mathcal{O}_r(z_0)$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Однак, за теоремою Коші, інтеграли зліва дорівнюють нулю. Але тоді внаслідок довільності кривої γ функція f є аналітичною в $\mathcal{O}_r(z_0)$ на підставі теореми Морера. Оскільки z_0 була довільною точкою в D, то $f \in \mathcal{H}(D)$.

Для доведення другої частини твердження скористаємося інтегральними формулами Коші:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}\,,\ f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}\,,$$

$z \in \mathcal{O}_r(z_0), n \geqslant N$. Тут Γ — додатно орієнтоване коло $|z - z_0| = r$.

В крузі $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ матимемо

$$|f'(z) - f_n'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{4}{r}\max_{\zeta\in\Gamma}\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)|\}\,.$$

Оскільки права частина нерівності не залежить від $z \in \mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ і прямує до нуля при $n \to \infty$, то ${f'}_n \to f'$ рівномірно в крузі $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$. □

Раніше ми довели аналітичність суми степеневого ряду. Теорема Вейєрштрасса дозволяє розширити цей результат.

Теорема 5.28 *Якщо ряд $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, складений з аналітичних в області D функцій, збігається локально рівномірно в D, то його сума є аналітичною функцією в D і його можна почленно диференціювати.*

5.2 Тейлорівське розвинення і теорема єдиності

Як було показано раніше, сума степеневого ряду являє собою аналітичну функцію в крузі збіжності. Виявляється, що локально кожну аналітичну функцію можна зобразити у вигляді суми степеневого ряду.

Теорема 5.29 *Якщо $f \in \mathcal{H}(D)$ і z_0 — довільна точка області D, то в будь-якому крузі $\mathcal{O}_r(z_0) \subseteq D$ цю функцію можна зобразити у вигляді суми збіжного степеневого ряду*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \,. \tag{5.1}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{O}_r(z_0) \subseteq D$ і $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. Позначимо через γ_r додатно-орієнтовану межу круга $\mathcal{O}_r(z_0)$. Тоді за інтегральною формулою Коші маємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \,.$$

Розвинемо ядро Коші $\dfrac{1}{\zeta - z}$ в ряд:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,.$$

Оскільки для всіх $\zeta \in \gamma_r$ маємо

$$\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1 \,,$$

то отриманий ряд мажорується збіжною прогресією і тому збігається рівномірно на γ_r. Рівномірна збіжність не порушується при множенні його на неперервну на γ_r (а отже, обмежену) функцію $\dfrac{1}{2\pi i} f(\zeta)$. Тому можна виконати почленне інтегрування, що дає зображення (5.1), в якому

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \,. \tag{5.2}$$

Оскільки коефіцієнти (5.2) ряду (5.1) не залежать ні від точки z, ні від вибору кола γ_r, то ряд (5.1) збігається і зображує функцію f принаймні в крузі $\mathcal{O}_\rho(z_0)$, де $\rho = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. $\square$

Ряд (5.1), коефіцієнти якого обчислюються за формулами (5.2), називається *рядом Тейлора* функції f в точці z_0.

Теорема 5.30 *Якщо f в крузі $\mathcal{O}_r(z_0)$ зображується як сума степеневого ряду* (5.1)*, то його коефіцієнти визначаються однозначно рівностями $c_n = f^{(n)}/n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Доведення. Підставляючи в (5.1) $z = z_0$, знаходимо $f(z_0) = c_0$. Рівність у разі $n = 1, 2, 3, \ldots$, одержуємо в результаті n-кратного диференціювання і подальшої підстановки $z = z_0$. $\square$

Доведена теорема стверджує єдиність розвинення функції в степеневий ряд із даним центром. Її іноді формулюють так: *будь-який збіжний степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.* У дійсному аналізі недостатньо навіть нескінченної диференційовності, щоб функція була сумою свого ряду Тейлора. Класичним прикладом є $f(x) = e^{-1/x^2}$.

Точка $a \in \mathbb{C}$ називається *нулем* функції f, якщо $f(a) = 0$.

Означення 5.2 *Порядком (або кратністю) нуля $a \in \mathbb{C}$ функції f, голоморфної в цій точці, називається найменший номер відмінної від нуля похідної $f^{(n)}(a)$. Іншими словами, точка a називається нулем f порядку m, якщо*

$$f(a) = \ldots = f^{(m-1)} = 0,\ f^{(m)}(a) \neq 0\,.$$

Із формул для коефіцієнтів ряду Тейлора випливає, що порядок нуля збігається з найменшим номером відмінного від нуля коефіцієнта тейлорівського розвинення функції в цій точці. Якщо a — нуль нескінченного порядку, то $f(z) \equiv 0$ у деякому околі $\mathcal{O}_r(a)$. З іншого боку, якщо a — нуль скінченного порядку m, то знайдеться окіл $\mathcal{O}_\delta(a)$, в якому немає нулів функції f, відмінних від a. Дійсно, в деякому околі $\mathcal{O}_r(a)$ функція f зображується рядом Тейлора:

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k = (z-a)^m \varphi(z)\,.$$

Тут φ — голоморфна в $\mathcal{O}_r(a)$ функція і $\varphi(a) = c_m \neq 0$. Унаслідок неперервності φ знайдеться окіл $\mathcal{O}_\delta(a)$, в якому φ не перетворюється на нуль. Через відсутність дільників нуля в полі комплексних чисел $f(z) \neq 0$ при $z \in \mathcal{O}_\delta(a) \setminus \{a\}$.

Теорема 5.31 (єдиності) *Якщо дві голоморфні в області D функції f і g збігають на множині E, що має хоча б одну граничну точку a, яка належить D, то $f(z) \equiv g(z)$ скрізь у D.*

Доведення. Потрібно довести, що $h(z) = f(z) - g(z)$ перетворюється на нуль у D тотожно. За умовою теореми h перетворюється на нуль на E. Внаслідок неперервності a також є нулем функції h. Із попереднього бачимо, що його порядок не може бути скінченним, і, отже, h перетворюється на нуль у деякому околі $\mathcal{O}_\delta(a)$.

Нехай A — внутрішність множини нулів функції h. Очевидно, що A відкрита і $a \in A$. Покажемо, що $B = D \setminus A$ також відкрита. Дійсно, якщо $b \in B$ не є внутрішньою точкою, то в будь-якому її околі знайдуться точки з A, тобто b — гранична точка нулів функції h. Але за доведеним вона повинна тоді належати A. Таким чином, $D = A \cup B$, де A і B — відкриті множини, що не перетинаються. Через зв'язність D одна з цих множин порожня. Однак $A \neq \emptyset$. Отже, $B = \emptyset$ і $D = A$. □

Наслідок 5.1 *Якщо $f(z) \not\equiv 0$ голоморфна в області D, то всі її нулі ізольовані й скінченного порядку.*

5.3 Ряди Лорана

Розглянемо спочатку ряд вигляду

$$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots .$$

Проста заміна змінної $z = 1/\zeta$ зводить його до звичайного степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$, областю збіжності якого, як ми знаємо, є круг $|\zeta| < R$, де $R = 1/(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|})$. Отже, областю збіжності початкового ряду є зовнішність круга $|z| > 1/R$, де його сума є аналітичною функцією. Якщо скомбінувати такий ряд зі звичайним степеневим рядом, то отримаємо більш загальну форму степеневого ряду: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, або $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, областю збіжності якого (якщо вона не порожня) є кільце.

Теорема 5.32 (Лорана) *Будь-яку функцію f, голоморфну в кільці*

$$K = \{z : r < |z-a| < R\},$$

можна зобразити як суму збіжного в K ряду

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{5.3}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \tag{5.4}$$

де γ_ρ — додатно-орієнтоване коло $|\zeta - a| = \rho, r < \rho < R$.

Доведення. Відзначимо насамперед, що інтеграли в правій частині (5.4) не залежать від значення $\rho \in (r, R)$. Дійсно, якщо $\rho', \rho'' \in (r, R)$, то $\gamma_{\rho'} - \gamma_{\rho''} \sim 0 \pmod K$ і за теоремою Коші, застосованою до функції $f(z)/(z-a)^{n+1}$, $n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$, одержуємо

$$\int\limits_{\gamma_{\rho'}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \int\limits_{\gamma_{\rho''}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} .$$

Нехай $r < r' < R' < R$. Тоді цикл $\gamma_{R'} - \gamma_{r'}$ обмежує кільце

$$K' = \{z : r' < |z - a| < R'\} .$$

Унаслідок інтегральної формули Коші маємо в K' зображення

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) + f_2(z) .$$

Функцію f_1 можна розглядати як інтеграл Коші в крузі $|z - a| < R'$. Її розвинення в ряд Тейлора (див., наприклад, доведення теореми 5.29) має вигляд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

де коефіцієнти c_n визначаються за формулою (5.4).

Для одержання розвинення функції f_2 у зовнішності круга $|z - a| > r'$ подамо ядро Коші у вигляді

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z - a)\left(1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z - a)^n} .$$

Оскільки при $|z - a| > z'$ і $\zeta \in \gamma_{r'}$ виконується нерівність

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = \frac{r'}{|z - a|} < 1 ,$$

то одержаний ряд збігається рівномірно за $\zeta \in \gamma_{r'}$ і його можна почленно інтегрувати. Помноживши його на обмежену функцію $\dfrac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ і проінтегрувавши почленно, одержимо

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - a)^n} ,$$

де

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r'}} (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta)\, d\zeta = c_{-n}\,.$$

Додаючи тепер одержані розвинення для f_1 і f_2, отримуємо розвинення (5.3) для функції f у кільці K'. Оскільки r' і R' вибирали довільно і коефіцієнти c_n не залежать від цього вибору, то одержане зображення має місце в усьому K.

Означення 5.3 *Ряд* (5.3)*, коефіцієнти якого обчислюються за формулами* (5.4)*, називається рядом Лорана функції f у кільці K. Сукупність членів цього ряду з невід'ємними степенями називається його правильною частиною, а сукупність членів із від'ємними степенями — головною частиною.*

Теорема 5.33 (єдиності) *Якщо функція f у кільці*

$$K = \{z : r < |z - a| < R\}$$

зображується рядом вигляду (5.3)*, то коефіцієнти цього ряду визначаються за формулами* (5.4)*.*

Доведення. Зафіксуємо $\rho \in (r, R)$. Ряд (5.3) збігається рівномірно на колі γ_ρ. Тому його можна почленно інтегрувати. Рівномірна збіжність не порушується, якщо його помножити на обмежену функцію. Помноживши рівність (5.3) на $(z-a)^{-m-1}$, де m — довільне ціле, і перейшовши до почленного інтегрування, одержимо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{\gamma_\rho} (z-a)^{n-m-1}\, dz = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{m+1}}\,.$$

Однак у лівій частині всі доданки, окрім відповідного індексу $n = m$, перетворються на нуль, і ми одержимо

$$c_m \cdot 2\pi i = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{m+1}}\,.$$

□

Теорему 5.33 можна сформулювати так: *будь-який збіжний ряд* (5.3) *є рядом Лорана своєї суми.* Формули (5.4) для обчислення коефіцієнтів ряду Лорана на практиці застосовують досить рідко через громіздкість супутніх обчислень. На підставі доведеної теореми для отримання лоранівського розвинення можна використовувати будь-який коректний прийом. Результат буде один і той самий.

5.4 Ізольовані особливі точки

Якщо для $a \in \mathbb{C}$ знайдеться такий окіл $\mathcal{O}_r(a)$, що f є голоморфною в проколеному околі $\dot{\mathcal{O}}_r(a) = \mathcal{O}_r(a) \setminus \{a\}$, то a називається ізольованою особливою точкою функції f. Залежно від поведінки функції при наближенні до особливої точки проведемо таку класифікацію.

Означення 5.4 *Ізольована особлива точка a функції f називається:*

1) *усувною особливою точкою, якщо існує скінченна границя*

$$\lim_{z\to a} f(z) = A\,;$$

2) *полюсом, якщо $f(z) \to \infty$ при $z \to a$;*

3) *істотно особливою точкою, якщо f не має ні скінченної, ні нескінченної границі при $z \to a$.*

Теорема 5.34 *Ізольована особлива точка a функції f є усувною в тому і лише в тому разі, якщо f обмежена в деякому проколеному околі $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$.*

Доведення. Необхідність очевидна.

Для доведення достатності припустимо, що $|f(z)| \leqslant M$ при всіх $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(a)$ і деякому $M > 0$. За теоремою Лорана 5.32 f зображується в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ рядом вигляду

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,,$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}\,,$$

γ_ρ — додатно-орієнтоване коло $|z-a| = \rho$, а ρ можна вибрати будь-яким в інтервалі $(0, r)$. Оскільки

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} M \cdot \rho^{-n} 2\pi = M\rho^{-n}\,,$$

то $c_n = 0$ за всіх від'ємних номерів n. Таким чином, ряд Лорана функції f в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ є, по суті, звичайним степеневим рядом і визначає в $\mathcal{O}_r(a)$ голоморфну функцію g, що збігається з f в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$. $\square$

Зауваження 5.2 *З доведення теореми бачимо, що перевизначення (або довизначення) функції f в усувній особливій точці a робить її аналітичною в повному околі $\mathcal{O}_r(a)$. Цим пояснюється назва.*

Наслідок 5.2 *Нехай $f \in \mathcal{H}(D)$ і a ($a \in D$) — нуль порядку m функції f. Тоді в D має місце рівність*

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

де $g \in \mathcal{H}(D)$ і $g(a) \neq 0$.

Доведення. Функція g, визначена рівністю $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^n}$, є аналітичною в $D \setminus \{a\}$. Неважко помітити, що a є для g усувною особливою точкою. Отже, $g \in \mathcal{H}(D)$. Умова $g(a) = 0$ означала б, що f має в a нуль більш високого порядку, ніж m. Таким чином, $g(a) \neq 0$.

Теорема 5.35 (Сохоцького, Вейєрштрасса) *Множина значень, яких набуває аналітична функція в будь-якому околі істотно особливої точки, є всюди щільною в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доведення. Припустимо супротивне. Тоді знайдеться таке комплексне число $A \in \mathbb{C}$ і $\varepsilon > 0$, що $|f(z) - A| > \varepsilon$ при $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(a)$, де a — істотно особлива точка функції f, а $\mathcal{O}_r(a)$ — деякий її окіл. Функція $g(z) = 1/(f(z) - A)$ буде аналітичною і обмеженою в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$. За теоремою 5.34 a є усувною особливою точкою функції g. Якщо $g(a) \neq 0$ то $f(z) \to 1/g(a) + A$ при $z \to a$ і a буде усувною особливою точкою й для f. У разі $g(a) = 0$ повинно виконуватися граничне співвідношення $f(z) \to \infty$ при $z \to a$, це означає, що a є полюсом функції f. Одержана суперечність з умовою теореми завершує доведення. $\square$

Під час доведення теореми 5.34 ми встановили також, що a є усувною особливою точкою функції f у тому і лише в тому випадку, якщо лоранівське розвинення в проколеному околі цієї точки не містить головної частини. Виявляється, головна частина лоранівського розвинення повністю визначає характер особливої точки.

Теорема 5.36 *Ізольована особлива точка $a \in \mathbb{C}$ функції f є полюсом (істотно особливою) в тому і лише в тому разі, якщо головна частина ряду Лорана функції f в проколеному околі $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ містить скінченне (нескінченне) число відмінних від нуля членів.*

Доведення. Нехай лоранівське розвинення функції f в околі $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ має вигляд

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots\,, \quad c_{-m} \neq 0\,.$$

Функція φ, зображена рядом

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-m}(z-a)^k\,,$$

є аналітичною в $\mathcal{O}_r(a)$ і $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0$. З рівності $f(z) = = (z-a)^{-m} f(z)$ випливає, що $f(z) \to \infty$ при $z \to a$. Таким чином, a — полюс функції.

Припустимо тепер, що a — полюс. Тоді f не перетворюється в нуль в деякому проколеному околі $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$, і, отже, в цьому околі є аналітичною функція $1/f$. Крім того, $1/f(z) \to 0$ при $z \to a$. Із теореми 5.34 випливає, що a є усувною особливою точкою для $1/f$. Нехай m — порядок нуля функції $1/f$ у точці a. Тоді

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m g(z)\,,$$

де $g \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_r(a))$ і g не має нулів у $\mathcal{O}_r(a)$. Функція $1/g$ також буде аналітичною в $\mathcal{O}_r(a)$ і її розвинення в ряд Тейлора можна записати у вигляді

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad c_0 \neq 0\,.$$

Одержимо зображення

$$f(z) = (z-a)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n\,,$$

що згідно з теоремою 5.33 і є лоранівським розвиненням функції f.

Із доведеного і висновків відносно усувної особливої точки випливає твердження про істотно особливу точку. $\square$

Означення 5.5 *Порядком (або кратністю) полюса a функції f називається порядок цієї точки як нуля функції* $1/f$.

Із доведення теореми 5.36 бачимо, що порядок полюса збігається з номером старшого члена головної частини лоранівського розвинення функції в околі полюса.

Голоморфна в $\mathbb{C}$ функція називається *цілою*. У цьому випадку, як і у випадку голоморфності f у зовнішності круга $|z| > R$, природно розглянути нескінченність як ізольовану особливу точку. Класифікація особливих точок на цей випадок поширюється шляхом заміни $z = 1/\zeta$ і перенесення характеру особливості точки $\zeta = 0$ функції $f(1/\zeta)$ на точку $z = \infty$ функції $f(z)$. Якщо в лоранівському розвиненні в околі нескінченності, тобто за степенями z у зовнішності круга $|z| > R$, під головною частиною розуміти сукупність членів із додатними степенями, то зв'язок між класифікацією і виглядом головної частини буде такий самий, як і в скінченних точках.

Характер особливості на нескінченності багато в чому визначає цілу функцію. Дійсно, якщо нескінченність є усувною особливою точкою, то, за теоремою Ліувілля, ціла функція зводиться до тотожної постійної. Якщо це — полюс, то головна частина лоранівського розвинення f в околі нескінченно віддаленої точки є поліномом $P(z) = c_1 z + \ldots + c_m z^m, \quad c_m \neq 0$. Але тоді $g = f - P$ також буде цілою функцією, і нескінченно віддалена точка для g буде усувною. Отже, $g(z) \equiv const$ і f — поліном.

Цілі функції з істотною особливістю на нескінченності називаються *цілими трансцендентними функціями*.

Такими є e^z, $\sin z$, $\cos z$.

5.5 Лишки

Нехай a — ізольована особлива точка функції f і $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ — проколений окіл, в якому f аналітична. Тоді, згідно з теоремою Коші, інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\, dz\,,$$

де $\gamma_\rho = \partial \mathcal{O}_\rho(a), \;\; 0 < \rho < r$, не залежить від ρ. Його значення називається *лишком* функції f у точці a і позначається $\operatorname*{Res}_a f$ або $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$.

Теорема 5.37 *Лишок функції f в ізольованій особливій точці $a \in \mathbb{C}$ дорівнює коефіцієнту при $(z-a)^{-1}$ лоранівського розвинення f в околі точки a.*

Доведення. Оскільки ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ збігається рівномірно на колі γ_ρ, то його можна почленно інтегрувати:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = c_{-1}, J(\gamma_\rho, a) = c_{-1}\,.$$

$\square$

Зауваження 5.3 *З доведення бачимо, що якщо γ — замкнена кусково-гладка крива, розміщена в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = c_{-1}, J(\gamma, a) = J(\gamma, a)\,\operatorname*{Res}_{a} f\,.$$

Наслідок 5.3 *В усувній особливій точці лишок дорівнює нулю.*

У разі, якщо a — полюс, можна навести формулу для обчислення лишку, що не потребує знаходження лоранівського розвинення. Нехай $m \geqslant 1$ — порядок полюса. Тоді f має в проколеному околі $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ розвинення вигляду

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots\,,$$

де $c_{-m} \neq 0$. Функція $g(z) = (z-a)^m f(z)$ матиме a усувною особливою точкою, а c_{-1} буде коефіцієнтом її ряду Тейлора при $(z-a)^{m-1}$. Із формул для коефіцієнтів ряду Тейлора одержимо

$$\operatorname*{Res}_{a} f = c_{-1} = \frac{g^{m-1}(a)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right]\,.$$

При $m = 1$ ця формула набирає вигляду

$$\operatorname*{Res}_{a} f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,.$$

Теорема 5.38 *Нехай D — область, обмежена циклом γ, і f — голоморфна на $\overline{D}$ функція, за винятком скінченного числа особливих точок a_1, …, a_N, розташованих у D. Тоді*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{a_k} f\,.$$

Доведення. Нехай $\rho > 0$ таке, що $\overline{\mathcal{O}_\rho(a_k)} \subset D$ при всіх $k = 1, \dots, N$ і $\overline{\mathcal{O}_\rho(a_i)} \cap \overline{\mathcal{O}_\rho(a_j)} = \emptyset$ при $i \neq j$. Тоді цикл $\gamma - \sum_{k=1}^{N}\sigma_k$, де $\sigma_k = \partial\mathcal{O}_\rho(a_k)$, буде гомологічним нулю відносно області голоморфності функції f. Отже, за теоремою Коші маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\sigma_k} f(z)\,dz = 0\,,$$

що еквівалентно рівності, яку доводять. $\square$

Як вищезазначалося, у разі голоморфності f у зовнішності деякого круга $|z| > R$ нескінченно віддалену точку природно віднести до особливих. Визначимо лишок у нескінченності за допомогою рівності

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma_\rho} f(z)\, dz \,,$$

де γ_ρ — додатно-орієнтоване коло $|z| = \rho$, $\rho > R$. Інтегруючи почленно лоранівське розвинення $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, z^n$ на γ_ρ, одержимо

$$\operatorname*{Res}_{infty} f = -c_{-1} \,.$$

Члени з від'ємними степенями входять до правильної, а не головної частини лоранівського розвинення в нескінченності. На відміну від скінченних точок лишок у нескінченності може виявитися не таким, що не дорівнює нулю навіть у разі, якщо нескінченність є усувною особливою точкою.

Теорема 5.39 *Нехай f — аналітична функція в $\mathbb{C}$, за винятком скінченного числа особливих точок a_1, ..., a_N. Тоді*

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f + \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{a_k} f = 0 \,.$$

Доведення. Нехай γ — коло з центром на початку координат і таке, що всі a_k, $k = 1$, ..., N, потрапляють усередину круга, обмеженого γ. Застосування попередньої теореми дає необхідний результат. $\square$

Теорія лишків – ефективний інструмент для обчислення визначених інтегралів. Необхідно мати на увазі, що підінтегральна функція повинна бути близькою до аналітичної. Це на практиці, зазвичай, виконується. Більш істотним є те, що теорія лишків пов'язана з інтегруванням по замкненому контуру, в той час як у дійсному аналізі інтегрування проводять по відрізку. Розглянемо на прикладах, як ці труднощі долаються.

Приклад 1. Інтеграл вигляду

$$\int\limits_{0}^{2\pi} R(\cos\,\theta, \sin\,\theta)\, d\theta \,,$$

де R — раціональна функція, можна обчислювати за допомогою лишків.

Введення комплексної змінної $z = e^{i\theta}$ перетворить інтеграл до вигляду

$$-i \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z}\,.$$

Залишається знайти лишки в полюсах, що потрапляють усередину одиничного круга.

Наприклад, обчислимо інтеграл

$$\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta}, \quad a > 1\,.$$

Оскільки розширення інтервалу інтегрування до $(0, 2\pi)$ приводить до подвоєного результату, одержимо

$$\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = -i\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}\,.$$

Якщо

$$z^2 + 2az + 1 = (z - z_1)(z - z_2)\,,$$

де $z_k = -a + (-1)^k\sqrt{a^2-1}$, і $|z_1| > 1$, $|z_2| < 1$, то

$$\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = 2\pi \operatorname*{Res}_{z=z_2}\left\{\frac{-i}{z^2+2az+1}\right\} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

Приклад 2. Інтеграл вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx\,,$$

де R — раціональна функція, збігається в тому й лише в тому разі, якщо R не має полюсів на дійсній осі, і степінь знаменника принаймні на 2 порядки вищий за степінь чисельника. Виберемо $\rho > 0$ таким, щоб всі полюси функції R містилися в крузі $\mathcal{O}_\rho(0)$. Нехай γ_ρ^+ — частина додатно орієнтованого кола $|z| = \rho$, розміщена у верхній півплощині. За теоремою про лишки

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} R(x)\,dx + \int\limits_{\gamma_\rho^+} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_{z=a} R(z)\,.$$

Однак, за достатньо великих ρ і деякої константи M буде виконуватися на γ_ρ нерівність $|R(z)| \leqslant M/\rho^2$. Отже, для цих ρ маємо

$$\left| \int\limits_{\gamma_\rho^+} R(z)\, dz \right| \leqslant \int\limits_{\gamma_\rho^+} |R(z)| \cdot |dz| \leqslant \frac{\pi\, M}{\rho} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to \infty.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname*{Res}_{z=a} R(z)\,.$$

Наприклад,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \ \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i\, \frac{1}{2i} = \pi\,.$$

Вправи

1 Обчислити інтеграл по замкненому контуру

$$\oint\limits_{|z|=1} z\bar{z}\,, dz\,.$$

2 Обчислити інтеграл по замкненому контуру

$$\oint\limits_{|z|=2} z\mathrm{Im}(z^2)\,, dz\,.$$

3 Обчислити інтеграл по замкненому контуру

$$\oint\limits_{|z|=1} \mathrm{Re} z\,, dz\,.$$

4 Обчислити інтеграл

$$\oint\limits_{C} \frac{e^z\,, dz}{z(z-3)}\,,$$

де C — коло радіусом $3/2$ з центром в точці 2.

5 Обчислити інтеграл
$$\oint\limits_C \frac{e^z\,, dz}{(z-i)^3}\,,$$
де C — довільний замкнений контур, що одноразово обходить точку i в позитивному напрямку.

6 Обчислити інтеграл
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{2z^3+1}{(z-1)^4}\,dz\,.$$

Розділ 6

Основні принципи

6.1 Принцип аргументу

Сукупність $\mathcal{H}(D)$ усіх голоморфних в області D функцій утворює *кільце*, тобто є замкненою відносно суми, різниці та добутку функцій. Що стосується частки f/g двох функцій із $\mathcal{H}(D)$, то вона голоморфна в D, за винятком нулів знаменника g. Припустимо, що $g(a) = 0,\ a \in D$. Через ізольованість нулів знайдеться такий окіл $\mathcal{O}_r(a) \subset D$, в якому f і g матимуть вигляд $f(z) = (z-a)^n f_1(z)\ \ g(z) = (z-a)^m g_1(z)$, де f_1 і g_1 — аналітичні функції, що не перетворюються на нуль у $\mathcal{O}_r(a)$ функції. Але тоді в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ матимемо:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-a)^{n-m}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,.$$

Оскільки $f_1/g_1 \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_r(a))$, то f/g має в a усувну особливість при $n \geqslant m$ і полюс — при $n < m$. При цьому кратність полюса буде дорівнювати $m-n$.

Отже, функція f *мероморфна* в області D, якщо вона голоморфна в D, за винятком деякої множини полюсів. Очевидно, сукупність $\mathfrak{M}(D)$ усіх мероморфних функцій в області D утворює *поле*. Під *мероморфністю функції в точці* розуміють мероморфність у деякому її околі.

Оскільки полюси, як і нулі, мероморфної функції в області D є ізольованими, то на будь-якому компакті $K \subset D$ їх може бути лише скінченне число. Під числом полюсів (або нулів) на множині K *з урахуванням їх кратності* будемо розуміти суму кратностей полюсів (відповідно нулів), що потрапляють на K.

Теорема 6.40 *Нехай D — область, обмежена циклом γ, і f — мероморфна функція в $\overline{D}$, що не має нулів та полюсів на γ. Тоді число N її нулів і число P полюсів в області D з урахуванням їх кратності задовольняють* *співвідношення*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz\,. \tag{6.1}$$

Доведення. Оскільки $\overline{D}$ є компактом в області мероморфності функції f, то в D міститься лише скінченне число нулів і полюсів. Нехай $a_1, \ldots, a_n$ — її нулі в D із кратностями $s_1, \ldots, s_n$, а $b_1, \ldots, b_m$ — її полюси з кратностями q_1, $\ldots$, q_m відповідно. Тоді $N = s_1 + \cdots + s_n$ і $P = q_1 + \cdots + q_m$. Далі розглянемо функцію

$$g(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{-s_j} \cdot \prod_{j=1}^{m} (z - b_j)^{q_j} \cdot f(z)\,.$$

Очевидно, що ізольовані особливі точки $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ функції g є усувними. Отже, функція g є голоморфною і не перетворюється на нуль на $\overline{D}$. Оскільки

$$f(z) = (z - a_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_n)^{s_n} \cdot (z - b_1)^{-q_1} \cdot \ldots \cdot (z - b_n)^{-q_m} g(z)$$

і

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j}{z - a_j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{q_j}{z - b_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,,$$

то, застосовуючи теорему Коші до функції g'/g, аналітичної на $\overline{D}$, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} s_j \cdot J(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^{m} q_j \cdot J(\gamma, b_j) = N - P\,.$$

□

Зауваження 6.1 *Нехай* Γ — *цикл, отриманий із* γ *перетворенням* $w = f(z)$. *Тоді*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w} = J(\Gamma, 0)\,.$$

Іншими словами, інтеграл у правій частині (6.1) виражає приріст (поділений на 2π) аргументу точки w, що здійснює обхід циклу Γ. У зв'язку з цим співвідношення (6.1) називається в теорії аналітичних функцій *принципом аргументу*.

На практиці принцип аргументу найчастіше застосовують відповідно до такого результату.

Теорема 6.41 (Руше́) *Нехай D — область, обмежена циклом γ, і f, g — аналітичні функції на $\overline{D}$, що задовольняють умову $|f(z)| < |g(z)|$ при $z \in \gamma$. Тоді g і $g+f$ мають у D однакове число нулів з урахуванням їх кратності.*

Доведення. З умови теореми випливає, що g і $g+f$ не перетворюються на нуль на γ. Нехай N_1 — число нулів g, а N_2 — число нулів $g+f$ у D з урахуванням їх кратності. Тоді функція $F = (g+f)/g$ є мероморфною на $\overline{D}$, і різниця між числом N її нулів і числом P її полюсів у D з урахуванням їх кратності дорівнює $N - P = N_2 - N_1$. Однак, як зазначалося вище,

$$N - P = J(\Gamma, 0)\,,$$

де $\Gamma = F(\gamma)$. З іншого боку, з умови $|F(z) - 1| < 1$ при $z \in \gamma$ випливає, що Γ міститься в крузі $|w - 1| < 1$ і $J(\Gamma, 0) = 0$. Таким чином, $N_2 - N_1 = 0$ і $N_2 = N_1$. □

На завершення наведемо результат, що стосується локально-рівномірної збіжності.

Теорема 6.42 (Гурвіца) *Нехай функції $f_n \in \mathcal{H}(D)$, $n = 1, 2, \ldots$, не перетворюються на нуль у D і $f_n \to f$ локально-рівномірно в D. Тоді або $f(z) \equiv 0$ в D, або f не перетворюється на нуль в D.*

Доведення. Нехай $f(z) \not\equiv 0$. Зафіксуємо довільну точку $a \in D$. Через ізольованість нулів знайдеться таке $r > 0$, що $\mathcal{O}_r(a) \subset D$ і f не перетворюється на нуль на $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(a)$. Як неперервна на компакті функція $|f|$ відокремлена від нуля на γ, тобто $|f(z)| \geqslant \delta > 0$ при $z \in \gamma$. Звідси з локально-рівномірної збіжності послідовності $\{f_n\}$ випливає, що $1/f_n \to 1/f$ рівномірно на γ. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\,.$$

Однак інтеграли зліва виражають числа нулів функцій f_n у $\mathcal{O}_r(a)$ і отже, дорівнюють нулю. Тому дорівнює нулю інтеграл справа, і f не перетворюється на нуль в $\mathcal{O}_r(a)$. Зокрема, $f(a) \neq 0$. □

Наслідок 6.1 *Нехай послідовність однолистих функцій в області D $f_n \in \mathcal{H}(D)$ збігається локально-рівномірно в D до функції $f(z) \not\equiv const$. Тоді f також однолиста в D.*

Доведення. Припустимо, що для деяких $z_1 \neq z_2$ у D має місце рівність $f(z_1) = f(z_2) = A$. Нехай U_1 і U_2 — два околи, що не перетинаються, точок z_1 і z_2 відповідно, розташовані в D. Через однолистість функції f_n в одному з околів U_1 або U_2 вона не набуває значення A. Отже, можна виділити підпослідовність $\{f_{n_k}\}$ функцій, які не набувають значення A в одному з околів. Нехай для визначеності ним буде U_1. Застосовуючи теорему Гурвіца до послідовності функцій $f_{n_k}(z) - A$ в області U_1, одержуємо, що $f(z) - A$ не перетворюється на нуль у U_1. Це суперечить припущенню, що $f(z_1) = A$. $\square$

Інше доведення теореми Гурвіца. Припустимо, що $f(z) \not\equiv 0$ і $f(a) = 0$ для деякої $a \in D$. Унаслідок ізольованості нулів знайдеться таке $r > 0$, що в проколеному околі $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ функція f не перетворюється на нуль. Можна також вважати, що f не перетворюється на нуль і на $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(a)$. Оскільки γ є компактом, то $\min\limits_{z\in\gamma} |f(z)| = \delta > 0$. Унаслідок локально-рівномірної збіжності послідовності $\{f_n\}$ знайдеться такий номер N, що $|f_n(z) - f(z)| < \delta/2$ при всіх $n \geqslant N$ і $z \in \gamma$. Але тоді, за теоремою Руше́, функція $f_n = f + (f_n - f)$ матиме в $\mathcal{O}_r(a)$ стільки нулів, скільки їх має f, тобто принаймні один. Одержана суперечність з умовами теореми доводить необхідне твердження. $\square$

6.2 Принцип відкритості

Спочатку встановимо один результат, який дає уявлення про локальну структуру відображення, що здійснюється несталою аналітичною функцією.

Теорема 6.43 (Про локальну структуру відображення) *Нехай f голоморфна в області D і $f(z_0) = w_0$, $z_0 \in D$. Припустимо також, що функція $f(z) - w_0$ має в z_0 нуль порядку n, тобто $f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ і $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Тоді знайдуться такі околи $\mathcal{O}_r(z_0)$ і $\mathcal{O}_\rho(w_0)$, що рівняння $w' = f(z)$ має рівно n різних коренів у $\dot{\mathcal{O}}_r(z_0)$ за будь-якого $w' \in \dot{\mathcal{O}}_\rho(w_0)$.*

Доведення. З умови теореми випливає, що $f(z) \not\equiv const$. Унаслідок ізольованості нулів аналітичної функції знайдеться окіл $\mathcal{O}_r(z_0)$, який разом із замиканням міститься в області D і функції $f(z) - w_0$, $f'(z)$ не перетворюються на нуль у $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \backslash \{z_0\}$. Нехай $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$ і $\Gamma = f(\gamma)$. Зауваживши, що Γ не проходить через точку w_0, виберемо число $\rho > 0$ менше, ніж відстань від w_0 до Γ. Зафіксуємо довільне $w' \in \dot{\mathcal{O}}_\rho(w_0)$. З умови вибору ρ випливає виконання нерівності

$$|w_0 - w'| < |f(z) - w_0|$$

за всіх $z \in \gamma$. Але тоді за теоремою Руше́ функції

$$f(z) - w_0 \quad \text{і} \quad f(z) - w' = (f(z) - w_0) + (w_0 - w')$$

мають у $\mathcal{O}_r(z_0)$ однакове число нулів з урахуванням їх кратності. Однак функція $f(z) - w_0$ має в $\mathcal{O}_r(z_0)$ один нуль $z = z_0$ порядку n. Оскільки $f'(z) \neq 0$ при $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(z_0)$, то всі нулі функції $f(z) - w'$ у $\mathcal{O}_r(z_0)$ є простими. Таким чином, у $\mathcal{O}_r(z_0)$ міститься рівно n точок $z_1, \ldots, z_n$, що є розв'язками рівняння $f(z) = w'$. $\square$

Наслідок 6.2 *Умова $f'(z) \neq 0$ є необхідною для однолистості функції f в області D.*

Теорема 6.44 (Принцип відкритості або збереження області) *Нестала аналітична функція переводить відкриті множини у відкриті, а область — в область.*

Доведення. Твердження відразу ж випливає з теореми 6.43 та інваріантності зв'язності при неперервних відображеннях. $\square$

Безпосереднім наслідком принципу відкритості є такий результат.

Теорема 6.45 (Принцип максимуму модуля) *Якщо f — нестала аналітична функція в області D, то максимум модуля $|f|$, а також максимуми і мінімуми $\mathrm{Re} f$ та $\mathrm{Im} f$ не можуть досягатися у внутрішніх точках області D.*

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує така точка $z_0 \in D$, що для всіх $z_0 \in D$ виконується нерівність $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$. Візьмемо замкнений круг $\overline{K}$ у цій області з центром у точці z_0. За принципом відкритості або збереження області існує такий круг $\overline{K}_1$ з центром у точці $f(z_0)$, що $\overline{K}_1 \subset f(\overline{K})$. На межі круга $\overline{K}_1$ існує така точка ζ, що $|\zeta| > |f(z_0)|$. Одержана суперечність доводить твердження для максимуму модуля $|f|$. Твердження для максимуму і мінімуму $\mathrm{Re} f$ та $\mathrm{Im} f$ доводиться аналогічно. $\square$

Задача. В якій точці квадрата досягається максимум добутку чотирьох відстаней від точки до вершин квадрата.

Теорема 6.46 (Лема Шварца) *Нехай аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функція f задовольняє умовам $f(0) = 0$ і $|f(z)| \leqslant 1$ при $z \in \mathbb{D}$. Тоді*

$$|f'(0)| \leqslant 1 \text{ і } |f(z)| \leqslant |z| \text{ при } z \in \mathbb{D}\,.$$

При цьому знак рівності досягається лише у випадку, якщо $f(z) \equiv e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доведення. З припущень теореми випливає аналітичність функції у $\mathbb{D}$ $\varphi(z) = f(z)/z$. Для кожного $r \in (0, 1)$ через принцип максимуму маємо

$$\max_{|z|\leqslant r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \frac{1}{r}\,.$$

Для фіксованого $z \in \mathbb{D}$ можна здійснити граничний перехід у нерівності $|\varphi(z)| \leqslant 1/r$ при $r \to 1$. Таким чином, $|\varphi(z)| \leqslant 1$ при $z \in \mathbb{D}$, що еквівалентно нерівності $|f(z)| \leqslant |z|$. Нерівність $|f'(0)| \leqslant 1$ випливає з одержаної нерівності і зауваження, що $\varphi(0) = f'(0)$.

Припустимо, що в одній із доведених нерівностей досягається знак рівності. Це означало б, що $|\varphi(z_0)| = 1$ для деякого $z_0 \in \mathbb{D}$. Згідно з принципом максимуму тоді б випливало, що $\varphi(z) \equiv e^{i\alpha}z$. □

6.3 Принцип компактності

У цьому параграфі ми розглянемо питання про умови щодо сім'ї голоморфних функцій в області D , які дозволяли б із будь-якої її послідовності виділяти локально рівномірно збіжну у D підпослідовність.

Означення 6.1 *Сім'я $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ називається локально рівномірно обмеженою в D, якщо для будь-якої точки $z_0 \in D$ знайдуться такі окіл $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ і число $M > 0$, що $|f(z)| \leqslant M$ за всіх $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ і $f \in \mathcal{F}$.*

Іншими словами, для кожної компактної множини $K \subset D$ сім'я $\mathcal{F}$ є рівномірно обмеженою на K.

Теорема 6.47 *Нехай $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ — локально рівномірно обмежена сім'я в D. Тоді $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ також є локально рівномірно обмеженою сім'єю в D.*

Доведення.

Нехай z_0 — довільна точка області D. За умовою знайдуться такі $r > 0$ і $M > 0$, що $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$ і $|f(z)| \leqslant M$ для будь-яких $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ і $f \in \mathcal{F}$. Нехай $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$. Тоді, використовуючи інтегральну формулу Коші для похідних, одержуємо для будь-якого $z \in \mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ і будь-якої $f \in \mathcal{F}$

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{f(\varsigma)\,d\varsigma}{(\varsigma - z)^2}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma \frac{M}{r^2/4}\,|d\varsigma| = \frac{4M}{r}\,.$$

□

Теорема 6.48 *Нехай $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ — локально рівномірно обмежена сім'я в D. Тоді на будь-якому компакті $K \subset D$ ця сім'я є рівностепенево неперервною.*

Доведення. Нехай K — компактна підмножина в області D. Виберемо $r > 0$ меншим, ніж відстань від K до ∂D. Тоді множина

$$K_1 = \{z : \operatorname{dist}(z, K) \leqslant r\}$$

також буде компактною підмножиною області D. За попередньою теоремою знайдеться таке $M > 0$, що

$$|f'(z)| \leqslant M \text{ за всіх } z \in K_1 \text{ і } f \in \mathcal{F}\,.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ довільне. Виберемо $\delta < \min\{r, \varepsilon/M\}$. Тоді для будь-яких z', z'', що належать K і задовольняють умову $|z' - z''| < \delta$, матимемо $[z', z''] \subset K_1$ і

$$|f(z') - f(z'')| = \left|\int\limits_{[z',z'']} f'(z)\,dz\right| \leqslant M \cdot |z' - z''| < M\delta \leqslant \varepsilon\,.$$

□

Теорема 6.49 (Монтеля) *Якщо $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ — локально рівномірно обмежена сім'я в D, то з будь-якої послідовності $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ можна вибрати підпослідовність $\{f_{n_k}\}$, локально рівномірно збіжну в D.*

Доведення. Нехай $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ — компактне вичерпання області D, тобто K_j — компактні підмножини в D і $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j = D$. Таку послідовність компактних множин можна побудувати, наприклад, таким чином. Виберемо $R > 0$ і натуральне N так, щоб множина

$$\{z \in D : \operatorname{dist}(z, \partial D) \geqslant \frac{1}{N},\ |z| \leqslant R\}$$

була непорожньою. Тоді за шукану послідовність можна взяти множини

$$K_j = \{z \in D :\ dist(z, \partial D) \geqslant \frac{1}{N+j},\ |z| \leqslant R + j\}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Згідно з попередньою теоремою сім'я $\mathcal{F}$ задовольняє на кожному компакті K_j умови теореми Арцела, тобто вона є на кожному K_j рівномірно обмеженою і рівностепенево неперервною сім'єю функцій. Отже, якщо $\{f_n\}$ — довільна послідовність функцій із $\mathcal{F}$, то з неї можна виділити підпослідовність $\{f_{1,k}\}$, що збігається рівномірно на K_1. Із цієї підпослідовності, у свою чергу, можна виділити підпослідовність $\{f_{2,k}\}$, яка збігатиметься рівномірно на K_2. Продовжуючи цей процес, одержуємо такі підпослідовності:

$$\begin{array}{cccc} f_{1,1}, & f_{1,2}, & f_{1,3}, & \ldots \\ f_{2,1}, & f_{2,2}, & f_{2,3}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Для кожного $j = 2,\ 3,\ \ldots$, виконуються такі умови: $\{f_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ — підпослідовність із $\{f_{j-1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{f_{j,k}\}$ збігається рівномірно на K_j.

Відзначимо, що діагональна послідовність $f_{n_k} = f_{k,k}$ буде, починаючи з деякого номера, підпослідовністю кожної з $\{f_{j,k}\}$. Отже, $\{f_{n_k}\}$ збігатиметься рівномірно на кожному K_j. Оскільки $\{K_j\}$ є вичерпанням області D, то для будь-якого компакту $K \subset D$ знайдеться таке j, що $K \subset K_j$. Це означає, що $\{f_{n_k}\}$ збігається локально рівномірно в області D. $\square$

6.4 Теорема Рімана про відображення

У геометрично орієнтованій частині теорії аналітичних функцій проблема конформного відображення відіграє домінуючу роль. Теореми існування та єдиності дозволяють визначити аналітичні функції з важливими властивостями, виключивши їх аналітичний запис.

У 1851 році Ріман довів фундаментальну теорему, згідно з якою кожну однозв'язну область, відмінну від усієї площини, можна конформно відобразити на одиничний круг. Однак його доведення виявилося не позбавленим недоліків, на які звернув увагу Вейєрштрасс. Близько половини століття знадобилося для пошуку строгого доведення цієї теореми. Одним із перших його отримав Кебе. Наведений варіант доведення близький до того, який він запропонував.

Відзначимо спочатку, що через теорему Ліувілля не існує конформного відображення всієї площини на одиничний круг.

Теорема 6.50 *Нехай D — однозв'язна область, відмінна від усієї площини, і $z_0 \in D$. Тоді існує єдина аналітична функція f у D, що відображає взаємно-однозначно область D на одиничний круг $\mathbb{D}$ і задовольняє умови $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.*

Доведення. Доведемо спочатку єдиність. Припустимо, що ми маємо дві функції f_1 і f_2, які задовольняють умови з формулювання теореми. Тоді функція $\varphi = f_2 \circ f_1^{-1}$ конформно відображатиме одиничний круг $\mathbb{D}$ на себе і $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) > 0$. Згідно з лемою Шварца $|\varphi(w)| \leqslant |w|$. З іншого боку, обернена функція $\varphi^{-1}(\zeta)$ також задовольняє умови леми Шварца і $|\varphi^{-1}(\zeta)| \leqslant |\zeta|$. Підставляючи в останню нерівність замість ζ вираз $\zeta = \varphi(w)$, одержуємо $|w| \leqslant |\varphi(w)|$.

Таким чином, $|\varphi(w)| \equiv |w|$ і $\varphi(w) = e^{i\alpha}w$. З умови $\varphi'(0) > 0$ випливає $\varphi(w) \equiv w$ і $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Для доведення існування відображувальної функції f введемо до розгляду клас $\mathcal{F}$ однолистих у D функцій g, що задовольняють умови $g(z_0) = 0,\ g'(z_0) > 0$ і $|g(z)| \leqslant 1$ при $z \in D$.

Покажемо спочатку, що введений клас функцій непорожній. За умовою $D \neq \mathbb{C}$ знайдеться точка $a \notin D$. Оскільки D — однозв'язна область, то в ній виділяють однозначні вітки функцій $\ln(z-a)$ і

$$Q(z) = \sqrt{z-a} = e^{\frac{1}{2}\ln(z-a)}$$

(див. останній параграф розділу 4).

Відзначимо, що для будь-якої пари точок $z_1,\ z_2$ із D з будь-якої із рівностей

$$Q(z_1) = \pm Q(z_2)$$

випливає рівність $z_1 = z_2$. Це означає, що Q однолиста в D і $Q(D)$ не містить пари точок, симетричних відносно початку координат. Оскільки $Q(z_0) = w_0$

належить $Q(D)$ разом із деяким околом $\mathcal{O}_r(w_0)$, то $\mathcal{O}_r(-w_0) \cap Q(D) = \emptyset$. Отже, $|Q(z) + w_0| > r$ для всіх $z \in D$, і функція

$$h(z) = \frac{r}{w_0 + Q(z)}$$

є однолистою в області D із значеннями з $\mathbb{D}$. Умови нормування можна добитися додатковим дробово-лінійним перетворенням:

$$g(z) = \frac{\overline{h'(z_0)}}{|h'(z_0)|} \, \frac{h(z) - h(z_0)}{1 - \overline{h(z_0)}h(z)} \, .$$

Відзначимо, що через однолистість функції h її похідна $h'(z)$ у нуль не перетворюється. Таким чином, $g \in \mathcal{F}$, і непорожність $\mathcal{F}$ доведена.

Нехай

$$\alpha = \sup \left\{ g'(z_0) : g \in \mathcal{F} \right\} \, .$$

Ми не виключаємо можливості $\alpha = \infty$. З означення супремуму випливає існування такої послідовності $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, що $f_n'(z_0) \to \alpha$ при $n \to \infty$. Оскільки $\mathcal{F}$ є рівномірно-обмеженою в D сім'єю, то згідно з принципом компактності можна виділити підпослідовність $\{f_{n_k}\}$, що збігається локально-рівномірно в D до деякої функції f. Із теореми Вейєрштрасса випливають аналітичність функції f і рівність $f'(z_0) = \alpha$, що, зокрема, означає скінченність α. За наслідком із теореми Гурвіца маємо також однолистість функції f. У результаті $f \in \mathcal{F}$ і є розв'язком поставленої вище екстремальної задачі.

Покажемо тепер, що f — шукана функція. При цьому скористаємося її екстремальною властивістю.

Припустимо, що деяка точка w^* із $\mathbb{D}$ не належить області $f(D)$. Тоді виділяємо однозначну вітку

$$H(z) = \left(\frac{f(z) - w^*}{1 - \overline{w^*} f(z)} \right)^{1/2} \, ,$$

що є однолистою функцією в D. При цьому $|H(z)| < 1$ при $z \in D$ і $H(z_0) = \sqrt{-w^*} = \zeta^*$. Диференціюючи рівність

$$(H(z))^2 = \frac{f(z) - w^*}{1 - \overline{w^*} f(z)} \, ,$$

одержуємо

$$H'(z_0) = \frac{1 - |w^*|^2}{2\zeta^*} \, \alpha = \frac{1 - |w^*|^2}{2\sqrt{-w^*}} \, \alpha \, .$$

Перейдемо до нормованої функції

$$F(z) = \frac{\overline{H'(z_0)}}{|H'(z_0)|} \, \frac{H(z) - \zeta^*}{1 - \overline{\zeta^*} H(z)} \; .$$

Очевидно, що $F \in \mathcal{F}$. Крім того,

$$F'(z_0) = \frac{|H'(z_0)|}{1 - |\zeta^*|^2} = \frac{\alpha(1 - |w^*|^2)}{2\sqrt{|w^*|}(1 - |w^*|)} = \alpha \frac{1 + |w^*|}{2\sqrt{|w^*|}} > \alpha \; ,$$

що суперечить означенню α. □

Відзначимо, що одержана в кінці доведення нерівність не є несподіваною. Дійсно, з побудови функції F бачимно, що $f(z) = \Phi(F(z))$, де

$$\Phi(W) = \frac{\left(\dfrac{\varkappa W + \zeta^*}{1 + \overline{\zeta^*} \varkappa W}\right)^2 + w^*}{1 + \overline{w^*} \left(\dfrac{\varkappa W + \zeta^*}{1 + \overline{\zeta^*} \varkappa W}\right)^2} \; , \qquad \varkappa = \frac{H'(z_0)}{|H'(z_0)|} \; .$$

Оскільки Φ задовольняє умови леми Шварца, то $|\Phi'(0)| < 1$. Звідси

$$f'(z_0) = \Phi'(0) F'(z_0) < F'(z_0), \; .. \; f'(z_0) < F'(z_0) \, .$$

6.5 Аналітичне продовження і принцип симетрії

Згідно з теоремою єдиності голоморфна функція однозначно визначається її значеннями в як завгодно малому околі якої-небудь однієї точки. У часи Ньютона вважали, що всі функції лише такі, а труднощі вбачили лише в обчисленні значень там, де початкова формула її не визначала, тобто в аналітичному продовженні. Основна логічна складність, пов'язана з аналітичним продовженням, полягає в його неоднозначності. Нагадаємо, що раніше при визначенні однозначної вітки $\ln f(z)$ функції $f(z)$, що обертається в нуль в однозв'язній області D, ми продовжували її з точки $z_0 \in D$ шляхом інтегрування $f'(z)/f(z)$. Однозв'язність області D гарантувала нам однозначність такого продовження.

Опишемо коротко понятійний апарат, пов'язаний з уявленням про аналітичну функцію як про сукупність її продовжень.

Аналітична функція f в області D утворює *функціональний елемент* і позначається (f, D). Два функціональні елементи (f_1, D_1) і (f_2, D_2) називаються *прямими аналітичними продовженнями* один одного, якщо $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ і $f_1(z) = f_2(z)$ при $z \in D_1 \cap D_2$. Більш конкретно говорять, що (f_2, D_2) є аналітичним продовженням (f_1, D_1) в область D_2. Таке продовження може і не існувати, але якщо воно існує, то воно єдине.

Якщо (f_1, D_1) і (f_2, D_2) є прямими аналітичними продовженнями один одного, то можна було б розглянути функціональний елемент (f, D), де $D = D_1 \cup D_2$, а f співпадає з f_1 і f_2 в D_1 і D_2 відповідно. Таким чином, розгляд тільки пар функціональних елементів нового сенсу не дає.

Більш загальним поняттям є ланцюг функціональних елементів (f_1, D_1), $(f_2, D_2), \ldots$, (f_n, D_n), у якому (f_k, D_k) є прямим аналітичним продовженням функціонального елементу (f_{k-1}, D_{k-1}). Елементи в такому ланцюзі називаються *аналітичними продовженнями* один одного.

Приклад функції $\sqrt{z}$ і областей

$$D_1 = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}, \quad D_2 = \{z : \mathrm{Re} z > 0\},$$

$$D_3 = \{z : \mathrm{Im} z < 0\}, \quad D_4 = \{z : \mathrm{Re} z < 0\},$$

показує, що в результаті аналітичного продовження ми можемо повернутися в деяку область, але з іншою функцією.

Відзначимо також, що, як і у випадку прямого аналітичного продовження, продовження за допомогою ланцюга з фіксованим набором областей визначається однозначно.

Означення 6.2 *Глобальною аналітичною функцією є непорожнє сімейство $\mathfrak{f}$ функціональних елементів (f, D), в якому кожна пара елементів є аналітичним продовженням один одного за допомогою ланцюга з елементами з $\mathfrak{f}$.*

Повна аналітична функція — глобальна аналітична функція, яка містить всі аналітичні продовження кожного свого елементу.

Повна аналітична функція є, очевидно, *максимальною* в тому сенсі, що її не можна розширити. Очевидно також, що кожний функціональний елемент належить *єдиній* (а отже, і повністю визначає її) повній аналітичній функції. Глобальні аналітичні функції є більш довільними. Різні сімейства функціональних елементів можуть визначати одну і ту ж глобальну аналітичну функцію. Наприклад однозначна аналітична функція f, визначена в області D, може ідентифікуватися або з сімейством, що складається з одного функціонального елементу (f, D), або з сімейством елементів (f, D'), $D' \subset D$.

Глобальна аналітична функція $\mathfrak{f}$ має однозначно визначену похідну $\mathfrak{f}'$, яка визначена функціональними елементами (f', D). Дійсно, якщо (f_1, D_1) і (f_2, D_2) — прямі аналітичні продовження один одного, то такими ж є (f_1', D_1) і (f_2', D_2).

Аналогічне співвідношення може існувати між двома глобальними аналітичними функціями $\mathfrak{f}$ і $\mathfrak{g}$. Ми припускаємо, що кожному $(f, D) \in \mathfrak{f}$ співставляється єдиний функціональний елемент $(g, D) \in \mathfrak{g}$ так, що прямі аналітичні продовження переходять в прямі аналітичні продовження. В цьому випадку ми говоримо, що $\mathfrak{f}$ *підпорядкована* $\mathfrak{g}$, і можна визначити $\mathfrak{f}+\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{g}$ як сімейства, що складаються з елементів $(f+g, D)$ і $(f\cdot g, D)$, відповідних елементам (f, D) з $\mathfrak{f}$. Наприклад $\mathfrak{f}$ підпорядкована будь-якій цілій функції $\mathfrak{h}$, звідки випливає, що $\mathfrak{f}+\mathfrak{h}$ і $\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{h}$ коректно визначені.

Наведене поняття повної аналітичної функції називають "в сенсі Вейєрштрасса". Воно далеко відходить від звичайного поняття функції. Проте є інший підхід, заснований на понятті *ріманової поверхні*, який розглядає повну аналітичну функцію як однозначну, але визначену вже не на площині.

Розглянемо тепер спеціальний випадок аналітичного продовження, коли області D_1 і D_2 не перетинаються, а мають спільну ділянку межі. Результат, що наведений нижче, відомий як *принцип симетрії Рімана–Шварца.*

Теорема 6.51 *Нехай D — область, симетрична відносно дійсної осі, D^+ — її частина, розташована у верхній півплощині, і σ — частина дійсної осі, розташована в D. Припустимо, що f є неперервною в $D^+\cup\sigma$, голоморфною в D^+ і набуває дійсних значень на σ. Тоді вона має аналітичне продовження на всю область D, де задовольняє співвідношенню симетрії*:

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})}\,. \tag{6.2}$$

Доведення. Визначимо в області D функцію F, вважаючи $F(z) = f(z)$ при $z \in D^+ \cup \sigma$ і $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ при $z \in D^- = D \cap \{z : \ \mathrm{Im} z < 0\}$. Якщо ми покажемо, що F аналітична в D, то (F, D) буде прямим аналітичним продовженням (f, D^+).

З означення F і дійсності f на σ випливає, що F неперервна в D. Легко також показати аналітичність F в D^-. Дійсно, якщо $z_0 \in D^-$, то $\overline{z_0} \in D^+$ і

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\overline{z})}-\overline{f(\overline{z_0})}}{z-z_0} =$$

$$\lim_{z\to z_0}\overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)} = \overline{f'(\overline{z_0})}\,.$$

Нехай $x_0 \in \sigma$. Тоді знайдеться $r > 0$, таке, що $\overline{\mathcal{O}_r(x_0)} \subset D$. Позначимо $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(x_0)$ і визначимо

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,.$$

Як інтеграл Коші з неперервною щільністю $F(\zeta)$ функція $\varphi(z)$ є аналітичною в $\mathcal{O}_r(x_0)$. Якщо $\gamma^{\pm} = \gamma \cap D^{\pm}$, то

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^+} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[x_0-r,x_0+r]} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} +$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[x_0+r,x_0-r]} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \varphi^+(z) + \varphi^-(z)\,,$$

де $\Gamma^{\pm}$ — орієнтована межа $\mathcal{O}_r(x_0)\cap D^{\pm}$. Якщо $z \in D^+\cap\mathcal{O}_r(x_0)$, то $\varphi^+(z) = f(z)$ за інтегральною формулою Коші, а $\varphi^- = 0$ за інтегральною теоремою Коші, застосованою до функції $F(\zeta)/(\zeta - z)$, $\zeta \in D^-$. В дійсності, для застосування цих результатів ми повинні відступити від відрізка $[x_0 - r, x_0 + r]$ в середину області аналітичності функції F і потім здійснити граничний перехід. Аналогічно, якщо $z \in D^- \cap \mathcal{O}_r(x_0)$, то $\varphi^+(z) = 0$ і $\varphi^-(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Таким чином, $\varphi(z) = F(z)$ в $\mathcal{O}_r(x_0)$, що означає аналітичність F. $\square$

Доведена теорема має очевидні узагальнення. Область D можна вибирати симетричною відносно кола C і припускати, що $f(z)$ наближається до іншого кола C', коли z прямує до C. При цих умовах f має аналітичне продовження, яке відображає точки симетричні відносно C^*, у точки, симетричні відносно C'. Принцип симетрії часто використовується для побудови конформних відображень.

Розділ 7

Гармонічні функції

7.1 Основні властивості гармонічних функцій

Як раніше наголошувалося, під *гармонічною функцією в області D розуміють двічі неперервно диференційовну функцію*

$$u(z) = u(x, y),\ z = x + iy\,,$$

що задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Безпосередньо з лінійності оператора Лапласа Δ випливає, що сукупність $h(D)$ усіх гармонійних функцій в області D утворює лінійний простір.

Доречно провести аналогію з лінійними функціями однієї змінної, оскільки в цьому разі рівняння Лапласа приводить саме до них. Відзначимо, що для лінійних функцій виконуються теореми про середнє і принцип максимуму.

Якщо $f(z) = u(z) + iv(z)$ — аналітична функція в області D, то згідно з рівняннями Коші — Рімана функції u і v є гармонійними в D.

Теорема 7.52 *Нехай D — однозв'язна область і $u \in h(D)$. Тоді знайдеться така функція $f \in \mathcal{H}(D)$, що $u(z) = \mathrm{Re} f(z)$.*

Доведення. Нехай $u \in h(D)$. Розглянемо функцію g, визначену в області D рівністю

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad x + iy = z\,.$$

Оскільки u задовольняє рівняння Лапласа, для функції g виконується умова комплексної диференційовності, тобто $g \in \mathcal{H}(D)$. Внаслідок однозв'язності області D однозначно визначена також голоморфна функція

$$f(z) = U(z) + iV(z) = \int g(\zeta)\,d\zeta\,,$$

яку ми нормуємо умовою $U(z_0) = u(z_0)$, $z_0 \in D$. У цьому разі f визначена з точністю до уявної константи.

З рівності $f'(z) = g(z)$ випливає, що

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Таким чином, $U(z) \equiv u(z)$. $\square$

Застосування цієї теореми відразу ж дає локальні властивості гармонічних функцій:

a) *нескінченну диференційовність;*

b) *конформну інваріантність.* Якщо u — гармонічна функція в області G, а g — аналітична функція в області D і $g(D) \subseteq G$, то $v = u \circ g$ є гармонічною в області D;

c) *принцип екстремуму.* Нестала гармонічна функція u в області D не може досягати локального максимуму або мінімуму у внутрішній точці.

Доведення. a) Нехай $u \in h(D)$ і $z_0 \in D$. Тоді знайдеться таке $r > 0$, що $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. За теоремою 7.52 знайдеться $f \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_r(z_0))$, для якої $\mathrm{Re}f(z) = u(z)$. Звідси випливає нескінченна диференційовність функції u в $\mathcal{O}_r(z_0)$.

b) Якщо $g(z) \equiv const$, то доводити нічого. Тому припустимо, що $g(z) \not\equiv const$. Зафіксуємо довільне $z_0 \in D$. Нехай $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. Згідно з принципом відкритості $g(\mathcal{O}_r(z_0))$ містить деякий окіл точки $w_0 = g(z_0)$. Припустимо, що $\mathcal{O}_\rho(w_0) \subset g(\mathcal{O}_r(z_0))$. За теоремою 7.52 знайдеться функція $f \in \mathcal{H}\left(\mathcal{O}_\rho(w_0)\right)$, така, що $u(w) = \mathrm{Re}f(w)$ при $w \in \mathcal{O}_\rho(w_0)$. Звужуючи окіл $\mathcal{O}_r(z_0)$ до $\mathcal{O}_{r'}(z_0)$ так, щоб виконувалося включення $g(\mathcal{O}_{r'}(z_0)) \subset \mathcal{O}_\rho(w_0)$, одержимо $v(z) = \mathrm{Re}f \circ g(z)$ в $\mathcal{O}_{r'}(z_0)$. Таким чином, v гармонічна в околі точки z_0 як дійсна частина аналітичної функції.

c) Припустимо, що $u(z_0)$ є найбільшим (або найменшим) значенням функції u в околі $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. За теоремою 7.52 знайдеться функція $f \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_r(z_0))$, для якої $u(z) = \mathrm{Re}f(z)$ у $\mathcal{O}_r(z_0)$. Але тоді за принципом екстремуму для дійсної частини аналітичної функції матимемо $f(z) \equiv const$, звідси $u(z) \equiv const$

у $\mathcal{O}_r(z_0)$. Щоб поширити це на всю область D, знову розглянемо функцію

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

що визначена й аналітична в усій області D. Однак у $\mathcal{O}_r(z_0)$ ми маємо $g(z) = f'(z) = 0$. За теоремою єдиності для аналітичних функцій $g(z) \equiv 0$ в D, звідси $u(z) \equiv const$ в області D. $\square$

Із принципу екстремуму випливає два варіанти теореми єдиності для гармонічних функцій.

Теорема 7.53 (Єдиності) *Нехай $u \in h(D)$ і виконана одна з таких умов*:

(*i*) $u(z) = 0$ *в деякому околі* $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$;

(*ii*) u *неперервно продовжується в замикання* $\overline{D}$ *обмеженої області* D, *і* $u(z) = 0$ *на* ∂D.

Тоді $u(z) \equiv 0$ *в* D.

Із теореми єдиності, зокрема, випливає, що граничні значення повністю визначають гармонічну функцію в області. Задача відновлення гармонічної функції за її граничними значеннями відома як *задача Діріхле*. У подальших двох параграфах вона буде розв'язана у випадку, коли роль області відіграє одиничний круг.

Теорема 7.54 (Про середнє) *Нехай u — гармонічна в $\mathcal{O}_r(z_0)$ і неперервна функція в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$. Тоді*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\varkappa)|\,d\varkappa|\,.$$

Тут і надалі через $\mathbb{T}$ позначатимемо додатно-орієнтовану межу $\partial\,\mathbb{D}$.

Доведення. Оскільки u — неперервна функція в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$, то достатньо довести рівність

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\,d\theta$$

для всіх $\rho \in (0, r)$. Однак, у крузі $\mathcal{O}_r(z_0)$ функція u зображається як дійсна частина аналітичної функції. Застосовуючи до останньої теорему про середнє і відокремлюючи в одержаній рівності дійсну частину, приходимо до необхідного твердження. □

Вправа. Покажіть, що гармонічна функція u, залежна лише від $r = |z - z_0|$, має вигляд

$$u(z) = \alpha \ln |z - z_0| + \beta.$$

Розв'язання. Якщо $u(z) = \lambda(r)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\lambda'(r), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\lambda''(r) + \frac{y^2}{r^3}\lambda'(r)$$

і

$$\Delta u = \lambda''(r) + \frac{1}{r}\lambda'(r)\,.$$

Розв'язуючи рівняння

$$\lambda''(r) + \frac{1}{r}\lambda'(r) = 0\,,$$

одержуємо необхідне твердження. □

7.2 Інтегральні формули Пуассона і Шварца

Теорема 7.55 *Нехай $u \in h(\mathbb{D})$ і неперервно продовжується в $\overline{\mathbb{D}}$. Тоді для будь-якого $a \in \mathbb{D}$ виконується рівність*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\theta} - a|^2} u(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(\varkappa)\frac{1 - |a|^2}{|\varkappa - a|^2}|\, d\varkappa|\,. \qquad (7.1)$$

Доведення. У випадку $a = 0$ рівність (7.1) виражає теорему про середнє. У випадку $a \neq 0$ розглянемо дробово-лінійне відображення

$$\ell(z) = (z - a)/(1 - \overline{a}z)$$

і визначимо функцію $v = u \circ \ell^{-1}$. Внаслідок конформної інваріантності, властивості гармонічності $v \in h(\mathbb{D})$ також неперервно продовжується в $\overline{\mathbb{D}}$. За теоремою про середнє

$$u(a) = v(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(\ell^{-1}(\zeta))\, |d\zeta|\,.$$

Виконаємо в цьому інтегралі заміну змінної:

$$\ell^{-1}(\zeta) = \varkappa, \quad \zeta = \ell(\varkappa), \quad d\zeta = \ell'(\varkappa)\, d\varkappa\,,$$

і

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} u(\varkappa)|\ell'(\varkappa)||d\varkappa| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} u(\varkappa)\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\varkappa|^2}\,|d\varkappa|\,.$$

Оскільки при $u \in \mathbb{T}$ має місце рівність

$$|1-\overline{a}\varkappa| = |1-a| = |\varkappa - a|\,,$$

то ми одержуємо рівність (7.1). □

Теорема 7.56 *Нехай f — голоморфна функція в $\mathbb{D}$, дійсна частина якої $u(z) = \mathrm{Re} f(z)$ неперервно продовжується в $\overline{\mathbb{D}}$. Тоді для будь-якого $z \in \mathbb{D}$ виконується рівність*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa+z}{\varkappa-z}u(\varkappa)\,|d\varkappa| + i\,\mathrm{Im} f(0) = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa+z}{\varkappa-z}u(\varkappa)\frac{d\varkappa}{\varkappa} + i\,\mathrm{Im} f(0)\,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Доведення. За теоремою 7.52 функція u має таке зображення:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} u(\varkappa)\frac{1-|z|^2}{|\varkappa-z|^2}\,|d\varkappa| = \mathrm{Re}\Big\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa+z}{\varkappa-z}u(\varkappa)\,|d\varkappa|\Big\}\,.$$

Відзначимо, що функція у фігурних дужках є аналітичною в одиничному крузі. Щоб переконатися в цьому, подамо u у вигляді ($|d\varkappa| = |i\varkappa\, d\theta| = d\theta,\ \varkappa = e^{i\theta}$) :

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa+z}{\varkappa-z}u(\varkappa)\,|d\varkappa| = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa+z}{\varkappa-z}u(\varkappa)\frac{d\varkappa}{\varkappa} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{u(\varkappa)}{\varkappa-z}\,d\varkappa + z\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{u(\varkappa)}{\varkappa-z}\frac{d\varkappa}{\varkappa}\,.$$

Вираз у правій частині останньої рівності є інтегралом Коші зі щільністю

$$\frac{\varkappa+z}{\varkappa}\,u(\varkappa)$$

і тому є аналітичною функцією в $\mathbb{D}$. Отже, функція f, визначена рівністю (7.2), аналітична в $\mathbb{D}$ і $\mathrm{Re}f(z) = u(z)$. Залишається відзначити, що уявна частина аналітичної функції відновлюється однозначно з точністю до адитивної константи за дійсною частиною. $\square$

Зауваження 7.1 *Формули* (7.1) *и* (7.2) *називаються відповідно формулами Пуассона і Шварца.*

7.3 Інтеграли Пуассона і Шварца. Задача Діріхле

Нехай φ — інтегровна на $\mathbb{T}$ дійснозначна функція. Тоді для $z \in \mathbb{D}$ визначений інтеграл

$$P(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\varkappa - z|^2}\varphi(\varkappa)\,|d\varkappa| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\varphi(e^{i\theta})\,d\theta\,,$$

що називається *інтегралом Пуассона* зі щільністю φ. Визначимо також *інтеграл Шварца*:

$$S(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa + z}{\varkappa - z}\varphi(\varkappa)\,|d\varkappa|\,.$$

Неважко помітити, що між інтегралами Пуассона і Шварца з однією й тією самою щільністю φ має місце співвідношення

$$\mathrm{Re}S(z;\varphi) = P(z;\varphi)\,.$$

Теорема 7.57 *Нехай $\varphi \in L_1(\mathbb{T})$ — дійснозначна функція. Тоді $S(z;\varphi)$ є аналітичною функцією в $\mathbb{D}$. Крім того, якщо φ перетворюється на нуль на деякій відкритій дузі $\gamma \in \mathbb{T}$, то $S(z;\varphi)$ аналітично продовжується через γ у зовнішність одиничного круга і набуває на γ чисто уявних значень.*

Доведення. Нехай z_0 — довільна точка круга $\mathbb{D}$. Виберемо $\delta > 0$ меншим ніж половина відстані від z_0 до $\mathbb{T} = \partial\,\mathbb{D}$. Тоді

$$\frac{S(z;\varphi) - S(z_0;\varphi)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{2\,\varkappa\,\varphi(\varkappa)}{(\varkappa - z)(\varkappa - z_0)}\,|d\varkappa|$$

і внаслідок нерівності

$$\left|\frac{\varkappa\varphi(\varkappa)}{(\varkappa - z)(\varkappa - z_0)}\right| \leqslant \frac{1}{\delta^2}|\varphi(\varkappa)|$$

під знаком інтеграла можна зробити граничний перехід $z \to z_0$. Це означає комплексну диференційовність функції $S(z;\varphi)$ в $\mathbb{D}$. Нехай тепер $\varphi(\varkappa) = 0$ на відкритій дузі $\gamma \subset \mathbb{T}$. Для будь-якого $z_0 \in \gamma$ відстань від z_0 до $\mathbb{T} \setminus \gamma$ буде додатною, і оскільки в цьому випадку

$$S(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}\setminus\gamma} \frac{\varkappa + z}{\varkappa - z}\varphi(\varkappa)\,|d\varkappa|\,,$$

то міркування, аналогічні проведеним у випадку $z_0 \in \mathbb{D}$, приводять до неперервності і комплексної диференційовності функції $S(z;\varphi)$ на дузі γ.

Аналітичне продовження $S(z;\varphi)$ через γ в зовнішність одиничного круга випливає з принципу симетрії Рімана — Шварца.

Відзначимо при цьому, що умова $\mathrm{Re}S(z;\varphi) = 0$ при $z \in \gamma$ випливає з рівності

$$\mathrm{Re}\frac{\varkappa + z}{\varkappa - z} = \frac{1 - |z|^2}{|\varkappa - z|^2} = 0, \qquad z, \varkappa \in \mathbb{T}, \quad z \neq \varkappa\,.$$

Відзначимо деякі властивості інтеграла Пуассона, які характеризують його як оператор, що діє з $L_1(\mathbb{T})$ у простір $h(\mathbb{D})$.

1 *Лінійність*:

$$P(\,\cdot\,;\varphi_1 + \varphi_2) = P(\,\cdot\,;\varphi_1) + P(\,\cdot\,;\varphi_2), \qquad P(\,\cdot\,;\alpha\varphi) = \alpha P(\,\cdot\,;\varphi).$$

2 *Монотонність*:

$$P(z;\varphi) \geqslant 0, \qquad \varphi \geqslant 0.$$

3 $P(z;1) \equiv 1$ і

$$\inf\,\varphi \leqslant P(z;\varphi) \leqslant \sup\,\varphi.$$

Доведення. Лінійність є наслідком властивостей інтеграла. Для доведення монотонності досить відзначити, що ядро Пуассона невід'ємне в $\mathbb{D}$. Рівність $P(z;1) \equiv 1$ випливає з інтегральної формули Пуассона для функції $u(z) \equiv 1$. Нарешті, нерівність для $P(z;\varphi)$ випливає з монотонності й лінійності. □

Теорема 7.58 (Шварца) *Нехай φ — функція, інтегровна на $\mathbb{T}$ і неперервна в точці $\varkappa_0 \in \mathbb{T}$. Тоді*

$$\lim_{z\to\varkappa_0} P(z;\varphi) = \varphi(\varkappa_0)\,.$$

Доведення. Нехай задано $\varepsilon > 0$. Виберемо дугу $\gamma \subset \mathbb{T}$ із центром у точці $\varkappa_0$ так, щоб нерівність
$$|\varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
виконувалася для всіх $\varkappa \in \gamma$. Позначимо через γ^* додаткову дугу $\mathbb{T} \setminus \gamma$ і визначимо
$$\varphi_1(\varkappa) = \begin{cases} \varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0) & \varkappa \in \gamma, \\ 0 & \varkappa \in \gamma^*; \end{cases}$$
$$\varphi_2(\varkappa) = \begin{cases} 0 & \varkappa \in \gamma, \\ \varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0) & \varkappa \in \gamma^*. \end{cases}$$
Тоді
$$P(z;\varphi) - \varphi(\varkappa_0) = P(z;\varphi_1) + P(z;\varphi_2)\,.$$

Відзначимо, що $P(z;\varphi_2)$ неперервно продовжується на дугу γ і перетворюється на ній на нуль (див. теорему 7.52). Отже, знайдеться таке $\delta > 0$, що
$$|P(z;\varphi_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
при $|z - \varkappa_0| < \delta$. Крім того, з властивостей інтеграла Пуассона випливає, що
$$|P(z;\varphi_1)| \leqslant \sup_{\varkappa\in\gamma} |\varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Таким чином, для будь-якого $z \in \mathbb{D}$, що задовольняє умову $|z - \varkappa_0| < \delta$ одержуємо
$$|P(z;\varphi) - \varphi(\varkappa_0)| \leqslant |P(z;\varphi_1)| + |P(z;\varphi_2)| < \varepsilon\,.$$
$\square$

Доведена теорема показує, що задача Діріхле (знаходження гармонічної функції за її неперервними граничними значеннями) завжди розв'язувана у випадку круга. Цей результат можна перенести за допомогою конформного відображення на інші однозв'язні області, обмежені жордановими кривими.

7.4 Характеристична властивість гармонічних функцій

Раніше було встановлено, що гармонічні функції мають властивість середнього значення. Виявляється, що ця властивість є для них характеристичною.

Означення 7.1 *Будемо говорити, що неперервна в області* $\mathbb{D}$ *функція* u *має локальну властивість середнього значення, якщо для кожної точки* $z_0 \in D$ *знайдеться таке* $r > 0$, *що* $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ *і*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u(z_0 + \rho \varkappa)\, |d\varkappa| \tag{7.3}$$

для всіх $\rho \in (0, r)$.

Теорема 7.59 *Нестала неперервна в області* D *функція* u, *що має в* D *локальну властивість середнього значення, не може досягати всередині* D *ні мінімуму, ні максимуму.*

Доведення. Припустимо, що функція u досягає в точці $z_0 \in D$ свого максимуму (або мінімуму). За означенням властивості знайдеться таке $r > 0$, що при всіх $\rho \in (0, r)$ виконується рівність (7.3). Оскільки для всіх $\varkappa \in \mathbb{T}$ має місце нерівність $u(z_0 + \rho\varkappa) \leqslant u(z_0)$ (або $u(z_0 + \rho\varkappa) \geqslant u(z_0)$), то рівність (7.3) разом із неперервністю функції u приводить до $u(z_0 + \rho\varkappa) = u(z_0)$ при всіх $\rho \in (0, r)$ і $\varkappa \in \mathbb{T}$. Таким чином, множина A точок області D, в яких u досягає свого максимуму (або мінімуму), відкрита. З іншого боку, множина $B = D \setminus A$ внаслідок неперервності функції u також повинна бути відкритою. Оскільки D зв'язна, то одна з множин A або B повинна бути порожньою. За припущенням $A \neq \emptyset$. Отже, $B = \emptyset$ і $A = D$. Однак це приводить до умови $u(z) \equiv u(z_0)$, яка суперечить тому, що функція u – нестала. $\square$

Теорема 7.60 *Неперервна в області* D *функція* u, *що має в* D *локальну властивість середнього значення, є гармонічною.*

Доведення. Нехай $z_0 \in D$ і $r > 0$ такі, що $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$. Визначимо

$$V(z) = P(z; u_r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\varkappa - z|^2} u(z_0 + r\varkappa)\, |d\varkappa|\,.$$

З властивостей інтеграла Пуассона випливає, що функція V є гармонічною в $\mathbb{D}$ і неперервною — в $\overline{\mathbb{D}}$. Крім того, $V(\varkappa) = u(z_0 + r\varkappa)$ для всіх $\varkappa \in \mathbb{T}$.

Розглянемо тепер функцію

$$v(z) = V\left(\frac{z - z_0}{r}\right),$$

що гармонічна в $\mathcal{O}_r(z_0)$, неперервна в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ і збігається з u на $\partial\,\mathcal{O}_r(z_0)$. Очевидно, що різниця $u(z)-v(z)$ є неперервною в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ функцією, що має в $\mathcal{O}_r(z_0)$ локальну властивість середнього значення. Отже, за попередньою теоремою $u-v$ не досягає в $\mathcal{O}_r(z_0)$ ні максимуму, ні мінімуму, якщо вона не тотожно стала. Проте $u(z)-v(z)=0$ при $z\in\partial\,\mathcal{O}_r(z_0)$ і тому $u(z)\equiv v(z)$ у $\mathcal{O}_r(z_0)$. □

Одержана характеристична властивість гармонічних функцій робить інтуїтивно зрозумілим, чому встановлений розподіл температур в однорідній плоскій пластині D є гармонійною функцією. Навпаки, в якій-небудь точці $z_0\in D$ значення температури було б строго більшим або строго меншим, ніж середнє значення температури на достатньо малому колі з центром у z_0. Отже, в цій точці відбувалося б відповідно зменшення або збільшення температури.

7.5 Нерівності та принцип Гарнака

У цьому параграфі ми наведемо два результати Гарнака, що стосуються збіжності гармонічних функцій і нерівностей для обмежених гармонічних функцій.

Теорема 7.61 *Нехай u — невід'ємна гармонічна в $\mathcal{O}_r(z_0)$ і неперервна в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ функція. Тоді для всіх $z\in\mathcal{O}_r(z_0)$ виконуються нерівності*

$$\frac{r-|z-z_0|}{r+|z-z_0|}u(z_0)\leqslant u(z)\leqslant\frac{r+|z-z_0|}{r-|z-z_0|}u(z_0)\,. \tag{7.4}$$

Доведення. Розглянемо функцію $v(\zeta)=u(z_0+r\zeta)$. Для цієї функції виконані умови можливості застосування формули Пуассона, згідно з якою

$$v(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1-|\zeta|^2}{|\varkappa-\zeta|^2}v(\varkappa)\,|d\varkappa|\,.$$

Зауважуючи, що

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}\leqslant\frac{1-|\zeta|^2}{|\varkappa-\zeta|^2}\leqslant\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\,,$$

і враховуючи додатність $v(\varkappa)$, одержуємо

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}v(\varkappa)\,|d\varkappa|\leqslant v(\zeta)\leqslant\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}v(\varkappa)\,|d\varkappa|\,.$$

Згідно з теоремою про середнє ці нерівності можна переписати у вигляді

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}v(0) \leqslant v(\zeta) \leqslant \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}v(0)\,.$$

Залишається в цих нерівностях припустити, що $\zeta = (z - z_0)\,/\,r$, і відзначити, що

$$v(0) = u(z_0), \qquad v\left(\frac{z-z_0}{r}\right) = u(z)\,.$$

$\square$

Вправа. Покажіть, що невід'ємна гармонічна в усій площині функція тотожно стала.

Теорема 7.62 (Гарнака) *Нехай послідовність гармонічних в області D функцій u_n задовольняє умову $u_n(z) \leqslant u_{n+1}(z)$ при всіх $z \in D$ і $n = 1$, 2, $\dots$. Тоді виконується одне з тверджень:*

(i) $u_n(z) \to \infty$ *локально-рівномірно в D при $n \to \infty$;*

(ii) *послідовність $\{u_n\}$ збігається локально-рівномірно в D при $n \to \infty$ до деякої гармонічної в D функції u.*

Доведення. Нехай z_0 — довільна точка області D. Внаслідок відкритості D знайдеться таке $r > 0$, що $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$.

Оскільки за будь-яких натуральних n і p функція $u_{n+p}-u_n$ є невід'ємною, то згідно із (7.4)

$$\frac{r-|z-z_0|}{r+|z-z_0|}(u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0)) \leqslant u_{n+p}(z) - u_n(z) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r+|z-z_0|}{r-|z-z_0|}(u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0))$$

за всіх $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. У крузі ж $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ буде виконуватися нерівність

$$\frac{1}{3}(u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0)) \leqslant u_{n+p}(z) - u_n(z) \leqslant$$

$$\leqslant 3(u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0))\,. \tag{7.5}$$

Ліва частина нерівності (7.5) показує, що якщо $u_n(z_0) \to \infty$ при $n \to \infty$, то $u_n(z) \to \infty$ рівномірно в $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ при $n \to \infty$. Права частина нерівності (7.5) показує, що якщо $\{u_n(z_0)\}$ збігається, то $\{u_n(z)\}$ також збігається рівномірно в крузі $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ до деякої функції $u(z)$. Очевидно, що гранична функція $u(z)$ буде неперервною в $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$.

Таким чином, область D розпадається на дві відкриті множини, що не перетинаються: D_1, на якій $u_n(z) \to \infty$ локально рівномірно при $n \to \infty$, і D_2, на якій $u_n(z)$ сходиться до деякої неперервної функції $u(z)$ також локально рівномірно. Через зв'язність області D одна з цих множин повинна бути порожньою.

Залишається довести, що у випадку $D_2 = D$ гранична функція $u(z)$ є гармонійною. Нехай $z_0 \in D$ і $r > 0$ таке, що $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$ і $u_n(z) \to u(z)$ рівномірно в $\mathcal{O}_r(z_0)$ при $n \to \infty$. Тоді для всіх $\zeta \in \mathbb{D}$ одержуємо

$$\begin{aligned} u(z_0 + r\zeta) &= \lim_{n\to\infty} u_n(z_0 + r\zeta) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\zeta|^2}{|\varkappa - \zeta|^2} u_n(z_0 + r\varkappa)\,|d\varkappa| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\zeta|^2}{|\varkappa - \zeta|^2} u(z_0 + r\varkappa)\,|d\varkappa|\,. \end{aligned}$$

Оскільки в правій частині рівності ми маємо інтеграл Пуассона, то $u(z_0 + r\zeta)$ є гармонічною функцією в $\mathbb{D}$. Отже, $u(z)$ гармонійна в $\mathcal{O}_r(z_0)$. $\Box$

Список літератури

1. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций / А. В. Бицадзе. — Москва : Наука, 1969. — 240 с.

2. *Евграфов М. А.* Аналитические функции / М. А. Евграфов. — Москва : Наука, 1991. — 448 с.

3. *Заболоцький М. В.* Математичний аналіз / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. — Львів : Знання, 2008. — 424 с.

4. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Том 1: Начала теории / А. И. Маркушевич. — Москва : Наука, 1968. — 486 с.

5. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Том 2: Дальнейшее построение теории / А. И. Маркушевич. — Москва : Наука, 1968. — 624 с.

6. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. — Москва : Наука, 1967. — 447 с.

7. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. — Москва : Наука, 1969. — 576 с.

8. *Гольдберг А. А.* Комплексний аналіз / А. А. Гольдберг , М. М. Шеремета, М. В. Заболоцький , О. Б. Скасків. — Львів : Афіша, 2008. — 204 с.

9. *Ahlfors L. V.* Complex analysis / L. V. Ahlfors. — New York : McGraw-Hill, 1966. — 317 p.

10. *Bak J.* Complex analysis / J. Bak, D. J. Newman. — New York : Dordrecht Heidelberg ; London : Springer, 2010. – 328 p.

Навчальне видання

Горяйнов Віктор Володимирович,

Малютін Костянтин Геннадійович,

Козлова Ірина Іванівна

,

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

Підручник

Художнє оформлення обкладинки Є. В. Нікітюка

Редактори: Н. З. Клочко, С. М. Симоненко

Комп'ютерне верстання І. І. Козлової

Формат 60×40/16. Ум. друк. арк. 6,98. Обл.-вид. арк. 7,36. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач

Сумський державний університет,

вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007,

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.