

## О ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ

*И.Б. Каринцев, канд. техн. наук, профессор,  
Сумский государственный университет, г. Сумы*

*Рассматриваются предельные напряжения при растяжении и изгибе, которые не совпадают между собой. Особенно значительны эти расхождения для хрупких материалов. Для случая внецентренного растяжения получены условия прочности, которые учитывают эти расхождения. Если для пластичных материалов расхождения невелики, то для хрупких материалов их учет становится обязательным.*

В вопросах прочности деталей машин и других конструкций решающую роль играют предельные (опасные) напряжения, при достижении которых их дальнейшая эксплуатация становится невозможной. Для пластичных материалов таким напряжением при статическом нагружении принято считать предел текучести, при котором происходит рост деформаций без заметного увеличения нагрузки. В тех случаях, когда явно выраженная площадка текучести отсутствует, в качестве условного предела текучести принимается напряжение  $\sigma_{0,2}^P$ , при котором остаточная деформация равна 0,2%. Для хрупких материалов, у которых отсутствует площадка текучести, опасным напряжением является временное сопротивление, имеющее разное значение при растяжении  $\sigma_e^P$  и сжатии  $\sigma_e^{сж}$ .

При изгибе (в случае чистого изгиба) условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]_u = \frac{\sigma_{on}^u}{n},$$

где  $M_{\max}$  - максимальный изгибающий момент;

$W$  - момент сопротивления;

$[\sigma]_u$  - допускаемое напряжение при изгибе;

$\sigma_{on}^u$  - предельное напряжение;

$n$  - коэффициент запаса прочности.

К сожалению, в большинстве учебников и справочной литературе по сопротивлению материалов [1,2] предельные (опасные) напряжения при изгибе отождествляются с предельными напряжениями при растяжении.

Однако это не так. Например, для пластичных материалов опасным напряжением при изгибе является предел текучести при изгибе, который не совпадает с пределом текучести при растяжении. Объясняется это тем [3], что при изгибе пластическая деформация вызывает не только изменение сечения, но и отклонение напряжений от линейного распределения, которое не учитывается формулами сопротивления материалов. Поэтому Н.Н. Давиденковым [4] было предложено различать два условных предела текучести: реальный - с вычислением истинных напряжений, который совпадает с пределом  $\sigma_{0,2}^P$  при растяжении, и номинальный - с вычислением условных напряжений по обычным формулам сопротивления материалов. Следовательно, при изгибе для получения в крайних волокнах такого же остаточного удлинения, как

при растяжении (0,2%), необходимы большие условные напряжения по сравнению с пределом текучести при растяжении.

Особенно значительны расхождения опасных напряжений при изгибе и растяжении имеют место для хрупких материалов, для которых временное сопротивление при изгибе ( $\sigma_e^u$ ) может превосходить временное сопротивление при растяжении ( $\sigma_e^P$ ) более чем в два раза. Например, для чугуна марки СЧ12-28 временное сопротивление при растяжении  $\sigma_e^P = 12$  кН/см<sup>2</sup>, а при изгибе  $\sigma_e^u = 28$  кН/см<sup>2</sup>.

Как известно, предельные (опасные) напряжения при растяжении экспериментально определяются из испытаний стандартных образцов на растяжение с последующим построением диаграммы напряжений  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ . При испытании образцов на изгиб также может быть построена диаграмма напряжений. Но в отличие от испытаний на растяжение напряжения изгиба строятся в зависимости от стрелы прогиба  $f$ .

В данной работе испытания на изгиб проводились на цилиндрических образцах, лежащих на двух опорах, которые нагружались сосредоточенной силой, расположенной посередине. Это позволило использовать диаграммный аппарат универсальной разрывной машины Р-20 для автоматической записи в координатах: нагрузка (изгибающий момент) - стрела прогиба.

Результаты испытаний для различных материалов представлены в виде диаграмм зависимостей изгибающего момента от стрелы прогиба (рис.1). Для хрупких материалов (чугун, инструментальная сталь) наблюдался срыв на диаграмме, что связано с разрушением образцов. Для пластичных материалов имели место плавные зависимости  $M=M(f)$ . И только для мягкой углеродистой стали наблюдалась площадка текучести. В этом случае предел текучести при изгибе определялся по обычной формуле

$$\sigma_T = \frac{P_T \ell}{4W} = \frac{M_T}{W},$$

где  $W$  - момент сопротивления поперечного сечения цилиндрического образца.

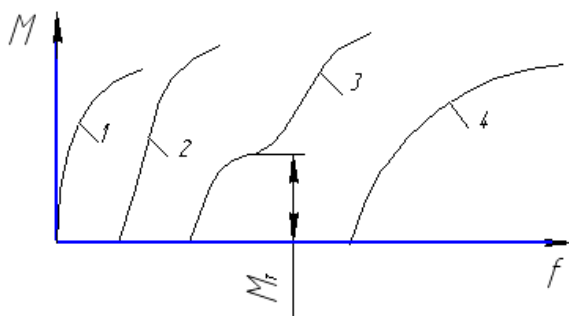


Рисунок 1 – Кривые изгиба:

- 1 - чугун; 2 - инструментальная сталь; 3 - мягкая углеродистая сталь;  
4 - средне- и высокоуглеродистая сталь

При отсутствии площадки текучести на диаграмме предел текучести изгиба определялся условно. В этом случае необходимо задаваться таким

остаточным прогибом  $f_T$ , при котором деформации внешних волокон при изгибе соответствуют (как и при растяжении)  $-0,2\%$ .

Допускаемая стрела прогиба  $f_T$ , соответствующая пределу текучести при изгибе  $\sigma_T$ , определялась следующим образом:

$$f_T = \frac{P_T \ell^3}{48EI} = \sigma_T \frac{\ell^2}{6Eh} = \frac{\ell^2 \varepsilon_T}{6h},$$

где  $\varepsilon_T$  - допуск (0,2%) на величину остаточной относительной деформации при растяжении внешних волокон;

$\ell$  - расстояние между опорами;

$h$  - высота поперечного сечения образца.

Для определения предела текучести на диаграмме изгиба откладывалась по оси абсцисс допускаемая стрела прогиба и проводилась прямая параллельная начальному участку кривой до пересечения с ней, определяя таким образом изгибающий момент  $M_T$  (рис.2). Предел

текучести определялся как  $\sigma_T = \frac{M_T}{W}$ .

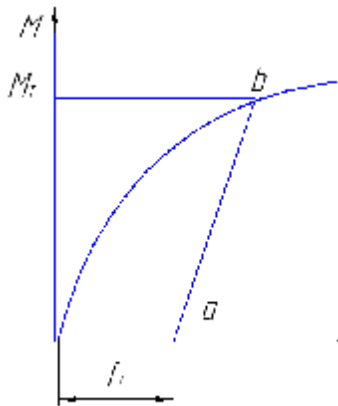


Рисунок 2- Определение изгибающего момента  $M_T$ , соответствующего условному пределу текучести при изгибе

Анализ полученных результатов показывает, что предельные напряжения при изгибе и растяжении не совпадают, условный предел текучести при изгибе превышает условный предел текучести при растяжении примерно на 20%. Следовательно, не будут совпадать и предельные напряжения, что должно найти отражение в условиях прочности при изгибе.

Полученные выводы были проверены на примере внецентренного растяжения для хрупких материалов, для которых расхождение между предельными напряжениями изгиба и растяжения особенно значительны. Как известно, внецентренное растяжение, или сжатие, является результатом действия продольной силы  $P$ , смещенной относительно геометрической оси стержня на расстояние  $e$ , называемое эксцентриситетом, и сводится к центральному растяжению и двум чистым изгибам. В случае симметричного сечения и растягивающей силы  $P$ , проходящей через одну из главных осей, максимальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W},$$

где  $M=Pe$  - изгибающий момент;

$W$  - момент сопротивления сечения стержня.

Условие прочности при растяжении для хрупких материалов определяется как

$$\frac{P}{F} \leq [\sigma]_p,$$

а условие прочности при изгибе

$$\frac{M}{W} \leq [\sigma]_u.$$

Естественно, встает вопрос, какое допускаемое напряжение следует брать при внецентренном растяжении.

Если для пластичных материалов приближенно можно считать, что  $[\sigma]_p = [\sigma]_u$ , то для хрупких материалов различие является весьма существенным. Поэтому условие прочности при растяжении следует привести к допускаемому напряжению при изгибе. Для этого условие прочности при растяжении следует умножить на множитель  $\frac{[\sigma]_u}{[\sigma]_p}$ , тогда получим

$$\frac{P [\sigma]_u}{F [\sigma]_p} \leq [\sigma]_u.$$

В случае внецентренного растяжения условие прочности примет следующий вид:

$$\frac{P [\sigma]_u}{F [\sigma]_p} + \frac{M}{W} \leq [\sigma]_u. \quad (1)$$

Аналогично это условие прочности можно привести к допускаемому напряжению при растяжении. Тогда будем иметь

$$\frac{P}{F} + \frac{M [\sigma]_p}{W [\sigma]_u} \leq [\sigma]_p.$$

От полученных выше формул для допускаемых напряжений можно перейти к уравнениям для предельных напряжений, если заменить допускаемые напряжения на предельные. Например:

$$\frac{P}{F} \frac{\sigma_e^u}{\sigma_e^p} + \frac{M}{W} = \sigma_e^u. \quad (2)$$

Уравнением для предельных напряжений мы воспользовались при анализе прочности чугуновых скоб, крепящих крышку шаровой мельницы (рис.3).

Была проведена серия испытаний чугуновых скоб, работающих в режиме внецентренного растяжения, для определения разрушающей нагрузки ( $P=13,28$  кН). Кроме того, из этого же материала были изготовлены стандартные образцы, которые позволили определить временные сопротивления при растяжении и изгибе:

$$(\sigma_e^p = 21 \text{ кН/см}^2, \quad \sigma_e^u = 40 \text{ кН/см}^2).$$

После подстановки этих значений в уравнение для предельных напряжений (2) было получено очень хорошее совпадение предложенной расчетной формулы и эксперимента. Все это говорит о том, что формулы (1) и (2) могут быть рекомендованы к практическому использованию при расчетах на прочность.

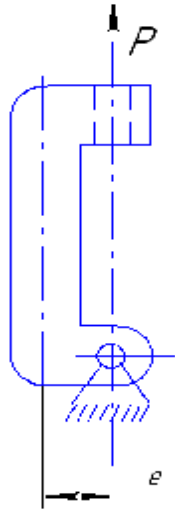


Рисунок 3 – Расчетная схема  
чугунной скобы:

площадь сечения  $F = 317,5 \text{ мм}^2$ ;  
 площадь тяжести сечения  $y_c = 8,7 \text{ мм}$ ;  
 момент инерции сечения относительно оси,  
 проходящей через центр тяжести,  
 $I_x = 99,38 \text{ мм}^4$ ;  
 эксцентриситет  $e = 28,7 \text{ мм}$

### ВЫВОДЫ

При расчетах на прочность в случае внецентренного растяжения или сжатия необходимо обязательно учитывать расхождение между предельными напряжениями при растяжении и изгибе. Если для пластичных материалов это расхождение не велико и неучет этого фактора идет в запас прочности, то для хрупких материалов этот учет по формулам (1) и (2) становится обязательным.

### SUMMARY

#### ON THE SUBJECT OF ULTIMATE LOADS UNDER TENSIONING AND BENDING

*I.B. Karintsev*  
 Sumy State University

*In this paper we analyze ultimate stresses under tensioning and bending, which are considered as different phenomena. The differences are substantially significant for brittle materials. We obtained strength conditions considering these differences for the case of an eccentric tension. Mentioned differences are insignificant for plastic materials but are to be taken into consideration when analyzing brittle materials.*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов.-5-е изд., перераб. и доп. – К.:Вища шк. Головное изд-во, 1986.-735с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк.,1975. –654с.
3. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. - изд. 3-е перераб.и доп.: В двух частях. Часть вторая. Механические испытания. Конструктивная прочность. - М.: Машиностроение, 1974. – 368с.
4. Давиденков Н.Н. Как определять предел текучести при изгибе и кручении // Заводская лаборатория. – 1948. - №10. – С. 1233-1236.

*Поступила в редакцию 1 апреля 2009 г.*