

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту  
Завідувач кафедри ПМ та МСС  
\_\_\_\_\_ доцент Коплик І.В.

(підпис)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 р.

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**

на здобуття освітнього ступеня «бакалавр»

спеціальність 113 «Прикладна математика»

освітньо-професійна програма «Прикладна математика»

тема роботи **«ВРАХУВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ  
ТЕМПЕРАТУРИ В НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РОЗМ'ЯКШЕННЯ  
ПОВЕРХНІ ЛЬОДУ ПРИ ТЕРТІ»**

**Виконавець**

студент факультету ЕлІТ

Логвиненко Денис Тарасович \_\_\_\_\_

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

**Науковий керівник**

професор, доктор фіз.-мат. наук

(науковий ступінь, вчене звання)

Хоменко Олексій Віталійович \_\_\_\_\_

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Суми - 2020

# СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет **електроніки та інформаційних технологій**  
Кафедра **прикладної математики та моделювання складних систем**  
Рівень вищої освіти **перший (бакалавр)**  
Галузь знань **11 Математика та статистика**  
Спеціальність **113 Прикладна математика**  
Освітня програма **освітньо-професійна «Прикладна математика»**

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри ПМ та МСС  
доцент Коплик І.В. \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 р.

## ЗАВДАННЯ

### НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ ЗДОБУВАЧУ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Логвиненку Денису Тарасовичу

1. Тема роботи Врахування просторової неоднорідності температури в нелінійній моделі розм'якшення поверхні льоду при терті.  
Керівник роботи Хоменко О.В., професор, доктор фіз.-мат. наук  
затверджено наказом по факультету ЕлІТ від «25» березня 2020 р. № 0493-III
2. Термін подання роботи студентом «04» червня 2020 р.
3. Вихідні дані до роботи 1) Нелінійна модель в'язкопружного середовища, яка подає розм'якшення тонкого шару поверхні льоду при терті; 2) Метод сіток.
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, що їх належить розробити) Реалізування аналітичної та чисельної процедури розв'язання одновимірного диференціального рівняння в часткових похідних, яка дозволяє простежити еволюцію системи, що описується нелінійними диференціальними рівняннями. Отримання і опис розподілу сили тертя по розм'якшеній плівці льоду. Побудова координатної залежності сили тертя на різних часових шарах і показ еволюції системи до стаціонарного стану.

5. Перелік графічного матеріалу
  - 1) Вигляд моделі перед утворенням озера та з озером та замерзлою поверхнею.
  - 2) Зміни макропористості від кінцевої температури води.
  - 3) Механічний аналог системи.
  - 4) Координатна залежність деформацій, отриманих при аналітичному розв'язку.
  - 5) Сітка, яка задає просторове розбиття для чисельного розв'язання рівняння.
  - 6) Координатна залежність сили тертя, отримана при чисельному розв'язку рівняння.
  - 7) Координатна залежність стаціонарних значень сили тертя.
6. Консультанти до проекту (роботи), із значенням розділів проекту, що стосується їх

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання «06» квітня 2020 р.

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ п/п	Найменування роботи, заходи	Термін виконання	Примітка
1	Ознайомитися з типовими моделями, що використовуються у фізиці тертя льоду.	04.05.2020-07.05.2020	Виконав
2	Ознайомитись з методами розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.	07.05.2020-10.05.2020	Виконав
3	Провести аналіз літератури за темою: «Тертя льоду».	10.05.2020-15.05.2020	Виконав
4	Побудувати математичну модель, що описує неоднорідний режим розм'якшення поверхні льоду при терті.	15.05.2020-20.05.2020	Виконав

5	На базі математичної моделі створити комп'ютерні програми.	20.05.2020- 26.05.2020	Виконав
6	Побудувати графік аналітичного солітонного розв'язку одновимірного параболічного рівняння для просторового нормального до поверхні льоду розподілу зсувної деформації.	26.05.2020- 29.05.2020	Виконав
7	Побудувати координатні залежності сили тертя, отримані при чисельному розв'язанні системи рівнянь; стаціонарну координатну залежність сили тертя.	30.05.2020- 04.06.2020	Виконав

Здобувач вищої освіти

\_\_\_\_\_  
(підпис) Логвиненко Д. Т.  
(прізвище та ініціали)

Керівник роботи

\_\_\_\_\_  
(підпис) Хоменко О. В.  
(прізвище та ініціали)

# РЕФЕРАТ

**Кваліфікаційна робота:** 34 с., 9 рисунків, 16 джерел.

**Мета роботи:** простежити еволюцію системи, що задається нелінійними диференціальними рівняннями, отримати і описати координатну залежність сили тертя по розм'якшеній плівці льоду.

**Об'єкт дослідження:** процес розм'якшення тонкого шару поверхні льоду при терті.

**Предмет дослідження:** нелінійна математична модель в'язкопружного середовища, яка подає розм'якшення тонкого шару поверхні льоду при терті.

**Методи навчання:** рівняння математичної фізики, диференціальні рівняння, методи чисельного розв'язку диференціальних рівнянь.

При виконанні роботи для чисельних обчислень був використаний метод сіток та одновимірне параболічне рівняння для просторового нормального до поверхні льоду розподілу зсувної деформації та сили тертя.

Для зручності сприйняття числових значень в роботі наведені графіки, які відповідають цим числовим значенням.

Ключові слова: ТЕРТЯ ЛЬОДУ, ОДНОМОДОВЕ НАБЛИЖЕННЯ, АДІАБАТИЧНА МЕЖА, СОЛІТОННИЙ РОЗВ'ЯЗОК, РОЗПОДІЛ ДЕФОРМАЦІЇ.

# ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД.....	8
1.1 Математична модель, яка описує створення талого озера на шельфовому льодовику .....	8
1.1.1 Поверхневий розплав на шельфовому льодовику .....	8
1.1.2 Збільшення густини сухого фірну .....	10
1.1.3 Перколяція талої води через фірн.....	11
1.1.4 Формування крижаних лінз.....	12
1.1.5 Накопичування снігу .....	12
1.1.6 Повторне заморожування талої води, що зберігається у фірні.....	13
1.2 Об'єднання підводних торосів, вимитих морською водою в різних точках замерзання .....	13
РОЗДІЛ 2 ОСНОВНА ЧАСТИНА.....	17
2.1 Основні рівняння та постановка задачі.....	17
2.2 Аналітичний розв'язок.....	18
2.3 Чисельний розв'язок .....	21
2.3.1 Метод сіток та умови.....	21
2.3.2 Результати .....	24
ВИСНОВКИ .....	28
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	29
ДОДАТКИ .....	31

## ВСТУП

Тертя льоду є важливою проблемою як з практичної точки зору (наприклад, водіння по льоду), так і в природі (зокрема, рух льодовиків), що включає такі процеси: повзучість, руйнування і плавлення. У прикладному аспекті моделювання тертя льоду є корисним при дослідженні процесів під час проектування штучних льодових середовищ, матеріалів, що рухаються по льоду, зокрема, для створення відповідних елементів у машинобудуванні та зимових видах спорту [1-8].

Розвинуто нелінійну модель в'язкопружного середовища, яка подає розм'якшення тонкого шару поверхні льоду при терті. Основна ідея полягає у тому, що розм'якшений приповерхневий шар льоду являє собою тверде тіло з великою густиною дефектів. З метою розвитку даного підходу в рамках адіабатичного та одномодового наближень знайдено аналітичний солітонний розв'язок одновимірного параболічного рівняння для просторового нормального до поверхні льоду розподілу зсувної деформації. Визначено залежність температури від відповідної координати. Використовуючи явну двохшарову різницеву схему, проведено числове дослідження одновимірного параболічного рівняння. Побудовано розподіли поточних і стаціонарних значень сили тертя.

Розглядається два випадки: 1) верхня і нижня поверхні рухаються з рівними за величиною швидкостями у протилежних напрямках; 2) верхня поверхня зсувається по нерухомій нижній. Проаналізовано залежність стаціонарної сили тертя від координати вздовж осі, що перпендикулярна поверхні льоду, при різних температурах термостату. Аналітично встановлено, що в точці, де сила тертя змінює напрямок, температура стає максимальною. Показано, що підвищення температури приводить до більш різкої зміни сили тертя по товщині приповерхневого шару льоду, тобто збільшується відносна швидкість зсуву тертьових поверхонь.

Роботу обговорено на конференціях ІМА-2019 [1] та ІМА-2020 [2] «Інформатика, автоматика, математика» у 2019, 2020 роках.

# 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД

## 1.1 Математична модель, яка описує створення талого озера на шельфовому льодовику

Дана модель описана із роботи [3], у якій вивчається чутливість озерного утворення до невизначених параметрів та надаються докази важливості таких процесів, як головний транспорт талої води на шельфовому льодовику.

### 1.1.1 Поверхневий розплав на шельфовому льодовику

Модель вирішує поверхневий енергетичний баланс шельфового льодовика, обчислює передачу тепла через верхню частину шельфового льодовика та визначає долю будь-якої талої води, яка може бути вироблена внаслідок поверхневого плавлення. Основна функція моделі показана на лівій діаграмі рис. 1.1. Модель працює над областю 35 м з інтервалом між сітками 5 см та часовим проміжком у 1 год.

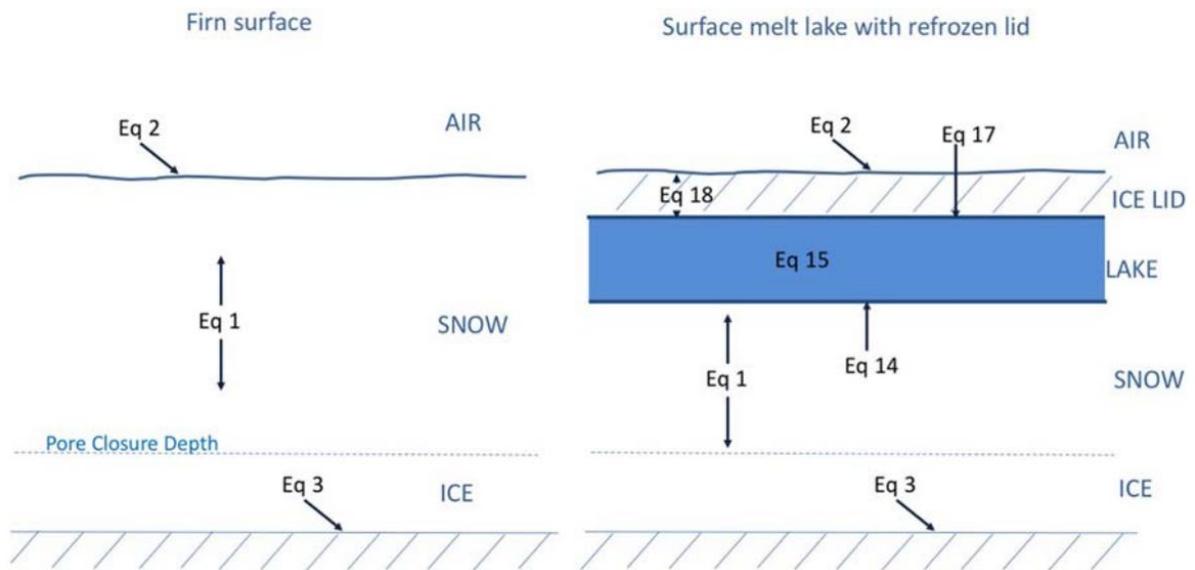


Рис. 1.1 – Вигляд моделі (ліворуч) перед утворенням озера та (праворуч) з озером та замерзлою поверхнею, виходячи з відповідних рівнянь.

Поверхневий енергетичний баланс і тепловіддача обчислюються шляхом розв'язування наступної системи рівнянь:

$$p c_p^{total} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k^{total} \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (1.1)$$

для  $T(0,t)$ :

$$\varepsilon F_{LW} + (1 - \alpha) F_{SW} - \varepsilon \sigma T^4 + F_{Sens} + F_{Lat} = \begin{cases} k \frac{\partial T}{\partial z} + \phi p_i \mathcal{L} \frac{dH}{dt}, & T = T_{frz}, \\ k \frac{\partial T}{\partial z}, & T < T_{frz}, \end{cases} \quad (1.2)$$

та для  $T(H, t)$ :

$$k_p \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

Тут ми маємо, що  $p$  - густина ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$ ),  $T$  - температура (К;  $T_{frz}$  - температура замерзання води),  $t$  - час (с),  $z$  - висота (м). Питома теплоємність ( $c_p$ ,  $\text{Дж}\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$ ) та теплопровідність ( $k$ ,  $\text{Вт}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$ ) обчислюються як поєднання відповідних властивостей для льоду та повітря, залежно від твердої частки кожної комірки сітки, таким чином, що

$$c_p^{total} = \phi c_p^{ice} + (1 - \phi) c_p^{air}, \quad (1.4)$$

і аналогічно для  $k$ . Тут  $\phi$  - тверда частка фірну з густиною  $p$ :

$$\phi = \frac{p}{p_i}. \quad (1.5)$$

$k_{ice}$  та  $c_p^{ice}$  обчислюються за допомогою залежної від температури формули [3]. Значення повітря для  $c_p$  та  $k$  розраховуються відповідно до [4].

Припущення про відсутність зміни температури (1.3) на нижній границі модельної області робиться на основі розрахунків, які дозволяють припустити, що зміни температури на дні шельфового льодовика не впливали б на поверхню шельфового льодовика протягом розглянутого проміжку часу.

Для поверхневого енергетичного балансу показаного в рівнянні (1.2),  $a$  - поверхня альbedo (прийняте як середньорічне значення для локації),  $F_{LW}$  і  $F_{SW}$  - вхідна довгохвильова і короткохвильова енергія ( $\text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}$ ),  $\varepsilon$  - поверхнева емісія, а  $\sigma$  - константа Штефана-Больцмана ( $5.67\cdot 10^{-8} \text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-4}$ ).  $F_{Sens}$  і  $F_{Lat}$  являють собою відповідно явні і приховані теплові потоки та розраховуються за допомогою об'ємних формул [3], так що:

$$F_{sens} = p_a c_{p_{air}} C_T v (T_a - T_0), \quad (1.6)$$

$$F_{lat} = p_a \mathcal{L} * C_T v (q_a - q_0). \quad (1.7)$$

Тут  $q_a$  - густина сухого повітря ( $1,275 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ ),  $c_{p_{air}}$  - питома теплоємність сухого повітря,  $T_a$  і  $T_0$  - температура повітря і поверхні, відповідно,  $v$  - швидкість вітру,  $q_a$  і  $q_0$  - питома вологість повітря і поверхні, а  $\mathcal{L}^*$  - прихована теплота випаровування, що дорівнює  $2,501 \cdot 10^6 \text{ Дж}\cdot\text{кг}^{-1}$ .  $C_T$  - це функція стійкості атмосфери виходячи з [5], де

$$c_T = c_{T_0} \left( 1 - \frac{2b' Ri}{1 + c |Ri|^{\frac{1}{2}}} \right) Ri < 0, \quad (1.8)$$

$$c_T = c_{T_0} (1 + b' Ri)^{-2} Ri \geq 0, \quad (1.9)$$

де  $c_{T_0} = 1.3 \cdot 10^{-3}$ ;  $b' = 20$ , і  $c = 50,986$  - константи, а  $Ri$  - глобальне число Річардсона, яке дорівнює

$$Ri = \frac{g(T_a - y_0)\Delta z}{T_a v_a^2}, \quad (1.10)$$

де  $\Delta z = 10 \text{ м}$ .

Крайній правий член рівняння (1.2) залежить від того, чи температура на поверхні досягне точки плавлення. Тут  $\mathcal{L} = 3.34 \cdot 10^5 \text{ Дж}\cdot\text{кг}^{-1}$  - це прихована теплота плавлення за рахунок зміни фази на поверхні, а  $\frac{dH}{dt}$  - зміна висоти поверхні снігу внаслідок плавлення та подальшого просочення розплаву в сніг. Тому складова  $\phi p_i \mathcal{L} \frac{dH}{dt}$  активується лише тоді, коли відбувається плавлення. Значення альбедо змінюється на значення мокрого снігу 0,6 після того, як почнеться процес плавлення.

Зроблено припущення, що вся сонячна енергія поглинається на поверхні. Це припущення також робить [6] для голої поверхні льоду, і оскільки сніг буде сильно розсіюватись до надходження короткохвильової енергії, це припущення більше справедливо.

### 1.1.2 Збільшення густини сухого фірну

Згущення фірну у верхньому шарі шельфового льодовика є важливим фактором, яке залежить від теплопровідності, питомої теплоємності та прохідності фірну до густини. Крім того, потрібно мати відомий проміжок часу

для снігу, щоб визначити, у який момент сніг стає насиченим талою водою. Ми обчислюємо згущення снігу, слідуючи за [7]. Критична густина,  $550 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ , вважається значенням над яким домінуючими процесами згущення є осідання зерна та групування снігових зерен, тоді як нижче цього значення з ними відбувається сублімація, дифузія та деформація.

Модель збільшення густини, у формі залежній від часу, яку використовували [8], та форма, яка тут реалізована:

$$\frac{dp}{dt} = C \dot{b} g (p_i - p) e^{\left(\frac{-E_c}{RT_s} + \frac{E_g}{RT_s}\right)}, \quad (1.11)$$

де  $E_c = 60 \text{ кДж}\cdot\text{моль}^{-1}$ ,  $E_g = 42.4 \text{ кДж}\cdot\text{моль}^{-1}$ , і  $C$  – константа,  $E_c$  - енергія активації для самодифузії молекул води через крижану решітку, а  $E_g$  - енергія активації для збільшення зерна.  $C$  змінюється залежно від того, чи  $p$  вище або нижче критичної густини, зі значеннями  $0,03$  та  $0,07 \text{ м}\cdot\text{с}^2\cdot\text{кг}^{-1}$  відповідно.  $\dot{b}$  - середньорічне скупчення ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{а}^{-1}$ ), які тут обчислені були взяті з реаналізуючих даних,  $g$  - прискорення за рахунок сили тяжіння ( $\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ ),  $p_i$  - густина льоду ( $917 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ ),  $T_s$  (К) - поверхня температури (при  $\bar{T}_s$  середньорічне значення  $T_s$ ), а  $R$  - константа газу ( $8,314 \text{ Дж}\cdot\text{моль}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$ ).

Як тільки відбувається плавлення, при зміні густини, тоді переважає перколяція та повторне замерзання талої води.

### 1.1.3 Перколяція талої води через фірн

Коли плавлення відбувається на шельфовому льодовику, вода, що утворюється, може просочуватися через сніговий покрив до тих пір, поки глибина на якій густина фірну не перевищує густину закривання дірок ( $830 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ ). Це глибина на якій повітря залишається, коли воно потрапляє в фірн, то це як бульбашки всередині льоду, що потрапили у пастку, і тому фірн є непроникним [8].

Поверхневий розплав у моделі перколює вниз через сніговий покрив і промерзає, як тільки він досягне глибини фірну, який має температуру нижче замерзання, то він буде замерзати і підвищувати температуру навколишнього середовища, при цьому максимальна температура може досягати температури замерзання. Повторне замерзання талої води може призвести до формування ізотермічного шару; це підвищує температуру оточення фірну шляхом вивільнення прихованого тепла [9]. Слідом за [9], ми припускаємо, що локальна

теплопровідність є миттєвим процесом (і як така, що може відбуватися протягом одного часового кроку у моделі) і що терморівновагу досягають миттєво зі снігом при температурі замерзання коли додається тала вода. Якщо температура досягне температури замерзання, то тала вода, що залишилась, буде продовжувати перколювати до наступного шару, виключаючи невелику кількість, яка затримується внаслідок капілярного форсування за аналогічним методом [8].

#### 1.1.4 Формування крижаних лінз

Повторне замерзання талої води всередині фірну викликає збільшення густини. Як тільки густина осередку сітки досягне непроникної густини ( $830 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ ), то тала вода вже не зможе пройти через цю сітку і утворюється непроникна крижана лінза. Після того, як ця ситуація виникає, вся подальша поверхнева тала вода перколює лише до цієї частини сітки, тим самим насичує фірн від рівня крижаної лінзи вгору, в кінцевому підсумку призводить до відкритості до талої води, якщо станеться достатнє плавлення, щоб верхівка снігового покриву стала повністю насиченою.

Оскільки глибина кожної комірки сітки в моделі становить 5 см, передбачається, що як тільки одна сітчаста комірка моделі досягне такої густини, щоб утворити крижану лінзу (за рахунок повторного замерзання розплаву), то ця крижана лінза буде потім достатньо міцною для підтримки подальшого насичення снігу над ним. Якщо фірн стане повністю насиченим і тала вода виявиться на поверхні, модель переходить у стан озера.

#### 1.1.5 Накопичування снігу

Дані про накопичення додаються за допомогою звітів ERA-Interim, що використовують метеостанції, які використовуються для надання даних для швидкого моделювання. Оскільки дані про накопичення доступні лише за 12 годин часу, які розбиті на рівномірні часові відрізки, передбачається, що кількість снігу в будь-якому з цих часових відрізків рівномірно розподілено між кожним з 12 годинних відрізків, які передбачає модель.

Значення накопичення додають при густині  $350 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ , слідуючи за [10]. Хоча це може бути трохи густіше, ніж свіжий сніг, тут припускається, що початкова

густина снігу виникає дуже швидко і не буде суттєвим для результатів моделювання.

Цей новий шар накопичення додається відповідно температурі повітря, слідуючи за [11].

### 1.1.6 Повторне замерзання талої води, що накопичується у фірні

Оскільки можливо, що шари, які містять талу воду, зменшують свою температуру до температури нижче замерзання, то коли це трапляється, тала вода повторно замерзає. Для того щоб врахувати це, наприкінці кожного часового проміжку по часу, модель перевіряє температуру та вміст води у кожному з шарів. Для тих шарів, які містять воду та мають температуру нижче замерзання, обчислюється кількість води, необхідної для замерзання щоб підняти температуру цього шару до температури замерзання. Якщо це більше, ніж кількість присутньої води, то вся рідка вода буде замерзати. Потім густина і температура цього шару коригуються для врахування цього заморожування.

### 1.2 Об'єднання підводних торосів, вимитих морською водою в різних точках замерзання

Дана модель описана із роботи [12], у якій було показано, що в моделі ключову роль у консолідації відіграє процес обміну між мікропористістю морського льоду та макропористістю порожнин скупчених уламків льоду.

Розглянемо випадок, коли система не закрита і морська вода може протікати через порожнини скупчених уламків льоду. У цьому випадку кількість енергії, яка береться на початку у існуючого морського льоду, в залежності лише від кінцевої температури цього льоду. Але ця кінцева температура визначається тим, яка вода протікає через скупчені уламки льоду. І ще одна принципова відмінність порівняно з попереднім сценарієм полягає в тому, що кількість солі в порожнинах зменшується в часі. Це дає можливість заморозити більше льоду порівняно з ситуацією, коли кількість солі зберігається однаковою в порожнинах.

Рівняння тепловіддачі морського льоду, підводна частина якого складається з торосів, записується так

$$p_{si} c_{si} \frac{dT}{dt} = \nabla(k_{si} \nabla T), x \in V_{si}, \quad (1.13)$$

де  $T = T(t, x)$  - температура;  $t$  - час;  $x = (x, y, z)$  - радіус-вектор у просторі 3D;  $p_{si}$ ,  $c_{si}$  і  $k_{si}$  - густина, питома теплоємність і теплопровідність морського льоду відповідно;  $V_{si}$  - це об'єм підводних скупчень льодяних уламків. Повна похідна від температури та тривимірних диференціальних операторів визначається формулами

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} \cdot V_{si} \cdot \nabla T, \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (1.14)$$

де  $V_{si}$  - вектор швидкості морського льоду.

Припускаючи, що тиск  $p$  і солоність морського льоду  $S_{si}$  є константами, ми можемо виразити питому теплоємність  $c_{si}$ , використовуючи формулу

$$dH_{si} = c_{si} dT, \quad (1.15)$$

де  $H_{si}(T, p, S_{si})$  - ентальпія морського льоду на основі потенціалу морського льоду Гіббса,  $G = G(T, p, S_{si})$ , [13].

Передбачається, що межа об'єму затопленого морського льоду складається з лінійно-водної поверхні  $\Sigma_w$ , і поверхнею льоду-льоду  $\Sigma_i$ , що являє собою контактну поверхню між зануреним льодяним щепенем, промитим морською водою, і теплоізолюваною верхньою частиною. Відповідно до цих припущень, ми встановили граничну умову Стефана на межах  $\Sigma_w$  [13]

$$p_{si} L_{si} v_{nsi,n} = k_{si} \frac{\partial T}{\partial n}, T = T_f, x \in \Sigma_w, \quad (1.16)$$

де  $v_{nsi,n}$  - нормальна швидкість межі  $\Sigma_w$ , що виникає при утворенні нового морського льоду, а  $L_{si}$  - прихована теплота морського льодоутворення. Оскільки солоність новоутвореного льоду невідома, ми можемо оцінити лише нижню межу маси новоутвореного льоду з припущенням, що лід свіжий. Це припущення означає, що  $p_s(T_f, p, 0) \approx p_0 = 917 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$  та  $L_{si} = L = 334 \text{ кДж} \cdot \text{кг}^{-1}$ .

На поверхні  $\Sigma_i$  ми встановили умову теплоізоляції

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, x \in \Sigma_i. \quad (1.17)$$

Зауважимо, що повна нормальна швидкість поверхні  $\Sigma_w$  дорівнює сумі нормальних швидкостей  $v_{nsi,n}$  і  $v_{si,n}$ , пов'язаних з утворенням відповідно нового морського льоду та термічного розширення морського льоду.

Морська вода завжди знаходиться в точці замерзання і її температура задається як функція часу  $T_w = T_{w,f}(t)$ , що змінюється від початкового значення  $T_{w,f} = T_0$  при  $t = 0$  до кінцевого значення  $T_{w,f} = T_{eq}$  при  $t = \Delta t$ . Передбачається, що  $T_0 < T_{eq}$ .

Оскільки морська вода завжди знаходиться в точці замерзання, від води до льоду немає теплового потоку, всі холодні запаси льоду витрачаються на формування та замерзання нового льоду. Передбачається, що солоність морського льоду,  $S_{si}(t) = S$ , є постійною протягом процесу, тоді як солоність морської води,  $S_w = S_{w,f}(t)$ , обчислюється з умови термодинамічної рівноваги:

$$F(T_{w,f}, S_{w,f}) = 0. \quad (1.18)$$

Крім того, ми враховуємо одиницю об'єму, що складається з морського льоду та морської води. Об'ємна частка морського льоду  $v_{si}$ , змінюється з часом за рахунок утворення нового льоду та теплового розширення, про що було сказано вище. Інтеграція рівняння (1.13) над різним об'ємом льоду  $v_{si}$ , а потім протягом часу від  $t = 0$  до  $t = t_{eq} \gg \Delta t$  призводить до рівняння

$$(p_{si}(T_{eq}, p, S)H_{si}(T_{eq}, p, S) - p_{si}(T_0, p, S)H_{si}(T_0, p, S))v_{s,0} = p_0L(v_{si,eq} - v_{si,0}). \quad (1.19)$$

Макропористість крижаного щепеню дорівнює  $p_r = 1 - v_{si}$ . З рівняння (1.19) випливає, що зміна макропористості  $\Delta p_r = p_{r,eq} - p_{r,0}$ , де  $p_{r,0}$  і  $p_{r,eq}$  - макропористість при  $t = 0$  і  $t = t_{eq}$ , визначається формулою

$$\Delta p_k = \frac{1 - p_{k,0}}{p_0L} (p_{si}(T_{eq}, p, S)H_{si}(T_{eq}, p, S) - p_{si}(T_0, p, S)H_{si}(T_0, p, S)). \quad (1.20)$$

Результати чисельних обчислень наведені на рис. 1.2. Початкова макропористість крижаного щепеню,  $p_{r,0}$  дорівнює 0,1, 0,2, 0,3 та 0,4 для кривих 1, 2, 3 та 4 відповідно. Початкова температура скупчених уламків льоду  $T_0 = -2$  °C. Криві на рис. 1.2 показують, що зміни макропористості крижаного щепеню завершуються в точках повного згущення, де  $\Delta p_r + p_{r,0} = 0$ . Порівнюючи криві 2 на рис. 1.2а та 1.2б ми робимо висновок, що повне згущення скупчених уламків льоду з початковою макропористістю  $p_{r,0} = 0,2$  та солоністю крижаного блоку  $S_{si} = 3$  г·кг<sup>-1</sup> відбувається, коли льодяний щепінь промивається морською водою з температурою  $T_{eq} \approx -0,6$  °C. Повне згущення того ж щепеню,

коли солоність льодоблоку  $S_{si} = 6 \text{ г} \cdot \text{кг}^{-1}$  відбувається, коли щєбінь промивається морською водою з температурою  $T_{eq} \approx -1 \text{ }^\circ\text{C}$ .

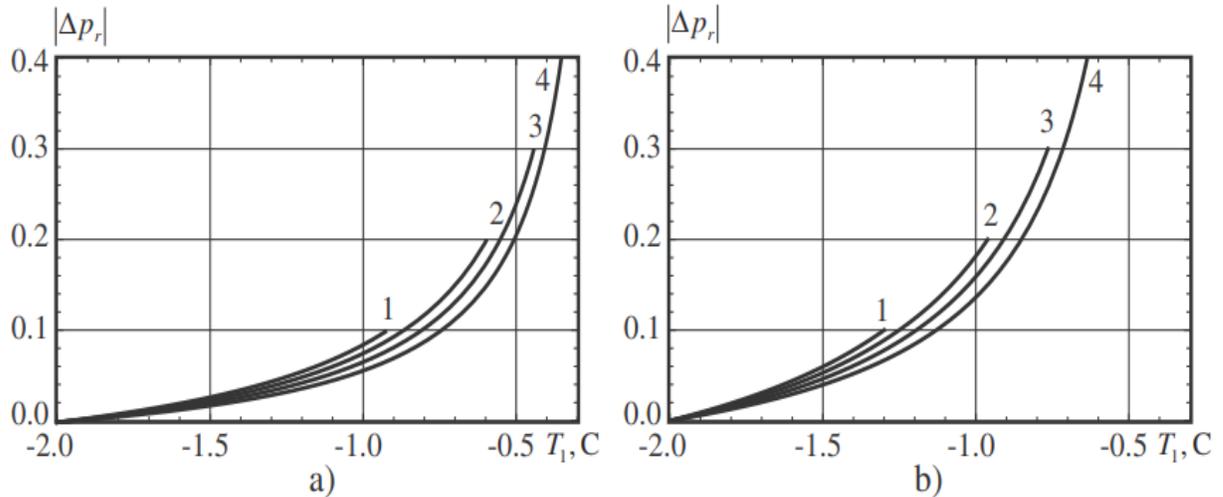


Рис. 1.2 – Зміни макропористості  $|\Delta p_r|$  від кінцевої температури води  $T_{eq}$ , обчисленої з різними значеннями початкової макропористості скупчених уламків льоду. Початкова солоність морського льоду  $S_{si, 0}$ , дорівнює  $3 \text{ г} \cdot \text{кг}^{-1}$  (а) та  $6 \text{ г} \cdot \text{кг}^{-1}$  (б). Початкова температура скупчених уламків льоду  $-2 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Ефект від початкового згущення скупчених уламків льоду менший, ніж згущення, яке проілюстроване на рис. 2. Цей результат обумовлений сильною залежністю питомої теплоємності морського льоду від температури в інтервалі температур від  $-2$  до  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

## 2 ОСНОВНА ЧАСТИНА

### 2.1 Основні рівняння та постановка задачі

Розглянемо систему базових рівнянь [14] з урахуванням неоднорідності температури, вона набуває вигляду:

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + \sigma, \quad (2.1)$$

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + g(T - 1)\varepsilon, \quad (2.2)$$

$$\tau_T \dot{T} = \nabla^2 T + (\tau_T Q - T) - \sigma\varepsilon, \quad (2.3)$$

де  $\tau_\varepsilon$  - час релаксації деформації (с),  $\varepsilon$  - зсувна складова відносних деформацій (безрозмірна змінна),  $\sigma$  - зсувна складова відносних напружень (Па),  $\tau_\sigma$  - час релаксації напруг (с),  $T$  - температура поверхні льоду (К),  $\tau_T$  - час релаксації температури (с),  $Q$  - потік тепла від ковзаючого блоку по поверхні льоду ( $\text{K}\cdot\text{m}^{-3}$ ).

Введена константа  $g < 1$ , яка дорівнює відношенню модуля зсуву розм'якшеного приповерхневого шару льоду до його характерного значення.

У нашому випадку система рівнянь (2.1) – (2.3) описує нелінійну модель в'язкопружного середовища, яка подає розм'якшення тонкого шару поверхні льоду при терті [15]. Основна ідея полягає у тому, що розм'якшений приповерхневий шар льоду являє собою тверде тіло з великою густиною дефектів.

Система рівнянь (2.1) - (2.3) описує особливості поведінки неоднорідної системи диференціальних рівнянь, що працює в режимі граничного тертя, яка показана на рис. 2.1 [16].

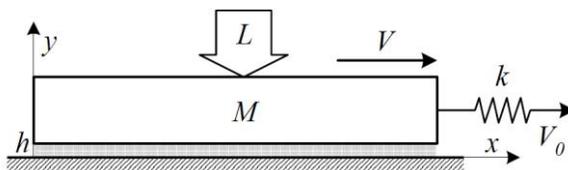


Рис. 2.1 - Механічний аналог системи.

На рисунку 2.1 зображена система, яка складається із блока, який знаходиться під шаром речовини шириною  $u$   $h$ , певної маси  $M$ , та пружини із жорсткістю  $k$ . На даний блок вливає додаткове навантаження  $L$  та кінець пружини рухається зі швидкістю  $V_0$ .

## 2.2 Аналітичний розв'язок

Обрані рівняння (2.1) – (2.3) взагалі не мають розв'язку, тому для вирішення цієї задачі ми використовуємо таке адіабатичне наближення:

$$\tau_\varepsilon \gg \tau_T, \tau_\sigma. \quad (2.4)$$

Такий підхід до вирішення задачі обумовлений тим, що в процесі еволюції складова напружень  $\sigma(t)$  та температура поверхні льоду  $T(t)$  слідує за змінами складової деформації  $\varepsilon(t)$ .

Мінімальний час деформації можна оцінити через  $\tau_\varepsilon \approx \frac{a}{c} \sim 10^{-12}$  с, де  $a \sim 1$  нм це константа решітки або міжмолекулярна відстань, а  $c \sim 10^3$  м / с - швидкість звуку, він визначається часом переорієнтації молекул води у точці замерзання прісної води.

Крім того, в рамках одномодового наближення оператор замінюється відношенням  $\nabla^2 \rightarrow \left(\frac{l}{L}\right)^2$  [14], де  $l$  - довжина теплопровідності або товщина плівки льоду,  $L$  - максимальне значення довжини теплопровідності.

Тоді, прирівнюючи ліву частину рівнянь (2.2) та (2.3) до нуля, ми можемо виразити напруження  $\sigma$  та температуру  $T$  у їх залежності від деформації  $\varepsilon$ :

$$\left(\frac{l}{L}\right)^2 T + (\tau_T Q - T) - \varepsilon^2 g(T - 1) = 0 \Rightarrow T \left[ \left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - \varepsilon^2 g \right] = \tau_T Q - \varepsilon^2, \quad (2.5)$$

$$T = \frac{\tau_T Q - \varepsilon^2 g}{\left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - \varepsilon^2 g},$$

$$\sigma = g\varepsilon \left( \frac{\tau_T Q - \varepsilon^2 g}{\left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - \varepsilon^2 g} - 1 \right) \sigma = g\varepsilon \left( 1 - \frac{2 \left[ \left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 \right] + \tau_T Q}{\left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - \varepsilon^2 g} \right). \quad (2.6)$$

Відповідно до рівнянь (2.5) та (2.6) при  $\left(\frac{l}{L}\right)^2 = 0$  стаціонарне значення напруги  $\sigma$  і температури  $T$ , такі:

$$\sigma_0 = g\varepsilon_0 \left( 1 + \frac{2 - \tau_T Q}{1 + \varepsilon_0^2 g} \right) = g\varepsilon_0 \left( \frac{3 + \varepsilon_0^2 g - \tau_T Q}{1 + \varepsilon_0^2 g} \right), \quad (2.7)$$

$$T_0 = \varepsilon_0 \left( \frac{\tau_T Q - \varepsilon_0^2 g}{-(1 + \varepsilon_0^2 g)} \right). \quad (2.8)$$

Підставляючи рівняння (2.6) у (2.1) при умові, що  $\varepsilon^2 \ll 1 + \left(\frac{l}{L}\right)^2$ , ми отримаємо:

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = & -\varepsilon(1 - g) + g\varepsilon \left[ 2 \left(\frac{l}{L}\right)^2 - 2 + \tau_T Q + 2 \left(\frac{l}{L}\right)^4 - 2 \left(\frac{l}{L}\right)^2 + \tau_T Q \left(\frac{l}{L}\right)^2 \right] - \\ & - 2\varepsilon^2 g \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 2\varepsilon^2 g - \varepsilon^2 g \tau_T Q = -\varepsilon[1 + g(3 - \tau_T Q)] + g^2 \varepsilon^3 (2 - \tau_T Q) + \\ & + g \left(\frac{l}{L}\right)^2 (\varepsilon \tau_T Q - 2\varepsilon^3) + 2g\varepsilon \left(\frac{l}{L}\right)^4. \end{aligned} \quad (2.9)$$

У рівнянні (2.10) виконаємо зворотній перехід від  $\left(\frac{l}{L}\right)^2$  до оператору  $\nabla^2$

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon[1 + g(3 - \tau_T Q)] + g^2 \varepsilon^3 (2 - \tau_T Q) + \nabla^2 g \varepsilon \tau_T Q - \nabla^2 2\varepsilon^3 g + \nabla^4 2\varepsilon g. \quad (2.10)$$

В підсумку попередніх двох заміни ми отримаємо, що  $g \tau_T Q \approx 1$  та в рамках нашої моделі кожна похідна  $\nabla$  додає порядок малості, тому при порядках більше ніж третій вона знехтує силами  $\varepsilon$ , тоді виходить таке рівняння:

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} - \nabla^2 \varepsilon = -\varepsilon[1 + g(3 - \tau_T Q)] + \varepsilon^3 g(2g - 1). \quad (2.11)$$

Виходячи з попередніх перетворень система (2.1) - (2.3) зводиться [16] до залежного від часу рівняння Гінзбурга-Ландау:

$$\tau_\sigma \dot{\varepsilon} = \nabla^2 \varepsilon - \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}, \quad (2.12)$$

Щоб визначити синергетичний потенціал проведемо декілька перетворень, підставимо (2.11) у  $\tau_\sigma \dot{\varepsilon} = -\frac{\delta V}{\delta \varepsilon(\vec{r})}$ , отримаємо:

$$V_1 = \int \left\{ \left( [1 + g(3 - \tau_T Q)] \frac{\varepsilon^2}{2} + (1 - 2g) \frac{\varepsilon^4 g}{4} \right) + \frac{1}{2} (\nabla \varepsilon)^2 \right\} d\vec{r}. \quad (2.13)$$

$$V = \left( [1 + g(3 - \tau_T Q)] \frac{\varepsilon^2}{2} + (1 - 2g) \frac{\varepsilon^4 g}{4} \right). \quad (2.14)$$

З (2.13) отримуємо що  $1 - 2g > 0$ ,  $g < 0.5$ .

Якщо температура  $T_e = \tau_T Q$  (температура поверхонь, що труться), менше критичного значення

$$T_c = 1 + g^{-1}; g = \frac{G}{G_0} < \frac{1}{2}, G_0 = \frac{\eta_0}{\tau_\varepsilon}, \quad (2.15)$$

де  $T_c$  – характерна температура поверхні льоду (К),  $G$  – неспокійний модуль зсуву (Па),  $G_0$  – типовий модуль зсуву (Па),  $\eta_0$  – типове значення в'язкості зсуву (Па·с), тоді потенціал (2.13) приймає мінімум, що відповідає зсувній деформації  $\varepsilon = 0$ , тому плавлення не може відбутися і переходить у твердоподібний стан.

У протилежному випадку  $T_e > T_c$  нерухома зсувна деформація має не нульове значення, яке ми отримуємо при прирівнюванні часткової похідної за  $\varepsilon$  від (2.13) до нуля

$$\frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon} = [1 + g(3 - \tau_T Q)]\varepsilon + \varepsilon^3 g(2g - 1) = 0,$$

$$\varepsilon_0 = \left( \frac{\tau_T Q g - (3g + 1)}{(1 - 2g)g} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

У стаціонарному стані при  $\dot{\varepsilon}$  рівняння (2.13) має перший інтеграл

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varepsilon}{dy} \right)^2 = V + |V_0|. \quad (2.18)$$

Тут враховується, що на упорядкованій фазі  $y = -\infty$  та при виконанні умов  $\varepsilon = \varepsilon_0, \nabla \varepsilon = 0$  вимагається рівністю константи інтегрування до абсолютного значення упорядкованого синергетичного потенціалу  $V_0$ .

$$V_0 \equiv V(\varepsilon_0) \cong - \frac{(g\tau_T Q - (3g + 1))^2}{4g(1 - 2g)}. \quad (2.19)$$

Розв'язання рівняння (2.12) враховуючи стаціонарні умови показує, що розподіл зсувної деформації представляється перегином

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \tanh \left( \frac{y_0 - y}{\xi} \right), \quad (2.20)$$

$$\xi = -\sqrt{2} \frac{1}{(1 + g(3 - \tau_T Q))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\xi^2 \equiv \frac{2}{gT_e - (g + 1)}. \quad (2.21)$$

де  $\xi$  - довжина кореляції введена для того щоб показати відхилення при критичному значенні температури поверхні тертя  $T_e = \tau_T Q$ . Якщо постійно інтегрувати при умові  $y_0 \gg \xi$ , то  $\xi$  визначає ширину граничної області, в якій зсувна деформація зменшується від стаціонарного значення (2.17) до нуля.

Тому в рамках адіабатичного та одномодового наближень знайдено аналітичний солітонний розв'язок (2.20) одновимірного параболічного рівняння для просторового нормального до поверхні льоду розподілу зсувної деформації. На рисунку 2.2 зображений саме цей розподіл.

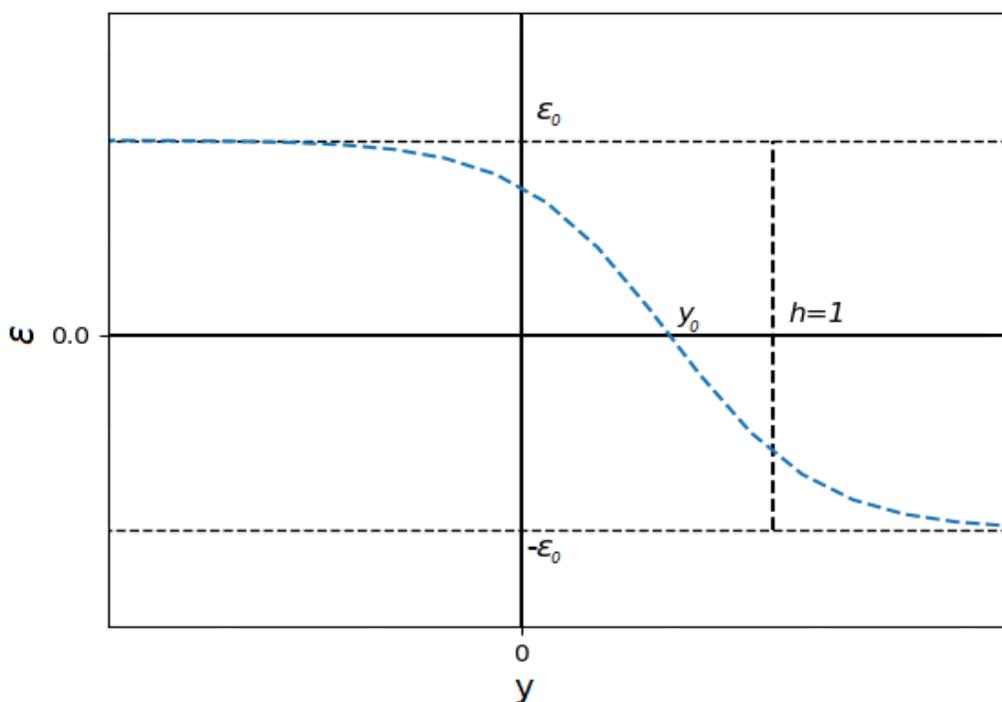


Рис. 2.2 – Координатна залежність деформацій, отриманих при аналітичному розв'язку, де  $y_0 < h = 1$  та  $h = l$ .

## 2.3 Чисельний розв'язок

### 2.3.1 Метод сіток та умови

В розділі 2.2 система нелінійних диференціальних рівнянь (2.1) – (2.3) в рамках одномодового  $\nabla^2 \rightarrow \left(\frac{l}{L}\right)^2$  та адіабатичного наближень  $\tau_\varepsilon \gg \tau_T, \tau_\sigma$

зводиться до одновимірного параболічного рівняння Гінзбурга-Ландау (2.12) де синергетичний потенціал виражений рівнянням (2.14).

В даному розділі ми будемо приводити рівняння (2.12) до рівнянні з чисельним розв'язком, щоб побачити розвиток системи.

Щоб знайти термодинамічну силу  $f(\varepsilon)$  беремо похідну від синергетичного потенціалу (2.14) з від'ємним знаком

$$f(\varepsilon) = -\varepsilon[1 + g(3 - \tau_T Q)] - \varepsilon^3 g(1 - 2g). \quad (2.22)$$

В даній роботі рівняння (2.12) має вид одновимірного параболічного рівняння, яке чисельно будемо розв'язувати використовуючи явну двошарову різницеву схему, тобто метод сіток. На рис. 2.3 зображена сітка, яка задає просторове розбиття для чисельного рішення рівняння (2.12), її і надалі будемо використовувати.

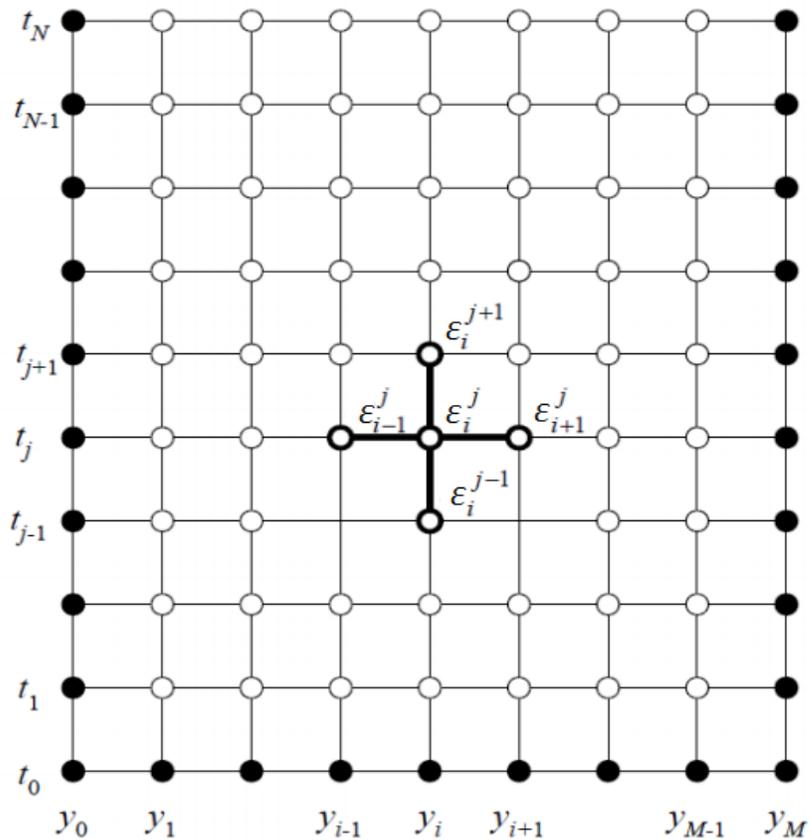


Рис. 2.3 – Сітка, яка задає просторове розбиття для чисельного рішення рівняння (2.12) та показаний ітерований вузол.

Розрахунок будемо проводити за координатою  $y$ , яка відповідає межам  $[0; y_M]$  та за часом від 0 до  $t_N$ . Також на рис. 2.3 зображені точки, вони являють собою

необхідні граничні та початкові умови, які будуть визначені виходячи із фізичного представлення задачі.

Проведемо апроксимування похідних для явної схеми, як зображено на рисунку 2.3

$$\nabla^2 \varepsilon \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon_{i+1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^j}{H^2}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\Delta}, \quad (2.24)$$

де  $H = \frac{y_M}{M}$  – крок по координаті, показує відстань між вузлами,  $M$  – кількість кроків по координаті,  $\Delta = \frac{t_N}{N}$  – крок за часом,  $N$  – кількість кроків по часу.

Кінцеве співвідношення буде виглядати так:

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \frac{\Delta}{\tau_\varepsilon H^2} [\varepsilon_{i+1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^j + H^2 f(\varepsilon_i^j)], \quad (2.25)$$

де  $f(\varepsilon_i^j)$  – попередньо визначена термодинамічна сила (2.22).

Таким чином система (2.25) складає  $N(M-1)$  рівнянь і надає можливість знайти  $\varepsilon_i^{j+1}$ , при відомому попередньому часовому шарі  $\varepsilon_i^j$ . Для рішення визначеної задачі задамо формальний набір початкових та граничних умов у моменті часу  $t=0$ :

$$\varepsilon_i^j = \phi_i, i = 0, 1, \dots, M, \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_\sigma^j = \lambda_j, \varepsilon_M^j = \eta_j, j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.27)$$

які додають  $(M+1)$  та  $2N$  рівнянь відповідно. У сукупності з (2.25) – (2.27) маємо  $(M+1)(N+1)$  рівнянь, що дорівнює кількості невідомих вузлів сітки.

При русі поверхонь тертя встановлене стаціонарне значення  $\varepsilon_0$  (2.17), яке потрібне нам для початку обчислень.

Розглянемо дві найбільш суттєві фізичні ситуації. Перша, коли верхня і нижня поверхні рухаються з рівними за величиною швидкостями у протилежних напрямках. Тобто у верхній поверхні зсувна деформація буде дорівнювати  $\varepsilon_0$ , а на протилежній  $-\varepsilon_0$ , так як вони задають швидкість руху. Інший простір між ними буде заповнений нулями, бо задаємо умови при моменті часу  $t=0$ , тоді маємо такі початкові та граничні умови:

$$\varepsilon_i^0 = -\varepsilon_0 + \frac{2i\varepsilon_0}{M}, i = 0, 1, \dots, M, \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_0^j = -\varepsilon_0, \varepsilon_M^j = \varepsilon_0, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.29)$$

Розглянемо другу ситуацію, коли верхня поверхня зсувається по нерухомій нижній. Тобто у верхній поверхні зсувна деформація буде дорівнювати  $\varepsilon_0$ , а на протилежній 0, інший простір між ними буде заповнений нулями. Отримуємо такі початкові та граничні умови, відповідно:

$$\varepsilon_i^0 = \frac{i\varepsilon_0}{M}, i = 0, 1, \dots, M, \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_0^j = 0, \varepsilon_M^j = \varepsilon_0, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.31)$$

Показник координати  $y$  будемо вимірювати в одиницях товщини приповерхневого шару льоду  $h$ , нижня його границя дорівнює 0, а верхня 1. Таким чином ми отримуємо замкнену систему рівнянь, що дає можливість на вирішення поставленої задачі.

Для рішення обираємо крок по часу  $\Delta = 10^{-6}$  та крок по координаті  $H=0.01$ .

Отримуємо, що координата  $y$  ділиться на  $M=100$  частин.

Щоб перейти від зсувної деформації  $\varepsilon$  до сили тертя використаємо формулу

$$F(t) = AG_\varepsilon \varepsilon(t), \quad (2.32)$$

де  $A$  – контактуюча площа ( $m^2$ ), а  $G_\varepsilon$ - релаксуючий модуль зсуву. Приймаємо, що сила тертя вимірюється в одиницях  $AG_\varepsilon$ .

### 2.3.2 Результати

На наступних рисунках буде показана координатна залежність сили тертя на різних часових шарах і еволюція системи до стаціонарного стану.

На рисунках 2.4 та 2.5 зображені результати розв'язку обраних нами рівняннями. На цих двох рисунках показані результати для чотирьох шарів часу. Штрихова лінія на обох рисунках відображає собою початкові умови (2.28) та (2.30) відповідно, тобто початковий розподіли сили тертя на нульовому шарі часу  $t=0$ .

На рис. 2.4 були відображені часові шари 500, 2500 та 50000, що при обраному кроку по часу  $\Delta$  дає нам такі моменти часу  $t=0.0005, 0.0025, 0.05$ . Остання крива з вибором більшого моменту часу не змінюється, тобто вона відповідає стаціонарному значенню розподілу сили тертя по розм'якшеному приповерхневому шару льоду.

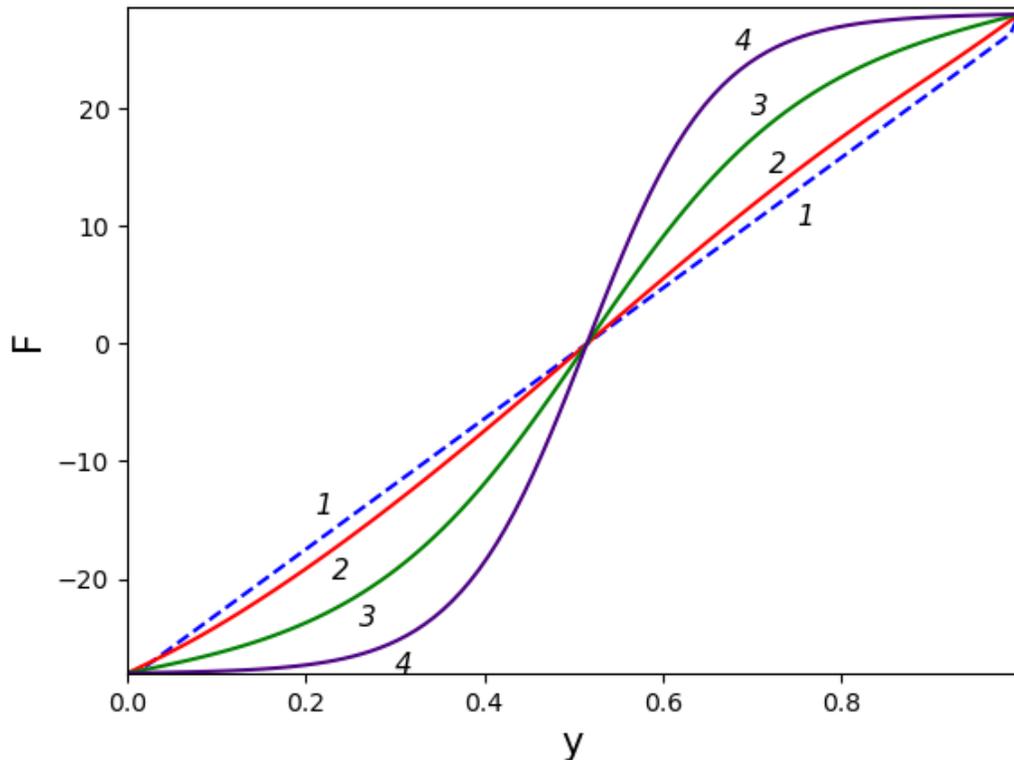


Рис. 2.4 – Координатна залежність сили тертя, отримана при чисельному розв'язку рівняння при параметрах  $T_e = \tau_T Q = 400, g = 0.25, \tau_\varepsilon = 0.3$  та при початкових (2.28) та граничних (2.29) умовах.

На рис. 2.5 були відображені ті ж самі часові шари 500, 2500 та 50000, які були вибрані для рис. 2.4. та початкова (2.30) та гранична умови (2.31). Остання крива з вибором більшого моменту часу не змінюється, тобто вона відповідає стаціонарному значенню розподілу сили тертя по розм'якшеному приповерхневому шару льоду.

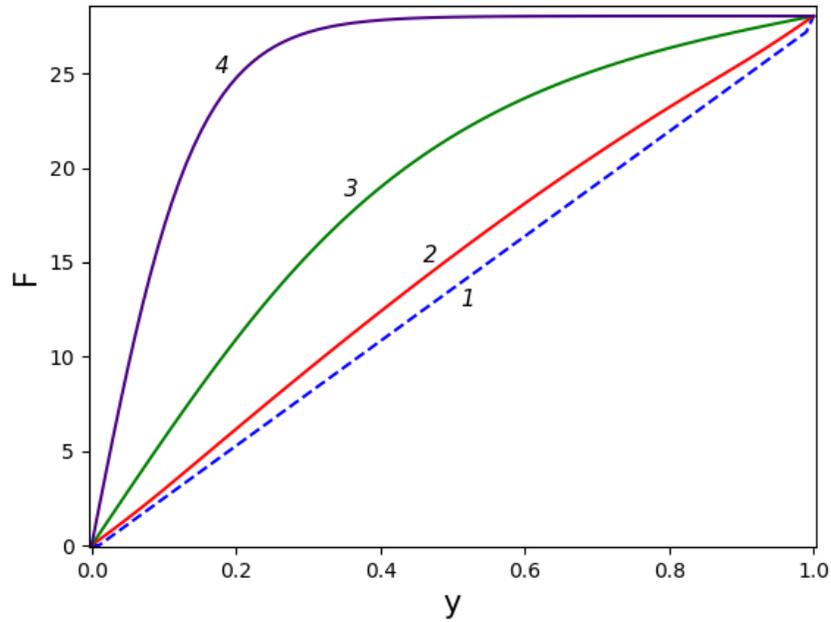


Рис. 2.5 – Координатна залежність сили тертя, отримана при чисельному розв’язку рівняння при параметрах  $T_e = \tau_T Q = 400, g = 0.25, \tau_\varepsilon = 0.3$  та при початкових (2.30) та граничних (2.31) умовах.

На рисунках 2.6 та 2.7 зображена координатна залежність сили тертя при різних температурних показниках  $T_e = \tau_T Q$  та при двох різних початкових та граничних умовах. Був обраний 100000 шар часу, що при визначеному кроку по часу  $\Delta$  дає нам відповідний момент часу  $t=0.1$ .

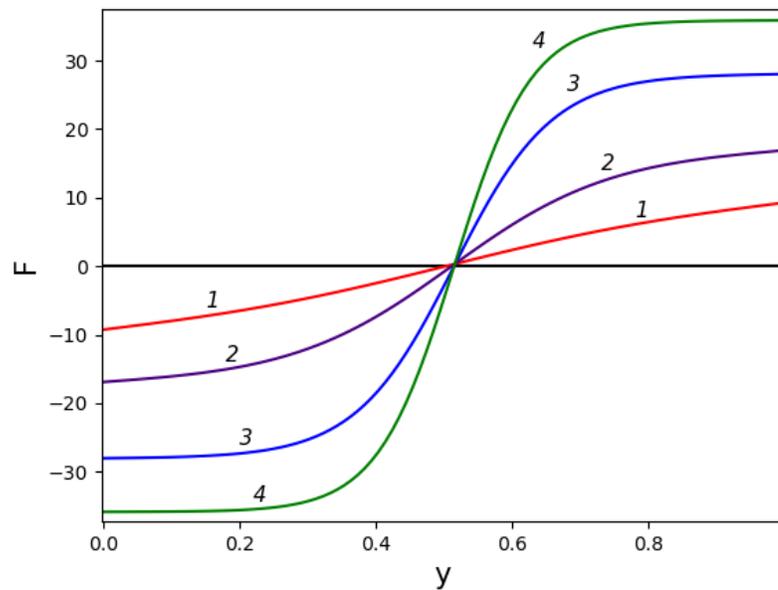


Рис. 2.6 – Координатна залежність стаціонарних значень сили тертя, при  $T_e = \tau_T Q$ : 50, 150, 400, 650 та при початкових (2.28) та граничних (2.29) умовах.

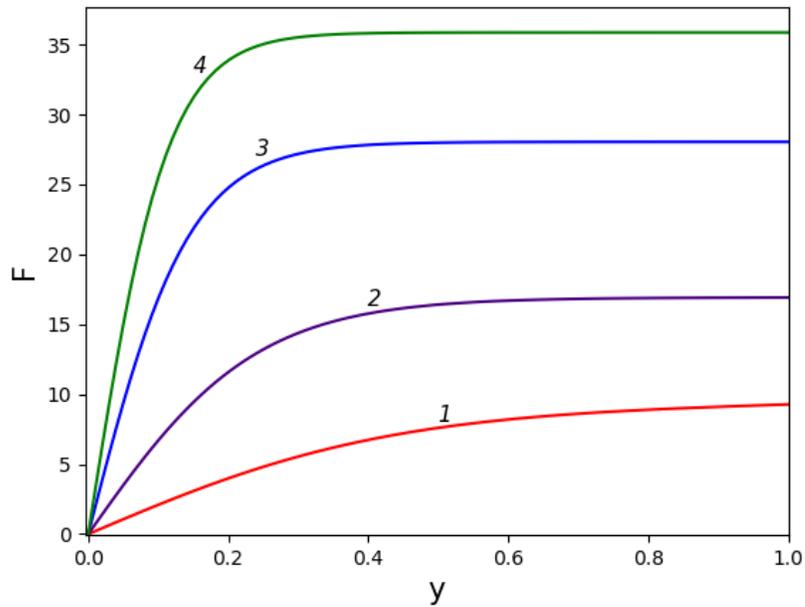


Рис. 2.7 – Координатна залежність стаціонарних значень сили тертя, при  $T_e = \tau_T Q$ : 50, 150, 400, 650 та при початкових (2.30) та граничних (2.31) умовах.

Значення констант були використані ті ж самі, що і попередньо  $g = 0.25$ ,  $\tau_\varepsilon = 0.3$ .

Видно, що підвищення температури приводить до більш різкої зміни сили тертя по товщині приповерхневого шару льоду, тобто збільшується відносна швидкість зсуву третювних поверхонь. З цього слідує, що різниця між силами тертя у верхніх та нижніх координатних шарах на багато збільшується.

## ВИСНОВКИ

- 1 В рамках адіабатичного та одномодового наближень знайдено аналітичний солітонний розв'язок одновимірного параболічного рівняння для просторового нормального до поверхні льоду розподілу зсувної деформації. Визначено залежність температури від відповідної координати.
- 2 Використовуючи явну двошарову різницеву схему, проведено числове дослідження одновимірного параболічного рівняння. Побудовано розподіли поточних і стаціонарних значень сили тертя. Розглядались два випадки: 1) верхня і нижня поверхні рухаються з рівними за величиною швидкостями у протилежних напрямках; 2) верхня поверхня зсувається по нерухомій нижній.
- 3 Проаналізовано залежність стаціонарної сили тертя від координати вздовж осі, що перпендикулярна поверхні льоду, при різних температурах термостату.
- 4 Аналітично встановлено, що в точці, де сила тертя змінює напрямок, температура стає максимальною. Показано, що підвищення температури приводить до більш різкої зміни сили тертя по товщині приповерхневого шару льоду, тобто збільшується відносна швидкість зсуву тертьових поверхонь.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Логвиненко Д. Т. Інформатика, математика, автоматика. *Моделювання кінетики фрагментації металів при мегапластичній (інтенсивній) деформації* : тези доп. наук.-тех. конф., м. Суми, 23-26 квіт. 2019 р. Суми, Сумський державний університет 2019. С. 197.
2. Логвиненко Д. Т. Інформатика, математика, автоматика. *Врахування просторової неоднорідності температури в нелінійній моделі розм'якшення поверхні льоду при терті*: тези доп. міжнар. наук.-тех. конф., м. Суми, 20-24 квіт. 2020 р. Суми, Сумський державний університет 2020. С. 237.
3. Buzzard, S. C., Feltham, D. L., & Flocco, D. A mathematical model of melt lake development on an ice shelf. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 2018, 10, 262–283.
4. Ambaum, M. H. P. *Thermal physics of the atmosphere. Advancing weather and climate science*. Chichester, UK: Wiley-Blackwell, 2010.
5. Ebert, E., & Curry, J. An intermediate one-dimensional thermodynamic sea ice model for investigating ice-atmosphere interactions. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 1993, 98(C6), 10085–10109.
6. Luthje, M., Pedersen, L., Reeh, N., & Greuell, W. Modelling the evolution of supraglacial lakes on the West Greenland ice-sheet margin. *Journal of Glaciology*, 2006, 52(179), 608–618.
7. Arthern, R., Vaughan, D. G., Rankin, A., Mulvaney, R., & Thomas, E. In situ measurements of Antarctic snow compaction compared with predictions of models. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2010, 115, F03011.
8. Ligtenberg, S., Helsen, M., & van den Broeke, M. An improved semi-empirical model for the densification of Antarctic firn. *The Cryosphere*, 2011, 5, 809–819.

9. Tseng, P., Illangasekare, T., & Meier, M. Modelling of snow melting and uniform wetting front migration in a layered subfreezing snowpack. *Water Resources Research*, 1994, 30(8), 2363–2376.
10. Kuipers Munneke, P., Van den Broeke, M., King, J., Grat, T., & Reijmer, C. Near-surface climate and surface energy budget of Larsen C ice shelf, Antarctic Peninsula. *The Cryosphere*, 2012a, 6, 353–363.
11. Sergienko, O. Surface melt in ice shelves and icebergs (PhD thesis). Chicago, IL: University of Chicago, 2005.
12. Shestov, A. S., Marchenko, A. V., 2016. Thermodynamic consolidation of ice ridge keels in water at varying freezing points. *Cold Reg. Sci. Technol.* 121, 1–10.
13. Shestov, A. S., Marchenko, A. V., 2016. The consolidation of saline ice blocks in water of varying freezing points: Laboratory experiments and computer simulations. *Cold Reg. Sci. Technol.* 122, 71–79.
14. Khomenko, A.V., Khomenko, K.P., Falko, V.V.: Nonlinear model of ice surface softening during friction. *Condens. Matter Phys.* 19(3), 33002 (2016)
15. A. Khomenko, Self-Similar Mode of Ice Surface Softening During Friction. *Tribol. Lett.* 66, 82 (2018).
16. A. Khomenko, M. Khomenko, N. J. Persson, K. Khomenko, Noise Effect on Ice Surface Softening During Friction. *Tribol. Lett.* 65, 71 (2017).

## Код програми для розрахунку координатної залежності сили тертя

```

import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt, sin, pi
import numpy as np

n=100000
m=100
g=0.25
tau_tQ=400
tau_eps=0.3
h=0.01
delta=0.000001
eps_0 = sqrt((g*tau_tQ-3*g - 1)/((1-2*g)*g))
#При T=400
def func(eps):
    res=-(1.0 + g*(3.0 - tau_tQ))*eps - (1 - 2.0*g)*g* eps**3
    return res

A=[]
def fillEPS(A): # заповняємо матрицю початковими та граничними умовами
    #znach = -eps_0 #2.27 та 2.28
    znach = 0 # 2.29 та 2.30
    for i in range(0,n):
        A.append([])
        for j in range(0,m):
            if j == 0:
                #A[i].append(-eps_0) #2.27 та 2.28
                A[i].append(0) #2.29 та 2.30
            else:
                if j ==m-1:
                    #A[i].append(eps_0) #2.27 та 2.28
                    A[i].append(eps_0) #2.29 та 2.30
                else:
                    if i==0:
                        A[i].append(znach)
                        #znach+=2*eps_0/m #2.27 та 2.28
                        znach += eps_0 / m # 2.29 та 2.30
                    else:
                        A[i].append(0)

EPS=[]
fillEPS(EPS)

for j in range(0,n-1):
    for i in range(1,m-1):
        EPS[j+1][i]=EPS[j][i] + delta*(EPS[j][i+1] - 2.0*EPS[j][i] + EPS[j][i-1] +
h*h*func(EPS[j][i]))/(tau_eps*h*h)

#При T=50
tau_tQ50=50
eps_050 = sqrt((g*tau_tQ50-3*g - 1)/((1-2*g)*g))

def func50(eps):

```

```

    res=-((1.0 + g*(3.0 - tau_tQ50))*eps - (1 - 2.0*g)*g* eps**3
    return res

A50=[]
def fillEPS50(A50): # заповняємо матрицю початковими та граничними умовами
    #znach = -eps_050 #2.27 та 2.28
    znach = 0 # 2.29 та 2.30
    for i in range(0,n):
        A50.append([])
        for j in range(0,m):
            if j == 0:
                #A50[i].append(-eps_050) #2.27 та 2.28
                A50[i].append(0) #2.29 та 2.30
            else:
                if j ==m-1:
                    #A50[i].append(eps_050) #2.27 та 2.28
                    A50[i].append(eps_050) #2.29 та 2.30
                else:
                    if i==0:
                        A50[i].append(znach)
                        #znach+=2*eps_050/m #2.27 та 2.28
                        znach += eps_050 / m # 2.29 та 2.30
                    else:
                        A50[i].append(0)

EPS50=[]
fillEPS50(EPS50)

for j in range(0,n-1):
    for i in range(1,m-1):
        EPS50[j+1][i]=EPS50[j][i] + delta*(EPS50[j][i+1] - 2.0*EPS50[j][i] +
EPS50[j][i-1] + h*h*func50(EPS50[j][i]))/(tau_eps*h*h)

#При T=150
tau_tQ150=150
eps_0150 = sqrt((g*tau_tQ150-3*g - 1)/((1-2*g)*g))

def func150(eps):
    res=-((1.0 + g*(3.0 - tau_tQ150))*eps - (1 - 2.0*g)*g* eps**3
    return res

A150=[]
def fillEPS150(A150): # заповняємо матрицю початковими та граничними умовами
    #znach = -eps_0150 #2.27 та 2.28
    znach = 0 # 2.29 та 2.30
    for i in range(0,n):
        A150.append([])
        for j in range(0,m):
            if j == 0:
                #A150[i].append(-eps_0150) #2.27 та 2.28
                A150[i].append(0) #2.29 та 2.30
            else:
                if j ==m-1:
                    #A150[i].append(eps_0150) #2.27 та 2.28
                    A150[i].append(eps_0150) #2.29 та 2.30
                else:
                    if i==0:
                        A150[i].append(znach)

```

```

        #znach+=2*eps_0150/m #2.27 ma 2.28
        znach += eps_0150 / m # 2.29 ma 2.30
    else:
        A150[i].append(0)

EPS150=[]
fillEPS150(EPS150)

for j in range(0,n-1):
    for i in range(1,m-1):
        EPS150[j+1][i]=EPS150[j][i] + delta*(EPS150[j][i+1] - 2.0*EPS150[j][i] +
EPS150[j][i-1] + h*h*func150(EPS150[j][i]))/(tau_eps*h*h)

#При T=650
tau_tQ650=650
eps_0650 = sqrt((g*tau_tQ650-3*g - 1)/((1-2*g)*g))

def func650(eps):
    res=-(1.0 + g*(3.0 - tau_tQ650))*eps - (1 - 2.0*g)*g* eps**3
    return res

A650=[]
def fillEPS650(A650): # заповняємо матрицю початковими та граничними умовами
    #znach = -eps_0650 #2.27 ma 2.28
    znach = 0 # 2.29 ma 2.30
    for i in range(0,n):
        A650.append([])
        for j in range(0,m):
            if j == 0:
                #A650[i].append(-eps_0650) #2.27 ma 2.28
                A650[i].append(0) #2.29 ma 2.30
            else:
                if j ==m-1:
                    #A650[i].append(eps_0650) #2.27 ma 2.28
                    A650[i].append(eps_0650) #2.29 ma 2.30
                else:
                    if i==0:
                        A650[i].append(znach)
                        #znach+=2*eps_0650/m #2.27 ma 2.28
                        znach += eps_0650 / m # 2.29 ma 2.30
                    else:
                        A650[i].append(0)

EPS650=[]
fillEPS650(EPS650)

for j in range(0,n-1):
    for i in range(1,m-1):
        EPS650[j+1][i]=EPS650[j][i] + delta*(EPS650[j][i+1] - 2.0*EPS650[j][i] +
EPS650[j][i-1] + h*h*func650(EPS650[j][i]))/(tau_eps*h*h)

B280=[]
for i in range(0,m):
    chisl=EPS[99999][i]
    B280.append(chisl)
B50=[]
for i in range(0,m):
    chisl=EPS50[99999][i]
    B50.append(chisl)

```

```

B150=[]
for i in range(0,m):
    chisl=EPS150[99999][i]
    B150.append(chisl)
B650=[]
for i in range(0,m):
    chisl=EPS650[99999][i]
    B650.append(chisl)

#Графічний блок
y = np.linspace(0,1,100)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(y, B280, color="blue")
ax.plot(y, B50, color="red")
ax.plot(y, B150, color="indigo")
ax.plot(y, B650, color="green")
#ax.text(0.15, -6, '1', fontsize = 11, style = 'italic')
#ax.text(0.18, -14, '2', fontsize = 11, style = 'italic')
#ax.text(0.2, -26, '3', fontsize = 11, style = 'italic')
#ax.text(0.22, -34.3, '4', fontsize = 11, style = 'italic')
#ax.text(0.78, 7.2, '1', fontsize = 11, style = 'italic')
#ax.text(0.73, 14, '2', fontsize = 11, style = 'italic')
#ax.text(0.68, 25.5, '3', fontsize = 11, style = 'italic')
#ax.text(0.63, 31.8, '4', fontsize = 11, style = 'italic')
ax.text(0.5, 8, '1', fontsize = 11, style = 'italic')
ax.text(0.4, 16.3, '2', fontsize = 11, style = 'italic')
ax.text(0.24, 27, '3', fontsize = 11, style = 'italic')
ax.text(0.15, 33, '4', fontsize = 11, style = 'italic')
ax.vlines (0, -80, 80)
ax.hlines(0, 0, 1)
plt.xlabel("y", fontsize=15)
plt.ylabel("F", fontsize=15)
plt.show()

```