УДК 62. 505

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ СВЕДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ К ЛИНЕЙНОЙ

В.И. Симоновский, д-р техн. наук, профессор

Сумский государственный университет, г. Сумы

Предложен способ сведения нелинейной задачи оценивания к линейной в случаях, когда в структуре математической модели нелинейные слагаемые представляют собой группу повторяющихся нелинейных функций, входящих линейно.

Запропоновано спосіб зведення нелінійної задачі оцінювання до лінійної у випадках, коли в структурі математичної моделі нелінійні складові становлять собою групу нелінійних функцій, що повторюються та входять лінійно.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи идентификации (в частности оценивания) математических моделей технических систем в связи с усовершенствованием средств измерений вибраций и в то же время появлением программных продуктов, реализующих динамические расчёты с практически любой степенью детализации, приобретают всё большую актуальность. В случае линейного оценивания (т. е. когда измеряемые величины линейно зависят от оцениваемых параметров) задача идентификации не имеет вычислительных трудностей. Оцениваемые параметры находятся по формуле линейной регрессии. Нелинейная же задача, как правило, влечёт за собой трудно преодолеваемые вычислительные проблемы [1,2]. Ниже рассмотрен подход, позволяющий в некоторых случаях задачу нелинейного оценивания свести к линейной.

ИЗЛОЖЕНИЕ СПОСОБА

Рассмотрим так называемую приведенную нелинейную модель, которая в векторной форме записывается в виде

$$\overline{y} = \overline{\varphi}(\overline{\alpha};\overline{\theta}), \tag{1}$$

где $\overline{y} = (y_1,\ldots,\overline{y}_k)^T$ – вектор-столбец k измеряемых величин;

$\overline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)^T$ – вектор-столбец коэффициентов модели, которые можно полагать достоверно известными;

$\overline{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_l)^T$ – вектор l оцениваемых параметров;

$\overline{\varphi} = (\varphi_1,\ldots,\varphi_k)^T$ – вектор набора нелинейных функций оцениваемых параметров,

$\varphi_j = \varphi_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_r;\theta_1,\ldots,\theta_l) = \varphi_j(\overline{\alpha},\overline{\theta})(j = \overline{1,k}).$

Задача оценивания параметров $\overline{\theta}$ по набору экспериментальных данных $y_1^*,\ldots,y_k^*$ на основе метода наименьших квадратов сводится, как известно, к проблеме нахождения минимума функции цели

$$\Phi(\overline{\theta}) = \sum_{j=1}^{k}(y_j^* - \varphi_j(\overline{\alpha};\overline{\theta}))^2. \tag{2}$$

В случае нелинейности функций $\varphi_j(\theta_1,\ldots,\theta_l)$ эта проблема даже для небольшого количества оцениваемых параметров оказывается трудноразрешимой вычислительной задачей.

Пусть структура нелинейной функции φ_j имеет вид

$$\varphi_j(\overline{\alpha};\overline{\theta}) = k_{j1}\theta_1 + \ldots + k_{jl}\theta_l + k_{j(l+1)}f_1(\overline{\beta}) + \ldots + k_{j(l+m)}f_m(\overline{\beta})(j = \overline{1,k}), \tag{3}$$

где $f_a(\overline{\beta})(a = \overline{1,m})$ – нелинейные функции некоторой группы $\overline{\beta}$ параметров, взятых из всего множества оцениваемых параметров $\theta_1,\ldots,\theta_l$ с возможным добавлением новых m параметров $\theta_{l+1},\ldots,\theta_{l+m}$:

$$\overline{\beta} = (\theta_1,\ldots,\ \theta_l;\theta_{l+1},\ldots,\ \theta_{l+m})^T. \tag{4}$$

Тогда соотношения (3) можно рассматривать как линейные относительно уже $l+m$ оцениваемых параметров, являющихся компонентами вектора-столбца

$$\overline{\theta}_\Sigma = (\theta_1,\ldots,\theta_l;f_1,\ldots,f_m)^T.$$

Получаем, таким образом, некую квазилинейную модель вида

$$\overline{y} = \overline{K}_\Sigma \cdot \overline{\theta}_\Sigma,$$

где матрица $\overline{K}_\Sigma$ размерностью $k \cdot (l+m)$ имеет структуру

$$\overline{K}_\Sigma = \begin{bmatrix} k_{11},\ldots,k_{1l};k_{1,(l+1)},\ldots,k_{1,(l+m)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{k1},\ldots,k_{kl};k_{k,(l+1)},\ldots,k_{k,(l+m)} \end{bmatrix},$$

а в состав оцениваемых параметров добавляются коэффициенты $f_1,\ldots,f_m$.

По набору экспериментальных данных

$$\overline{y}^* = (y_1^*,\ldots,y_k^*)^T$$

оценивание параметров (4) реализуется с помощью формулы линейной регрессии

$$\overline{\theta} = \left[\overline{K}_\Sigma^T \cdot \overline{K}_\Sigma\right]^{-1} \cdot \overline{K}_\Sigma \cdot \overline{y}^*. \tag{5}$$

Определив по этой формуле оценки $\theta_1,\ldots,\theta_l;f_1,\ldots,f_m$, далее тем или иным способом вычисляются оценки остальных параметров $\theta_{l+1},\ldots,\theta_{l+m}$ путём, например, численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_i(\theta_{l+1},\ldots,\theta_{l+m}) = f_i(i = \overline{1,m}).$$

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ

Рассмотрим математическую модель некоторой системы автоматического регулирования, дифференциальное уравнение которой, записанное в символической форме, имеет вид

$$(T_0T_1T_2p^3 + T_2(T_0 + T_1)p^2 + T_2p + K)S = (T_1T_2p^2 + T_2p)f. \qquad (6)$$

В (6) обозначено:

$p = \dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования,

S – регулируемая величина,

f – возмущающее воздействие,

K – коэффициент усиления системы,

T_0, T_1, T_2 – постоянные времени соответственно объекта, измерительного устройства и серводвигателя.

Предположим, проведен эксперимент, заключающийся в воспроизведении возмущающего воздействия в виде гармонического сигнала $f(t) = H\sin(\omega t)$

и замере амплитуды S и фазы φ регулируемой величины

$$s(t) = S\sin(\omega t + \varphi).$$

Следуя методу комплексных амплитуд, положим

$$\overline{f}(t) = H\exp(i\omega t), \overline{s}(t) = \overline{S}\exp(i\omega t), \qquad (7)$$

где $\overline{S} = S_r + iS_i$ – искомая комплексная амплитуда, вещественную и мнимую части которой можно вычислить по экспериментальным данным:

$$S_r = S\cos\varphi, S_i = S\sin\varphi.$$

Подставив (7) в (6), полагая при этом формально $p = i\omega$, получим после очевидных алгебраических преобразований расчётные соотношения для определения S_r, S_i :

$$\begin{aligned}&(K - \omega^2T_2(T_0 + T_1))S_r + (\omega^3T_0T_1T_2 - \omega T_2)S_i = -\omega^2T_1T_2H,\\&(\omega T_2 - \omega^3T_0T_1T_2)S_r + (K - \omega^2T_2(T_0 + T_1))S_i = \omega T_2H.\end{aligned} \qquad (8)$$

Поставим задачу оценивания постоянных времени T_1, T_2 по экспериментально замеренным параметрам $H, \omega, S_r, S_{i,}$, считая параметры K и T_0 достоверно известными. Уравнения (8) перепишем в виде

$$\begin{aligned}&-\omega\ (S_i + \omega T_0S_r)T_2 + \omega^2(H - S_r + \omega\ T_0S_i)T_1T_2 + -KS_r,\\&-\omega(H - S_r + \omega\ T_0S_i)T_2 - \omega^2(S_i + \omega T_0S_r)T_1T_2 = -KS_i.\end{aligned} \qquad (9)$$

Модель (9) относительно оцениваемых параметров T_1T_2 является нелинейной. Однако, замечая, что если нелинейную функцию $f(T_1, T_2) = T_1, T_2$ положить равной некоторому параметру f_1, подлежащему оцениванию, то система (9) примет вид линейной относительно букв T_1 и f_1.

Предположим, проведено n экспериментов, в каждом j–м из которых замерены $\omega_j, H_j, S_{rj}, S_{ij}$. Тогда получим матричное соотношение

$$\overline{y} = \overline{K}\,\overline{\theta},$$

где $\bar{\theta} = (T_2, f_1)^T$ – вектор оцениваемых параметров;

$\bar{y} = (-KS_{r1,} - KS_{i1}, \dots, -KS_{rn}, -KS_{in})^T$ – вектор измеряемых величин размерностью $2n$;

$\bar{K}$ – матрица размерностью $2n \cdot 2$, каждый коэффициент которой нетрудно выписать и вычислить в соответствии с уравнением (9).

Для численного эксперимента положим $T_0 = 1c$, $T_1 = 0.5c$, $T_2 = 0.8c$, $K = 10$. Предполагаем, что проведено два эксперимента с частотами возмущающей силы $\omega_1 = 1c^{-1}, \omega_2 = 2c^{-1}$ и амплитудой $H_1 = H_2 = 1$. Решая при заданных параметрах систему уравнений (8), находим

$$S_{r1} = -0.041,\ S_{i1} = 0.093,\ S_{r2} = -0.368,\ S_{i2} = 0.195.$$

Округляя полученные значения до двух значащих цифр (имитируя таким образом измерение «экспериментальных» величин с точностью до 5%), рассчитываем элементы матрицы $\bar{K}$ и столбца $\bar{y}$:

$$\mathrm{K} := \begin{pmatrix} -.052 & 1.1 \\ -1.1 & -.052 \\ 1.1 & 7.0 \\ -3.5 & 2.2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Y} := \begin{pmatrix} .41 \\ -.93 \\ 3.7 \\ -2.0 \end{pmatrix}.$$

Далее, воспользовавшись комплексом MathCAD, находим

$$\bar{\theta} = \left[\bar{K}^T \bar{K}\right]^{-1} \cdot \bar{K}^T \cdot \bar{y} = \begin{bmatrix} .823 \\ .400 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получаем оценки

$$T_2 = 0.823, T_1 = 0.4 / 0.823 = 0.486.$$

Погрешность результатов оценивания не превышает 3%.

ВЫВОДЫ

Предложенный способ оценивания параметров нелинейных моделей с помощью представления их в квазилинейной форме позволяет в ряде случаев снять вычислительные проблемы, связанные с задачами нелинейного оценивания.

SUMMARY

ABOUT A METHOD OF BALANCING OF NONLINEAR EVALUATION TASK TO LINEAR ONE

V.I. Simonovskiy
Sumy State University

The method of taking of nonlinear task of evaluation is offered to linear in the cases when in the structure of mathematical model nonlinear elements are a group of nonlinear functions, entering linear.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров.- М.: Статистика, 1979.- 352с.
2. Симоновський В.І., Хворост В.А. Оцінювання параметрів динамічних моделей роторів.- Суми: Вид-во СумДУ, 2002.-143 с.

Поступила в редакцию 12 мая 2009 г.