

# *Мультимедійний конспект лекцій*

## *«Основи механіки»*

Лекція 1 «Механіка. Кінематика поступального руху»

Лекція 2 «Динаміка поступального руху»

Лекція 3 «Динаміка обертального руху»

Лекція 4 «Основи механіки ідеальних рідин і газів»

Лекція 5 «Коливання та хвилі»

: В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, В. В. Коваль  
Сумський державний університет

2020

# Мультимедійний конспект лекцій «Основи механіки»

## Лекція 1 *«Механіка. Кінематика поступального руху»*

Укладачі: В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, В. В. Коваль  
Сумський державний університет

2020

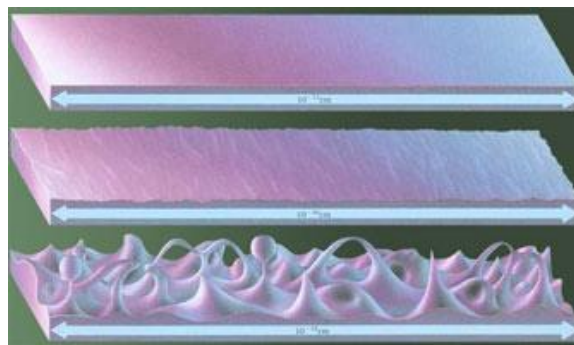
# Що таке фізика?

- Предметом вивчення фізики є найбільш загальні та одночасно найбільш прості властивості матерії і форми її руху.
- Фізика - експериментальна наука.
- Мовою фізики є математика.
- Роль фізики:
  1. Основа усіх природничих наук.
  2. Основа техніки.
  3. Світоглядна наука.
  4. Формує образ мислення.

# ФІЗИЧНА КАРТИНА СВІТУ

## ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОСТОРУ У ФІЗИЦІ

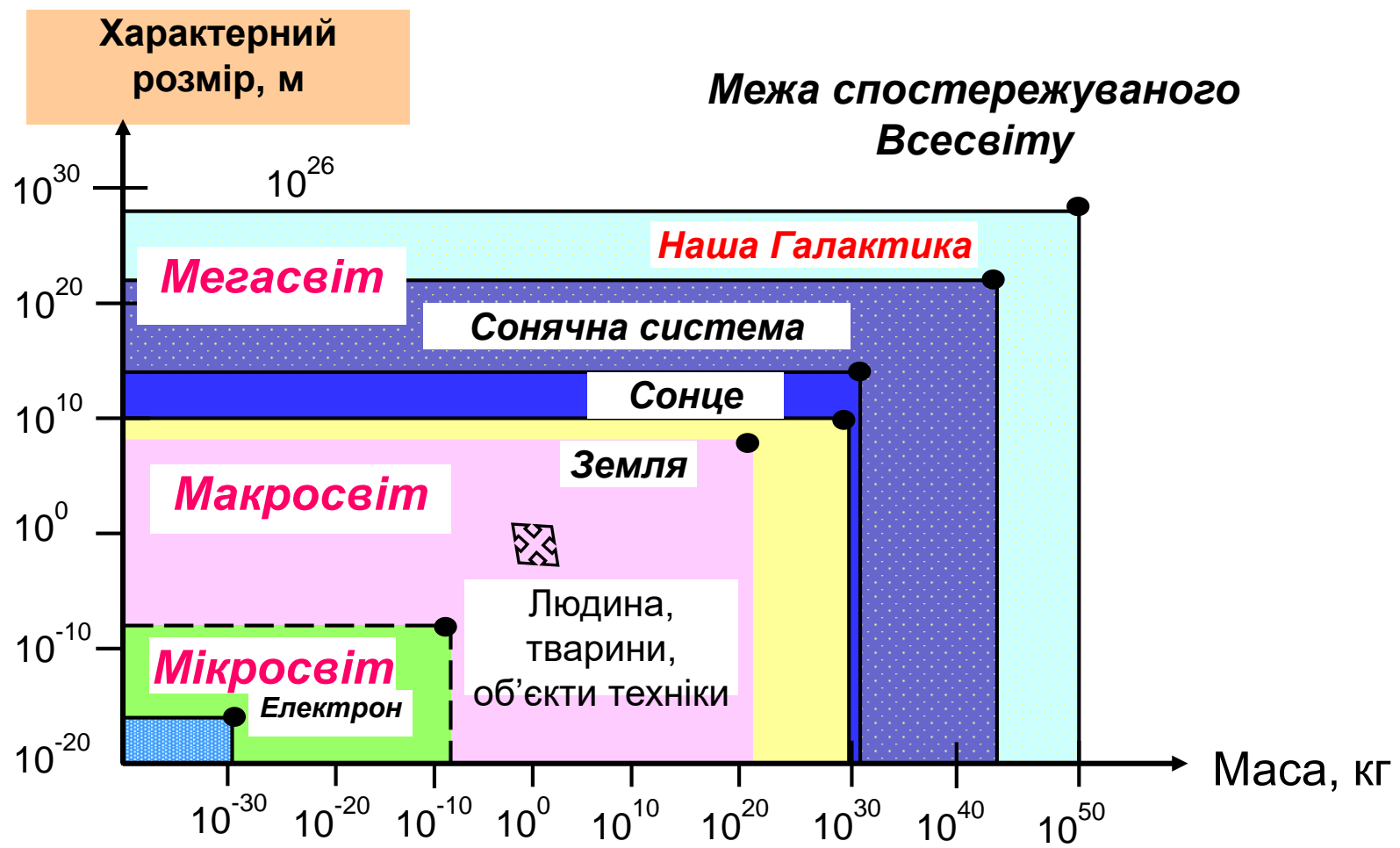
**1 Однорідність. 2 Ізотропність. 3 Безперервність.  
4 Евклідовість. 5 Тривимірність.**



***У теорії квантової гравітації простір на над-малих масштабах має складну багатовимірну геометрію***

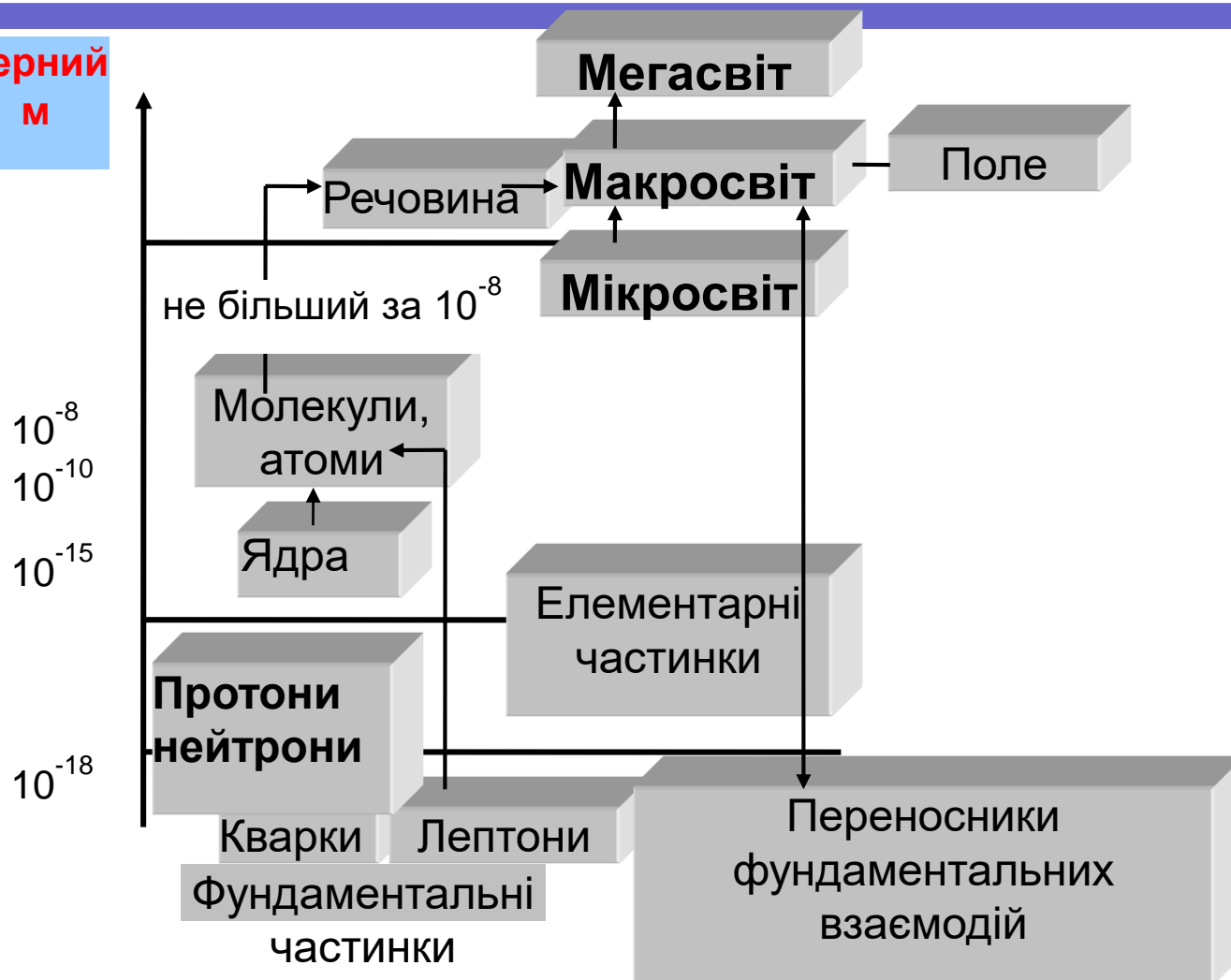


# Масштаби мікро-, макро- та мегасвітів



# СТРУКТУРНІ РІВНІ БУДОВИ МАТЕРІЇ

Характерний розмір, м



# ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧАСУ

**1 Однорідність.**

**2 Безперервність.**

**3 Односпрямованість  
(необоротність)**

*ЗТВ – існує єдиний чотиривимірний  
простір-час*

*Сучасні теорії свідчать про те, що час (на  
проміжках часу  $10^{-34}$  с) квантується*

# ТАБЛИЦЯ ЧАСУ

Опорні точки схеми	Час, роки	Час, секунди
<b>Вік Всесвіту</b>	$13,7 \cdot 10^9$	$4,3 \cdot 10^{17}$
<b>Вік Землі</b>	$4,5 \cdot 10^9$	$1,4 \cdot 10^{17}$
<b>Зародження життя</b>	$4 \cdot 10^9$	$1,26 \cdot 10^{17}$
<b>Поява земноводних</b>	$2,5 \cdot 10^8$	$7,5 \cdot 10^{15}$
<b>Перші ссавці</b>	$1,7 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^{15}$
<b>Поява людини</b>	$2 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^{13}$
<b>1 рік</b>	1	$3 \cdot 10^7$

# ІСТОРИЯ РОЗВИТКУ ФІЗИКИ

## ***Класична механіка***

Засновник – Ньютон, 1665-1667 рр.

*$L, t$  – великі,  $v \ll c$*

## ***Релятивістська механіка***

Засновник – Ейнштейн,  
1905 р. – СТВ, 1915 р. – ЗТВ

*$L, t$  – великі,  $v \sim c$*

## ***Квантова механіка***

Планк, де Бройль,  
Шредінгер, 1900–1924 рр.

*$L, t$  – малі,  $v \ll c$*

***Релятивістська  
квантова механіка***  
Дірак, 1928 р.

*$L, t$  – малі,  $v \sim c$*

## ***Фізика вакууму***

***Звичайна речовина становить 4 % від маси Всесвіту***

***Сфера невідомих законів***



# Питання для самоконтролю

**1** Чому дорівнює сума кутів трикутника в евклідовому просторі:

**а)**  $90^{\circ}$ ; **б)**  $180^{\circ}$ ; **в)**  $360^{\circ}$ ; **г)**  $>360^{\circ}$ ?

**2** Закони якої механіки описують макросвіт:

**а)** ньютонівської; **б)** релятивістської (ЗТВ); **в)** квантової?



# МЕХАНІКА.

## КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

- 1 ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ.
- 2 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.
  - *2.1 Траєкторія; 2.2 Швидкість; 2.3 Прискорення.*
- 3 ПОСТУПАЛЬНИЙ КРИВОЛІНІЙНИЙ ТА ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ.
- 4 ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ.
  - *4.1 Кутове переміщення; 4.2 Кутова швидкість; 4.3 Кутове прискорення.*
- 5 ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЛІНІЙНИМ ТА КУТОВИМ ПРИСКОРЕННЯМИ.

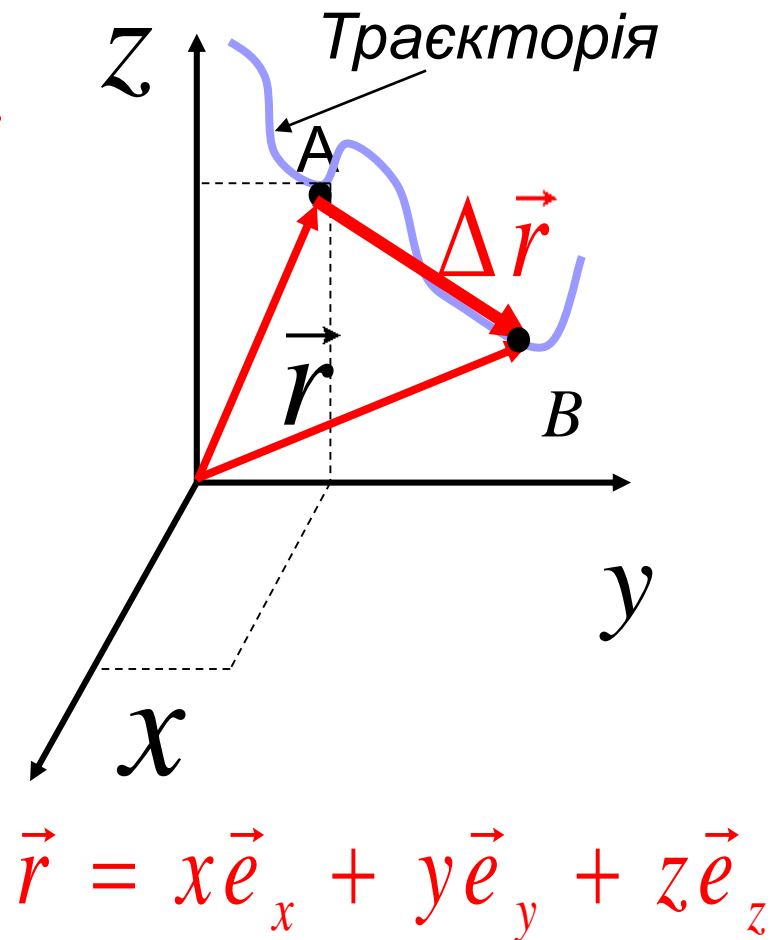
# 1 Основні визначення

- **Система відліку** – система координат, жорстко пов'язана з тілом відліку і способом вимірювання часу (годинник). Розрізняють **інерціальні та неінерціальні системи відліку**.
- **Матеріальна точка** – це тіло, розмірами якого в даній задачі можна знехтувати, тобто розміри тіла є малими порівняно з відстанями під час його руху.



# 2 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

- **2.1 Траєкторія** – лінія, вздовж якої рухається тіло в просторі.
- **Радіус-вектор матеріальної точки** – це вектор, що з'єднує точку відліку з матеріальною точкою в даній системі відліку.
- **Шлях** – це довжина траєкторії тіла.
- **Переміщення  $\Delta \vec{r}$**  – вектор, що з'єднує початкове і кінцеве положення тіла.
- **Одиницею** вимірювання шляху і переміщення є метр = 1 м.



**2.2 Швидкість** – це фізична величина, що показує, яке переміщення здійснює матеріальна точка за одиницю часу:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

**Швидкість** матеріальної точки через її проекції на координатні осі та орти цих осей:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z.$$

Одиниця вимірювання швидкості в СІ –  $[\mathbf{v}] = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

**2.3 Прискорення** – це фізична величина, що показує, з якою швидкістю змінюється швидкість руху матеріальної точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z.$$

Одиниця вимірювання прискорення

$$[\vec{a}] = 1 \text{ м/с}^2.$$

# Питання для самоконтролю



Радіус-вектор матеріальної точки змінюється за законом

$$\vec{r}(t) = 3t\vec{e}_x + 4t\vec{e}_y.$$

**3** Яким є рух:

- а)** прискореним; **б)** тіло не рухається;  
**в)** рівномірним?

**4** Чому дорівнює модуль швидкості цієї точки: **а)** 7 м/с; **б)** 5 м/с; **в)** 25 м/с?

**5** Чому дорівнює її прискорення:

- а)** 7 м/с<sup>2</sup>; **б)** 5 м/с<sup>2</sup>; **в)** 0 м/с<sup>2</sup> ?



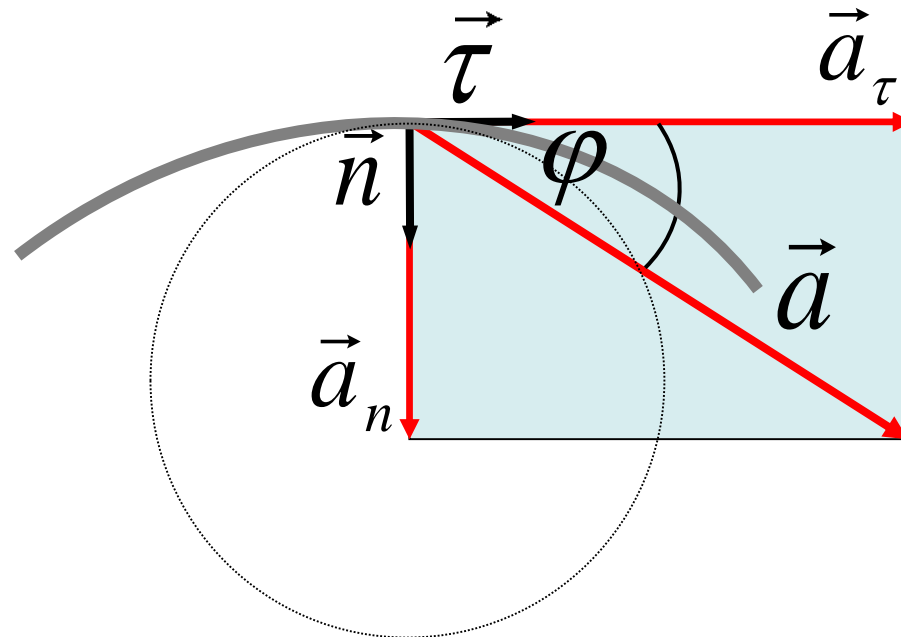
# 3 ПОСТУПАЛЬНИЙ КРИВОЛІНІЙНИЙ ТА ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ

- У разі, якщо траєкторія руху тіла є кривою лінією, рух називають **криволінійним**.
- Зручним для розв'язання практичних задач із вивчення криволінійного руху є розкладання вектора прискорення на два компоненти: *тангенціальне* (дотичне до траєкторії) і *нормальне* (доцентрове) прискорення:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

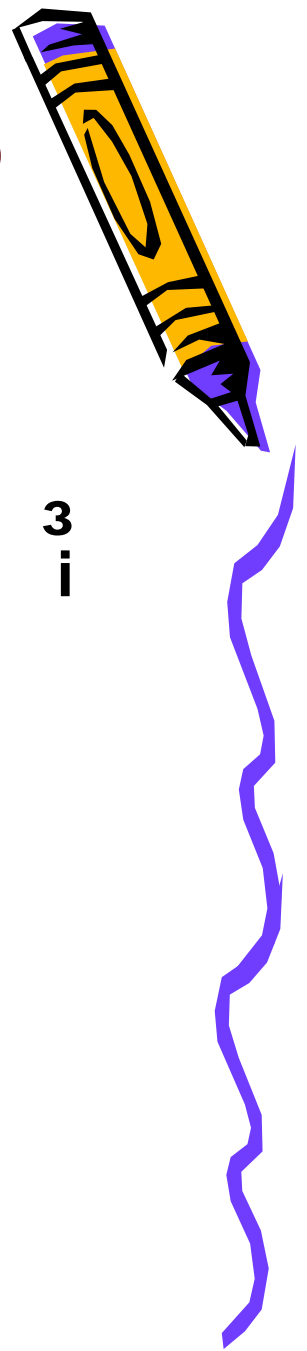
$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}.$$

**Тангенціальне прискорення** змінює лише величину швидкості, а **нормальне** – лише її напрямок.



**Миттєвий радіус кривизни траєкторії** визначається радіусом кола, вписаного в ділянку траєкторії на даний момент часу.

# Питання для самоконтролю



**6** Тіло рухається прямолінійно з прискоренням  $5 \text{ м/с}^2$ . Його нормальне і тангенціальне прискорення дорівнює:

- а)**  $5 \text{ м/с}^2$  і  $0 \text{ м/с}^2$  ;
- б)**  $0 \text{ м/с}^2$  і  $5 \text{ м/с}^2$  ;
- в)**  $0 \text{ м/с}^2$  і  $0 \text{ м/с}^2$ .



## 4 ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

- **Обертальний рух** – рух, за якого всі точки тіла рухаються по концентричних колах. Геометричне місце точок, що є центрами цих кіл, є **віссю обертання** твердого тіла.
- **4.1 Кутове переміщення  $\vec{\varphi}$ .**
- Напрямок кутового переміщення визначається за допомогою **правила правого гвинта**: з кінця вектора поворот тіла повинен відбуватися проти ходу годинникової стрілки.
- Одиницею вимірювання кутового переміщення є радіан:

$$|\varphi| = 1 \text{ рад.}$$

**Зв'язок між лінійним та кутовим переміщеннями:**

$$\Delta \vec{r} = [\vec{\varphi} \times \vec{r}].$$



- **4.2 Кутова швидкість**

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

- Одиниця вимірювання кутової швидкості

$$[\omega] = 1 \frac{\text{rad}}{\text{c}}.$$

- *Правило правого гвинта (свердлика).*

- **4.3 Кутове прискорення**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

- Одиниця вимірювання кутового прискорення

$$[\varepsilon] = 1 \frac{\text{rad}}{\text{c}^2}.$$

## 5 ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЛІНІЙНИМ ТА КУТОВИМ ПРИСКОРЕННЯМИ

$$\vec{a}_n = \omega^2 r \vec{n},$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}].$$

**Період обертання**

$$T = \frac{t}{N}.$$

**Частота**

$$\nu = \frac{N}{t},$$

$$[T] = 1 \text{ с},$$

$$[\nu] = 1 \text{ с}^{-1} = 1 \text{ Гц}.$$

# Питання для самоконтролю



Період обертання мат. точки дорівнює 2 с.

**7** Частота її обертання дорівнює:

**а)** 2 Гц; **б)** 5 Гц; **в)** 0,5 Гц.

**8** Її кутова швидкість дорівнює:

**а)**  $\pi$  рад/с; **б)** 2 рад/с; **в)** 0,5 рад/с.

**9** Матеріальна точка рухається з кутовою швидкістю 2 рад/с по колу радіусом 2 м. Лінійна швидкість точки дорівнює:

**а)** 1 м/с; **б)** 4 м/с; **в)** 2 м/с.

**10** Частота обертання мат. точки дорівнює 2 Гц, її кутова швидкість дорівнює:

**а)**  $2\pi$  рад/с; **б)** 4 рад/с; **в)**  $4\pi$  рад/с.



# Мультимедійний конспект лекцій «Основи механіки»

## Лекція 2 *«Динаміка поступального руху»*

Укладачі: В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, В. В. Коваль  
Сумський державний університет

2020

# ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

- 1 ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ
- 2 ПЕРШИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА
- 3 ДРУГИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА
- 4 ТРЕТІЙ ЗАКОН НЬЮТОНА
- 5 СИЛИ В МЕХАНІЦІ:
  - *5.1 Закон всесвітнього тяжіння*
  - *5.2 Вага тіла 5.3 Пружні сили 5.4 Сили тертя*
- 6 ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ
- 7 РОБОТА І МЕХАНІЧНА ЕНЕРГІЯ
- 8 КОНСЕРВАТИВНІ Й ДИСИПАТИВНІ СИЛИ

# 1 Основні визначення

**Поступальним** є рух, під час якого будь-яка пряма, жорстко пов'язана з тілом, залишається паралельною самій собі.

**Сила** – це векторна величина, що є кількісною характеристикою ступеня впливу одних тіл на інші.

Властивість тіл зберігати свій стан руху називається **інертністю**. Кількісною мірою інертності є **маса тіла**.

**Імпульс тіла**  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

У Міжнародній системі одиниць СІ одиницею вимірювання маси є кілограм:  $[m] = 1 \text{ кг}$ , а сили – Ньютон:

$$[\vec{F}] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 1 \text{ Н}.$$

# 2 ПЕРШИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

- **I закон Ньютона (закон інерції):** існують такі системи відліку, в яких тіло перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно, коли на нього не діють інші тіла чи їх дії скомпенсовані:

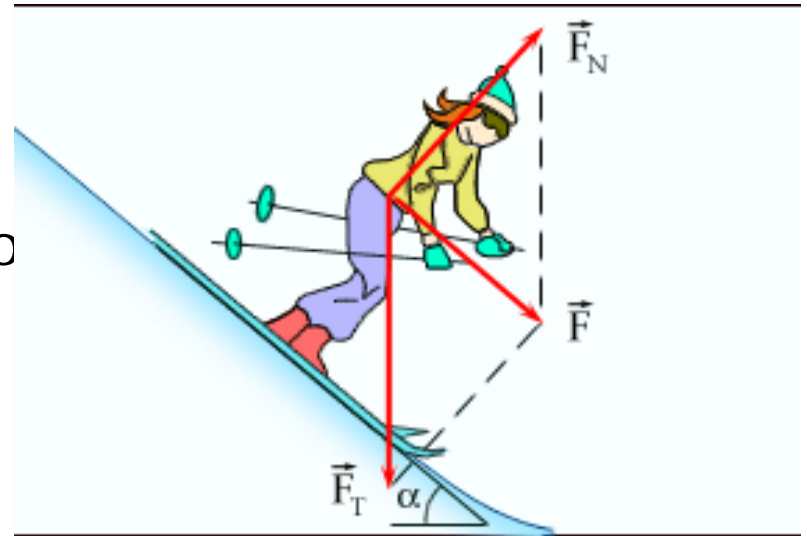
$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const.}$$

- **Інерція** — явище збереження тілом вектора швидкості в умовах вільного руху. **Вільний рух** тіла – це рух за умови відсутності дії на нього з боку інших тіл (або взаємної компенсації їх дій).
- **Принцип відносності Галілея:** всі механічні явища проходять однаково в усіх інерціальних системах відліку.
- Системи відліку, в яких вільне тіло перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно, називають **інерціальними системами відліку.**

# 3 ДРУГИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

**Другий закон Ньютона (закон руху)** – основний закон механіки поступального руху. В **інтегральній формі другий закон Ньютона** формулюється так:  
прискорення прямо пропорційне рівнодійній усіх діючих на тіло сил та обернено пропорційне масі самого тіла:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$



**Другий закон Ньютона в диференціальній формі:** в інерціальних системах відліку швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює рівнодійній усіх сил, прикладених до точки, і спрямована в той самий бік:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Виведення за умови, що  $m = \text{const}$ :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

# Питання для самоконтролю



1 Зазначте одиниці вимірювання сили:

а) Н; б) кг; в) Дж.

2 Другий закон Ньютона в диференціальній формі:

а)  $\vec{a} = \vec{F} / m$ ; б)  $\vec{F} = d\vec{p} / dt$ ; в)  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

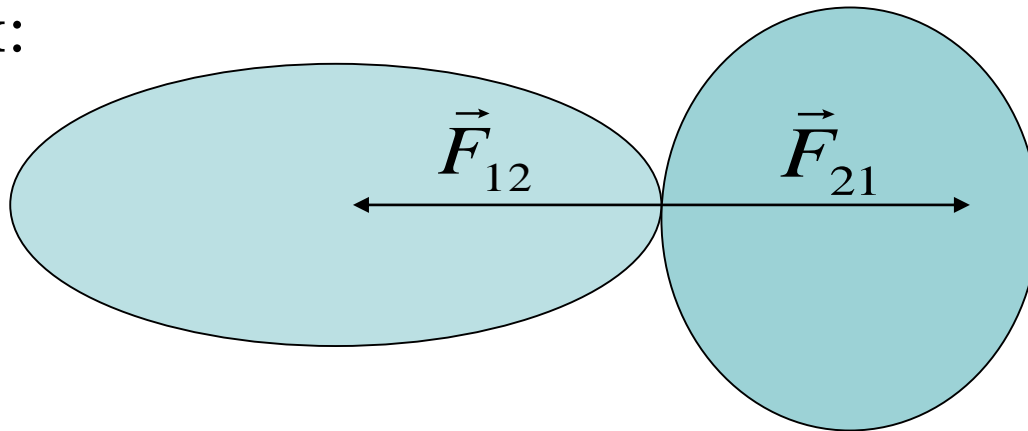
3 На тіло масою 10 г діє сила 1 мН. Чому дорівнює його прискорення:

а) 1 м/с<sup>2</sup>; б) 0,1 м/с<sup>2</sup>; в) 10 м/с<sup>2</sup> ?

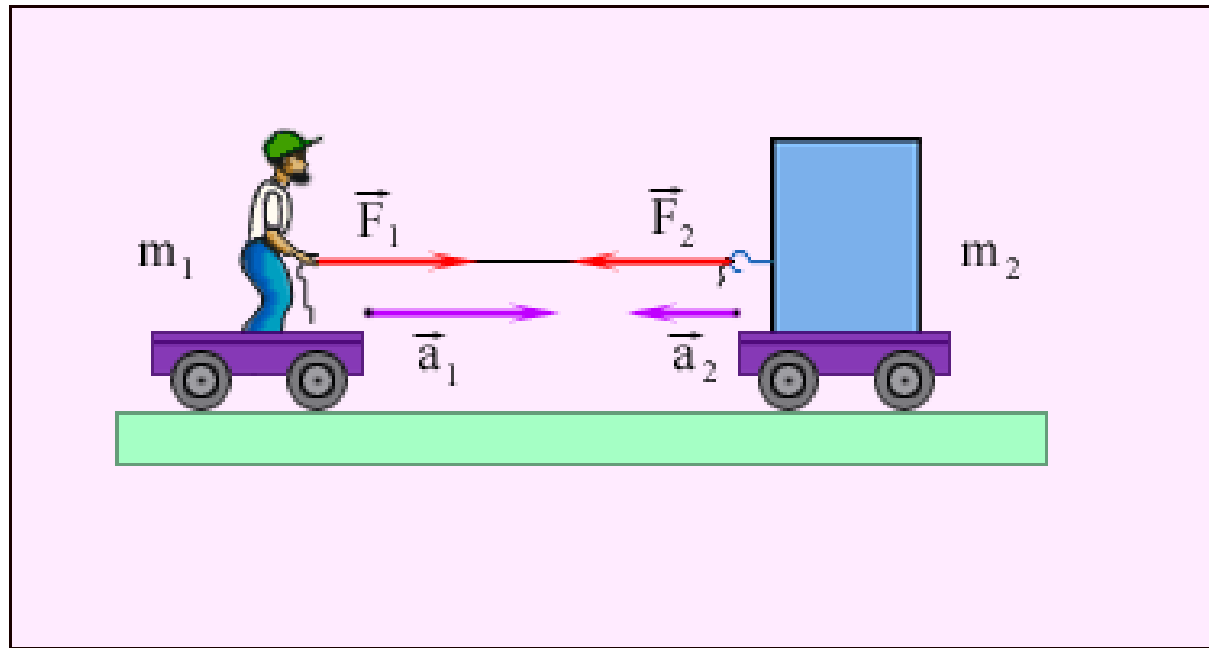


# 4 ТРЕТІЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

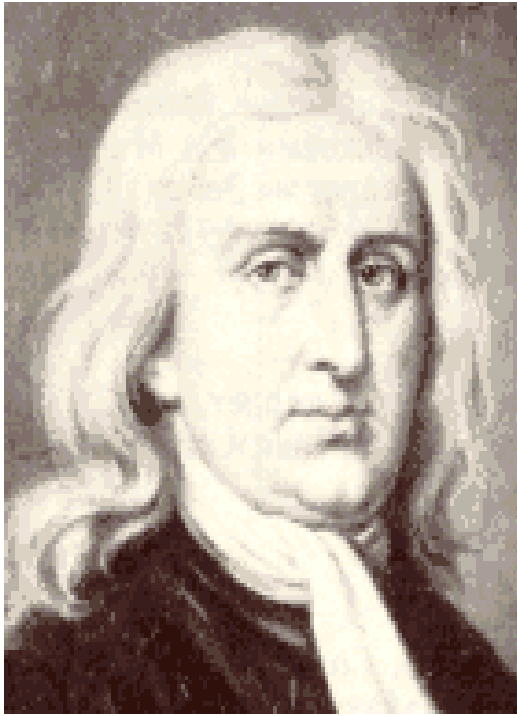
**Третій закон Ньютона (закон взаємодії):** будь-які два тіла, що взаємодіють, діють одне на одне з рівними за модулем та протилежно спрямованими силами:



$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$



Обидві сили діють уздовж лінії, що з'єднує ці тіла. Потрібно відзначити, що сили в третьому законі Ньютона прикладені до різних тіл. Сили, що фігурують у третьому законі Ньютона, завжди мають однакову природу, виникають парами і спрямовані вздовж однієї прямої.



## Ньютон Ісаак

(1642 – 1727)

*Англійський учений, якого багато хто вважає найвидатнішим ученим усіх часів і народів*

Деякий час юний Ісаак вивчав сільське господарство у ремісничому училищі, але прагнення підлітка до знань помітили і відправили його в гімназію, після закінчення якої юнак успішно вступив до Кембриджського університету. Навесні 1665 року він здобув науковий ступінь бакалавра, а далі сталися найнеймовірніші події в історії науки. У тому самому році в Англії вибухнула остання епідемія бубонної чуми, і Кембриджський університет був закритий. Коли через два роки Кембриджський університет знову відкрився, він:

- (1) розробив диференціальне обчислення – окремий розділ математики;
- (2) виклав основи сучасної теорії кольору;
- (3) вивів закон всесвітнього тяжіння;
- (4) розв'язав кілька математичних задач, які до нього ніхто вирішити не зміг.

Як говорив сам Ньютон: «У ті дні я був у розквіті своїх винахідницьких сил, і відтоді Математика і Філософія вже жодного разу мене не захоплювали так сильно, як тоді».

Він прочитав курс лекцій із **теорії кольору**, в яких показував, що різниця кольорів пояснюється основними характеристиками світлової хвилі (або, як тепер говорять, довжиною хвилі) і що світло має **корпускулярну природу**. Він також **сконструював дзеркальний телескоп**, і цей винахід привернув до нього увагу Королівського суспільства. Багаторічні дослідження світла і кольорів були опубліковані в 1704 році в його фундаментальній праці **«Оптика»**.

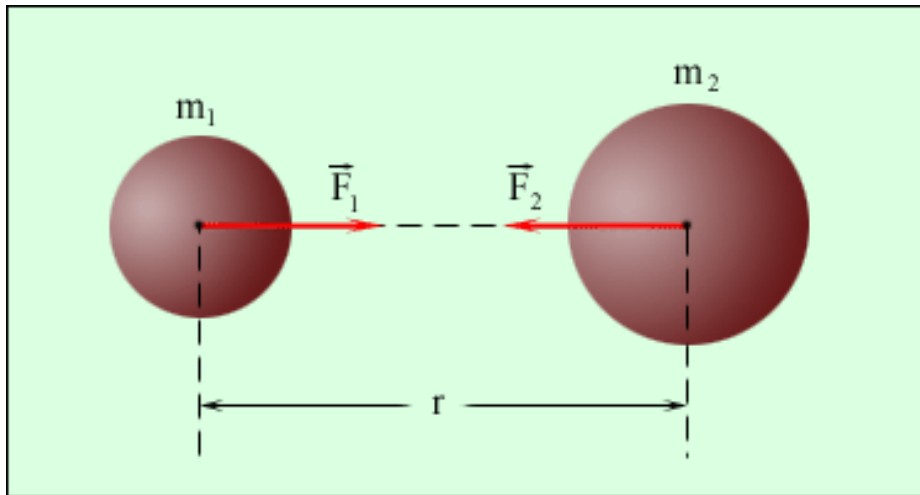
Ньютон висловив гіпотезу, що поєднала **корпускулярні та хвильові уявлення про світло**. Гук виступив із претензіями на пріоритет у цьому відкритті. Конфлікт так пригнічував Ньютона, що він на шість років відмовився від участі в інтелектуальному житті.

У 1679 році Ньютон повернувся до роботи і здобув собі славу, досліджуючи траєкторії руху планет та їх супутників. У результаті цих досліджень, що також супроводжувалися суперечками з Гуком про пріоритет, були сформульовані **закон всесвітнього тяжіння і закони механіки**. Свої дослідження Ньютон узагальнив у книзі **«Математичні начала натуральної філософії»**. Ця праця стала фундаментом тодішньої наукової революції та завдяки їй Ньютон здобув всесвітнє визнання.

# 5 СИЛИ В МЕХАНІЦІ

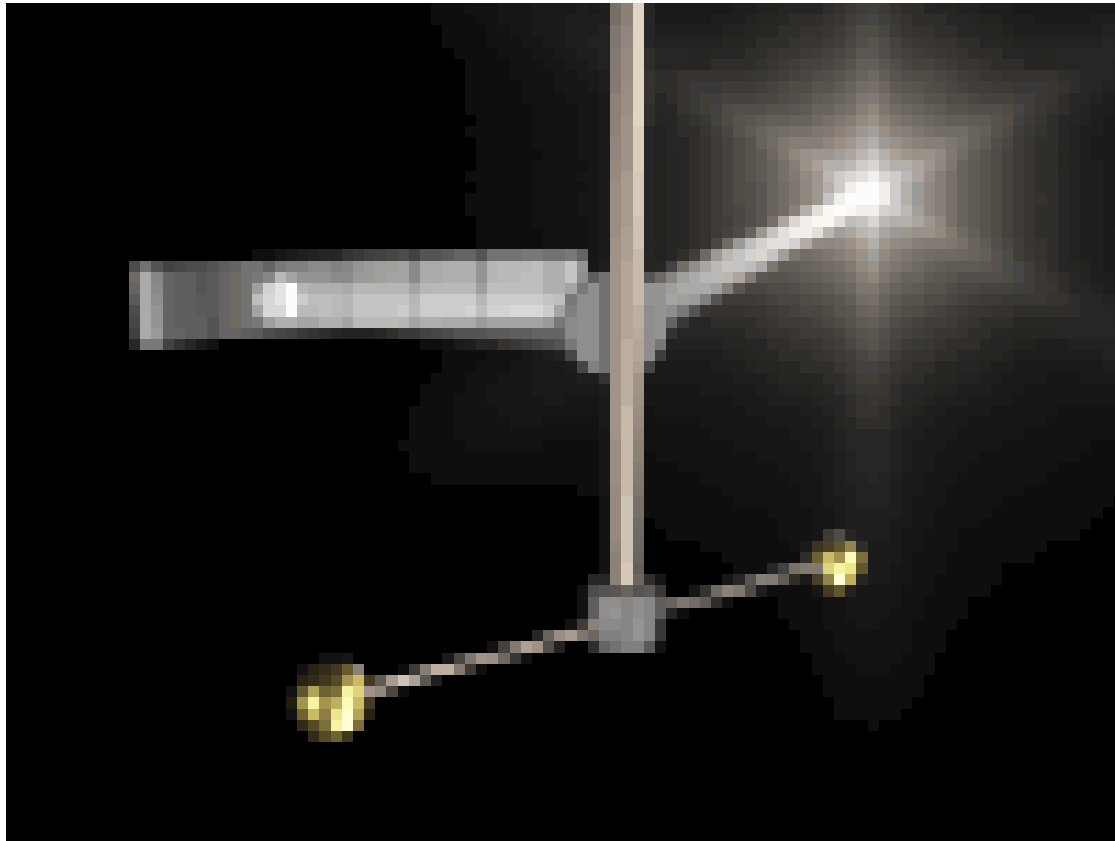
## 5.1 ЗАКОН ВСЕСВІТНЬОГО ТЯЖІННЯ

Два точкових тіла притягуються одне до одного із силами, прямо пропорційними добутку мас тіл та обернено пропорційними квадрату відстані між ними:



$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

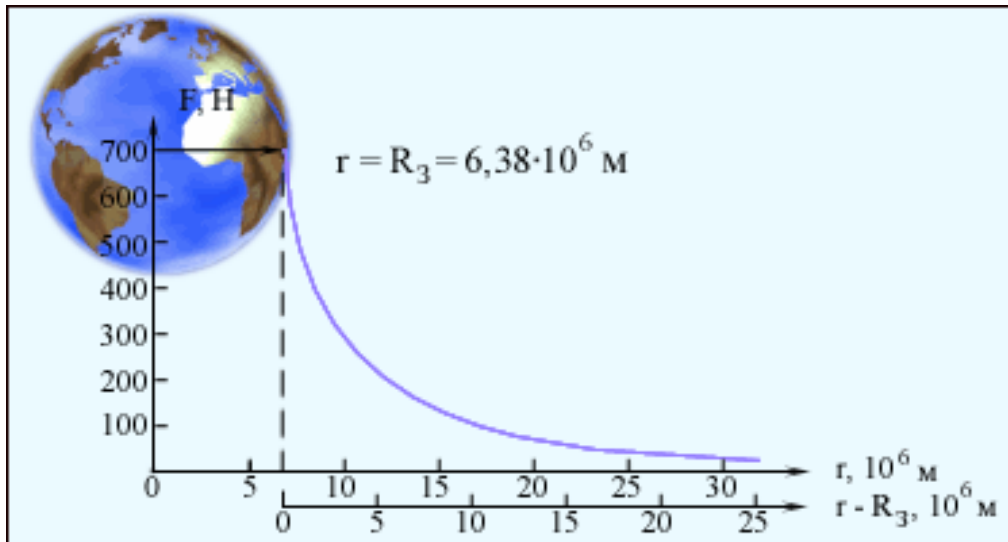
# Дослід Кавендіша





Гравітаційна стала характеризує інтенсивність гравітаційної взаємодії:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2 \cdot$$



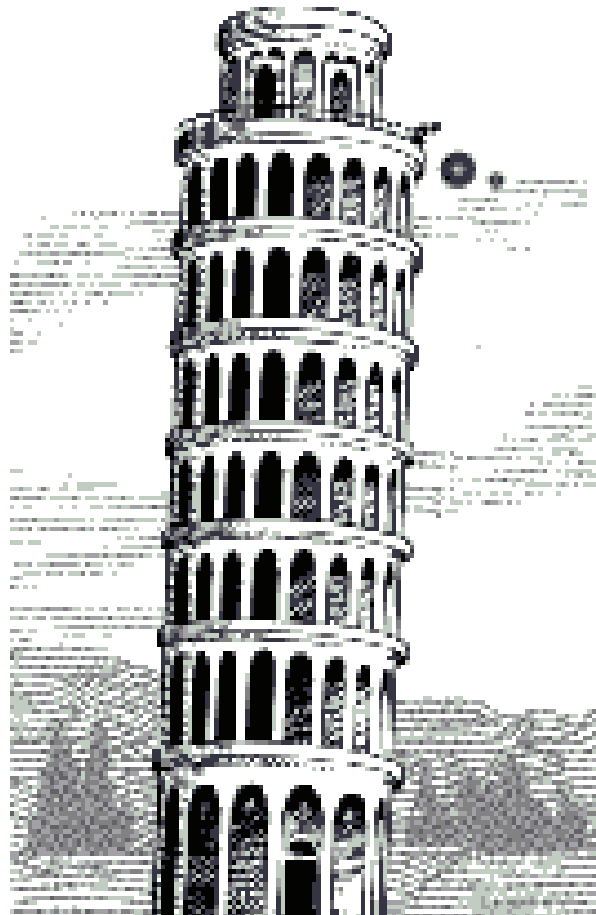
**Сила тяжіння** – це сила гравітаційного притягання тіл до Землі:

$$F_T = G \frac{mM}{r^2}$$

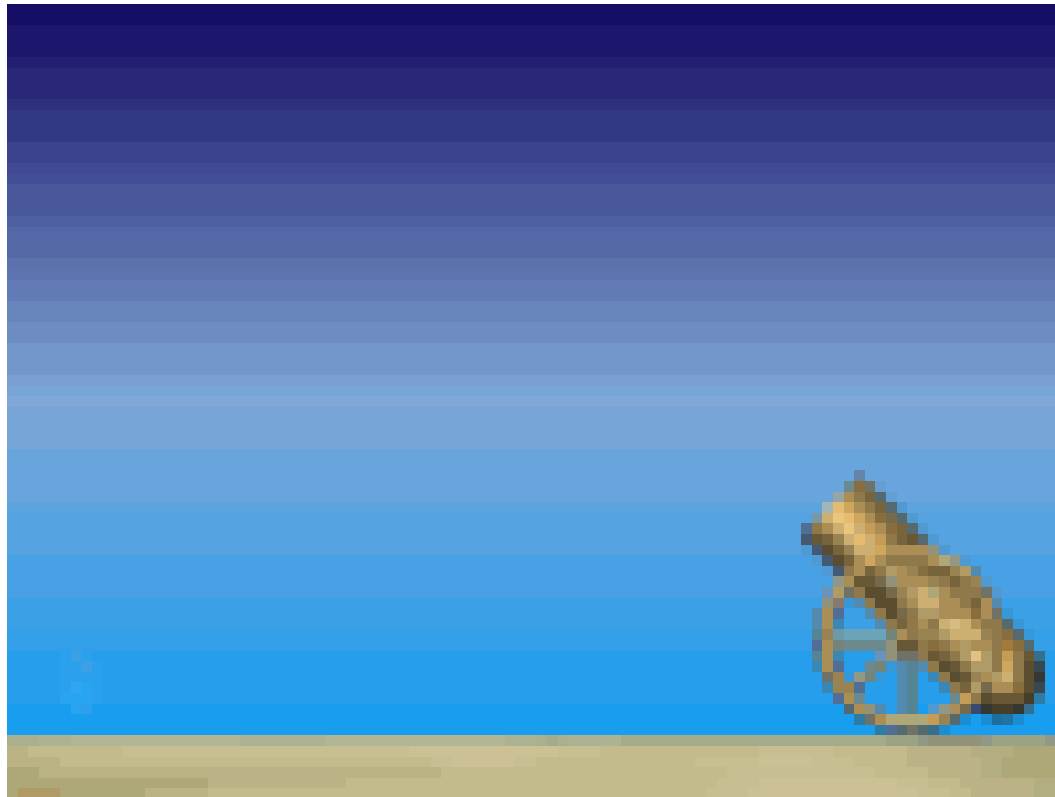
або

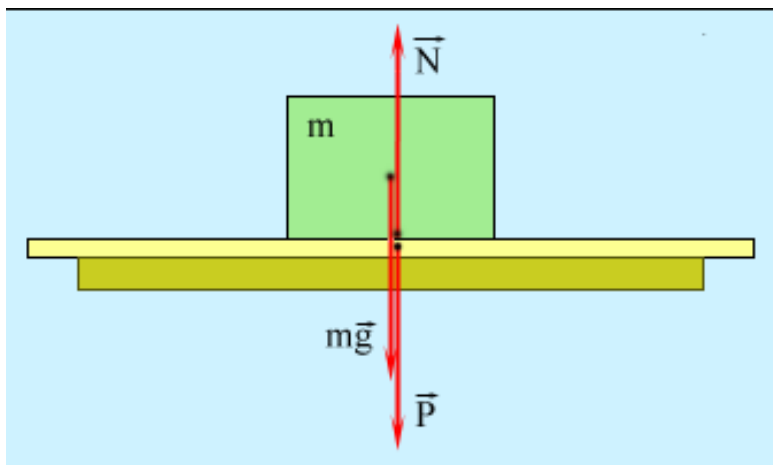
$$F_T = mg, \quad g = G \frac{M}{r^2} = G \frac{M}{(R + h)^2}.$$

# Досліди Галілея з визначення прискорення вільного падіння



# Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту



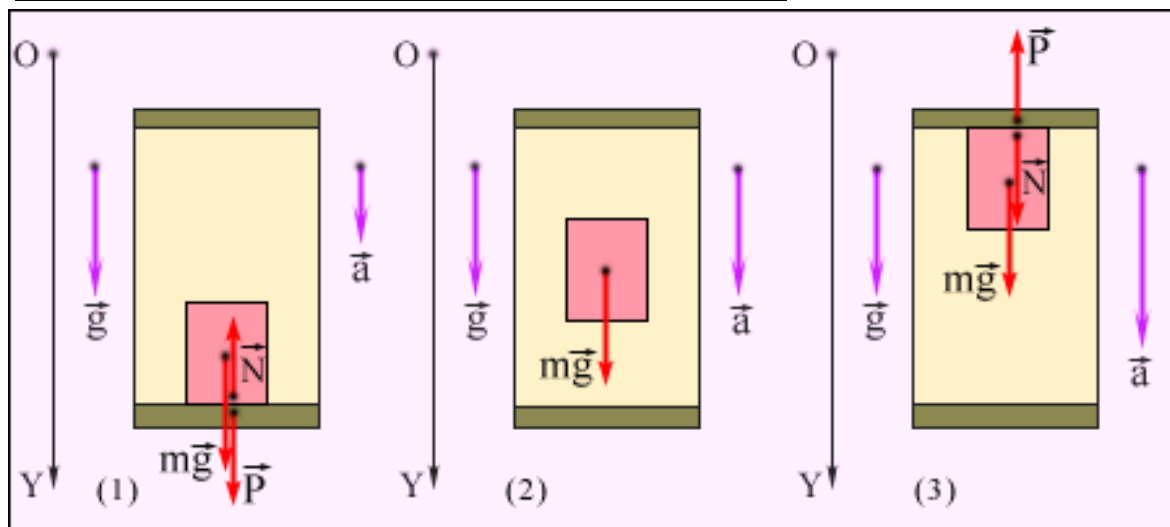


**5.2 Вага тіла** – це сила, з якою тіло діє на горизонтальну опору або розтягує підвіс.

В інерціальній системі відліку вага тіла

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

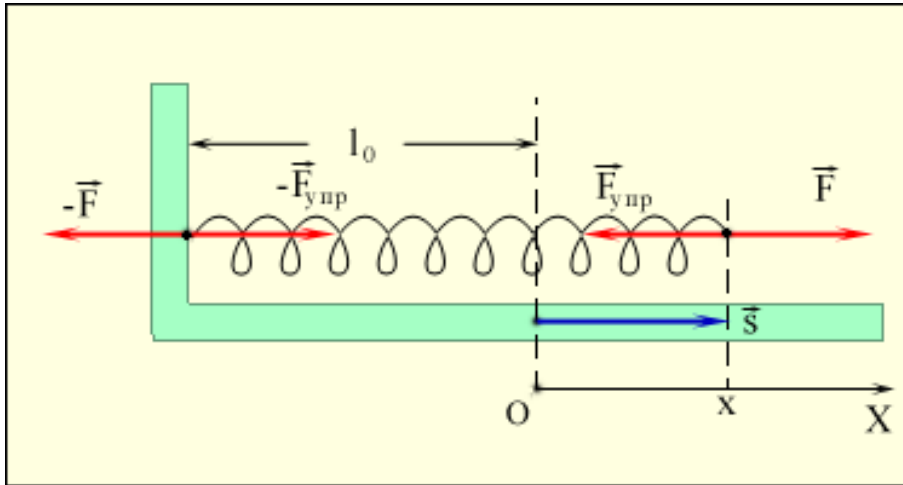
У випадку руху тіла з прискоренням



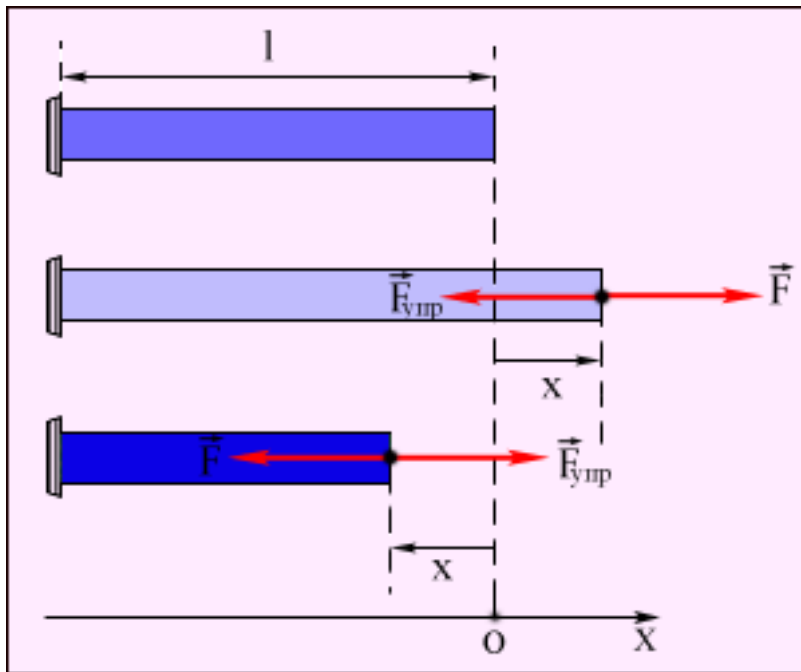
$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

## 5.3 ПРУЖНІ СИЛИ

- Закон Гука для пружини



$$F_{\text{ПР}} = -kx.$$



## Закон Гука для стрижня

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma.$$

• Напряга

$$\sigma = \frac{F_{ПР}}{S}.$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

• **Відносне подовження**

• **Модуль Юнга** дорівнює такій нормальній напрузі, за якої відносне подовження тіла дорівнює одиниці. Насправді такі пружні деформації неможливі: так, залізні стрижні руйнуються вже при

$$\sigma = 0,002E.$$



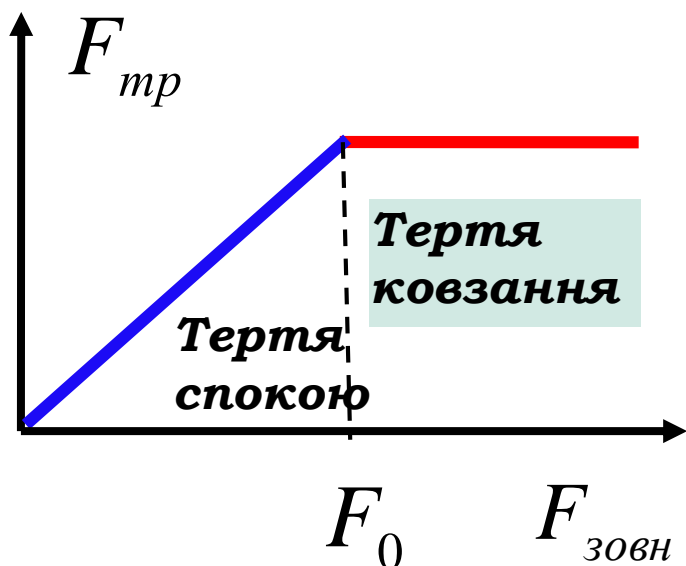
**Роберт Гук**  
(1635 – 1703)

Англійський фізик

Роберт Гук цікавився найрізноманітнішими галузями природничих наук. Саме він уперше ввів сучасне поняття «жива клітина». У геології першим усвідомив важливість геологічних шарів і першим в історії зайнявся науковим вивченням природних катаклізмів. Він одним із перших висловив гіпотезу, що сила гравітаційного притягання між тілами зменшується пропорційно квадрату відстані між ними, це призвело до суперечки з Ньютоном за право називатися першовідкривачем **закону всесвітнього тяжіння**. Гук розробив і власноручно побудував низку важливих науково-вимірювальних приладів, і багато хто схильний вбачати в цьому його основний внесок у розвиток науки. Він, зокрема, першим додумався поміщати перехрестя з двох тонких ниток в окуляр мікроскопа, першим запропонував брати температуру замерзання води за нуль температурної шкали, а також винайшов універсальний шарнір (карданне зчленування).

# 5.4 СИЛИ ТЕРТЯ

(внутрішнє та зовнішнє тертя)



Залежність сили тертя від зовнішньої сили

$F_0$  — максимальне значення сили тертя спокою.

Сила **тертя спокою** обумовлена дією опори, на якій лежить тіло, і дорівнює зовнішній силі.

Сила **тертя ковзання** перешкоджає відносному руху тіл і спрямована вздовж поверхні їх контакту:

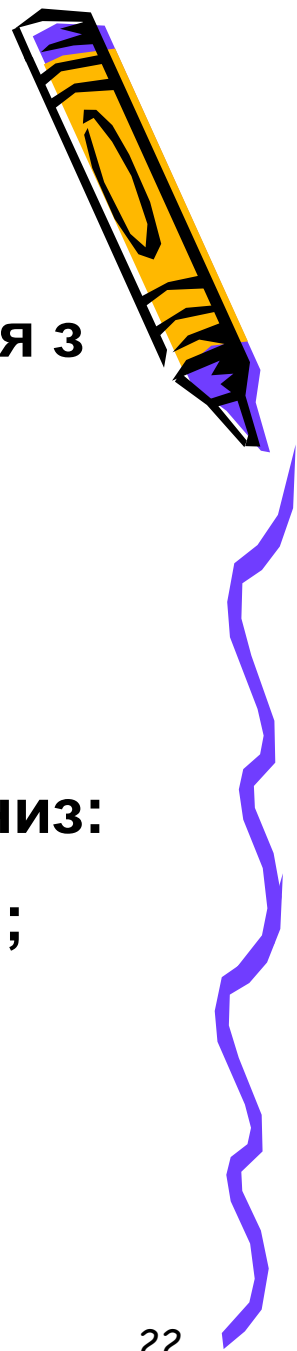
$$F_{tr} = \mu N.$$

**Тертя кочення** (закон Кулона)

$$F_{коч} = \mu_{коч} \frac{N}{r}.$$



# Питання для самоконтролю



**4** Як змінюється прискорення вільного падіння з висотою:

- а)** збільшується; **б)** зменшується;
- в)** не змінюється?

**5** Як змінюється вага студента масою 60 кг у ліфті, що рухається з прискоренням  $2 \text{ м/с}^2$  вниз:

- а)** не змінюється; **б)** збільшується на 120 Н;
- в)** зменшується на 120 Н?



# 6 ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ

*Імпульс замкненої системи тіл зберігається:*

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const.}$$

**Системою** називають сукупність тіл, об'єднаних певними зв'язками. Закони збереження є справедливими лише для замкнених систем.

# 7 РОБОТА І МЕХАНІЧНА ЕНЕРГІЯ

**Механічна робота** характеризує дію сили у просторі:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \alpha.$$

**Одиниця вимірювання** роботи

$$[A] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж}.$$

В інтегральній формі вираз для роботи має вигляд

$$A = \int \vec{F} d\vec{r}.$$

**Кінетична енергія** – це енергія руху тіла:

$$W_K = \frac{mv^2}{2},$$

або

$$W_K = \frac{p^2}{2m}.$$

**Робота є мірою зміни кінетичної енергії:**

$$\Delta A = \Delta W_K.$$

**Потужність**

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

**Миттєва потужність**

$$N = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}.$$

Одиниця вимірювання потужності

$$[N] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

# 8 КОНСЕРВАТИВНІ І ДИСИПАТИВНІ СИЛИ

**Консервативними** називають сили, робота яких не залежить від шляху, яким рухалося тіло. Робота консервативних сил за замкненим контуром дорівнює нулю:

$$A_0 = \oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

Це сили тяжіння, пружні сили, кулонівські сили.

Робота **дисипативних (неконсервативних) сил** за замкненим контуром не дорівнює нулю. Вона залежить від форми шляху. Такими є сили тертя, в'язкості, опору.

**ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ** – це енергія, що визначається взаємним розміщенням тіл (Землі і Сонця, електрона та ядра атома, тіла, піднятого над Землею та ін.) чи частин того самого тіла внаслідок різних видів деформації: розтягання, стискання, зсуву і т. ін.

Потенціальна енергія залежить від типу діючих сил.

**Потенціальна енергія тіла, піднятого над землею**

$$W_p = mgh.$$

**Потенціальна енергія пружно-деформованої пружини**

$$W_p = \frac{kx^2}{2}.$$

**Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії**

$$W_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

**Робота дорівнює зміні потенціальної енергії, взятої з протилежним знаком:**

$$\Delta A = -\Delta W_p.$$

**Консервативна сила** дорівнює градієнту потенціальної енергії частинки, взятому з протилежним знаком:

$$\vec{F} = -\text{grad} W_p.$$

Градiєнт функції

$$\left( \frac{\partial W_p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial W_p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial W_p}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \text{grad} W_p.$$

# 9 ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

**Повна механічна енергія**

$$W = W_K + W_P.$$

Окремий випадок закону збереження енергії – **закон збереження енергії в механічних процесах: повна механічна енергія замкненої системи, в якій діють лише консервативні сили, зберігається:**

$$W_k + W_p = \text{const.}$$



# Питання для самоконтролю



**6** Назвіть одиниці вимірювання кінетичної енергії:

**а)** Н; **б)** Вт; **в)** Дж.

**7** Назвіть одиниці вимірювання потужності:

**а)** Н; **б)** Вт; **в)** Дж.

**8** Чи може кінетична енергія набувати від'ємних значень:

**а)** так; **б)** ні?

**9** Чи може потенціальна енергія набувати від'ємних значень:

**а)** так; **б)** ні?

**10** Закон збереження механічної енергії виконується:

**а)** завжди; **б)** лише в інерціальних системах відліку; **в)** за відсутності дисипативних сил.



# Мультимедійний конспект лекцій «Основи механіки»

## Лекція 3 *«Динаміка обертального руху»*

Укладачі: В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, В. В. Коваль  
Сумський державний університет

2020

# ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

З

§ 1 ТВЕРДЕ ТІЛО В МЕХАНІЦІ

М

§ 2 ОСНОВНІ ВЕЛИЧИНИ

і

§ 2.1 Момент сили

с

§ 2.2 Момент інерції

т

§2.3 Моменти інерції однорідних тіл

§ 3 ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

§ 4 МОМЕНТ ІМПУЛЬСУ

§ 5 ОСНОВНИЙ ЗАКОН ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

л

§5.1 Виведення основного закону динаміки обертового руху

е

§6 КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ОБЕРТОВОГО ТІЛА

к

§7 РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ ЗОВНІШНЬОЇ СИЛИ ПІД ЧАС ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА

ц

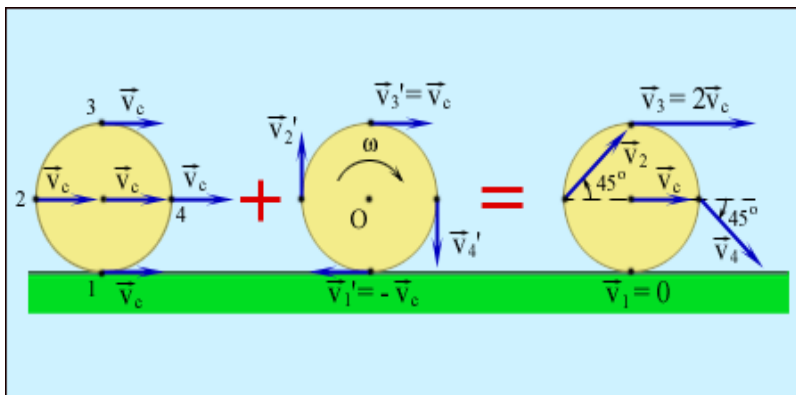
§8 ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

і

ї

# § 1 ТВЕРДЕ ТІЛО В МЕХАНІЦІ

- **Абсолютно тверде тіло** – тіло, відстань між будь-якими точками якого в процесі руху не змінюється.
- **Плоским** називається рух, за якого всі точки тіла рухаються в паралельних площинах.
- Його можна подати як суму **поступального** та **обертального** рухів:

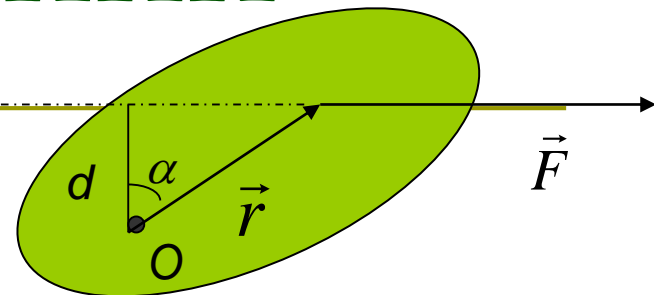


$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

# § 2 ОСНОВНІ ВЕЛИЧИНИ

## □ § 2.1 МОМЕНТ СИЛИ

$$\vec{M} = \left[ \vec{r}, \vec{F} \right].$$



- Момент сили спрямований перпендикулярно до площини векторів відповідно до **правила правого гвинта**.

## □ Модуль моменту сили

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = r \cdot d.$$

Плече сили  $d$  – найкоротша відстань від точки обертання до лінії прикладання сили.

- Одиниця вимірювання моменту сили:

$$[M] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

# Питання для самоконтролю



**1** Закон збереження механічної енергії виконується:

а) за будь-яких умов;

б) лише в інерціальних системах відліку;

в) за відсутності дисипативних сил.

**2** Одиницею вимірювання моменту сили є:

а) Дж; б) Н·м; в) Н.



## § 2.2 МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ

**Момент інерції** тіла характеризує інерціальні властивості тіла під час обертального руху.

- **Момент інерції** матеріальної точки відносно осі обертання

$$I = mr^2.$$

- **Момент інерції системи (тіла)** відносно осі обертання

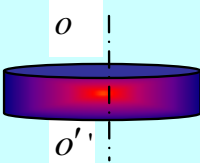
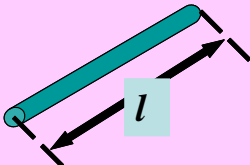

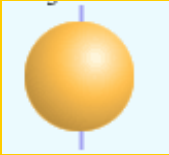
$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad \text{або} \quad I = \int_m r^2 dm.$$

- **Момент інерції однорідного тіла**

$$I = \rho \int_V r^2 dV.$$

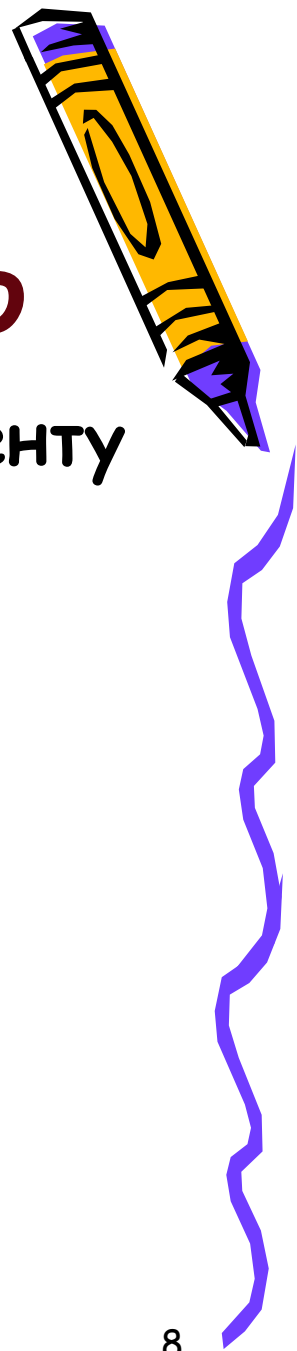
**Одиниця вимірювання**  $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$

## § 2.3 Моменти інерції однорідних тіл відносно осі, що проходить через центр мас цих тіл

Тіло	Момент інерції
<b>Однорідний диск</b>	 $I = \frac{1}{2} mR^2$
<b>Тонкий стрижень</b>	 $I = \frac{ml^2}{12}$
<b>Тонкий диск</b>	 $I = \frac{1}{4} mR^2$
<b>Однорідна куля</b>	 $I = \frac{2}{5} mR^2$



# Питання для самоконтролю



**3** Назвіть одиницю вимірювання моменту інерції:

а) Н; б)  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ; в) кг.

**4** Маса кулі збільшили вдвічі, радіус зменшили вдвічі. Її момент інерції:

а) не змінився;

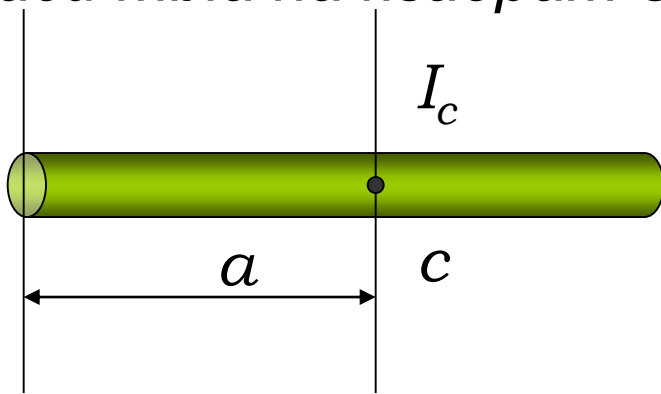
б) зменшився вдвічі;

в) збільшився вдвічі.



# § 3 ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі його моменту інерції відносно осі, паралельної даній, що проходить через центр мас тіла та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями:



$$I = I_c + ma^2.$$

Для прикладу знайдемо момент інерції однорідного стрижня відносно осі, що проходить через його кінець.

## § 4 МОМЕНТ ІМПУЛЬСУ

---

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

Для матеріальної точки маємо

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}] = [\vec{r}, m[\vec{\omega}, \vec{r}]] = mr^2\vec{\omega}.$$

або

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}.$$

Це співвідношення є правильним і для твердого тіла.

**Одиниці вимірювання**

$$[L] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$



**Штейнер Якоб**

(1796 – 1863)

*Німецький математик.  
Член Берлінської  
академії наук*

Професор математики Берлінського університету. Один із творців проєктивної геометрії. В основній своїй праці «Систематичний розвиток залежності геометричних образів одного від іншого» (1834 р.) побудував геометрію, не використовуючи аналітичні методи. У працях Штейнера чітко виявляються елементи теоретико-множинних уявлень у проєктивній геометрії. У 1833 р. Штейнер видав книгу «Геометричні побудови, здійснювані за допомогою прямої і нерухомого кола». У 1842 р. вийшла його книга «Про найбільші і найменші значення плоских фігур і про сферу», в якій геометричними засобами досліджені численні проблеми, що стосуються максимумів і мінімумів. Зокрема, в ній доведено, що коло є плоскою фігурою, яка має найменший периметр за заданої площі. Ряд важливих результатів Штейнер одержав у геометрії трикутника.

# § 5 ОСНОВНИЙ ЗАКОН ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

---

**Основний закон динаміки обертального руху в диференціальній формі:**

швидкість зміни моменту імпульсу відносно осі дорівнює моменту сил, що діють на частинку відносно тієї самої осі:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

**Основний закон динаміки обертального руху в інтегральній формі:** момент сили дорівнює добутку моменту інерції тіла на його кутове прискорення:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

## § 5.1 Виведення основного закону динаміки обертального руху

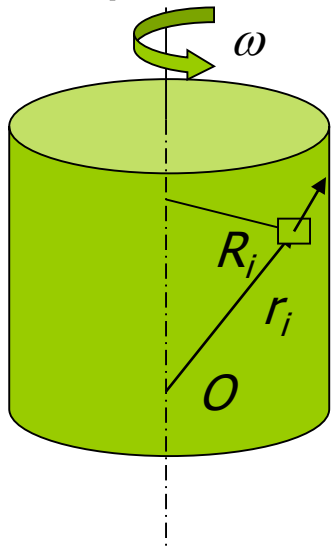
---

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, m\vec{v}] = \left[ \vec{r}, m \frac{d}{dt} \vec{v} \right] + \left[ \frac{d}{dt} \vec{r}, m\vec{v} \right],$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = [\vec{r}, \vec{F}] + [\vec{v}, m\vec{v}] = \vec{M}.$$

# § 6 КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ОБЕРТОВОГО ТІЛА

**Кінетична енергія твердого тіла** у разі, якщо воно обертається навколо **нерухомої осі**,



$$(W_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 R_i^2,$$

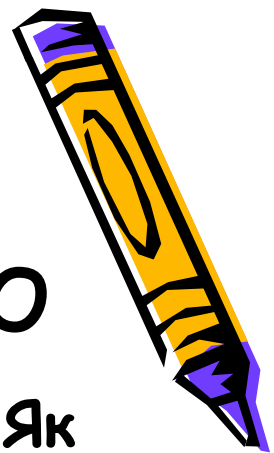
$$W_k = \sum_i (W_k)_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i R_i^2 \Delta m_i.$$

$$W_K = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

У разі, якщо тіло рухається як ціле і одночасно обертається, то його кінетична енергія є сумою кінетичних енергій поступального та обертального рухів:

$$W_K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

# Питання для самоконтролю



**5** Кутова швидкість тіла збільшилася втричі. Як змінилася його кінетична енергія:

- а) не змінилася;
- б) збільшилася втричі;
- в) збільшилася у 9 разів?

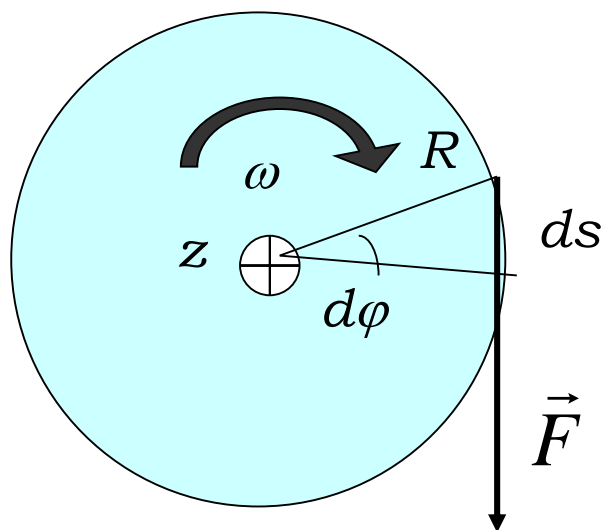
**6** Циліндр масою 1 кг котиться горизонтальною площиною зі швидкістю 2 м/с. Чому дорівнює його кінетична енергія:

- а) 3 Дж;
- б) 2 Дж;
- в) 1 Дж?





# § 7 РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ ЗОВНІШНЬОЇ СИЛИ ПІД ЧАС ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА



$$dA = F_s ds = F_s R d\phi = M_z d\phi.$$

$$dA = M \cdot d\phi.$$

**Потужність** сили під час обертання тіла

$$N = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M \omega.$$

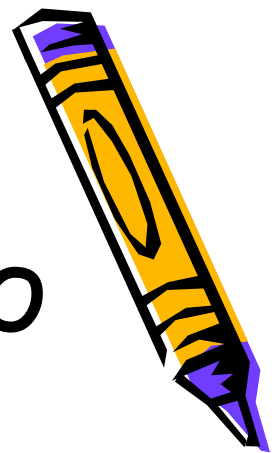
# Питання для самоконтролю

**7** Робота для збільшення кінетичної енергії обертання кулі (30 Дж) удвічі дорівнює:

**а)** 60 Дж; **б)** 30 Дж; **в)** 12 Дж.

**8** Потужність сили 1 Н, прикладеної до тіла на відстані 1 м від його осі обертання і яка надала тілу швидкості 20 см/с, дорівнює:

**а)** 20 Вт; **б)** 0,2 Вт; **в)** 2 Вт.



# § 8 ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

---

**Момент імпульсу замкненої системи матеріальних точок під час будь-яких взаємодій між тілами системи залишається сталим:**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const,$$

$$\sum I\vec{\omega} = const.$$

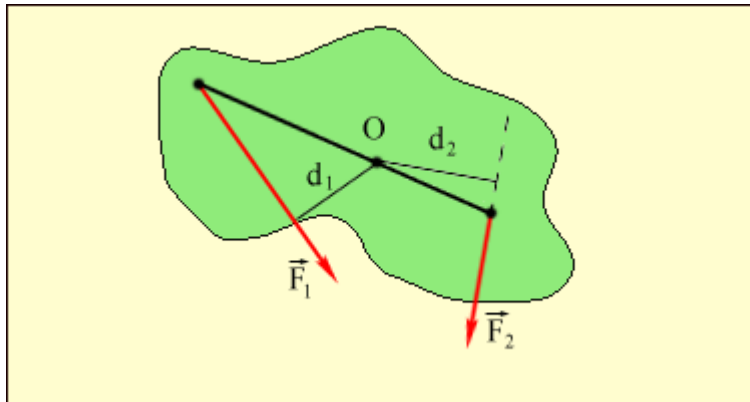
## ЗІСТАВЛЕННЯ ФОРМУЛ МЕХАНІКИ ПОСТУПАЛЬНОГО ТА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Основна величина		Основний закон		Зв'язок
<i>поступальний</i>	<i>обертальний</i>	<i>поступальний</i>	<i>обертальний</i>	
$\vec{S} = \Delta \vec{r}$	$\vec{\varphi}$			$\vec{S} = [\vec{\varphi}, \vec{r}]$
	$\vec{\omega}$	$\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d \vec{\varphi}}{dt}$	$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$
$\vec{a}$	$\vec{\varepsilon}$	$\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{dt}$	$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$

<b>Основна величина</b>		<b>Основний закон</b>		<b>Зв'язок</b>
<i>поступальний</i>	<i>обертальний</i>	<i>поступальний</i>	<i>обертальний</i>	
$m$	$I$			$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$
$\vec{F}$	$\vec{M}$	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$	$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$
		$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	
$\vec{p}$	$\vec{L}$	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$	$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$
$A$		$dA = F_s ds$	$dA = M_\omega d\varphi$	
$N$		$N = \frac{dA}{dt} = F_v V$	$N = \frac{dA}{dt} = M\omega$	
$W_K$		$W_K = \frac{mv^2}{2}$	$W_K = \frac{1}{2} I\omega^2$	$W_K = \frac{1}{2} mv_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$

# ВИСНОВКИ

Тверде тіло, яке бере участь у плоскому русі, має 6 ступенів вільності. Для його опису – 6 скалярних рівнянь. Такими є **рівняння руху центра мас і рівняння моментів:**



$$m_c \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{зовн}i},$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{\text{зовн}i}.$$

До рівняння входять лише зовнішні сили. Внутрішні сили не впливають на рух центра мас системи і її момент імпульсу. Вони можуть змінювати лише взаємне положення і швидкість частин системи.

# Питання для самоконтролю



**9** Яка величина поступального руху є аналогом моменту інерції:

**а)** сила; **б)** імпульс; **в)** маса?

**10** Кутова швидкість і момент імпульсу спрямовані:

**а)** паралельно; **б)** перпендикулярно;  
**в)** антипаралельно.



# Мультимедійний конспект лекцій «Основи механіки»

## Лекція 4 *«Основи механіки ідеальних рідин і газів»*

Укладачі: В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, В. В. Коваль  
Сумський державний університет

2020



# ОСНОВИ МЕХАНІКИ ІДЕАЛЬНИХ РІДИН І ГАЗІВ

З  
М  
і  
С  
Т  
л  
е  
к  
ц  
і  
ї

- § 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ГІДРОМЕХАНІКИ.
  - § 1.1 Частинка рідини § 1.2 Текучість
  - § 1.3 Стисливість § 1.4 Тиск
- § 2 ЗАКОН ПАСКАЛЯ
- § 3 ГІДРОСТАТИЧНИЙ ТИСК.
- § 4 ЗАКОН АРХІМЕДА.
  - § 4.1 Умови плавання тіл
- § 5 ЕЛЕМЕНТИ КІНЕМАТИКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ
  - § 5.1 Рівняння нерозривності
- § 6 РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ
- § 7 ФОРМУЛА ТОРРІЧЕЛЛІ
- § 8 РЕЖИМИ РУХУ РЕАЛЬНИХ РІДИН І ГАЗІВ
- § 9 РІВНЯННЯ НЬЮТОНА
- § 10 ФОРМУЛА СТОКСА

# § 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ГІДРОМЕХАНІКИ

---

- **Гідромеханіка** – це розділ механіки, який вивчає рівновагу й рух рідких і газоподібних середовищ та їх взаємодію між собою і з твердими тілами.
- Основне завдання – вивчення тиску всередині нерухомих та рухомих рідин і газів.
- Гідромеханіка є частиною **механіки суцільних середовищ**.
- **Ідеальна рідина** – це рідина без внутрішнього тертя (в'язкості).
- Нестислива рідина – рідина, густина якої не залежить від тиску ( $\rho = \text{const}$ ).

- **§ 1.1 Частинка рідини (газу).**

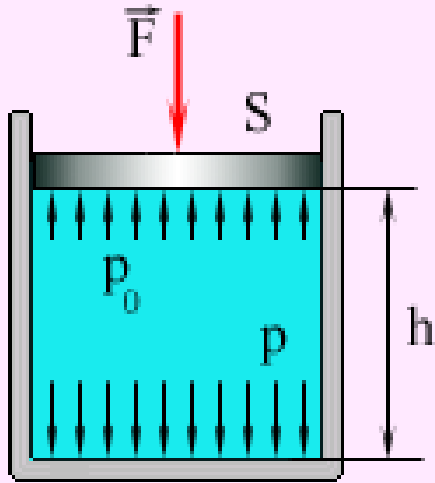
Це **елементарний об'єм** рідини або газу.

- **§ 1.2 Текучість.**

Текучість – це властивість рідини (газу) набувати форми посудини, в якій вона міститься.

- **§1.3 Стисливість.**

Стисливість – здатність тіл змінювати свій об'єм під дією зовнішніх сил. Відзначимо, що стисливість рідин на відміну від газів незначна. Рідину, густина якої однакова в будь-якій точці і змінюватися не може, називають **нестисливою**.



## § 1.4 ТИСК.

Тиск - скалярна фізична величина, що дорівнює відношенню нормальної сили до площі поверхні, на яку вона діє:

$$p = \frac{F_n}{S}.$$

Одиницею вимірювання тиску в Міжнародній системі є

**Паскаль:**

$$1 \text{ Па} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2}.$$

1 Паскаль – дуже мала величина, тому для технічних розрахунків широко використовують

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па},$$

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}.$$

## § 1.5 СПІВВІДНОШЕННЯ

---

**Між системними та позасистемними  
одиницями вимірювання тиску:**

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 133 \text{ Па}, \quad 1 \text{ мм } H_2O = 9,81 \text{ Па},$$

$$1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad 1 \text{ т.атм} = 0,98 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Прилади для вимірювання тиску – **манометри.**

## § 2 ГІДРОСТАТИЧНИЙ ТИСК

---

Тиск, обумовлений вагою стовпа рідини, називають **гідростатичним**:

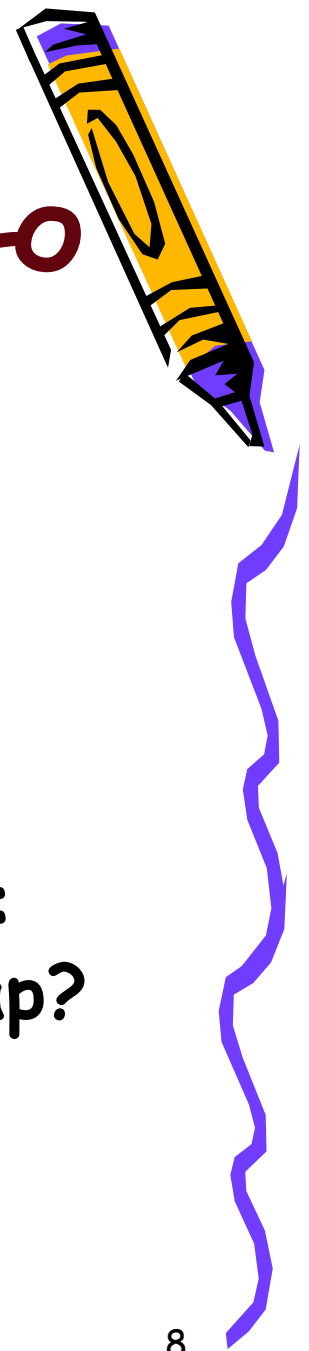
$$p = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh.$$

**Зовнішній тиск** характеризує стискування рідини під дією зовнішньої сили. Зовнішнім є атмосферний тиск і тиск, який створюється в гідравлічних системах. З урахуванням сили тяжіння

**гідростатичний тиск дорівнює**  $p = p_0 + \rho gh,$

де  $p_0$  – атмосферний тиск на поверхні рідини.

# Питання для самоконтролю



**1** 1 мм рт. ст. дорівнює:

- а) 133 Па;      б) 9,81 Па;  
в) 0,101 МПа;    г) 0,098 МПа.

**2** 1 атм дорівнює:

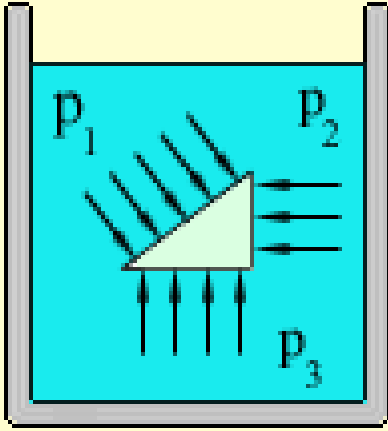
- а) 133 Па;      б) 9,81 Па;  
в) 0,101 МПа;    г) 0,098 МПа.

**3** Яким є тиск в океані на глибині 1 км:

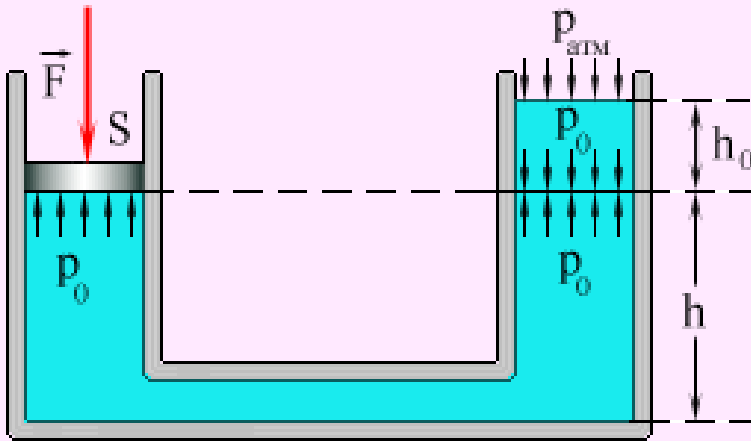
- а)  $\approx 1$  МПа;    б)  $\approx 10$  МПа;    в)  $\approx 100$  бар?



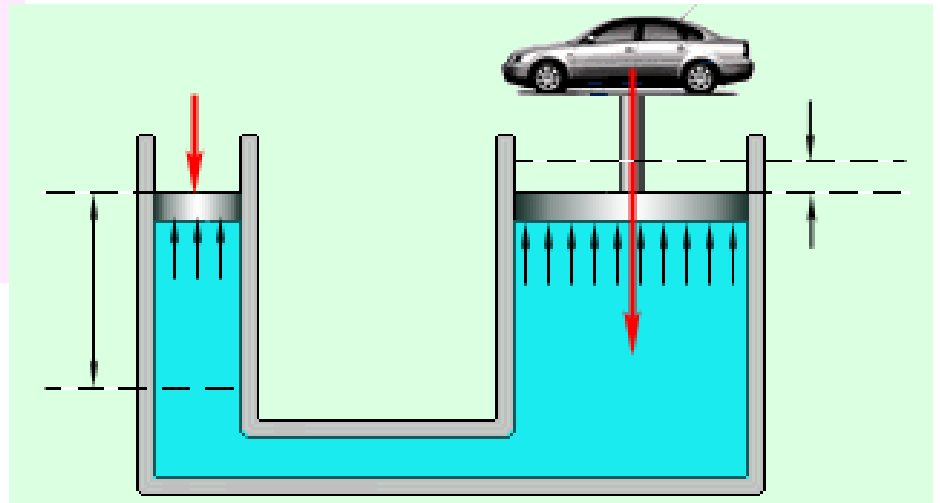
## § 3 ЗАКОН ПАСКАЛЯ



Рідини і гази передають створений на них тиск однаково в усіх напрямках.



$$F_2 = pS_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2.$$







## **ПАСКАЛЬ БЛЕЗ**

(1623 – 1662)

*Французький релігійний філософ, письменник, математик і фізик.*

*Сформулював одну з основних теорем проєктивної геометрії*

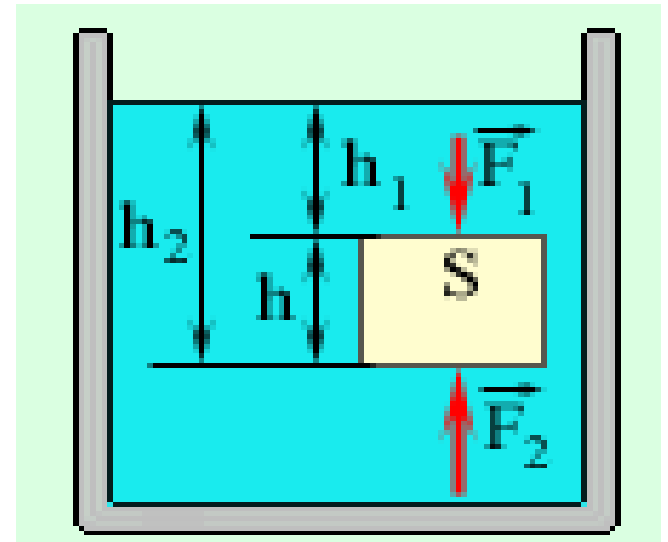
**ПАСКАЛЬ БЛЕЗ.** Автор праці з арифметики, теорії чисел, алгебри, теорії ймовірностей. Сконструював у 1641 (за іншими відомостями – 1642) обчислювальну машину. Один з основоположників гідростатики. У 16 років він довів «теорему Паскаля» і написав трактат про конічні перетини. У 18 років винайшов обчислювальну машину – «бабусю» сучасних арифмометрів. Попередньо він побудував 50 моделей. Кожна наступна була досконаліша за попередню. Цього юнака вже називали «великим математиком», він сперечався з Ферма, а Декарт відмовився вірити, що авторові присланих йому математичних праць лише 16 років.

Паскаль помер 19 серпня 1662 року. Існує легенда, що в 1789 році герцог Орлеанський наказав вирити кістки Паскаля і віддати алхімікові, який обіцяв добути з них філософський камінь.

## § 4 ЗАКОН АРХІМЕДА

На будь-яке тіло, занурене в рідину, з боку рідини діє виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини:

$$F_A = \rho_p g V.$$



## § 4.1 УМОВИ ПЛАВАННЯ ТІЛ

- 1-ше тіло спливає:  $F_A > F_T \Rightarrow \rho_p gV > \rho_T gV$ .

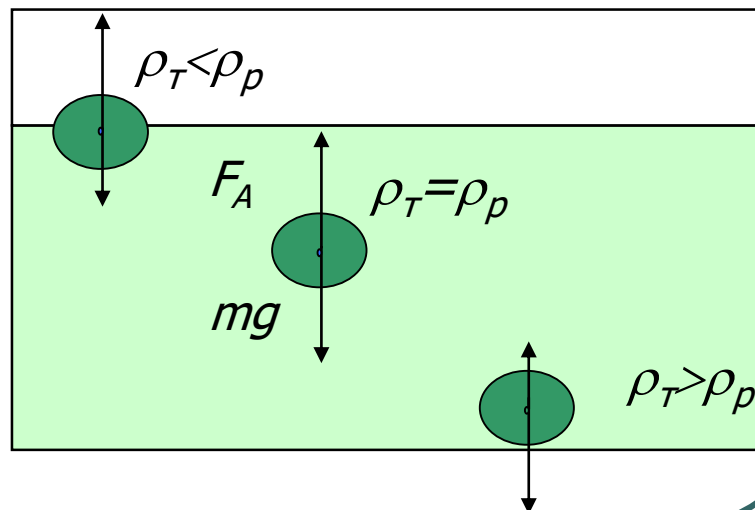
$$\rho_p > \rho_T.$$

- 2-ге індиферентна рівновага:

$$F_A = F_T \Rightarrow \rho_p = \rho_T.$$

- 3-тє тіло тоне:

$$F_A < F_T \Rightarrow \rho_p < \rho_T.$$



# Питання для самоконтролю



**4** Відношення площ поршнів гідравлічного преса дорівнює 1:100. Якою повинна бути сила, щоб підняти автомобіль масою 2 т:

а) 2 Н; б) 200 Н; в) 2 000 Н?

**5** Тіло масою 1 кг та об'ємом 1 дм<sup>3</sup> помістили у воду. Це тіло буде:

а) спливати; б) тонути;

в) перебувати у стані індиферентної рівноваги.





## **АРХІМЕД ІЗ СІРАКУЗ**

(287 до н.е. –212 до н.е.)

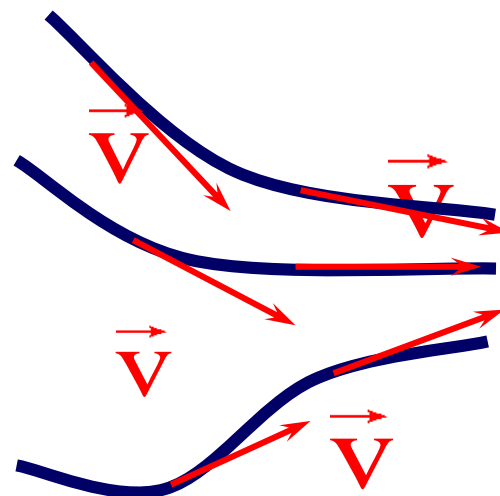
Давньогрецький математик і механік, основоположник теоретичної механіки і гідростатики

**АРХІМЕД ІЗ СІРАКУЗ.** Розробив методи знаходження площ поверхонь і об'ємів різних фігур і тіл. Архімеду належить безліч технічних винаходів, які забезпечили йому надзвичайну популярність серед сучасників. Під час Другої Пунічної війни Архімед організував **інженерну оборону міста**. Винайдені ним військові металеві та ін. машини (про них розповідає Плутарх у життєписі римського полководця Марцелла) впродовж двох років стримували облогу Сіракуз римлянами. Архімеду приписується також спалення римського флоту спрямованим на нього через систему увігнутих дзеркал сонячним світлом, але це навряд чи достовірно. Геній Архімеда викликав таке захоплення в римлян, що Марцелл наказав зберегти йому життя, але під час взяття Сіракуз він був убитий римським солдатом, який його не впізнав.

## § 5 ЕЛЕМЕНТИ КІНЕМАТИКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

**Лінії течії** – це лінії, дотична до яких збігається з вектором швидкості частинки рідини у даній точці.

Потік рідини називають **стаціонарним**, якщо швидкість потоку в усіх точках простору з часом не змінюється.



Лінії течії та швидкості частинок рухомої рідини

## § 5.1 РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ

---

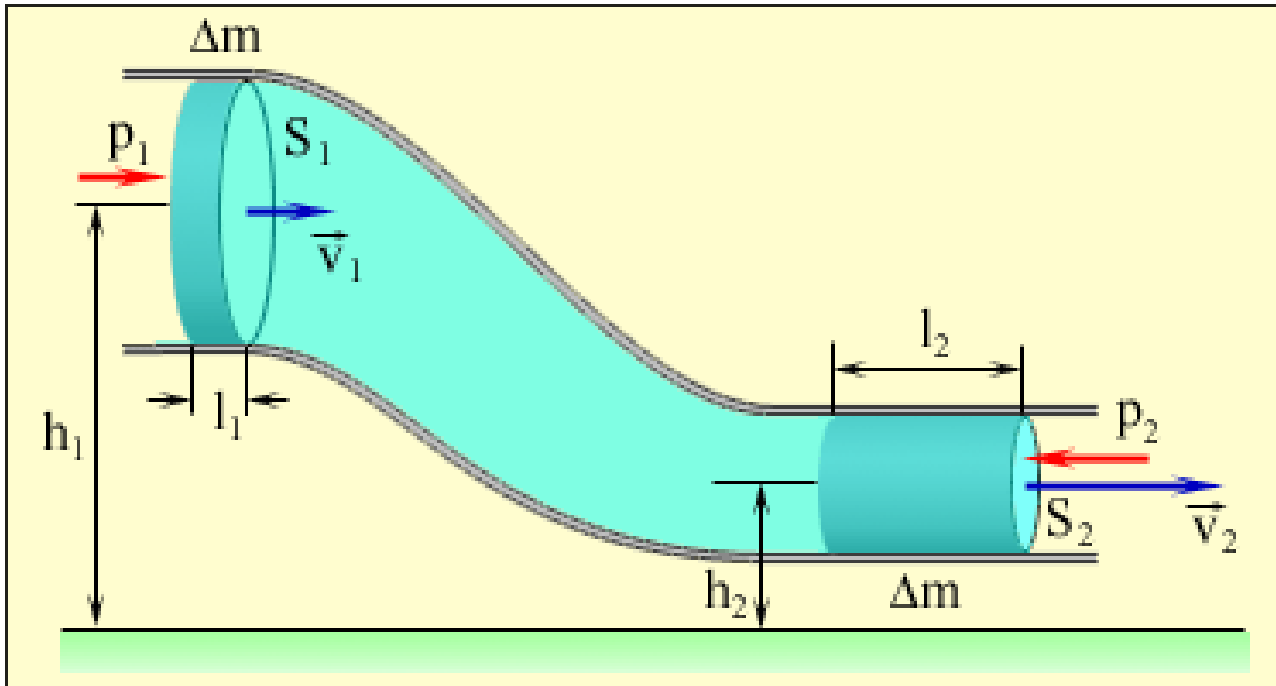
Маса ізольованої системи впродовж усього часу руху не змінюється, тобто

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

Тоді для нестисливого середовища **рівняння нерозривності для стаціонарного потоку** має вигляд

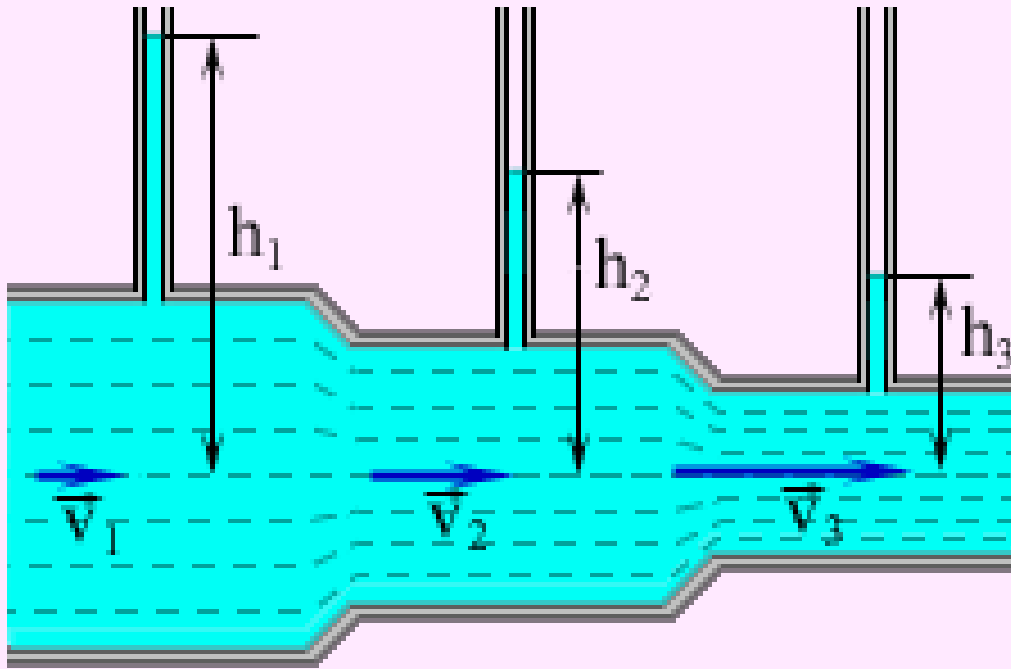
$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

## § 6 РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ



$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$





$$p_1 = \rho g h_1,$$

$$p_2 = \rho g h_2,$$

$$p_3 = \rho g h_3.$$

Тиск рідини менший там, де швидкість її течії більша:

$$h_1 = h_2 \Rightarrow p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$



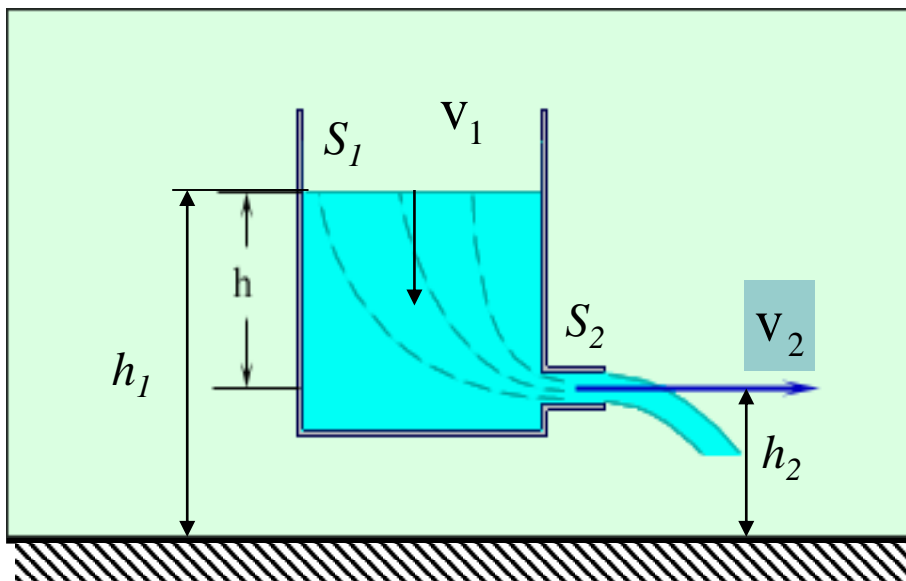
**ДАНИЇЛ БЕРНУЛЛІ**  
(1700 – 1782)

Швейцарський  
математик, фізик і  
фізіолог

**ДАНИЇЛ БЕРНУЛЛІ**

Одержав медичну освіту. У 1725 році прийняв запрошення Петербурзької академії наук і зайняв посаду професора кафедри фізіології. Знайшовши у цій сфері безліч нерозв'язаних задач з теоретичної фізики і, зокрема, динаміки руху рідини (крові) у судинах, звернувся до математичного опису фізичних процесів і у 1730 році очолив кафедру математики Петербурзької академії. У 1733 році повернувся на батьківщину в Базель, де очолив кафедру анатомії і ботаніки місцевого університету, а з 1750 року - кафедру експериментальної фізики.

## § 7 ФОРМУЛА ТОРРІЧЕЛЛІ



$$v = \sqrt{2gh}.$$

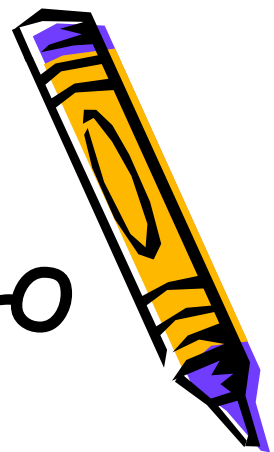
Розглянемо витікання ідеальної рідини з невеликого отвору в широкій відкритій посудині. Застосуємо рівняння Бернуллі:

$$\rho gh_1 = \rho gh_2 + \frac{\rho \cdot v^2}{2}.$$

# Питання для самоконтролю

**6** Швидкість витікання ідеальної рідини з невеликого отвору від його глибини:

**а)**  $\sim h$ ; **б)**  $\sim h^{\frac{1}{2}}$ ; **в)** не залежить.



## **ТОРРІЧЕЛЛІ ЕВАНЖЕЛІСТА**



### **ТОРРІЧЕЛЛІ ЕВАНЖЕЛІСТА**

(1608 -1647)

*Італійський фізик  
і математик*

Професор математики і фізики  
Флорентійського університету.

У 1643 році відкрив атмосферний тиск, (дослід Торрічеллі). Винайшов ртутний барометр (1644). Удосконалив повітряний термоскоп Галілея, переробивши його на спиртовий термометр. Він перший пояснив вітер варіаціями атмосферного тиску.

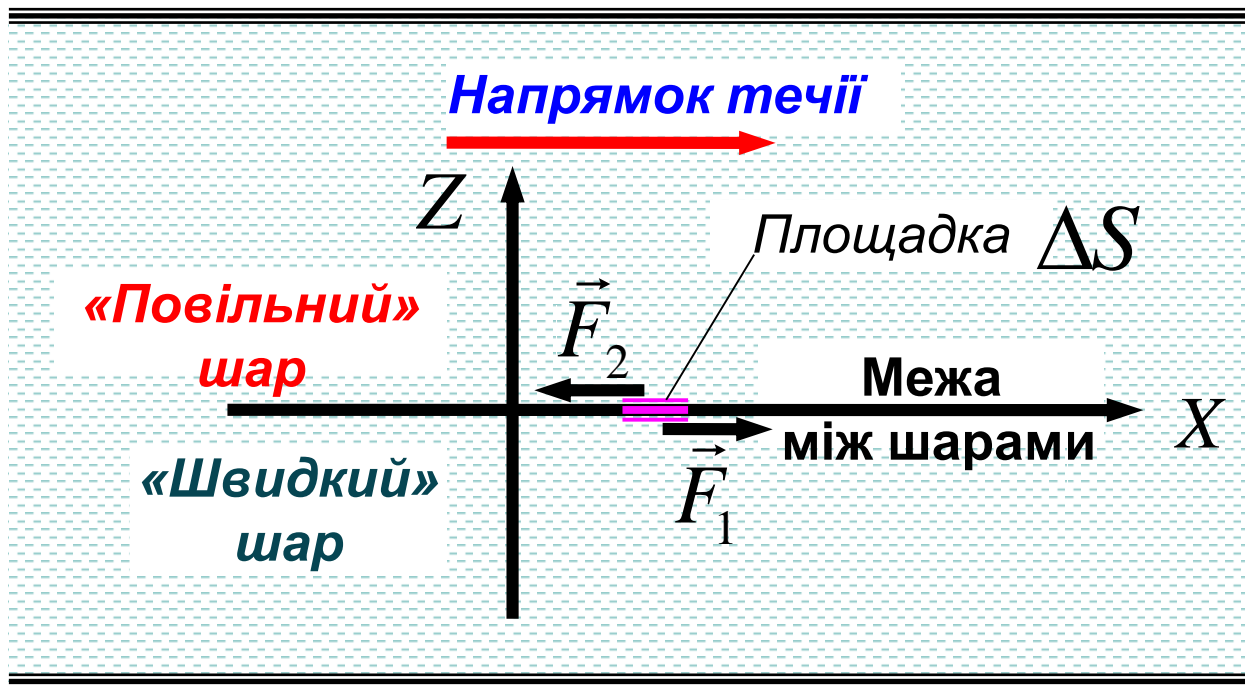
У трактаті «Про рух вільно падаючих і кинутих тіл» (1641) Торрічеллі встановив параболічний характер траєкторії руху тіл, кинутих під довільним кутом до обрію, інші добре відомі тепер теореми балістики. Сформулював закон витікання рідини з отворів посудини і вивів формулу для визначення швидкості витікання (формула Торрічеллі). Досяг досконалості в конструюванні мікроскопів і шліфуванні лінз телескопів.

## § 8 РЕЖИМИ РУХУ РЕАЛЬНИХ РІДИН І ГАЗІВ

---

**В'язкість** – це внутрішнє тертя, яке мають усі реальні рідини і гази. **Ламінарною течією** називають течію без перемішування шарів рідини. При збільшенні швидкості течії ламінарний рух переходить у **турбулентний**, за якого відбувається перемішування шарів потоку.

Для створення та підтримання сталою течію рідини в трубі, потрібно створити і підтримувати різницю тисків між кінцями труби. Оскільки за встановленого руху рідина рухається без прискорення, необхідність дії сил тиску свідчить про те, що ці сили врівноважуються силами опору руху рідини (внутрішнього тертя).



Сила взаємодії між шарами рідини за стаціонарної течії рідини.

Дослідженнями встановлено, що сила внутрішнього тертя спрямована по дотичній до шарів рідини або газу і пропорційна добутку градієнта швидкості між шарами на площу їх контакту.

## § 9 РІВНЯННЯ НЬЮТОНА

---

$$F = -\eta \left| \frac{dv}{dz} \right| \Delta S,$$

$$[\eta] = \frac{H \cdot c \cdot m}{m^2 \cdot m} = Pa \cdot c,$$

де  $\eta$  – динамічний коефіцієнт в'язкості, що залежить від природи і стану (наприклад, температури) рідини.



## § 10 ФОРМУЛА СТОКСА

---

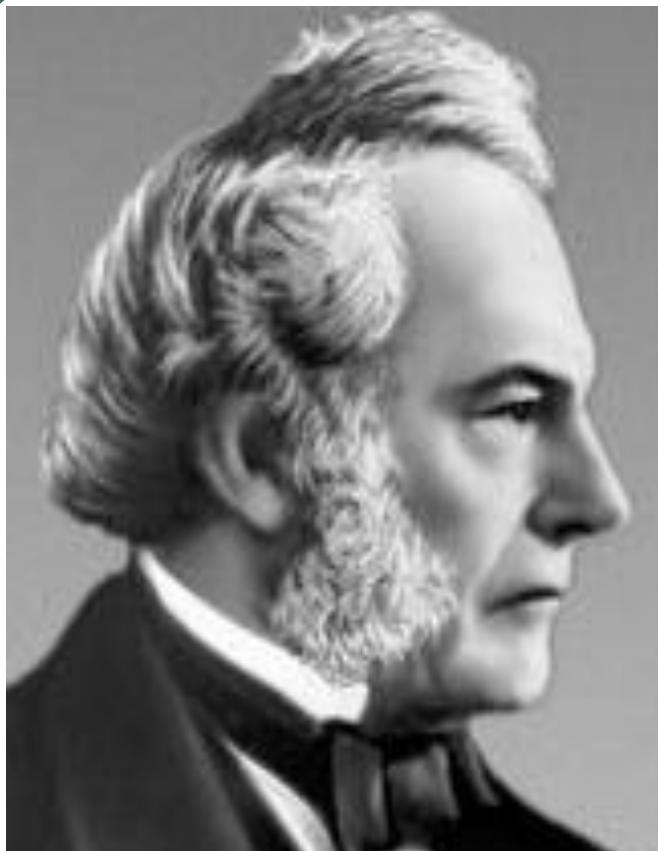
Стокс установив, що за невеликих швидкостей модуль сили опору руху тіла в рідинах визначається формулою

$$F = k\eta l v.$$

Сила опору руху в рідинах **невеличких кульок** за невеликих швидкостей (ламінарна течія):

$$F = 6\pi\eta r v.$$

Формула Стокса є справедливою за умови, що відстань від тіла до стінок посудини набагато більша за розміри тіла.

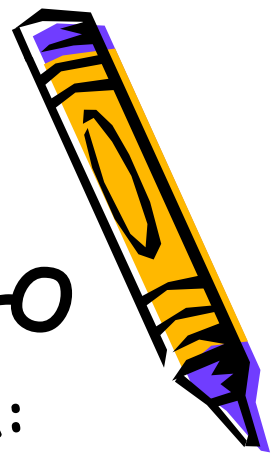


**Стокс Джордж Габріель**  
(1819 – 1903)

*Англійський фізик,  
член Лондонського  
королівського товариства*

Праці Стокса мають фундаментальне значення в гідродинаміці. В оптиці в 1852 описав явище флуоресценції (**правило Стокса**); запропонував метод дослідження ультрафіолетової області спектра за допомогою люмінесценції; досліджував дифракцію, поляризацію світлових хвиль, подвійне променезаломлення, відбивання світла різними поверхнями, теорію оптичних інструментів. Відомі також праці Стокса з акустики, теплопровідності в кристалах, гравітації та ін. У математиці Стоксу належать праці з векторного аналізу (**формула Стокса**), теорії рядів і визначених інтегралів та ін. Ім'ям Стокса названа одиниця кінематичної в'язкості.

# Питання для самоконтролю



**7** Для якого руху є правильною формула Стокса:

**а)** будь-якого; **б)** ламінарного; **в)** турбулентного?

**8** Як відносно швидкості тіла спрямована сила в'язкості?

**а)** паралельно; **б)** перпендикулярно;

**в)** протилежно.

**9** Течія без перемішування шарів рідини є:

**а)** ламінарною; **б)** турбулентною;

**в)** стаціонарною.

**10** Назвіть одиниці вимірювання динамічного коефіцієнта в'язкості:

**а)** Па; **б)** Н; **в)** Па·с.



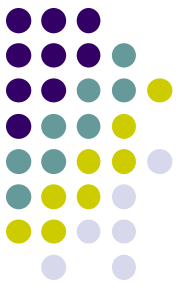
# Мультимедійний конспект лекцій «Основи механіки»

## Лекція 5 *«Коливання та хвилі»*

**Укладачі:** В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, В. В. Коваль  
Сумський державний університет  
2020

# КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

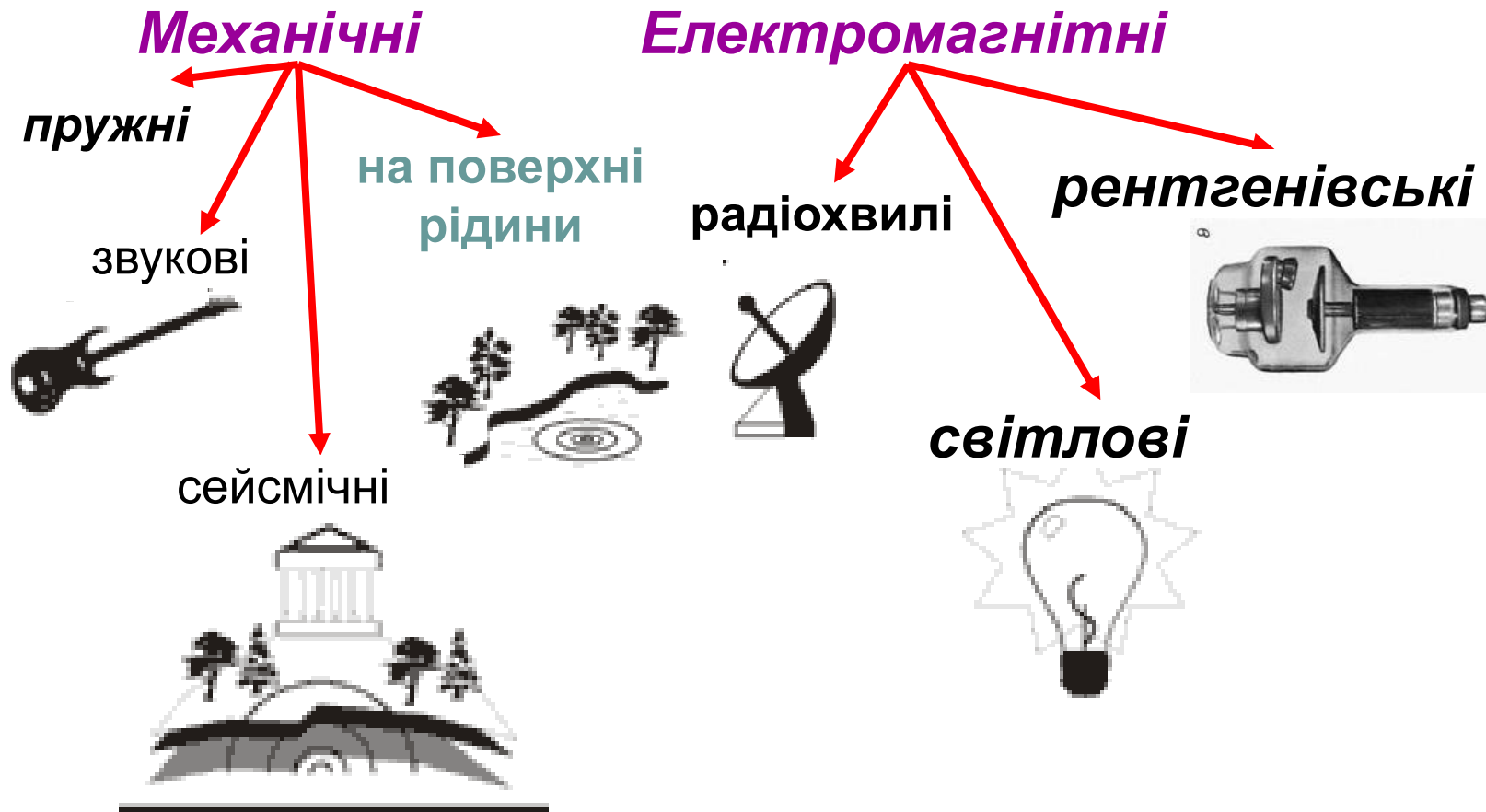
- З**  
**М**  
**і**  
**с**  
**т**  
**л**  
**е**  
**к**  
**ц**  
**і**  
**ї**
- § 1 ВИДИ КОЛИВАНЬ
  - § 2 ТИПИ КОЛИВАНЬ ЗА ФІЗИЧНОЮ ПРИРОДОЮ
  - § 3 ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ
  - § 4 МАТЕМАТИЧНИЙ МАЯТНИК
  - § 5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ
  - § 6 ПРУЖИННИЙ МАЯТНИК
  - § 7 ПОВНА ЕНЕРГІЯ ПРИ ВІЛЬНИХ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ
  - § 8 ФІЗИЧНИЙ МАЯТНИК
  - § 9 ВПЛИВ ЗОВНІШНІХ СИЛ НА КОЛИВАЛЬНІ ПРОЦЕСИ
  - § 10 ВИМУШЕНІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ
    - § 10.1 *Резонанс*
  - § 11 МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ
    - § 11.1 *Поперечні хвилі*
    - § 11.2 *Поздовжні хвилі*
    - § 11.3 *Хвильові поверхні та фронт хвилі*
    - § 11.4 *Довжина хвилі*
  - § 12 РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ
  - § 13 ЗВУКОВІ ХВИЛІ



# § 1 ВИДИ КОЛИВАНЬ

- **Коливальними** називаються процеси, які з часом повторюються.
- **Коливальна система (осцилятор)** – це система, яка виконує коливання.
- **Вільними (власними) коливаннями** системи називають коливання, які відбуваються за відсутності змінних зовнішніх дій на коливальну систему і виникають внаслідок якогось початкового відхилення цієї системи від стану її стійкої рівноваги. Оскільки в реальних системах завжди діють сили тертя, то вільні коливання зазвичай є **згасальні**.
- **Вимушені коливання** – це коливання, які виникають під впливом змінної зовнішньої дії.

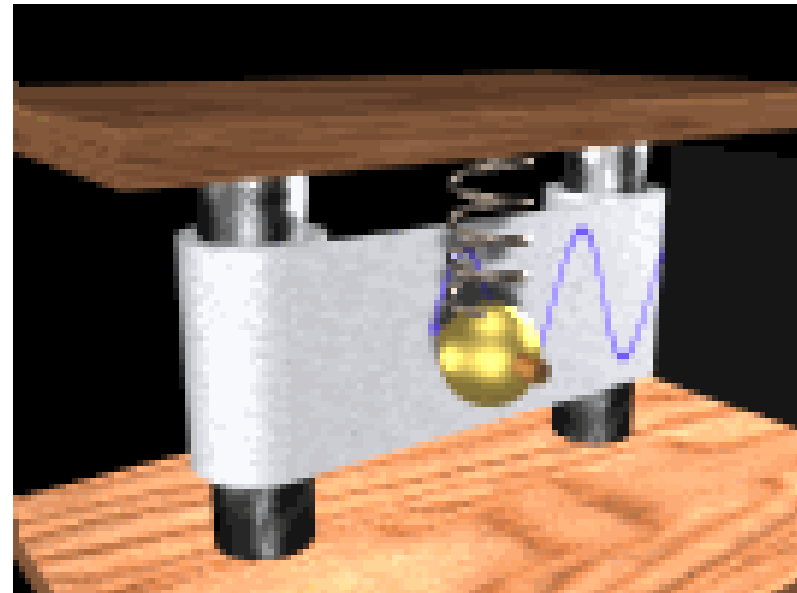
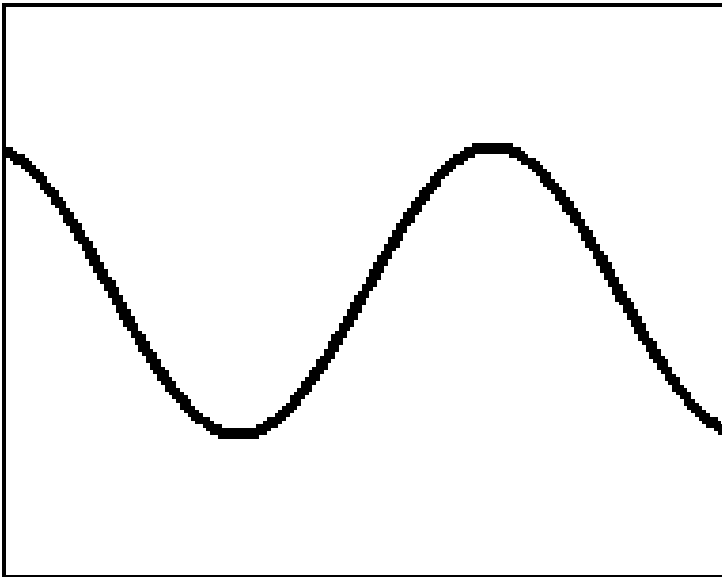
# § 2 ТИПИ КОЛИВАНЬ ЗА ФІЗИЧНОЮ ПРИРОДОЮ





# § 3 ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Коливання, під час яких коливна величина змінюється з часом за законом синуса або косинуса, називають **гармонічними**.

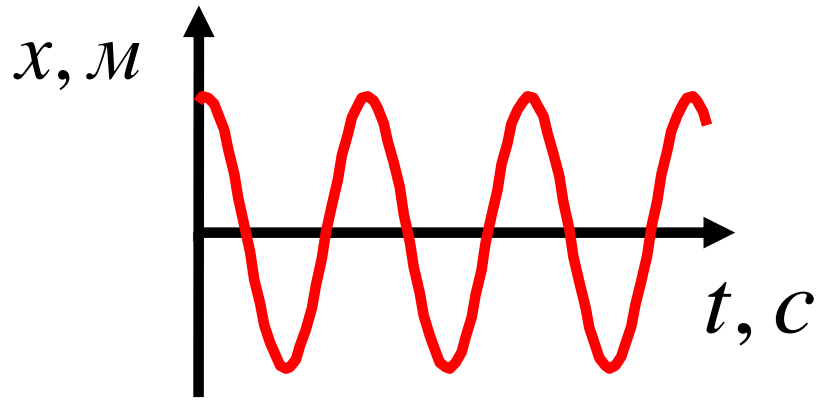
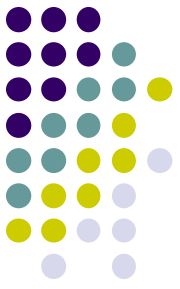


**Рівняння гармонічних коливань**

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

$$[x] = [A] = 1 \text{ м.}$$





**Час**, упродовж якого здійснюється одне повне коливання, називають **періодом коливань**:

$$T = \frac{t}{N}, \quad [T] = 1 \text{ с.}$$

**Частотою коливань** називають фізичну величину, що показує, яка кількість повних коливань виконує коливна система за одиницю часу:

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}, \quad [\nu] = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1} = 1 \text{ Гц.}$$

**Циклічна або колова частота** коливань визначає кількість повних коливань, які здійснюються за  $2\pi$  секунд:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Величина під знаком косинуса в рівнянні гармонічних коливань – **фаза коливань**:

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha.$$

**Вільними** називають коливання, які здійснюються без зовнішньої дії за рахунок раніше накопиченої енергії. Частоту коливань системи, яка виконує вільні коливання, називають **власною частотою**.

**Швидкість коливної точки**

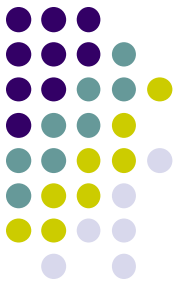
$$v = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

**Прискорення коливної точки**

$$a = \dot{v} = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad a = -\omega_0^2 x.$$

**Сила**, яка діє на коливну точку під час гармонічного коливання також змінюється за гармонічним законом:

$$F = ma = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x.$$



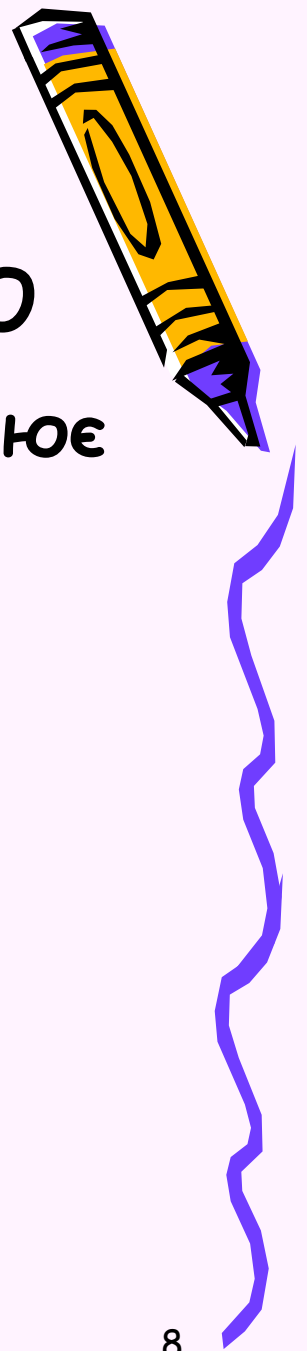
# Питання для самоконтролю

**1** Період гармонічних коливань дорівнює 0,5 с. Чому дорівнює частота:

- а) 0,5 Гц; б) 2Гц; в) 5Гц?

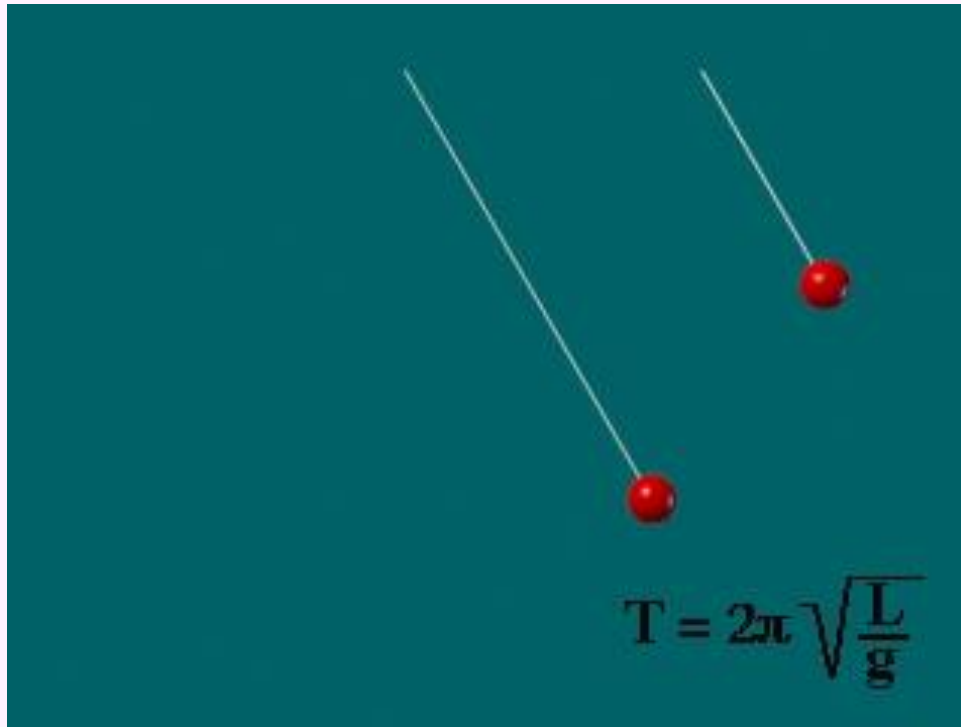
**2** Як залежить амплітуда від фази коливань:

- а) прямо пропорційно;
- б) обернено пропорційно;
- в) не залежить?



## § 4 МАТЕМАТИЧНИЙ МАЯТНИК

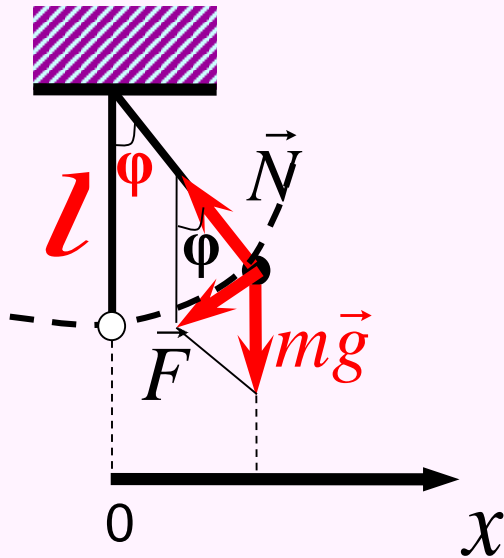
**Математичний маятник** – матеріальна точка, підвішена на невагомій нерозтяжній нитці.



**Період власних коливань математичного маятника**

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

# § 5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ



$$F = -mg \sin \alpha.$$

Згідно з II законом Ньютона

$$F = ma = m \ddot{x},$$

$$m \ddot{x} + mg \sin \alpha = 0,$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{l} \Rightarrow m \ddot{x} + mg \frac{x}{l} = 0,$$

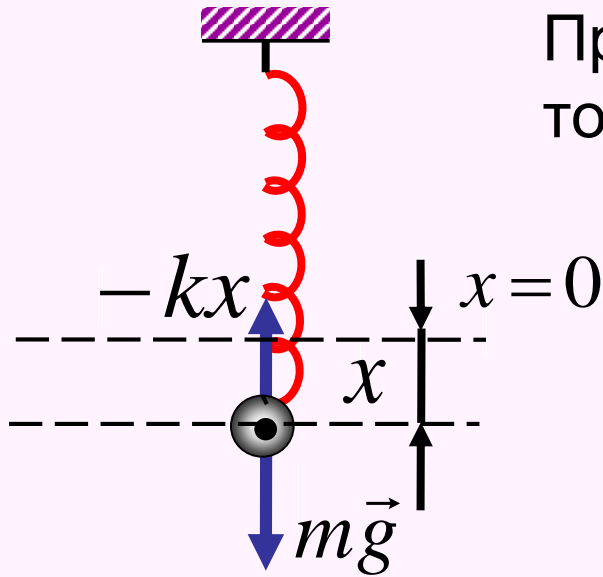
$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Диференціальне рівняння  
гармонічних коливань:

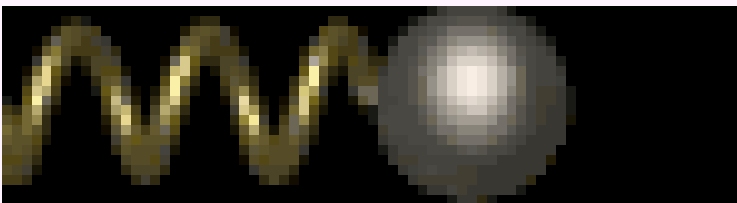
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

## § 6 ПРУЖИННИЙ МАЯТНИК

Пружинний маятник – матеріальна точка, підвішена на пружині.



Період власних коливань пружинного маятника



$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

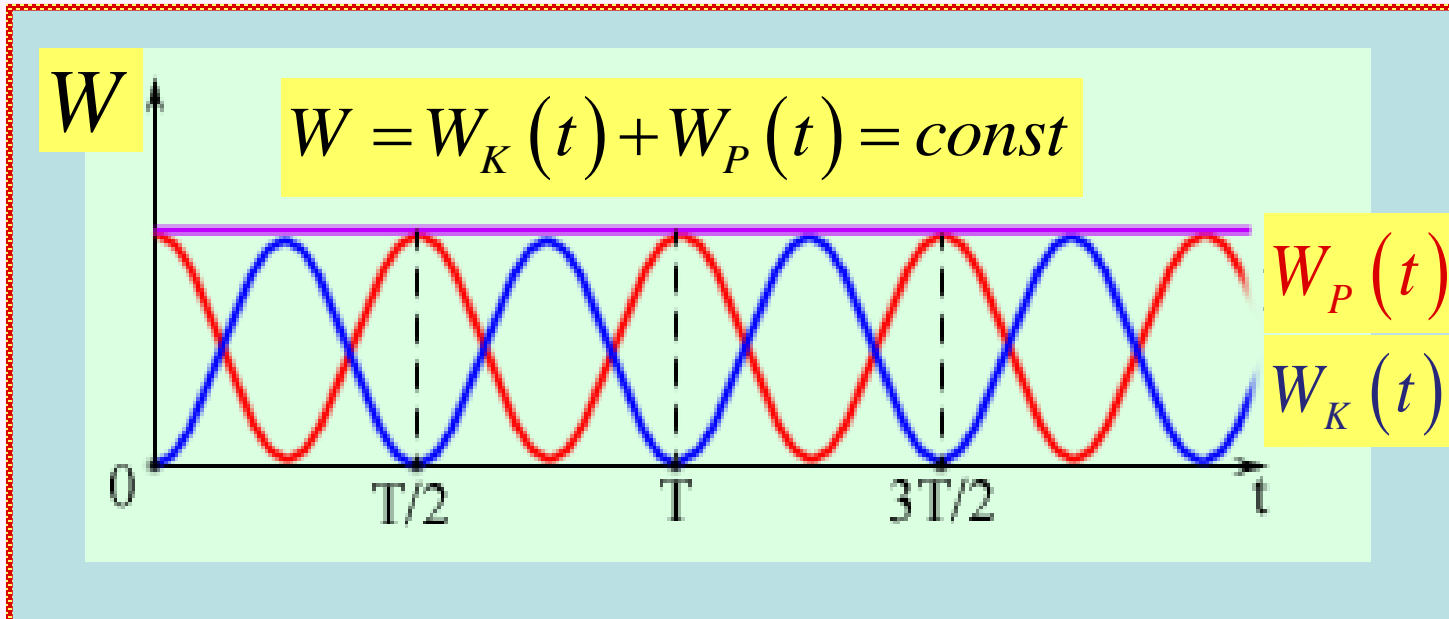
## § 7 ПОВНА ЕНЕРГІЯ ПРИ ВІЛЬНИХ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ

**Повна енергія при вільних гармонічних коливаннях залишається сталою**

$$W_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A \sin^2 (\omega_0 t + \alpha),$$

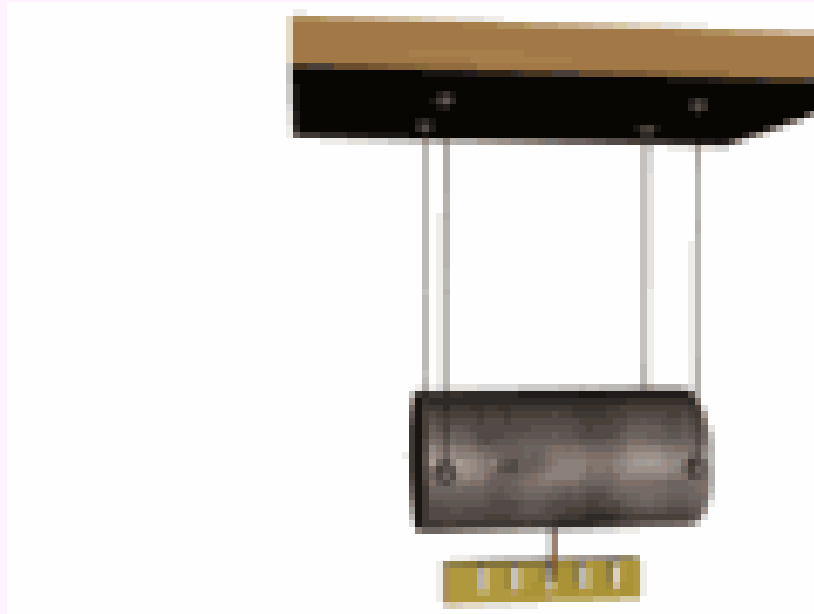
$$W_{II} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 (\omega_0 t + \alpha),$$

$$W = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = const.$$



## § 8 ФІЗИЧНИЙ МАЯТНИК

ФІЗИЧНИЙ МАЯТНИК – тверде тіло довільної форми, що виконує коливання під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі:



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$



# Питання для самоконтролю

Гармонічні коливання відбуваються за законом

$$x(t) = 0,002 \cos(\pi t), \text{ м.}$$

**3** Чому дорівнює максимальна швидкість коливної точки:

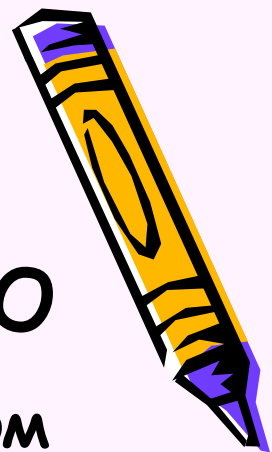
а)  $0,002\pi$  м/с; б)  $0,002$  м/с; в)  $\pi$  м/с?

**4** Чому дорівнює період коливань:

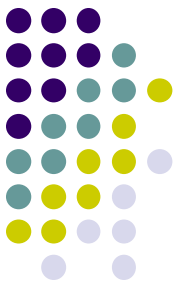
а)  $0,5$  с; б)  $2$  с; в)  $5$  с?

**5** Чому дорівнює частота коливань:

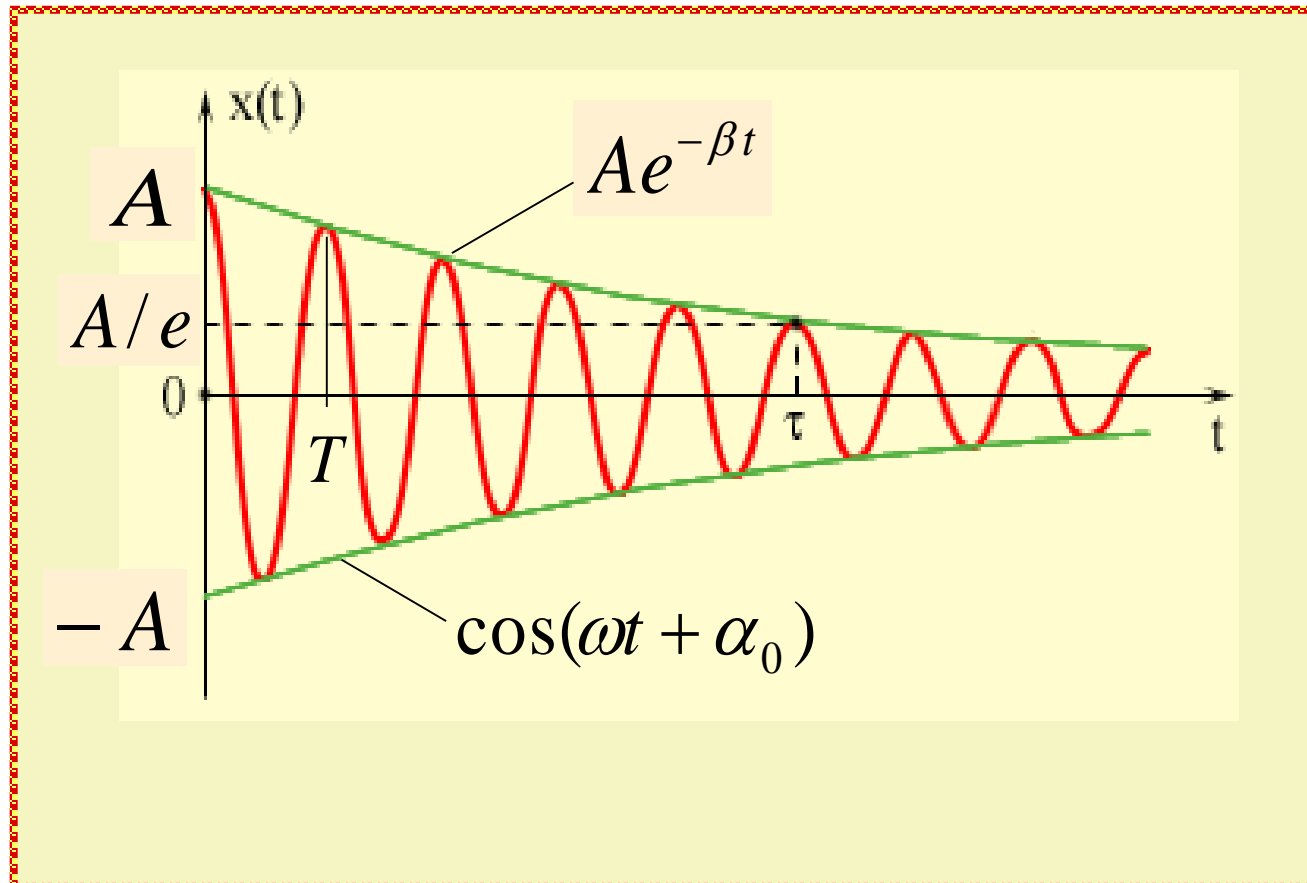
а)  $0,5$  Гц; б)  $2$  Гц; в)  $5$  Гц?



# § 9 ВПЛИВ ЗОВНІШНІХ СИЛ НА КОЛІВАЛЬНІ ПРОЦЕСИ



## • ЗГАСАЛЬНІ МЕХАНІЧНІ КОЛІВАННЯ



$$\vec{F}_{\text{тер}} = -r\vec{v}.$$

**Коефіцієнт згасання**  $\beta = \frac{r}{2m}.$

**Диференціальне рівняння вільних згасальних коливань**

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

**Рівняння вільних згасальних коливань**

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi_0).$$

**Циклічна частота згасальних коливань**

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

**Період згасальних коливань**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

**Логарифмічний декремент згасання**

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

**Коефіцієнт згасання:**

$$\beta\tau = 1, \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

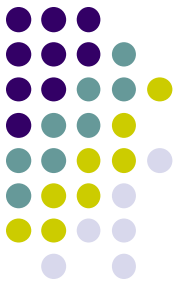
**Час релаксації**

$$\tau = NT.$$



У випадку **аперіодичного руху** енергія тіла під час повернення в положення рівноваги виявляється витраченою на подолання сил опору тертя.

# § 10 ВИМУШЕНІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ



Коливання, які здійснюються під дією зовнішньої періодичної сили, називають **вимушеними коливаннями**.

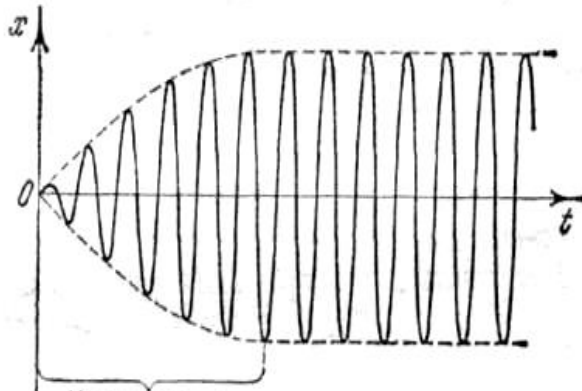
Другий закон Ньютона для вимушених коливань:

$$ma = -kx - rv + F.$$

**Диференціальне рівняння**

**вимушених коливань**

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t.$$



**Встановлення  
коливань**

$$f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Рівняння вимушених коливань

$$x = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}} \cos \left( \omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right).$$

## § 10.1 РЕЗОНАНС

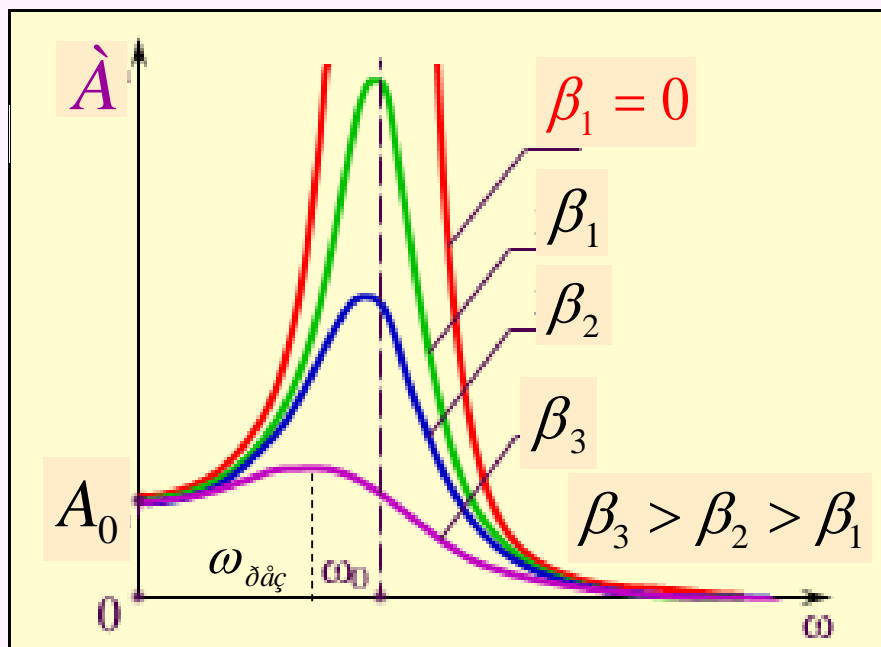
Резонанс – явище різкого зростання амплітуди, коли частота вимушених коливань наближається до частоти власних коливань системи.

**Амплітуда вимушених коливань**

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}}$$

**Резонансна частота**

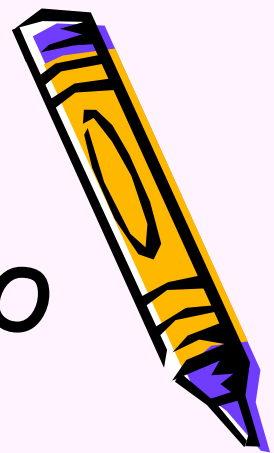
$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



*Резонансні криві*

Залежність амплітуди від частоти при вимушених коливаннях

# Питання для самоконтролю



**6** Час релаксації – це:

**а)** час, за який амплітуда коливань зменшується в  $e$  разів;

**б)** час, за який вони згасають;

**в)** час устанавлення коливань.

**7** Резонансна частота за власну частоту:

**а)** більша; **б)** менша; **в)** дорівнює.



# § 11 МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ

**Хвиля** – це поширення коливань у просторі.

Тіла, по яких поширюються хвилі, розглядають як **суцільне середовище**, яке безперервно розподілене у просторі. Відповідно **частинкою середовища**, яка виконує вимушені коливання, називають малий елемент об'єму, розмір якого в багато разів більший за міжмолекулярні відстані, так що в ньому міститься величезна кількість молекул.

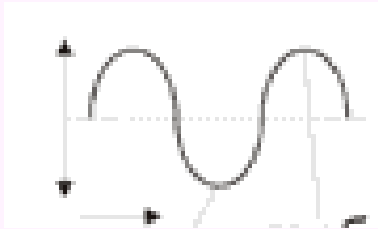
**Основною властивістю усіх хвиль**, незалежно від їх природи, є перенесення енергії без перенесення речовини.



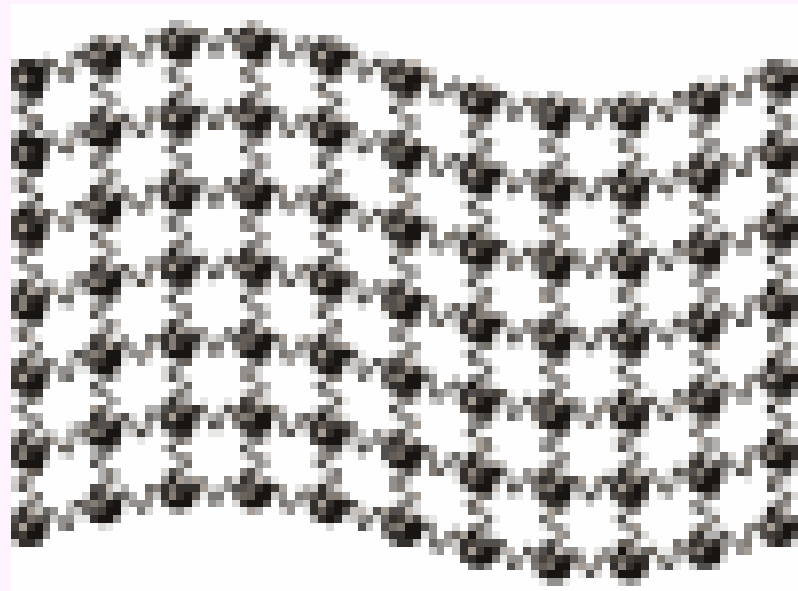
## §11.1 ПОПЕРЕЧНІ ХВИЛІ

Поперечною називають пружну хвилю, якщо частинки середовища виконують коливання в площинах, перпендикулярних до напрямку поширення хвиль.

*Поперечні  
хвилі*



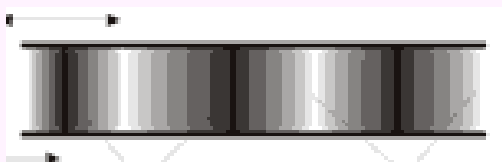
*Впадина – горб*



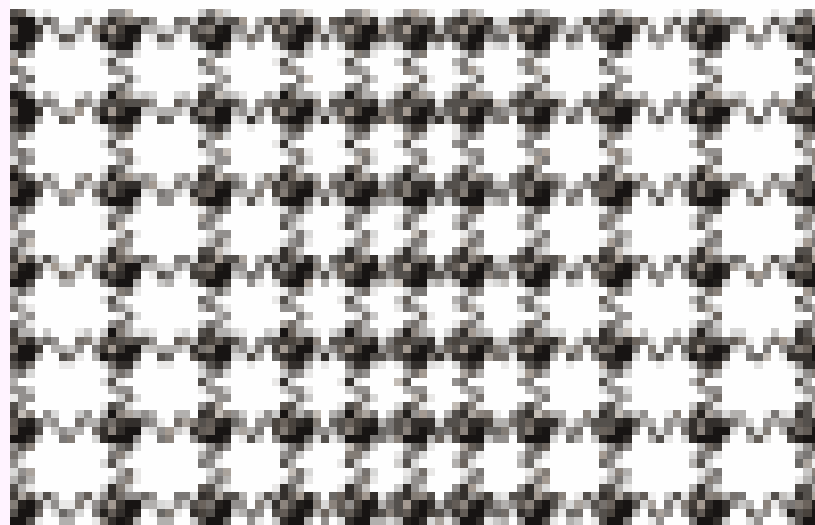
## § 11.2 ПОЗДОВЖНІ ХВИЛІ

Поздовжньою називають пружну хвилю, коли частинки середовища виконують коливання в напрямку поширення хвилі.

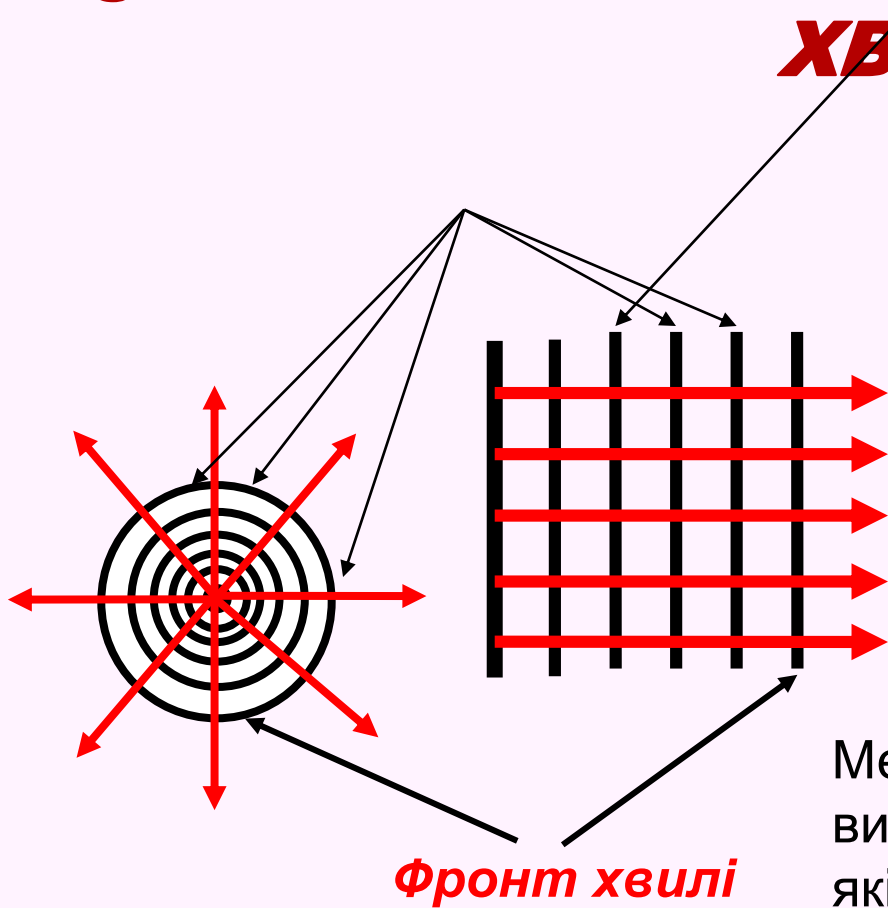
*Поздовжні  
хвилі*



*Згустки розрідження*



## § 11.3 ХВИЛЬОВІ ПОВЕРХНІ ТА ФРОНТ ХВИЛІ



Геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі, називають **ХВИЛЬОВОЮ поверхнею.**

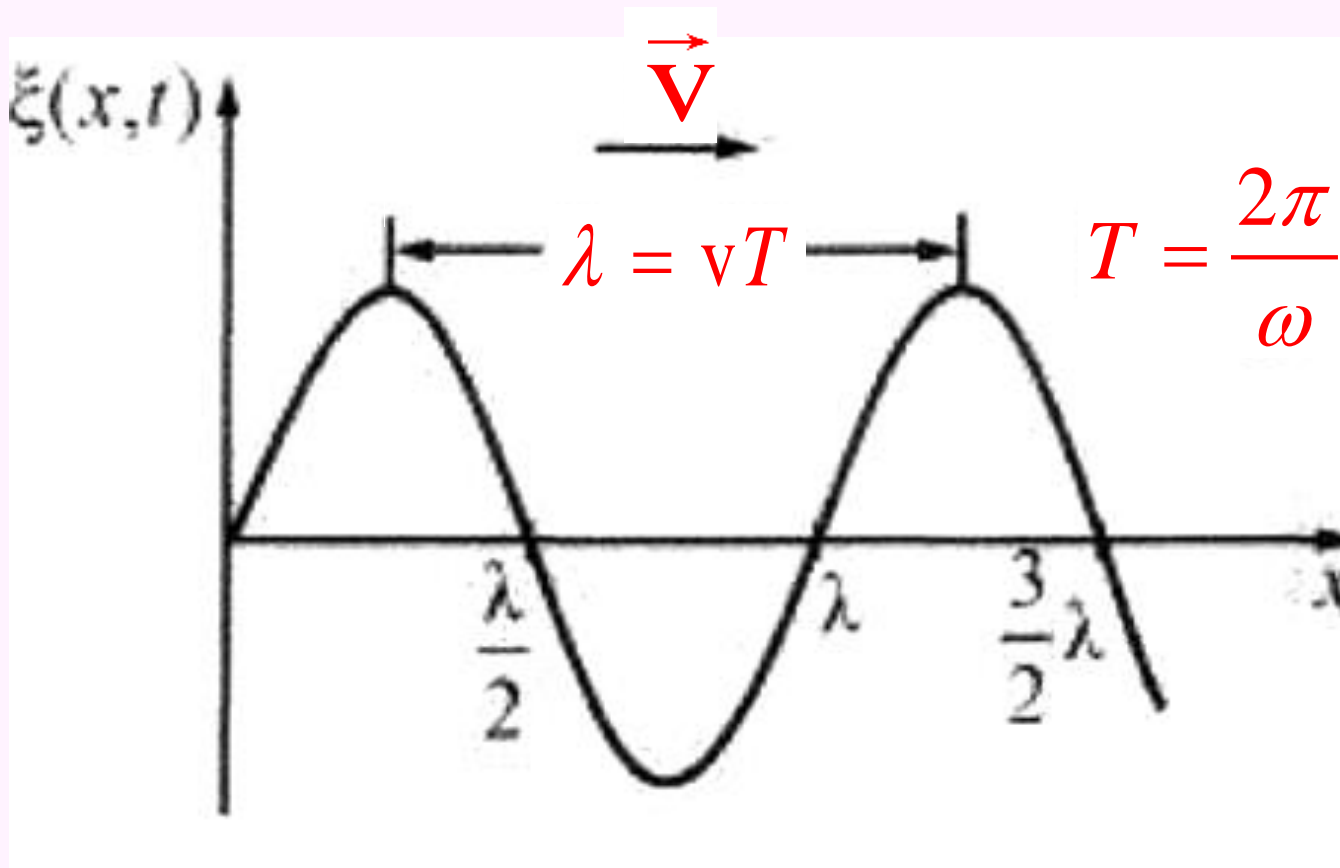
Хвильові поверхні не рухаються. Хвильовий фронт весь час переміщується.

Межа, яка відокремлює частинки, що виконують коливання від частинок, які ще не почали коливатися, називають **фронтом хвилі.**

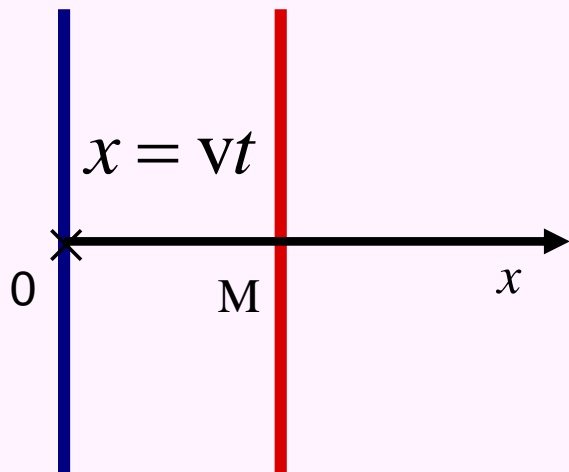
## § 11.4 ДОВЖИНА ХВИЛІ

$$\lambda = vT.$$

Швидкість поширення хвилі:  $v = \lambda\nu.$



## § 12 РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ



Рівнянням хвилі називають вираз, який дає зміщення коливної точки як функцію її координат і часу:

$$\xi = f(x, y, z, t),$$

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

**Хвильове число**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx).$$

# § 13 ЗВУКОВІ ХВИЛІ

**Звук як фізичне явище** – це поширення поздовжніх коливань у пружному середовищі.

**Звук як фізіологічне явище** – це специфічне відчуття, викликане дією звукових хвиль на орган слуху.

**Звукові хвилі – це поздовжні хвилі.**

**Швидкість** поширення звукової хвилі в пружному **твердому тілі** залежить від фізичних властивостей цього тіла (від його пружності та густини):

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

**Швидкість** поширення звуку в **газі** залежить від його температури і фізичних властивостей:

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

Людське вухо сприймає частоти від 16 Гц до 20 000 Гц. Звукові коливання з частотою  $< 20$  Гц називають **інфразвуком**, а з частотою  $> 20\ 000$  Гц – **ультразвуком**. Найбільш високочастотні пружні хвилі у діапазоні  $10^9 - 10^{13}$  Гц називають **гіперзвуком**.

**Акустика** – це наука, яка вивчає звукові явища.

Звук як фізичне явище характеризується певною частотою, інтенсивністю та набором частот. Це **об'єктивні характеристики звуку**. Людське вухо сприймає звук за гучністю, висотою і тембром. Це – **суб'єктивні характеристики звуку**.

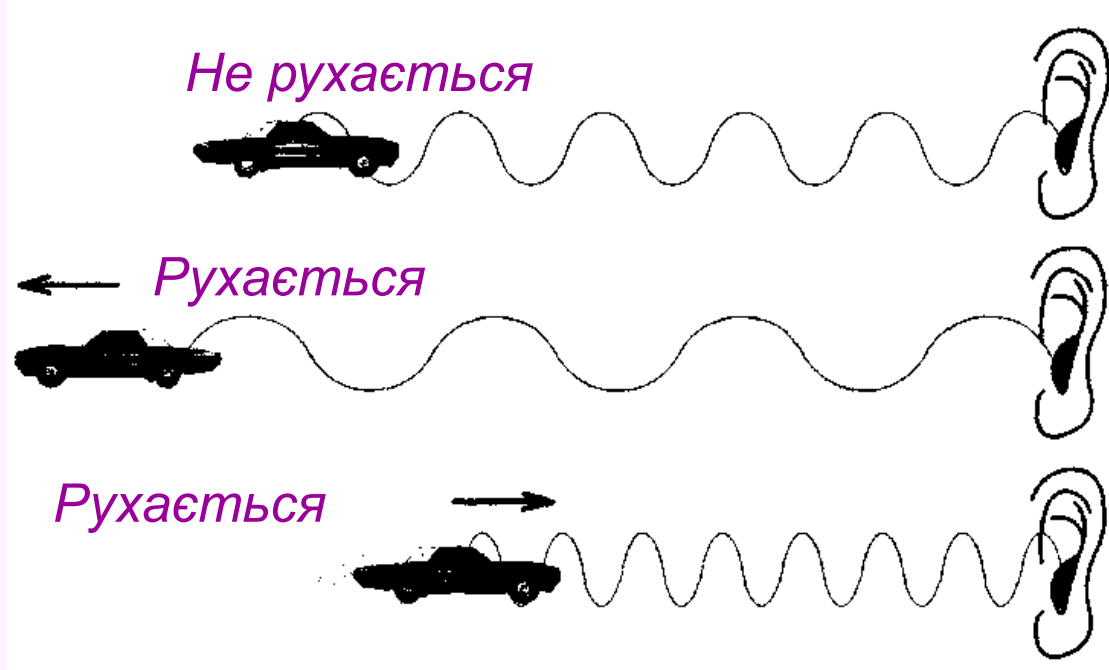
**Гучність звуку** – це фізіологічна інтенсивність звуку. Поняття інтенсивності й гучності звуку не рівнозначні. Установлено, що гучність зростає значно повільніше, ніж інтенсивність звуку.

**Висота звуку визначається його частотою**. Чим більша частота, тим більша висота звуку. Тембр звуку визначається його спектральним складом.

**Музикальний тон** – це звук, який ми чуємо тоді, коли його джерело здійснює гармонічні коливання.

# § 14 ЕФЕКТ ДОППЛЕРА В АКУСТИЦІ

**Ефектом Допплера** в акустиці називають зміну частоти звукових коливань, які реєструються приймачем коливань, порівнянні з частотою, яку випромінює джерело звуку, внаслідок відносного руху джерела звуку і приймача.



$$v_{\text{Д}} = v_{\text{П}}$$

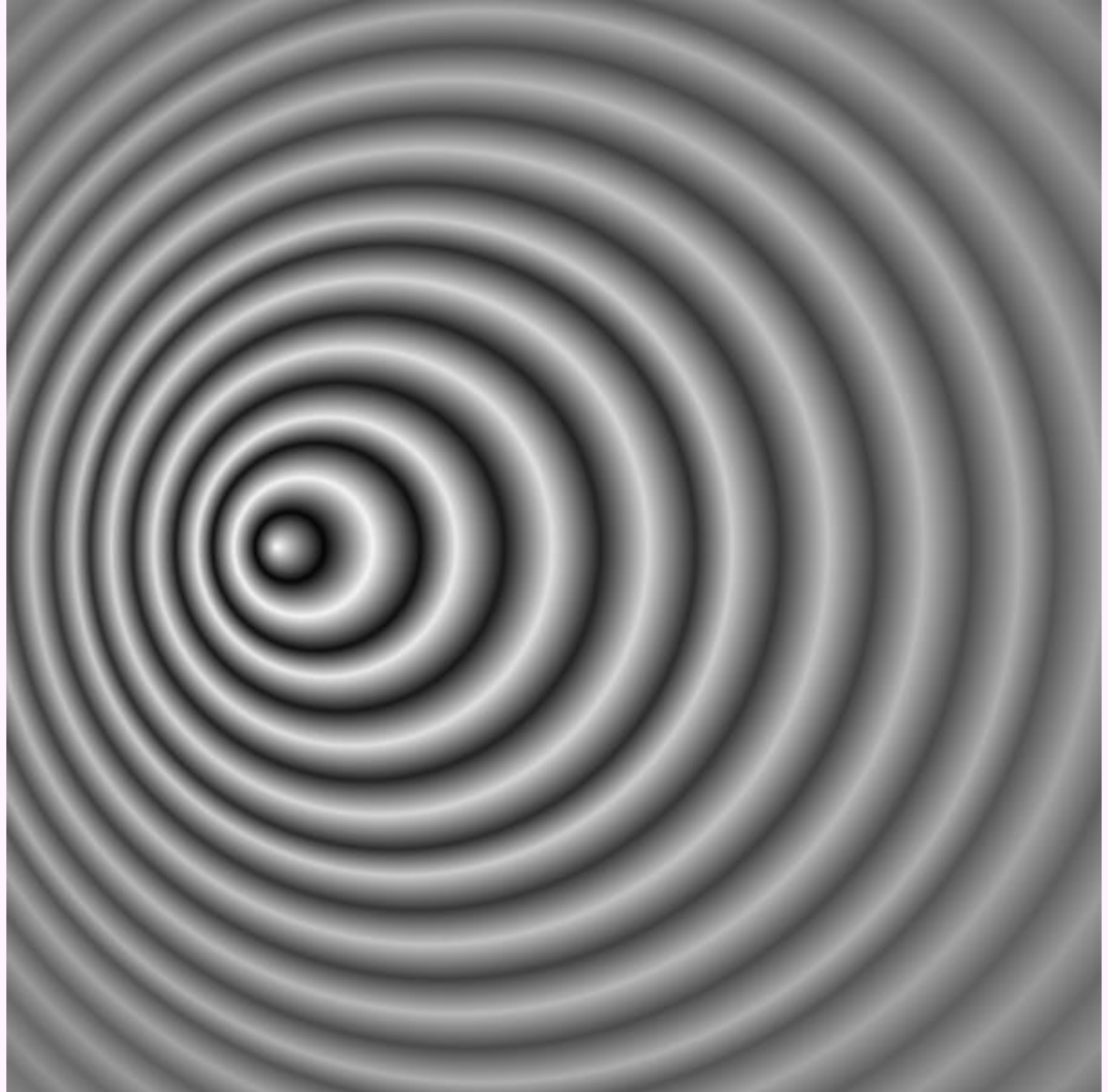
$$v'_{\text{П}} = v_0 \left( 1 - \frac{v_{\text{П}}}{v_{\text{ЗВ}}} \right)$$

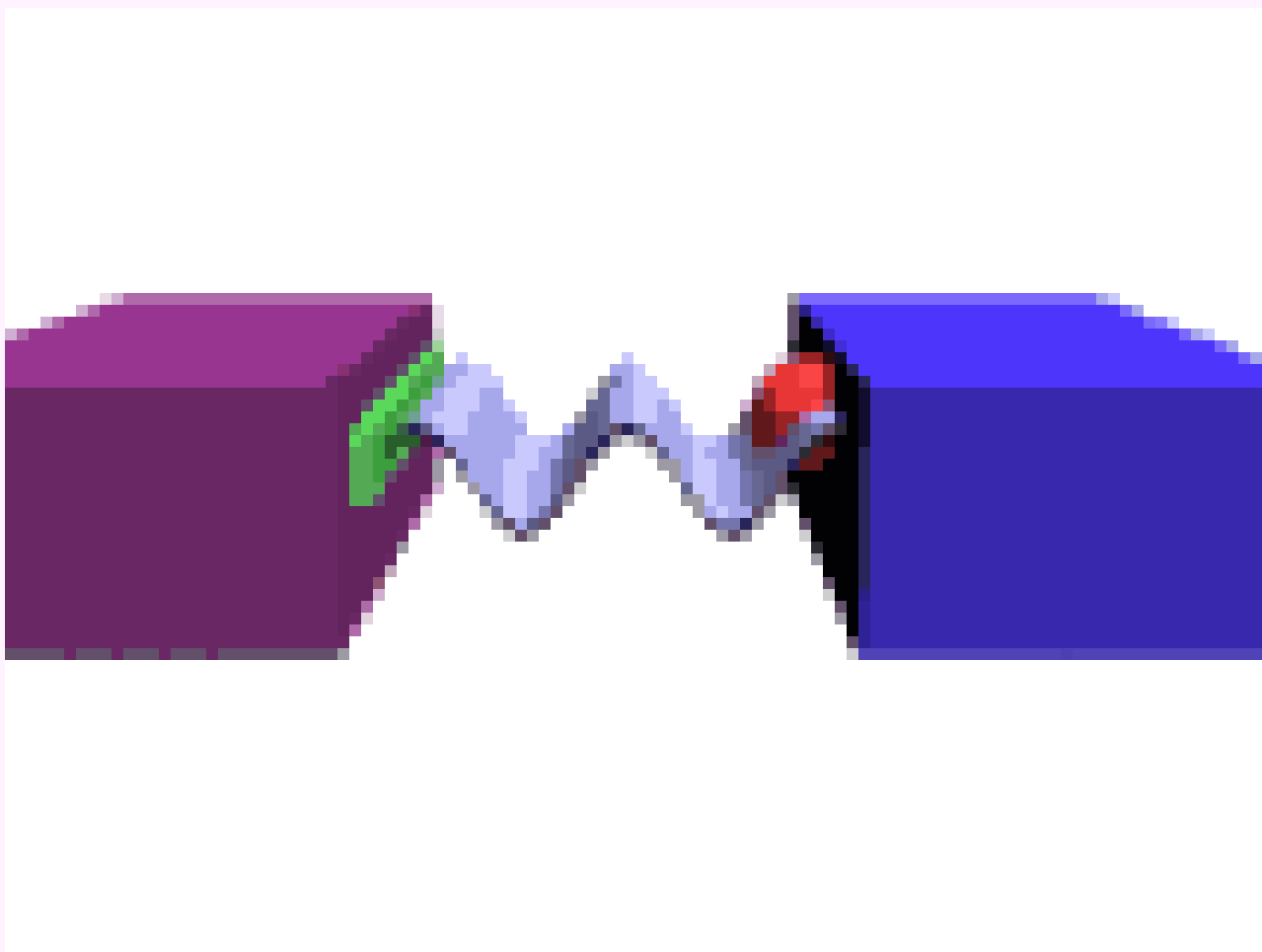
$$v'_{\text{П}} = v_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{П}}}{v_{\text{ЗВ}}} \right)$$



Джерело хвиль  
переміщується  
вліво. Тоді ліворуч  
частота хвиль  
збільшується, а  
праворуч —  
зменшується.

Тобто, якщо  
джерело хвиль  
доганяє хвилі, які  
воно випромінює, то  
довжина хвилі  
зменшується. Якщо  
віддаляється —  
довжина хвилі  
збільшується.





## Анімація ефекту Допплера



**Крістіан Допплер**  
(1803 – 1853)

Австрійський учений. Наукові інтереси Крістіана Допплера поширювалися на такі сфери фізики, як оптика та акустика. Основні праці виконані з аберації світла, теорії мікроскопа та оптичного дальноміра, теорії кольорів тощо. У 1842 р. Допплер теоретично обґрунтував залежність частоти коливань, що сприймаються спостерігачем, від швидкості та напрямку руху джерела хвиль і спостерігача один щодо одного. Це явище було названо його іменем – ефект Допплера.

У 1848 році формула ефекту Допплера була уточнена французьким фізиком Арманом Фізо, а в 1990 році – і експериментально перевірена Білопольським на лабораторній установці. Принцип Допплера одержав численні застосування в астрономії для вимірювань швидкостей руху зірок уздовж променя зору та їх обертань навколо осі, турбулентних потоків у сонячній фотосфері та ін., а потім і в найрізноманітніших сферах фізики й техніки (аж до радарів, використовуваних ДАІ).

# Питання для самоконтролю

- 8 Фронт хвилі та хвильові поверхні за формою:  
а) відрізняються; б) однакові; в) перпендикулярні.
- 9 Звукові хвилі є:  
а) механічними; б) електромагнітними;  
в) радіохвилями.
- 10 Коливання з частотою 2 000 Гц це:  
а) звук; б) інфразвук; в) ультразвук.

