

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту
Завідувач кафедри ПМ та МСС

_____ Коплик І.В.
(підпис)

« ____ » _____ 20 __ р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «магістр»

спеціальність 113 «Прикладна математика»

освітньо-професійна програма «Прикладна математика»

тема роботи «**СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ**

ТРАНСПОРТНОЇ МЕРЕЖІ»

Виконавець

студент факультету ЕлІТ

Шикура Олексій Юрійович _____
(підпис)

Науковий керівник

д.ф.-м.н, професор

Хоменко Олексій Віталійович _____
(підпис)

СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

| | |
|---------------------|---|
| Факультет | електроніки та інформаційних технологій |
| Кафедра | прикладної математики та моделювання складних систем |
| Рівень вищої освіти | <u>другий (магістр)</u> |
| Галузь знань | 11 Математика та статистика |
| Спеціальність | 113 Прикладна математика |
| Освітня програма | освітньо-професійна «Прикладна математика» |

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ПМтаМСС
Коплик І.В. _____
«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ НА ДИПЛОМНИЙ ПРОЕКТ (РОБОТУ) СТУДЕНТОВІ

Шикурі Олексію Юрійовичу

1. Тема роботи Стохастична модель транспортної мережі

Керівник роботи Хоменко О.В., професор, д.ф.-м.н, професор

затверджую наказом по факультету ЕлІТ від «12» жовтня 2020 р. № 1548-III

2. Термін подання роботи студентом «16» грудня 2020 р.

3. Вхідні данні до роботи 1) Модель транспортного руху на основі системи Лоренца;
2) Методи теорії стійкості та фазової площини.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, що їх належить розробити) Дослідження стійкості точок рівноваги, оцінка факторів впливу на їх кількість, аналіз системи на наявність біфуркації. Дослідження властивостей розв'язку системи.

5. Перелік графічного матеріалу

1) Фазовий портрет на площині для системи Лоренца.

2) Фазовий портрет на площині для системи Лоренца.

3) Фазовий портрет на площині для системи Лоренца.

4) Фазовий портрет в об'ємному форматі для системи Лоренца.

5) Фазовий портрет в об'ємному форматі для системи Лоренца.

6) Фазовий портрет в об'ємному форматі для системи Лоренца

7) Фазовий портрет в об'ємному форматі для системи Лоренца.

6. Консультанти до проекту (роботи), із значенням розділів проекту, що стосується їх

| Розділ | Прізвище, ініціали та посада консультанта | Підпис, дата | |
|--------|---|----------------|------------------|
| | | Завдання видав | Завдання прийняв |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

7. Дата видачі завдання «02» листопада 2020 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № п/п | Назва етапів кваліфікаційної роботи | Термін виконання роботи | Примітка |
|-------|--|-------------------------|----------|
| 1) | Ознайомлення з поставленою задачею | 02.11.2020-07.11.2020 | |
| 2) | Пошук і аналіз літератури | 08.11.2020-11.11.2020 | |
| 3) | Проведення розрахунків | 11.11.2020-18.11.2020 | |
| 4) | Побудова залежностей та опис отриманих результатів розрахунків | 18.11.2020-30.11.2020 | |

| | | | |
|----|--|----------------------|--|
| 5) | Оформлення роботи у відповідності з прийнятими стандартами | 1.12.2020-20.12.2020 | |
|----|--|----------------------|--|

Здобувач вищої освіти

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Керівник роботи

(підпис)

(прізвище та ініціали)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота: 28 с., 7 рисунків, 1 таблиця, 23 джерела.

Мета роботи: дослідження стійкості точок рівноваги, оцінка факторів впливу на їх кількість, аналіз системи на наявність біфуркації. Дослідження властивостей розв'язку системи.

Об'єкт дослідження: впорядкований рух транспортних засобів по однолінійному шосе.

Предмет дослідження: модель транспортного руху на основі системи Лоренца без коливань прискорення.

Методи дослідження: рівняння математичної фізики та вищої математики, диференціальні рівняння, метод фазової площини.

Для дослідження стійкості точок рівноваги системи побудовано Якобіани для кожної точки та знайдено відповідні характеристичні рівняння. Оцінено знак власних значень з характеристичних рівнянь та критерію Рауса-Гурвіца, використана функція Ляпунова. Для оцінки картини розбиття фазового простору в залежності від зміни параметра застосована теорія біфуркацій.

Для аналізу розв'язку системи проведено дослідження функції на симетрію та обмеженість, побудована геометрична інтерпретація.

Ключові слова: СИСТЕМА ЛОРЕНЦА, НЕЛІНІЙНИЙ ПІДХІД, ТОЧКА РІВНОВАГИ, ЯКОБІАН, ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ, ТЕОРІЯ БІФУРКАЦІЇ, ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ, ЕЛІПСОЇД.

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| ВСТУП | 7 |
| 1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД | 8 |
| 1.1 Передмова | 8 |
| 1.2 Системний підхід до аналізу транспортного потоку | 8 |
| 1.3 Поняття математичної моделі та її види | 9 |
| 1.4 Поняття фізичної моделі | 10 |
| 1.5 Поняття теоретичної моделі | 10 |
| 1.6 Теорія біфуркації для моделі Лоренца | 11 |
| 2. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖУВАНОЇ СИСТЕМИ | 15 |
| 2.1 Математична модель та основні рівняння | 15 |
| 2.2 Стійкість точок рівноваги та біфуркація | 16 |
| 2.3 Властивості розв'язку системи | 18 |
| 2.3.1 Симетричний | 18 |
| 2.3.2 Розв'язок обмеженості | 19 |
| ВИСНОВКИ | 24 |
| ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ | 25 |
| ДОДАТОК | 27 |

ВСТУП

Затори на дорогах є загальною проблемою майже у всіх регіонах світу. Затори виникають, якщо об'єм потоку транспортного засобу перевищує потужність найбільшої допустимої на шляху [1]. Затори не лише гальмують активність мобільності суспільства, а й порушують питання ефективності мобільності часу. Проблему перевантажень можна змодельовати у математичне рівняння, потім розв'язати та змодельовати за допомогою реальних даних. Змінні, що використовуються в моделі заторів, - це швидкість транспортного засобу, час прискорення/гальмування автомобіля та зміна відстані між транспортними засобами.

Дослідження математичної моделі дорожніх заторів проводили деякі експерти в галузі математики, наприклад, математичне моделювання в кінетичних заторах, аналіз фазового/часового переходу заторів шляхом визначення факторів складного перевантаження транспортної мережі. Термодинамічна теорія, що використовується для опису фазового переходу в транспортному потоці заторів [2], або підхід стохастичної теорії для опису транспортного потоку [3]. Математична модель перехідного часу транспортної завантаженості у вигляді експрес-системи Лоренца та інше.

Сама система Лоренца спочатку була математичною моделлю, що описує стан атмосфери Землі, тобто виникнення змін тепла і холоду в атмосфері Землі. Система Лоренца має унікальні властивості, які відрізняються від інших математичних моделей, тобто динамічну поведінку та чутливість до початкового значення. Виявлено, що властивості системи Лоренца все ще діють для модифікованих систем Лоренца.

У даній роботі розглядається математична модель транспортного потоку, а також особливості, що виникають із розв'язку системи, виходячи зі стійкості точок рівноваги та графічних зображень.

1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД

1.1 Передмова

Ефективність перевезень і безпека руху в значній мірі визначаються характером взаємодій в транспортному потоці. Однак ці взаємодії досліджені недостатньо, що обмежує можливості керування транспортними потоками та запобігання дорожньо-транспортних пригод. Практичне розв'язання цієї проблеми неможливо без попереднього з'ясування характерних особливостей реального транспортного потоку. Основним методом вивчення транспортних потоків є емпіричний метод дослідження. В даний час при вирішенні завдань управління автомобільними перевезеннями та проектуванні доріг інженер з організації руху виходить в основному з емпіричних даних, отриманих шляхом спостереження, вимірювання і статистичного аналізу.

1.2 Системний підхід до аналізу транспортного потоку

Система – по-грецьки – ціле, складене з частин з'єднання, це сукупність взаємопов'язаних об'єктів, процесів, об'єднаних єдиною метою і спільним алгоритмом функціонування.

Система – це набір об'єктів, що включає взаємозв'язки між об'єктами та їх ознаками.

В рамках системи ВАДС [4] (водій, автомобіль, дорога, середовище) під *об'єктами* можна розуміти елементи руху: автомобіль, водій, дорога. *Ознаки* – це властивості зазначених об'єктів або елементів. До ознак належать: зір водія та його час реакції, швидкість автомобіля, її прийомистість та інтервал між автомобілями, ширина вулиці та засоби регулювання руху і т.д.

Єдина мета зазначеного об'єднання у вигляді системи ВАДС полягає в мотивації водія, що забезпечує безпеку руху, економію часу та відстані. Взаємозв'язки відображають взаємодію транспортних засобів один з одним і з навколишнім середовищем, під якою розуміють дорогу, вулицю або дорожньо-транспортну мережу в цілому.

Визначення *цілей дорожньої системи* - це одне з найбільш складних завдань, що стоять перед фахівцем з планування автомобільних перевезень, проектувальником геометричних елементів дороги та інженером з організації руху. В рамках *системного підходу* для проведення синтезу та аналізу необхідно побудувати модель, яка пов'язувала б топологічні властивості системи з її входами та виходами.

Аналіз - це поділ системи на компоненти для розгляду їх наслідків з точки зору цілей.

Синтез передбачає з'єднання частин в ціле; зазвичай його здійснюють шляхом екстраполяції або інтерполяції існуючих методів і результатів для досягнення певних цілей, які в свою чергу аналізують.

Система «Транспортний потік - дорожні умови»:

- транспортний потік – сукупність автомобілів, що рухаються по дорозі;
- дорожні умови – сукупність геометричних характеристик дороги.

Таким чином, система «Транспортний потік - дорожні умови» являє собою сукупність автомобілів, що рухаються на певній геометричній ділянці дороги.

Система «Транспортний потік умови руху»:

- умови руху – сукупність дорожніх умов і всіх інших зовнішніх умов, що впливають на рух автомобілів.

Таким чином, система «Транспортний потік - умови руху» являє собою сукупність автомобілів, що рухаються на певній геометричній ділянці дороги під впливом всіх інших зовнішніх умов.

1.3 Поняття математичної моделі та її види

Одна з найбільш важких проблем, що стоять перед дослідником організації руху – це перетворення реальної дорожньо-транспортної обстановки, що включає водіїв, автомобілі, пристрої регулювання руху та дорогу, в набір математичних символів і залежностей, що відтворюють їх поведінку. Саме модель є основою, яка дозволяє розглядати подібні взаємодії в цілому.

Будь-яка модель є ідеалізованим відображенням дійсності. Будувати її слід таким чином, щоб реальні процеси відтворювалися з прийнятною точністю; при цьому необхідно пам'ятати, що ніяка абстракція не може точно збігатися з дійсністю. Спробу встановити відповідність між завданням і раціональним мисленням можна реалізувати у вигляді фізичної або теоретичної моделі.

1.4 Поняття фізичної моделі

Фізична модель може бути скалярною або аналоговою, наприклад аеродинамічна труба для випробування літаків та пісочний годинник для вимірювання часу. Динамічна аналогія Кірхгофа [5] показує, що критичне навантаження, що діє по осі колони, можна визначити шляхом вивчення коливань маятника, підвішеного на нитці тієї ж довжини. Розраховані на чисельні методи аналогові моделі можуть бути ще більш точними. Логарифмічна лінійка та номограф – це цифрові аналоги; автомобільний спідометр видає значення площі, обмеженої кривою «швидкість як функція часу»; з цієї точки зору він являє собою інтегруючий пристрій.

1.5 Поняття теоретичної моделі

Будь-яка теоретична модель – це по суті гіпотеза. Наприклад, відкриті Ньютоном три закони руху являють собою теоретичну модель нашого світу. З очевидних причин більшість теоретичних моделей математизовано. Якщо сама гіпотеза і ситуація, яку вона описує, не є достатньо простими, то єдиний практично доцільний шлях вивчення численних проявів якоїсь складної системи пов'язаний із залученням математики.

Мета математичного опису дорожньо-транспортної ситуації полягає у виявленні істотних моментів і складанні набору співвідношень між ними, які володіють достатньою простотою, але дозволяють отримувати важливі результати. В організації руху багато завдань можна звести до знаходження максимуму або мінімуму деякої функції. Так, розрахунок числа смуг залежить від знаходження максимальної інтенсивності (пропускної спроможності), в той час як при розрахунку циклу світлофора можна виходити з критерію мінімальної затримки.

Інженер лише в невеликому ступені може впливати на змінні, що характеризують рух. Правда, він може збільшити число смуг, щоб зменшити інтенсивність руху по кожній смузі, може ввести обмеження швидкості, щоб перешкодити руху з великими швидкостями, і може встановити світлофори для того, щоб регулювати рух. Однак залишаються змінні, що не залежать від його волі.

1.6 Теорія біфуркації для моделі Лоренца

У роботі Кисельова А. Д. про «Порушення симетрії і біфуркації в комплексній моделі Лоренца» [6] розглядається приклад застосування теорії біфуркації для моделі Лоренца.

Добре відомі рівняння Лоренца: $\dot{X} = \sigma(-X + Y)$, $\dot{Y} = r(X - Y + XZ)$, $\dot{Z} = -bZ - XY$ спочатку були отримані в [7] і інтенсивно вивчалися протягом останніх двох десятиліть (див., наприклад, [8-12]). Вищезазначена система (яка буде називатися дійсною моделлю Лоренца для $X(t)$, $Y(t)$ та $Z(t)$, які є дійсними функціями) була отримана із набору гідродинамічних рівнянь у трирежимному наближенні для опису конвективного руху шару рідини, який тепліший знизу, ніж зверху. Отже, це число Прандтля; r (керувальний параметр) - число Релея пропорційне різниці температур; b залежить від геометричних властивостей шару рідини.

Однією з найбільш яскравих особливостей реальної моделі Лоренца є поява так званого дивного аттрактора Лоренца при керувальному параметрі r , що перевищує критичне значення $r_c = \frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1} \sigma$ (σ повинно бути більше $b + 1$). Термін "дивний аттрактор" (або "хаотичний аттрактор") зазвичай використовується для набору притягань, який має досить складну структуру, і кожна траєкторія руху в аттракторі експоненціально нестабільна. Існує ряд різних величин для вимірювання складності (стохастичності) структури аттрактора: ємність (фрактальна розмірність), інформаційна розмірність, розмірності Хаусдорфа та Ляпунова (формула Каплана-Йорка), K -ентропія.

Очевидно, розуміння причин виникнення хаотичної поведінки в дисипативних нелінійних динамічних системах, таких як дійсна модель Лоренца, вимагає вивчення біфуркацій, які спричиняють якісні зміни фазового портрету системи. Оскільки в даній роботі в першу чергу розглядається комплексна модель Лоренца, яку можна розглядати як узагальнення дійсної системи Лоренца, і мета полягає в дослідженні стійкості деяких роздвоєних розв'язків системи на основі аналізу біфуркації, являє інтерес обговорити деякі релевантні результати для дійсної системи Лоренца.

Почнемо зі стабільності та роздвоєнь рівноваг (стійких станів). Нульовий стаціонарний стан задається $X = Y = Z = 0$ і є асимптотично стійким при $r < 1$. Розв'язок втрачає свою стійкість при $r = 1$, а також є два асимптотично стійкі біфуркаційні стаціонарні стани $X = Y = \pm\sqrt{b(r-1)}$; $Z = r - 1$ за умови, що $1 < r < r_c$. Отже, ми маємо дві стаціонарні точки, роздвоєні від нульового стану при $r=1$, які відповідають ініціюванню конвективного потоку. Зауважимо, що лінеаризований оператор, що керує стійкістю розглянутих розв'язків (перша теорема Ляпунова), має пару комплексних спряжених власних значень з від'ємними дійсними частинами в околиці r_c . Ці власні значення стають чисто уявними при $r = r_c$, так що стаціонарні стани нестабільні при $r > r_c$. Звідси випливає, що теорію біфуркації Хопфа [10] можна застосувати, щоб показати існування періодичного розв'язку біфуркаційного періоду. Стійкість цього розгалуженого розв'язку визначається показниками Флоке: розв'язок стійкий (нестійкий), якщо він з'являється надкритично (докритично). У розглянутому випадку біфуркація виявляється субкритичною [13]. Цей результат підтверджує думку про "різкі" умови виникнення хаосу в реальній моделі Лоренца.

Детальний опис того, як дивний аттрактор Лоренца утворюється, виходить за рамки цієї статті [6]. Коротше кажучи, це можна сприймати як появу гомоклінічної орбіти в системі: коли r проходить через величину, при якій відбувається гомоклінічний "вибух", створюється дивний інваріантний набір траєкторій, включаючи кінцеве число періодичної орбіти [8, 11, 12]. Зауважимо, крім того, як

відомо, дійсна модель Лоренца демонструє подвоєння періоду [14], переривчастість [15] та гістерезис [16] у різних діапазонах простору параметрів.

Існує кілька фізичних проблем, що приводять до ускладнення рівнянь Лоренца [17], де деякі функції мають комплексне значення. Як приклад, ми матимемо на увазі найпростіші одномодові лазерні рівняння, отримані в напівкласичному наближенні [18]:

$$\begin{cases} \dot{b} = -(\kappa + i\omega) \cdot b - ig \cdot \alpha \\ \dot{\alpha} = -(\Upsilon + i\omega_\alpha)\alpha + ig \cdot b \cdot S, \\ \dot{S} = \frac{d_0 - S}{T} - 4g \cdot \zeta(\alpha \cdot \bar{b}) \end{cases}, \quad (1.1)$$

де b - безрозмірна комплексна амплітуда режиму електромагнітного поля; $\omega(k)$ - частота (константа релаксації) моди; α - безрозмірний матричний елемент дипольного переходу; S - інверсія сукупності атомного рівня; ω_α - частота атомного переходу; d_0 - параметр, що характеризує інтенсивність накачування; g постійна зв'язку; $\Upsilon(T^{-1})$ - поперечна (поздовжня) константа релаксації.

Після заміни:

$$t \rightarrow \Upsilon t, \quad b = \Upsilon z_1 / 2g, \quad \alpha = iS_0 z_2 / 2, \quad S = d_0 + S_0 z_3, \quad S_0 = \Upsilon \kappa / g^2,$$

і переходячи до уявлення про взаємодію, систему (1.1) можна переписати як комплексну модель Лоренца [18]:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \sigma(-1(1 + i\Delta) \cdot z_1 + z_2) \\ \dot{z}_2 = -(1 - i\Delta + i\rho) \cdot z_2 + (r + i\rho) \cdot z_1 + z_1 z_2, \\ \dot{z}_3 = -bz_3 - \phi(z_1 \cdot \bar{z}_2) \end{cases}, \quad (1.2)$$

де $\sigma = \kappa/\Upsilon$, $r = d_0/S_0$, $b = \Upsilon(T^{-1})$, $\rho = 0$, $\Delta = (\omega_\alpha - \omega)/(\kappa + \Upsilon)$ - частотне розстроювання. Тут параметр ρ вводиться, щоб зробити систему ідентичною з розглянутими в [17]. Зауважимо, що $z_1(t)$ і $z_2(t)$ є комплекснозначущими функціями, так що система (1.2) складається з величини дійсних рівнянь.

У цій роботі задача націлена на вивчення того, як Δ впливає на біфуркацію рівноваги та подвійноперіодичні розв'язки в комплексній моделі Лоренца.

Оскільки, на відміну від дійсної моделі Лоренца, система (1.2) має безперервну групу симетрії (група обертань Лі в комплексних площинах), ми

підходимо до проблеми розбудови індукованих ефектів в рамках єдиної концепції порушення симетрії.

Показано, що завдяки симетрії стан нульової рівноваги комплексної моделі Лоренца (спонтанне випромінювання) роздвоюється на інваріантний набір нерухомих точок. Стійкість рівноважних станів вивчається як функція розстроювання. Встановлено, що при $\sigma > b + 1$ існує критичне значення керуючого параметра r (інтенсивність накачування), r_c , таке, що стани інваріантної множини стають експоненціально нестійкими при $r > r_c$, а r_c є зростаючою функцією Δ^2 .

2. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖУВАНОЇ СИСТЕМИ

2.1 Математична модель та основні рівняння

Математична модель транспортного потоку в роботі розглядається на основі системи Лоренца [19, 20] без коливань прискорення:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\eta + v \\ \dot{v} = \frac{-v + \eta\tau}{\zeta} \\ \dot{t} = \frac{(\tau_0 - \tau) - \eta v}{\delta} \end{cases}, \quad (2.1)$$

де відповідні змінні означають:

η - відхилення інтервалу між автомобілями від оптимального;

v - відхилення швидкості від оптимального;

τ - час транспортного засобу до досягнення оптимальної швидкості;

τ_0 - характерний час досягнення оптимальної швидкості;

ζ - відношення часів релаксації t_v/t_η ;

δ - відношення часів релаксації t_τ/t_η ;

t_η - час релаксації для досягнення відхилення, рівної 0;

t_v - час релаксації для досягнення швидкості відхилення, рівної 0;

t_τ - час релаксації для досягнення характерного часу, рівного τ_0 .

Перша похідна від η відносно t - це швидкість зміни відстані між відхиленням транспортного засобу, що спостерігається при оптимальній відстані транспорту від положення стаціонарного стану. Перша похідна від v відносно t - це швидкість зміни відхилення швидкості транспортного засобу. Першою похідною від τ відносно t є швидкість зміни часу прискорення/гальмування відносно стаціонарного значення τ , тобто в момент часу $\tau = \tau_0$. Коли значення фазового простору прагнуть до нуля маємо ситуацію, коли час прискорення/гальмування $\dot{t} = 0$ призводить до стабільного потоку автотранспорту. І навпаки, коли значення \dot{t} мають розходження від нуля – маємо транспортний затор.

2.2 Стійкість точок рівноваги та біфуркація

Система має три точки рівноваги:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= (0, 0, \tau_0), \\ \bar{u}_2 &= (\sqrt{\tau_0 - 1}, \sqrt{\tau_0 - 1}, 1), \\ \bar{u}_3 &= (-\sqrt{\tau_0 - 1}, -\sqrt{\tau_0 - 1}, 1).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Видно, що значення τ_0 впливає на кількість точок рівноваги, оскільки для $\tau_0 < 1$ існує одна точка рівноваги, тобто $\bar{u}_1 = (0, 0, \tau_0)$, а для $\tau_0 > 1$ три точки $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

Система (2.1) є нелінійною системою, так що згідно з Перко [21] стійкість точки рівноваги може бути досягнута шляхом її лінеаризації, це видно з власних значень матриці якобіана кожної точки рівноваги. Матриця Якобі для точки $\bar{u}_1 = (0, 0, \tau_0)$

$$J_{\bar{u}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{\tau_0}{\zeta} & -\frac{1}{\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\delta} \end{bmatrix}.\tag{2.3}$$

Тож отримаємо характеристичне рівняння

$$\left(-\frac{1}{\delta} - \lambda\right) \left[\left(-\frac{1}{\zeta} - \lambda\right) (-1 - \lambda) - \frac{\tau_0}{\zeta} \right].\tag{2.4}$$

Коли $\tau_0 < 1$, усі власні числа від'ємні, тому \bar{u}_1 асимптотично стійка, тоді як для $\tau_0 > 1$ можна використовувати критерій Рауса-Гурвіца [22], та щоб спростити задачу запишемо таблицю Рауса-Гурвіца з рівняння (2.4).

Таблиця 1. Таблиця Рауса-Гурвіца $\bar{u}_1 = (0, 0, \tau_0)$ для $\tau_0 > 1$

| | |
|--|---|
| 1 | $\frac{Z + \delta + 1 + \tau_0 \delta}{\zeta \delta}$ |
| $\frac{\zeta \delta + \zeta + \delta}{\zeta \delta}$ | $\frac{1}{\zeta \delta} (1 - \tau_0)$ |
| $\frac{\zeta + \delta + 1 + \tau_0 \delta}{\zeta \delta} - \frac{(1 - \tau_0)}{(\zeta \delta + \zeta + \delta)}$ | 0 |
| $\frac{1}{\zeta \delta} (1 - \tau_0)$ | 0 |

У першому стовпці Таблиці 1 є одноразова зміна знаку, тобто в четвертому рядку це означає, що рівняння (2.4) має два корені на лівій уявній осі і один корінь на правій. При $\tau_0 > 1$ існують додатні і від'ємні власні значення, тому \bar{u}_1 нестабільна.

Для випадку коли $\tau_0 = 1$ не можна робити висновок про стабільність на основі власних значень, оскільки четвертий рядок таблиці Рауса-Гурвіца дорівнює нулю. Альтернативна функція Ляпунова [23] може бути використана для аналізу стійкості системи точок рівноваги (2.2), тобто точка $\bar{u}_1 = (0, 0, \tau_0)$. Вибрана функція Ляпунова $Vt = \tau_0 \eta^2 + \zeta v^2 + \delta(\tau - \tau_0)^2$. Похідна V за t дорівнює

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\delta V}{\delta \eta} \dot{\eta}(t) + \frac{\delta V}{\delta v} \dot{v}(t) + \frac{\delta V}{\delta \tau} \dot{\tau}(t), \\ \dot{V} &= -2[\tau_0 \eta^2 + v^2 + (\tau - \tau_0)^2 - 2\tau_0 \eta v]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Підставляючи $\tau_0 = 1$ у рівняння (2.5), отримуємо

$$\dot{V} = -2[(\eta - v)^2 + (\tau - 1)^2]. \quad (2.6)$$

Оскільки (2.6) від'ємна для всіх значень η , v і τ , можна зробити висновок, що точка рівноваги $\bar{u}_1 = (0, 0, \tau_0)$ при $\tau_0 = 1$ стійка.

Матриця Якобі для точки рівноваги $\bar{u}_2 = (\sqrt{\tau_0 - 1}, \sqrt{\tau_0 - 1}, 1)$ має вигляд

$$J_{\bar{u}_2} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{\tau}{\zeta} & -\frac{1}{\zeta} & \frac{\eta}{\zeta} \\ -\frac{v}{\delta} & -\frac{\eta}{\delta} & -\frac{1}{\delta} \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left(1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta}\right) + \lambda \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\tau_0}{\zeta \delta}\right) + \frac{2\tau_0 - 2}{\zeta \delta} = 0. \quad (2.8)$$

Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца, можна зробити висновок, що всі власні значення від'ємні, тому \bar{u}_2 стійка.

Матриця Якобі для точки рівноваги $\bar{u}_3 = (-\sqrt{\tau_0 - 1}, -\sqrt{\tau_0 - 1}, 1)$ має вигляд

$$J_{\bar{u}_3} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{\tau}{\zeta} & -\frac{1}{\zeta} & \frac{\eta}{\zeta} \\ -\frac{v}{\delta} & -\frac{\eta}{\delta} & -\frac{1}{\delta} \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

Оскільки характеристичне рівняння для матриці Якобі (2.9) збігається з рівнянням (2.8), тому всі власні значення від'ємні, отже \bar{u}_3 стійка.

На основі аналізу стійкості і кількості точок рівноваги системи (2.1) видно, що зміна параметра τ_0 впливає на кількість точок рівноваги та їх стійкість, при $\tau_0 < 1$ існує одна точка рівноваги \bar{u}_1 , яка є стійкою, а для $\tau_0 > 1$ є три точки рівноваги, точка рівноваги \bar{u}_1 , яка не стабільна, і точки рівноваги \bar{u}_2 і \bar{u}_3 , стабільні. Це свідчить про те, що система (2.1) зазнає біфуркацію типу "вилка" з величиною біфуркації $\tau_0 = 1$.

2.3 Властивості розв'язку системи

Властивості розв'язків системи (2.1), про які йтиметься, - це розв'язки симетрії та обмеженості.

2.3.1 Симетричний

Буде доведено, що якщо $(\eta(t), v(t), \tau(t))$ є розв'язком системи (2.1), то $(-\eta(t), -v(t), \tau(t))$ також є розв'язком. Припустимо, що $(\eta(t), v(t), \tau(t))$ є розв'язком системи (2.1),

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -\eta(t) + v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{-v(t) + \tau(t)\eta(t)}{\zeta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\dot{\tau}(t) = \frac{\tau_0 - \tau(t) - \eta(t)v(t)}{\delta}$$

Підставивши $(-\mu(t), -v(t), \tau(t))$ в систему (2.1), отримаємо

$$\begin{aligned} -\dot{\eta}(t) &= -(-\eta(t)) - v(t) \\ -\dot{v}(t) &= \frac{-(-v(t)) + \tau(t)(-\eta(t))}{\zeta} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\dot{\tau}(t) = \frac{\tau_0 - \tau(t) - (-\eta(t))(-v(t))}{\delta}$$

Видно, що система (2.11) дорівнює системі (2.10). Очевидно, що $(-\mu(t), -v(t), \tau(t))$ також є розв'язком системи (2.1). Таким чином, можна зробити висновок, що

розв'язок симетричний відносно осі τ . Візуально це видно на рис. 2.1 – 2.7. На рисунках зображені чотири варіації фазових площин для різних умов параметрів.

2.3.2 Розв'язок обмеженості

Щоб довести, що система розв'язків (2.1) обмежена, буде доведено, що існує обмежений еліпсоїд E , тобто

$$\tau_0 \eta^2 + \zeta v^2 + \delta(\tau + \tau_0)^2 \leq c.$$

Кожна траєкторія знаходиться всередині еліпсоїда E і ніколи не виходить за його межі.

Виберемо функцію

$$V(\eta, v, \tau) \equiv \tau_0 \eta^2 + \zeta v^2 + \delta(\tau + \tau_0)^2. \quad (2.12)$$

Похідна від $V(\eta, v, \tau)$ дорівнює

$$\dot{V} = -2[\tau_0 \eta^2 + v^2 + \tau^2 - \tau_0^2]. \quad (2.13)$$

Нехай D – еліпсоїд, що описується рівнянням

$$D \equiv \tau_0 \eta^2 + v^2 + \tau^2 - \tau_0^2 \leq 0, \text{ або}$$

$$D \equiv \tau_0 \eta^2 + v^2 + \tau^2 \leq \tau_0^2.$$

Іншими словами, D – це область, де $\dot{V} \geq 0$. Таким чином, якщо розв'язок починається з еліпсоїда D , то траєкторія відходить від D .

Далі буде показано, що E містить D

$$E \equiv \tau_0 \eta^2 + \zeta v^2 + \delta(\tau + \tau_0)^2 \leq c, \text{ або}$$

$$\frac{\eta^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\tau_0}}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\zeta}}\right)^2} + \frac{(\tau + \tau_0)^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\delta}}\right)^2} = 1.$$

Так, якщо центр еліпсоїда E дорівнює $(0, 0, -\tau_0)$, а відстань кожної осі до центральної точки дорівнює $\sqrt{\frac{c}{\tau_0}}, \sqrt{\frac{c}{\zeta}}, \sqrt{\frac{c}{\delta}}$. Еліпсоїд $D \equiv \tau_0 \eta^2 + v^2 + \tau^2 \leq \tau_0^2$ можна

записати як

$$\frac{\eta^2}{\tau_0} + \frac{v^2}{\tau_0^2} + \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \leq 1.$$

Отже, центр еліпсоїда D дорівнює $(0, 0, 0)$, а відстань кожної осі до центральної точки становить $\sqrt{\tau_0}, \tau_0, \tau_0$.

Якщо ми виберемо $c = \max\{\tau_0^2, \zeta\tau_0^2, 4\delta\tau_0^2\}$, тоді еліпсоїд E міститиме D . Якщо значення будь-якого u_0 знаходиться поза еліпсоїдом E , тоді u_0 знаходиться поза еліпсоїдом D . Іншими словами, $\dot{V}(u_0) \leq -\omega$ з додатнім ω . Це показує, що якщо траєкторія з початковими значеннями u_0 , то її траєкторія перейде на еліпсоїд E . Отже, очевидно, що існує обмежений еліпсоїд E

$$\tau_0\eta^2 + \zeta v^2 + \delta(\tau + \tau_0)^2 \leq c,$$

такий, що кожна траєкторія знаходиться всередині еліпсоїда E і ніколи не виходить за його межі.

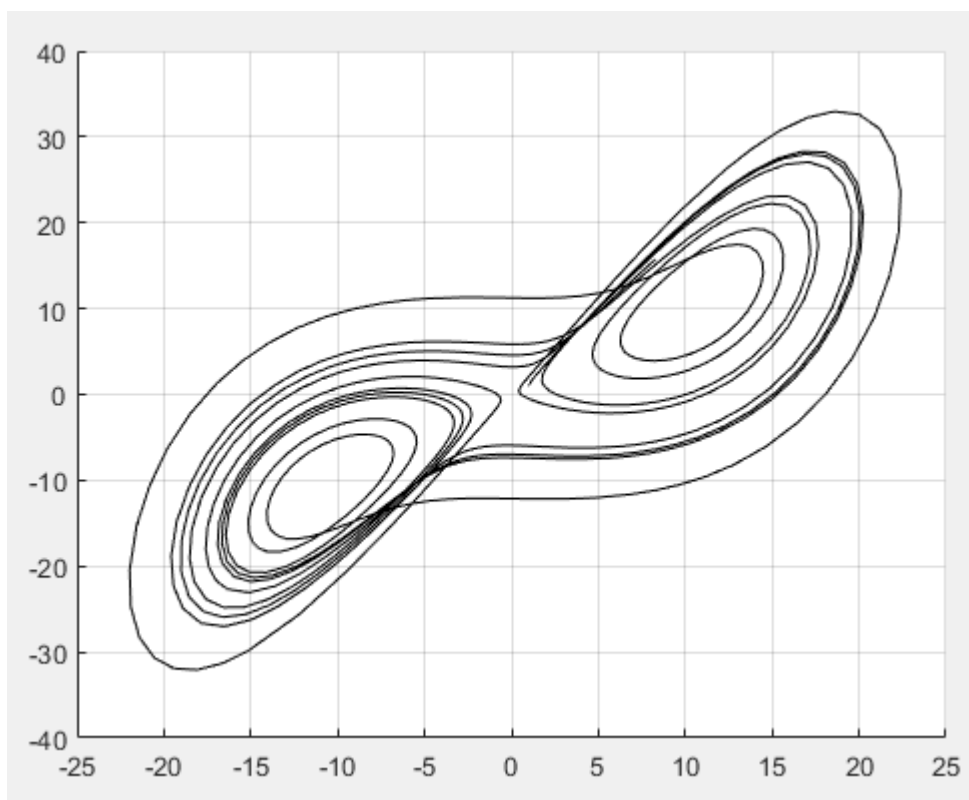


Рис 2.1. Сідло-фокус (для умови $\tau_0 > 1$), транспортний заток.
Площина траєкторії ηv

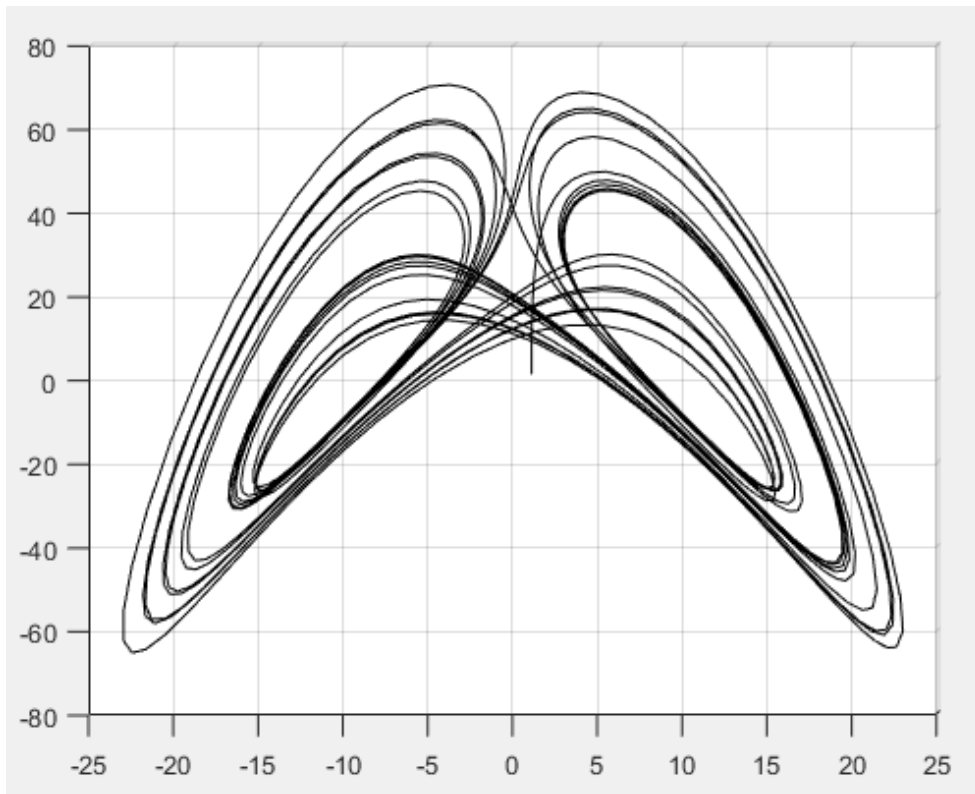


Рис 2.2. Сідло-фокус (для умови $\tau_0 > 1$), транспортний затор.
Площина траєкторії $\eta\tau$

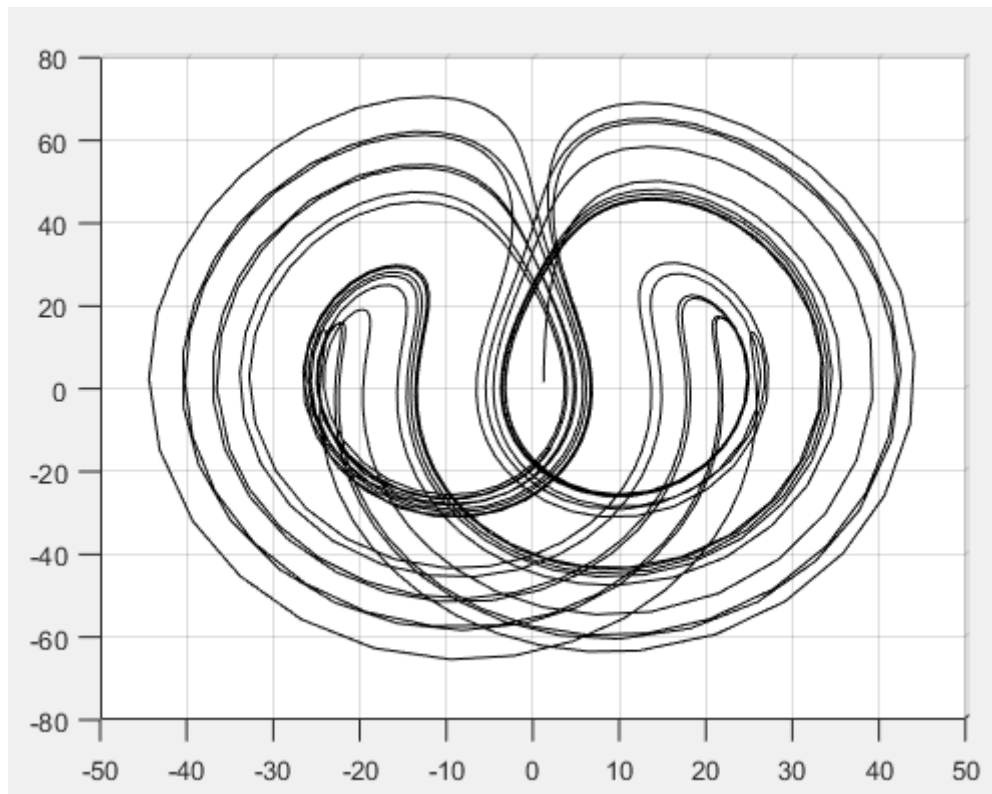


Рис 2.3. Сідло-фокус (для умови $\tau_0 > 1$), транспортний затор.
Площина траєкторії $\nu\tau$

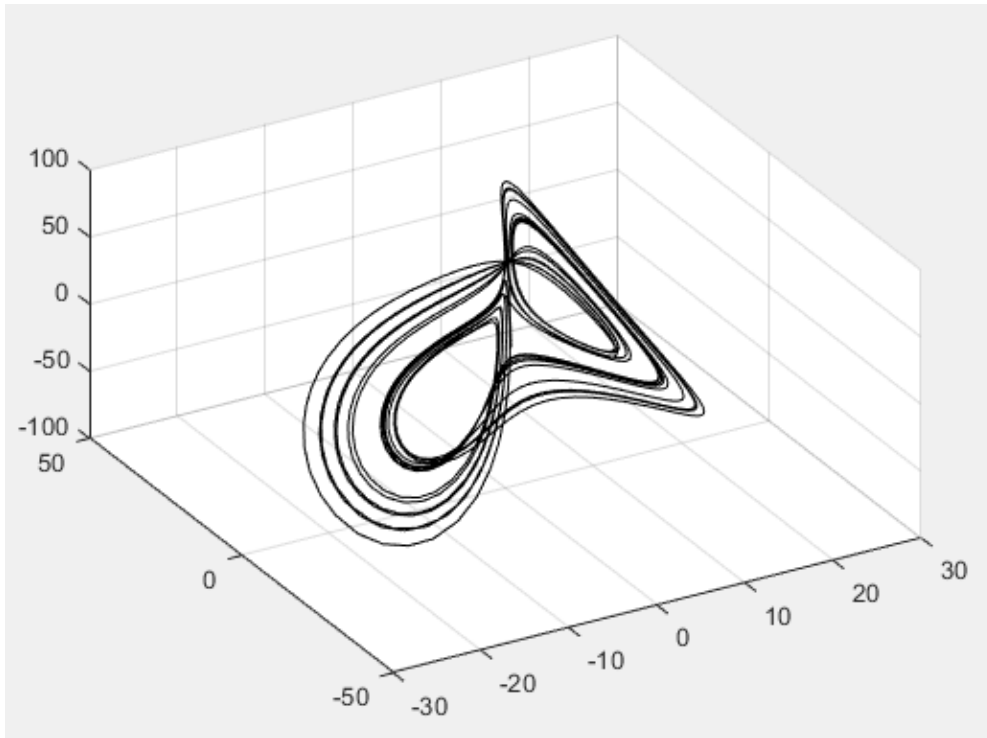


Рис 2.4. Сідло-фокус (для умови $\tau_0 > 1$), транспортний заток. Зображення в 3D

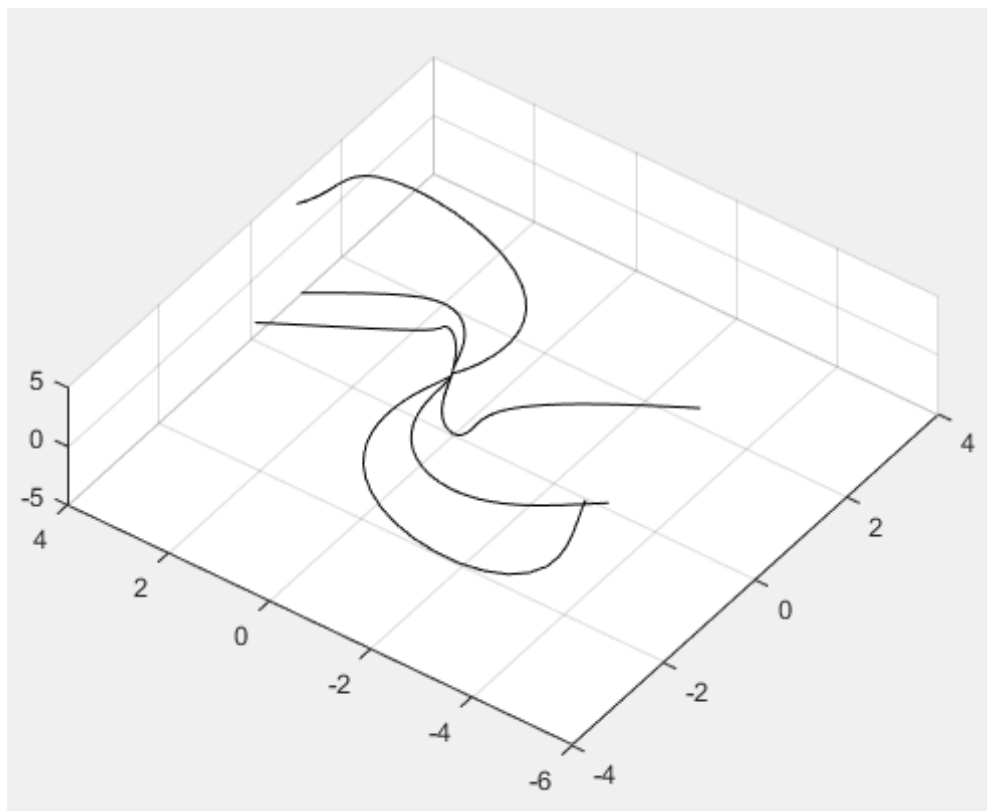


Рис 2.5. Стійкий вузол (для умови $\tau_0 < 1$), стабільний потік транспорту. 3D зображення

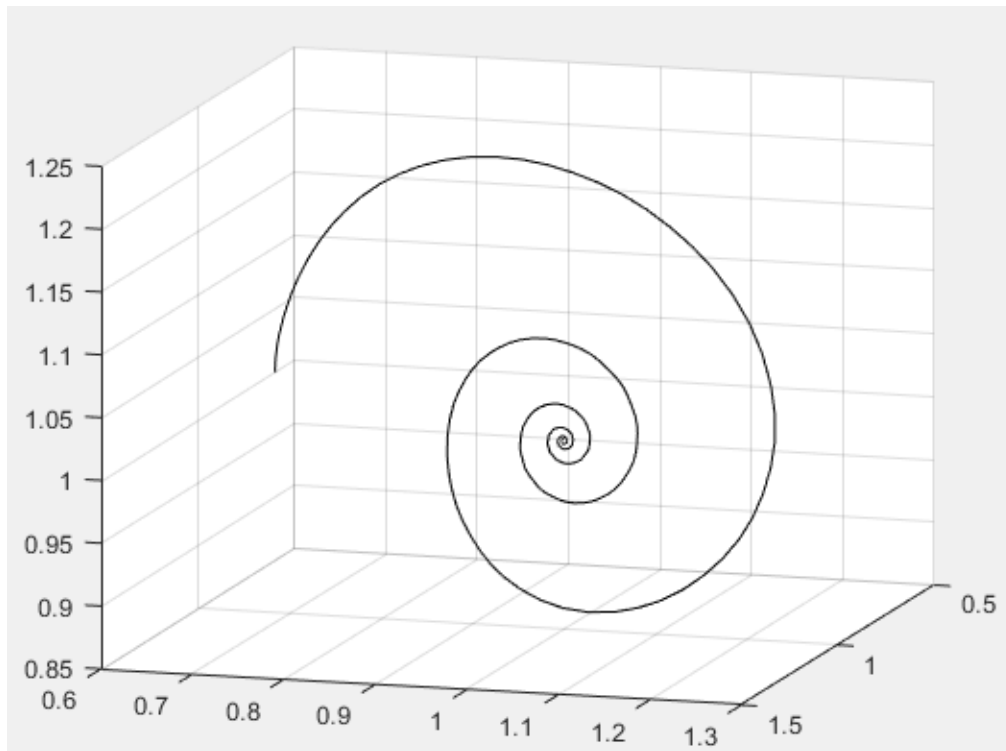


Рис 2.6. Стійкий фокус (для умови $\tau_0 > 1$), транспортний затор.
3D зображення

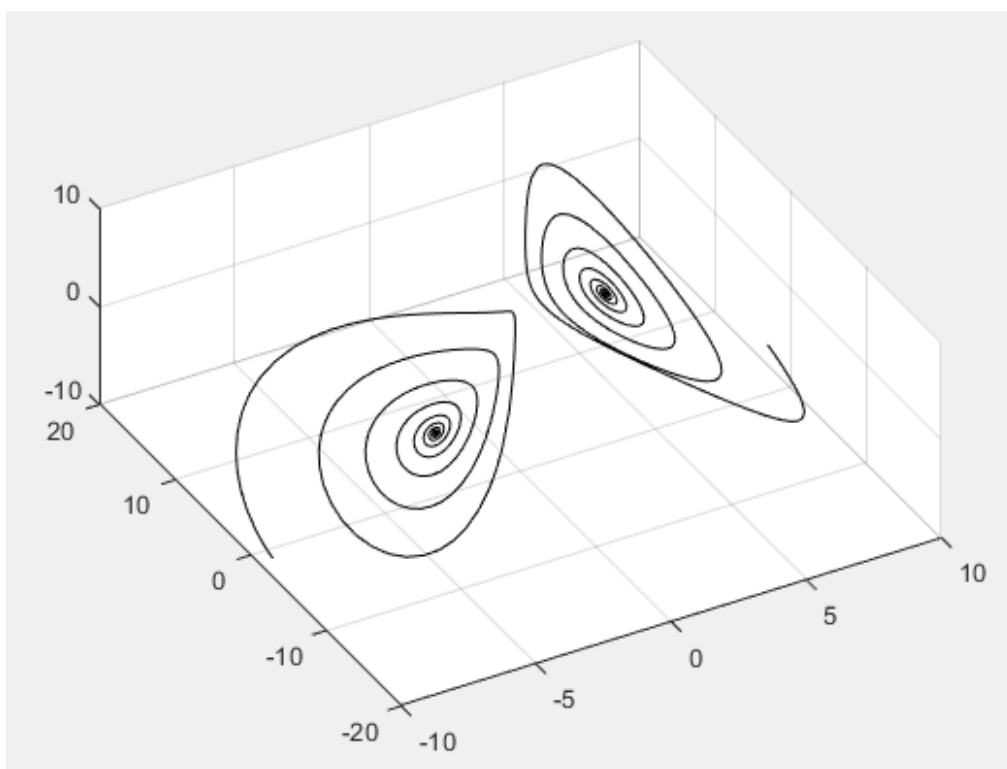


Рис 2.7. Стійкий фокус (для умови $\tau_0 > 1$), транспортний затор.
3D зображення

ВИСНОВКИ

1. У даній роботі проводиться дослідження властивостей розв'язку математичної моделі на основі системи Лоренца без коливань прискорення. Маємо спрощену, безрозмірну систему Лоренца з відповідними відношеннями часів релаксації.
2. З'ясовано, що в системі є три точки рівноваги, кількість яких визначає параметр τ_0 . Зміна параметра τ_0 впливає на кількість точок рівноваги та їх стійкість. Для всіх можливих умов маємо: при $\tau_0 < 1$ є одна асимптотична стійка точка рівноваги; при $\tau_0 > 1$ маємо дві стійкі точки рівноваги та одну нестійку; при $\tau_0 = 1$ маємо одну стійку точку рівноваги.
3. Параметр τ_0 є критичним параметром, його зміна приводить до біфуркації, а його значення є критичними значеннями. Система зазнає біфуркацію типу "вилка" з величиною біфуркації $\tau_0 = 1$, так як з нього виходить кілька розв'язків (стійких і нестійких).
4. При дослідженні розв'язку системи було з'ясовано та доведено, що він має геометричну симетрію з віссю τ , а також доведено, що він є обмеженим. Побудова графічних зображень підтвердила отримані результати.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. S. S. Ganji, A. Barari, L. B. Ibsen and G. Domairry 2010. CEJOR. *Differential Transform Method for Mathematical Modeling of Jamming Transition Problem in Traffic Congestion Flow*. New York Springer-Verlag pp.87-100.
2. Hartono, F. Y. Saptaningtyas and K. P. Krisnawan, 2017, J. Phys:Conf. Ser 983 012092
3. Md. Shakhawat A, Prayer A, 2017, European Scientific Journal. *Several Chaotic Analysis of Lorenz System Vol.13* pp. 1857-7881
4. О. В. Степанов, *Теорія і практика управління соціальними системами*, 2015 г., н. 4, УДК 656.13.
5. И. Е. Глаголев, *Различные аналогии для равновесных форм упругой нити на двумерных поверхностях*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2013, номер 6, 31–36.
6. A. D. Kiselev, *Symmetry breaking and bifurcations in complex Lorenz model*, *Journal of Physical Studies*, v. 2, No 1 (1998) p. 30-37
7. Shashank Bardwaj, Suudher Ballare, Rohit, Munish K and Chandel 2017 *Transp. Res. Proc.* **25** 3538
8. Gaye D, Faye D. M. and Mampassi B., 2016, *Int. J. Appl. Math. Sci* **9** 1
9. Q. Yang, Z. Shi, S. Yu, J. Zhou, Analytical evaluation of the use of left-turn phasing for single left-turn lane only, *Transp. Res. B* 111 (2018), 266–303.
10. S. Yu, X. Zhao, Z. Xu, Z. Shi, An improved car-following model considering the immediately ahead car's velocity difference, *Physica A* 461 (2016) 446–455.
11. T.-Q. Tang, Z.-Y. Yi, J. Zhang, N. Zheng, Modeling the driving behavior at a signalized intersection with the information of remaining green time, *IET Intell. Transp. Syst.* 11 (9) (2017) 596–603.
12. Yu. I. Neimark, P. S. Landa, *Stochastic and Chaotic Oscillations* (Nauka, Moscow, 1987) (in Russian).

13. J. B. McLaughlin, P. C. Martin, Phys. Rev. A 12, 186 (1975).
14. K. A. Robbins, SIAM J. Appl. Math. 36, 457 (1979).
15. P. Manneville, Y. Pomeau, Phys. Lett. 75 A, 1 (1979).
16. A. C. Fowler, M. J. McGuinness, Phys. Lett., 92 A, 103 (1982).
17. A. C. Fowler, J. D. Gibbon, M. J. McGuinness, Physica D 4, 139 (1982).
18. Kloeden P. E. and Lorenz T., 2016, *Bull. Math. Sci.* **6** 453
19. A. Khomenko, A. Shikura. *Nonlinear kinetics of transition between transport flow modes* // Physica A, Vol. 557, p. 124965 (2020)
20. Z J N Rochim and Hartono 2019 *J. Phys.: Conf. Ser.* **1320** 012077
21. L. Perko, 1993, *Differential Equations and Dynamics Systems*, New York, Springer Verlag.
22. В. В. Солодовникова, *Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования*, изд-во «Машиностроение», 1967, стр. 770.
23. Ла-Салль Ж., Лефшец С., *Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова*, изд-во «Мир», г. Москва, 1964, УДК 531.391.5. – 168 с.

Код програми для побудови фазових портретів

```

1.) e = 10;
d = 3;
tau0 = 120;
f = @(t,a) [-a(1) + a(2); -a(2)/e + a(1)*a(3)/e; (tau0 - a(3))/d -
a(1)*a(2)/d];
[t,a] = ode45(f,[0 100],[1 1 1]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
zoom on;
grid on;
xlabel('?')
ylabel('v')
zlabel('?')

2.) e = 0.6;
d = 3;
tau0 = 0.5;
f = @(t,a) [-a(1) + a(2); -a(2)/e + a(1)*a(3)/e; (tau0 - a(3))/d -
a(1)*a(2)/d];
hold on;
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 3 2]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3), 'k-')
[t,a] = ode45(f,[0 100],[1 -4 2]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3), 'k-')
[t,a] = ode45(f,[0 100],[1 4 3]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3), 'k-')
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1.5 -4 3]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3), 'k-')
[t,a] = ode45(f,[0 100],[0 3 1]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3), 'k-')
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 -4 1]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3), 'k-')
hold off;
zoom on;
grid on;

```

```

3.) e = 0.8;
    d = 10;
    tau0 = 2;
    f = @(t,a) [-a(1) + a(2); -a(2)/e + a(1)*a(3)/e; (tau0 - a(3))/d -
    a(1)*a(2)/d];
    hold on;
    [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.6 0.6 1]);
    plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
    hold off;
    zoom on;
    grid on;

```

```

4.) e = 0.8;
    d = 3;
    tau0 = 20;
    f = @(t,a) [-a(1) + a(2); -a(2)/e + a(1)*a(3)/e; (tau0 - a(3))/d -
    a(1)*a(2)/d];
    hold on;
    [t,a] = ode45(f,[0 100],[10 3 -8]);
    plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
    [t,a] = ode45(f,[0 100],[-10 -3 -8]);
    plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
    hold off;
    zoom on;
    grid on;

```