МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту
Завідувач кафедри ПМ та МСС
_____ Коплик І.В.
(підпис)
«___» _____20__ р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «магістр»
спеціальність 113 «Прикладна математика»
освітньо-професійна програма «Прикладна математика»

тема роботи: «**МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНОГО ЦИКЛОТРОННОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ**»

Виконавець
студент факультету ЕлІТ
Дробоног Альона Михайлівна _____
(підпис)

Науковий керівник
док. фіз.-мат. наук, професор
Лисенко Олександр Володимирович _____
(підпис)

Суми – 2020

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота: 43 с., 13 рисунків, 1 таблиця, 19 джерела, 2 додатка.

Мета роботи: провести математичне моделювання вимушеного циклотронного випромінювання, з'ясувати умови оптимального вимушеного циклотронного випромінювання. Побудувати комп'ютерну модель на базі методу великих частинок, яка описує енергетичний обмін між електромагнітною хвилею і електронним потоком. Визначити оптимальні параметри системи, знайти інкременти зростання електромагнітної хвилі.

Об'єкт дослідження: процес вимушеного циклотронного випромінювання.

Предмет дослідження: зміна енергій електронного пучка та електромагнітної хвилі під час вимушеного циклотронного випромінювання.

Методи дослідження: релятивістські рівняння руху, рівняння Максвела, метод повільно змінних амплітуд, метод великих частинок, а також стандартні числові методи.

В роботі проведено математичне та комп'ютерне моделювання взаємодії електронного потоку, що рухається вздовж осі системи та циркулярно поляризованої електромагнітної хвилі за умови вимушеного циклотронного випромінювання. Знайдені аналітичні співвідношення, що визначають оптимальні параметри системи: електронний пучок – електромагнітна хвиля. На базі методу великих частинок створена комп'ютерна модель, що описує динаміку обміну енергії між електронним пучком та електромагнітною хвилею. Показано якісну узгодженість між аналітичними розрахунками та комп'ютерним моделюванням вимушеного циклотронного випромінювання.

Ключові слова: ВИМУШЕНЕ ЦИКЛОТРОННЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ, ІНКРЕМЕНТИ ЗРОСТАННЯ, МЕТОД ВЕЛИКИХ ЧАСТИНОК

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\vec{p}$ – релятивістський імпульс електрона;

$\vec{E}$ – напруженість електричного поля;

$\vec{B}$ – індукцією магнітного поля

c – швидкість світла;

e – заряд електрона;

i – уявна одиниця;

m_e – маса електрона;

c.c. – комплексно-спряжена величина;

$\delta\omega$ – інкремент зростання хвилі;

ω_B – ларморівська частота електронів;

γ – релятивістський фактор.

ЗМІСТ

ВСТУП 5

РОЗДІЛ 1 ВИМУШЕНЕ ЦИКЛОТРОННЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ (АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД) 6

1.1 Сутність вимушеного циклотронного випромінювання 6

1.2 Використання вимушеного циклотронного випромінювання 8

РОЗДІЛ 2 АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНОГО ЦИКЛОТРОННОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ У НАБЛИЖЕННІ СЛАБКОГО СИГНАЛУ 12

2.1 Модель 12

2.2 Рівняння для середньої густини імпульсу пучка 15

2.2.1 Рівняння руху електрона в полі електромагнітної хвилі та повздовжньому магнітному полі 15

2.2.2 Збурення швидкості, фази обертань електрона, що рухається в постійному магнітному полі під дією електромагнітної хвилі 17

2.2.3 Рівняння для середньої густини імпульсу електронного пучка 19

2.3 Аналіз та чисельні оцінки 22

РОЗДІЛ 3 РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ЕКСПЕРЕМЕНТУ 25

3.1 Опис комп'ютерної моделі 25

3.2 Режим оптимального підсилення 26

3.3 Випадок відсутності резонансу 31

ВИСНОВОК 34

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 35

ДОДАТКИ 37

ДОДАТОК А 37

ДОДАТОК Б 42

ВСТУП

Теорія вимушеного випромінювання бере початок з Ейнштейна. Класична модель залучалася швидше за все для інтерпретації вивчення ефектів, хоча вимушені радіаційні процеси, тобто поглинання і випромінювання, мають велике значення для вирішення проблем квантової та «класичної» радіофізики. Однак, однією із таких проблем являється проблема посилення і генерації електромагнітних коливань.

Індуковане випромінювання - це випромінювання електромагнітних хвиль частинками, що перебувають у нерівноважному стані під дією зовнішнього електромагнітного випромінювання.

Вимушене випромінювання залежить від початкового стану системи заряджених частинок в електромагнітному полі. При квантовому розгляді зазвичай передбачається, що в початковий момент частинки знаходяться в стані з певною енергією (імпульсом) і мають повністю непевну фазу (координату). В цьому випадку вимушене випромінювання буде пов’язане тільки з збуренням і описуваними формулами вимушеного випромінювання. З класичного погляду така постановка задачі відповідає розглянутій системі частинок, маючи в початкових моментах однакову енергію і рівномірно розподілених по початкових фазах (координатах) [1–3].

Подана робота присвячена моделюванню взаємодії електронного пучка з електромагнітною хвилею за умови вимушеного циклотронного випромінювання.

РОЗДІЛ 1 ВИМУШЕНЕ ЦИКЛОТРОННЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ (АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД)

1.1 Сутність вимушеного циклотронного випромінювання

Циклотронне випромінювання — випромінювання електромагнітних хвиль нерелятивістськими і релятивістськими зарядженими частинками, що рухаються по колу. Також таке випромінювання релятивістськими частинками називається синхротронним.

Циклотронне випромінювання спостерігається найчастіше при переміщенні зарядженої частинки в магнітному полі. Електронний пучок влітає в область повздовжнього магнітного поля з індукцією, електрони цього пучка рухаються вздовж спіралі на яке діє циркулярно поляризована електромагнітна хвиля. Частинки описують коло, обертаючись із так званою циклотронною частотою. [1].

Спонтанне випромінювання, обумовлене фактичним переміщенням електричних зарядів в просторі - прискореним переміщенням при дипольному випромінюванні і рівномірним при черенковському випромінюванні в уповільненому середовищі або періодичній структурі. У незбурених просторово-однорідних пучках фактичні переміщення зарядів відсутні, оскільки в будь-який момент часу в будь-якій точці простору щільність заряду константа, тому відсутнє і спонтанне випромінювання. Можна сказати, що спонтанне випромінювання ініціює вимушене. Так, будь-яка початкова, навіть випадково виникла, регулярна модуляція пучка породжує просторово-когерентне спонтанне випромінювання, яке, в свою чергу, викликає подальшу модуляцію пучка. В результаті пучок розбивається на послідовність випромінюючих електронних згустків, або, іншими словами, фазує полем випромінювання. Таке фазування є основним фактором при переході спонтанного випромінювання в вимушене. Крім того, зрозуміло, що головною причиною, яка створює випромінювання в разі фазованих електронів, є поляризаційний струм пучка [3].

Вимушене випромінювання в активному середовищі, що складається з електронів, які обертаються в магнітному полі (або схрещених електричному і магнітному полях), спостерігається на частотах, близьких до циклотронної частоти або однієї з її гармонік, природно називати індукованим циклотронним випромінюванням, а електронні прилади, в яких це випромінювання використовується для посилення і генерування мікрорадіохвиль, - мазерами на циклотронному резонансі (МЦР).

Можливість індукованого випромінювання в потоці електронів, які обертаються в магнітному полі, одночасно була показана теоретично в цих роботах [4], де розглянуто просторове і фазове угруповання на циклотронній частоті і її гармоніках і дана лінійна теорія вимушеного циклотронного випромінювання в хвилеводах з гвинтовими і трохоїдальними електронними пучками і квазікласична теорія фазового угруповування на циклотронній частоті.

Незабаром були також опубліковані теоретичні роботи, присвячені дослідженню нестійкої нерівноважної магнітоактивної плазми, обумовлені вимушеним циклотронним випромінюванням і аналізу (класичним і квантовим способами) механізмів угруповання обертових електронів в полі випромінювання [5].

У теорії підсилювачів і генераторів мікрорадіохвиль, заснованих на використанні індукованого циклотронного випромінювання, спочатку найбільшу увагу надавали задачам, пов’язаним з дослідженням взаємодії електромагнітних хвиль в хвилеводах з гвинтовими і трохоїдальними електронними пучками, поступальна швидкість електронів в яких направлена уздовж хвилеводу. Певною мірою це можна пояснити прагненням зберегти в нових приладах особливості ЛЗХ і ЛБХ, позбувшись в той же час від необхідності уповільнення електромагнітних хвиль.

Дослідження поширення електромагнітних хвиль в хвилеводах, заповнених класичним активним середовищем, роль яких відіграє потік електронів, що рухаються по криволінійним просторово періодичним

траєкторіям (зокрема, гвинтовим або трохоїдальним), пов'язане з великими труднощами, зумовленими необхідністю урахування просторової дисперсії. Однак, якщо концентрація електронів (густина струму пучка) мала, то збуренням поперечної структури нормальних хвиль хвилеводу можна знехтувати, використовуючи близькість нормальних хвиль хвилеводу, пронизаним електронним потоком, нормальним хвилям «холодного» хвилеводу, порівняно не важко отримати наближене дисперсійне рівняння, порівнюючи нові поздовжні хвильові числа (постійні поширення) з частотою. При цьому немає необхідності обчислювати провідність електронного потоку - дисперсійне рівняння може бути отримане, як це зазвичай робиться в теорії ЛБХ, в результаті спільного рішення лінеаризованих рівнянь, які описують збурення в русі електронів, що накладені електромагнітною хвилею з заданою поперечною структурою і довільною повільно змінною уздовж хвилеводу амплітудою, і рівняння для амплітуди хвилі, збуреною в хвилеводі електронами, що рухаються по збуреній траєкторії [1].

1.2 Використання вимушеного циклотронного випромінювання

Вимушене циклотронне випромінювання широко застосовується в мазерах на циклотронному резонансі та гіротронах.

В даний час мазери на циклотронному резонансі (МЦР) є найбільш потужними джерелами СВЧ випромінювання в міліметровому діапазоні довжин хвиль. МЦР успішно використовуються в різних фізичних і технічних додатках, зокрема, для нагріву і діагностики плазми в установках керованого термоядерного синтезу, спектроскопії різних середовищ, синтезу нових матеріалів і плазмохімії. Прилади цього класу засновані на вимушеному гальмівному випромінюванні електронів, що обертаються в магнітному полі. На відміну від приладів, заснованих на черенковському і перехідному випромінюванні заряджених частинок (ЛБХ, ЛЗХ, магнетрони, клістрони і ін.), де взаємодія частинок відбувається з уповільненими хвилями, фазова швидкість яких менше швидкості світла, в МЦР електрони можуть взаємодіяти з

швидкими електромагнітними хвилями. Ця властивість гальмівного випромінювання дозволяє використовувати в якості електродинамічних систем МЦР гладкі хвилеводи й резонатори з розмірами значно більше довжини хвилі випромінювання. В діапазоні міліметрових хвиль це дозволяє отримувати в циклотронних мазерах значно більшу потужність, ніж в черенковських приладах. Однак просуванню МЦР в область більш коротких хвиль перешкоджає необхідність створення дуже сильних (десятки Тл) магнітних полів [6–8].

Найбільш поширеним і розвиненим різновидом МЦР є слаборелятівістський гіротрон [6].

Гіротрон - це циклотронно-резонансні мазери, в яких взаємодія спіральних електронних пучків з електромагнітними хвилями відбувається майже у рівномірних хвилеводах поблизу їх граничних частот. Гіротрон був винайдений радянськими вченими в NIRFI (Науково-дослідний радіофізичний інститут), що базується в Нижньому Новгороді, Росія [9].

Гіротрон - тип вільного електронного мазера, який генерує високочастотне електромагнітне випромінювання за рахунок стимульованого циклотронного резонансу електронів, що рухаються через сильне магнітне поле. Він може генерувати велику потужність на міліметрових довжинах хвиль, оскільки як пристрій швидкої хвилі його розміри можуть бути набагато більшими, ніж довжина хвилі випромінювання. Це відрізняється від звичайних мікрохвильових вакуумних трубок, таких як клістрони та магнетрони, в яких довжина хвилі визначається одномодовою резонансною порожниною, уповільнюючою-хвильовою структурою, і, отже, із збільшенням робочих частот структури резонансної порожнини повинні зменшуватися в розмірі , що обмежує їх здатність керувати енергією [10].

Завдяки гіропристроям вперше став можливим електронно-циклотронний нагрів плазми в установках керованого термоядерного синтезу (КТС), створення потужних радіолокаційних систем міліметрового діапазону довжин хвиль, високотемпературна обробка матеріалів міліметровим

випромінюванням. Розвиток гіротронів як потужних промислових електронних приладів передбачає виконання деяких специфічних умов, а саме:

1) наявність спеціальних магнітних систем, що відповідають частотному діапазону гіротрона;

2) існування розвиненої теорії, підкріпленої експериментом (дизайн гіротронів, лабораторні прототипи);

3) достатній розвиток технологічної бази (існуючі технології в електронній промисловості і розробки унікальних технологій);

4) наявність експериментально-випробувальної бази (вимірювальна апаратура, потужні системи високовольтного електроживлення з швидким захистом приладу від пошкодження, системи водяного охолодження, особливо для потужних гіротронів для КТС).

Гіротрони використовуються для багатьох промислових та високотехнологічних програм опалення. Наприклад, гіротрони використовуються в дослідних експериментах ядерного синтезу для нагрівання плазми, а також в обробній промисловості як інструмент швидкого нагрівання при обробці скла, композитів та кераміки.

Поступово сформувалися основні програми гіротронів і їх спеціалізовані різновиди з необхідним набором параметрів. Перш за все, це гіротрони для управління параметрами плазми в установках КТС. Розвиток цих гіротронів відбувався по лінії підвищення потужності, коефіцієнта корисної дії (ККД), тривалості імпульсу (аж до безперервного режиму) і робочої частоти. Гіротрони складаються з адіабатичної гармати магнетронного типу, відкритого резонатора з дифракційним висновком енергії СВЧ випромінювання і вихідного вузла, що включає в себе колектор електронів і, звичайно, перетворювач СВЧ випромінювання в хвильовий пучок з лінійною поляризацією. Сильні магнітні поля, необхідні для роботи гіротронів міліметрового діапазону довжин хвиль, створюються надпровідними соленоїдами. Не буде перебільшенням сказати, що розвиток магнітних систем - ключ до розвитку гіротронів.

Досягнення в гіротронах мегаватного рівня потужності передбачає роботу основних підсистем гіротрона - електронної гармати, резонатора, вузла виведення випромінювання, колектора - в режимі екстремальних теплових навантажень.

Повний ККД гіротрона і його гранична потужність визначаються ефективністю і граничними можливостями його підсистем: електронно-оптичної системи, резонатора, системи перетворення і виведення випромінювання, колектора [9, 11–19].

РОЗДІЛ 2 АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНОГО ЦИКЛОТРОННОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ У НАБЛИЖЕННІ СЛАБКОГО СИГНАЛУ

2.1 Модель

Дослідження вимушеного циклотронного випромінювання (релятивістського магнітогальмівного), будемо проводити у такій моделі. Релятивістський електронний пучок влітає в область повздовжнього магнітного поля з індукцією $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$, електрони цього пучка рухаються вздовж спіралі (рис. 2.1).

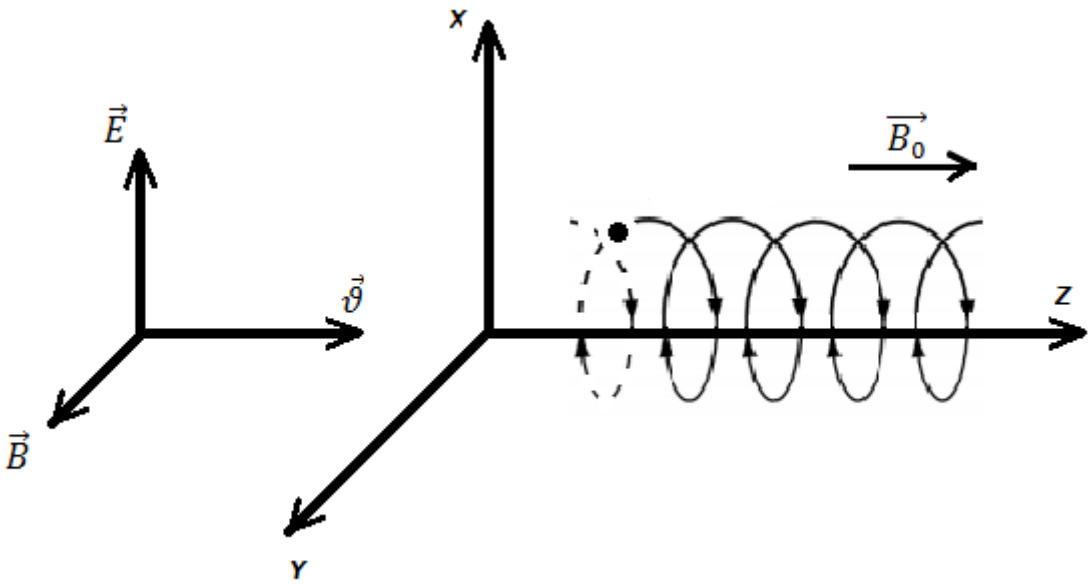

Рис. 2.1 – Релятивістський електронний пучок повздовжньому магнітному полі

Також в цю область вводиться циркулярно поляризована електромагнітна хвиля з напруженістю електричного поля $\vec{E}$ та індукцією магнітного поля $\vec{B}$, яка розповсюджується вздовж осі Z (рис. 2.1), що співпадає з напрямом повздовжнього магнітного поля $\overrightarrow{B_0}$.

У випадку, коли частота обертання вектору електричного поля електромагнітною хвилі $\vec{E}$ в площині XY буде близькою до циклотронної частоти обертання електрона в повздовжньому магнітному полі $\overrightarrow{B_0}$, має місце інтенсивний енергообмін між електромагнітною хвилею та електронним пучком. При певних умовах електронний пучок гальмується, його енергія переходить в енергію електромагнітної хвилі. Тобто, має місце підсилення циркулярно поляризованої хвилі. Таке випромінювання називають вимушеним циклотронним випромінюванням або релятивістським магнітогальмівним випромінюванням.

Розглянемо цей ефект більш детально. Нехай електрони пучка рівномірно розподіленні на коловій орбіті під час обертання під дією повздовжнього магнітного поля $\overrightarrow{B_0}$ та їх швидкості направлені, як показано на рис. 2.2.

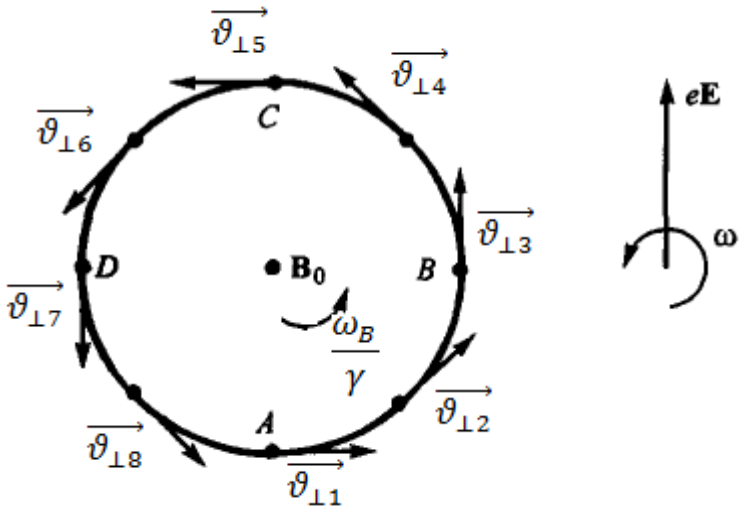

Рис. 2.2 – До циклотронного фазування електронів на ларморівській орбіті

Частота обертання таких електронів в повздовжньому магнітному полі B_0 дорівнює $\frac{\omega_B}{\gamma}$ $(\gamma - \text{релятивістський фактор})$, тобто залежить від енергії. Також нехай вектор напруженості електронного поля циркулярно

поляризованої хвилі обертається в кожній точці простору з частотою ω, яка є близькою до $\frac{\omega_B}{\gamma}$. За умови $\omega \approx \frac{\omega_B}{\gamma}$ на ділянці *ABC* (рис. 2.2) електрони отримують від поля енергію, оскільки робота поля над цими електронами додатна $e\vec{E} \cdot \overrightarrow{\vartheta_\perp} dt > 0$ (див. рис. 2.2). Тому релятивістський фактор електронів збільшується, а частота обертання стає меншою. Як результат електрони з ділянки *ABC* намагаються зміститися до точки *A*. На ділянці *ADC* вектори швидкості електронів направлені так, що робота поля над цими електронами є від'ємною $e\vec{E} \cdot \overrightarrow{\vartheta_\perp} dt < 0$ (див. рис. 2.2). Тому релятивістський фактор цих електронів зменшується, а частота обертання стає більшою. Це призводить до того, що електрони з ділянки *ADC* також зміщуються до точки *A*.

Тому біля точки *A* виникає електронний згусток. За умови $\omega = \frac{\omega_B}{\gamma}$ через симетрію процесів відносно напрямку напруженості електричного поля хвилі $\vec{E}$ сумарна робота поля над електронами дорівнює нулю. Коли ж $\omega \neq \frac{\omega_B}{\gamma}$, то симетрія порушується, робота поля над електронами відмінна від нуля і виникає вимушене циклотронне випромінювання. Зрозуміло, що найголовнішим моментом тут є залежність частоти обертання електронів від γ (релятивістського фактору), тобто релятивізм.

Для кількісного дослідження ефекту використаємо релятивістське рівняння руху для електрона в електромагнітних полях

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{\vartheta} \times \vec{B}\right], \tag{2.1}$$

де $\vec{p} = \frac{m\vec{\vartheta}}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}$ – релятивістський імпульс електрона, $\vec{E}$ та $\vec{B}$ результуючі електричне та магнітне поле. Також будемо використовувати рівняння Максвела.

В слабосигнальному наближенні обчислимо роботу, яку виконує поле над ансамблем електронів, використовуючи ідеї роботи [9,11], знайдемо закон

зміни енергії електронного пучка. Аналізуючи отримані співвідношення знайдемо оптимальні умови вимушеного випромінювання електронним пучком, параметри такого випромінювання.

В наступному розділі побудуємо комп'ютерну модель, яка дозволяє обчислити зміну енергії пучка, як суму енергії окремих електронів, використовуючи співвідношення (2.1). Ця зміна енергії згідно до закону збереження енергії дорівнює зміні енергії електромагнітній хвилі, що відбувається за рахунок вимушеного циклотронного випромінювання.

2.2 Рівняння для середньої густини імпульсу пучка

2.2.1 Рівняння руху електрона в полі електромагнітної хвилі та повздовжньому магнітному полі

Отримаємо рівняння, які описують рух одиночного електрона в полі електромагнітної хвилі з напруженістю електричного $\vec{E}$ та індукцією $\vec{B}$ магнітного полів та повздовжнього постійного магнітного поля $\overrightarrow{B_0}$. Розглядаємо випадок, коли хвиля розповсюджується вздовж повздовжнього постійного магнітного поля $\overrightarrow{B_0}$.

Перш за все зазначимо, що електричні і магнітні поля в електромагнітній хвилі є взаємопов'язаними величинами. Електричні та магнітні поля електромагнітної хвилі повинні задовольняти рівняння Максвела. Тому зручно перейти від двох взаємопов'язаних величин $\vec{E}$ та $\vec{B}$ електромагнітної хвилі до однієї величини. Такою величиною є векторний потенціал $\vec{\mathrm{A}}$, який пов’язаний з електричним і магнітним полем хвилі наступним співвідношенням

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{A}}. \tag{2.2}$$

В цих співвідношеннях c-швидкість світла у вакуумі, $\vec{\nabla}$- оператор набла. Тоді рівняння руху (2.1) можна подати у вигляді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{\vartheta} \times \left(\overrightarrow{B_0} + \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{A}}\right)\right] =$$

$$= -e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\vec{\vartheta} \times \overrightarrow{B_0}\right] + \frac{e}{c}\left(\vec{\nabla}\left(\vec{\vartheta}\vec{\mathrm{A}}\right) - \left(\vec{\vartheta}\vec{\nabla}\right)\vec{\mathrm{A}}\right). \qquad (2.3)$$

Приймемо до уваги, що для циркулярно-поляризованої хвилі

$$\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_x\overrightarrow{e_x} + A_y\overrightarrow{e_z}.$$

Повздовжнє постійне магнітне поле має вигляд

$$\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$$

Тоді рівняння (2.3) у скалярній формі набере вигляд

$$\begin{gathered}\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c}\left(B_0\vartheta_y - \vartheta_z\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)\\ \frac{dp_y}{dt} = \frac{e}{c}\left(-B_0\vartheta_x - \vartheta_z\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial t}\right)\\ \frac{dp_z}{dt} = \frac{e}{c}\left(\vartheta_x\frac{\partial A_x}{\partial z} + \vartheta_y\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\end{gathered} \qquad (2.4)$$

Введемо позначення

$$\begin{gathered}\mathrm{A}_\perp = A_x + iA_y\\ \vartheta_\perp = \vartheta_x + i\vartheta_y\end{gathered} \qquad (2.5)$$

Тоді з системою (2.4) можемо отримати

$$\begin{gathered}\frac{dp_\perp}{dt} = \omega_B m_e(-i\vartheta_\perp) + \left(\vartheta_z\frac{\partial A_\perp}{\partial z} + \frac{\partial A_\perp}{\partial t}\right)\left(-\frac{e}{c}\right)\\ \frac{dp_z}{dt} = \frac{e}{2c}\left(\vartheta_\perp\frac{\partial A_\perp^*}{\partial z} + \vartheta_\perp^*\frac{\partial A_\perp}{\partial z}\right)\end{gathered} \qquad (2.6)$$

В цих рівняннях m_e – маса електрона, $\omega_B = \frac{e}{c}\frac{B_0}{m_e}$ – циклотронна частота.

Доповнимо цю систему рівнянь співвідношенням для зміни кінетичної енергії електрона ($\frac{dW_{\text{кін}}}{dt} = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{\vartheta}$)

$$\frac{d(m_e c^2 \gamma)}{dt} = \vec{\vartheta} \cdot e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{\vartheta} \times \vec{B}\right]\right) = e\vec{\vartheta}\vec{E} =$$
$$= e\vec{\vartheta}\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (-\frac{e}{2c})(\vartheta_\perp \frac{\partial A_\perp^*}{\partial t} + \vartheta_\perp^* \frac{\partial A_\perp}{\partial t}) \qquad (2.7)$$

Система рівнянь (2.6)-(2.7) є базовою для дослідження вимушеного циклотронного випромінювання.

2.2.2 Збурення швидкості, фази обертань електрона, що рухається в постійному магнітному полі під дією електромагнітної хвилі

Розглянемо електронний пучок, що рухається в постійному магнітному полі, електромагнітна хвиля – відсутня. Тобто $A_\perp = 0$. Тоді з рівняння (2.6)-(2.7) отримаємо

$$\begin{gathered} \frac{d\gamma}{dt} = 0 => \gamma = \gamma_0 = const \\ \frac{dp_z}{dt} = 0 => \vartheta_z = \vartheta_{z0} = const \\ \frac{d\vartheta_\perp}{dt} = -i\frac{\omega_B}{\gamma_0}\vartheta_\perp \end{gathered} \qquad (2.8)$$

В цих співвідношеннях використали, що $\vec{p} = m_e \gamma \vec{\vartheta}$. Останнє рівняння з системи (2.8) має аналітичний розв'язок

$$\vartheta_\perp = \vartheta_{\perp 0}\exp(-i\frac{\omega_B}{\gamma_0}(t - t_0) - i\varphi_0) \qquad (2.9)$$

В цьому рівнянні $\vartheta_{\perp 0}$, t_0, φ_0 – константи , що визначаються початковими умовами.

У випадку, коли в системі «електронний пучок в постійному магнітному полі» подається електромагнітна хвиля траєкторії електрона збурюються, тобто набирають вигляд

$$\begin{gathered} \vartheta_{\perp} = \left(\vartheta_{\perp 0} + \widetilde{\vartheta_{\perp}}\right) \exp\left(-i\frac{\omega_B}{\gamma_0}(t - t_0) - i\varphi_0 - i\tilde{\varphi}\right) \\ \gamma = \gamma_0 + \tilde{\gamma} \end{gathered} \tag{2.10}$$

В цих рівняннях $\widetilde{\vartheta_{\perp}}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\varphi}$ збурення відповідних величин.

Приймемо, що електромагнітна хвиля має вигляд

$$\mathrm{A}_{\perp} = \mathrm{A}_{\perp 0}\exp(-i\omega t - kz) \tag{2.11}$$

Підставляємо (2.10), (2.11) в перше рівняння системи (2.6), проводимо нескладні перетворення, залишаємо доданки, які пропорційні $\mathrm{A}_{\perp}$, і отримаємо

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{\vartheta_{\perp}}}{dt} = \frac{(-ie)}{mc\gamma_0}(\omega - \vartheta_{z0}k)\mathrm{A}_{\perp 0}\exp\left(i\Delta\omega t + i\theta_0 + i\tilde{\theta}\right) - \vartheta_{\perp 0}\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \\ \tilde{\gamma}\vartheta_{\perp 0}\left(-i\frac{\omega_p}{\gamma_0}\right) + \vartheta_{\perp 0}\gamma_0\left(-i\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}\right) = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

В цих рівняннях

$$\begin{gathered} \Delta\omega = \omega - k\vartheta_{z0} + \frac{\omega_B}{\gamma_0} \\ \theta_0 = \varphi_0 - kz_0 \\ \tilde{\theta} = \tilde{\varphi} - kz_0 \end{gathered} \tag{2.13}$$

Також підставляємо (2.11) та (2.10) в (2.7) і знаходимо

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \frac{(-e)}{2mc^3}\left(\vartheta_{\perp 0}(-i\omega)A^*_{\perp 0}\exp\left(i\Delta\omega t - i\theta_0 + i\tilde{\theta}\right) + c.c.\right) \qquad (2.14)$$

Аналогічно з рівнянь (2.11), (2.10) та другого рівняння (2.6) отримаємо

$$\gamma_0\frac{d\widetilde{\vartheta_z}}{dt} + \vartheta_{z0}\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \frac{ei}{2mc}\left(\vartheta_{\perp 0}kA^*_{\perp 0}\exp\left(-i\Delta\omega t - i\theta_0 - i\tilde{\theta}\right) + c.c.\right) \qquad (2.15)$$

Далі розв'язуємо систему рівнянь (2.12) - (2.15) і знаходимо

$$\begin{gathered}
\tilde{\gamma} = \frac{(\vartheta_{\perp 0}(-i\omega)A^*_{\perp 0}(-e))}{2mc^3(-i\Delta\omega)}exp(-i\Delta\omega t - i\theta_0) + c.c.\ ; \\
\widetilde{\vartheta_\perp} = \frac{(-i)e(\omega - k\vartheta_{z0})\mathrm{A}_{\perp 0}}{mc\gamma_0(i\Delta\omega)}exp(-i\Delta\omega t - i\theta_0) + \tilde{\gamma}\ ; \\
\tilde{\varphi} = \frac{\omega_B}{\gamma^2}\frac{(\vartheta_{\perp 0}(-i\omega)\mathrm{A}_{\perp 0}{}^*(-e))}{2mc^3(-i\Delta\omega)^2}exp(-i\Delta\omega t - i\theta_0) + c.c.\ ; \\
\tilde{z} = \left(\frac{-\vartheta_{z0}}{\gamma_0}\frac{(\vartheta_{\perp 0}(-i\omega)A^*_{\perp 0}(-e))}{2mc^3(-i\Delta\omega)^2} + \frac{e\vartheta_\perp(ik)A^*_{\perp 0}}{\gamma_0 2mc(-i\Delta\omega)^2}\right)A^*_{\perp 0}exp(-i\Delta\omega t - i\theta_0) + c.c.
\end{gathered} \qquad (2.16)$$

Зазначимо, що в отриманих формулах амплітуда хвилі $\mathrm{A}_{\perp 0}$ не є константою, вона в слабо сигнальному наближенні змінюється експоненціально. Це ми можемо враховувати увівши заміну

$$\omega \to \omega - i\delta\omega \qquad (2.17)$$

Таким чином, отримали вирази (2.16), які є шуканими збуреннями величин, що описують рух електронів в магнітному полі та полі електромагнітної хвилі.

2.2.3 Рівняння для середньої густини імпульсу електронного пучка

Друге рівняння системи (2.6) описує зміну повздовжнього імпульсу одного електрона. Застосуємо це рівняння до ансамбля електронів, які в початковому стані розподілені за початковими фазами φ_0 і початковими координатами z_0 рівномірно і знайдемо зміну повздовжнього імпульсу, яка

усереднена за ансамблем електронів. Коли ж ми помножимо цю величину на n_b – кількість електронів в одиниці об'єму, то отримаємо зміну середньої густини повздовжнього імпульсу одиниці об'єма пучка

$$\frac{d\langle P_{\parallel}\rangle}{dt} = \frac{en_b}{2c}\langle(\vartheta_{\perp 0} + \widetilde{\vartheta_{\perp}})\exp\left(-i\frac{\omega_B}{\gamma_0}(t-t_0) - i\varphi_0 - i\tilde{\varphi}\right)\cdot\frac{\partial A_{\perp}^*}{\partial t} + c.c.\rangle =$$
$$= \frac{en_b}{2k}\langle(\vartheta_{\perp 0} + \widetilde{\vartheta_{\perp}})(ik)A_{\perp 0}^*\cdot(1 - i\tilde{\theta}\exp(-i\Delta\omega t - i\theta_0) + c.c.\rangle \qquad (2.18)$$

В цьому виразі

$$\Delta\omega = \omega - k\vartheta_{z0} + \frac{\omega_B}{\gamma_0}; \quad \theta_{0j} = \varphi_{0j} - kz_{0j}; \quad \tilde{\theta} = \tilde{\varphi} - k\tilde{z} \qquad (2.19)$$

Тут також використали, що $e^{i\tilde{\theta}} \approx 1 + i\tilde{\theta}$

Підставляємо в співвідношення (2.18) вирази (2.16) враховуємо (2.17) і отримаємо

$$\frac{d\langle P_{\parallel}\rangle}{dt} = \frac{en_b k|\mathrm{A}_{\perp 0}|^2}{m_e c^2\gamma_0}\left\{\begin{array}{c}\left(-\frac{\omega_B}{\gamma_0}\right)\frac{\delta\omega}{\Delta\omega^2+\delta^2\omega}\frac{\vartheta_{\perp 0}^2(\omega-\Delta\omega)(-\delta\omega)}{2c^2\Delta\omega+i\omega} + \\ + \frac{\vartheta_{\perp}^2}{c^2}\frac{\omega^2\Delta\omega i\omega}{(\Delta\omega^2+\delta^2\omega)^2}\left[\frac{k^2c^2}{\omega^2} + \frac{\Delta\omega-\omega}{c}\right]\end{array}\right\} \qquad (2.20)$$

Далі приймаємо за увагу закон збереження імпульсу

$$\frac{d}{dt}(P + P_{\parallel}) = 0$$

де

$$P = \alpha\frac{k}{\omega}\frac{E^2}{8\pi} = \alpha k\omega\frac{A_{\perp}^2}{8\pi} \qquad (2.21)$$

густина імпульсу електромагнітної хвилі.

Також використовуємо зв’язок між імпульсом густиною імпульсу та густиною енергії електромагнітної хвилі

$$P = \frac{k}{\omega} W \tag{2.22}$$

Використовуючи (2.21), (2.22) отримаємо з (2.20) вираз для зміни густини енергії та імпульсу електромагнітної хвилі за умови вимушеного циклотронного випромінювання

$$\frac{d}{dt}(W, P) = \frac{1}{\alpha}\omega(S_1 + S_2)(W, P) \tag{2.23}$$

У цій формулі

$$S_1 = \frac{\omega_B^2 \gamma_0^{-2} \omega_H \omega^{-2} \delta\omega}{\left[\omega - k\vartheta_{z0} + \frac{\omega_B}{\gamma_0}\right]^2 + \delta\omega^2} \tag{2.24}$$

$$S_2 = \frac{\vartheta_{\perp 0}^2}{c^2}\left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) \frac{\omega_B^2 \gamma_0^{-1} (\omega - k\vartheta_{z0} + \frac{\omega_B}{\gamma_0}) \delta\omega}{\left\{\left[\omega - k\vartheta_{z0} + \frac{\omega_B}{\gamma_0}\right]^2 + \delta\omega^2\right\}^2} \tag{2.25}$$

Перший доданок (S_1) пов’язаний з аномальним та нормальним ефектами Доплера, який має місце за умови $\vartheta_\perp \to 0$. Другий доданок (S_2) саме пов’язаний з вимушеним циклотронним випромінюванням і має місце , коли вираз $\frac{\vartheta_{\perp 0}^2}{c^2}$ принципово відмінний від нуля. Таким чином, співвідношення (2.23) та (2.25) описують явище вимушеного циклотронного випромінювання з точки зору енергетичного обміну між електронним пучком та електронною хвилею.

2.3 Аналіз та чисельні оцінки

З’ясуємо умови, коли вимушене циклотронне випромінювання відбувається найбільш інтенсивно. Для цього використаємо рівняння (2.23)-(2.25). Коли вже з’ясовано, що вимушене циклотронне випромінювання описує вираз (2.25). Тобто ми будемо розглядати випадок, коли

$$|S_2| \gg |S_1| \tag{2.26}$$

Досліджуємо вираз (2.25) на максимум відносно величини $\Delta\omega = \omega - k\vartheta_{z0} + \frac{\omega_B}{\gamma_0}$. Бачимо, що коли $1 - \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{c^2}{\vartheta^2} < 0$. Максимум S_2 досягається за умови

$$\omega - k\vartheta_{z0} + \frac{\omega_B}{\gamma_0} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\delta\omega. \tag{2.28}$$

Тепер визначимо $\delta\omega$. Приймемо до уваги, що $\frac{dW}{dt} = 2\delta\omega W$. Тоді знаходимо

$$\delta\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4\alpha}\frac{\vartheta_{\perp 0}^2}{c^2}\omega_B^2\gamma_0^{-1}|\omega\left(1 - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)|\right]^{1/3} \tag{2.29}$$

У виразі (2.28) знак «+» береться у випадку випромінювання електромагнітних хвиль з фазовою швидкістю більшою за ϑ_{z0} ($\vartheta_\phi > \vartheta_{z0}$), але меншою за швидкість світла с. В іншому випадку, тобто $\vartheta_\phi < \vartheta_{z0}$ вибираємо знак «-».

Тепер використовуючи (.24), (2.25) та (2.29) ми можемо нерівність $|S_2| \gg |S_1|$ записати у явному вигляді

$$\omega_B^2 \ll \mathrm{c}\left(\frac{\vartheta_\perp^2}{c^2}\gamma^2\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_B}\right)^3 \left[\omega\left(1 - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)\right]^2 \tag{2.30}$$

Таким чином за умови збільшення густини електронного потоку (тобто ω_β) нерівність (2.30) порушується і вимушене циклотронне випромінювання стає неможливим.

Проаналізуємо умови, коли має місце стабілізація вимушеного циклотронного випромінювання. Це відбувається, коли амплітуда електромагнітної хвилі перестає змінюватися, тобто $\delta\omega = 0$. Тоді з співвідношення (2.28) отримаємо

$$\omega - k\overline{\vartheta_z} + \frac{\omega_B}{\bar{\gamma}} = 0 \tag{2.31}$$

де $\overline{\vartheta_z}$ і $\bar{\gamma}$ поточні середні значення компонент швидкості ϑ_z та релятивістського фактору γ. Тоді, використовуючи (2.28), отримаємо

$$\left| k\vartheta_{z0}\left(1 - \frac{\overline{\vartheta_z}}{\vartheta_{t0}}\right) + \frac{\omega_B}{\gamma_0}\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right)\right|_{max} = \delta\omega \tag{2.32}$$

Із законів збереження енергії та імпульсу маємо

$$\begin{gathered} W_{max} = \left(\alpha \frac{\omega^2}{c^2}\frac{|\mathrm{A}_{\perp 0}|^2}{4\pi}\right)_{max} = n_b\, \mathrm{m}c^2\gamma_0\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right)_{max} \\ P_{max} = \frac{k}{\omega} W_{max} \end{gathered} \tag{2.33}$$

Звідси та з (2.32) знаходимо

$$\left(\alpha \frac{\omega^2}{c^2}\frac{|\mathrm{A}_{\perp 0}|^2}{4\pi}\right)_{max} = n_b\, \mathrm{m}c^2\gamma \left| \frac{\delta\omega}{\omega} \frac{\omega}{\left(\frac{k^2c^2}{\omega} - k\vartheta_{z0} + \frac{\omega_B}{\gamma_0}\right)} \right| \tag{2.34}$$

Також знаходимо максимальний електронний ККД

$$\eta_{max} = \left| \frac{\delta\omega}{\omega} \frac{\omega}{\left(\frac{k^2c^2}{\omega} - k\vartheta_{z0} + \frac{\omega_B}{\gamma_0}\right)} \right| \tag{2.35}$$

Вираз (2.35) та (2.34) мають цікаву особливість. Там коли $|\omega^2 - k^2c^2| \gg \delta\omega$,то

$$\eta_{max} = \frac{\delta\omega}{\omega} \left| \frac{k^2c^2}{\omega^2} - 1 \right|^{-1} \ll 1$$

Але, коли фазова швидкість $\vartheta_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k}$ близька до швидкості світла, то з урахуванням (2.29) маємо, що $\eta_{max} \sim 1$. Цей режим називають авторезонансом. За умови $\omega \approx kc$ зміни $\overline{\vartheta_z}$ та $\bar{\gamma}$ такі, що умова резонансу (2.28) зберігається незмінними протягом всього процесу. Зазначимо, що в режимі авторезонанса інкремент (2.29) є досить малим. Виходячи (2.30) густина пучка повинна бути достатньо малою [1–3].

РОЗДІЛ 3 РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ЕКСПЕРЕМЕНТУ

3.1 Опис комп'ютерної моделі

Для перевірки результатів, які отримані в розділі 2, проведемо комп'ютерне моделювання вимушеного циклотронного випромінювання за допомогою ***методу великих частинок***. Для цього розглядаємо електронний потік як окремі великі частинки, що рухаються у полях поздовжнього магнітного поля та циркулярно поляризованої електромагнітної хвилі. Моделюємо рух частинок за допомогою релятивістського рівняння руху

$$\frac{d(m_e\gamma\vec{\vartheta})}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{\vartheta}\times\vec{B}\right]\right), \tag{3.1}$$

де $\vec{E}$ – напруженість електричного та $\vec{B}$ – індукція магнітного полів, $\vec{\vartheta}$ – швидкість частинки, $\gamma = 1/\sqrt{1-(\vartheta/c)^2}$ – її релятивістський фактор, m_e– маса великої частики, q – її електричний заряд, c – швидкість світла.

Поля, що входять у це рівняння мають вигляд

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\ \vec{B} = \overrightarrow{B_0} + \vec{\nabla}\times\vec{A}, \tag{3.2}$$

де $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ – індукція повздовжнього магнітного поля, $\vec{\nabla}$ – оператор набла, $\vec{A} = \mathrm{A}_{\perp 0}(\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x} + \sin(\omega t - kz)\overrightarrow{e_y})$ – вектор-потенціал циркулярно поляризованої електромагнітної хвилі.

Приймаємо, що в початковий момент часу всі частинки рівномірно розподілені як по колових орбітах у полі повздовжнього магнітного поля, так і вздовж осі Z в межах однієї довжини хвилі.

Параметри системи вибираємо близькими до тих, що використовуються в гіротронах

Таблиця 3.1

Параметр	Значення параметра
Індукція повздовжнього магнітного поля	$B_0 = 10{,}7$ Тл
Релятивістський фактор	$\gamma = 3$
Кут вльоту електронного пучка відносно осі Z	$\alpha = 60°$
Частота електромагнітної хвилі	0,2 ТГц
Довжина електромагнітної хвилі	1,7 мм
Густина електричного струму вздовж осі Z	15 А/см^2
Кількість частинок	256

Комп'ютерна програма написана для системи MatLab. Реалізована у вигляді трьох файлів: ***start1.m, equations2n.m та mygraph.m***

У файлі start1.m – реалізовано задання вихідних даних, керування потоком даних, використовується стандартний метод розв'язку диференціальних рівнянь **ode23t**

У файлі equations2n.m записано систему диференціальних рівнянь, яку використовує підпрограма ode23t для розв'язку системи диференціальних рівнянь

Файл mygraph.m призначено для форматованого створення рисунків.

Лістинги програм start1.m, equations2n.m подано в додатках А та Б.

3.2 Режим оптимального підсилення

Результати роботи комп'ютерної моделі у випадку реалізації оптимального режиму (див. розділ 2) подана на рис. 3.1 - 3.7.

На рис. 3.1 подано залежності поперечної швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу взаємодії для 1-ї та 9-ї частинок. Бачимо, що завдяки циклотронному резонансу відбувається зменшення поперечної швидкості обох частинок. Рис. 3.2 подає аналогічну залежність, що

усереднена за усіма частинками. Ця залежність свідчить про перехід енергії поперечного руху електронів в енергію електромагнітної хвилі.

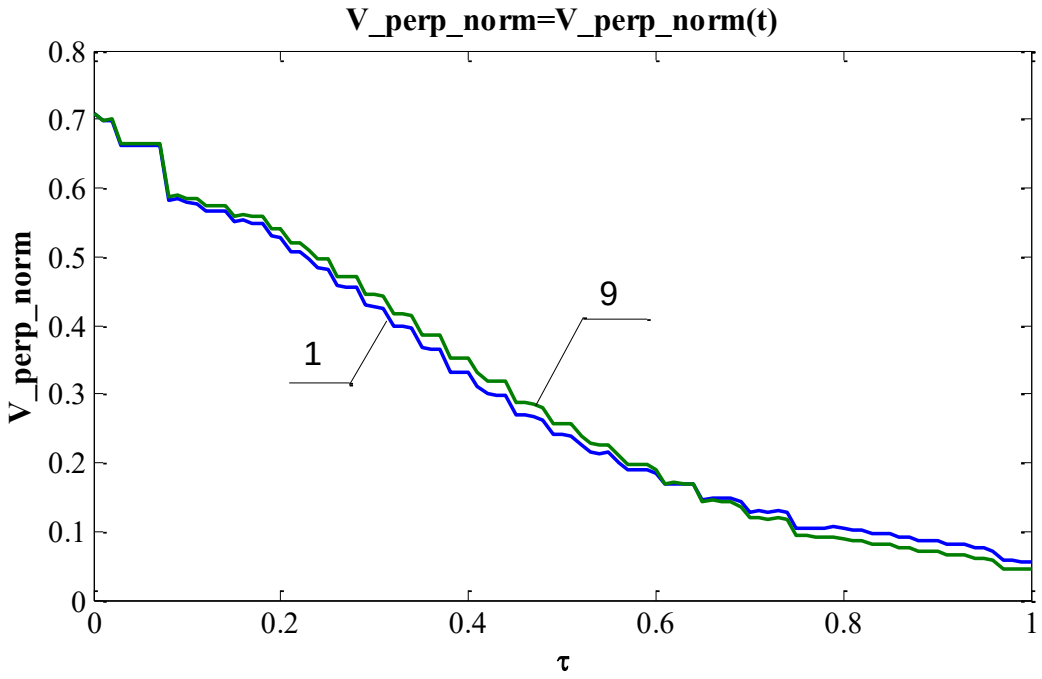

Рис. 3.1 – Залежності поперечної швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу взаємодії для 1-ї та 9-ї частинок

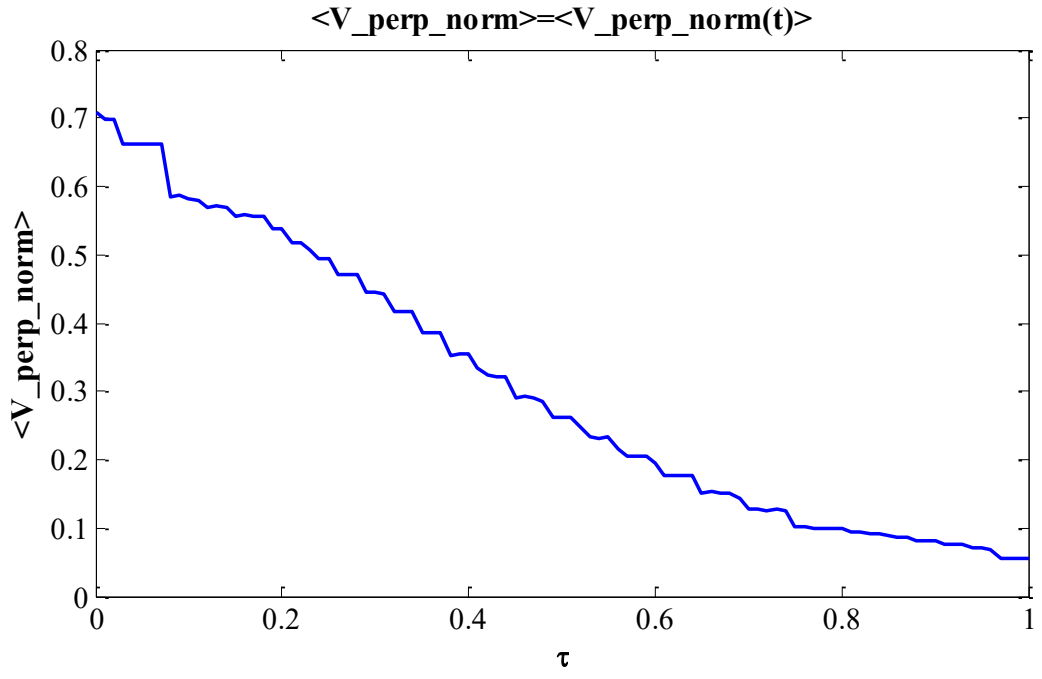

Рис. 3.2 – Залежність усередненої за усіма частинками поперечної швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу

На рисунку 3.3 подано залежності повздовжньої швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу взаємодії для 1-ї та 9-ї частинок. Тут для різних частинок маємо різну ситуацію. Так повздовжня швидкість 1-ї частики зменшується, а швидкість 9-ї збільшується. Сумарний результат динаміки повздовжньої швидкості частинок подано на рисунку 3.4. Тут зображено залежність усередненої за усіма частинками повздовжньої швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу. Бачимо, що ця швидкість збільшується. Це відбувається за рахунок зменшення поперечної швидкості.

На рисунку 3.5 подано залежності релятивістського фактору від нормованого часу взаємодії для 1-ї та 9-ї частинок. Як і у випадку з повздовжньою швидкістю маємо різну ситуацію. Енергія 1-ї частинки зменшується, а енергія 9-ї частики збільшується. На рис. 3.6 подана залежність усередненого за усіма частинками релятивістським фактором від нормованого часу. Як бачимо, в середньому енергія електронного пучка зменшується. Тобто відбувається підсилення циклотронної електромагнітної хвилі.

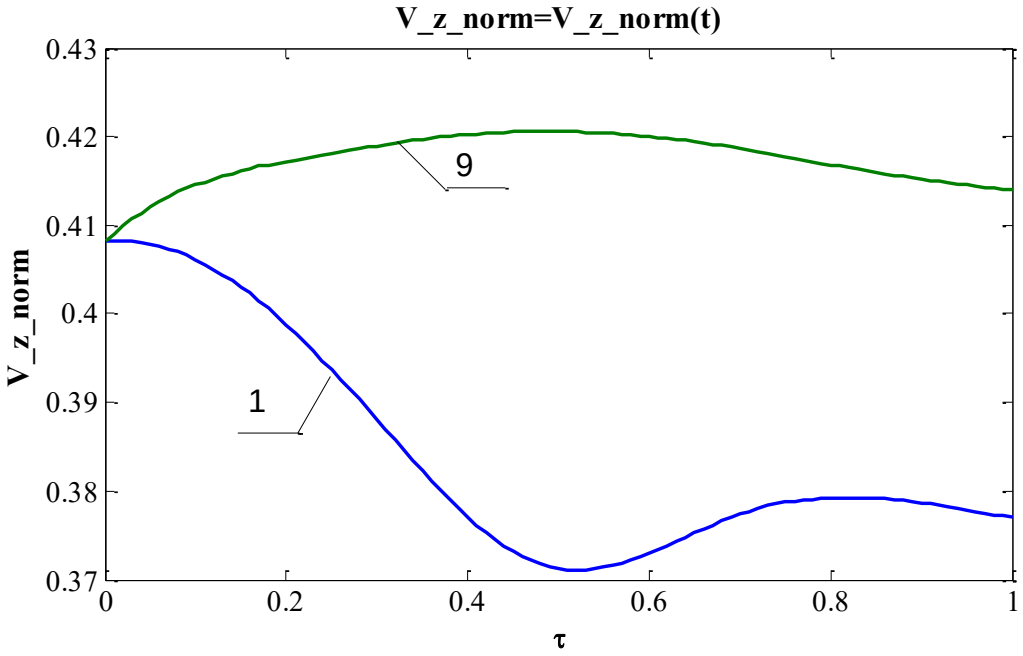

Рис. 3.3 – Залежності повздовжньої швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу взаємодії для 1-ї та 9-ї частинок

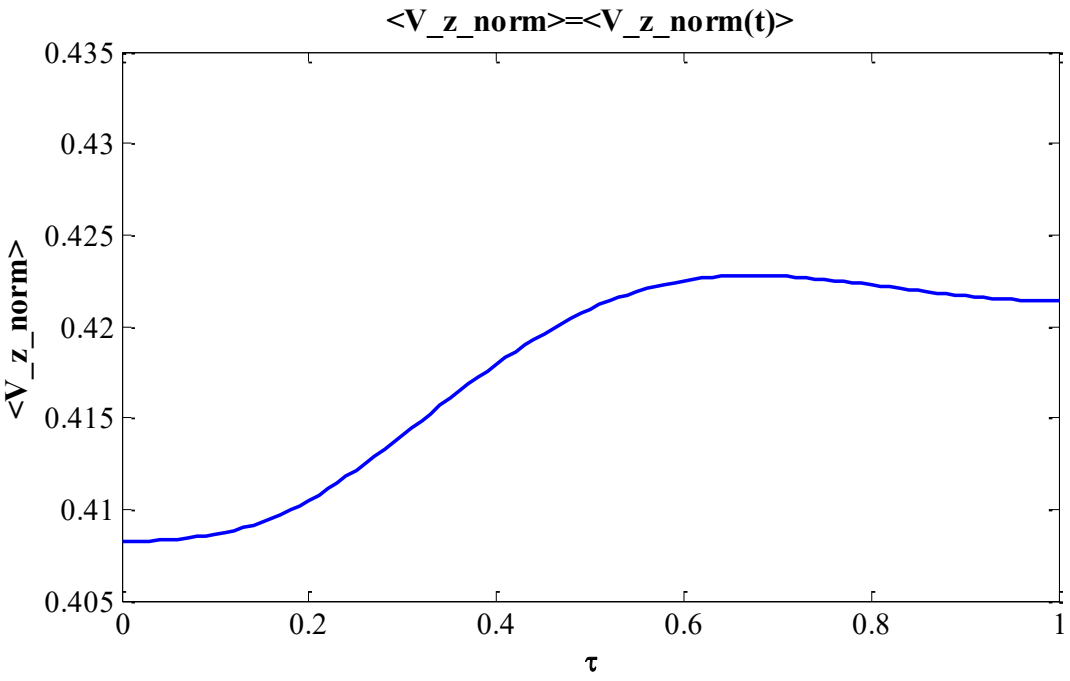

Рис. 3.4 – Залежність усередненої за усіма частинками повздовжньої швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу

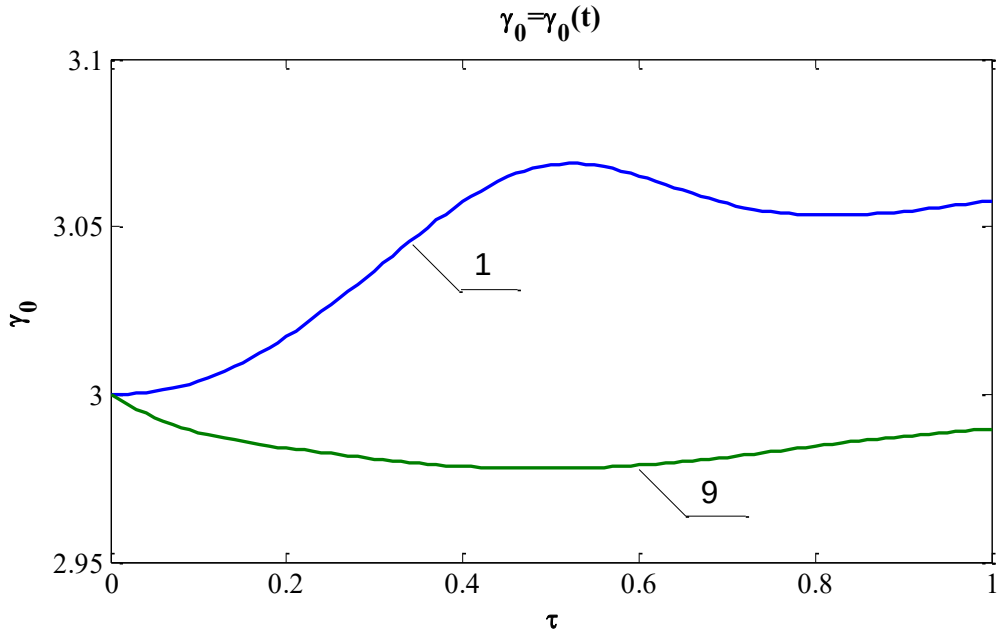

Рис. 3.5 – Залежності релятивістського фактору від нормованого часу взаємодії для 1-ї та 9-ї частинок

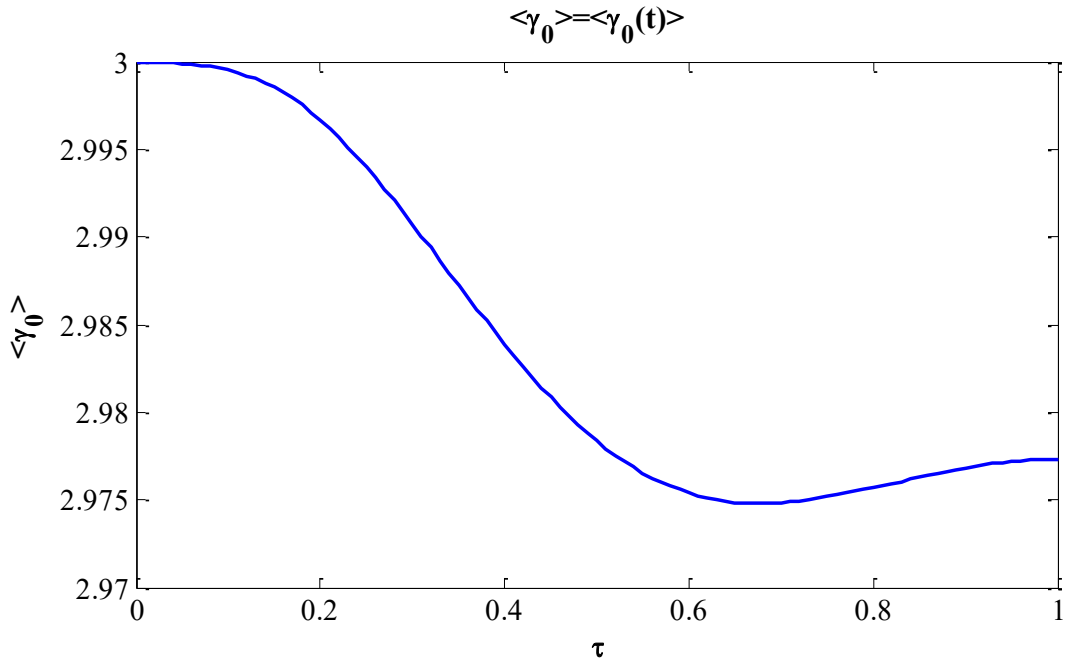

Рис. 3.6 – Залежність усередненого за усіма частинками релятивістським фактором від нормованого часу

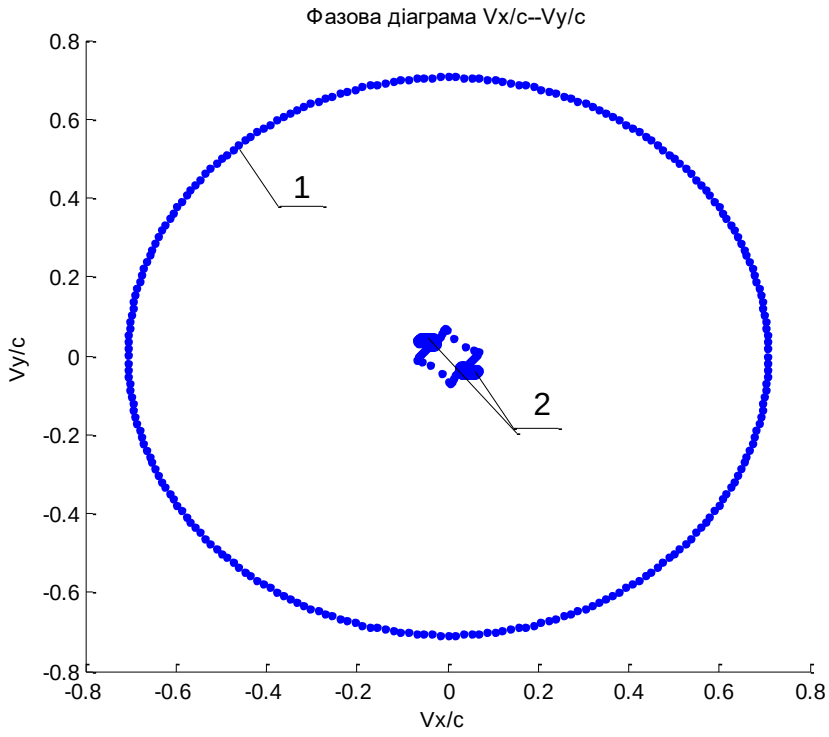

Рис. 3.7 – Фазова діаграма швидкостей $\vartheta_y/c - \vartheta_x/c$. Крива 1 відображає початковий стан, крива 2 – кінцевий стан.

На рис. 3.7 наведена фазова діаграма швидкостей $\vartheta_y/c - \vartheta_x/c$. Крива 1 відображає початковий стан, крива 2 – кінцевий стан. Бачимо, що в кінцевому стані електрони збираються в згустки, поперечна швидкість їх зменшується.

3.3 Випадок відсутності резонансу

Розглянемо випадок відсутності резонансу. Тобто випадок коли резонансі умови (2.28) не виконуються.

На рис. 3.8 подана залежність усередненої за усіма частинками поперечної швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу. Бачимо, що на початковій етапі поперечна швидкість незначно зменшується через неузгодженість початкових умов, а далі мають місце незначні осциляції. Порівнюючи цей рисунок з аналогічним рис. 3.2, можемо стверджувати, що тут переходу енергії в електромагнітну хвилю не відбувається.

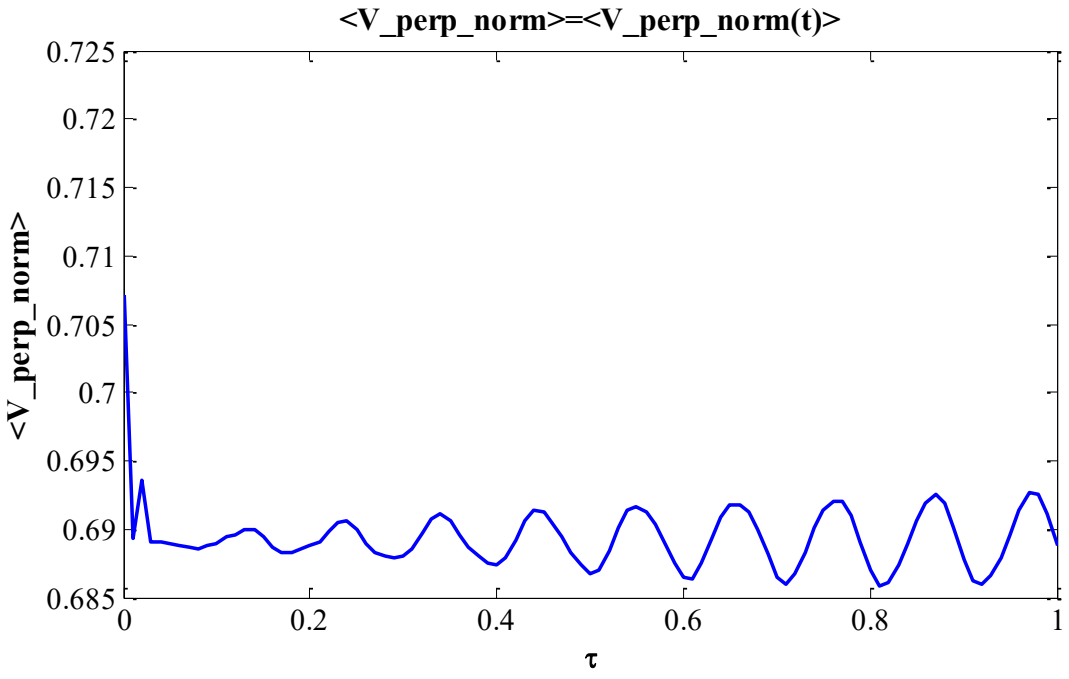

Рис. 3.8 – Залежність усередненої за усіма частинками поперечної швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу

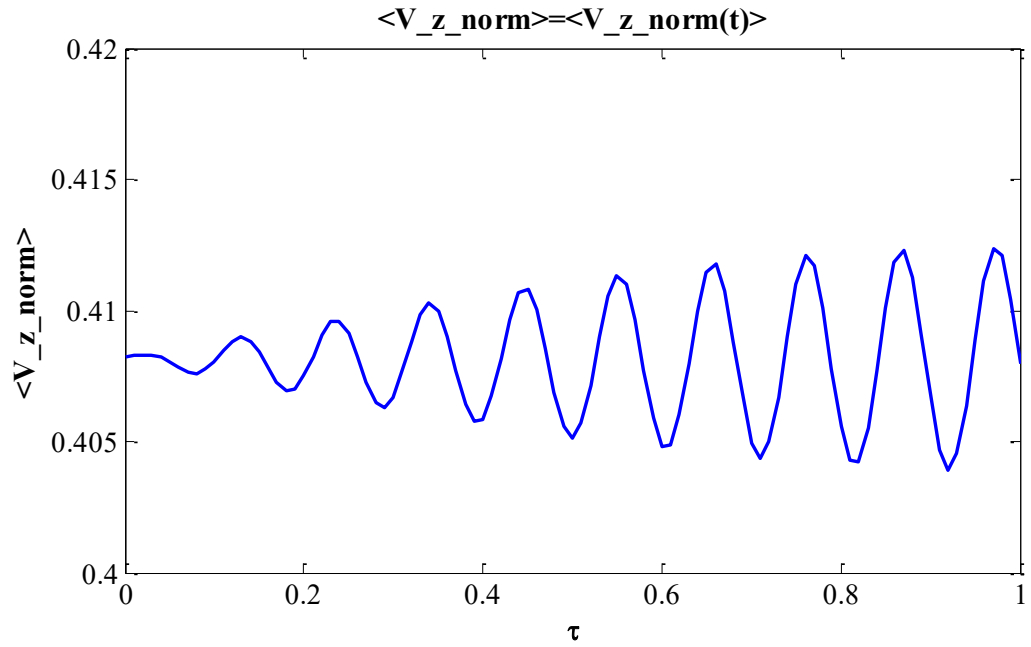

Рис. 3.9 – Залежність усередненої за усіма частинками повздовжньої швидкості, що нормована на швидкість світла, від нормованого часу

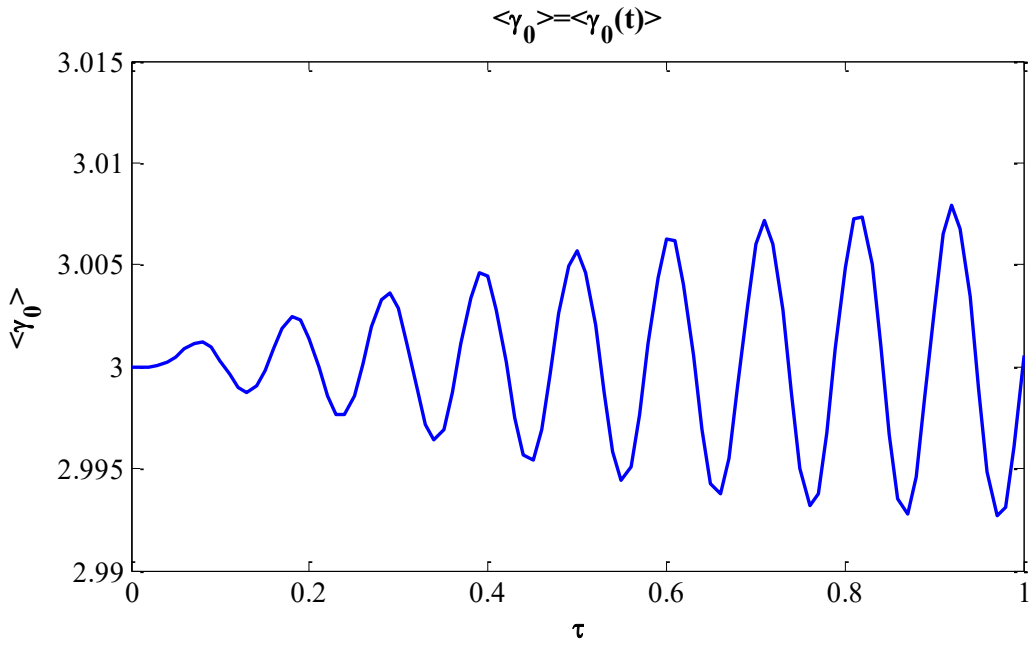

Рис. 3.10 – Залежність усередненого за усіма частинками релятивістським фактором від нормованого часу

Цей висновок випливає також з залежностей усередненої за усіма частинками повздовжньої швидкості (рис. 3.9), що нормована на швидкість

світла, та усередненого релятивістського фактору (рис. 3.10) від нормованого часу.

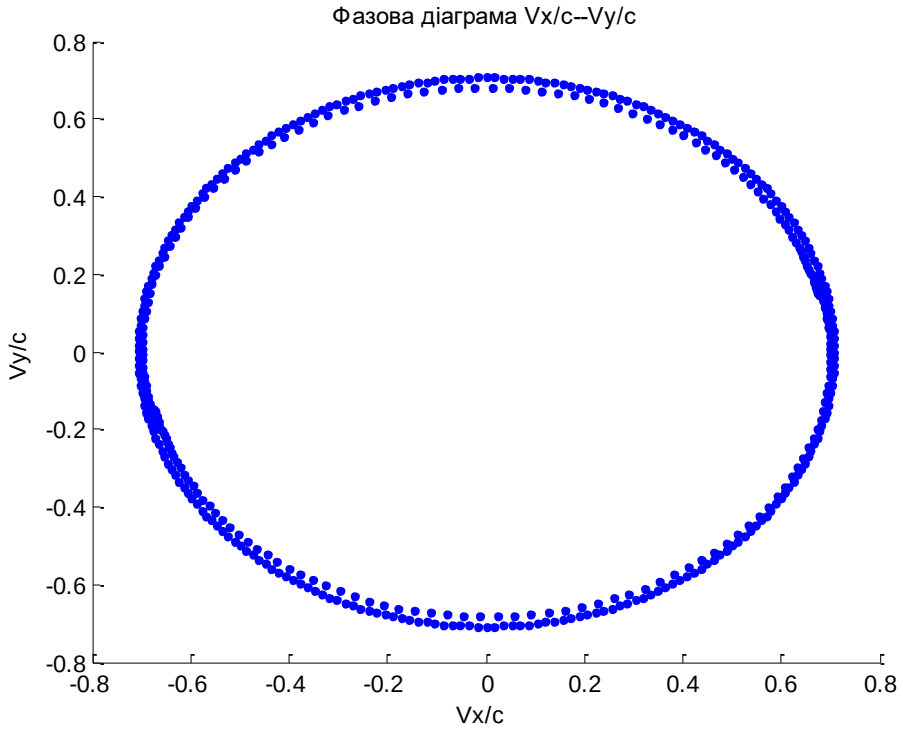

Рис. 3.11 – Фазова діаграма швидкостей $\vartheta_y/c - \vartheta_x/c$.

На рис. 3.11 зображена фазова діаграма швидкостей $\vartheta_y/c - \vartheta_x/c$ початкового та кінцевого станів. Бачимо, що вони є дуже близькими один до одного. Це означає, що в цьому випадку вимушене випромінювання електронного пучка відсутнє.

ВИСНОВОК

В роботі проведено математичне та комп’ютерне моделювання взаємодії електронного потоку, що рухається вздовж осі системи циркулярно поляризованої електромагнітної хвилі за умови вимушеного циклотронного випромінювання.

Проаналізовано випадок, коли сила взаємодії електронного пучка з зовнішньою електромагнітною хвилею є більшою за силу взаємодії електронів між собою. Використовуючи квадратичне нелінійне наближення знайдені інкременти підсилення електромагнітної хвилі за рахунок вимушеного циклотронного випромінювання. Отримані аналітичні оцінки параметрів системи.

Побудована комп’ютерна модель на основі методу великих частинок та проведено чисельний аналіз вимушеного випромінювання електронним пучком електромагнітної хвилі. Результати аналітичних досліджень підтверджені комп’ютерним моделюванням.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К. Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике: *Изв. ВУЗов. Радиофизика*. 1967. 1414–1453с.
2. Храмов, Т. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: *Japanese Journal of Livestock Management*. 2004. 12–13с.
3. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника: 2002. 232–242с.
4. А.В. Гапонов. Взаимодействие непрямолинейных электронных потоков с электромагнитными волнами в линиях передачи: *Изв. ВУЗов. Радиофизика*. 1959. 450-462,836с.
5. А.В. Гапонов. О неустойчивости системы возбужденных осцилляторов по отношению к электромагнитным возмущениям: *ЖЭЕФ*. 1960. 326с.
6. E. Di Palma, E. Sabia, G. Dattoli Cyclotron auto resonance maser and free electron laser devices: a unified point of view: *Journal of Plasma Physics*. 2017.
7. K. R. Chu. The electron cyclotron maser. Reviews of Modern Physics. 2004. Vol. 76, No. 2. C. 489–540.
8. M. Thumm. State-of-the-Art of High-Power Gyro-Devices and Free Electron Masers. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2020. Vol. 41, No. 1. C. 1–140.
9. Nusinovich, G. S., Thumm, M. K. A., Petelin, M. I. The gyrotron at 50: Historical overview. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2014. Vol. 35, No. 4. C. 325–381.
10. Gregory S. Nusinovich. Review of the gyrotron theory: USA: Institute for Research in Electronics and Applied Physics, University of Maryland, College Park, MD 20742-3511, 2017.
11. K. A. Thumm. Recent Developments on High-Power Gyrotrons—Introduction to This Special Issue. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2011. Vol. 32, No. 3. C. 241–252.

12. Du, C.-H. Millimeter-Wave Gyrotron Traveling-Wave Tube Amplifiers: 2014.
13. N. Kumar. A review on the sub-THz/THz gyrotrons: *Infrared Physics & Technology*. 2016. 38–51c.
14. Petelin M. I. The gyrotron : physical genealogy. International Journal of Terahertz Science and Technology. 2015. Vol. 8, No. 4. C. 157–169.
15. T. Idehara, S. P. S. Gyrotrons for High-Power Terahertz Science and Technology at FIR UF. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2017. Vol. 38, No. 1. C. 62–86.
16. N. Kumar. A Review on the Applications of High Power, High Frequency Microwave Source: Gyrotron. Journal of Fusion Energy. 2011. Vol. 30, No. 4. C. 257–276.
17. T. Idehara, S. P. S. Development and Application of Gyrotrons at FIR UF. IEEE Transactions on Plasma Science. 2018. Vol. 46, No. 7. C. 2452–2459.
18. Idehara, T., Sabchevski, S. P., Glyavin, M., та ін. The gyrotrons as promising radiation sources for THz sensing and imaging. Applied Sciences (Switzerland). 2020. Vol. 10, No. 3. C. 980.
19. Запевалов В. Е. Эволюция гиротронов: *Изв. ВУЗов. Радиофизика*. 2011. 559–572с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Лістинг програми start1

```
function start1

clc
close all
global N A0 w k w_H w_delt mq e_c m_c2 V0z t_end

%% КОНСТАНТИ Й ОСНОВНІ ПАРАМЕТРИ
mq      = 9.109534E-28;
e       = -4.8033E-10;
c       = 2.99792458E+10;
c2      = c*c;
e_m_c   = e/mq/c;
e_c   = e/c;
m_c2  = mq*c2;


g0=3; % релятивістський фактор
V0=c*sqrt(1-1/g0); %модуль швидкості електронів
al=60; %DEG кут вльоту електронів відносно повздовжнього
магнітного поля
V0z=V0*cosd(al);
V0_perp=V0*sind(al);

B0 = 10.7;   %Тл Індукція магнітного поля
B0 = B0/(1e-4); % Претворення в од. СГС
w_H= B0/(mq*c/e) % Ларморівська частота

w_b = 5e9;   %c,  Плазмова частота пучка
nb    = w_b^2*mq/(4*pi*e^2); %1/см^3 концентрація
електронів у пучку

Vz_phase=0.8*c; %Фазова швидкість електромагнітної хвилі
% Кругова частота електромагнітної хвилі
w=abs(w_H/g0)/(1-V0z/Vz_phase)*(1.0+0.009) % Випадок
резонансу
% w=abs(w_H/g0)/(1.5-V0z/Vz_phase) % Резонанс відсутній
k=w/Vz_phase;  % Хвильове число електромагнітної хвилі
Lb=2*pi/k % Довжина хвилі

% Оптимальний інкремент зростання
```

```
w_delt_opt=sqrt(3)/2*(1/4*(V0_perp/c)^2*w_b^2/g0*w*abs(1-
(c/Vz_phase)^2))^(1/3)

% Поточний інкремент зростання
w_delt=sqrt(sqrt((V0_perp/c)^2*w*abs(1-
(c/Vz_phase)^2)*w_b^2/g0*(w-k*V0z+(w_H/g0))/2)...
  -(w-k*V0z+(w_H/g0))^2)
w_k_V0z_w_H_g0=(w-k*V0z+(w_H/g0))

w_delt_opt_w_k_V0z_w_H_g0=w_delt/sqrt(3)/(w-
k*V0z+(w_H/g0))

Em = 1e7;     % В/м, амплітуда напруженості електричного
поля **1e5
Em = Em/(c*1.0E-6); % Перетворення в од. СГС
A0 = Em*c/w; % Амплітуда вектор-потенціалу

%% Параметры для розв'зку диференціальних рівнянь

RelTol = 5e-4; % Відносна похибка для роз'язку ODE
NOut1   = 1;  % Число частинок на осі Z 32 **16
NOut2   = 256;  % Число частинок на орбіті 64 **16

t_end =2*pi/w*20; % Кінцевий час розрахунків **10
NOut    =100; % Число точок виводу даних

fi=[0:2*pi/NOut2:2*pi-2*pi/NOut2];
V00x1=V0_perp*cos(fi);
V00y1=V0_perp*sin(fi);
V00x=[]; V00y=[];
for m1=1:NOut1
  V00x=[V00x,V00x1];
  V00y=[V00y,V00y1];
end

N=NOut1*NOut2;
V00z1=ones(1,N)*V0z;
g00=ones(1,N)*g0;

z00 = 0:Lb/N:Lb-Lb/N; %Вектор початкових координат([1:N]
-1)*Lb/N

tM = [0:t_end/NOut:t_end]; % Вектор часу виводу
результатів
```

```
Y0 = [z00, mq*g0*V00z1, mq*g0*V00x, mq*g0*V00y, g00]';  % Векор початкових умов для ODE
options=odeset('RelTol',RelTol,'AbsTol',RelTol*0.001,...
    'OutputFcn',@percent1,'Events',@nonstop1);
[t  Y] = ode23t(@equations2n,tM,Y0,options);


%% Перетворення масиву Y
z_full=Y(:,1:N);
Pz_full=Y(:,N+1:2*N);
Px_full=Y(:,2*N+1:3*N);
Py_full=Y(:,3*N+1:4*N);
g_full=Y(:,4*N+1:5*N);

%% Рисунки
% Залежність релятивістського фактору 1-ї та 9-ї частинки від часу
mygraph([t/t_end g_full(:,1)],[t/t_end g_full(:,9)],'\bf \tau','\gamma_0','\gamma_0=\gamma_0(t)');
% % Варіант 2
%
g_full_v2=(1+(Px_full.*Px_full+Py_full.*Py_full+Pz_full.*Pz_full)/(mq*c)^2).^0.5;
% mygraph([t/t_end g_full_v2(:,1)],[t/t_end g_full_v2(:,9)],'\bf \tau','\gamma_0','\gamma_0=\gamma_0(t), v2');

% Залежність середнього значення релятивістського фактору частинок від часу
mygraph([t/t_end sum(g_full,2)/N],'\bf \tau','<\gamma_0>','<\gamma_0>=<\gamma_0(t)>');
% Залежність середнього значення релятивістського фактору частинок від
% % часу. Варіант 2
% mygraph([t/t_end sum(g_full_v2,2)/N],'\bf \tau','<\gamma_0>','<\gamma_0>=<\gamma_0(t)>, v2');

% Залежність поперечної швидкості 1-ї та 9-ї частинки від часу
Vx_norm=Px_full./g_full/mq/c;
Vy_norm=Py_full./g_full/mq/c;
Vz_norm=Pz_full./g_full/mq/c;

V_perp_norm=(Vx_norm.*Vx_norm+Vy_norm.*Vy_norm).^0.5;
```

```
mygraph([t/t_end V_perp_norm(:,1)],[t/t_end
V_perp_norm(:,9)],'\bf
\tau','V\_perp\_norm','V\_perp\_norm=V\_perp\_norm(t)');

% Залежність середнього значення поперечної швидкості
частинок від часу
mygraph([t/t_end sum(V_perp_norm,2)/N],'\bf
\tau','<V\_perp\_norm>','<V\_perp\_norm>=<V\_perp\_norm(t
)>');

% Залежність повздовжної швидкості 1-ї та 9-ї частинки
від часу
mygraph([t/t_end Vz_norm(:,1)],[t/t_end
Vz_norm(:,9)],'\bf
\tau','V\_z\_norm','V\_z\_norm=V\_z\_norm(t)');
% Залежність середнього значення повздовжньої швидкості
частинок від часу
mygraph([t/t_end sum(Vz_norm,2)/N],'\bf
\tau','<V\_z\_norm>','<V\_z\_norm>=<V\_z\_norm(t)>');

% Фазова діаграма Vx/c--Vy/c
figure
for i=1:2:NOut
  scatter(Vx_norm(i,:),Vy_norm(i,:),'.');
  hold on
  plot(Vx_norm(1,:),Vy_norm(1,:),'.');
  hold off
% ylim([4.3e8 6.2e8]);
% xlim([0 2*pi]);
  xlabel('Vx/c ')
  ylabel('Vy/c')
  title('Фазова діаграма Vx/c--Vy/c');
  pause(0.05)
end

function status = percent1( t, Y, flag)
global t_end

if nargin < 3 || isempty(flag)
  fprintf('%20.10e\n',t(1)/t_end);
else
  switch(flag)
    case 'init'
      fprintf('%20.10e\n',t/t_end); %'%g'
    case 'done'
```

```
      disp('ODE завершив обчислення');
  end
end
status=0;

%%-------------------------------------------------------
function [value,isterminal,direction] = nonstop1(t,Y)

value=1;
isterminal=1;
direction=0;

fid = fopen('nonstop.txt');
if fid~=-1
  fclose(fid);
else
  value=0;
end
```

ДОДАТОК Б

Лістинг програми equations2n

function YP = equations2n(t, Y)

```
function YP = equations2n( t, Y)
% Диференціальні рівняння
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Выделение Глобальні змінні
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global N A0 w k w_H w_delt v0z mq e_c m_c2

%%%%%%% Перетворення вектора Y у фізино зрозуміли
величини
z(1:N)=Y(1:N);
Pz(1:N)=Y(N+1:2*N);
Px(1:N)=Y(2*N+1:3*N);
Py(1:N)=Y(3*N+1:4*N);
g(1:N) =Y(4*N+1:5*N);

w_delt=0;% для налаштування
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
zP(N)=0;  % Ініціалізація змінної
PzP(N)=0; % Ініціалізація змінної
PxP(N)=0; % Ініціалізація змінної
PyP(N)=0; % Ініціалізація змінної
P_perpP(N)=0; % Ініціалізація змінної
gP(N)=0;  % Ініціалізація змінної
Vx(N)=0;  % Ініціалізація змінної
Vy(N)=0;  % Ініціалізація змінної
Vz(N)=0;  % Ініціалізація змінної

%%%%%%% Конкретизація значень змінних
Vx=Px/mq./g;
Vy=Py/mq./g;
Vz=Pz/mq./g;
% w_delt1=w_delt;
w_delt1=0;

A_perp=A0*exp(1i*((w-1i*w_delt1)*t-k*z));
V_perp = Vx + 1i*Vy;

%%%%%%% Рівняння руху
P_perpP = -1i*w_H*mq*V_perp - e_c.*1i.*(w-1i*w_delt1-
k*Vz).*A_perp;
PxP=real(P_perpP);
```

```
PyP=imag(P_perpP);

zP=Vz;

PzP=e_c*real(V_perp.*(+1i).*k.*conj(A_perp));

gP=e_c*real(V_perp.*(-
1i)*(w+1i*w_delt).*conj(A_perp))/m_c2;

%Формуємо вектор-стовпець похідних
YP=[zP(:); PzP(:); PxP(:); PyP(:); gP(:)];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%
```