

Ідентифікація лінійних стаціонарних моделей оптимального керування з квадратичним критерієм якості

НАЗАРЕНКО О.М., ФІЛЬЧЕНКО Д.В.

Сумський державний університет

Для ідентифікації цільового функціоналу системи запропоновано енергетичний підхід, який оснований на розкладанні його за базисом як елемента енергетичного простору. Специфікація та ідентифікація рівнянь руху проведена за допомогою ймовірно-статистичних методів. Даний підхід апробований на реальних даних для моделей макроекономічної динаміки західноєвропейських країн.

Для идентификации целевого функционала системы предложен энергетический подход, который основан на разложении его по базису как элемента энергетического пространства. Спецификация и идентификация уравнений движения проведена с помощью вероятностно-статистических методов. Данный подход апробирован на реальных данных моделей макроэкономической динамики западноевропейских стран.

An energy approach has been proposed for identification of an objective function. It is based on basis decomposition of system's potential as an element of energy space. Equations of motion's specification and identification has been made using probabilistic and statistical methods. This approach has been approved using real data for models of West-European countries macroeconomic dynamics.

Проблеми оптимального керування динамічними системами – одні з найважливіших і актуальніших в економіці та техніці. До того ж, майже всі природничі науки базуються на принципах оптимальності, яка вважається невід'ємною характеристикою природи. Саме тому моделі оптимального керування є важливим аналітичним інструментом розв'язання багатьох практичних та наукових завдань: синтез автоматичних стабілізаторів в економіці, оптимізація траєкторії керованого руху в техніці, тощо [1, 2].

Побудова будь-якої моделі динамічної оптимізації складається з деяких базових етапів. Спочатку необхідно специфікувати вектори фазових змінних та змінних керувань, а також проміжок часу оптимізації. Далі – отримати рівняння руху. Наступний етап – визначення фізичних обмежень на фазові змінні та змінні керувань. Після цього необхідно обрати критерій якості функціонування системи у вигляді цільового функціоналу. Після повної специфікації моделі оптимального керування виникає проблема ідентифікації її невідомих параметрів. Заключним етапом є, власне, оптимізація. Дана робота спрямована на проблему максимізації деякого функціоналу.

Проте, варто детальніше зупинитися на проблемі оцінювання невідомих параметрів моделі. Якщо рівняння руху та цільовий функціонал доречно специфікувати відомими функціональними формами, то параметри цих моделей звичайно оцінюють узагальненим методом моментів або нелінійним методом найменших квадратів. При цьому часто доводиться вдаватися до їх модифікації у зв'язку з присутньою автокореляцією та використовувати не завжди ефективні методи чисельної оптимізації: алгоритм імітації затвердіння та алгоритм Ньютона-Рапсона [3]. Тому деякі дослідники за рахунок спрощеної специфікації моделі застосовують класичні ймовірно-статистичні методи ідентифікації. Але навіть у випадку лінійних функціональних форм, виникає ряд труднощів: відсутність вільного члена в рівняннях регресії не дозволяє користуватися багатьма класичними статистиками, а теорія лінійних систем регресійних рівнянь найчастіше дає низькі значення коефіцієнтів детермінації R^2 [4].

Тому дана робота має на меті продемонструвати новий ефективний підхід до вирішення проблем специфікації та ідентифікації моделей оптимального керування, поданих лінійними стаціонарними динамічними системами.

Нехай $\{\mathbf{x}(t)\} = \{\mathbf{x}(t) \in E^n \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$ – фазова траєкторія динамічної системи, неперервна вектор-функція, значення якої в кожний даний момент часу t з вказаного інтервалу є фазові вектори-стовпці $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$ n -вимірною простору. Аналогічно, $\{\mathbf{u}(t)\} = \{\mathbf{u}(t) \in E^r \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$ – траєкторія керування, кусково-неперервна вектор-функція, координати якої – r -вимірні вектори-стовпці керування $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))'$. Тоді рівняння руху лінійної стаціонарної динамічної системи має вигляд

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

де \mathbf{A} і \mathbf{B} – невідомі матриці розмірностей $n \times n$ і $n \times r$ інваріантні за часом. Для наочності дослідження серед обмежень на змінні моделі будемо розглядати лише граничну умову

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2)$$

де \mathbf{x}_0 – фіксована початкова точка фазової траєкторії.

Позначимо $G(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), t)$ деякий потенціал динамічної системи, емпірична неперервно-диференційована функція, що характеризує якість системи в даний момент часу t . Повний функціонал динамічної системи запишемо у вигляді

$$\tilde{J} = \int_{t_0}^{t_1} G(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (3)$$

який, як відомо [1], можна трансформувати у цільовий функціонал

$$J = J\{\mathbf{u}(t)\} = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt + F(\mathbf{x}_1, t_1). \quad (4)$$

Тут $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ – кінцева точка фазової траєкторії, а підінтегральна функція $I(\dots)$ і функція кінцевих параметрів $F(\dots)$ неперервно-диференційовані.

Отже, задача ідентифікації моделі оптимального керування в даному випадку полягає в специфікації потенціалу системи $G(\dots)$, функцій $I(\dots)$ та $F(\dots)$ цільового функціоналу, ідентифікації невідомих матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} , а також інших невідомих параметрів.

Спочатку ідентифікуємо рівняння руху (1).

Модель (1), (2) називається відкритою інерційною моделлю і, маючи r степенів вільності, є недовизначеною ($\mathbf{u}(t) \neq 0$) [2].

Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, де \mathbf{I} – одинична матриця розмірності $n \times r$. Тоді вектор-функцію керувань $\mathbf{u}(t)$ моделі (1) можна трактувати як сумарне значення помилок в специфікації лінійної моделі

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (5)$$

Такі моделі називаються закритими інерційними моделями [2]. Проте, маючи повну визначеність ($\mathbf{u}(t) \equiv 0$), модель (5), (2) описує задану динамічну систему гірше, ніж (1), (2). Інакше кажучи, $\mathbf{u}(t)$, що відображає дію неврахованих факторів, помилки в даних, тощо, є інструментом покращення закритої інерційної моделі. Окрім цього, подібна інтерпретація керувань $\mathbf{u}(t)$ дозволяє використовувати ймовірно-статистичні методи для ідентифікації (1).

В даній роботі пропонується наступний метод ітераційного застосування ймовірно-статистичних методів ідентифікації рівняння руху (1).

Дискретизуємо неперервну модель (1). Нехай $[t_0^*, t_1^*]$ – базовий період. Розіб'ємо його на T точок з кроком $\Delta t = 1$. Похідну вектора фазових координат за часом будемо апроксимувати лівосторонніми кінцевими різницями: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-1)$, $t = 1, 2, \dots, T$. Тоді систему диференціальних рівнянь (1) можна записати у дискретному вигляді:

$$\begin{cases} \Delta x_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + v_1, \\ \Delta x_2 = a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + v_2, \\ \dots \\ \Delta x_n = a_{n0} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + v_n. \end{cases} \quad (6)$$

Тут $\{v_i\}_{i=1}^n$ – випадкові збурення; $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – невідомі елементи матриці \mathbf{A} ; $\{a_{i0}\}_{i=1}^n$ – вільні члени, наявність яких в класичних регресіях є обов'язковою (в моделях без вільного члена більшість статистик виявляються не інформативними) [3].

Першим кроком алгоритму ідентифікації матриці \mathbf{A} є оцінювання параметрів кожної з регресій для системи (6), наприклад, методом найменших квадратів (МНК). Часто при застосуванні методів динамічної оптимізації матрицю \mathbf{A} зручно представляти симетричною [1, 2]. Тому наступним кроком є усереднення оцінених в (6) недиагональних елементів за формулою:

$$a_{ij}^{\hat{n}\hat{d}} = \frac{\hat{a}_{ij} + \hat{a}_{ji}}{2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді діагональні елементи і вільні члени можна знову уточнити за допомогою МНК для моделей:

$$\begin{cases} \Delta x_1 - \hat{a}_{12}^{\hat{n}\hat{d}}x_2 - \dots - \hat{a}_{1n}^{\hat{n}\hat{d}}x_n = \hat{a}_{10} + \hat{a}_{11}x_1 + \hat{v}_1, \\ \Delta x_2 - \hat{a}_{12}^{\hat{n}\hat{d}}x_1 - \dots - \hat{a}_{2n}^{\hat{n}\hat{d}}x_n = \hat{a}_{20} + \hat{a}_{22}x_1 + \hat{v}_2, \\ \dots \\ \Delta x_n - \hat{a}_{1n}^{\hat{n}\hat{d}}x_1 - \dots - \hat{a}_{n-1,n}^{\hat{n}\hat{d}}x_{n-1} = \hat{a}_{n0} + \hat{a}_{nn}x_1 + \hat{v}_n, \end{cases} \quad (7)$$

де $\{\hat{v}_i\}_{i=1}^n$ – оцінені випадкові збурення; $\{\hat{a}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – МНК-оцінки елементів $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ матриці \mathbf{A} ; $\{\hat{a}_{i0}\}_{i=1}^n$ – МНК-оцінки вільних членів регресії.

Отже, підсумкова модель, що є дискретним аналогом рівняння руху (1), приймає вигляд:

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}^{\hat{n}\hat{d}}x_2 + \dots + \hat{a}_{1n}^{\hat{n}\hat{d}}x_n + u_1, \\ \Delta x_2 = \hat{a}_{12}^{\hat{n}\hat{d}}x_1 + \hat{a}_{22}x_2 + \dots + \hat{a}_{2n}^{\hat{n}\hat{d}}x_n + u_2, \\ \dots \\ \Delta x_n = \hat{a}_{1n}^{\hat{n}\hat{d}}x_1 + \hat{a}_{2n}^{\hat{n}\hat{d}}x_2 + \dots + \hat{a}_{nn}x_n + u_n, \end{cases} \quad (8)$$

де $\{u_i | u_i = \hat{v}_i + a_{i0}\}_{i=1}^n$ – координати вектор-функції керувань \mathbf{u} .

Для кожної регресії в (6) і (7) обчислюється коефіцієнт детермінації R^2 та перевіряється значущість оцінених коефіцієнтів, наприклад, за критерієм Стьюдента [5]. Якщо виникає підозра щодо суттєвої незначущості якоїсь фазової координати, її можна виключити з моделі і повторити розрахунки для моделей з меншою кількістю фазових координат.

У випадку, коли розглянутий алгоритм дає незадовільні результати щодо R^2 , пропонується провести його модифікацію, а саме: модель (7) записується у вигляді

$$\begin{cases} \Delta x_1 - \lambda_{12}x_2 - \dots - \lambda_{1n}x_n = \hat{a}_{10} + \hat{a}_{11}x_1 + \hat{v}_1, \\ \Delta x_2 - \lambda_{12}x_1 - \dots - \lambda_{2n}x_n = \hat{a}_{20} + \hat{a}_{22}x_1 + \hat{v}_2, \\ \dots \\ \Delta x_n - \lambda_{1n}x_1 - \dots - \lambda_{n-1,n}x_{n-1} = \hat{a}_{n0} + \hat{a}_{nn}x_1 + \hat{v}_n. \end{cases} \quad (9)$$

Тут $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – керовані параметри, які знаходяться в деякому околі $a_{ij}^{\hat{n}\hat{d}}$, наприклад, $[a_{ij}, a_{ji}]$. Довільність у виборі невідомих параметрів $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$ в (9) покликана покращити якість моделей (наприклад, збільшити коефіцієнти детермінації R^2).

Після того, як рівняння руху (1) повністю ідентифіковане, можна переходити до ідентифікації цільового функціоналу (4). Для цього пропонується так званий енергетичний підхід, що оснований на поданні потенціалу G системи як елемента деякого енергетичного простору.

Фактично лінійна динамічна система, описана моделлю (1), в кожний момент часу t складається зі статичних компонент стану $\mathbf{x}(t)$ та помилок специфікації $\mathbf{u}(t)$, а також динамічної компоненти $\dot{\mathbf{x}}(t)$ – швидкості зміни стану. Внесок кожної з компонент у потенціал системи G будемо характеризувати відповідними квадратичними формами наступного виду:

$$Q_{P_1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{P}_1 \mathbf{x}, \quad Q_{P_2}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}' \mathbf{P}_2 \mathbf{u}, \quad Q_{P_3}(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{P}_3 \dot{\mathbf{x}}.$$

У загальному випадку матриці $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ ідентифікувати досить важко. Проте, наступні міркування значно спрощують цю задачу.

Розглянемо детальніше квадратичну форму вектор функції помилок $\mathbf{u}(t)$. З рівняння (1) випливає:

$$Q_{P_2}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}' - \mathbf{x}' \mathbf{A}) \mathbf{P}_2 (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \mathbf{x}).$$

Оскільки у виборі матриці \mathbf{P}_2 існує певна довільність, то пропонується обрати її рівною \mathbf{A}^{-1} . По-перше, матриця \mathbf{A} вже ідентифікована, а по друге, в такому випадку попередній вираз значно спрощується:

$$Q_{A^{-1}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}' \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x}' \dot{\mathbf{x}}.$$

Більш того, оскільки $\dot{\mathbf{x}}' \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{x}}' \dot{\mathbf{x}})$, то

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{u}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{x}}' \dot{\mathbf{x}}). \quad (10)$$

Співвідношення (10) заслуговує на особливу увагу. Перші два доданки лівої частини (10) можна трактувати як питомі (в момент часу t) потенціальну та кінетичну енергію відкритої інерційної моделі (1), (2), а третій – як питому енергію помилок моделі закритої інерційної моделі (5), (2). Сума потенціальної та кінетичної енергій відкритої інерційної моделі мінус енергія помилок складає повну енергію закритої інерційної моделі. Права частина (10) – дія системи з одиничною масою (фізична величина, що має розмірність добутку імпульсу на координату і яка лежить в основі принципу найменшої дії).

Отже, енергетичне співвідношення (10) має таку фізичну інтерпретацію: дія відкритої інерційної моделі (моделі зі специфікованими входами) не залежить від входів, а є внутрішньою властивістю самої моделі. Іншими словами, дія відкритої інерційної моделі відбувається повністю за рахунок енергії закритої інерційної моделі. Насправді, ця особливість є фундаментальною для лінійних стаціонарних систем і часто в тому чи іншому вигляді зустрічається в кібернетиці та системному аналізі. Так, наприклад, відомо, що проблема стійкості лінійних стаціонарних систем також є їх внутрішньою властивістю, що не залежить від входу [2].

З енергетичного співвідношення (10) випливає, що розглянуті вище матриці $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ і \mathbf{P}_3 доцільно ідентифікувати як $\mathbf{A}, \mathbf{A}^{-1}$ і \mathbf{A}^{-1} . Тоді отримуємо три квадратичні форми $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$, $Q_{\mathbf{A}^{-1}}(\mathbf{u})$ і $Q_{\mathbf{A}^{-1}}(\dot{\mathbf{x}})$, які характеризують внесок статичних і динамічних компонент моделі (1), (2) у потенціал G . Ці три квадратичні форми можна розглядати як базис в енергетичному просторі, елементом якого є потенціал G . Враховуючи особливості ймовірно-статистичної методології, що застосовується в даній роботі, розкладання за базисом дає:

$$G = C_0 + C_1 \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} + C_2 \frac{1}{2} \mathbf{u}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} + C_3 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}} + \varepsilon, \quad (11)$$

де ε – випадкове збурення; C_0, C_1, C_2 і C_3 – невідомі коефіцієнти.

Константу C_0 можна трактувати як внутрішній потенціал системи в стані покою. Стан покою системи ($\mathbf{x} \equiv 0$) слід відрізяти від статичного стану, або стану інваріантності за часом всіх фазових координат ($\mathbf{x} \equiv \text{const}$). Як і в стані покою, так і в статичному стані обидві частини енергетичного співвідношення (10) тотожно дорівнюють нулю. Це, до речі, свідчить про те, що дія системи, хоча кількісно й залежить від всіх видів енергій в базисі енергетичного простору, але якісно повністю визначається лише кінетичною енергією.

Необхідно ідентифікувати модель (11) потенціалу системи. Якщо існує статистична інформація по всім пояснюючим змінним в (11), то, наприклад, за допомогою МНК можна оцінити невідомі коефіцієнти, а оцінену регресійну модель подати у вигляді

$$\hat{G} = \hat{C}_0 + \hat{C}_1 \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} + \hat{C}_2 \frac{1}{2} \mathbf{u}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} + \hat{C}_3 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}}, \quad (12)$$

де $\hat{C}_0, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ і \hat{C}_3 – МНК-оцінки, знайдені з матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x})_{t=1} & \frac{1}{2} (\mathbf{u}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u})_{t=1} & \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}})_{t=1} \\ 1 & \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x})_{t=2} & \frac{1}{2} (\mathbf{u}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u})_{t=2} & \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}})_{t=2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x})_{t=T} & \frac{1}{2} (\mathbf{u}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u})_{t=T} & \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}})_{t=T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_0 \\ \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \\ \hat{C}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \dots \\ G_T \end{pmatrix}.$$

Тут $\mathbf{u}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{A} \mathbf{x}_t$, а похідні в базових точках, як і раніше, обчислюються зліва: $\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots, T$.

Отже, потенціал G динамічної системи повністю ідентифікований. Обчислимо його повний функціонал (3):

$$\begin{aligned} \tilde{J} = \int_{t_0}^{t_1} G dt = & \hat{C}_0 (t_1 - t_0) + \hat{C}_1 \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} dt + \\ & + \hat{C}_2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} dt + \hat{C}_3 \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Якщо енергетичне співвідношення (10) стосувалося питомих енергій, то інтегрування (10) на періоді оптимізації $[t_0, t_1]$ приводить до аналогічного співвідношення, але у повних енергіях:

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}} dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}' \mathbf{A} \mathbf{u} dt = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}' \dot{\mathbf{x}})_{t_0}^{t_1}.$$

Виражаючи звідси повну кінетичну енергію та підставляючи її в (13), отримуємо:

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & \hat{C}_0 (t_1 - t_0) + \frac{\hat{C}_3}{2} (\dot{\mathbf{x}}' \dot{\mathbf{x}})_{t_0}^{t_1} + \\ & + (\hat{C}_1 - \hat{C}_3) \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} dt + (\hat{C}_2 + \hat{C}_3) \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} dt. \end{aligned}$$

З теорії динамічної оптимізації відомо, що $\max \tilde{J} = \max J + \hat{C}$, де \hat{C} – константа, яка в даному випадку дорівнює $\hat{C}_0 (t_1 - t_0) - \frac{\hat{C}_3}{2} (\dot{\mathbf{x}}' \dot{\mathbf{x}})_{t_0}$. Тоді цільовий функціонал (4) приймає вигляд:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}' \mathbf{A}^* \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{B}^* \mathbf{u}) dt + \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \mathbf{S} \mathbf{x})_{t=t_1}, \quad (14)$$

$$\mathbf{A}^* = (\hat{C}_1 - \hat{C}_3) \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}^* = (\hat{C}_2 + \hat{C}_3) \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{S} = \hat{C}_3 \mathbf{I}.$$

Отже, приходимо до задачі максимізації цільового функціоналу (14) при заданому рівнянні руху (1) і початковій умові (2). Задачу з цільовим функціоналом такого виду, як в (14), звичайно називають задачею Больца [2].

Апробацію наведеного алгоритму будемо проводити на прикладі моделі макроекономічної динаміки. Як приклад, наведемо результати специфікації та ідентифікації для економіки Данії за даними 1980-2000 рр. (базовий період). Специфікуємо динамічну модель (1) наступними макроекономічними показниками – основними фондами (x_1), матеріальними витратами (x_2) і споживчими витратами (x_3). У ролі енергетичного потенціалу G оберемо ВВП країни. Всі

дані беруться як відношення до початкового періоду. Нижче приведені результати ідентифікації невідомих параметрів задачі Больца (1), (2), (14).

Так, ітераційна процедура ідентифікації матриці \mathbf{A} дала задовільні результати вже після першої ітерації:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2042 & -0.2974 & -0.0421 \\ -0.2974 & 0.7154 & -0.1601 \\ -0.0421 & -0.1601 & 0.2527 \end{pmatrix}.$$

Всі характеристичні корні матриці \mathbf{A} додатні ($\lambda_1 = 0.8787$, $\lambda_2 = 0.0166$, $\lambda_3 = 0.2770$). Значить [1], \mathbf{A} додатно визначена. Для всіх рівнянь руху (1) коефіцієнти детермінації R^2 виявилися порядку 97-98%, що свідчить про адекватність результатів моделювання реальним особливостям розвитку макроекономічної системи [5].

МНК-оцінювання параметрів потенціалу G (12) системи дало наступні результати:

$$\hat{G} = 0.74 + 0.53 Q_A(\mathbf{x}) - 0.64 Q_{A^{-1}}(\mathbf{u}) + 0.39 Q_{A^{-1}}(\dot{\mathbf{x}}),$$

(s.e.) (0.11) (0.14) (0.22) (0.14)

де в дужках зазначені стандартні помилки МНК-оцінок невідомих коефіцієнтів. Використовуючи критерій Стюдента [5] з рівнем значущості $\alpha = 0.05$, робимо висновок, що всі компоненти базису енергетичного простору значуще впливають на потенціал (у даному випадку ВВП) макроекономічної системи. Коефіцієнт детермінації R^2 , рівний 98%, також свідчить на користь побудованої моделі.

Відомо, що для розв'язання задачі максимізації функціоналу (14), необхідно, щоб матриця \mathbf{B}^* була від'ємно визначеною [1]. Оскільки \mathbf{A} (за ідентифікацією) і, як наслідок, \mathbf{A}^{-1} додатно визначені, то, очевидно, зазначена умова виконується при

$$\hat{C}_2 + \hat{C}_3 < 0. \quad (15)$$

Умова (15) в даному випадку виконується ($\hat{C}_2 + \hat{C}_3 = -0.05 < 0$), а значить, матриця \mathbf{B}^* цільового функціоналу (14) є від'ємно визначеною.

Для того, щоб перевірити якість імітації для ідентифікованого рівняння руху (1), розв'яжемо пряму задачу динаміки, тобто знайдемо розв'язок матричного диференціального рівняння (1) при заданих \mathbf{A} і управліннях \mathbf{u} . Оскільки \mathbf{A} – додатно визначена, то для стійкості розв'язку необхідно його шукати в оберненому часі [2]:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-T)} \mathbf{x}_1 + e^{\mathbf{A}(t-T)} \int_T^t e^{-\mathbf{A}(\tau-T)} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

На рис. 1 точками зображені реальні дані, а кривими – модельні значення потенціалу системи (рис. 1а), основних фондів (рис. 1б), матеріальних витрат (рис. 1в) і споживчих витрат (рис. 1г).

Отже, в даній роботі запропоновано нові підходи до специфікації та ідентифікації моделей оптимального керування для лінійних систем з квадратичним критерієм якості. Ключовим моментом стала аналогія між диференціальними рівняннями з невідомими функціями керування і регресійними моделями. Для ідентифікації рівнянь руху (1) запропоновано ітераційну параметричну процедуру МНК-оцінювання невідомих елементів матриці \mathbf{A} . Введені параметри необхідні для отримання високої точності і адекватності моделей.

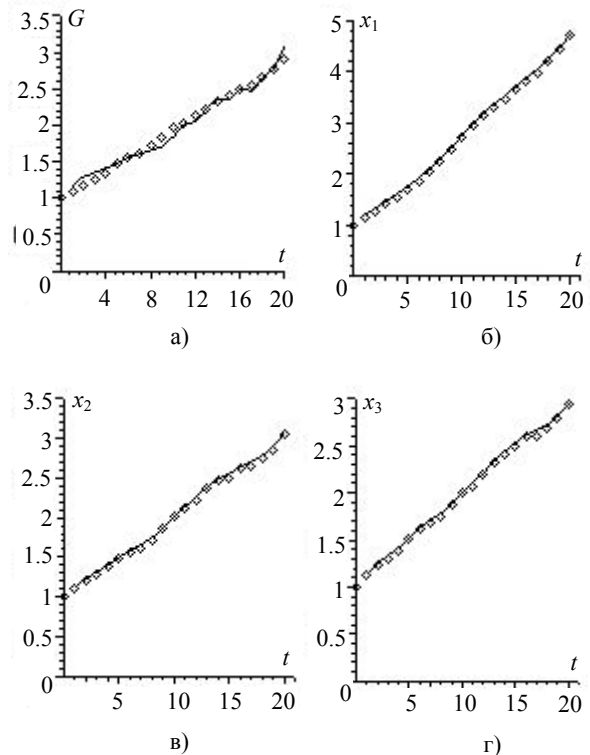


Рис. 1. Реальні та модельні значення потенціалу G та фазових координат x_1, x_2, x_3 .

Цільовий функціонал (14) моделі оптимального керування специфікований для задачі Больца. Для цього запропоновано так званий енергетичний підхід, який дозволив розглядати потенціал системи як елемент енергетичного простору, базисом якого є квадратичні форми статичних і динамічних елементів моделі (1). Апробація запропонованих підходів на реальних статистичних даних у базовий період продемонструвала їх дієвість і ефективність.

У подальшому передбачається перейти до аналізу моделей (1), (2), (14) в оптимізаційний період. Для макроекономічної динамічної системи оптимізація функціоналу буде означати максимізацію сумарного ВВП за деякий період часу.

Список літератури

1. Intriligator M.D. Mathematical optimization and economic theory. – Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – 508 pp.
2. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 376 с.
3. Ljungqvist L., Sargent T. Recursive macroeconomic theory. Second edition. – Massachusetts Institute of Technology, 2000. – 988 pp.
4. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: Юнити, 1998. – 1012 с.
5. Назаренко О.М. Основы эконометрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – К.: „Центр навчальної літератури”, 2005. – 392 с.