УДК 330.46

ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ СТАЦІОНАРНИХ ЛІНІЙНО-КВАДРАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Назаренко О.М., Фільченко Д.В.
Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, Суми, Україна, 40007, e-mail: dm.filchenko@yahoo.com

Вступ

Багато керованих динамічних систем і процесів може бути успішно вивчено в рамках математичної теорії оптимального керування. Проте, майже завжди на практиці безпосередній задачі оптимізації передує пов‘язана з нею задача специфікації та параметричної ідентифікації моделі. Класичні методи статистичної та інженерної ідентифікації [1], що застосовуються для оцінювання моделей „вхід-вихід” та моделей у просторі станів [2], здебільшого зводяться до пошуку безумовного екстремуму деякої функції, нелінійної за невідомими параметрами. Тому на практиці виникає ряд труднощів чисельної реалізації нелінійних алгоритмів і отримання глобальних розв‘язків. Проблема поглиблюється, якщо модель нелінійна за деякими змінними [3]. Таким чином, актуальним видається вирішення питання оцінювання невідомих параметрів динамічних моделей, що потенційно можуть бути використані для специфікації задач оптимального керування. За умов стаціонарності якість ідентифікації на базовому періоді є головною умовою адекватності моделі на оптимізаційному періоді. Критерієм якості в таких випадках найчастіше є високі імітаційні та прогнозні властивості моделі [4].

Метою даної роботи є розробка методології статистичного оцінювання невідомих параметрів стаціонарної динамічної моделі з високими імітаційними та прогнозними властивостями.

Постановка задачі. Специфікація моделі

Нехай стаціонарна динамічна система характеризується вектором-стовпцем фазових координат $\mathbf{x}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)'$ із n-вимірного евклідового простору E^n. Будемо вважати, що вектор-функція $\mathbf{x}(t)$ задана в N точках $t_1, t_2, ..., t_N$ часу $t \in [t_0, t_f]$ і є неперервно диференційованою на цьому часовому проміжку, а процес, який описує $\mathbf{x}(t)$, – в середньому монотонний. На вхід динамічної системи подається вектор-стовпець вхідних сигналів $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), ..., v_m(t))'$ із m-вимірного евклідового простору E^m, який в загальному випадку невідомий [2]. Рівняння руху динамічної системи будемо розглядати у формі стаціонарного лінійного матричного диференціального рівняння

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{v}(t) .$$

Тут матриці A і B складаються з параметрів, які повинні бути оцінені в ході процедури ідентифікації. За умови невизначеності вектора вхідних сигналів $\mathbf{v}(t)$ матричний оператор $B : E^m \to E^n$ завжди може бути опущений і рівняння руху можна записати у вигляді

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) . \quad (1)$$

Тут $\mathbf{u}(t) = \left(u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)\right)'$ – вектор-стовпець вхідних сигналів із n-вимірного евклідового простору E^n. Отже, у моделі (1) ідентифікації підлягають лише коефіцієнти матриці A розмірності $n \times n$.

Разом із рівнянням руху (1) динамічну систему будемо характеризувати за допомогою скалярної функції $G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) : E^n \to R$, що акумулює всю інформацію про вектор станів $\mathbf{x}(t)$ і вектор вхідних сигналів $\mathbf{u}(t)$, перетворюючи їх у скалярну величину $G(t)$, яку можна вважати сумарним показником руху динамічної системи в кожному з N часових тактів. Функцію $G(\cdot\cdot)$ називають потенціалом динамічної системи, вона задається в N точках $t_1, t_2, ..., t_N$ часу $t \in [t_0, t_f]$. Оскільки потенціал динамічної системи формується тим самим процесом, що і вектор фазових координат $\mathbf{x}(t)$, то $G(t)$ – в середньому або зростаюча, або спадаюча функція на заданому часовому проміжку $[t_0, t_f]$.

Теоретично можливо, що на вхід системи не подається жодного сигналу. Модель (1) у випадку $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ називають закритою. Потенціал закритої моделі повністю визначається вектором фазових координат $\mathbf{x}(t)$. Тоді, за аналогією з механічними моделями [5], його можна асоціювати з потенціальною енергією $\Pi(\mathbf{x}(t))$ динамічної системи. Для специфікації останньої будемо використовувати наступну квадратичну форму вектора фазових координат $\mathbf{x}(t)$, визначену з точністю до константи G_0:

$$\Pi(\mathbf{x}(t)) = G_0 + \frac{1}{2}\mathbf{x}'(t)P\mathbf{x}(t), \qquad (2)$$

де P – невідома симетрична матриця, що підлягає ідентифікації. Оскільки характер потенціалу $G(t)$ в середньому монотонний, то матрицю P зручно вважати строго визначеною (додатньо або від‘ємно). У роботі запропоновано шукати матрицю P у вигляді k_1A^2, де k_1 – невідома додатня константа, а матриця A визначається з рівняння руху (1).

На практиці завжди присутні помилки в специфікації вектора фазових координат $\mathbf{x}(t)$ (неврахування деяких факторів, помилки вимірювання та округлення даних, тощо). Тому всі реальні динамічні системи є відкритими ($\mathbf{u}(t) \neq 0$). Потенціал $G(t)$ у такому випадку може бути представлений як різниця потенціальної енергії $\Pi(\mathbf{x}(t))$ і енергії вхідних сигналів $U(\mathbf{u}(t))$ динамічної системи. Для специфікації останньої будемо використовувати наступну квадратичну форму вектора вхідних сигналів $\mathbf{u}(t)$:

$$U(\mathbf{u}(t)) = \frac{1}{2}\mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t). \qquad (3)$$

Вектор вхідних сигналів $\mathbf{u}(t)$ можна інтерпретувати як вектор відхилень відкритої моделі від закритої, а енергію вхідних сигналів $U(\mathbf{u}(t))$ – відповідно енергією таких відхилень.

Отже, потенціал $G(t)$ відкритої моделі має вигляд:

$$G(t) = G_0 + k_1\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}'A^2\mathbf{x}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{u}. \qquad (4)$$

Система рівнянь (1), (4) є специфікацією стаціонарної лінійно-квадратичної моделі описаної динамічної системи. Задача полягає в ідентифікації невідомих параметрів – коефіцієнта k_1 і симетричної матриці A – та вектора вхідних сигналів $\mathbf{u}(t)$ при заданому n-вимірному часовому ряді для фазових координат $(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), ..., \mathbf{x}(t_N))'$ і одновимірному часовому ряді для потенціалу динамічної системи $(G(t_1), G(t_2), ..., G(t_N))'$.

Методика ідентифікації моделі

Ідентифікацію невідомих параметрів моделі (1), (4) будемо проводити за допомогою методу найменших квадратів для лінійних регресій (звичайного МНК). Нелінійні регресії, до яких часто зводиться ідентифікація диференціальних рівнянь першого порядку [1, 3], у даній роботі свідомо не використовуються. Проте, безпосереднє застосування звичайного МНК пов‘язане з рядом труднощів, а саме: апроксимацією перших похідних в рівнянні руху (1), отриманням матриці A в симетричному вигляді, моделюванням оберненого зв‘язку між рівнянням руху і потенціалом динамічної системи.

Спочатку зупинимося на ідентифікації вхідних сигналів $\mathbf{u}(t)$. У закритій моделі динамічної системи фазова траєкторія буде мати експоненційний характер і, очевидно, не буде асимптотично стійкою. Проте, присутність неоднорідної частини $\mathbf{u}(t)$ в диференціальному рівнянні (1) може змінити її різко дивергентний характер. Особливо цікавим видається випадок, коли змінна $\mathbf{u}(t)$ виступає в якості двоїстої до змінної $\mathbf{x}(t)$. Така ситуація є цілком логічною, адже, як вже відзначалося, вектор $\mathbf{u}(t)$ акумулює інформацію про всі фактори, що не були специфіковані в моделі (1), і, таким чином, може бути аналогом вектора фазових координат для спряженої динамічої системи – зовнішнього середовища [6]. Тому надалі будемо припускати, що вектор $\mathbf{u}(t)$ заданий, наприклад, з міркувань двоїстості до вектора $\mathbf{x}(t)$.

Для апроксимації першої похідної в рівнянні руху (1) можна використовувати наступний підхід. Оскільки $\dot{\mathbf{x}}(t) \sim \Delta\mathbf{x}(t)$, де $\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-1)$ ($t = 2, 3, \dots, N$), то $\dot{\mathbf{x}}(t) \sim \Delta\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}_0$ буде більш точним наближенням першої похідної, адже вектор-стовпець констант $\mathbf{a}_0 = (a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0})'$ лише покращить точність регресійної моделі:

$$\Delta x_i(t) = a_{i0} + a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + \dots + a_{in}x_n(t) + u_i(t),\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

Інший підхід полягає в апроксимації координат фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ деякими функціями, наприклад, поліномами. Як показує практика, для отримання високої точності при обробці монотонних даних поліномів третьої степені $P_{i3}(t)$ виявляється достатньо:

$$x_i(t) = b_{i0} + b_{i1}t + b_{i2}t^2 + b_{i3}t^3, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

У загальному випадку оптимальним можна вважати поліном $P_{k_i}(t)$ такої степені k_i, для якого два наступних збільшення степені не дають статистично значущих доданків [7].

Після застосування МНК до рівняння (6) і отримання оціненої поліноміальної регресії $\hat{P}_{k_i}(t)$ функція регресії моделі (1) приймає вигляд:

$$\frac{d\hat{P}_{k_i}}{dt}(t) = a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + \dots + a_{in}x_n(t) + \left(a_{i0} + u_i(t)\right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

Тут компонента $u_i(t)$ вектора вхідних сигналів $\mathbf{u}(t)$ визначається з точністю до константи a_{i0}, яка введена для забезпечення адекватності регресійного аналізу – задоволення умови Гауса-Маркова про рівність нулю суми МНК-залишків [8].

Після апроксимації першої похідної і зведення рівняння руху (1) до лінійної регресійної моделі (5) або (7) постає питання про отримання оцінки $\hat{A}$ симетричної матриці A. Перший підхід полягає в оцінюванні кожного рівняння в (5) або (7) окремо за допомогою звичайного МНК і перевірки гіпотези про рівність недіагональних елементів оціненої матриці $\hat{A}$: $H_0 : \hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}$ для $i, j = 1, 2, ..., n \; (i \neq j)$ [9]. При відхиленні гіпотези H_0 для деяких елементів матриці $\hat{A}$, можна спробувати застосувати ітераційну процедуру ідентифікації матриці A, наприклад, так я це показано в [10].

Другий підхід полягає в оцінюванні матриці A з рівнянь (5) або (7) за допомогою МНК для систем регресійних рівнянь [9]. У цьому випадку невідомі параметри знаходяться з матричного рівняння:

$$\hat{\mathbf{a}} = (X'X)^{-1} X'\mathbf{y} . \tag{8}$$

Тут $\hat{\mathbf{a}}$ –вектор-стовпець оцінених $n(n+1)/2$ параметрів матриці A та *n* вільних членів:

$$\hat{\mathbf{a}} = \left(a_{n0}, a_{n-10}, \ldots a_{10} \,\middle|\, a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} \,\middle|\, a_{22}, a_{23}, ..., a_{2n} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, a_{nn} \right)',$$

$\mathbf{y}$ – вектор-стовпець регресандів

$$\mathbf{y} = \left(\Delta x_1(2), \ldots, \Delta x_1(N) \mid \Delta x_2(2), \ldots, \Delta x_2(N) \mid \ldots \mid \Delta x_n(2), \ldots, \Delta x_n(N) \right)'$$

розмірності $n \cdot (N-1)$ для моделі (5) і

$$\mathbf{y} = \left(\frac{dP_{k_1}}{dt}(1), \ldots, \frac{dP_{k_1}}{dt}(N) \,\middle|\, \frac{dP_{k_2}}{dt}(1), \ldots, \frac{dP_{k_2}}{dt}(N) \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \frac{dP_{k_n}}{dt}(1), \ldots, \frac{dP_{k_n}}{dt}(N) \right)'$$

розмірності $n \cdot N$ для моделі (7). Матриця X – блочна матриця регресорів розмірності $n(N-1) \times n(n+3)/2$ для моделі (5) і $nN \times n(n+3)/2$ для моделі (7):

$$X = \left(\begin{array}{cccccc|ccccc|ccccc|c|c}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{i} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_{n-1} & \mathbf{x}_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{i} & 0 & 0 & \mathbf{x}_1 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \ldots & \mathbf{x}_n & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots & 0 \\
0 & \mathbf{i} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{x}_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{x}_2 & 0 & \ldots & 0 \\
\mathbf{i} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{x}_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n
\end{array} \right),$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n-1} . \quad \underbrace{\qquad}_{\cdots} \quad \underbrace{\;\;}_{1}$$

де $\mathbf{i}$ – вектор-стовпець одиниць відповідної розмірності.

Якщо матриця A ідентифікована як симетрична, а вектор вхідних сигналів $\mathbf{u}(t)$ заданий з деяких міркувань в кожному з N часових тактів, то ідентифікація потенціалу (4) не викликає труднощів. Проте, часто якість моделей (1), (4) можна покращити, використовуючи ітераційну процедуру ідентифікації, побудовану за принципом оберненого зв‘язку.

У даній роботі пропонується ітераційна процедура ідентифікації, схематично зображена на рис.1. Тут потенціал $G(\cdot\cdot)$ системи виступає в ролі регулятора, який „налаштовує” динамічну модель на задану інформацію про функціонування динамічної системи на базовому періоді $[t_0, t_f]$. Потенціал динамічної системи також необхідний для втримання потенціальної енергії $\Pi(\mathbf{x}(t))$ від різкого зростання за рахунок дозованої подачі енергії вхідних сигналів $U(\mathbf{u}(t))$. На практиці обернений зв‘язок такого типу можна реалізувати в наступному алгоритмі:

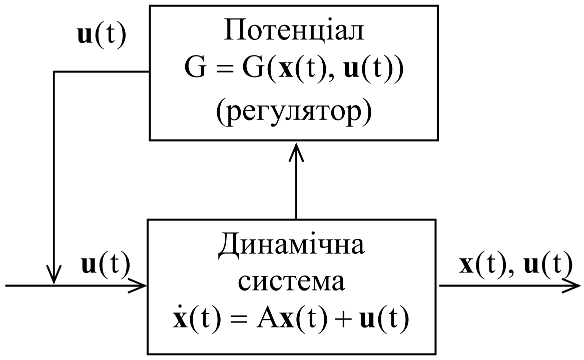

Рис. 1. Схема оберненого зв‘язку в динамічній системі, представленій системою (1), (4)

1. Задається початковий вектор вхідних сигналів $\mathbf{u}_0(t)$, наприклад, з міркувань двоїстої природи фазових координат і вхідних сигналів: $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{x}(N - t + 1)$, $t = 1, 2, \ldots, N$.
2. Оцінюється симетрична матриця A з рівняння руху (1), наприклад, за допомогою МНК для систем регресійних рівнянь. Обчислюється коефіцієнт детермінації R^2 як характеристика якості моделі.
3. Матриця $\hat{A}$ і заданий вектор вхідних сигналів $\mathbf{u}(t)$ обробляються регулятором $G(\cdot\cdot)$, специфікацію якого, на відміну від (4), запишемо у вигляді:

$$G(t) = G_0 + k_1\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}'(t)\hat{A}^2\mathbf{x}(t)\right) + k_2\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t)\right), \qquad (9)$$

   де k_2 – невідомий коефіцієнт, що підлягає оцінюванню.
4. Проводиться ідентифікація параметрів регулятора, наприклад, за допомогою звичайного МНК. Обчислюється коефіцієнт детермінації R^2.
5. Задається новий вектор вхідних сигналів $\mathbf{u}^{next}(t)$ за правилом $\mathbf{u}^{next}(t) = \sqrt{|\hat{k}_2|}\,\mathbf{u}^{prev}(t)$, де $\hat{k}_2$ – оцінка коефіцієнта k_2 моделі (9), отримана на попередньому етапі, а $\mathbf{u}^{prev}(t)$ – попереднє значення вектора вхідних сигналів.
6. Повторюються етапи 2-5 до виконання наступних умов: відбувається стабілізація коефіцєнтів детермінації для моделей (5) або (7) та моделі (9); значення $\hat{k}_2$ достатньо близько наблизилося до -1. Останню умову також можна використовувати для перевірки правильності програмної реалізації алгоритму.

Результати

Для апробації наведеної схеми параметричної ідентифікації моделі (1), (4) була використана інформація про динаміку основних показників макроекономічної системи [11] для випадку $n = 3$, $N = 20$.

Після застосування МНК для системи регресійних рівнянь (5), оцінка матриці A набуває вигляду:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -0.2321 & 0.2728 & 0.2453 \\ 0.2728 & -0.3262 & 0.0617 \\ 0.2453 & 0.0617 & -0.3157 \end{pmatrix}.$$

Вже після десятої ітерації всі коефіцієнти детермінації R^2 рівнянь руху (1) виходять на рівень 0.99, що говорить про високу точність апроксимації вихідних даних.

МНК-оцінювання параметрів потенціалу $G(t)$ системи дало наступні результати:

$$\underset{(\text{c.o.})}{G(t)} = \underset{(0.0530)}{1.8624} + \underset{(0.0528)}{0.8759}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}'A^2\mathbf{x}\right) - \underset{(0.0574)}{0.9999}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{u}\right),$$

де в дужках зазначені стандартні помилки МНК-оцінок невідомих коефіцієнтів. Використовуючи критерій Стьюдента з рівнем значущості $\alpha = 0.05$, робимо висновок, що всі компоненти потенціалу динамічної системи статистично значуще впливають на нього. Коефіцієнт детермінації R^2, рівний 0.9987, свідчить на користь побудованої моделі. Також зауважимо, що коефіцієнт k_2 в результаті ітерацій наближається до -1, що підтверджує правильність апробованого алгоритму. На рис.2 зображені реальні дані та функції регресії, що їх наближають.

Маючи високу точність апроксимації фазових координат, можна очікувати високі прогнозні властивості моделі (1). Для розрахунку прогнозних значень фазових координат будемо користуватися рівнянням (5) у вигляді:

$$x_i(N+1) = x_i(N) + \hat{a}_{i0} + \hat{a}_{i1}x_1 + \hat{a}_{i2}x_2 + \hat{a}_{i3}x_3 + u_i(N),$$

де $\hat{a}_{ij}$ – відповідні коефіцієнти оціненої матриці $\hat{A}$ ($i, j = 1,2,3$). Отримано такий прогноз:

$$x_1(21) = 4.4049 \pm 0.0256,\ x_2(21) = 2.7394 \pm 0.0192,\ x_3(21) = 2.6574 \pm 0.0172.$$

Малі стандартні помилки прогнозування свідчать про його високу точність.

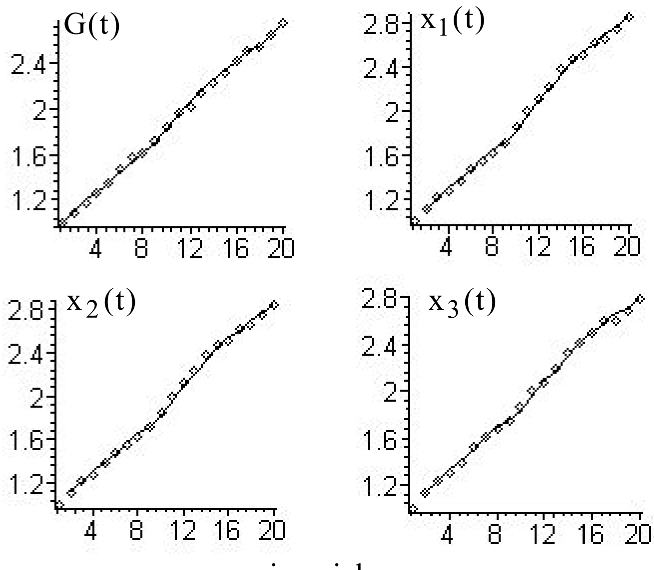

Рис. 2. Результати моделювання потенціалу і фазових координат динамічної системи

Висновки

У роботі специфікована стаціонарна лінійно-квадратична модель динамічної системи. Для ідентифікації невідомих параметрів запропоновано ітераційний алгоритм, заснований на принципі оберненого зв‘язку. Апробація алгоритму підтвердила його адекватність та можливість застосування для вивчення динаміки реальних систем.

Література

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления / Под ред. Райбмана Н.С. – М.: Мир, 1975. – 680 с.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. – Очерки по математической теории систем \ Под ред. Цыпкина Я.З. – М: УРСС, 2004. – 400 с.
3. Bates D.M., Watts D.B. Nonlinear Regression Analysis and Its Applications. – New York: Wiley, 1988. – 365 p.
4. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: Юнити, 1998. – 1012 с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. Изд. 4-ое, исправл. – М.: Наука, 2004. – 591 с.
6. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Изд-во Мир, 1972.
7. Назаренко О.М. Основи економетрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – К.: „Центр навчальної літератури", 2005. – 392 с.
8. Greene W.H. Econometric Analysis. Fifth Edition. – New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003. – 802 p.
9. Wooldridge J.M. Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data. – London: The MIT Press, 2000, 735 p.
10. Васильев А.А., Назаренко А.М. Дискретизация и численная идентификация дифференциально-игровых моделей макроэкономической динамики // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2006. – № 733. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 6. – С. 35-46.
11. http://www.oecd.org.