УДК 330.46

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТА ВЕРИФІКАЦІЇ ЙМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Назаренко Л.Д., Назаренко О.М., Фільченко Д.В.

Моделювання макроекономічної динаміки є важливою проблемою як сучасної економічної теорії, так і математичної науки, апарат якої є основним аналітичним підґрунтям економіко-математичного моделювання як такого. Загальновизнаною практикою в цьому напрямку є застосування та розширення класичних динамічних моделей Харрода-Домара, Філліпса, Хікса, Самюельсона, Рамсея, тощо [1]. Проте часто конкретні макроекономічні проблеми потребують специфічного вирішення без застосування класичної специфікації, яка може виявитися зайвою або дуже трудомісткою. Тому важливо мати алгоритми побудови та реалізації моделей макроекономічної динаміки, налаштовані під конкретну мету та інформаційно-статистичну базу дослідника.

Нехай необхідно побудувати динамічну модель n-галузевої макроекономічної системи відкритого типу для аналізу еволюції основних показників інвестиційної активності. Під інвестиціями в даному випадку будемо розуміти вливання в реальний капітал (основні фонди). Серед класичних моделей цієї тематики слід відзначити моделі міжгалузевого балансу фон Неймана, Леонтьєва, π-модель [2]. Метою ймовірнісно-статистичного моделювання найчастіше виступають імітація або прогноз, в залежності від чого обирається той чи інший математичний інструментарій. Тому в даній роботі пропонується поглянути на економіко-математичне моделювання саме під цими двома кутами зору.

На початковому етапі (етапі формалізації та апріорного аналізу) перш за все необхідно визначитися з кінцевою прикладною метою моделювання (імітація, прогноз, тощо). Дана робота присвячена побудові динамічної моделі n-галузевої макроекономічної системи та дослідженню її імітаційних та прогнозних властивостей. В якості координат фазового вектора $\boldsymbol{x}(t)$ системи логічно використовувати основні фонди $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ кожної з n галузей та зовнішній борг x_{n+1} держави, а в якості координат вектора керування $\boldsymbol{u}(t)$ – потоки інвестицій або інші показники інвестиційної активності [3]. Звичайно вважають, що в умовах сталого розвитку $\boldsymbol{x}(t)$ – вектор неперервних функцій часу. До того ж величини основних фондів та зовнішнього боргу мають акумулятивний характер. Отже, для аналітичного представлення еволюції досліджуваної динамічної системи будемо використовувати [4] систему n+1 диференціальних рівнянь

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \tag{1}$$

або її інтегральну форму

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt\,, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{f}(\cdots)$ – вектор-функцій, неперервно-диференційованих на деякому проміжку часу $[t_0, T]$.

Проблема специфікації $\boldsymbol{f}(\cdots)$ вирішується на наступному етапі побудови математичної моделі. Видно, що швидкість зміни dx_i/dt основних фондів i-ої галузі економіки відображає величину чистих інвестицій в цю галузь, а dx_{n+1}/dt характеризує валовий приріст зовнішнього боргу. В економічній теорії ці величини використовуються для аналізу інвестиційної активності та залежності від зовнішньої кон‘юнктури, але не в абсолютних значеннях, а по відношенню до деякого показника валового випуску (наприклад, ВВП). Тому, специфікуючи вектор-функцію $\boldsymbol{f}(\cdots)$ добутком деякої безрозмірної величини $\boldsymbol{u}(t)$ на ВВП Y країни, ми отримаємо чітку економічну інтерпретацію координат вектора керування $\boldsymbol{u}(t)$. Функції $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_n(t)$ можна розглядати як показники інвестиційної активності в кожній з n галузей. Чим більше значення цих показників, тим більша частка у ВВП чистих інвестицій, залучених у відповідну галузь, а значить, більший внесок галузі в оновлення і модернізацію економіки. Ріст темпів модернізації буде відбуватися за умови, що темпи росту інвестування в основний капітал будуть вищі темпів росту ВВП. Що стосується економічної інтерпретації функції $u_{n+1}(t)$, то вона найчастіше виступає в якості степеня незбалансованості товарних, капітальних та фінансових потоків в момент часу t. Чим більше значення $u_{n+1}(t)$, тим суттєвіший “перекіс” у бік відтоку товарів та капіталу з країни або, навпаки, їх притоку ззовні і, як наслідок, в обох випадках суттєвіша залежність від зовнішньої кон‘юнктури.

Далі необхідно визначити, якою функціональною формою та якими факторами специфікувати введену екзогенну функцію ВВП $Y(\cdot)$. Зазвичай, це питання напряму залежить від результатів, що отримуються на наступному етапі моделювання – ідентифікації невідомих параметрів. Проте можна дати декілька рекомендацій, щодо апріорного вирішення даної проблеми.

По-перше, необхідно, щоб побудована модель була замкненою (ендогенні зміні повинні однозначно визначатися екзогенними, а рівняння систем (1) або (2) бути взаємозалежними). Для цього функцію $Y(\cdot)$ будемо специфікувати вже введеними фазовими координатами або їх комбінаціями, застосовуючи для цього кореляційний аналіз системи „фактори" та „показник-фактори". Це дозволить виявити проблему мультиколінеарності, істотні та несуттєві для моделі змінні. По-друге, необхідно специфікувати $Y(\cdot)$ зручною і виправданою для дослідження функціональною формою. Для вивчення ефектів першого порядку (еластичності виробництва, граничної продуктивності, тощо) достатньо використовувати логарифмічно-лінійну форму, яка, до того ж, завдяки своїм властивостям дозволяє досліджувати систему „показник-фактори" без прямого застосування методів кореляційного аналізу. Для вивчення ефектів другого порядку (наприклад, еластичностей заміщення) більш логічно буде використання транслогарифмічної функціональної форми [5].

В даній роботі ми обмежимося двофакторною лінійно-логарифмічною формою (типу Кобба-Дугласа), а в якості факторів будемо використовувати сумарне значення основних фондів та зовнішній борг держави:

$$\ln Y = a_0 + a_1 \ln \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \ln x_{n+1} \,. \tag{3}$$

Що ж стосується специфікації вектор-функції керування $\boldsymbol{u}(t)$, то для зручності подальшого дослідження виберемо поліноміальну часову залежність:

$$u_i(t) = b_{i0} + b_{i1}t + b_{i2}t^2 + \ldots + b_{ik_i}t^{k_i}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n+1 \,. \tag{4}$$

Степені k_i в загальному випадку можуть обиратися з різних міркувань: забезпечення високих імітаційних або прогнозних властивостей, підвищення коефіцієнтів детермінації, інше. Проте, слід пам'ятати, що збільшення степеня поліному призводить до зменшення ступенів волі, а останнє негативно відображається на якості моделі.

Основним етапом побудови математичної моделі макроекономічної динаміки є ідентифікація невідомих параметрів структурних моделей (3) та (4). Для цього будемо використовувати звичайний метод найменших квадратів. Проте, якщо застосування МНК для (3) не викликає особливих труднощів, то ідентифікація коефіцієнтів поліномів (4) заслуговує на особливу увагу. Перш за все, проведемо дискретизацію моделей (1) і (2). Нехай N – число моментів часу, в яких відома статистична інформація по фазовим координатам та екзогенній функції ВВП макроекономічної системи. Розіб'ємо проміжок часу $[t_0, T]$ на N-1 інтервалів одиничної довжини. Враховуючи описані вище особливості специфікації функції $\boldsymbol{f}(\cdots)$, для системи (1), (3), (4) можна використовувати різницеву схему:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + b_{i0}Y\big|_t + b_{i1}tY\big|_t + \ldots + b_{ik_i}t^{k_i}\,Y\big|_t + \varepsilon_{k_i}(t)\,, \tag{5}$$

а для система (2), (3), (4) – інтегральну схему:

$$x_i(t+1) = x_i^* + b_{i0}\sum_{j=0}^{t} Y\big|_j + b_{i1}\sum_{j=0}^{t} jY\big|_j + \ldots + b_{ik_i}\sum_{j=0}^{t} j^{k_i}\,Y\big|_j + \nu_{k_i}(t)\,, \tag{6}$$

де $i = 1, 2, \ldots, n+1$; $t = 0, 1, \ldots, N-1$; x_i^* – вільний член; $\varepsilon_{k_i}(t)$ та $\nu_{k_i}(t)$ – випадкові збурення моделей (5) і (6) відповідно.

Представимо регресійні моделі (5) і (6) в матричному вигляді. Для різницевої схеми (5) отримуємо

$$\begin{pmatrix} Y\big|_{t=0} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ Y\big|_{t=1} & Y\big|_{t=0}\,.. & \ldots\ldots & Y\big|_{t=0} \\ Y\big|_{t=2} & 2Y\big|_{t=2} & \ldots\ldots & 2^{k_i}\,Y\big|_{t=2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ Y\big|_{t=N-1} & (N-1)Y\big|_{t=N-1} & \ldots\ldots & (N-1)^{k_i}\,Y\big|_{t=N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{i0} \\ b_{i1} \\ b_{i2} \\ \ldots \\ b_{ik_i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i0} \\ \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \ldots \\ \varepsilon_{ik_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i(1) - x_i(0) \\ x_i(2) - x_i(1) \\ x_i(3) - x_i(2) \\ \ldots\ldots \\ x_i(N-1) - x_i(N-2) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

а для інтегральної –

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & Y\big|_{t=0} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \sum\limits_{t=0}^{1} Y\big|_t & \sum\limits_{t=0}^{1} tY\big|_t & \dots & \sum\limits_{t=0}^{1} t^{k_i} Y\big|_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sum\limits_{t=0}^{N\text{-}2} Y\big|_t & \sum\limits_{t=0}^{N\text{-}2} tY\big|_t & \dots & \sum\limits_{t=0}^{N\text{-}2} t^{k_i} Y\big|_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^* \\ b_{i0} \\ b_{i1} \\ \dots \\ b_{ik_i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_i^* \\ \nu_{i0} \\ \nu_{i1} \\ \dots \\ \nu_{ik_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i(0) \\ x_i(1) \\ x_i(2) \\ \dots \\ x_i(N-1) \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

або в загальному випадку (i = 1, 2, ..., n+1):

$$\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{c}_i.$$

Для визначення статистичної значущості МНК-оцінок $\hat{b}_{ik_i}$ невідомих коефіцієнтів b_{ik} поліномів (4) в роботі використовується двосторонній критерій Стьюдента:

$$\left| \frac{\hat{b}_{ik_i}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_{ik_i}}} \right| > t_{\text{êð}}, \qquad (9)$$

де $\hat{\sigma}_{\hat{b}_{ik_i}}$ – стандартна помилка оцінки $\hat{b}_{ik_i}$, $t_{\text{кр.}}$ – критичне значення Стьюдента, що відповідає числу ступенів волі N-k_i-2 і заданому рівню значущості α [6].

Невирішеним залишилось питання ідентифікації оптимальних степенів k_i поліномів (4). З метою дослідження прогнозних властивостей моделей (5) і (6) критерієм зупинки нарощування степеня будемо вважати отримання максимально точних прогнозних значень досліджуваної величини. Іншими словами, будемо шукати такі степені поліномів, які дають мінімальні відхилення довірчих інтервалів прогнозів. Для прогнозного значення фазової координати $x_i(N+1)$ довірчий інтервал прогнозу розраховується за формулою

$$\hat{x}_i(N+1) - \delta\, t_\alpha < x_i(N+1) < \hat{x}_i(N+1) + \delta\, t_\alpha, \qquad (10)$$

де $\hat{x}_i(N+1)$ — точковий прогноз; t_α — двосторонній квантіль розподілу Стьюдента з відповідними числом ступенів волі та рівнем значущості α; δ — стандартна помилка прогнозу:

$$\delta = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 \left(1 + \boldsymbol{a}_N (\boldsymbol{A}_i^{/} \boldsymbol{A}_i)^{-1} \boldsymbol{a}_N^{/}\right)}, \qquad (11)$$

де $\hat{\sigma}_u^2$ — оцінка дисперсії залишкового члена регресії, $\boldsymbol{a}_N$ – вектор пояснюючих змінних в момент часу N [7].

Заключним етапом побудови математичної моделі макроекономічної динаміки є верифікація (перевірка) результатів моделювання. Він складається з двох процедур: статистичного аналізу точності (прогнозної або імітаційної) та перевірки адекватності моделі. Імітаційну точність характеризують коефіцієнтом детермінації R^2, який визначається як відношення дисперсії моделі до дисперсії системи. Оцінка адекватності побудованої моделі здійснюється шляхом дослідження властивостей залишкового члена, а саме відповідністю ряду залишків нормальному закону розподілу та виконанням всіх умов Гаусса-Маркова [6].

Апробацію моделей (5), (6) будемо здійснювати на прикладі двогалузевої (n = 2) економіки Данії в період 1966-1997 рр. До першої галузі будемо відносити первинний та вторинний сектори економіки (переробну промисловість, електроенергетику, газо- та водопостачання, сільське господарство і т.д.), а до другої – третинний сектор (сфера послуг: готельно-ресторанний бізнес, транспорт, зв‘язок, телекомунікації, тощо). Такий розподіл є цікавим з огляду на те, що в досліджуваний період часу в багатьох західноєвропейських економіках антагонізм цих двох галузей був досить істотним через трансформаційні зміни, пов‘язані з переходом до постіндустріального суспільства. Всі статистичні дані, що використовуються в даній роботі, наявні на офіційному серверу статистики Данії [8] та Організації економічного співробітництва та розвитку [9].

Ідентифікуємо функцію ВВП $Y(\cdot)$. Метод найменших квадратів оцінювання невідомих параметрів моделі (3) дає наступні результати:

$$\underset{\text{(s.e.)}}{\ln Y} = \underset{(0.3195)}{0.3859} + \underset{(0.0428)}{0.8145} \ln(x_1 + x_2) + \underset{(0.0252)}{0.1120} \ln x_3 ,\ R^2 = 0.9968, \tag{12}$$

де в дужках наведені стандартні помилки кожного з коефіцієнтів регресії, отримані за критерієм Стьюдента (9) при числі ступенів волі $l = 29$ та рівні значущості $\alpha = 5\%$. Як бачимо, всі коефіцієнти, окрім $\ln a_0$, виявилися статистично значущими. Така ситуація є доволі розповсюдженою при використанні функцій типу (3) для регресійного аналізу, адже за змістом лінійної логарифмічної форми функція регресії природно може проходити через початок координат, що разом із високим значенням коефіцієнта детермінації R^2 свідчить про насиченість моделі цими факторами [10].

Проведемо економічний аналіз моделі (12). Оскільки еластичність випуску за фактором x визначаються формулою

$$E_x = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln x},$$

то із (12) випливає, що еластичність випуску за основними фондами $x_1 + x_2$ дорівнює 0.8145, а за зовнішнім боргом x_3 – 0.1120. Це вказує на те, що в досліджуваний період часу вплив зовнішнього боргу на ВВП Данії хоча й був статистично значущим, проте не мав домінуючого значення в порівнянні з основними фондами. Також можна зробити висновок, що економіка Данії характеризувалася спадаючим доходом від масштабу виробництва ($a_1 + a_2 = 0.9265 < 1$).

Експонуючи вираз (12), отримаємо $Y(\cdot)$ як функцію типу Кобба-Дугласа:

$$Y = 1.4710\,(x_1 + x_2)^{0.8145} x_3^{\ 0.1120},$$

графічне зображення якої представлене на рис. 1.

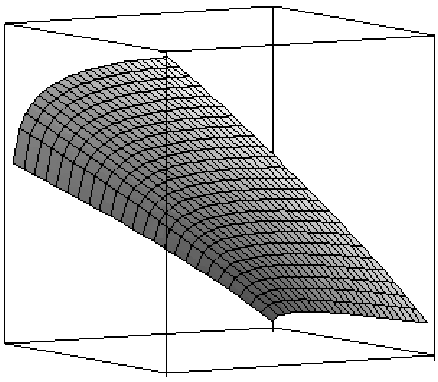

Рис. 1 Поверхня функції Кобба-Дугласа

Ці висновки цілком співпадають з реальною економічною ситуацією, коли ріст зовнішнього боргу в період 1966-1987 рр. дійсно істотно впливав на розвиток країни, обумовлюючи високий ступінь залежності економіки від зовнішньої кон‘юнктури. Після 1987 року цей вплив значно послабився через ліквідацію існуючих дисбалансів в експортно-імпортній сфері. Тому сумарний вплив зовнішнього боргу Данії на ВВП за весь досліджуваний період часу виявився невеликим [3].

Проблема залежності ВВП країни від зовнішнього боргу є досить цікавою та мало дослідженою. Для різних країн в різні періоди зовнішні запозичення можуть як стимулювати ріст ВВП, так і стримувати його, або взагалі не позначатися на ньому. Тому можливі різні варіанти факторної специфікації функції $Y(\cdot)$ і систем (1), (2) в цілому.

Іншою причиною перегляду факторної специфікації динамічної системи може стати присутність проблеми мультиколінеарності в моделі (3). Адже кореляція між основними фондами та зовнішніми запозиченнями може виявитися суттєвою, особливо, коли розвиток основних фондів відбувається за рахунок іноземних інвестицій, а роль експортної складової дефіциту платіжного балансу нівельована. Провівши кореляційний аналіз в системі „фактори” для моделі (3), приходимо до висновку, що за критерієм Фішера-Ієйтса [7] при рівні значущості $\alpha = 5\%$ в моделі відсутня проблема мультиколінеарності.

Залишається перевірити побудовану модель (12) на адекватність. Гіпотезу про нормальність розподілу збурень ε_i ($i = 0, 1, \ldots, N$-1) цієї моделі будемо перевіряти за критерієм згоди Фішера, що полягає у відповіді на питання, чи значуще оцінка $\hat{A}$ асиметрії та оцінка $\hat{E}$ ексцесу цього розподілу відрізняються від своїх математичних сподівань, які у випадку нормального розподілу дорівнюють нулю. Використовуючи правило „двох сігм” [6] при $\hat{A} = 0.54$ ($\sigma^2_{\hat{A}} = 0.41$) та $\hat{E} = 0.03$ ($\sigma^2_{\hat{E}} = 0.81$), приходимо до висновку, що величини $\hat{A}$ і $\hat{E}$ можна вважати статистично незначущими, а ряд залишків для моделі (12) погоджений з гіпотезою про нормальний закон розподілу.

Далі необхідно перевірити виконання основних передумов класичної регресії для моделі (12). Перша умова Гаусса-Маркова про рівність нулю математичного сподівання збурень виконується: безпосередньої перевіркою для МНК-оцінок $\hat{\varepsilon}_i$ отримуємо $\sum \hat{\varepsilon}_i = 0$. Другу умову Гаусса-Маркова про відсутність гетероскедастичності будемо перевіряти за допомогою тесту Бройша-Пегана [10], який ґрунтується на оцінюванні значущості моделі для квадрату залишкового члена моделі (12):

$$\hat{\varepsilon}^2 = \delta_0 + \delta_1(x_1 + x_2) + \delta_2 x_3 + \varepsilon^*.$$

Після знаходження МНК-оцінок $\hat{\delta}_0$, $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$ невідомих коефіцієнтів δ_0, δ_1, δ_2, згідно критерію Фішера, знаходимо значення F-статистики (воно дорівнює 2.85) та порівнюємо його з критичним значенням $F_{кр}$, що для чисел ступенів волі 2 і 29 та рівні значущості $\alpha = 5\%$ дорівнює 3.33. Звідси робимо висновок, що допоміжна модель для квадрату залишкового члена є в цілому незначущою ($2.85 < 3.33$). Отже, перевірені перші дві умови підтверджують, що збурення ε_i моделі (12) генеруються ймовірнісним процесом, що задає нульове математичне сподівання та однакову дисперсію.

Третьою умовою Гаусса-Маркова є вимога некорельованості значень випадкового члена ε: $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ для будь-яких $i \neq j$. Перевіримо нульову гіпотезу про відсутність автокореляції першого порядку в моделі (12) за допомогою тесту Дарбіна-Уотсона [5], що базується на порівнянні d-статистики

$$d = \frac{\sum\limits_{t=1}^{N-1} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum\limits_{t=0}^{N-1} \hat{\varepsilon}_t^2}$$

з критичними значеннями d_l та d_u. В даному випадку $d = 0.35$ менше ніж $d_l = 1.31$, що свідчить про наявність в моделі додатної автокореляції першого порядку. Подібне зустрічається часто при аналізі даних часових рядів і може бути додатковим аргументом для перегляду факторної специфікації моделі (3). Проте, присутність автокореляції в багатьох рядах динаміки вважається допустимою.

Останньою умовою Гаусса-Маркова, що потребує перевірки, є умова нестохастичності регресорів, тобто відсутності кореляції пояснюючих змінних з випадковим членом: $\mathrm{cov}(x_{ik}, \varepsilon_i) = 0$ для будь яких i та k. Провівши кореляційний аналіз в системі „фактори-збурення”, згідно критерію Фішера-Іейтса, знаходимо, що всі часткові коефіцієнти кореляції менші за критичне значення ($r_{кр} = 0.349$). Це свідчить на користь гіпотези про некорельованість пояснюючих змінних і випадкового члена моделі (12).

Для адекватних моделей, поряд з коефіцієнтом детермінації R^2, часто розраховують середню відносну помилку моделі як додаткову характеристику точності. Маємо

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{|\bar{\varepsilon}_i|}{Y_i} \cdot 100\% = 0.3\%,$$

що в черговий раз підтверджує можливість її застосування для подальшого дослідження динамічних систем (5), (6).

Перейдемо до ідентифікації коефіцієнтів поліномів (4). Із (7), (8) знайдемо їх МНК-оцінки відповідно для різницевої та інтегральної схеми. Нагадаємо, що критерієм вибору оптимального степеня полінома є мінімум стандартної помилки прогнозу (10), (11). Застосування МНК для регресій (7) і (8), дає наступні результати: для різницевої схеми функції керування приймають вигляд

$$\underset{\text{(s.e.)}}{u_1(t)} = \underset{(0.0118)}{0.1469} - \underset{(0.0005)}{0.0037t}, \quad \underset{\text{(s.e.)}}{u_2(t)} = \underset{(0.0448)}{0.221964} - \underset{(0.0043)}{0.006613t} + \underset{(0.0001)}{0.000042t^2}, \tag{13}$$

а для інтегральної –

$$\underset{\text{(s.e.)}}{u_1(t)} = \underset{(0.0033)}{0.1543} - \underset{(0.0002)}{0.0041t}, \quad \underset{\text{(s.e.)}}{u_2(t)} = \underset{(0.0167)}{0.2278} - \underset{(0.0019)}{0.0062t} + \underset{(0.000051)}{0.000012t^2}. \tag{14}$$

На рис. 2 і 3 подане графічне зображення показників інвестиційної активності $u_1(t)$ і $u_2(t)$, що дозволяють провести зіставлення модельних результатів з реальними особливостями розвитку економіки Данії в досліджуваний період.

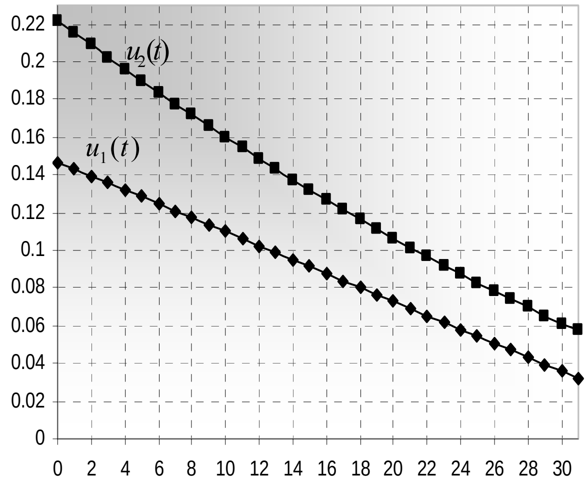

Рис. 2 Показники інвестиційної активності, обчислені за різницевою схемою (5)

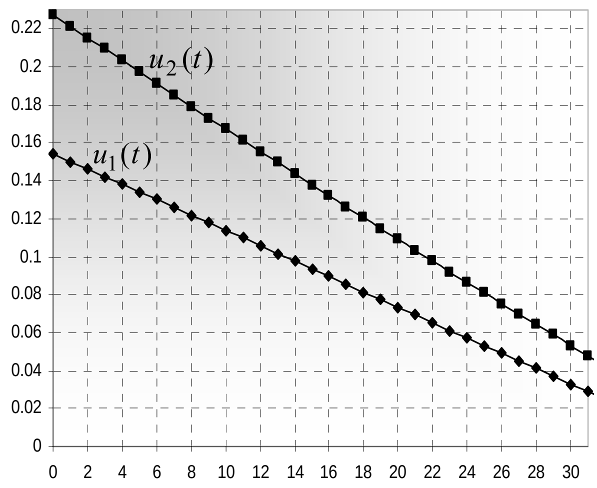

Рис.3 Показники інвестиційної активності, обчислені за інтегральною схемою (6)

Всі коефіцієнти, крім останніх двох для $u_2(t)$ в (13) та останнього для $u_2(t)$ в (14) при рівні значущості $\alpha = 5\%$ є статистично значущими, забезпечуючи високу точність апроксимації змінних x_1 та x_2. Так, для інтегральної схеми (8) коефіцієнти детермінації R^2 дорівнюють 0.9986 та 0.9982 а для різницевої схеми (7) – 0.9979 та 0.9966.

Як бачимо, інвестиційна активність $u_2(t)$ у галузі послуг на даному етапі розвитку країни перевищувала інвестиційну активність $u_1(t)$ у промислово-сільськогосподарській галузі і, маючи домінуюче значення, в більшій мірі сприяла модернізації економіки країни. Також треба відзначити майже синхронне спадання цього показника для обох галузей, що може свідчити про відсутність дисбалансів в економіці Данії і про певне інвестиційне насичення галузей.

Тепер наведемо результати дослідження прогнозних властивостей моделей (7) і (8). Як виявилося оптимальна для прогнозу степінь полінома (4), як правило, більша нуля та менша трьох. Інтервальні прогнози для фазових координат x_1 і x_2, знайдені за формулами (10), (11) при функціях керування (13), (14), мають такі значення: $1197674.539 \pm 20073.928$ і $1800344.834 \pm 36369.454$ для різницевої схеми та $11883527.018 \pm 34599.568$ і $1764626.422 \pm 56578.455$ для інтегральної схеми. Як бачимо, довірчі інтервали для прогнозів за різницевою схемою вужчі: у відсотках від точкового прогнозу 1.68% та 2.02% проти 2.92% та 3.21%.

Перевірка на адекватність моделей (13) і (14), здійснена за схемою, що була наведена вище для моделі (12), дала наступні результати. Як в різницевій, так і інтегральній схемах була виявлена додатна автокореляція першого порядку. Всі інші передумови класичної регресії обох схем виконались, окрім першої умови Гаусса-Маркова для різницевої схеми. Це пов‘язано з тим, що модель (5), на відміну від моделі (6), належить до класу RTO (регресій без вільного члена). Тому при аналізі точності схеми класичний коефіцієнт детермінації R^2 треба розцінювати скоріше як дескриптивну наближену характеристику моделі. Проте додаткова перевірка точності (графічне зіставлення) та робастна корекція цієї величини [5] вказують на допустимість її використання в даному випадку. Середні відносні помилки моделей (13) і (14) дорівнюють 1.8% і 1.2% відповідно.

Як бачимо, різницева схема (7) має кращі прогнозні властивості. Однак інтегральна схема (8) має кращі імітаційні властивості. Звідси можна зробити висновок, що для вивчення поведінки макроекономічної системи інвестиційного розвитку в майбутніх періодах необхідно використовувати модель (7), а для ретроспективного аналізу — модель (8).

Отже, в даній роботі продемонстрована методологія побудови та верифікації ймовірнісно-статистичної моделі макроекономічної динаміки на прикладі інвестиційного розвитку n-галузевої економічної системи відкритого типу. Ключовим моментом роботи є розробка та апробація двох алгоритмів ідентифікації невідомих параметрів динамічних моделей – за різницевою та інтегральною схемами, що базуються на економетричних методах. Перший виявився більш придатним для прогнозування фазових координат, а другий — для імітації. Результати, апробовані на прикладі економіки Данії, співпали з реальними тенденціями і особливостями розвитку країни в досліджуваний період часу.

Список літератури

1. Romer, D. Advanced Macroeconomics. – McGraw-Hill, 1996. – 539 p.
2. Пономаренко О.І., Перестук М.О., Бурим В.М. Сучасний економічний аналіз: Навч. посібник у 2ч. Ч.1: Мікроекономіка. – К.: Вища школа, 2004. – 262 с.
3. Шевчук В.О. Міжнародна економіка: теорія і практика. – Львів: Каменяр, 2003. – 560 с.
4. Васильєв А.А., Назаренко А.М. Дискретизация и численная идентификация дифференциально-игровых моделей макроэкономической динамики // Вісник Харк. нац. ун-та., – 2006. – №733. Сер. „Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”, вип. 6. – С. 35-47.
5. Greene W.H. Econometric analysis. Fifth Edition. – New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003. – 802 p.
6. Назаренко О. М. Основи економетрики: Підручник. – Київ: „Центр навчальної літератури”, 2004. – 392 с.
7. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. – М.: Дело, 1997. – 248 с.
8. Denmark Statistics: http://www.dst.dk.
9. OECD, Statistic database: http://www.oecd.org.
10. Wooldridge J. Introductory Econometrics: A Modern Approach. — New York: Southwestern Publishers, 2000. — 805 p.