УДК 519.71

А.М. Назаренко, Д.В. Фильченко

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛАБО ФОРМАЛИЗОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ В КЛАССЕ СТАЦИОНАРНЫХ LQ МОДЕЛЕЙ

Предложен алгоритм мультикритериальной идентификации линейно-квадратичных моделей с известными и неизвестными управлениями для имитации, прогнозирования и оптимизации слабо формализованных процессов. Решены задачи краткосрочного прогнозирования и оптимального управления. Численный эксперимент проведен на реальных статистических данных динамики макроэкономических систем.

Введение. В настоящее время все большее внимание уделяется математическому моделированию слабо формализованных систем, к которым, кроме экономических, социальных и биологических, часто относят многие химические и физико-технические системы (геологические анализаторы, аэродинамические аппараты, детекторы лжи, контроллеры производственных процессов и др.) [1–4]. Назовем отличительные особенности таких систем: отсутствие предметно-ориентированной спецификации их моделей, неполнота информации о динамике входящих в них переменных, невозможность проведения непосредственного эксперимента. Поэтому на практике для моделей слабо формализованных систем любой прямой задаче (имитация, прогнозирование, оптимизация) всегда предшествует обратная задача (идентификация модели по данным наблюдений) [5–8].

Пусть состояние системы в любой момент непрерывного времени $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$ характеризуется фазовым вектор-столбцом $\mathbf{x}(\tau) = [x_1(\tau), x_2(\tau),\ldots$ $\ldots, x_m(\tau)]^{\mathrm{T}}$, а вход системы — вектор-столбцом управления $\mathbf{v}(\tau) = [v_1(\tau),$ $v_2(\tau),\ldots, v_m(\tau)]^{\mathrm{T}}$ из m-мерного евклидового пространства E^m. Фазовая траектория $\{\mathbf{x}(\tau)\}$ и траектория управления $\{\mathbf{v}(\tau)\}$ считаются непрерывными вектор-функциями времени и в общем случае определяются задачей Коши:

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau)\,|\,\boldsymbol{\theta}_1),\ \ \mathbf{x}(\tau_*) = \mathbf{x}_*, \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{v}}(\tau) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau)\,|\,\boldsymbol{\theta}_2), \mathbf{v}(\tau_*) = \mathbf{v}_*, , \tag{2}$$

где $\mathbf{f}(\cdot)$ и $\mathbf{g}(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые вектор-функции, $\boldsymbol{\theta}_1$ и $\boldsymbol{\theta}_2$ — векторы неизвестных коэффициентов, подлежащие идентификации.

Обозначим $\{\mathbf{x}_\tau\}$, $\{\mathbf{v}_\tau\}$ множество данных наблюдений за динамикой траекторий $\mathbf{x}(\tau)\}$, $\mathbf{v}(\tau)\}$ в N дискретных точках промежутка времени $[\tau_0, \tau_1]$ $(\tau_1 < \tau_f)$, который назовем базовым (периодом идентификации), промежуток времени $(\tau_1, \tau_f]$ — периодом прогнозирования или оптимизации. При этом предположим, что $\tau_f - \tau_1 \ll N$. Тогда если доказать свойство стационарности модели, то вектор $\boldsymbol{\theta}$ параметров, на которые модель будет настроена на пе-

© А.М. Назаренко, Д.В. Фильченко, 2009

риоде идентификации в силу инерционности динамической системы, можно переносить на период прогнозирования или оптимизации [9]. Следуя подходу, устоявшемуся в теории идентификации, стационарность модели можно характеризовать следующим мультикритерием: высокое качество аппроксимации и прогнозирования и робастность [9–11].

В зависимости от целей моделирования обратные задачи динамики делятся на задачи идентификации моделей имитации и прогнозирования и задачи идентификации моделей оптимального управления [9]. В зависимости от входной информации обратные задачи делятся на задачи чистой параметрической идентификации ($\{\mathbf{x}_\tau\}, \{\mathbf{v}_\tau\}$ известны), задачи совместной идентификации управлений и параметров ($\{\mathbf{v}_\tau\}$ неизвестно), а также задачи совместной идентификации состояния и параметров ($\{\mathbf{x}_\tau\}$ неизвестно) [4].

Задача чистой параметрической идентификации модели в целях имитации и прогнозирования, как и любая обратная задача, вообще говоря, является некорректно поставленной (чаще всего из-за вопроса устойчивости полученных оценок) [5]. Поэтому в данной работе предлагается ввести в постановку задачи мультикритерий, призванный регуляризировать исходную задачу, сузив область ее решений, а также построить такую схему оценивания, которая позволила бы управлять процессом «настройки» модели.

Для задачи совместной идентификации управления (состояния) и параметров в целях имитации и прогнозирования некорректность задачи лишь усиливается, а значит, требуются дополнительные стратегии ее регуляризации. Одна из них — введение в рассмотрение непрерывной скалярной функции $F(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau))$, которая задает поверхность, вдоль которой движется динамическая система [13, 14]. Конструировать $F(\cdot)$ необходимо так, чтобы она аккумулировала всю предысторию движения динамической системы, была глобальной характеристикой движения и существовала статистическая информация $\{F_\tau\}$ о ее динамике в N дискретных точках промежутка времени $[\tau_0, \tau_1]$.

Пусть задача Коши для функции $F(\tau)$ имеет вид

$$\dot{F}(\tau) = G(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau) \,|\, \boldsymbol{\theta}_3), \; F(\tau_*) = F_*, \tag{3}$$

где $G(\cdot)$ — непрерывно-дифференцируемая функция, называемая потенциалом системы [1], $\boldsymbol{\theta}_3$ — вектор неизвестных коэффициентов, подлежащий идентификации. В данной работе предлагается подход к спецификации потенциала $G(\cdot)$, призванный ликвидировать некорректность исходной задачи и замкнуть алгоритм оценивания модели (1)–(3).

Функция $F(\tau)$, называемая функцией качества системы, может использоваться для постановки задач оптимизации, в которых некоторый функционал от $F(\tau)$ целевой [6, 8]. Так возникают задачи совместной идентификации управлений и параметров модели (1)–(3) в целях оптимизации. В отличие от ряда работ, посвященных вопросу идентификации оптимизационных задач [6, 7], в данной работе предлагается следующая трактовка роли управления $\mathbf{v}(\tau)$. На базовом периоде $[\tau_0, \tau_1]$ управление «настраивает» модель на заданный набор свойств. При этом успешный подбор такого управления служит веским аргументом в пользу стационарности модели. На периоде же оптимизации $(\tau_1, \tau_f]$ управление должно обеспечить оптимальный режим функционирования системы.

1. Постановка задачи

Как показывают исследования [8, 15], многие объекты управления достаточно точно описываются линейными динамическими моделями. Путем рационального выбора квадратичных функций качества часто удается построить эффективные имитационные, прогнозные или оптимизационные модели. Поэтому в данной работе исследование проводится в рамках стационарных линейно-квадратичных (LQ) моделей.

При численной реализации моделей, цель которых — прогнозирование или оптимизация, граничные значения дифференциальных уравнений (1)–(3) удобно удовлетворять в момент времени, следующий за периодом идентификации. Поэтому в качестве τ_* выберем момент времени $\tau_1 + 1$. Тогда, сделав замену $t = \tau - \tau_*$, идентификацию модели будем проводить на промежутке времени $[-N, -1]$, а прогнозирование и оптимизацию — на $[0, t_f]$, $t_f = \tau_f - \tau_*$.

Имитационные, прогнозные и робастные свойства модели будем характеризовать следующими показателями (здесь $\mathbf{q}(t) = [\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), F(t)]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{q}_t = [\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t, F_t]^{\mathrm{T}}$; наполняемость указанных векторов в каждой задаче может быть разной):

а) высокая точность выполнения соотношения $\mathbf{q}(t) \approx \mathbf{q}_t$ в дискретных точках промежутка времени $[-N, -1]$, например, в смысле евклидовой L^2-нормы;

б) прогнозы координат вектора $\mathbf{q}(t)$ имеют как можно бóльшую точность в дискретных точках промежутка времени $[0, t_f]$;

в) оценки $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$, $\boldsymbol{\theta}_3$ параметров модели минимально чувствительны к незначительным колебаниям входной информации $\mathbf{q}_t$.

При практическом моделировании могут возникать следующие задачи.

Задача 1. Пусть на промежутке времени $[-N, -1]$ известна статистическая информация $\{\mathbf{x}_t\}$, $\{\mathbf{v}_t\}$ о динамике векторов переменных $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ линейной стационарной задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t), \;\; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \\ \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t), \;\; \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_*, \end{cases} \tag{4}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, которые вместе с граничными значениями $\mathbf{x}_*$, $\mathbf{v}_*$ неизвестны.

Необходимо найти такие параметры модели (4), которые обеспечивают выполнение мультикритерия а)–в). Сформулированная задача — задача чистой параметрической идентификации для имитации и прогнозирования.

Задача 2. Пусть на промежутке времени $[-N, -1]$ известна статистическая информация $\{\mathbf{x}_t\}$, $\{F_t\}$ о динамике векторов переменных $\mathbf{x}(t)$, $F(t)$ стационарной LQ-задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t), \ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \\ \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{v}(t), \ \ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_*, \\ \dot{F}(t) = G(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t) \,|\, \boldsymbol{\theta}_3), \ \ F(0) = F, \end{cases} \tag{5}$$

где $G(\cdot)$ — функция, подлежащая спецификации и состоящая из линейных, квадратичных и билинейных форм своих аргументов; **A**, **B**, **D** — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, которые вместе с граничными значениями $\mathbf{x}_*$, F_* и вектором $\boldsymbol{\theta}_3$ коэффициентов функции потенциала G неизвестны.

Необходимо специфицировать функцию $G(\cdot)$, идентифицировать неизвестные параметры модели (5) и найти такое непрерывно дифференцируемое управление $\mathbf{v}(t)$, чтобы при переведении системы из некоторого начального состояния в момент времени $t = -N$ в конечную желаемую точку $(\mathbf{x}_*, F_*)$ в момент времени $t = 0$, траектория фазового вектор $\mathbf{x}(t)$ и функции качества $F(t)$ удовлетворяли ряду свойств.

Во-первых, как и в задаче 1, будем требовать выполнения мультикритерия а)–в), во-вторых, траектория управления $\mathbf{v}(t)$ должна принадлежать некоторому допустимому множеству V, неизбежно возникающему в ходе решения [8]. Данная постановка соответствует задаче совместной идентификации управления и параметров модели для имитации и прогнозирования.

Задача 3. Пусть на промежутке времени $[-N, -1]$ известна статистическая информация $\{\mathbf{x}_t\}$, $\{F_t\}$ о динамике векторов переменных $\mathbf{x}(t)$, $F(t)$ LQ-задачи оптимального управления в форме Лагранжа:

$$\begin{cases} J = \int\limits_0^{t_f} G(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t) \,|\, \boldsymbol{\theta}_3)\, dt \to \max\limits_{\{\mathbf{v}(t)\}}, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t), \ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь, как и ранее, $G(\cdot)$ — функция, подлежащая спецификации и состоящая из линейных, квадратичных и билинейных форм своих аргументов; **A**, **B** — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, которые вместе с граничным значениям $\mathbf{x}_*$ и вектором $\boldsymbol{\theta}_3$ коэффициентов подынтегральной функции G неизвестны.

Необходимо найти такое управления $\mathbf{v}^{\text{опт}}(t)$ и такую фазовую траекторию $\mathbf{x}^{\text{опт}}(t)$, которые обеспечивали бы максимальное значение целевого функционала. Однако перед этим возникает проблема спецификации функции $G(\cdot)$, идентификации неизвестных параметров модели (6) на базовом периоде $[-N, -1]$. Здесь отличие от задачи 2 заключается в постановке дополнительных ограничений на множество V допустимых управлений. Во-первых, возникает необходимость «сшивания» базисного $\mathbf{v}(t)$ и оптимального $\mathbf{v}^{\text{опт}}(t)$

управлений в точке $t=0$; во-вторых, требуется выполнение достаточных условий экстремума целевого функционала J. Сформулированная задача — задача идентификации модели оптимального управления.

Что касается размерности m фазового пространства, то отображение свойств реальных динамических систем возможно в случае $m \geq 3$ [16]. Развиваемая в данной работе методология также допускает размерность $m \geq 3$. Практические исследования [4, 7, 14] показывают, что адекватные результаты можно получить в случае трехмерного фазового пространства, поэтому далее предполагаем $m=3$.

2. Метод решения

Основные методы идентификации дифференциальных уравнений — методы дискретизации (разностные, интегральные) и методы колокации [12]. В данной работе предлагается объединить эти два метода в одну интегрально-колокационную схему, избежав таким образом проблемы точности методов дискретизации и нелинейного оценивания, которая неизбежно возникает в методах колокации.

Базовым методом статистического оценивания выступает метод наименьших квадратов (МНК) для линейных регрессий [9–11], поэтому описанный выше мультикритерий, имеющийся в постановке задач 1–3, можно формализировать так.

Показателем качества аппроксимации исходных данных $\{\mathbf{q}_t\}$ будем считать коэффициенты детерминации R_i^2 соответствующих уравнений регрессии [9]. Критерий максимизации имитационных свойств имеет вид ($i=\overline{1,n}$, где n — размерность вектора $\mathbf{q}$):

$$\min_i R_i^2 \to \max. \tag{7}$$

Прогнозные свойства будем характеризовать с помощью относительных длин ζ_{it} доверительных интервалов Δ_{it} точечных прогнозов q_{it} на промежутке $[0, t_f]$ [10]. Критерий максимизации прогнозных свойств представим в виде

$$\max_i \zeta_{it} \to \min,\ \ \zeta_{it} = \left| \frac{\Delta_{it}}{q_{it}} \right|,\ \ t \in [0, t_f]. \tag{8}$$

Показателем чувствительности полученных оценок к незначительным колебаниям входной информации $\{\mathbf{q}_t\}$ предлагается считать индексы обусловленности CI_i информационных матриц соответствующих уравнений регрессии [11]. Тогда критерий максимизации робастных свойств можно записать

$$\max_i CI_i \to \min. \tag{9}$$

К мультикритерию (7)–(9) в процессе решения задач идентификации могут добавляться и другие локальные критерии, необходимые для регуляризации обратной задачи динамики.

2.1. Задача мультикритериальной параметрической идентификации. Начальные оценки неизвестных матриц модели (4) можно получить из интегральной схемы. Для этого перейдем от системы (4) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\int\limits_0^t \mathbf{x}(\tau)\,d\tau + \mathbf{B}\int\limits_0^t \mathbf{v}(\tau)\,d\tau + \mathbf{x}_*, \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{C}\int\limits_0^t \mathbf{x}(\tau)\,d\tau + \mathbf{D}\int\limits_0^t \mathbf{v}(\tau)\,d\tau + \mathbf{v}_*. \end{cases} \tag{10}$$

Начальное приближение решения системы (10) можно записать в виде

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{A}\int\limits_0^t \mathbf{x}^*(\tau)\,d\tau + \mathbf{B}\int\limits_0^t \mathbf{v}^*(\tau)\,d\tau + \mathbf{x}_*, \\ \mathbf{v}^{(0)}(t) = \mathbf{C}\int\limits_0^t \mathbf{x}^*(\tau)\,d\tau + \mathbf{D}\int\limits_0^t \mathbf{v}^*(\tau)d\tau + \mathbf{v}_*. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{v}^*(t)$ — некоторые функции, проходящие через базисные точки $\{\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_*\}$, $\{\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_*\}$, $t = \overline{-N, -1}$. Если информация в нецелочисленных точках промежутка $[-N, 0]$ отсутствует, то логично предположить, что статистическая информация между базисными точками распределена равномерно. Тогда в качестве функций $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{v}^*(t)$ могут быть выбраны ломаные, соединяющие базисные точки, и интегралы в правых частях (10) будут вычисляться по формуле трапеции.

Проводя численное интегрирование от 0 до $-N$, получим дискретный аналог модели (11), который записываем в виде уравнений регрессии:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{-i} = \boldsymbol{\alpha}_* + \mathbf{A}\sum\limits_{j=1}^{i} \delta_{ij}\,\mathbf{x}_{-j} + \mathbf{B}\sum\limits_{j=1}^{i} \delta_{ij}\mathbf{v}_{-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_{-i}, \\ \mathbf{v}_{-i} = \boldsymbol{\beta}_* + \mathbf{C}\sum\limits_{j=1}^{i} \delta_{ij}\,\mathbf{x}_{-j} + \mathbf{D}\sum\limits_{j=1}^{i} \delta_{ij}\,\mathbf{v}_{-j} + \boldsymbol{\nu}_{-i}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_* = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_* - \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{v}_*, \\ \boldsymbol{\beta}_* = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{D}\right)\mathbf{v}_* - \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{x}_*, \end{cases} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} -1, & i \neq j, \\ -\frac{1}{2}, & i = j. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}_{-i}$, $\boldsymbol{\nu}_{-i}$ — случайные возмущения на i-м уровне ряда динамики $(i = \overline{1, N})$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Полученные из (12) оценки неизвестных матриц модели (4) называются приближенными и могут быть уточнены с помощью метода колокаций.

В задаче 1 фазовый вектор $\mathbf{x}(t)$ и управление $\mathbf{v}(t)$ с математической точки зрения — равноправные величины, поэтому модель (4) можно записать в блочном виде

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{q}}(t)=\mathbf{Q}\mathbf{q}(t),\\ \mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_*,\end{cases}\quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix},\ \mathbf{q}_*=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_*\\ \mathbf{v}_*\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Поскольку предполагается $m=3$, то нас интересует спектр матрицы $\mathbf{Q}$ вида

$$\Lambda(\mathbf{Q})=\{0,\lambda_1,\lambda_2\pm i\omega,\lambda_3\pm i\mu\}, \tag{14}$$

где наличие нулевого собственного числа необходимо для выполнения условий Гаусса–Маркова регрессионного анализа [10, 11]. В случае спектра (14) общее решение задачи Коши (13) можно записать в виде декомпозиции на трендовую $\mathbf{q}_{\mathrm{tr}}(t)$ и колебательную $\mathbf{q}_{\mathrm{osc}}(t)$ составляющие [9]:

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}_{\mathrm{tr}}(t)+\mathbf{q}_{\mathrm{osc}}(t), \tag{15}$$

$$\mathbf{q}_{\mathrm{tr}}(t)=\begin{cases}\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1\neq 0,\\ \mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2 t, & \lambda_1=0,\end{cases} \tag{16}$$

$$\mathbf{q}_{\mathrm{osc}}(t)=\mathbf{n}_3e^{\lambda_2 t}\cos\omega t+\mathbf{n}_4e^{\lambda_2 t}\sin\omega t+\mathbf{n}_5e^{\lambda_3 t}\cos\mu t+\mathbf{n}_6e^{\lambda_3 t}\sin\mu t. \tag{17}$$

В следующей теореме, ключевой для колокационной схемы, рассмотрен вопрос соответствия между декомпозицией (15)–(17) и задачей Коши (13).

Теорема 1. *Пусть задана задача Коши (13). Функция (15)–(17) — решение этой задачи тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{Q}=\mathbf{N}\mathbf{J}\mathbf{N}^{-1}\ (\det\mathbf{N}\neq 0),\ \mathbf{q}_*=\sum_i\mathbf{n}_i,\ \mathbf{N}=[\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,...,\mathbf{n}_6],\ \mathbf{J}=\mathrm{diag}(\mathbf{J}_1,\mathbf{J}_2,\mathbf{J}_3), \tag{18}$$

$$\mathbf{J}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \delta & \lambda_1\end{bmatrix},\ \mathbf{J}_2=\begin{bmatrix}\lambda_2 & -\omega\\ \omega & \lambda_2\end{bmatrix},\ \mathbf{J}_3=\begin{bmatrix}\lambda_3 & -\mu\\ \mu & \lambda_3\end{bmatrix},$$

$$\delta=\begin{cases}0, & \lambda_1\neq 0,\\ 1, & \lambda_1=0,\end{cases}\quad i=\begin{cases}1,2,3,5, & \lambda_1\neq 0,\\ 1,3,5, & \lambda_1=0.\end{cases}$$

Доказательство. Вначале докажем необходимое условие. Декомпозицию (15)–(17) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{N}\mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}(t)=[\mathbf{f}_{\mathrm{tr}}(t),e^{\lambda_2 t}\cos\omega t,e^{\lambda_2 t}\sin\omega t,e^{\lambda_3 t}\cos\mu t,e^{\lambda_3 t}\sin\mu t]^{\mathrm{T}}, \tag{19}$$

где $\mathbf{f}_{\mathrm{tr}}(t)=[1,e^{\lambda_1 t}]$ в случае экспоненциального тренда $(\lambda_1\neq 0)$ и $\mathbf{f}_{\mathrm{tr}}(t)=[1,t]$ в случае линейного тренда $(\lambda_1=0)$. Тогда производная вектор-функции (19) равняется

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=\mathbf{N}\mathbf{J}\mathbf{f}(t). \tag{20}$$

Учитывая (13), (19), находим $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{QNf}(t)$. Сравнивая последнее выражение с (20), получаем, что $\mathbf{Q} = \mathbf{NJN}^{-1}$ $(\det \mathbf{N} \neq 0)$. Граничное значение $\mathbf{q}_*$, фигурирующее в условии (18), очевидно, следует из декомпозиции (15)–(17) при $t = 0$.

Чтобы доказать достаточное условие, будем исходить из того, что задача Коши (13) имеет единственное решение. В противном случае функция (15)–(17) является решением задачи Коши (13).

Теорема доказана.

При заданных значениях управляющих параметров λ_1, λ_2, λ_3, ω, μ декомпозиция (15)–(17) линейна относительно своих коэффициентов, а значит, применим аппарат линейного регрессионного анализа. Численная реализация интегрально-колокационной схемы состоит в построении такого регулятора, который, действуя по принципу обратной связи, на основании текущих выходов $\mathbf{q}(t)$ вырабатывает такие входы (значения управляющих параметров), которые обеспечили бы выполнение мультикритерия (7)–(9).

2.2. Задача совместной мультикритериальной идентификации управления и параметров. Для решения задачи 2 удобно искать неизвестное управление $\mathbf{v}(t)$ в виде суммы переменной $\mathbf{u}(t)$ и постоянной $\mathbf{v}_*$ компонент. Поскольку $\mathbf{v}_*$ фигурирует в граничном условии задачи Коши (5), то для переменной компоненты $\mathbf{u}(t)$ вытекает следующая интерпретация: если достигнута поставленная цель, т.е. система переведена в конечную желаемую точку $(\mathbf{x}_*, F_*)$, то переменная компонента управления $\mathbf{v}(t)$ обращается в ноль («затухает»).

Положим $\mathbf{z}(t) = \mathbf{B}\mathbf{v}(t)$. Функция $\mathbf{z}(t)$ называется входным сигналом системы (4) и согласно (5) вместе с фазовым вектором $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет задаче Коши $(\det(\mathbf{B}) \neq 0)$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{z}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \\ \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{R}\mathbf{z}(t), & \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_*, \end{cases} \quad \mathbf{R} = \mathbf{BDB}^{-1}, \ \mathbf{z}_* = \mathbf{B}\mathbf{v}_*. \tag{21}$$

Относительно спектров матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$ системы (5) для случая фазового пространства размерности $m = 3$ предполагаем, что

$$\Lambda(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2 \pm i\omega\}, \ \ \Lambda(\mathbf{D}) = \{0, \nu \pm i\mu\}. \tag{22}$$

Такое допущение вполне логично, так как для большинства реальных динамических систем входной сигнал лишь корректирует динамику, задаваемую внутренними силами системы, и является гармоникой с постоянной $(\nu = 0)$ или переменной $(\nu \neq 0)$ амплитудами [4]:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{cases} \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \cos\mu t + \mathbf{c}_3 \sin\mu t, & \nu = 0, \\ \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 e^{\nu t} \cos\mu t + \mathbf{c}_3 e^{\nu t} \sin\mu t, & \nu \neq 0. \end{cases} \tag{23}$$

Здесь $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ — векторы неизвестных коэффициентов.

Воспользуемся интегральной схемой для нахождения начальных оценок спектров (22). Проинтегрировав первое уравнение системы (5) с учетом представления (23) и перейдя к соответствующему дискретному аналогу модели, получим следующее уравнение регрессии ($\boldsymbol{\varepsilon}_{-i}$ — случайное возмущение на i-м уровне ряда динамики, $i=\overline{1, N}$):

$$\mathbf{x}_{-i} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{A}\sum_{j=1}^{i} \delta_{ij}\mathbf{x}_{-j} - \mathbf{c}_1 i + \mathbf{h}(i) + \boldsymbol{\varepsilon}_{-i},$$
$$\mathbf{c}_0 = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_*,\ \delta_{ij} = \begin{cases} -1, & i \neq j, \\ -\dfrac{1}{2}, & i = j, \end{cases} \tag{24}$$

$$\mathbf{h}(i) = \begin{cases} -\mathbf{c}_2 \dfrac{1}{\mu}\sin\mu i + \mathbf{c}_3\dfrac{1}{\mu}(1-\cos\mu i), & \nu = 0, \\ \mathbf{c}_2 \dfrac{1}{\nu^2+\mu^2}\{e^{-\nu i}(\nu\cos\mu i - \mu\sin\mu i) - \nu\} + & \\ & \nu \neq 0. \\ +\mathbf{c}_3\dfrac{1}{\nu^2+\mu^2}\{e^{-\nu i}(-\nu\sin\mu i - \mu\cos\mu i) + \mu\}, & \end{cases}$$

Уточнение спектров (22) и идентификацию модели (21) будем проводить по колокационной схеме. Из (21), (22) следует декомпозиция решения фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ ($\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — квадратные матрицы размерности m):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Mf}(t) + \mathbf{Ng}(t), \tag{25}$$

$$\mathbf{g}(t) = [1, e^{\nu t}\cos\mu t, e^{\nu t}\sin\mu t]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{f}(t) = [f_{\mathrm{tr}}(t), e^{\lambda_2 t}\cos\omega t, e^{\lambda_2 t}\sin\omega t]^{\mathrm{T}},$$

$$f_{\mathrm{tr}}(t) = \begin{cases} e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 \neq 0, \\ t, & \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть задана задача Коши (21). Функция (25) — решение этой задачи тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{A} = \mathbf{MJ}_{\omega}\mathbf{M}^{-1}\ (\det\mathbf{M} \neq 0),\ \mathbf{R} = \mathbf{CJ}_{\mu}\mathbf{C}^{-1}\ (\det\mathbf{C} \neq 0),\ \mathbf{C} = \mathbf{NJ}_{\mu} - \mathbf{AN} + \mathbf{MJ}_0, \tag{26}$$

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{Mf}(0) + \mathbf{Ng}(0),\ \mathbf{z}_* = \mathbf{Cg}(0),$$

$$\mathbf{J}_{\omega} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\omega \\ 0 & \omega & \lambda_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{J}_{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & -\mu \\ 0 & \mu & \nu \end{bmatrix},\ \mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \delta = \begin{cases} 0, & \lambda_1 \neq 0, \\ 1, & \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Вначале докажем необходимое условие. Производная функции (25) равна $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{MJ}_{\omega}\mathbf{f}(t) + \mathbf{MJ}_0\mathbf{g}(t) + \mathbf{NJ}_{\mu}\mathbf{g}(t)$. Иначе если (25) является решением задачи (21), то $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{AMJ}_{\omega}\mathbf{f}(t) + \mathbf{ANJ}_{\mu}\mathbf{g}(t) + \mathbf{z}(t)$. Сравнивая получившиеся выражения при вектор-функциях $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{g}(t)$, получаем, что $\mathbf{A} = \mathbf{MJ}_{\omega}\mathbf{M}^{-1}$ ($\det\mathbf{M} \neq 0$), а входной сигнал должен удовлетворять равенству

$$\mathbf{z}(t)=\mathbf{C}\mathbf{g}(t),\ \ \mathbf{C}=\mathbf{N}\mathbf{J}_{\mu}-\mathbf{A}\mathbf{N}+\mathbf{M}\mathbf{J}_{0}. \tag{27}$$

Производная от (27) равна $\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{C}\mathbf{J}_{\mu}\mathbf{g}(t).$ В противном случае, если функция (27) — решение задачи (21), то $\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{g}(t).$ Сравнение соответствующих выражений при вектор-функции $\mathbf{g}(t)$ дает $\mathbf{R}=\mathbf{C}\mathbf{J}_{\mu}\mathbf{C}^{-1}$ $(\det\mathbf{C}\neq 0)$. Граничные значения $\mathbf{x}_*$, $\mathbf{z}_*$, фигурирующие в условии (26), очевидно, следуют из декомпозиции (25), (27) при $t=0$.

Доказательство достаточного условия аналогично приведенному в теореме 1.

Теорема доказана.

Несмотря на то, что задача Коши (21) полностью идентифицирована, управление $\mathbf{v}(t)$ по-прежнему остается неопределенным. Воспользуемся последним уравнением системы (5). В постановке задачи 2 отмечалась тесная связь функции качества $F(t)$ с задачами оптимизации. Поэтому в данной работе для спецификации функции $G(\cdot)$ предлагается подход, основанный на результате следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть задана система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}_*),\\ \dot{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{D}(\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}_*).\end{cases} \tag{28}$$

Если $\mathbf{B}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, *то для системы* (*28*) *существует первый интеграл* $\Phi(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(\mathrm{t}))$, *который при условии* $\mathbf{D}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ *также является ее гамильтонианом* $H(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))$.

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (28) на $\dot{\mathbf{u}}(t)$, второе — на $\dot{\mathbf{x}}(t)$ и найдем разность получившихся выражений:

$$\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}_*))-\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{D}(\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}_*))=0$$

или после тождественных преобразований —

$$\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t)+\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}(\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}_*)-$$
$$-\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{D}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}_*)+\mathbf{v}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t)=0.$$

Далее, выделяя производную по времени, при условии $\mathbf{B}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ получим

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))=0,$$

$$\Phi(\cdot)=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{v}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}(t)-\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)-\int_0^t\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(\tau)(\mathbf{D}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{u}(\tau)+\mathbf{v}_*)\,d\tau.$$

Как видно, функция $\Phi(\cdot)$ — первый интеграл системы (28), так как принимает постоянное значение на траекториях, задаваемых этой системой дифференциальных уравнений.

Если $\mathbf{D} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, то первый интеграл системы (28) принимает вид

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \qquad (29)$$

Нетрудно проверить, что при $\mathbf{D} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ для функции (29) выполняются условия

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{T}}}, \quad \dot{\mathbf{u}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}},$$

а значит, первый интеграл (29) — также гамильтониан системы (28).

Теорема доказана.

Как известно, гамильтоновы системы возникают в задачах оптимизации при их решении по принципу максимума Понтрягина, а по виду гамильтониана часто удается определить вид функции качества системы [8, 15]. Так, из гамильтониана (29) следует вид подынтегральной функции (с точностью до произвольной постоянной α_0) возможной задачи оптимизации (6).

Положим

$$G(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = \alpha_0 + \mathbf{v}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

или в идентифицированных выше координатах $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ —

$$\begin{aligned} &G(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) = \beta_0 + \mathbf{v}_*^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{x}}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}\mathbf{z}(t), \\ &\beta_0 = \alpha_0 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{v}_*, \ \mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1} \ (\det \mathbf{B} \neq 0). \end{aligned} \qquad (30)$$

Здесь для выполнения условия «затухания» переменной компоненты управления необходимо ввести ограничение на вектор $\mathbf{v}_*$ в виде $\mathbf{v}_* = \mathbf{K}\mathbf{z}_*$.

Если предположить, что физические размерности координат управления и фазовых координат совпадают, то размерность левой части (30) равна размерности квадрата фазовой координаты в единицу времени. Очевидно, что на практике реальные величины с такой размерностью встречаются крайне редко. Поэтому для практической идентификации потенциала (30) сделаем следующее предположение. Пусть существует некоторая величина $Y(t)$, имеющая размерность фазовой координаты и являющаяся глобальной характеристикой движения системы. Тогда потенциал системы можно представить в виде

$$G(t) = 2\kappa Y(t)\dot{Y}(t), \ \kappa > 0, \qquad (31)$$

где κ — безразмерный коэффициент, подлежащий оцениванию.

Интегрирование (30) с учетом (31) дает следующую спецификацию функции качества (c_0 — константа интегрирования)

$$\kappa Y^2(t) = c_0 + \beta_0 t + \mathbf{z}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{z}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{K}\mathbf{z}(\tau)\,d\tau. \qquad (32)$$

Идентификация функции (32) также затруднительна из-за наличия коэффициента κ, а значит, задача нуждается в доопределении. Таким дополнительным ограничением на решение задачи 2 может быть множество допустимых управлений V, которое предлагается задать в виде ограничений на масштаб управления (r_1, r_2 — наперед заданные числа):

$$V = \left\{ \mathbf{v}(t) : 0 \le r_1 \le \left| \frac{v_i(t)}{x_i(t)} \right| \le r_2,\ i = \overline{1,3},\ t = \overline{-N, -1} \right\}. \tag{33}$$

Разделив обе части выражения (32) на κ, придем к идентифицируемой модели

$$Y^2(t) = \bar{c}_0 + \bar{\beta}_0 t + \mathbf{z}'_* \overline{\mathbf{K}} \mathbf{x}(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{z}'(\tau) \overline{\mathbf{K}} \mathbf{z}(\tau)\, d\tau,\ \ \bar{c}_0 = \frac{c_0}{\kappa},\ \ \bar{\beta}_0 = \frac{\beta_0}{\kappa},\ \ \overline{\mathbf{K}} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{K}. \tag{34}$$

Оценив в (34) матрицу $\overline{\mathbf{K}}$, получим следующее условие на параметр κ:

$$\frac{r_1}{\min\limits_{i,\,t} \left| \dfrac{[\overline{\mathbf{K}}\mathbf{z}(t)]_i}{x_i(t)} \right|} \le \kappa \le \frac{r_2}{\max\limits_{i,\,t} \left| \dfrac{[\overline{\mathbf{K}}\mathbf{z}(t)]_i}{x_i(t)} \right|}. \tag{35}$$

Функция регрессии в виде (34) и условие (35) полностью замыкают алгоритм решения задачи 2, при этом задача Коши (5) становится полностью идентифицированной.

При заданных значениях управляющих параметров λ_1, λ_2, ν, ω, μ функции (25), (34) линейны относительно своих коэффициентов, а значит, применим аппарат линейного регрессионного анализа. Численная реализация предложенного алгоритма, как и в случае задачи 1, состоит в построении такого регулятора, который, действуя по принципу обратной связи, на основании текущих выходов $\mathbf{x}(t)$, $F(t)$ вырабатывает такие входы (значения управляющих параметров), которые обеспечили бы выполнение заданного мультикритерия. Последний по постановке задачи состоит из локальных критериев (7)–(9) и процедуры обработки исключительных ситуаций.

2.3. Задача идентификации модели оптимального управления. Для удобства идентификации модели (6) перейдем от задачи Лагранжа к эквивалентной задаче Больца [8]. Используя спецификацию потенциала $G(\cdot)$ системы в виде (30), получаем

$$\begin{cases} J = F(t_f) \to \max\limits_{\{\mathbf{v}(t)\}}, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t),\ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \\ \dot{F}(t) = \beta_0 + \mathbf{v}_*^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dfrac{1}{2} \mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t) \mathbf{B} \mathbf{v}(t),\ \ F(0) = F_*. \end{cases} \tag{36}$$

Теорема 4. *Пусть задана LQ задача оптимального управления (36). Если* $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ *и* $\mathbf{B} > 0$, *то решение задачи (36) имеет вид*

$$\mathbf{x}^{\text{опт}}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_* + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\, e^{-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\tau - t_f)}\mathbf{v}_*\, d\tau, \quad \mathbf{v}^{\text{опт}}(t) = e^{-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t - t_f)}\mathbf{v}_*. \quad (37)$$

Доказательство. Пусть, согласно принципу максимума Понтрягина, $\mathbf{y}(t) \in E^m$, $y_{m+1}(t)$ — двойственные переменные, соответствующие уравнениям движения фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ и функции качества $F(t)$ соответственно. Тогда гамильтониан задачи (36) принимает вид

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{y}(t), y_{m+1}(t)) =$$

$$= \mathbf{y}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t)) + y_{m+1}(t)\left(\beta_0 + \mathbf{v}_*^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{x}}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}\mathbf{v}(t)\right).$$

При $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ необходимые условия экстремума функционала J представляют собой уравнения движения из (36), а также уравнения движения для двойственной переменной $\mathbf{y}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}_*), \ \mathbf{y}(t_f) = 0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_*, \end{cases}$$

откуда находим

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}(t), \ \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_*. \quad (38)$$

Решая двухточечную краевую задачу (36), (38), приходим к оптимальным решениям (37). Условие $\mathbf{B} > 0$ — достаточное условие экстремума функционала J [8].

Теорема доказана.

Итак, на периоде оптимизации $[0, t_f]$ выполняются уравнения движения (36), (38). Логично предположить, что на периоде идентификации $[-N, -1]$ уравнения движения фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ и функции качества $F(t)$ остаются теми же, меняется лишь задача Коши для управления $\mathbf{v}(t)$. На базовом периоде она имеет вид ($\boldsymbol{\alpha}_0$ — вектор граничных значений)

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{v}(t), \ \mathbf{v}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0. \quad (39)$$

Идентифицируем уравнения движения (36), (39) на промежутке времени $[-N, -1]$ с помощью метода колокаций. Выберем класс траекторий фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ так, чтобы на периоде оптимизации $[0, t_f]$ не возникала проблема двойственной неустойчивости [8, 15]. Для этого относительно спектра матрицы $\mathbf{A}$ (спектр $\mathbf{D}$ предполагается таким же, как и в задаче 2) достаточно предположить следующее:

$$\Lambda(\mathbf{A}) = \{0, \pm i\omega\}, \ \ \Lambda(\mathbf{D}) = \{0, \nu \pm i\mu\}. \quad (40)$$

Тогда декомпозиция фазовой траектории на составляющие будет иметь вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{n}_1 + \mathbf{m}_1 t + \mathbf{m}_2 \cos\omega t + \mathbf{m}_3 \sin\omega t + \mathbf{n}_2 e^{\nu t}\cos\mu t + \mathbf{n}_3 e^{\nu t}\sin\mu t. \quad (41)$$

Оценив функцию (41), следуя теореме 2, можно восстановить некоторые параметры модели (36), (39). Для полной идентификации задачи, как и в задаче 2, необходимо идентифицировать функцию качества $F(t)$. Поскольку управление $\mathbf{v}(t)$ в точке $t = 0$ должно быть непрерывным ($\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^{\text{опт}}(0)$), то с учетом (37) получаем, что $\mathbf{v}_* = e^{-\mathbf{A}^{\mathrm{T}} t_f} \mathbf{K}\mathbf{z}_*$, а значит, потенциал (30) после интегрирования дает следующую спецификацию функции качества:

$$\kappa Y^2(t) = c_0 + \beta_0 t + \mathbf{z}_*^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \mathrm{e}^{-\mathbf{A} t_f} \mathbf{x}(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{z}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{K}\mathbf{z}(\tau)\, d\tau. \tag{42}$$

Здесь, как и ранее, параметр управления $\kappa > 0$ выбирается из условия (35), в котором матрица $\overline{\mathbf{K}}$ соответствует функции (42), обе части которой разделены на κ.

Настройка модели на заданный набор свойств происходит с помощью регулятора, к которому помимо критериев (7)–(9) при оценивании функции (42) добавляется ограничение-неравенство $\mathbf{K} > 0$. Двухстороннее взаимодействие динамической модели и регулятора влияет на энергетический баланс системы, который в оптимальном режиме можно записать $H(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = \mathrm{const}$. В режиме идентификации регулятор выступает в роли фильтра, который настраивает функцию $H(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$ на значения, соответствующие данному процессу.

3. Численный эксперимент

В данной работе апробацию предложенных моделей и методов предлагается проводить на примере макроэкономических систем. Последние, как известно, слабо формализованы [1, 7] и отличаются доступностью баз данных их динамики [17]. Поскольку макроэкономическая информация в [17] приводится в млрд евро, то графическая иллюстрация полученных результатов осуществляется в обезразмеренном виде путем деления каждой переменной на соответствующие значения в начальный момент времени ($t = -N$) базового периода.

Отметим, что поскольку идентификация моделей проводится на периоде с отрицательным временем, то устойчивость решений рассматриваемых задач Коши будет обеспечиваться требованием $\mathrm{Re}\lambda \geq 0,\ \lambda \in \Lambda$. Характерной особенностью рассматриваемых моделей является наличие условия $\mathrm{Re}\lambda = 0$. Поэтому нечувствительность получаемых решений к незначительным изменениям входной информации достигается настройкой регулятора на небольшие значения индексов обусловленности ($CI < 20$ для фазовых координат и управлений и $CI < 80$ для функции качества) [11].

3.1. Динамическая модель Леонтьева. Задачу 1 данной работы можно рассматривать как задачу мультикритериальной параметрической идентификации модели динамического межотраслевого баланса [18]. Для этого разделим макроэкономическую систему на три отрасли ($m = 3$): сельское хозяйство, промышленность и сектор услуг. Тогда координатами фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ модели выступают валовые выпуски каждой отрасли, а координатами управления $\mathbf{v}(t)$ — конечные потребительские расходы на продукцию каждой отрасли. Дополнив классическую динамическую модель Леонтьева аналогичным уравнением по управлению $\mathbf{v}(t)$, получим задачу Коши (4). В качестве макроэкономической системы выбрана Великобритания: 1971–2004 гг. — период идентификации ($N = 34$), 2005–2006 гг. — период прогнозирования.

Начальное приближение спектра матрицы $\mathbf{Q}$ модели (13), найденное согласно интегральной схеме из регрессий (12), равняется

$$\Lambda(\mathbf{Q}) = \{-0{,}0056,\ -0{,}0027,\ 0{,}1145 \pm 0{,}3393i,\ \ 0{,}0529 \pm 0{,}1778i\}.$$

Как видно, первых два собственных числа, задающих трендовую составляющую, близки к нулю. Тогда логично предположение (14) о спектре матрицы $\mathbf{Q}$.

С помощью мультикритериального регулятора найдены оптимальные оценки параметров модели (4). При этом оптимальный спектр матрицы $\mathbf{Q}$ оказался равным:

$$\Lambda(\mathbf{Q}) = \{0,\ 0,\ 0{,}1223 \pm 0{,}3301i,\ 0{,}0704 \pm 0{,}2120i\}.$$

Численные исследования показали, что модель с линейный трендом не только не уступает модели с экспоненциальным трендом, но даже демонстрирует лучшие имитационные и робастные свойства.

Приведенные в табл. 1 основные характеристики траекторий фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ и управления $\mathbf{v}(t)$ свидетельствуют о высоких имитационных, робастных и прогнозных свойствах модели (4). Сравнение с реальными данными (в этом случае они известны) в прогнозные моменты времени, отображенное в фактической относительной ошибке δ_{it} прогноза в моменты времени $t = 0$ (2005 г.) и $t = 1$ (2006 г.), также указывает на адекватность полученных результатов.

Таблица 1

	R_i^2	CI_i	ζ_{i0}	δ_{i0}	ζ_{i1}	δ_{i1}
$x_1(t)$	0,9811	4,3368	6,2563 %	2,9145 %	6,8561%	3,3564 %
$x_2(t)$	0,9862	8,9133	5,5892 %	2,8253 %	5,9212%	1,0212 %
$x_3(t)$	0,9937	10,824	5,1563 %	1,1562 %	5,6478%	0,9232 %
$v_1(t)$	0,9707	9,7359	7,1531 %	3,1045 %	7,2852%	5,7852 %
$v_2(t)$	0,9796	9,7359	4,2531 %	0,8523 %	4,8014%	2,6254 %
$v_3(t)$	0,9875	5,8749	4,0212 %	0,7142 %	4,5232%	1,3562 %

На рис. 1 приведены графики фазовых траекторий и траекторий управлений, на которые настроена модель Леонтьева. Здесь точками изображена статистическая информация, пунктиром — начальные приближения, полученные из интегральной схемы, а сплошной линией — траектории движения, удовлетворяющие заданному мультикритерию. Как видно, качество аппроксимации и прогнозные свойства модели (4) удовлетворительны и, следовательно, ее можно использовать при макроэкономическом моделировании.

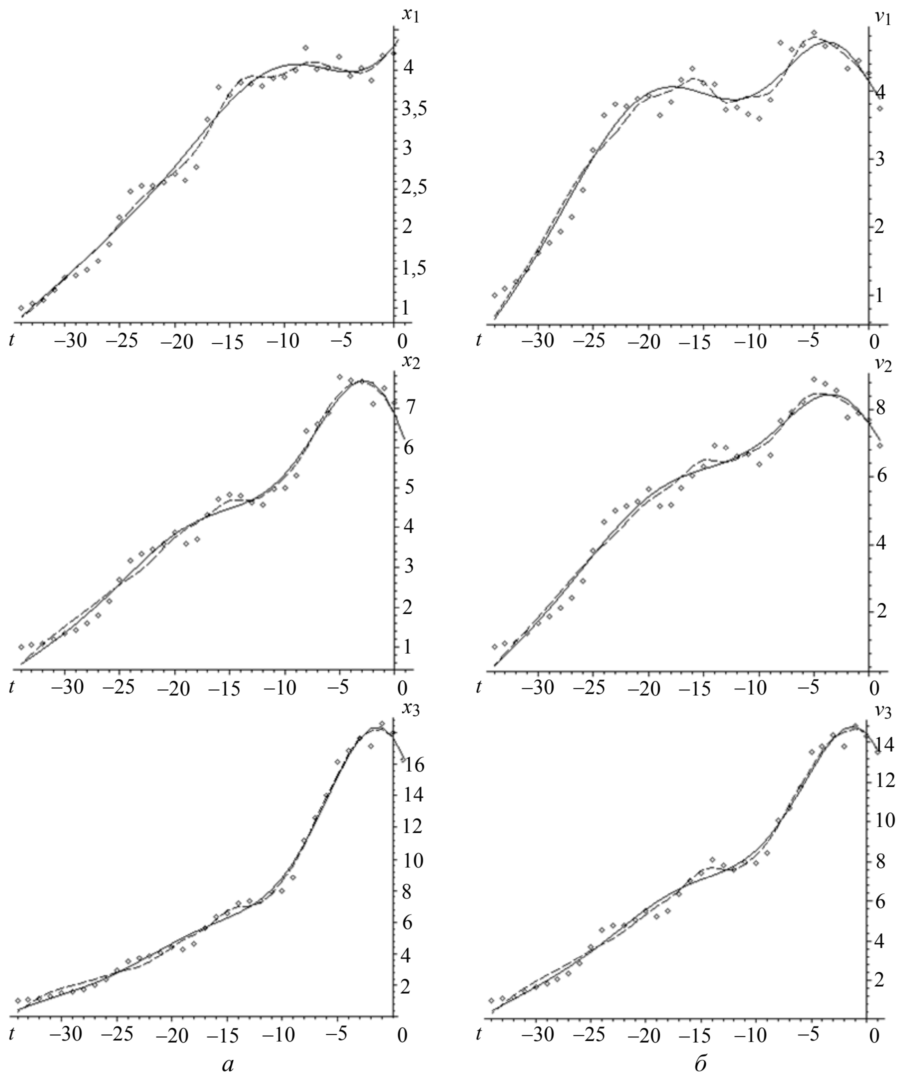

Рис. 1

3.2. Модель имитации и прогнозирования макроэкономической динамики. Модель (5), рассмотренная в задаче 2, с точки зрения макроэкономического моделирования представляет собой LQ модель общей макроэкономической динамики. Как показывает практика [14, 19], координатами такой модели могут быть ($m=3$): потребительские расходы $x_1(t)$, валовые инвестиции $x_2(t)$, экспорт товаров и услуг $x_3(t)$. Глобальной характеристикой $Y(t)$ движения может выступать валовой внутренний продукт. Пусть множество (33) допустимых управлений $\mathbf{v}(t)$ задается с помощью границ $r_1=0$ и $r_2=0{,}1$. В качестве макроэкономической системы выбраны США: 1971–1998 гг. — период идентификации ($N=28$), 1999–2000 гг. — период прогнозирования.

Рассмотрены различные случаи входного сигнала (23). Оказалось, что входной сигнал в виде колебаний с постоянной амплитудой обеспечивает лучшие прогнозные и робастные свойства модели. Мультикритериальный регулятор настроил модель (5) на следующий оптимальный набор параметров спектра (22): $\lambda_1=0{,}0456$; $\lambda_2=0{,}0933$; $\omega=0{,}2986$; $\nu=0$; $\mu=0{,}5650$.

Параметр масштаба κ для выполнения условия (33) должен принадлежать отрезку $[0, 3{,}1\cdot10^{-5}]$. В этом случае значение ни одной из координат вектора управлений не может составлять больше 10 % от значения соответствующей фазовой координаты на промежутке времени $[-N, 0]$.

Как и в задаче 1, случай линейного тренда в разложении (25) фазовой траектории оказался не хуже экспоненциального.

В табл. 2 представлены основные характеристики фазовых траекторий и траектории функции качества, которые соответствуют оптимальному набору управляющих параметров, найденному с помощью мультикритериального регулятора.

Таблица 2

	R_i^2	CI_i	ζ_{i0}	δ_{i0}	ζ_{i1}	δ_{i1}
$x_1(t)$	0,9885	7,2156	8,0236	1,1254	8,2124	3,1156
$x_2(t)$	0,9851	6,5234	7,2351	1,0542	7,6584	1,0212
$x_3(t)$	0,9907	4,1254	5,2153	0,9855	7,0542	2,5872
$F(t)$	0,9765	72,126	9,8972	2,0542	10,012	2,9871

На рис. 2 изображены графики фазовых траекторий и функции качества, на которые настроена модель (5). Здесь, как и ранее, точками показана статистическая информация, пунктиром — начальные приближения, полученные из интегральной схемы, а сплошной — траектории движения, удовлетворяющие заданному мультикритерию.

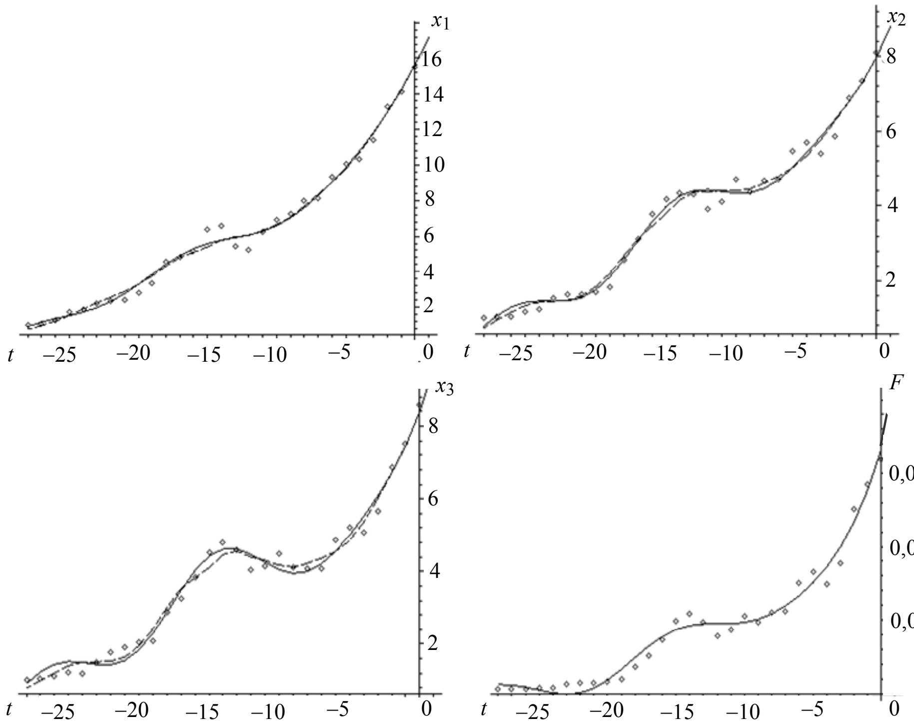

Рис. 2

3.3. Модель оптимизации макроэкономической динамики. Модель (6), рассмотренная в задаче 3, может быть рассмотрена как LQ модель оптимизации макроэкономической динамики. Координатами такой модели выберем ($m = 3$): валовой прирост основных фондов $x_1(t)$, экспорт товаров и услуг $x_2(t)$, фонд заработной платы $x_3(t)$. Показателем качества $Y(t)$ функционирования системы может выступать валовой внутренний продукт (ВВП). Пусть, как и ранее, множество (33) допустимых управлений $\mathbf{v}(t)$ на базовом периоде задается с помощью границ $r_1 = 0$ и $r_2 = 0{,}1$. В качестве макроэкономической системы выбраны Нидерланды: 1971–2001 гг. — период идентификации ($N = 31$), 2002–2006 гг. — период оптимизации ($t_f = 5$). Тогда задачу оптимального управления (6) сформулируем так: необходимо найти такие оптимальные траектории макроэкономических величин x_1, x_2, x_3, чтобы ВВП системы в 2006 г. был максимальным.

Параметры управления модели (6), которые позволили настроить модель на заданный набор свойств на базовом промежутке времени, принимают значения: $\omega = 0{,}2274$, $\nu = 0{,}0513$, $\mu = 0{,}5050$, $0 \le \hat{\kappa} \le 2{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Имитационные, прогнозные и робастные свойства модели (6) на периоде идентификации приведены в табл. 3. Как видно, высокие коэффициенты детерминации, низкие значения относительных ошибок прогнозов и индексов обусловленности позволяют считать модель (6) стационарной и проводить оптимизацию на промежутке времени $[0, t_f]$.

Таблица 3

	R_i^2	CI_i	ζ_{i0}	δ_{i0}
$x_1(t)$	0,9942	8,1254	4,1254	0,5754
$x_2(t)$	0,9924	7,0512	5,0254	1,5249
$x_3(t)$	0,9977	5,1245	5,8562	2,1251
$F(t)$	0,9821	41,124	6,5248	1,3254

На рис. 3 приведены траектории движения макроэкономической системы. Здесь точками изображены реальные данные; сплошной линией — траектории движения на базовом периоде; пунктиром — траектории движения в оптимальном режиме функционирования. Видно, что когда распределение ресурсов приближается к оптимальному, очевидным становится существенное увеличение экономического эффекта от их использования.

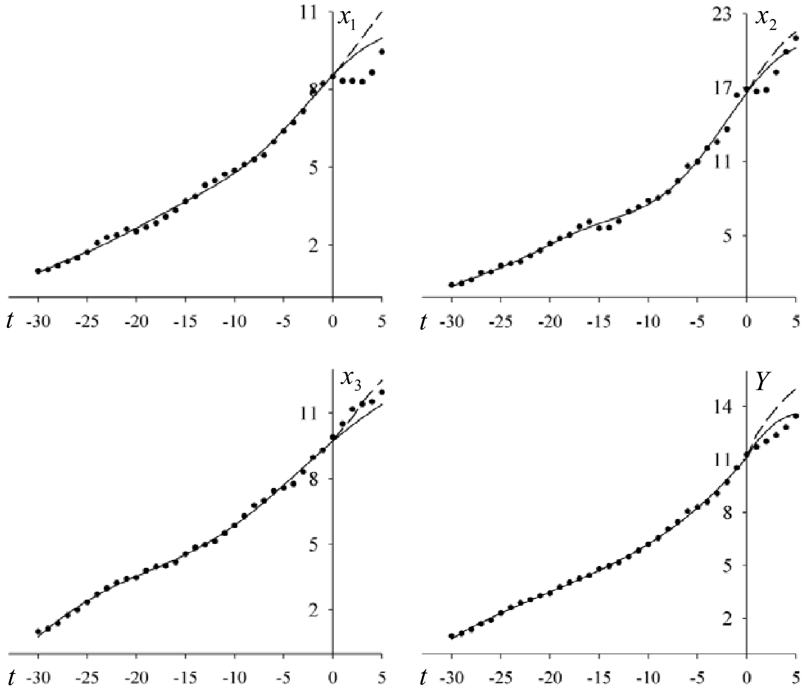

Рис. 3

Заключение

В настоящей работе предложен алгоритм идентификации LQ моделей, цель которых — имитация, прогнозирование или оптимизация. Рассмотрены задачи чистой параметрической идентификации и совместной идентификации управлений и параметров. Разработанный мультикритериальный регулятор позволил построить модели, эффективные для прогнозирования и оптимизации. С помощью рациональной спецификации LQ задачи оптимального управления удалось найти оптимальные решения в явном виде, избежав трудностей численной реализации.

1. *Альбрехт Э.Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электрон. журн. «Исследовано в России». — 2002. — **5**. — С. 54–86.
2. *Соколов А.Ю.* Алгебраическое моделирование лингвистических динамических систем // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 2. — С. 141–148.
3. *Математическое* моделирование при формировании облика летательного аппарата / Под ред. В.А. Подобедова. — М.: Машиностроение, 2005. — 496 с.
4. *Bates D.M., Watts D.B.* Nonlinear regression analysis and its applications. — N.Y.: Wiley, 1988. — 365 p.
5. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: В 2-х т. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
6. *Leineweber D.B., Stroeder A.C.* Parameter estimation and optimal control for dynamic chemical processes // Scientific Computing in Chemical Engineering / Edited by F. Keil, etc. — Berlin: Verlang, 1996. — 259 p.
7. *Greiner A., Semler W., Gong G.* The forces of economic growth: A time-series perspective. — N.J.: Princeton Univ. Press, 2005. — 237 p.
8. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оцен-

ка и управление — М.: Мир, 1972. — 545 с.
9. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. — М.: Юнити, 1998. — 1022 с.
10. *Назаренко О.М.* Основи економетрики. — Київ: Центр навчальної літератури, 2005. — 392 с.
11. *Greene W.H.* Econometric analysis. — 5th ed. — N.Y.: Pearson Educ. Int., 2003. — 1056 p.
12. *Ramsay J.O., Hooker G., Campbell D.* Parameter estimation for differential equations: A generalized smoothing approach // J. of the Royal Stat. Society. Series B. — 2007. — **5**, N 69. — P. 741–796.
13. *Бабаков И.М.* Теория колебаний: Изд. 4-е, испр. — М.: Наука, 2004. — 591 с.
14. *Nazarenko O.M.*, *Filchenko D.V.* Parametric identification of state-space dynamic systems: A time-domain perspective // Int. J. of Innovating Comput., Inform. and Contr. — 2008. — **4**, N 7. — P. 1553–1566.
15. *Жуковский В.И.*, *Чикрий А.А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1994. — 320 с.
16. *Анищенко В.С.* Детерминированный хаос // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — № 6. — С. 70–76.
17. http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/statistics/search_database.
18. *Колемаев В.А.* Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем — М.: Юнити-Дана, 2005. — 295 с.
19. *Шевчук В.О.* Міжнародна економіка: теорія і практика — Львів: Каменяр, 2003. — 719 с.

Сумской государственный университет Получено 09.11.2009