

О. Назаренко, канд. фіз.-мат. наук; Д. Фільченко

Сумський державний університет

## МУЛЬТИКРИТЕРІАЛЬНА ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ВІДОМИМИ ВХОДАМИ

*Стаття присвячена багатокритеріальній ідентифікації параметрів лінійних моделей динамічних систем, для яких відома статистична інформація за фазовими координатами і керуваннями. Розроблено інтегрально-колокаційну схему ідентифікації, що базується на принципі оберненого зв'язку. Апробація методів відбувається на прикладі динамічної моделі Леонт'єва для реальних статистичних даних. Отримано модель з високими імітаційними, прогнозними та робастними властивостями.*

**Ключові слова:** параметрична ідентифікація, мультикритерій, робастні властивості, інтегрально-колокаційна схема.

O. Nazarenko; D. Filchenko

## MULTICRITERION PARAMETRIC IDENTIFICATION OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH KNOWN INPUTS

*The article is devoted to multicriterion parametric identification of linear models for dynamic systems when a statistical information for phase coordinates and inputs is known. An integral and collocation identification scheme based on feedback principle has been elaborated. The approbation has been performed using Leontief dynamic model and real statistical data. The model of high simulation, forecasting and robust properties has been obtained.*

**Key words:** parametric identification, multicriterion, robust properties, integral and collocation scheme.

**Вступ.** Задача ідентифікації стаціонарних систем диференціальних рівнянь за даними спостережень у випадку наявності статистичної інформації про динаміку фазового вектора і вектора керувань зводиться до задачі чистої параметричної ідентифікації. Остання, у свою чергу, тісно пов'язана із задачею ідентифікації спектральних параметрів системи і подальшим керуванням ними [1, 2].

Відомі методи параметричної ідентифікації систем диференціальних рівнянь здебільшого однокритеріальні (зазвичай максимізують показник якості апроксимації вихідних даних) [4]. Методи, засновані на дискретизації неперервної моделі (інтегральні та різницеві), дають розв'язки, що потребують обґрунтування й уточнення та не дозволяють керувати спектром системи [4]. Застосування ж методів спектрального аналізу часто спряжене з труднощами чисельної реалізації через велику кількість спектральних параметрів в моделі [5].

Дана робота присвячена побудові узагальненої схеми оцінювання невідомих сталих матриць систем диференціальних рівнянь за даними спостережень, яка б дозволяла регулювати її спектральні параметри та отримувати модель з високими імітаційними, прогнозними й робастними властивостями (мультикритеріальна параметрична ідентифікація).

**Постановка задачі.** Нехай стан динамічної системи в будь-який момент неперервного часу  $\tau \in [\tau_0, \tau_k]$  характеризується фазовим вектором-стовпцем  $\mathbf{x}(\tau) = [x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_m(\tau)]'$ , а вхід системи — вектором-стовпцем керувань  $\mathbf{v}(\tau) = [v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_m(\tau)]'$  з  $m$ -вимірного евклідового простору  $E^m$ . Фазова траєкторія  $\{\mathbf{x}(\tau)\}$  і траєкторія керування  $\{\mathbf{v}(\tau)\}$  вважаються неперервними вектор-функціями часу.

Закон руху динамічної системи будемо подавати системою лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau), & \mathbf{x}(\tau_*) = \mathbf{x}_*, \\ \dot{\mathbf{v}}(\tau) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{D}\mathbf{v}(\tau), & \mathbf{v}(\tau_*) = \mathbf{v}_*, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  — квадратні матриці зі сталими коефіцієнтами,  $\tau_*$  — точка відрізка  $[\tau_0, \tau_k]$ , в якій задаються граничний стан і вхід траєкторій руху динамічної системи. Як відомо, задача Коші (1) при заданих матрицях і граничних умовах має єдиний розв'язок. Проте у багатьох реальних задачах матриці системи (1) невідомі. Більше того, граничні умови також можуть бути не заданими, наприклад, у випадку, коли  $\tau_*$  — момент часу, що розділяє базовий період і період прогнозування.

Нехай  $\{\mathbf{x}_\tau\}$ ,  $\{\mathbf{v}_\tau\}$  — статистична інформація про динаміку траєкторій  $\{\mathbf{x}(\tau)\}$ ,  $\{\mathbf{v}(\tau)\}$ , виміряна в  $N$  дискретних моментах проміжку  $[\tau_0, \tau_1]$ ,  $\tau_1 < \tau_*$ . Тоді задача мультикритеріальної параметричної ідентифікації моделі (1) полягає у знаходженні таких оцінок невідомих  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{x}_*$ ,  $\mathbf{v}_*$ , при яких траєкторії  $\{\mathbf{x}(\tau)\}$ ,  $\{\mathbf{v}(\tau)\}$  задовольняють ряду властивостей:

а) *висока якість імітації (апроксимації)*, тобто співвідношення  $\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{x}_\tau$ ,  $\mathbf{v}(\tau) \approx \mathbf{v}_\tau$  виконуються з високою точністю у дискретному наборі точок відрізка  $[\tau_0, \tau_1]$ , наприклад, у сенсі евклідової  $L^2$ -норми [4];

б) *висока якість прогнозу*, тобто довірчі інтервали прогнозів фазового вектора  $\mathbf{x}(\tau)$  і керування  $\mathbf{v}(\tau)$  на проміжку  $\tau \in (\tau_1, \tau_k]$  мають мінімальну довжину [6];

в) *робастність*, тобто оцінки невідомих параметрів якомога менш чутливі до незначних коливань вхідної інформації  $\{\mathbf{x}_\tau\}$ ,  $\{\mathbf{v}_\tau\}$  [7].

Деякі з цих властивостей є конкуруючими. Тому виникає необхідність у побудові такого мультикритеріального регулятора, що діє за принципом оберненого зв'язку, який дозволив би налаштувати модель (1) на заданий набір властивостей.

Що стосується розмірності моделі, то на практиці для отримання властивостей реальних систем розмірність фазового простору вибирається з умови  $m \geq 3$  [8] Далі розглядається випадок  $m = 3$ .

**Метод розв'язання.** При практичній ідентифікації моделей, метою яких є прогнозування, граничні умови зручно задовольняти в момент часу, наступний за періодом ідентифікації. У даній роботі ідентифікація рівнянь руху відбувається на проміжку  $[\tau_0, \tau_1]$ , в  $N$  цілочисельних точках якого наявна статистична інформація. Тому у якості  $\tau_*$  зручно обрати момент часу  $\tau_1 + 1$ . Зробивши заміну  $t = \tau - \tau_*$ , ідентифікацію можна проводити на  $[-N, -1]$ , а прогнозування — на  $[0, t_k]$ , де  $t_k = \tau_k - \tau_*$ . Зокрема, граничні умови задачі Коші (1) будуть виконуватися в точці  $t = 0$ , а отже, оцінки граничних значень  $\mathbf{x}_*$ ,  $\mathbf{v}_*$  можна трактувати як точкові прогнози з мінімальними довірчими інтервалами.

Початкові наближення спектрів невідомих матриць моделі (1) можна отримати за допомогою *інтегральної схеми*. Для цього перейдемо на проміжку часу  $[0, t]$  від системи диференціальних рівнянь (1) до еквівалентної системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \int_0^t \mathbf{x}(\tau) d\tau + \mathbf{B} \int_0^t \mathbf{v}(\tau) d\tau + \mathbf{x}_*, \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{C} \int_0^t \mathbf{x}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \int_0^t \mathbf{v}(\tau) d\tau + \mathbf{v}_*. \end{cases} \quad (2)$$

Початкове наближення розв'язку системи (2) може бути подане у вигляді

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{A} \int_0^t \mathbf{x}^*(\tau) d\tau + \mathbf{B} \int_0^t \mathbf{v}^*(\tau) d\tau + \mathbf{x}_*, \\ \mathbf{v}_0(t) = \mathbf{C} \int_0^t \mathbf{x}^*(\tau) d\tau + \mathbf{D} \int_0^t \mathbf{v}^*(\tau) d\tau + \mathbf{v}_*, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{v}^*(t)$  — деякі функції, які проходять через базисні точки  $\{\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_*\}$ ,  $\{\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_*\}$ ,  $t = -N, \dots, -1$ . Такими функцій можуть бути ламані, що з'єднують вказані точки, адже при відсутності інформації у нецілочисельних точках проміжку  $[-N, 0]$  логічно припустити, що статистична інформація між базисними точками розподілена рівномірно (за лінійним законом). Тоді інтеграли у правих частинах (2) обчислюються за формулою трапеції. Оскільки граничні умови виконуються в точці  $t=0$ , то при оцінюванні будемо віддавати перевагу правій границі відрізка  $[-N, 0]$ . Для цього чисельне інтегрування будемо проводити в оберненому (від'ємному) напрямку (від 0 до  $-N$ ), щоб на кожному часовому рівні регресійне рівняння «пам'ятало» інформацію про праву границю.

Отже, дискретний аналог системи (3) може бути поданий рівнянням регресії, яке для  $i$ -го рівня ряду динаміки має вигляд:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{-i} = \mathbf{a}_* + \mathbf{A} \sum_{j=1}^i \delta_{ij} \mathbf{x}_{-j} + \mathbf{B} \sum_{j=1}^i \delta_{ij} \mathbf{x}_{-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_{-i}, \\ \mathbf{v}_{-i} = \mathbf{b}_* + \mathbf{C} \sum_{j=1}^i \delta_{ij} \mathbf{x}_{-j} + \mathbf{D} \sum_{j=1}^i \delta_{ij} \mathbf{x}_{-j} + \mathbf{v}_{-i}, \end{cases} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} -1, & i \neq j, \\ -\frac{1}{2}, & i = j, \end{cases} \quad (4)$$

де  $\boldsymbol{\varepsilon}_{-i}$ ,  $\mathbf{v}_{-i}$  — вектори випадкових збурень рівнянь регресії (4) на  $i$ -у рівні ряду динаміки ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), а вільні члени зв'язані з граничними значеннями співвідношеннями:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_* = (\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A})\mathbf{x}_* - \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{v}_*, \\ \mathbf{b}_* = (\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{D})\mathbf{v}_* - \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{x}_*. \end{cases} \quad (5)$$

Оцінивши невідомі коефіцієнти функцій регресії (4), отримаємо початкові оцінки  $\check{\mathbf{A}}$ ,  $\check{\mathbf{B}}$ ,  $\check{\mathbf{C}}$ ,  $\check{\mathbf{D}}$  матриць  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  моделі (2). Розв'язуючи систему рівнянь (5), отримаємо оцінки  $\check{\mathbf{x}}_*$ ,  $\check{\mathbf{v}}_*$  невідомих граничних значень  $\mathbf{x}_*$ ,  $\mathbf{v}_*$ :

$$\begin{cases} \check{\mathbf{x}}_* = \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2}\check{\mathbf{D}} - \frac{1}{4}\check{\mathbf{C}}(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\check{\mathbf{A}})^{-1}\check{\mathbf{B}} \right)^{-1} \left( \frac{1}{2}\check{\mathbf{C}}(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\check{\mathbf{A}})^{-1}\check{\mathbf{a}}_* + \check{\mathbf{b}}_* \right), \\ \check{\mathbf{v}}_* = \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2}\check{\mathbf{A}} - \frac{1}{4}\check{\mathbf{B}}(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\check{\mathbf{D}})^{-1}\check{\mathbf{C}} \right)^{-1} \left( \frac{1}{2}\check{\mathbf{B}}(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\check{\mathbf{D}})^{-1}\check{\mathbf{b}}_* + \check{\mathbf{a}}_* \right). \end{cases} \quad (6)$$

Тут припускається, що існують відповідні обернені матриці, які фігурують у (6).

У якості початкового наближення оцінок невідомих коефіцієнтів задачі Коші (2) можна вибрати й інші. Наприклад, такими можуть бути оцінки, отримані з різницевих схем за лівосторонніми, правосторонніми або центральними різницями [4].

Отримані початкові оцінки є наближеними і потребують уточнення. Тому другим етапом дослідження є їх уточнення за *колокаційною схемою* [3].

Нехай  $\mathbf{q}(t) = [\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)]'$ ,  $\mathbf{q}_* = [\mathbf{x}_*, \mathbf{v}_*]'$ . Тоді задача Коші (2) у блочному вигляді може бути записана так:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{q}(t), \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_*, \end{cases} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Оскільки у даному дослідженні  $m=3$ , то розмірність блочної матриці  $\mathbf{Q}$  становить  $6 \times 6$ . При практичному оцінюванні регресійних рівнянь методом найменших квадратів (МНК) припускається присутність у них вільного члена (інакше не будуть виконуватись умови Гауса-Маркова [4]). Тому нас буде цікавити наступний спектр матриці  $\mathbf{Q}$ :

$$\Lambda(\mathbf{Q}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \pm i\omega, \lambda_4 \pm i\mu\}, \quad (8)$$

де хоча б одне з власних чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  дорівнює нулю.

У випадку спектру (8) загальний розв'язок задачі Коші (7) можна подати у вигляді адитивної декомпозиції

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{\text{тр}}(t) + \mathbf{q}_{\text{к}}(t). \quad (9)$$

$$\mathbf{q}_{\text{тр}}(t) = \begin{cases} \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \\ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \\ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 t, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{q}_{\text{к}}(t) = \begin{cases} \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \\ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \\ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 t, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathbf{q}_{\text{к}}(t) = \begin{cases} \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \\ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \\ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 t, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathbf{q}_{\text{к}}(t) = \mathbf{n}_3 e^{\lambda_3 t} \cos \omega t + \mathbf{n}_4 e^{\lambda_3 t} \sin \omega t + \mathbf{n}_5 e^{\lambda_4 t} \cos \mu t + \mathbf{n}_6 e^{\lambda_4 t} \sin \mu t. \quad (13)$$

Тут, згідно термінології теорії розкладання часових рядів на складові [9],  $\mathbf{q}_{\text{тр}}(t)$  — трендова складова (експоненціальна або лінійна функція),  $\mathbf{q}_{\text{к}}(t)$  — коливальна складова (гармоніки зі сталими або змінними амплітудами). При  $\lambda_3=0, \lambda_4=0$  декомпозиція (9)-(13) є сумою трендової та періодичної складових.

**Теорема.** Нехай задана задача Коші (7). Функція (9)-(13) є розв'язком цієї задачі тоді і тільки тоді, коли

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}\mathbf{J}\mathbf{N}^{-1} \quad (\det(\mathbf{N}) \neq 0), \quad \mathbf{q}_* = \sum_i \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{N} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_6], \quad \mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3), \quad (14)$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} d_{11}\lambda_1 & 0 \\ d_{21} & d_{22}\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_3 - \omega \\ \omega & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_4 - \mu \\ \mu & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{cases} 1, 2, 3, 5, & \text{якщо (10), (11),} \\ 1, 3, 5, & \text{якщо (12),} \end{cases}$$

$$d_{11} = \begin{cases} 1, & \text{якщо (10),} \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \quad d_{21} = \begin{cases} 1, & \text{якщо (11),} \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \quad d_{22} = \begin{cases} 1, & \text{якщо (12),} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

*Доведення.*

*Необхідна умова.* Нехай  $\mathbf{N}$  — матриця, стовпцями якої є вектори  $\mathbf{n}_j$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) декомпозиції (9)-(13). Тоді у матричному вигляді

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{N}\mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f}(t) = [\mathbf{f}'_{\text{тр}}(t), e^{\lambda_3 t} \cos \omega t, e^{\lambda_3 t} \sin \omega t, e^{\lambda_4 t} \cos \mu t, e^{\lambda_4 t} \sin \mu t]', \quad (15)$$

1. Випадок експоненціального тренду (10) або (11). Тут  $\mathbf{q}_* = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_5$ ,  $\mathbf{f}'_{\text{тр}}(t) = [1, e^{\lambda_i t}]'$ ,  $i=1, 2$ . Тоді похідна вектор-функції (15) дорівнює:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{N}\mathbf{J}\mathbf{f}(t), \quad (16)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 - \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \lambda_4 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Як видно, матриця  $\mathbf{J}$  є блочно-діагональною. Спектри її блоків відповідно дорівнюють  $\{0, \lambda_i\}$  ( $i=1, 2$ ),  $\lambda_3 \pm i\omega$  та  $\lambda_4 \pm i\mu$ , що співпадає зі спектром (8) матриці  $\mathbf{Q}$  задачі Коші (7). Враховуючи (7), маємо  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{N}\mathbf{f}(t)$ . Порівнюючи останній вираз з (16), отримуємо:  $\mathbf{Q} = \mathbf{N}\mathbf{J}\mathbf{N}^{-1}$  ( $\det(\mathbf{N}) \neq 0$ ), що і треба було довести.

2. Лінійний тренд (12). Тут  $\mathbf{q}_* = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_5$ ,  $\mathbf{f}'_{\text{тр}}(t) = [1, t]'$ . Аналогічно з викладками п.1 отримуємо умову (14). Змінюється лише перший блок матриці (17), який у даному випадку дорівнює

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(\mathbf{J}_1) = \{0, 0\}.$$

*Достатня умова.* Виходимо з того, що задача Коші (7) має єдиний розв'язок. З іншого боку, функція (9)-(13) за умови (14) є розв'язком задачі Коші (7).

Теорема доведена.

Отже, метод колокацій буде полягати в оцінюванні коефіцієнтів декомпозиції (9)-(13) з наступним відновленням матриці  $\mathbf{Q}$  задачі Коші (7) за формулами (14). Тим самим будуть оцінені невідомі матриці та граничні умови задачі (1).

Аналіз функції (9)-(13) показує, що вона залежить у загальному випадку від п'яти параметрів  $\lambda_1$  або  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \omega, \mu$ , які будемо називати параметрами керування. Таким чином, проблема ідентифікації задачі Коші (7) (або, що те ж саме, розв'язку (9)-(13)) полягає у знаходженні оптимальних оцінок параметрів керування, при яких траєкторії руху  $\{\mathbf{x}(t)\}, \{\mathbf{v}(t)\}$  будуть задовольняти вказаним вище властивостям (імітаційним, прогнозним, робастним). Для цього у даній роботі пропонується побудова регулятора, діючого за принципом оберненого зв'язку і виробляючого на базі поточних виходів  $\{\tilde{\mathbf{x}}(t)\}, \{\tilde{\mathbf{v}}(t)\}$  такі входи (значення параметрів керування), які б забезпечували заданий мультикритерій.

1. Показником якості апроксимації вихідних даних  $\{\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t\}$  у сенсі евклідової  $L^2$ -норми зручно обрати коефіцієнт детермінації  $R^2$  моделі. Отже, логічним видається вибір такого спектру (8), який би максимізував найменший з шести коефіцієнтів детермінації  $R^2$ , тобто

$$\Lambda = \operatorname{argmax} \left( \min_i R_i^2 \right), i=1, 2, \dots, 6. \quad (18)$$

2. Прогнозні властивості моделі (2) характеризують за допомогою довірчих інтервалів прогнозів фазового вектора  $\mathbf{x}(t)$  і керування  $\mathbf{v}(t)$  на проміжку  $[0, t_k]$ . Оскільки у даній роботі граничні значення задовольняються методами безумовного прогнозування, то особливо важливими є довірчі інтервали  $\Delta^{(0)}$  прогнозів  $\mathbf{q}(0)$ . Отже, наступним локальним критерієм вибору спектру (8) системи (1) логічно обрати:

$$\Lambda = \operatorname{argmin} \left( \max_i \Delta_i^{(0)} \right), i=1, 2, \dots, 6. \quad (19)$$

3. Чутливість результуючих оцінок коефіцієнтів моделі (1) до коливань вхідної інформації (даних спостережень  $\{\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t\}$ ) безпосередньо залежить від чутливості МНК-оцінок моделі (9)-(13). На практиці чутливість МНК-оцінок перевіряється за допомогою індексів обумовленості  $CI$  нормованих інформаційних матриць МНК [4]:

$$\Lambda = \operatorname{argmin} (\max_i CI_i), i=1, 2, \dots, 6. \quad (20)$$

4. Відзначимо, що регулятор обов'язково повинен виконувати роль оброблювача виняткових ситуацій (exception handling). Вони можуть виникати, якщо в результаті рафінування моделі (відкидання незначущих оцінок коефіцієнтів) [6] стають виродженими деякі матриці, для яких було припущено існування оберненої матриці.

**Чисельний експеримент.** Для апробації наведеного алгоритму будемо використовувати відому в макроекономічному моделюванні модель Леонтьєва [10, 11] для фазового вектора  $\mathbf{x}(t)$  (перше рівняння в (1)). Будемо припускати, що керування  $\mathbf{v}(t)$  задовольняє аналогічному диференціальному рівнянню (друге рівняння в (1)). Тоді виникає задача Коші (1).

Специфікуємо змінні моделі. Для цього розіб'ємо макроекономічну систему на три галузі: сільськогосподарську, промислову і галузь послуг. Тоді  $i$ -ю фазовою координатою моделі Леонтьєва виступає валовий випуск  $i$ -ї галузі, а відповідним керуванням — кінцеві споживчі витрати на продукцію цієї галузі. У даній роботі ідентифікація моделі (1) відбувається для Великобританії на проміжку 1971-2004рр. ( $N=34$ ). За методикою дослідження, граничні умови будемо задовольняти в момент часу  $\tau_* = 2005$  ( $t=0$ ). При проведенні чисельного експерименту вхідна статистична інформація [12] обезрозмірювалась діленням на значення ряду динаміки відповідної величини в 1971 р. ( $t=-N$ ).

Початкове наближення спектру (8) системи (7), отримане з інтегральної схеми (4), дорівнює:

$$\Lambda(\tilde{\mathbf{Q}}) = \{-0.0056, -0.0027, 0.1145 \pm 0.3393 i, 0.0529 \pm 0.1778 i\}.$$

Як видно, власні числа  $\lambda_1, \lambda_2$ , що задають трендову складову, близькі до нуля. Тоді логічним виявляється припущення про те, що тренд є або експоненціальним (10), (11), або лінійним (12).

За допомогою мультикритеріального регулятора, принцип дії якого описаний вище, були знайдені оптимальні оцінки невідомих коефіцієнтів задачі Коші (1) для можливих видів (10)-(12) трендової складової.

Порівняльний аналіз моделей декомпозиції траєкторії руху на складові наведено у табл. 1. Тут прогнозні властивості моделі аналізувалися для двох років 2005 ( $i=0$ ), 2006 ( $i=1$ ) і характеризувалися найбільшою відносною довжиною  $\zeta^{(i)}$  довірчих інтервалів  $\Delta_j^{(i)}$  та фактичною помилкою  $\delta^{(i)}$  (у порівнянні з реальними даними  $q_{ji}$ ):

$$\zeta^{(i)} = \max_j \left| \frac{\Delta_j^{(i)}}{\hat{q}_j(i)} \right|, \delta^{(i)} = \max_j \left| \frac{\hat{q}_j(i) - q_{ji}}{q_{ji}} \right| \quad j = \overline{1,6}.$$

де  $\hat{q}_j(i)$  — оптимальні точкові оцінки прогнозів в точці  $t=i$  ( $i=0, 1$ ), які відповідають модельним значенням (7).

Таблиця 1 — Порівняння якості експоненціального та лінійного трендів

	$R^2$	$CI$	$\zeta^{(0)}$	$\delta^{(0)}$	$\zeta^{(1)}$	$\delta^{(1)}$
Експоненціальний тренд	0.9565	23.150	10.120%	3.956%	11.421%	4.215%
Лінійний тренд	0.9707	10.824	7.153%	3.105%	7.285%	5.785%

Як видно, модель з лінійним трендом не тільки не поступається, але й майже за всіма критеріями значно краща за модель з експоненціальним трендом. Це означає, що можна зробити припущення про рівність нулю двох власних чисел спектру (8). У цьому випадку розрахунки приводять до такого оптимального набору параметрів керування:

$$\hat{\lambda}_1 = 0, \hat{\lambda}_2 = 0, \hat{\lambda}_3 = 0.1223, \hat{\lambda}_4 = 0.0704, \hat{\omega} = 0.3301, \hat{\mu} = 0.2120.$$

Метод колокацій дає наступні оптимальні значення невідомих матриць системи диференціальних рівнянь (1):

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -0.0348 & -0.0286 & -0.1025 \\ -0.0662 & 0.0629 & 0.4586 \\ -0.4419 & 1.2309 & 0.5560 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0.0697 & -0.1102 & 0.1872 \\ -0.1911 & 0.7522 & -0.9838 \\ -0.8424 & 1.1916 & -1.6335 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0.1564 & -0.6024 & 0.6181 \\ 0.0590 & -0.4008 & 0.6400 \\ -0.3350 & 0.5446 & 0.5101 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0.1665 & 0.6578 & -0.9500 \\ 0.0215 & 0.8700 & -1.1500 \\ -0.3307 & 0.8780 & -1.2353 \end{bmatrix}.$$

У табл. 2 подані основні характеристики фазової траєкторії  $\{\mathbf{x}(t)\}$  і траєкторії керування  $\{\mathbf{v}(t)\}$ .

Таблиця 2 — Характеристики модельних траєкторій руху

	$R^2$	$CI$	$\zeta^{(0)}$	$\delta^{(0)}$	$\zeta^{(1)}$	$\delta^{(1)}$
$x_1(t)$	0.9811	4.3368	6.2563%	2.9145%	6.8561%	3.3564%
$x_2(t)$	0.9862	8.9133	5.5892%	2.8253%	5.9212%	1.0212%
$x_3(t)$	0.9937	10.824	5.1563%	1.1562%	5.6478%	0.9232%
$v_1(t)$	0.9707	9.7359	7.1531%	3.1045%	7.2852%	5.7852%
$v_2(t)$	0.9796	9.7359	4.2531%	0.8523%	4.8014%	2.6254%
$v_3(t)$	0.9875	5.8749	4.0212%	0.7142%	4.5232%	1.3562%

Результати, наведені в табл. 2, свідчать про досить високі імітаційні властивості отриманих траєкторій. Порівняння з реальними даними в прогнозні моменти часу вказує також на високі прогнозні властивості. Робастність забезпечується невисокими значеннями індексів обумовленості. Отже, запропонований алгоритм параметричної ідентифікації рівнянь руху стаціонарної динамічної системи приводить до адекватних результатів і може бути використаний при імітації та прогнозуванні макроекономічної динаміки.

На рис. 1 наведені графіки фазових траєкторій і траєкторій керування, на які налаштована динамічна модель Леонтьєва для макроекономіки Великобританії. Тут точками зображена статистична інформація, пунктиром — початкові наближення, отримані з інтегральної схеми, а суцільною лінією — оптимальні траєкторії руху.

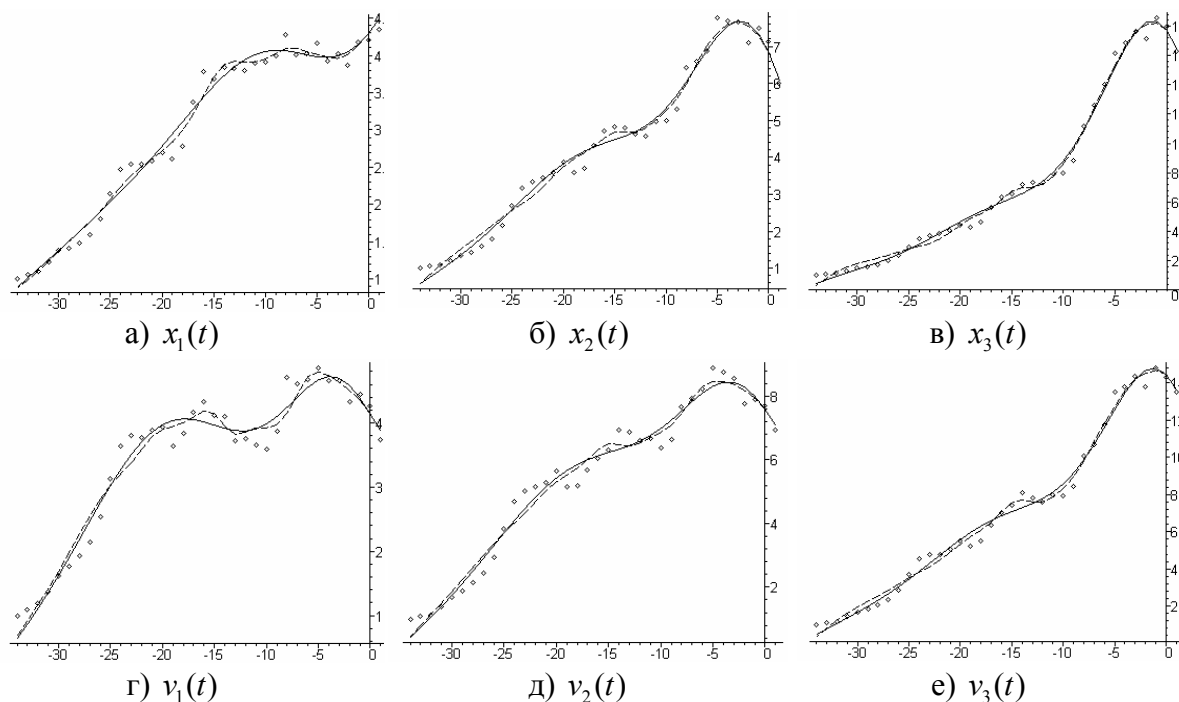


Рис. 1 Фазові траєкторії і траєкторії керування для моделі Леонтьєва

**Висновки.** Побудовано ефективну схему параметричної ідентифікації лінійних моделей динамічних систем з відомими входами. Апробація моделі продемонструвала ефективність запропонованого алгоритму. Високі імітаційні, прогнозні та робастні властивості дозволяють використовувати інтегрально-колокаційну схему на практиці. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на моделювання стаціонарних динамічних систем з невідомими входами з метою прогнозування та оптимізації.

#### Література

1. Bates D. M. *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications* / D. M. Bates, D. B. Watts. — N.Y.: Wiley, 1988. — 365 p.
2. Nazarenko O. M. *Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective* / O. M. Nazarenko, D. V. Filchenko // *Int. J. of Innovating Computing, Information and Control*. — 2008. — Vol. 4, No. 7. — P. 1553-1566.
3. Ramsay J. O. *Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach* / J. O. Ramsay, G. Hooker, D. Campbell // *J. of the Royal Stat. Society. Series B*. — 2007. — Part 5, No. 69. — P. 741-796.
4. Greene W. H. *Econometric Analysis* / W. H. Greene. — 5th ed. — N.Y.: Pearson Educ. Int., 2003. — 1056 p.
5. Дженкинс Г. М. *Спектральный анализ и его приложения* / Г. М. Дженкинс, Д. Г. Ваттс ; пер. с англ. — Вып. 2. — М.: Мир, 1972. — 285 с.
6. Назаренко О. М. *Основи економетрики* : підруч. / О. М. Назаренко. — 2-ге вид., перероб. — К.: Центр навч. літератури, 2005. — 392 с.
7. Хьюбер Д. П. *Робастность в статистике* / Д. П. Хьюбер ; пер. с англ. ; под ред. И. Г. Журбенко. — М.: Мир, 1984. — 304 с.
8. Анищенко В. С. *Детерминированный хаос* / В. С. Анищенко // *Соросовский образовательный журнал*. — 1997. — № 6. — С. 70-76.
9. Hamilton J. D. *Time Series Analysis* / J. D. Hamilton. — N.J.: Princeton Univ. Press, 1994. — 800 p.
10. Колемаев В. А. *Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем* : учеб. пособ. / В. А. Колемаев. — М: Юнити-Дана, 2005. — 295 с.
11. Бойчук М. *Моделювання і оптимізація статичного міжгалузевого балансу із запізненням* / М. Бойчук, Н. Шмуригіна // *Вісник ТДТУ*. — 2009. — Т. 14, №1. — С. 190-200.
12. *Statistics Database [Electronic Resource]* / Eurostat. — Available from : <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>. — Title Screen.