показник еластичності заміщення як ефект другого порядку. Виявилося, що гнучкі функціональні форми більш придатні для апроксимації показника зі значною варіацією аргументу. Саме такі результати були отримані на основі вивчення статистичних даних макроекономічного рівня крос-секційного характеру. За допомогою транслогарифмічної регресії моделюється еластичність заміщення для ряду макроекономічних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. В 2-х кн. Кн. 1/ Пер. с англ. – 2-е изд., пере раб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 366 с.
2. Guajarati. Basic Econometrics, Fourth Edition. – The McGraw-Hill Companies, 2004.
3. Назаренко О.М. Основи економетрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – К.: „Центр навчальної літератури”, 2005. – 392 с.
4. Greene W. H. Econometric analysis, Fifth Editional. – New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003.
5. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: Юнити, 2005. – 295 с.
6. Intriligator M.D. Mathematical optimization and economic theory. – Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – 508 pp.
7. Chiang A.C. Fundamental Methods of Mathematical Economics, Third Edition. – New York: McGraw Hill, 1984. – 788 pp.
8. Christensen L.R., Jorgenson D.W., Lau L.J. Transcendental Logarithmic Production Frontiers. The Review of Economics and Statistics, no. 55-1, 1973. – pp. 28-45.
9. Berndt E.R., Christensen L.R. The Translog Function and the Substitution for Equipment, Structures, and Labour in U.S. Manufacturing 1929-68. // Journal of Econometrics, no. 1, 1973. – pp. 81-114.
10. Wooldridge J. Introductory Econometrics: A Modern Approach. — New York: Southwestern Publishers, 2000. — 805 p.
11. Wooldridge J. Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data. – London: MIT Press, 2000, 735 p.
12. Магнус Я.Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. Пер. с англ./ Под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
14. European Statistics Database: http://epp.eurostat.ec.europa.eu/.

УДК 519.711.3:519.86

МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ ПОБУДОВИ ДЕСКРИПТИВНИХ ТА ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ

Назаренко О.М., к.ф.-м.н., доцент, Фільченко Д.В., аспірант

Сумський державний університет

Запропоновано підходи до специфікації дескриптивних моделей динамічних систем з невідомими та відомими вхідними сигналами. Розроблено алгоритми ідентифікації з високими імітаційними та прогнозними властивостями. Представлено принцип переходу від дескриптивних до оптимізаційних моделей (динамічних та статичних). Усі підходи апробовані на реальних статистичних даних еволюції макроекономічної системи відкритого типу. Результати чисельного експерименту продемонстрували високу точність, адекватність та практичну цінність побудованих моделей.

Ключові слова: динамічна система, дескриптивна модель, оптимізаційна модель, специфікація, ідентифікація, регулятор, обернений зв‘язок.

Назаренко А.М., Фильченко Д.В. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ ДЕСКРИПТИВНЫХ И ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ / Сумской государственный университет, Украина.

Предложен подход к спецификации дескриптивных моделей динамических систем с неизвестными и известными входными сигналами. Разработаны алгоритмы идентификации с высокими имитационными и прогнозными свойствами. Представлен принцип перехода от дескриптивных к оптимизационным моделям (динамическим и статическим). Все подходы апробированы на реальных статистических данных эволюции макроэкономической системы открытого типа. Результаты численного эксперимента продемонстрировали высокую точность, адекватность и практическую ценность построенных моделей.

Ключевые слова: динамическая система, дескриптивная модель, оптимизационная модель, спецификация, идентификация, регулятор, обратная связь.

Nazarenko O.M., Filchenko D.V. MATHEMATICAL ASPECTS OF DESCRIPTIVE AND OPTIMIZATION CONTROLLED SYSTEMS MODELS DESIGN / Sumy State University, Ukraine.

An approach to specification of dynamic systems descriptive models with unknown and known inputs has been proposed. The identification algorithms with high simulation and forecast properties have been developed. The principle of transition from descriptive to optimization (dynamic and static) models has been presented. All approaches has been approbated using real statistical dataset of the open macroeconomic system evolution. The results of numerical experiment have confirmed the high accuracy, adequacy and practical significance of the constructed models.

Key words: a dynamic system, a descriptive model, an optimization model, specification, identification, controller, feedback.

Відомо, що керування будь-якою реальною динамічною системою є складним процесом, який може відбуватися на різних рівнях системної ієрархії залежно від кінцевої мети та ступеня агрегації параметрів керування [1, 1]. Особливістю більшості фізико-технічних систем є визначеність набору фазових координат, параметрів керування та рівнянь руху. До того ж, можливість проведення експерименту над такими системами або їхніми фізичними моделями значно полегшує етапи синтезу та налагодження схем керування [3, 4]. З іншого боку, через те, що більшість фізичних законів описується нелінійними диференціальними рівняннями, апріорна специфікація математичних моделей фізико-технічних систем часто веде до ускладненої процедури ідентифікації невідомих параметрів. Класичні методи статистичної ідентифікації моделей у просторі станів описані в [5, 6]. В огляді [7] увагу приділено сучасним методам ідентифікації, покликаним подолати труднощі чисельної реалізації алгоритмів нелінійної оптимізації, характерних для класичних методів. Особливості ідентифікації моделей у формі лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь розглянуто в [7].

Для економічних, екологічних, соціальних та інших систем задача побудови дескриптивних та оптимізаційних моделей може бути менш визначеною через відсутність сталого виду закону еволюції або неможливість специфікувати вхідні параметри, які в цьому випадку перестають бути керуваннями в класичному розумінні. Специфікацію моделей таких систем часто обирають в зручній для дослідження формі – лінійній, квадратичній, лінійно-квадратичній [1, 5], хоча проблема їх ідентифікації досі не вирішена.

Дана робота присвячена дослідженню математичних аспектів специфікації та ідентифікації дескриптивних моделей керованих систем та побудові на їх основі відповідних оптимізаційних моделей. Структура роботи є такою. У першому розділі наведена математична постановка задачі. Другий і третій розділи присвячені проблемам специфікації та ідентифікації дескриптивних моделей та побудові оптимізаційних моделей для двох класів динамічних систем – з невідомими і відомими входами. Результати чисельного експерименту та аналіз точності наведених підходів запропоновані в четвертому розділі.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай динамічна система S характеризується вектором узагальнених координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ та узагальнених швидкостей $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n)'$ з евклідового простору E^n. У якості координат вектора $\mathbf{x}$ можуть виступати характеристики системи різної природи, розмірності й інтерпретації. Однак основні вимоги до них такі: відсутність кореляції між собою та з координатами вектора узагальнених швидкостей, якомога точніше відображання імітаційних та прогнозних властивостей системи, забезпечення стійкості побудованої моделі. Система S вважається відкритою і на її вхід подається вхідний сигнал у вигляді вектор-функції $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)'$. Калібрування (налагодження) моделі відбувається на проміжку часу $T = [t_0, t_f]$, який будемо називати базовим (навчальним).

Що стосується статистичної інформації, то обрані координати вектора $\mathbf{x}$ повинні бути доступні для вимірювання: $\{\mathbf{x}_t\}, t = 0, 1, ..., N-1$ – n-вимірний часовий ряд об‘єму N. Однак це не обов’язково виконується відносно координат вхідного сигналу $\mathbf{v}$. Інформація по ним може бути відсутня з різних причин, насамперед, природної невизначеності в специфікації вхідних параметрів багатьох реальних систем. Залежно від цього будемо розрізняти моделі з невідомим і відомим вхідними сигналами. В останньому випадку вектор вхідних сигналів $\mathbf{v}$ будемо вважати лінійним відносно вектора керувань $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)' \in E^m$.

Отже, задача полягає в специфікації та ідентифікації моделей з невідомим або відомим вхідним сигналом з метою отримання якісних імітаційних і прогнозних властивостей та в розробці принципу трансформації отриманих дескриптивних моделей у оптимізаційні (динамічні або статичні).

2. МОДЕЛЬ З НЕВІДОМИМ ВХІДНИМ СИГНАЛОМ

Нехай вектор-функція $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ неперервно-диференційована на $[t_0, t_f]$. Рівняння руху системи S будемо специфікувати лінійним стаціонарним диференціальним рівнянням

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{v}, \ \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \tag{1}$$

Якщо $\mathbf{v} \equiv 0$, модель (1) називається закритою. Тоді, наприклад, коли статистичні дані в середньому монотонні, розв'язок відповідної однорідної системи має експоненційний характер, що буде завищувати або занижувати динаміку реальної системи і, як наслідок, породжувати проблему нестійкості [1, 4]. У випадку відкритої моделі ($\mathbf{v} \neq 0$) неоднорідна частина диференціального рівняння (1) допомагає системі подолати цю проблему. Як відомо, частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння характеризує асимптотичну рівновагу системи, а загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння – відхилення від неї [7]. Тому, наприклад, якщо на деякому проміжку часу процес у середньому монотонно зростає, то неоднорідна частина $\mathbf{v}$ повинна в середньому спадати, а якщо, процес у середньому монотонно спадає, то вхідний сигнал буде в середньому зростати.

Для ідентифікації вхідного сигналу введемо у розгляд деяку гіперповерхню G, вздовж якої здійснюється рух системи S в евклідовому просторі E^n. Функцію G будемо називати потенціалом динамічної системи і вважати її джерелом додаткової інформації. За G повинна бути обрана така додаткова характеристика системи, що акумулює якомога більше інформації як про саму систему, так і про зовнішнє по відношенню до неї середовище. Математично G можна подати у вигляді скалярного оператора $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) : E^n \to R$, який в кожний момент часу $t \in [t_0, t_f]$ несе інформацію про еволюцію $\mathbf{x}$ і $\mathbf{v}$. Вважаємо також, що відомий часовий ряд $G_t, t = 0, 1, ..., N-1$ зі статистичними даними про еволюцію G.

Отже, модель динамічної системи S має вигляд

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \\ G(t) = G(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)). \end{cases} \tag{2}$$

Специфікацію функціональної форми G будемо проводити за аналогією з механічними моделями [4]. У даному випадку функцію G будемо задавати у вигляді

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \Pi(\mathbf{x}) - \mathrm{I}(\mathbf{v}) , \tag{3}$$

де $\Pi(\mathbf{x})$ – потенціальна енергія системи, $\mathrm{I}(\mathbf{v})$ – енергія сигналів, що подаються на її вхід. Подавши енергії у вигляді квадратичних форм відповідних векторів, приходимо до наступної моделі потенціалу динамічної системи:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = G_0 + \frac{1}{2}\mathbf{x}' P \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{v}'\mathbf{v} , \tag{4}$$

де G_0 – невідома константа, P – симетрична матриця, яка в загальному випадку також невідома. При моделюванні в середньому монотонних процесів матрицю P зручно вважати визначеною (додатно або від'ємно) і шукати P у вигляді $k_1 A^2$, де k_1 – константа, що підлягає оцінюванню, A – матриця з рівняння руху (1).

Отже, враховуючи (4), модель (3) динамічної системи S можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{v}, \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = G_0 + k_1\left(\dfrac{1}{2}\mathbf{x}' A^2 \mathbf{x}\right) - \dfrac{1}{2}\mathbf{v}'\mathbf{v}. \end{cases} \tag{5}$$

Після специфікації моделі (2) в лінійно-квадратичній формі (5) необхідно провести ідентифікацію невідомих параметрів k_1, A і вектора $\mathbf{v}$ так, щоб з якомога більшою точністю виконувались умови $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_t, G(t) \approx G_t$ ($t = 0, 1, ..., N-1$), забезпечуючи високі імітаційні та прогнозні властивості моделі.

Основна ідея ідентифікації моделі (5) полягає у використанні потенціалу G як регулятора, що проводить автоматичне калібрування моделі за допомогою принципу оберненого зв‘язку. Потенціал G стримує потенціальну енергію $\Pi(\mathbf{x})$ від різкого зростання (спадання) за рахунок дозованої подачі енергії вхідних сигналів $\mathrm{I}(\mathbf{v})$. Обернений зв‘язок такого типу на практиці можна подати у вигляді наступної схеми (рис. 1).

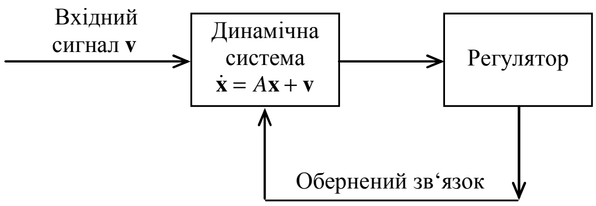

Рис. 1. Схема оберненого зв’язку між регулятором і динамічною системою

Далі запропонований один із можливих алгоритмів реалізації такої схеми. Спочатку задається вектор вхідних сигналів $\mathbf{v}_0$, наприклад, з міркувань двоїстості до вектора узагальнених координат системи S: $\mathbf{v}_0(t) = \mathbf{x}(N - t - 1)$, $t = 0, 1, ..., N - 1$. Далі оцінюється симетрична матриця A з рівняння руху (1), наприклад, за допомогою методу найменших квадратів (МНК) для систем регресійних рівнянь [11] та обчислюється коефіцієнт детермінації R^2 моделі [3]. Оцінка $\hat{A}$ матриці A і заданий вектор вхідних сигналів $\mathbf{v}(t)$ подаються на регулятор G. Проте, на відміну від (5), його специфікацію запишемо таким чином:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = G_0 + k_1\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}'\hat{A}^2\mathbf{x}\right) + k_2\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}'\mathbf{v}\right), \tag{6}$$

де k_2 – невідомий параметр, який допомагає реалізувати запропоновану схему оберненого зв’язку ітераційно. Ідентифікацію (6) можна провести, наприклад, за допомогою звичайного МНК. Далі задається новий вектор вхідних сигналів $\mathbf{v}^{\text{next}}(t)$ за правилом $\mathbf{v}^{\text{next}}(t) = \sqrt{|\hat{k}_2|}\,\mathbf{v}^{\text{prev}}(t)$, де $\hat{k}_2$ – оцінка параметра k_2 моделі (6), отримана на попередньому етапі, а $\mathbf{v}^{\text{prev}}(t)$ – попереднє значення вектора вхідних сигналів. Ітерації повторюються до тих пір, поки не стабілізуються коефіцієнти детермінації моделей (1), (6) та не виконається умова $|\hat{k}_2 + 1| < \varepsilon$, де ε – наперед задане число. Останню умову також можна використовувати для перевірки правильності запропонованого алгоритму.

Дескриптивна модель (5), ідентифікована на базовому часовому інтервалі $[t_0, t_f]$, за умови інерційності досліджуваного процесу, може бути використана для побудови динамічної оптимізаційної моделі на часовому інтервалі $[t_0^*, t_f^*]$, наступного за базовим. Як підінтегральну функцію цільового функціоналу задачі оптимізації логічно обрати потенціал G або, наприклад, його першу похідну за часом $\dot{G}$. Тому загальна специфікація моделі динамічної оптимізації може мати вигляд

$$\max_{\mathbf{v}} \int_{t_0^*}^{t_f^*} G(\mathbf{x}, \mathbf{v})\,dt \quad \text{або} \quad \max_{\mathbf{v}} \int_{t_0^*}^{t_f^*} \dot{G}(\mathbf{x}, \mathbf{v})\,dt$$

$$\text{за умови, що } \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{v},\ \mathbf{x}(t_0^*) = \mathbf{x}(t_f)\,.$$

3. МОДЕЛЬ З ВІДОМИМ ВХІДНИМ СИГНАЛОМ

У багатьох механічних моделях [3, 4] та балансових моделях в економіці [1, 5] модель (1) використовується за умови, що вектор $\mathbf{v}$ вхідних сигналів відомий. У даній роботі вхідний сигнал $\mathbf{v}$ пропонується зв’язувати з вектором керувань $\mathbf{u}$, за компонентами якого відома статистична інформація у вигляді рядів динаміки, за допомогою лінійного закону

$$\mathbf{v} = B\mathbf{u}\,. \tag{7}$$

Матриці A і B в моделі (1), (7) можуть бути повністю невизначеними або визначеними частково. В обох випадках ідентифікацію A і B можна провести, наприклад, за допомогою МНК для систем.

Технічно це не викликає ніяких труднощів. Проте, чим більше елементів матриць A і B невідомо, тим більше незначущих коефіцієнтів може з'явитися в оціненій моделі.

Окремо розглянемо випадок, який доволі часто зустрічається в економіко-математичному моделюванні: матриця B повністю визначена з деяких міркувань, а матриця $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$. У такому випадку система (1) є сепарабельною за всіма n рівняннями:

$$\dot{x}_i = a_i x_i + v_i, \ i = 1, 2, ..., n, \tag{8}$$

де v_i – елемент вектора-стовпця $\mathbf{v} = B\mathbf{u}$.

У даній роботі для ідентифікації коефіцієнтів a_i моделі (8) пропонується така схема.

Вхідні сигнали v_i за допомогою звичайного МНК апроксимуються поліномами деякого порядку $p_i \le 4$

$$v_i(t) = \hat{b}_{0i} + \hat{b}_{1i}t + \hat{b}_{2i}t^2 + ... + \hat{b}_{p_i}t^{p_i} + \varepsilon_i, \tag{9}$$

користуючись для перевірки значущості полінома p_i-го порядку, наприклад, критерієм Стьюдента для коефіцієнта $\hat{b}_{p_i}$ або Фішера для дисперсії випадкових збурень ε_i [5, 3].

Нехай $x_{\text{ч}i}(t)$ – частковий розв'язок i-го диференціального рівняння (8). Будемо шукати його у вигляді полінома степені p_i з регресійної моделі (9):

$$x_{\text{ч}i}(t) = c_{0i} + c_{1i}t + c_{2i}t^2 + ... + c_{p_i}t^{p_i}. \tag{10}$$

Невідомі коефіцієнти c_{ji}, $j = 0, 1, ..., p_i$ можна знайти аналітично. Для цього перебираються значення $a_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, ...$) невідомого коефіцієнта a_i моделі (8) з деякого проміжку $[\alpha, \beta]$, а частковий розв'язок (10) підставляється в (8). Враховуючи (9), отримуємо

$$c_{1i} + 2c_{2i}t + 3c_{3i}t^2 + ... + p_i c_{p_i}t^{p_i - 1} = a_i^{(k)}\left(c_{0i} + c_{1i}t + c_{2i}t^2 + ... + c_{p_i}t^{p_i}\right) + \hat{b}_{0i} + \hat{b}_{1i}t + \hat{b}_{2i}t^2 + ... + \hat{b}_{p_i}t^{p_i},$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, знаходимо відповідні значення $c_{ji}^{(k)}$ ($k = 1, 2, ...$) невідомих коефіцієнтів c_{ji} ($j = 0, 1, ..., p_i$):

$$c_{p_i}^{(k)} = -\frac{1}{a_i^{(1)}}\hat{b}_{p_i}, \ c_{p_i - 1}^{(k)} = \frac{1}{a_i^{(1)}}\left(p_i c_{p_i}^{(1)} - \hat{b}_{p_i - 1}\right), ..., \ c_{1i}^{(k)} = \frac{1}{a_i^{(1)}}\left(2c_2^{(1)} - \hat{b}_1\right), \ c_{0i}^{(k)} = \frac{1}{a_i^{(1)}}\left(c_1^{(1)} - \hat{b}_0\right). \tag{11}$$

Тоді k-е наближення $x_i^{(k)}(t)$ загального розв'язку $x_i(t)$ i-го рівняння (8) дорівнює

$$x_i^{(k)}(t) = C_i^{(k)}e^{a_i t} + x_{\text{ч}i}^{(k)}(t), \tag{12}$$

де $x_{\text{ч}i}^{(k)}(t)$ – k-е наближення часткового розв'язку $x_{\text{ч}i}(t)$, а $C_i^{(k)}$ – невідома константа, яку можна знайти, наприклад, з умови $x_{i0} = C_i^{(k)} + c_{0i}^{(k)}$.

Для отриманого загального розв'язку $x_i^{(k)}(t)$ обчислюється функція помилок, наприклад, у вигляді суми квадратів відхилень від реальних значень x_{it} і робиться перехід до наступного наближення. Задача полягає в знаходженні такої оцінки $\hat{a}_i = a_i^{(k)}$ коефіцієнта a_i, яка мінімізує функцію помилок кожного з рівнянь (1):

$$\min_k S_i\left(a_i^{(k)}\right) = \sum_{t=0}^{N-1}\left(x_i^{(k)}(t) - x_{it}\right)^2, \ i = 1, 2, ..., n. \tag{13}$$

Оцінену модель для дискретного часу t можна записати у вигляді

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \ t = 0, 1, ..., N - 1. \tag{14}$$

де $\hat{A} = \mathrm{diag}(\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n)$ – оцінена на етапі ідентифікації діагональна матриця, B – задана матриця розмірності $n \times m$, $\hat{\dot{\mathbf{x}}}(t)$ – оцінка першої похідної $\dot{\mathbf{x}}$ в момент часу t, яка з урахуванням (12) може бути обчислена за формулою

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{c}}_0) A e^{At} + \hat{\dot{\mathbf{x}}}_{чі}(t). \tag{15}$$

Схема оберненого зв'язку для моделі (8) така ж, як і для моделі з попереднього розділу (рис. 1). Проте, у цьому випадку як регулятор виступає критерій (13). На відміну від (6), регулятор моделі з відомими входами ідентифікує лише матрицю A.

Дескриптивна модель (14) у кожному з часових тактів $t = 0, 1, ..., N-1$ може бути трансформована в модель математичного програмування, для якої як інструментальні змінні можуть бути обрані деякі з координат вектора $\mathbf{u}(t)$ вхідних сигналів [1, 5]. У кожний момент часу $t = 0, 1, ..., N-1$ модель (14), (15) являє собою неоднорідну систему n лінійних рівнянь з m невідомими координатами вектора $\mathbf{u}(t)$. Нас буде цікавити випадок $m > n$, адже в такому разі $m - n$ степенів вільності можна використати для забезпечення оптимальної структури вектора $\mathbf{u}(t)$. Дійсно, оскільки координати $\mathbf{u}(t)$ завжди можна перенумерувати так, щоб перші $m - n$ змінних були вільними, а решта n – базовими, то має місце рівність $B\mathbf{u} = B^1\mathbf{u}^1 + B^2\mathbf{u}^2$. Тут $\mathbf{u}^1$ – вектор вільних змінних, $\mathbf{u}^2$ – вектор базових змінних, B^1 і B^2 – відомі матриці розмірностей $n \times (m-n)$ і $n \times n$ відповідно. Тоді, виражаючи базові змінні через вільні, отримуємо

$$\mathbf{u}^2(t) = \left(B^2\right)^{-1} \cdot \left(B\mathbf{u}(t) - B^1\mathbf{u}^1(t)\right), \; t \in [t_0, t_f]$$

або, враховуючи формули (14), (15),

$$\mathbf{u}^2(t) = \left(B^2\right)^{-1} \cdot \left((\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{c}}_0) A e^{At} + \hat{\dot{\mathbf{x}}}_{чі}(t) - \hat{A}\mathbf{x}(t) - B^1\mathbf{u}^1\right). \tag{16}$$

Специфікувавши цільову функцію F та вибрану з якихось міркувань систему обмежень $\mathbf{f}(\cdot) \le \mathbf{g}$, приходимо до N задач математичного програмування з $m - n$ інструментальними змінними:

$$\max_{\mathbf{u}^1(t)} F\left(\mathbf{u}^1(t)\right) \text{ за умови, що } \mathbf{f}\left(\mathbf{u}^1(t)\right) \le \mathbf{g}(t), \quad t = 0, 1, ..., N-1. \tag{17}$$

4. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Апробацію запропонованих підходів проведено на прикладі двох макроекономічних моделей: загальної динаміки та інвестиційного розвитку. У першій вхідні сигнали вважаються невідомими, а в другій входи специфіковані реальними макроекономічними показниками, за якими наявна статистична інформація. Часові ряди, використані для дослідження, є даними про розвиток реальної макроекономічної системи (Данія, 1966-1987 рр.) [14]. Вони відображені точками на рис. 2 і рис. 3.

4.1. МОДЕЛЬ ЗАГАЛЬНОЇ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Узагальнені координати моделі загальної макроекономічної динаміки можна обирати, використовуючи результати кореляційного та факторного аналізів [11, 3]. Проте, як показує практика [5, 13], узагальненими координатами можуть виступати такі макроекономічні показники: основні фонди (x_1), матеріальні затрати (x_2) та фонд заробітної плати (x_3). Як регулятор (потенціалу) G пропонується розглядати валовий внутрішній продукт. ВВП є основним агрегованим показником, що акумулює всю інформацію про макроекономічну систему. До того ж, перераховані вище узагальнені координати є основними факторами, що впливають на нього [15].

Використовуючи алгоритм розділу 2 для ідентифікації вхідних сигналів $\mathbf{v}$ і матриці A моделі (5) і обравши як точність $\varepsilon = 10^{-6}$, приходимо до збіжності вже на сьомій ітерації. МНК для систем регресійних рівнянь дає такі результати:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -0.0229 & 0.2592 & 0.2436 \\ 0.2592 & -0.2835 & 0.0448 \\ 0.2436 & 0.0448 & -0.3117 \end{pmatrix}, \; \mathbf{R^2} = \begin{pmatrix} 0.9999 \\ 0.9981 \\ 0.9996 \end{pmatrix}.$$

Високі значення коефіцієнтів детермінації свідчать про високу якість апроксимації вихідних даних рівняннями руху (1), що продемонстровано на рис. 2. Результати ідентифікації вектора вхідних сигналів $\mathbf{v}$ також подані на рис. 2. Як видно, змінні $\mathbf{x}$ і $\mathbf{v}$ знаходяться ніби в протифазі. Ця властивість, на нашу думку, є ключовою для ідентифікації рівнянь руху динамічної системи з невідомими входами.

МНК-оцінювання параметрів потенціалу (6) дало такі результати:

$$\underset{\text{(с.п.)}}{G(t)} = \underset{(0.0520)}{1.8491} + \underset{(0.0485)}{0.9697}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}'\hat{A}^2\mathbf{x}\right) - \underset{(0.0604)}{1.0000}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{u}\right),\ R^2 = 0.9980\,.$$

Тут в дужках зазначені стандартні помилки (с.п.) оцінених коефіцієнтів. За критерієм Стьюдента з рівнем значущості $\alpha = 0.05$ і числом ступенів вільності $k = 22-3 = 19$ всі коефіцієнти виявилися статистично значущими. Це означає, що як потенційна енергія, так і енергія вхідних сигналів значуще впливають на потенціал динамічної системи. Коефіцієнт $\hat{k}_2$ вже на сьомій ітерації наближається до значення -1 з заданою точністю. Це підтверджує правильність запропонованого алгоритму та узгоджується з теоретичними викладками розділу 2. Високе значення коефіцієнта детермінації R^2 також свідчить на користь апробованого підходу.

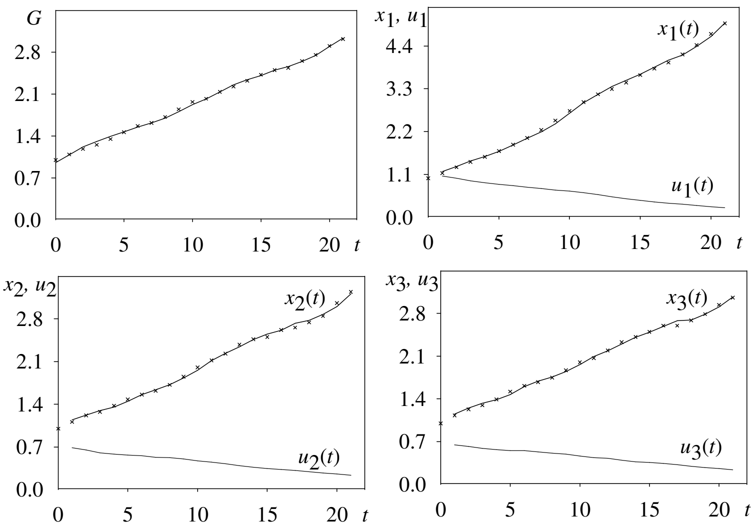

Рис. 2. Результати чисельної реалізації дескриптивної моделі загальної макроекономічної динаміки

Маючи високу точність апроксимації фазових координат, можна очікувати високі прогнозні властивості моделі (1). Для розрахунку прогнозних значень фазових координат будемо користуватися різницевим аналогом моделі (1)

$$\hat{\mathbf{x}}(N) = \mathbf{x}(N-1) + \hat{\mathbf{c}}_0 + \hat{A}\mathbf{x}(N-1) + \mathbf{v}(N-1)\,,$$

де $\hat{\mathbf{c}}_0$ – оцінка невідомого сталого вектора $\mathbf{c}_0$, який включається в регресійну модель як вільний член. Отримано такі результати:

$$\hat{x}_1(22) = 5.1026 \pm 0.0924\,,\ \hat{x}_2(22) = 3.2151 \pm 0.0872\,,\ \hat{x}_3(22) = 3.1022 \pm 0.0805\,.$$

Малі стандартні помилки прогнозування [3] свідчать про його високу точність.

4.2 МОДЕЛЬ ІНВЕСТИЦІЙНОГО РОЗВИТКУ

Модель (1) у випадку діагональної матриці A часто використовується для описання процесів інвестиційного розвитку [1, 5]. Розглянемо двогалузеву макроекономічну систему відкритого типу, в якій перша галузь промислово-сільськогосподарська, а друга – галузь послуг. Як узагальнені координати можуть виступати основні фонди x_1 і x_2 галузей та зовнішній борг держави x_3. Тоді параметри a_1 і a_2 можуть бути інтерпретовані як коефіцієнти амортизації основних фондів двох галузей ($-1 < a_1, a_2 < 0$), a_3 – норма обслуговування зовнішнього боргу ($|a_3| < 1$). Як показано в [13], вхідними параметрами можна обрати іноземні інвестиції u_1 і u_2 та внутрішні інвестиції u_3 і u_4 в першу й другу галузь відповідно, а також суму чистого експорту й інвестицій за кордон u_5. У такому випадку вигляд матриці B, а отже, й вектора $\mathbf{v}$ моделі (8) задані:

$$B=\begin{pmatrix}1\,0\,1\,0\,0\\0\,1\,0\,1\,0\\1\,1\,0\,0\,1\end{pmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{pmatrix}u_1+u_3\\u_2+u_4\\u_1+u_2-u_5\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Оскільки інформація по вектору керувань $\mathbf{u}$ відома, то координати вектора $\mathbf{v}$ були наближені поліномами четвертого ступеня за допомогою звичайного МНК (рис. 3):

$$\underset{(\text{с.п.})}{v_1}\ (t)=\underset{(3.1578)}{160.8426}+\underset{(2.1881)}{11.1546\,t}+\underset{(0.4386)}{0.9654\,t^2}+\underset{(0.0317)}{0.0712\,t^3}+\underset{(0.0007)}{0.0017\,t^4},\ R^2=0.9937\ ,$$

$$\underset{(\text{с.п.})}{v_2}\ (t)=\underset{(3.2021)}{136.0373}+\underset{(2.2188)}{17.0866\,t}+\underset{(0.4447)}{2.4082\,t^2}+\underset{(0.0322)}{0.1714\,t^3}+\underset{0.0008}{0.0039\,t^4},\ R^2=0.9901\ ,$$

$$\underset{(\text{с.п.})}{v_3}\ (t)=\ \underset{(8.9873)}{30.7820}+\ \underset{(1.2483)}{2.9410\,t^2}+\underset{(0.0903)}{0.2678\,t^3}+\underset{(0.0021)}{0.0065\,t^4},\ R^2=0.8377\ .$$

Використовуючи двосторонній критерій Стьюдента при рівні значущості $\alpha=0.05$ і числі ступенів волі $k=n-p-1=17$ ($n=22,\ p=4$), робимо висновок про значущість поліномів четвертого ступеня.

Застосовуючи запропонований в розділі 3 алгоритм ідентифікації матриці $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3)$, приходимо до наступних результатів. Чисельна мінімізація функцій помилок (13), які в силу (11), (12) мають складний нелінійний характер відносно невідомих параметрів, показала, що глобальні точки мінімуму лежать у зазначених областях визначення невідомих параметрів (рис. 3). Це свідчить про правильність специфікації моделі (8) і достовірність вихідних статистичних даних. Проаналізуємо отримані значення. Оцінка коефіцієнта амортизації основних фондів промислово-сільськогосподарської галузі ($\hat{a}_1=-0.1718$) виявилася (за модулем) більшою за відповідний показник галузі послуг ($\hat{a}_2=-0.0580$). Це відповідає реальній економічній ситуації, адже основні фонди промислово-сільськогосподарської галузі через більш інтенсивне їх використання мають більший ступінь амортизації. Що стосується оцінки $\hat{a}_3$ норми обслуговування зовнішнього боргу, то для її обчислення базовий період T було розбито на два інтервали (рис. 3). З 1966 по 1976 рік $\hat{a}_3$ виявилася рівною -0.1960. Від'ємне значення норми обслуговування зовнішнього боргу свідчить про те, що зовнішні позики в цей час віддавалися за рахунок інших позик, наприклад, МВФ. З 1977 року в економіці Данії відбулися якісні зміни: величина v_3 після перманентного зростання почала різко спадати. Це означає, що зовнішньоекономічне сальдо Данії почало скорочуватись. Останнє ж у свою чергу позитивно позначилося на платоспроможності країни. Як наслідок, оцінка норми обслуговування зовнішнього боргу виявилася додатною ($\hat{a}_3=0.1410$), хоча й меншою за абсолютним значенням від своєї попередньої оцінки (зовнішні позичальники можуть зменшувати процентну ставку при переході боржника на самофінансування) [15].

Математично ідентифікація параметрів a_1 і a_2 моделі (8) була проведена в оберненому часі. Що стосується оцінювання a_3, то на першому інтервалі воно відбувалося в оберненому, а на другому – в прямому часі. Це було необхідно для ліквідації розриву першого роду для функції $\hat{x}_3(t)$.

Висока якість апроксимації узагальнених координат за допомогою моделей (8) дає можливість використовувати ідентифіковані дескриптивні моделі для розв'язання задачі статичної оптимізації, описаної в розділі 3. У [13] специфікована задача оптимального розподілу інвестиційних потоків, у якій інструментальними (вільними) змінними є іноземні інвестиції в промислово-сільськогосподарську галузь u_1 і галузь послуг u_2. Інші координати вектора $\mathbf{u}$ вхідних сигналів є базовими змінними.

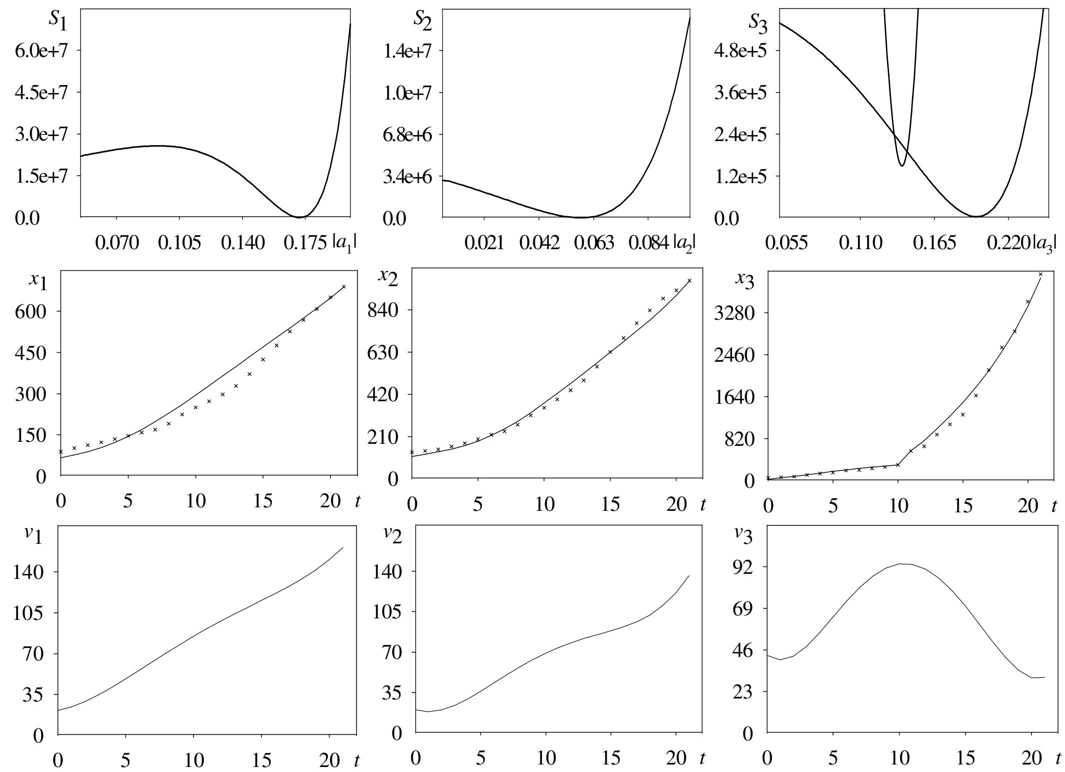

Рис. 3. Результати чисельної реалізації дескриптивної моделі інвестиційного розвитку

За формулою (16) базові змінні завжди можна виразити через вільні. Як цільову функцію в (17) пропонується обрати

$$F(u_1, u_2) = p_1 u_1 + p_2 u_2 \to \max, \tag{19}$$

де p_1 і p_2 – пріоритети розвитку кожної з галузей ($p_1 + p_2 = 1$). Системою обмежень в (17) можуть бути обрані наступні умови. Перша випливає з того факту, що для економічної системи завжди існує деяке критичне значення M сумарних іноземних інвестицій, таке, що в кожний момент часу повинна виконуватися нерівність

$$u_1 + u_2 \le M, \tag{20}$$

Друга нерівність випливає з обмеження на величину u_5 суми чистого експорту та інвестицій за кордон, яку в кінцевому вигляді можна подати так [13, 15]:

$$(1+k-k_1)u_1 + (1+k-k_2)u_2 \le (1-k)G_t + (k-k_1)(\hat{\hat{x}}_1 - \hat{a}_1 x_1) + (k-k_2)(\hat{\hat{x}}_2 - \hat{a}_2 x_2) + (\hat{\hat{x}}_3 - \hat{a}_3 x_3), \tag{21}$$

де k – частка споживчих товарів національного виробництва, що необхідна для внутрішнього споживання, а k_1 і k_2 – частки внутрішніх інвестицій u_3 у першу галузь і u_4 - у другу галузь, які за будь-яких умов спрямовуються на внутрішній розвиток. Інформація за цими параметрами відома [14]. Отже, разом з умовою невід'ємності інструментальних змінних, задача (19)-(21) є задачею лінійного програмування в кожний момент часу $t = 0, 1, ..., N-1$.

У роботі [13] запропоновані умови вибору невідомих параметрів задачі (19)-(21) таким чином, щоб вона мала нетривіальний розв'язок ($u_1, u_2 \ne 0$). Результати оптимізації наведені на рис. 4, а пріоритети розвитку для нетривіального розв'язку повинні бути обрані на рівні $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.6$. Тут криві u_1^*, u_2^* відповідають оптимальним траєкторіям, а u_1, u_2 – реальним траєкторіям.

Очевидно, модель лінійного програмування (19)-(21), що використовувалася для чисельного експерименту, є демонстраційною. Більш складні види системи обмежень та цільової функції (17) можуть призводити до оптимальних розв'язків, більш наближених до реальних умов прийняття управлінських рішень в економіці.

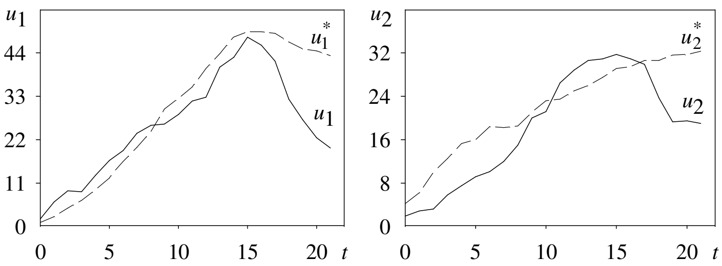

Рис. 4. Реальні та оптимальні розподіли змінних u_1 і u_2

5. ВИСНОВКИ

Головними результатами дослідження є розробка принципу специфікації та ідентифікації дескриптивних моделей керованих систем для випадку, коли вхідні сигнали є невідомими або відомими величинами. Для оцінювання невідомих параметрів розроблені статистичні ітераційні алгоритми, побудовані за принципом оберненого зв'язку. Запропоновано принцип переходу від дескриптивних до оптимізаційних моделей керованих систем. Чисельна реалізація проведена на реальних статистичних даних для макроекономічної системи відкритого типу на прикладі двох моделей: загальної макроекономічної динаміки та інвестиційного розвитку. Високі імітаційні властивості побудованих дескриптивних моделей продемонстровані на відповідних діаграмах. У випадку моделі інвестиційного розвитку також вдалося апробувати модель статичної оптимізації (модель оптимального розподілу інвестиційних потоків), що може слугувати потужним аналітичним інструментарієм у прийнятті рішень на практиці. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на побудову та апробацію моделі динамічної оптимізації, запропонованої в розділі 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. – Очерки по математической теории систем \ Под ред. Цыпкина Я. – М: УРСС, 2004. – 400 с.
2. Intriligator M.D. Mathematical optimization and economic theory. – Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – 508 pp.
3. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Изд-во Мир, 1972.
4. Бабаков И.М. Теория колебаний. Изд. 4-ое, исправл. – М.: Наука, 2004. – 591 с.
5. Bates D.M., Watts D.B. Nonlinear Regression Analysis and Its Applications. – N.Y.: Wiley, 1988. – 365p.
6. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния / Под ред. Райбмана Н.С. – М.: Мир, 1975. – 680 с.
7. Ramsay J.O., Hooker G., Campbell D., Cao J. Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach // Journal of the Royal Statistical Society. Series, 2007 – P. 741-796.
8. Gerdin M., Glad T., Ljung L. Parameter Estimation in Linear Differential-Algebraic Equations // Proceedings of the 13th IFAC Symposium on System Identification, 2003. Pp 1530-1535.
9. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: Юнити, 2005. – 295 с.
10. Chiang A.C. Fundamental Methods of Mathematical Economics, Third Edition. – New York: McGraw Hill, 1984. – 788 pp.
11. Wooldridge J. Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data. – London: MIT Press, 2000, 735 p.
12. Назаренко О.М. Основи економетрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – К.: „Центр навчальної літератури", 2005. – 392 с.
13. Назаренко О.М., Фільченко Д.В. Оптимальний розподіл інвестиційних потоків у динамічній моделі макроекономічної системи // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів: Центр математичного моделювання інституту прикладних проблем механіки і математики, вип.5, 2007. – С. 127-138.
14. Denmark Statistics: http://www.dst.dk.
15. Шевчук В.О. Міжнародна економіка: теорія і практика. – Львів: Каменяр, 2003. – 719 с.