

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Факультет технічних систем та енергоефективних технологій
Кафедра загальної механіки на динаміки машин

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

магістра

на тему: «Дослідження властивостей напружень в рухомій рідині»

Виконав: студент **4** курсу, групи **КМ – 51**

Напряму підготовки **6.040202 – «Механіка»**

Козлов Я. Р.

Керівник Калініченко П. М.

Рецизент Савченко Є. М.

Суми – 2020

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра:

Об'єкт досліджень – напруження в рухомій рідині.

Предмет дослідження – напруження в точці рухомої рідини.

Мета роботи – отримання залежності для напружень в точці рухомої рідини на базі чого уточнити рівняння руху рідини і виконати апробацію отриманих результатів.

Методи дослідження – фізичне і математичне моделювання течії рідини.

У роботі наведені результати досліджень напружень в точці рухомої рідини. Напруження розподілені на гідростатичну і гідродинамічну складові. Гідростатична складова напружень підпорядковується певній закономірності. На основі цього записано закон розподілу гідростатичної складової напружень в точці рухомої рідини. Згідно отриманого закону подана геометрична інтерпретація залежності розподілу гідростатичної складової напружень.

Дослідження показали, що результат отриманий в класичному підході по розрахунку гідродинамічного тиску в точці рухомої рідини для коротких каналів, дроселів, щілин відрізняється від результату який показує практика. Тому запропоновано уточнення в розрахунку, завдяки якому досягається більш точний результат.

Запропонований підхід можна використовувати при розрахунку гідродинамічного тиску в точці рухомої рідини для коротких каналів, дроселів, щілин для отримання результатів, що є більш близькими до значень, які показують експериментальні результати.

Зміст

| | |
|---|----|
| Вступ..... | 4 |
| 1. Напружений стан в нерухомій та рухомій рідині по огляду літературних джерел..... | 6 |
| 1.1 Гідростатичний тиск і його властивості..... | 6 |
| 1.2 Об'ємні і поверхневі напруження. Тензор напружень..... | 10 |
| 1.3 Теорема про взаємність дотичних напружень..... | 16 |
| 1.4 Сили які діють в рідинах..... | 19 |
| 1.5 Властивості напружень поверхневих сил..... | 22 |
| 1.6 Рівновага рідин і газів..... | 24 |
| 1.7 Висновки до розділу 1..... | 29 |
| 2. Дослідження напруженого стану в точці рухомої рідини..... | 30 |
| 2.1 Вихідні дані для проведення досліджень напруженого стану..... | 30 |
| 2.2 Зміна кількості руху «рідкої» частинки враховуючи переміщення маси за напрямками..... | 30 |
| 2.3 Розподіл напружень в точці рухомої рідини..... | 32 |
| 2.4 Висновки до розділу 2..... | 37 |
| 3. Апробація отриманих результатів по напруженому стану в точці рухомої рідини..... | 38 |
| 3.1 Вихідні положення для розрахунку простого напірного трубопроводу..... | 38 |
| 3.2 Розрахунок простого напірного трубопроводу по рівнянню Бернуллі (3.1)..... | 38 |
| 3.3 Розрахунок простого напірного трубопроводу по новому рівнянню..... | 40 |
| 3.4 Висновки до розділу 3..... | 44 |
| Висновки..... | 45 |
| Перелік посилань..... | 46 |

ВСТУП

Впровадження чисельних методів у ряді областей гідромеханіки практично витіснило подальше вивчення руху рідини. Дослідницькі роботи стали відкладені на другий план, якщо не зупинені взагалі. Це можна пояснити різними причинами.

Найбільш ймовірне пояснення, це потреба народного господарства, складність з матеріальної точки зору, та трудомісткість у проведенні дослідницьких робіт. Накопичений теоретичний та дослідний матеріал дозволив отримати розрахункові залежності, за якими створюються сучасні гідромеханічні системи. Подальше підвищення економічності, мається на увазі зменшення втрат енергії при виконанні тих чи інших процесів, пов'язаних із рідиною як з робочим тілом, потребує поглибленого вивчення природи фізичного явища та законів руху рідини. Одному із моментів цього, а саме дослідження нормальної складової напружень поверхневих сил тиску в рухомій рідині, присвячена ця робота.

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є: отримання залежності для напруження в точці рухомої рідини на базі чого уточнити рівняння руху рідини і виконати апробацію отриманих результатів.

Для досягнення даної мети були поставлені наступні задачі.

1. Провести огляд існуючих літературних джерел по дослідженню властивостей нормальної складової напружень поверхневих сил.
2. Отримати залежність розподілу гідростатичної складової напружень на площадках в точці рухомої рідини.
3. Записати інтегральні рівняння руху рідини з урахуванням розподілу гідростатичної складової напружень.
4. Виконати апробацію записаних інтегральних рівнянь руху рідини на базі розрахунку простого напірного трубопроводу.

Об'єкт дослідження – напруження в рухомій рідині.

Предмет дослідження – розподіл напружень в точці рухомої рідини.

Методи дослідження – фізичне і математичне моделювання течії рідини.

Робота складається із трьох розділів.

У першому розділі приведено оглядовий матеріал літературних джерел по дослідженню властивостей напружень в рідині.

Другий розділ присвячений дослідженню властивостей напруженого стану в точці рухомої рідини.

У третьому розділі наведена апробація по результатам дослідження напруженого стану в точці рухомої рідини.

Результати роботи наведені у висновках.

1. НАПРУЖЕНИЙ СТАН В НЕРУХОМІЙ І РУХОМІЙ РІДИНІ ПО ОГЛЯДУ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1.1 Гідростатичний тиск і його властивості

Гідростатика є розділом гідромеханіки, в якому розглядається рівновага рідини. Як завжди в гідромеханіці, в гідростатиці приймають, що рідина повністю заповнює простір в якому вона знаходиться, тобто рідину приймають за суцільне середовище. Це дозволяє всі шукані функції рахувати неперервними функціями координат.

Потрібно відзначити, рівняння рівноваги рідини добре вивчені та цілком обґрунтовані. Розроблені методи розрахунку сил, які діють в рідині, що знаходиться в стані спокою, теж є досить обґрунтованими. Точність отримана за розрахунками майже співпадає з практичними результатами.

Введемо поняття гідростатичного тиску. Розглянемо об'єм рідини, яка знаходиться в рівновазі (рис. 1). Розділимо його площиною ВС на дві довільні частини 1 і 2 першу відсічену частину відкинемо. Для збереження рівноваги другої відсіченої частини сумарну дію на неї першої відсіченої частини замінимо силою P . Площа площини перерізу нехай дорівнює ω . Тоді розділивши P на ω отримаємо середній гідростатичний тиск

$$P_{\text{ср}} = \frac{P}{\omega} \quad (1)$$

Нехай $\Delta\omega$ – мала площадка, всередині якої знаходиться точка А, а ΔP – сила яка діє на цю площу. Ліміт відношення ΔP до $\Delta\omega$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$ називається гідростатичним тиском в даній точці [1].

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega} \quad (2)$$

Гідростатичний тиск P , вимірюють в Паскалях (Па). Скажемо дві основних властивості гідродинамічного тиску. Перша властивість складається з того,

що направлення гідростатичного тиску завжди співпадає з направленням внутрішньої нормалі до розгляданої площадки. Ця властивість виходить з того що при рівновазі опір рідини здвигаючим зусиллям відсутній.

Направлення гідростатичного тиску по зовнішній нормалі не можливе тому, що такому тиску повинно було відповідати розтягуюче зусилля, що неможливо так як розтягуючих зусиль рідина не витримує. Таким чином гідростатичний тиск завжди являється стискаючим напруженням.

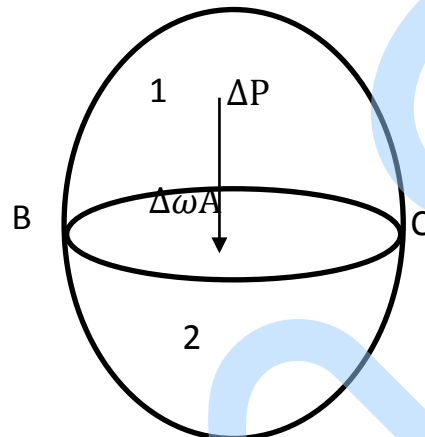


Рис. 1

Друга властивість гідростатичного тиску складається з того, що величина її в даній точці не залежить від орієнтації тієї площадки на якій він діє. Це значить, що якщо через точку М (рис. 2) провести, наприклад, дві площадки 1 – 1 і 2 – 2, той гідростатичний тиск що діє на вказаних площадках (P_1 і P_2), по величині будуть однакові, тобто $P_1 = P_2$ по модулю.

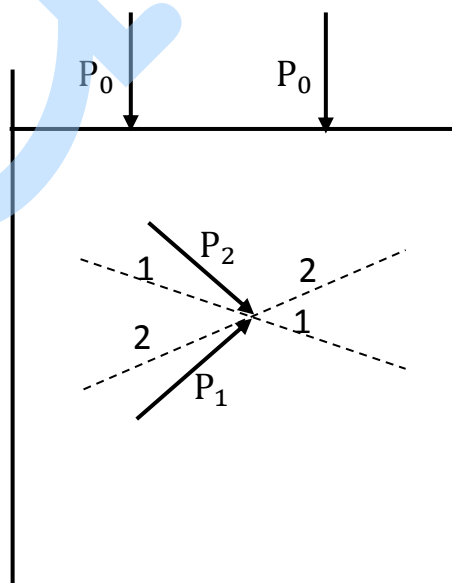


Рис. 2

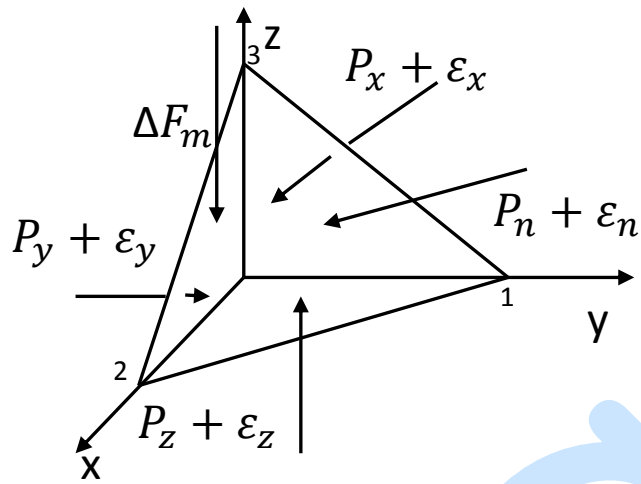


Рис. 3

Для доказу, із рідини яка знаходиться в рівновазі, виділимо простий тетраедр (рис.3), ребра якого, сходяться в довільній точці А, паралельні осям прямокутної системи координат $oxyz$ і дорівнюють відповідно dx, dy, dz .

Знайдемо діючі на тетраедр поверхневі і об'ємні сили. Так як в рідині, яка знаходиться в стані рівноваги, сили внутрішнього тертя відсутні, то із поверхневих сил які діють на гранях тетраедра буде діяти тільки сила по нормалі, яка відповідає гідростатичному тиску. Нехай P_x, P_y, P_z і P_n – гідростатичний тиск в точці А по площадкам, перпендикулярним до осей ox, oy, oz і до зовнішньої нормалі до похилої грані тетраедра. Середній арифметичний тиск на гранях тетраедра може бути прийнятим рівним відповідно.

$$P_n + \varepsilon_n, P_x + \varepsilon_x, P_y + \varepsilon_y, P_z + \varepsilon_z \quad (3)$$

Де $\varepsilon_n, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - малий приріст тиску.

Нормальні зусилля на вказаних гранях тоді, згідно формулі (2) будуть дорівнювати:

$$(P_n + \varepsilon_n)d\omega_n, (P_x + \varepsilon_x)d\omega_x, (P_y + \varepsilon_y)d\omega_y, (P_z + \varepsilon_z)d\omega_z$$

де, $d\omega_x$ = площа А – 1 – 3, $d\omega_y$ = площа А – 2 – 3, $d\omega_z$ = площа А – 1 – 2, $d\omega_n$ = площа 1 – 2 – 3.

Орієнтацію на площадках будемо характеризувати напрямленням нормалі до неї.

Нехай проекція об'ємних сил, діючих на виділений тетраедр і тих сил які діють на одиницю маси, дорівнюють відповідно X, Y, Z .

За умовою рідина знаходиться в рівновазі, а тому об'ємні і поверхневі сили, прикладені до тетраедра повинні урівноважуватись. Проектуючи їх на вісь X , отримаємо:

$$(P_x + \varepsilon_x)d\omega_x - (P_n + \varepsilon_n)d\omega_n \cos(n, x) + \rho X dV = 0 \quad (4)$$

Де ρ – густина рідини. Вважаючи що:

$$d\omega_x = \frac{1}{2} dy dz, \quad d\omega_n \cos(n, x) = d\omega_x, \quad dV = \frac{1}{6} dx dy dz.$$

Формулу (3) запишемо у вигляді вигляді:

$$(P_x - P_n) \frac{1}{2} dy dz + (\varepsilon_x + \varepsilon_n) \frac{1}{2} dy dz + \frac{1}{6} dx dy dz \rho X = 0 \quad (5)$$

Або після перетворень:

$$(P_x - P_n) + (\varepsilon_x + \varepsilon_n) + \frac{1}{3} \rho X dx = 0 \quad (6)$$

Перейдемо до ліміту, наближуючи грань $d\omega_x$ до точки A і зберігаючи при цьому напрямлення нормалі n , тоді:

$$P_x = P_n \quad (7)$$

Проектуючи сили на другі вісі координат, при умові таких же дій знайдемо:

$$P_y = P_n, \quad P_z = P_n \quad (8)$$

Склавши формули (6) і (7), отримаємо:

$$P_x = P_y = P_z = P_n \quad (9)$$

Що і доводить сформульовану вище властивість незалежності величини гідростатичного тиску в даній точці від орієнтації площадки. Це дозволить гідростатичний тиск розглядати як скалярну неперервну функцію тільки від координат і взагалі в часі, тобто:

$$\rho = f(x, y, z, t)$$

(10)

1.2 Об'ємні і поверхневі напруження. Тензор напружень.

В динаміці суцільних середовищ виділяють два класи сил діючих на частинки середовища: об'ємні (іноді їх іще називають масовими) і поверхневі. Під об'ємними силами представляють сили, які діють на елементи об'єму, як, наприклад, сили ваги, тяжіння, інерції, електростатичного притягання і відштовхування, сили дії магнітного або електростатичного поля на частини середовища. До поверхневих сил відносяться сили, які при прийнятому в механіці суцільних середовищ макроскопічному підході діють на елементи поверхні, яка обмежує об'єм, як, наприклад, сили тиску, або, більш детально сили, діючі із сторони потоку на поверхню поміщеного в нього тіла, або реакції тіла на потік, сили внутрішнього тертя (в'язкості) в середовищі.

Треба сказати, що класифікація сил умовна, так як механіка Ньютона, знає тільки сили, прикладені до маси, тобто тільки об'ємні сили. Але в тих випадках, коли частинки, на яких зосереджена дія сил, розміщені в дуже тонкому слої, так що можна без великої похибки звести цей слой до деякої «матеріальної поверхні», вважають, що сили діють на частинку цієї поверхні [2].

У відмінності від динаміки системи дискретних точок в динаміці суцільних середовищ мають справу не з самими силами, а з густиною їх розподілення в просторі. Так під густиною розподілення об'ємних сил (об'ємною силою) F в даній точці M середовища розуміють ліміт відношення головного вектору $\Delta \vec{R}$ сил, прикладених до точок матеріального об'єму $\Delta \tau$, замикаючого в собі точку M , до маси $\Delta m = \rho \Delta \tau$, де ρ – деяке середнє значення густини в об'ємі $\Delta \tau$, коли об'єм $\Delta \tau$ прямує до нуля, зберігаючи в собі точку M , тобто:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\delta R}{\delta \tau} \quad (11)$$

Вимірюється F в міжнародній системі одиниць (СІ) в Н/кг або м/см². Звідси виходить, що звичайна сила Ньютона δR , прикладена до елементарного об'єму $\delta\tau$ в точці M , визначається через об'ємну силу F як:

$$\delta R = \rho F \delta\tau \quad (12)$$

В якості доказу можна вказати, в випадку сили тяжіння $F=g$ де g – вектор прискорення вільного падіння; в випадку відцентрової сили інерції в крутячій з кутовою швидкістю ω системі відповідає об'ємна сила $\vec{F} = \omega^2 \vec{r}$ де \vec{r} – вектор, який дорівнює найкоротшій відстані між точкою прикладання сили, віссю обертання і направлений в сторони від вісі.

Так само, поверхневі сили задаються вектором напружень

$$\rho = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\rho'}{\Delta\sigma} = \frac{\delta\rho}{\delta\sigma} \quad (13)$$

Де $\Delta\rho'$ - головний вектор сил, прикладених зі сторони середовища до виділеної в ній маленькій площадці $\Delta\sigma$, а $\delta\rho$ і $\delta\sigma$ – максимальні їх значення. Вимірюють ρ в Н\м².

Вектор $\delta\rho$ поверхневої сили, прикладений до площадки $\delta\sigma$ в даній точці простору, згідно з рівнянням вище дорівнює:

$$\delta\rho = \rho\delta\sigma \quad (14)$$

Тобто, добутку вектора напруження ρ на величину елементарного об'єму площадки $\delta\sigma$.

Відзначимо основну відмінність (окрім, звісно, неспівпадання розмірностей) між вектором F і ρ : в той час як вектор F є однозначною векторною функцією точок простору та часу, тобто утворює векторне поле, вектор ρ приймає у кожній точці простору нескінченну множину значень в залежності від орієнтації площадки, до якої прикладено напруження, і таким чином векторного поля не утворює.

Візьмемо в точці M суцільного середовища площадку $\delta\sigma$, орієнтацію якої в просторі визначимо ортом \vec{n} нормалі до площадки (рис. 4). Назвем одну із сторін площадки $\delta\sigma$ лицевою, а другу – внутрішньою. Проведемо з лицевої

сторони одиничний вектор нормалі \vec{n} . Відкинемо умовно з лицевої сторони площадки частину середовища, замінивши її дію на площадку з силою $\rho_n \delta\sigma$. Індекс n у вектора напруження ρ_n вказує на те, що сила прикладена до лицевої сторони площадки з ортом нормалі \vec{n} . Якщо б, навпаки, була відкинута частина середовища з внутрішньої сторони, то сила, еквівалентна дії відкинутого середовища, прикладена до внутрішньої сторони площадки, була б, відповідно до закону протидії, рівна $\rho_n \delta\sigma$. Звичайно вибір однієї із сторін площадки у якості лицевої, а другої – у якості внутрішньої повністю хаотичний, але повинен бути спочатку вказаний і в процесі роздумів зафіксований.

Доведем що вектор напруження ρ_n можливо уявити як похідну орта n , характеруючого орієнтацію площадки $\delta\sigma$ у просторі, на тензор другого рангу P , який являється функцією вектор-радіусу \vec{r} точки та часу, тобто утворює тензорне поле.

З цією ціллю розглянемо вирізаний у середовищі елементарний тетраедр $MABC$ (рис. 5) з вершиною в даній точці M , з основою в вигляді трикутника ABC , утвореного пересічення похилої площини з трьома координатними площинами, та боковими гранями, розмішеними в координатних площинах. Позначимо площину трикутника ABC через $\delta\sigma_n$, а площини трикутників BMC , AMC і AMB , які являють собою проєкції трикутника ABC на координатні площини, відповідно $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\sigma_3$, при чому індекси 1, 2, 3 при цих площадках, так само як і при напруженнях ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , прикладених до цих площадок, позначають вісі перпендикулярні до площадок.

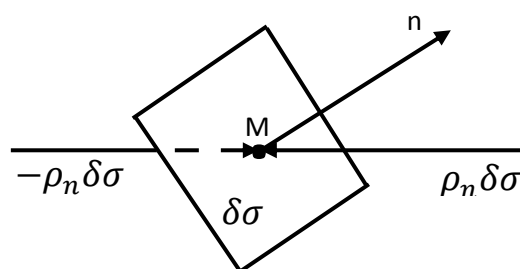


Рис. 4

Розглядаючи нескінченно малий тетраедр як «рідкий», тобто який складається із частин які рухаються в середовищі, загальна маса яких нехай буде рівна δm ; будимо мати:

$$\vec{V}_c \delta m = \vec{F} \delta m + \vec{\rho}_n \delta \sigma_n - \vec{\rho}_1 \delta \sigma_1 - \vec{\rho}_2 \delta \sigma_2 - \vec{\rho}_3 \delta \sigma_3 \quad (15)$$

Де \vec{V}_c - вектор прискорення центру інерції тетраедра; F – густина розподілення об’ємних сил; а $\vec{\rho}_n, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3$ – вектори напруження розміщені зі сторони лицевих граней тетраедра. Лицевими, очевидно являються ті, зі сторони яких розміщений орт n , і щоб не вводити нових, орти $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$. Біля останніх трьох членів в правій частині останнього рівняння стоять знаки мінус, так як до внутрішніх сторін бокових граней прикладені напруження $-\vec{\rho}_1, -\vec{\rho}_2, -\vec{\rho}_3$.

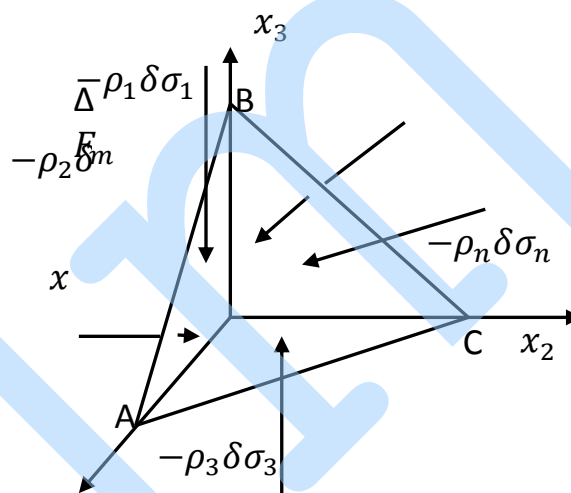


Рис. 5

В рівнянні яке ми розглядаємо член з ліва і перша складова справа як величини третього порядку малості, в них є елементи маси, пропорційні об’єму $\delta \tau$ – можна відкинути по зрівнянню з іншими членами які мають елементи поверхней $\delta \sigma_1, \delta \sigma_2, \delta \sigma_3, \delta \sigma_n$ які є меншостями другого порядку,

Тоді, залишаючи лише меншості другого порядку, будемо мати:

$$\rho_n \delta \sigma_n = \rho_1 \delta \sigma_1 + \rho_2 \delta \sigma_2 + \rho_3 \delta \sigma_3 \quad (16)$$

Зазначимо, що:

$$\begin{aligned}\delta\sigma_1 &= \delta\sigma_n \cos(\widehat{n_1x_1}) = n_1\delta\sigma_n \\ \delta\sigma_2 &= \delta\sigma_n \cos(\widehat{n_2x_2}) = n_2\delta\sigma_n \\ \delta\sigma_3 &= \delta\sigma_n \cos(\widehat{n_3x_3}) = n_3\delta\sigma_n\end{aligned}\quad (17)$$

Де n_1, n_2, n_3 означають косинуси кутів орта n є осями координат, отримаємо після скорочення обох частин рівняння вище на $\delta\sigma_n$, і стягування тетраедра до його вершини в точці M , рівняння:

$$\rho_n = n_1\rho_1 + n_2\rho_2 + n_3\rho_3 = n_n\rho_n \quad (18)$$

Або в проекціях на декартові вісі координат,

$$\begin{aligned}\rho_{n1} &= n_1\rho_{11} + n_2\rho_{21} + n_3\rho_{31} & \rho_{n2} &= n_1\rho_{12} + n_2\rho_{22} + n_3\rho_{32} \\ \rho_{n3} &= n_1\rho_{13} + n_2\rho_{23} + n_3\rho_{33}\end{aligned}\quad (19)$$

Споминаючи визначення напружень ρ_1, ρ_2, ρ_3 , відмітимо, що при прийнятих наченнях перший підрядковий індекс при напруженні $\rho_{11}, \rho_{12}, \dots$, визначає вісь, перпендикулярно до якої орієнтована площадка $\delta\sigma$, другий – вісь, на яку спроектована ця напруга; так, наприклад, ρ_{13} означає проекцію на вісь x_3 , напруження прикладеного до площадки, перпендикулярній вісі x_1 , очевидно що

$$\rho_r = \rho_{rs}i_s \quad (r=1, 2, 3; \text{сума по } s \text{ від } 1 \text{ до } 3) \quad (20)$$

Величини з однаковими індексами $\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}$, які представляють проекції векторів напружень ρ_1, ρ_2, ρ_3 на нормалі до відповідних площадок, називають нормальними напруженнями, а проекції $\rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{31}, \dots$ напруження на вісі, які лежать в площинах площадок, - дотичними напруженнями.

Система рівнянь $\rho_n = n_1\rho_1 + n_2\rho_2 + n_3\rho_3 = n_n\rho_n$ і

$$\begin{aligned}\rho_{n1} &= n_1\rho_{11} + n_2\rho_{21} + n_3\rho_{31} & \rho_{n2} &= n_1\rho_{12} + n_2\rho_{22} + n_3\rho_{32} \\ \rho_{n3} &= n_1\rho_{13} + n_2\rho_{23} + n_3\rho_{33}\end{aligned}$$

Показує, що проекції фізично об'єктивного вектора ρ_n , на вісі координат є лінійними функціями проекцій на ті ж вісі фізично об'єктивного вектора n .

Коефіцієнти в цьому лінійному зв'язку представляють сукупність дев'яти величин

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{31} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{32} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Як було відзначено вище наявність лінійного зв'язку між проекціями двох фізичних векторів ρ_n і n каже про фізичну об'єктивність сукупності величин матриці зображеної вище ρ_{kl} ($k, l=1,2,3$) і тим самим про фізичну об'єктивність визначеного матрицею вище тензора другого рангу з цими компонентами.

Таблиця вище не влаштовує прийнятий порядок індексів: перший – номер рядка, другий – стовпця. Тому за тензор напружень приймемо тензор P :

$$P \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \quad (22)$$

А тензору співставим тензор P^* , зв'язаний з тензором напружень P . Як буде далі показано, різниця між тензорами P і P^* відсутня. Згадавши визначення операцій множення векторів на тензор з права (або тензор на вектор з ліва) можемо переписати $\rho_{n1} = n_1\rho_{11} + n_2\rho_{21} + n_3\rho_{31}$ в тензорній формі так:

$$\rho_n = nP = P^* * n \quad (23)$$

Рівняння $\rho_n = n_1\rho_1 + n_2\rho_2 + n_3\rho_3 = n_n\rho_n$ і еквівалентні йому рівності $\rho_{n1} = n_1\rho_{11} + n_2\rho_{21} + n_3\rho_{31}$, $\rho_{n2} = n_1\rho_{12} + n_2\rho_{22} + n_3\rho_{32}$, $\rho_{n3} = n_1\rho_{13} + n_2\rho_{23} + n_3\rho_{33}$, які встановлюють лінійну залежність між проекціями напруження, прикладеної до οποї площадки в даній точці, і косинусами кутів нормалі до цієї площадки з осями координат мають основне значення для механіки суцільних середовищ. Вони носять назву рівняння Коші, вперше згаданих в 1827 р. Рівняння $\rho_n = nP = P * n$ еквівалентна формулам наведеним вище, але має над ними перевагу, тому що не залежить від вибору декартової системи координат, що підкреслює фізичну об'єктивність.

1.3 Теорема про взаємність дотичних напружень

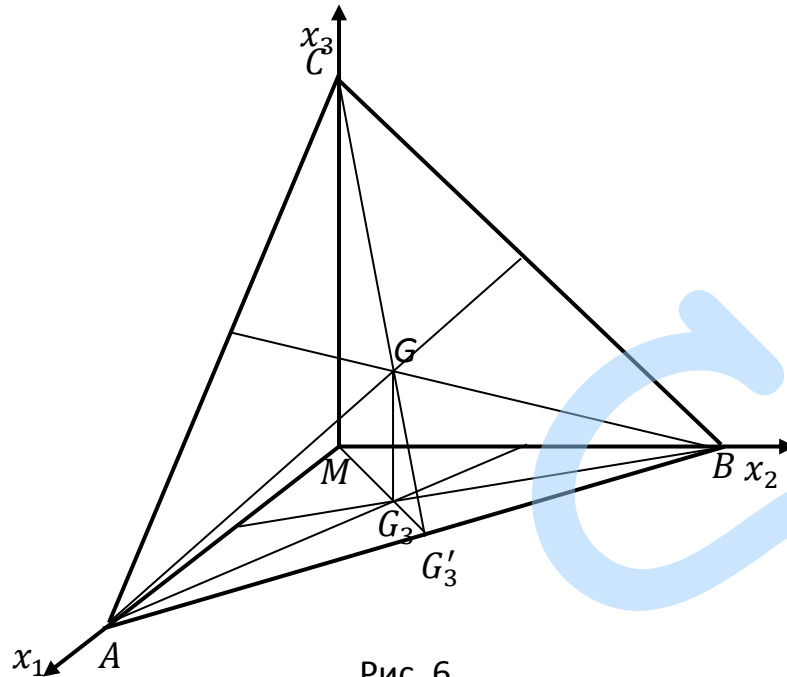


Рис. 6

Умова рівноваги тетраедра $ABCM$, згідно теоремі статики, крім рівності нулю головного вектора $\vec{\rho}_n \delta \sigma_n = \vec{\rho}_1 \delta \sigma_1 + \vec{\rho}_2 \delta \sigma_2 + \vec{\rho}_3 \delta \sigma_3$, повинен мати ще умову рівності нулю головного моменту прикладених сил.

Необхідно відмітити, що прийняті вище твердження, що до об'ємних та поверхневих сил потребує доповнення визначеннями об'ємних і поверхневих пар сил, які, наприклад, можуть утворюватися в феромагнітних рідинах. Перші з них, як малі третього порядку, в рівнянні моментів не враховуються, а інші потрібно врахувати.

Відволічемося від цього особливого випадку і приймемо, що в середовищі яке рухається, поверхневих пар сил немає.

При отриманні рівняння рівноваги положення точок прикладення поверхневих сил не мало значення. Для визначення моментів поверхневих сил необхідно знати координати точок прикладення сил. Оскільки грані тетраедру нескінченно малі, можна прийняти, що поверхневі сили по них розподілені рівномірно і точки прикладення рівнодіючих сил знаходяться на перетині медіан в трикутниках ABC , AMB , BMC і AMC в точках G , G_1 , G_2 , G_3 (рис. 6). Щоб не захаращувати креслення, на рисунку показано положення точок G і G_3 на грані ABC і їх проекцію AMB . Позначимо через r , $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, $r^{(3)}$

вектор-радіуси точок перетину медіан G , G_1 , G_2 , G_3 . Тоді рівняння моментів для другої умови рівноваги тетраедру буде мати вигляд:

$$r \times \rho_n \delta \sigma_n = r^{(1)} \times \rho_1 \delta \sigma_1 + r^{(2)} \times \rho_2 \delta \sigma_2 + r^{(3)} \times \rho_3 \delta \sigma_3 \quad (24)$$

Замінюючи в цьому рівнянні ρ_n , його розкладемо на $\rho_n = n_1 \rho_1 + n_2 \rho_2 + n_3 \rho_3 = n_n \rho_n$, після скорочення на $\delta \sigma_n$ отримаємо:

$$(r - r^{(1)}) \times \rho n_1 + (r - r^{(2)}) \times \rho n_2 + (r - r^{(3)}) \times \rho n_3 = 0 \quad (25)$$

Направлений відрізок $\overrightarrow{G_3 G}$ дорівнює різниці вектор радіусів r і $r^{(3)}$

$$\overrightarrow{G_3 G} = \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MG_3} = r - r^{(3)} \quad (26)$$

Так як точка G_3 є проекцією точки G на площину Mx_1x_1 , то направлений відрізок $\overrightarrow{G_3 G}$ паралельний вектору i_3 .

Аналогічно вектори $r - r^{(1)}$ і $r - r^{(2)}$ паралельні векторам i_1 і i_2 , так що можна взяти ($\lambda^{(k)}$ – скаляр):

$$r - r^{(1)} = \lambda^{(1)} i_1, r - r^{(2)} = \lambda^{(2)} i_2, r - r^{(3)} = \lambda^{(3)} i_3. \quad (27)$$

Підставляючи значення цих різниць в

$$(r - r^{(1)}) \times \rho n_1 + (r - r^{(2)}) \times \rho n_2 + (r - r^{(3)}) \times \rho n_3 = 0 \quad (28)$$

Отримаємо вираз: $\lambda^{(1)} n_1 (i_1 \times \rho_1) + \lambda^{(2)} n_2 (i_2 \times \rho_2) + \lambda^{(3)} n_3 (i_3 \times \rho_3) = 0$

Залишається визначити скаляри $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$. Для цього продовжимо відрізки $\overrightarrow{MG_1}$, $\overrightarrow{MG_2}$ і $\overrightarrow{MG_3}$ до пересічення їх з площиною ABC в точках G'_1 , G'_2 , G'_3 (на рисунку це показано тільки для G'_3). За теоремою про пересічення медіан в трикутнику будемо мати:

$$\overrightarrow{MG'_1} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MG_1} = \frac{3}{2} r^{(1)}, \overrightarrow{MG'_2} = \frac{3}{2} r^{(2)}, \overrightarrow{MG'_3} = \frac{3}{2} r^{(3)} \quad (29)$$

Врахуємо, що кінці векторів $\overrightarrow{MG'_1}$, $\overrightarrow{MG'_2}$, $\overrightarrow{MG'_3}$ так як і \overrightarrow{MG} , лежать в площині ABC . Отже, позначаючи через h довжину перпендикуляра, опущеного із точки M на площину ABC , знайдемо (n – орт нормалі):

$$\frac{3}{2} [r^{(1)} * n] = \frac{3}{2} [r^{(2)} * n] = \frac{3}{2} [r^{(3)} * n] = h \quad (30)$$

Якщо ми помножимо обидві частини кожного із рівнянь $r - r^{(1)} = \lambda^{(1)} i_1$, $r - r^{(2)} = \lambda^{(2)} i_2$, $r - r^{(3)} = \lambda^{(3)} i_3$ скалярно на n будемо мати:

$$[(r - r^{(k)}) * n] = r * n - r^{(k)} * n = h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h = \lambda^{(k)}n_k \quad (31)$$

($k = 1, 2, 3$; по k суму не брати).

Звідси виходить, що $\lambda^{(k)}n_k = \frac{h}{3}$. Підставляючи отримані значення $\lambda^{(k)}$ в рівняння $\lambda^{(1)}n_1(i_1 \times \rho_1) + \lambda^{(2)}n_2(i_2 \times \rho_2) + \lambda^{(3)}n_3(i_3 \times \rho_3) = 0$ і скорочуючи обидві частини на h , прийдемо до наступного векторного рівняння:

$$\vec{i}_1 \times \vec{\rho}_1 + \vec{i}_2 \times \vec{\rho}_2 + \vec{i}_3 \times \vec{\rho}_3 = 0 \quad (32)$$

Приймаючи в увагу рівність $\vec{\rho}_r = \rho_{rs}\vec{i}_s$ (підсумовування по s), отримаємо:

$$\vec{i}_1 \times \vec{\rho}_1 = \vec{i}_1 \times \rho_{1s}\vec{i}_s = \rho_{1s}(\vec{i}_1 \times \vec{i}_s) \quad (33)$$

При чому

$$i_1 \times i_s = \begin{cases} 0, & s = 1 \\ i_3, & s = 2 \\ -i_2, & s = 3 \end{cases}$$

Так, що:

$$i_1 \times \rho_1 = \rho_{12}i_3 - \rho_{13}i_2 \quad (34)$$

Аналогічно буде

$$\vec{i}_2 \times \vec{\rho}_2 = -\rho_{21}\vec{i}_3 - \rho_{23}\vec{i}_1, \vec{i}_3 \times \rho_3 = \rho_{31}\vec{i}_2 - \rho_{32}\vec{i}_1 \quad (35)$$

Підставляючи ці результати в рівність $\vec{i}_1 \times \vec{\rho}_1 + \vec{i}_2 \times \vec{\rho}_2 + \vec{i}_3 \times \vec{\rho}_3 = 0$ отримаємо:

$$\vec{i}_1 \times \vec{\rho}_1 + \vec{i}_2 \times \vec{\rho}_2 + \vec{i}_3 \times \vec{\rho}_3 = (\rho_{23} - \rho_{32})\vec{i}_1 + (\rho_{31} - \rho_{13})\vec{i}_2 + (\rho_{12} - \rho_{21})\vec{i}_3 = 0 \quad (36)$$

Звідси виходить, що

$$\rho_{23} = \rho_{32}, \rho_{31} = \rho_{13}, \rho_{12} = \rho_{21}, P=P^* \quad (37)$$

Ці рівності висловлюють теорему про взаємність дотичних напружень: якщо через будь яку точку середовища провести три взаємно перпендикулярні нескінченно малі площадки, то для кожних двох із них, проекції вектора напруження, прикладеного до однієї із площадок, на нормаль до другої будуть рівні між собою.

Рівності $\rho_{23} = \rho_{32}$, $\rho_{31} = \rho_{13}$, $\rho_{12} = \rho_{21}$, $P=P^*$ встановлюють, що при прийнятій умові відсутності в середовищі неперервного розподілення поверхневих пар сил, компоненти тензора напружень не залежать від порядку індексів, іншими словами, тензор напружень симетричний.

Механіку суцільних середовищ (рідин, газів, пружних тіл), для якої справедлива теорема про взаємність дотичних напружень, слідуючи, симетричний тензор напружень, називають «симетричний», або навпаки «несиметричний». Останній набув розвитку не так давно, представляє предмет потоку ще невеликого числа досліджень і не займає міста в сучасних підручниках.

Відмітимо суттєві для подальших висновків із теореми про взаємність дотичних напружень: 1. Із дев'яти невідомих компонентів тензора напружень різними є тільки шість; 2. В рівняннях Коші $\rho_{n1} = n_1\rho_{11} + n_2\rho_{21} + n_3\rho_{31}$

$$\rho_{n2} = n_1\rho_{12} + n_2\rho_{22} + n_3\rho_{32} \quad \rho_{n3} = n_1\rho_{13} + n_2\rho_{23} + n_3\rho_{33}$$

порядок індексів при компонентах тензора напружень можна не міняти. 3. Рівність $\rho_n = nP = P^*n$ прийме вигляд:

$$\vec{\rho}_n = \vec{n}P = P\vec{n} \quad (38)$$

Підкреслимо, що присутність об'ємних сил або поверхневих пар сил не обмежує справедливості рівнянь Коші, так як при отриманні головного вектору сил, пари сил ролі не грають.

1.4 Сили, які діють в рідинах

Рідини і гази завжди підлягають під дію деяких сил, які в основному розподілені, тобто прикладеними до всіх точок поверхні або об'єму. Але в деяких випадках в рідинах можуть діяти зосереджені сили. Вони виникають, наприклад, як максимальні значення розподілених сил, діючих на нескінченно малий рідкий об'єм, якщо його прискорення нескінченно росте.

За характером поведінки поверхневі сили можна розподілити на поверхневі і масові(об'ємні). До перших відносяться сили в'язкості і тиску, а до других – сили тяжіння, інерції, електромагнітні та інші.

Поверхневі сили є результатом безпосередньої дії на частини рідини сусідніх з ними частин або других тіл. Для якісного і кількісного описання поверхневих сил слугує поняття про напруження. В об'ємі рідини W , що знаходиться в стані спокою або рухається проведемо довільну поверхню S (рис. 7 а) подумки відкинемо частину рідини, що знаходиться з права від цієї поверхні. Щоб рідина яка залишилась при цьому зберегла стан спокою або руху, прикладемо до неї по поверхні S розподілену систему сил, еквівалентну тій дії, яку давала відкинута частина об'ємом W_2 , на частину об'ємом W_1 .

Нехай на елементарну площадку ΔS , яку характеризує одиничний вектор нормалі \vec{n} , діє сила $\Delta \vec{P}$.

Тоді

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} \right) = \vec{p}_n \quad (39)$$

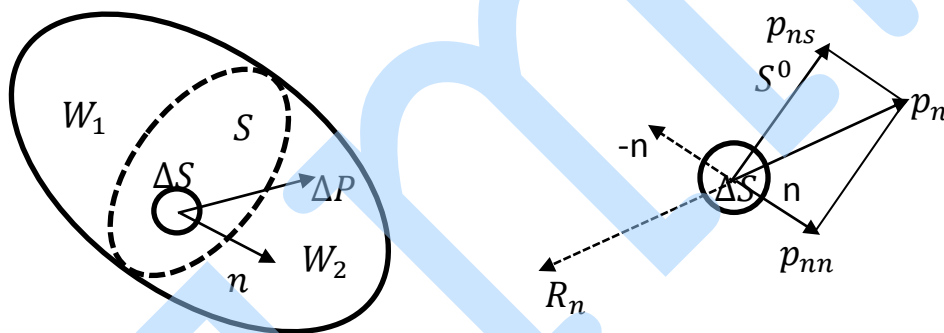


Рис. 7

Позначмо напруження поверхневих сил в тій точці, в якій стягується площадка ΔS . Підмітим, що індекс \vec{n} тут позначає не проекцію (тому, що \vec{n} – вектор), а орієнтацію площадки ΔS в просторі, тобто вказує, що \vec{p}_n – напруження на площадці з нормаллю \vec{n} .

По відношенню до площадки вектор \vec{p}_n , в цілому може бути направлений як завгодно і тому він має нормальну та дотичну складові. На рисунку 7 видно, що:

$$\vec{p}_n = p_{ns} \vec{S}^0 + p_{nn} \vec{n}_1$$

де p_{nn} – проекція вектора p_n на направлення нормалі; p_{ns} – проекція вектора p_n на направлення дотичної до площадки ΔS .

В одиничному випадку може бути, що:

$$p_{ns} = 0 \text{ і } \vec{p}_n = p_{nn}\vec{n}.$$

Оскільки в кожній точці поверхні S , проведеної всередині рідини, можна вказати дві нормалі: \vec{n} і $-\vec{n}$ (рисунок 7) то їм будуть відповідати два напруження: \vec{p}_n і \vec{p}_{-n} . Тоді сили $\vec{p}_n\Delta S$ і $\vec{p}_{-n}\Delta S$ будуть висловлювати взаємну дію через площадку ΔS об'ємів рідини, які знаходяться по обидві сторони від неї. Згідно з третім законом Ньютона $\vec{p}_n\Delta S = -\vec{p}_{-n}\Delta S$ або $\vec{p}_n = -\vec{p}_{-n}$.

Відповідно до векторів \vec{p}_n і \vec{p}_{-n} будемо розрізняти дві сторони площадки ΔS , до яких ці вектори прикладені, присвоюючи цим сторонам різні знаки.

Для характеристики масових сил введемо поняття про густину їх розподілення. Якщо на елементарний об'єм рідини ΔW , діє сила $\Delta\vec{f}$, то вектор \vec{F} , який визначає умова:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} [\Delta\vec{f}_l(\Delta W_\rho)]$$

(40)

Називається густиною розподілення масових сил в тій точці, в якій стягується об'єм ΔW . Очевидно, що F є масовою силою, яка діє на одиницю маси рідини, і має розмірність прискорення. Далі її проекції на вісі декартових прямокутних координат позначають через F_x, F_y, F_z .

Величини p_n і F є основними характеристиками сил, які діють в рідині. Вони можуть грати роль як зовнішніх, так і внутрішніх сил. Згадаємо, що в механіці внутрішніми силами системи матеріальних тіл називають сили взаємодії між тілами, що належать системі, а внутрішніми – сили дії на тіло системи других тіл, які не належать до даної системи. В механіці рідкого середовища матеріальними об'єктами, що утворюють систему, є рідкі частинки або рідкі об'єми. Відповідно напруження p_n і p_{-n} будуть внутрішніми, якщо вони діють в точках поверхні розділу між частинками або об'ємами, які утворюють обрану систему. Так, наприклад, сила тяжіння, для системи океан-суша буде внутрішньою, а для будь якого виділеного об'єму води в океані ця сила буде зовнішньою.

1.5 Властивості напружень поверхневих сил

Виділим в рідині яка рухається елементарний об'єм ΔW в вигляді тетраедра, три грані якого ΔS_x , ΔS_y , ΔS_z лежать в координатних площинах, а четверта ΔS_n перпендикулярна напрямленню n (рисунок 8). Звернемо увагу на те, що грані ΔS_x , ΔS_y , ΔS_z є від'ємними площадками, оскільки нормаллями для них служать вектори $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$.

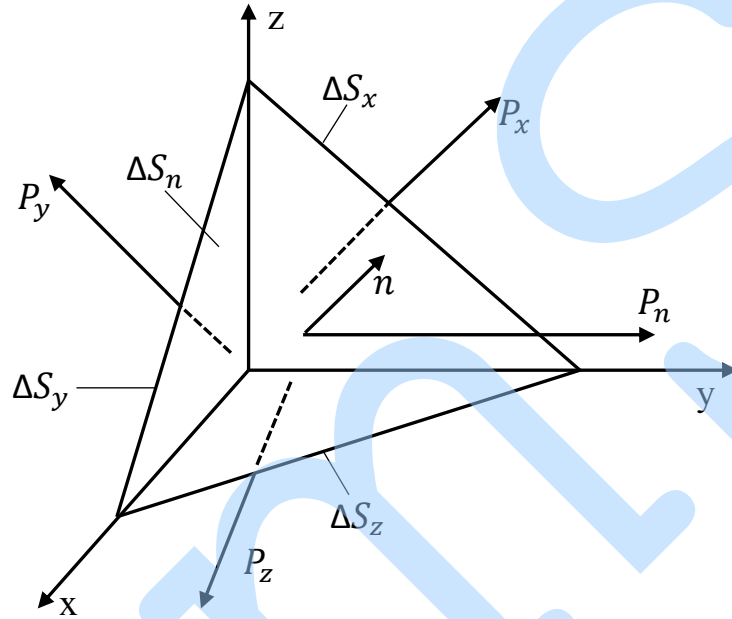


Рис. 8

Нехай P_x , P_y , P_z – напруження яке діє на відповідних гранях тетраедра; \vec{a} – вектор прискорення центру мас. Тоді векторне рівняння руху рідкого тетраедра, яке виражає другий закон Ньютона, буде мати вид:

$$\vec{F}_\rho \Delta W + \vec{P}_n \Delta S_n - \vec{P}_x \Delta S_x - \vec{P}_y \Delta S_y - \vec{P}_z \Delta S_z = \vec{a} \rho \Delta W \quad (41)$$

Врахуємо, що

$$\vec{P}_n = \vec{P}_x a_{nx} + \vec{P}_y a_{ny} + \vec{P}_z a_{nz} \quad (42)$$

Отже, напруження на будь якій площадці ΔS_n можна виразить через напруження на трьох взаємно ортогональних площадках, якими можуть бути і координатні площадки. Рівняння $\vec{P}_n = \vec{P}_x a_{nx} + \vec{P}_y a_{ny} + \vec{P}_z a_{nz}$ в проекціях на координатні вісі матиме вигляд:

$$P_{nx} = P_{xx} a_{nx} + P_{yx} a_{ny} + P_{zx} a_{nz};$$

$$P_{ny} = P_{xy}a_{nx} + P_{yy}a_{ny} + P_{zy}a_{nz}; \quad (43)$$

$$P_{nz} = P_{xz}a_{nx} + P_{yz}a_{ny} + P_{zz}a_{nz};$$

Тут, як ми можемо бачити, для кожної із проєкцій P_{lf} вживається два індекси, перший із яких вказує орієнтацію площадки (її нормаль), а другий – вісь, на яку проєктується вектор. Так, наприклад, величина P_{xx} є проєкцією на вісь x (другий індекс) напруження P_x , яке діє на площадці, перпендикулярній до осі x (перший індекс). Тому P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} представляють собою нормальні напруження до відповідних площадок. Різнойменні індекси визначають дотичні напруження. Наприклад, P_{yz} є проєкція на вісь z напруження P_y , прикладеного до площадки, перпендикулярної до осі y .

Надалі для стислості, проєкції напружень P_{lf} будемо називати просто напруженнями.

Використовуючи рівняння моментів, можна показати, що між дотичними напруженнями існує зв'язок виду:

$$P_{xy} = P_{yx}; P_{yz} = P_{zy}; P_{xz} = P_{zx} \quad (44)$$

яка називається законом парності дотичних напружень.

Отже, напружений стан рідини в точці визначається шістьма незалежними скалярними величинами, три з яких є нормальними напруженнями, а три – дотичними [знаки і численні значення проєкцій залежать від вибору осі координат, тоді як скалярні величини не залежать від неї; тому проєкції векторів (і інші подібні за властивостями величини) іноді називають псевдоскалярами]. Сукупність дев'яти величин типу P_{lf} , зв'язаних відношенням (42), утворює тензор напружень.

Із викладеного можна зробити висновки, що напружений стан в точці рідини що рухається визначається тензорною величиною.

В реальних рідинах нормальні напруження можуть утворюватися як тиском одних частинок на інші, так і дією сил в'язкості. Дотичні напруження є результатом дії сил в'язкості і залежать від тиску лише тому, що від нього залежить коефіцієнт в'язкості. Для моделі ідеальної рідини, в якій дотичні

напруження дорівнюють нулю, повні напруження направлені по нормалі до відповідних площадок і згідно рівнянням (43) виражаються формулами:

$$P_{nx} = P_{xx}a_{nx}, \quad P_{ny} = P_{yy}a_{ny}, \quad P_{nz} = P_{zz}a_{nz} \quad (45)$$

При цьому напруження повинні бути стискаючими, тобто направлені по внутрішнім нормалям, так як розтягуючих зусиль ідеальна рідина не витримує. Тому величини P_{nx} , P_{ny} , P_{nz} ми можемо порахувати із відношення:

$$P_{nx} = P_n i = P_n \cos(n, x) = P_n a_{nx}; \quad P_{ny} = P_n a_{ny}; \quad P_{nz} = P_n a_{nz} \quad (46)$$

Складаючи рівняння (45) і (46), отримаємо:

$$P_n = P_{xx} = P_{yy} = P_{zz}.$$

Ці рівняння показують, що при відсутності дотичних напружень нормальні напруження не залежать від орієнтації площадок і представляють собою тиск P в точці рідини, тобто

$$P = -P_n = -P_{xx} = -P_{yy} = -P_{zz} \quad (47)$$

Очевидно, в силу даного виразу (46) вектор напруження в даному випадку ми можемо представити як:

$$\vec{P}_n = -P\vec{n}.$$

Знак мінус показує, що дотичні напруження направлені по внутрішній нормалі, тобто є стискаючим напруженням.

Підмітимо, що дотичні напруження дорівнюють нулю також в будь якій в'язкій рідині, що знаходиться в стані спокою, так як при існуванні будь яких, хоч навіть дуже малих зсувних зусиль із за легко рухомого середовища виникло б відносне переміщення слоїв, тобто рідина була б виведена із стану спокою. Отже, отриманий висновок про незалежність нормальних напружень від орієнтації площадок справедлива для будь якої рідини, що знаходиться в стані спокою. Тиск P в цьому випадку називають гідростатичним.

1.6 Рівновага рідини і газів

В рідині яка знаходиться в стані спокою і в газі дотичні напруження в будь якій довільній точці дорівнюють нулю і напружений стан визначається тільки

сукупністю нормальних напружень, які є рівними між собою ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$).

Очевидно, що напруження σ_x , σ_y , σ_z , і σ є стискаючими, так як рідини і газу не реагують на розтягуючі зусилля. Величина яка дорівнює модулю напруження σ , в гідромеханіці називається гідростатичним тиском в точці і позначається буквою P .

$$P = [\sigma] \quad (48)$$

Гідростатичний тиск в точці можна уявити наступним чином. Розглянемо в рідині яка знаходиться в стані спокою довільний об'єм W , обмежений поверхнею S ; вплив рідини яка знаходиться навколо виділеного об'єму, ми можемо замінити дією розподілених по поверхні S сил f_i , направлених по нормалі до цієї поверхні в кожній її точці (рис. 9). Проведемо січну площину $a - a$, яка ділить об'єм W на дві частини I і II, і відкинемо в думках одну із них, (наприклад, I).

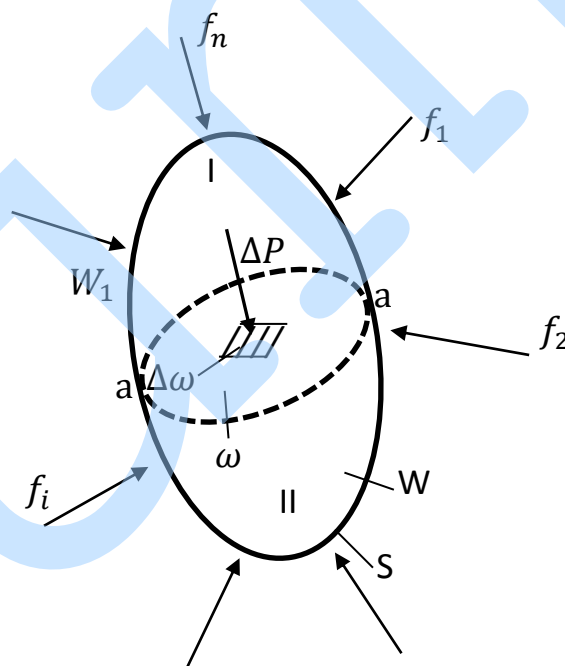


Рис. 9

Дію відкинutoї частини I на нижню частину II повинні замінити розподіленими по поверхні ω силами ΔP_i ; одна з цих сил ΔP діє на одиницю

поверхні $\Delta\omega$. Напруження стискання σ_c , які при цьому виникають, визначаються окремо, як ділення сили ΔP на площу $\Delta\omega$:

$$\sigma_c = P_{cP} = \Delta P / \Delta\omega \quad (49)$$

Значення цього напруження прийнято називати середнім гідростатичним тиском; ліміт відношення (48) при $\Delta\omega \rightarrow 0$ називається гідростатичним тиском в точці:

$$P = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega} \quad (50)$$

Розмірність тиску співпадає з розмірністю напруження, тобто:

$$[P] = [\sigma] = L^{-1}MT^{-2} \quad (51)$$

Гідростатичний тиск володіє двома властивостями.

Перша властивість. Сила гідростатичного тиску направлена по внутрішній нормалі до площадки, яка сприймає цей тиск. Ця властивість, є наслідком фізико-математичних властивостей рідин або газів, які знаходяться в рівновазі. Дійсно, якщо рідина або газ знаходяться в рівновазі, то в будь якій довільній точці дотичні напруження дорівнюють нулю і переміщення рідкої частинки вздовж площадки неможливе, так як в оберненому випадку рівновага порушиться. Те, що направлення дії сили гідростатичного тиску збігається з направленням внутрішньої нормалі ми можемо довести, беручи факти із властивості рідини або газу не чинити протидію зусиллям, що розтягують [3].

Друга властивість. Величина гідростатичного тиску в точці не залежить від орієнтації (кута нахилу) площадки.

Для доказу цієї властивості виділимо в рідині яка знаходиться в стані спокою елементарний об'єм у вигляді тетраедра (рис. 10).

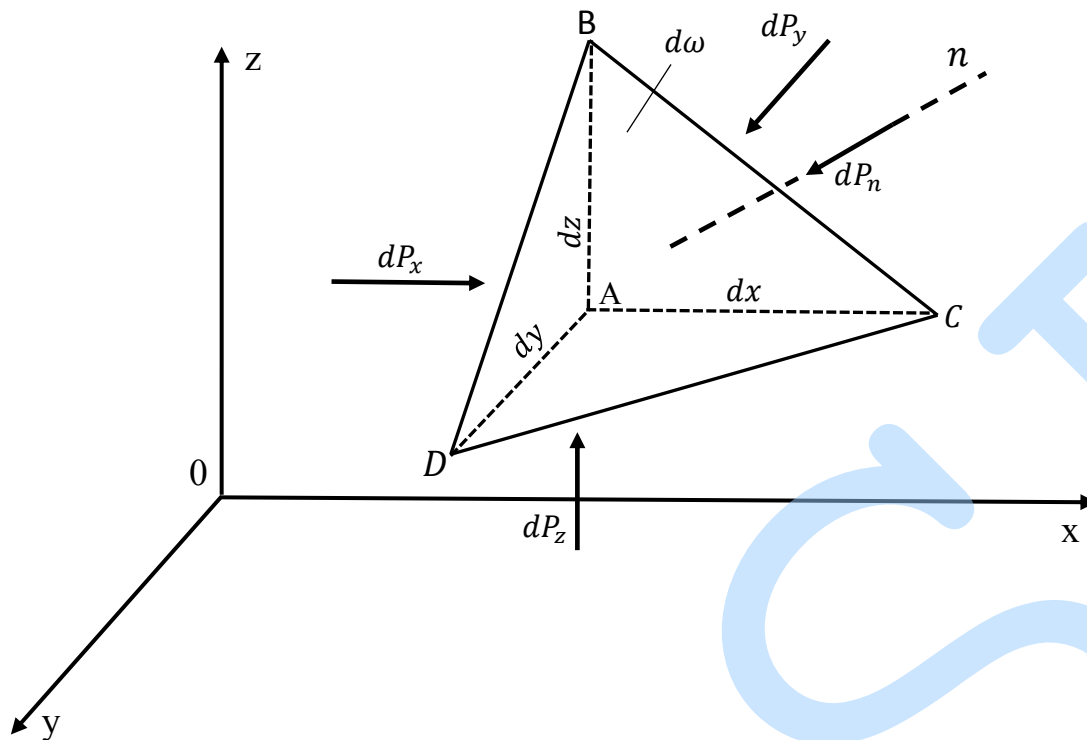


Рис. 10

Дію рідини, що знаходиться навколо тетраедра заміним дією поверхневих розподілених по його гранях сил тиску і масової сили dR , яку визначає маса тетраедра. Для об'єму, який ми розглядаємо запишемо умову рівноваги в виді трьох рівнянь проєкцій діючих сил і трьох рівнянь моментів:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0 \quad (52)$$

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0 \quad (53)$$

Остання умова (рівність нулю головного моменту) задовольняє тотожність, так як при стягуванні тетраедру в точку ($W \rightarrow 0$) рівнодіюча сила всіх зовнішніх сил (по відношенню до виділеного об'єму рідини) проходить через центр тяжіння цього об'єму.

Зіставимо рівняння проєкцій зовнішніх сил на вісь Ox . У відповідності з (рис. 10) можемо записати:

$$dP_x - dP_n \cos(\vec{n}, Ox) + dR \cos(d\vec{R}, Ox) = 0 \quad (54)$$

Де dP_x – сила гідростатичного тиску на грань ABD ; dP_n – сила гідростатичного тиску на грань BCD ; dR – елементарна масова сила, пропорційна масі тетраедра.

Визначимо кожену складову рівняння (54):

$$dP_x = P_x \frac{1}{2} dydz \quad (55)$$

Де P_x – середній гідростатичний тиск на грань ABD, площа якої рівна $\frac{1}{2}dydz$;

$$dP_n \cos(\vec{n}, Ox) = P_n d\omega \cos(\vec{n}, Ox) = P_n \frac{1}{2} dydx \quad (56)$$

Де $d\omega \cos(\vec{n}, Ox)$ проекція площадки $d\omega$ (трикутник BDC) на площину yOz ;

$$dR = jdm \quad (57)$$

Де $dm = \rho dx dy dz / 6$ – маса елементарного тетраедру, j – прискорення масової сили.

Проектуючи масову силу на координатні осі, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} dR \cos(\vec{dR}, Ox) &= \frac{1}{6} \rho dx dy dz X \\ dR \cos(\vec{dR}, Oy) &= \frac{1}{6} \rho dx dy dz Y \\ dR \cos(\vec{dR}, Oz) &= \frac{1}{6} \rho dx dy dz Z \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Де $X = j_x$, $Y = j_y$, $Z = j_z$ – відповідно проекції прискорення на осі координат.

Після підстановки (55), (56) і (58) до вихідного рівняння рівноваги (54) отримаємо:

$$\frac{1}{2} P_x dydz - \frac{1}{2} P_n dydz + \frac{1}{6} \rho dx dy dz X = 0 \quad (59)$$

або після скорочення на $\frac{1}{2} dydz$:

$$P_x - P_n + \frac{1}{3} \rho dx X = 0 \quad (60)$$

Нехтуючи величиною $\frac{1}{3} \rho dx X$ як нескінченно малою по зрівнянню з P_x і P_n , отримуємо $P_x = P_n$ і $P_z = P_n$ звідки виходить:

$$P_x = P_y = P_z = P_n \quad (61)$$

Рівність (61) показує, що гідростатичний тиск на різних гранях тетраедра постійний з точністю до нескінченно малої величини. При стягуванні тетраедра в точку, значення середнього гідростатичного тиску P_x , P_y , P_z , P_n ми можемо замінити гідростатичним тиском в точці. Отже, рівняння (61) показує, що гідростатичний тиск в точці однаковий для будь якого

направлення, тобто не залежить від орієнтації площадки яка сприймає цей тиск [3].

Положення елементарного тетраедра було вибране довільно, тому можна зробити висновок, що гідростатичний тиск є неперервною функцією координат простору [3].

$$P = f(x, y, z) \quad (62)$$

Графічна інтерпретація рівнянь рівноваги рідини наведена на рисунку 11.

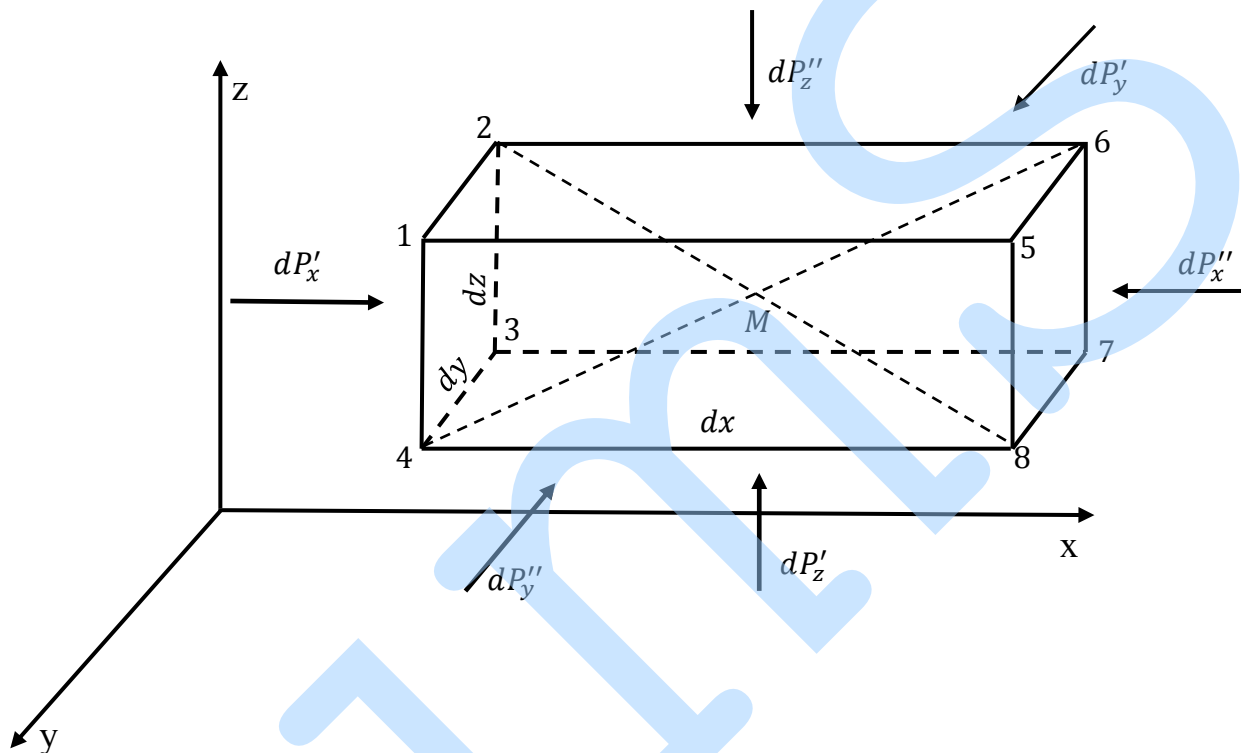


Рис. 11

1.7 Висновки до розділу 1

Напруження поверхневих сил в рідині яка знаходиться в стані спокою і в ідеальній рідині не залежить від орієнтації площини на якій розглядається напруження в даній точці і виражають тиск рідини в даній точці.

Наявність сил в'язкості в рідині яка рухається призводить до того, що гідродинамічний тиск в точці розглядається як середнє арифметичне трьох нормальних напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках.

2. Дослідження напруженого стану в точці рухомої рідини

2.1 Вихідні дані для проведення досліджень напруженого стану

Дослідження проводились в межах моделі ідеальної нестислої рідини для сталої течії. Слідуючи класичній гідромеханіці, напруження на площадках в точці нерухомої і рухомої ідеальної рідини не залежать від орієнтування площадки на якій вони діють і представляють із себе гідростатичний і гідродинамічний тиск відносно [1].

Частинка рідини, рухаючись в неоднорідному полі швидкості, деформується, мається на увазі змінює свою форму. Це може бути лише при різних зменшеннях напружень на площадках в точці рухомої рідини. Дане припущення не співпадає з наявним припущенням про рух «рідкої» частинки. Щоб розібратися з цією розбіжністю проведені дослідження напруженого стану в точці рухомої ідеальної рідини. Результати досліджень і складають зміст даної дипломної роботи.

2.2 Зміна кількості руху «рідкої» частинки, враховуючого переміщення маси за напрямками.

В неоднорідному полі вектори швидкості виділимо «рідку» частинку dx, dy, dz масою δm . Зміну кількості руху частинки уявимо у вигляді суми двох доданків. Зміну кількості руху, обумовленого поступальним переміщенням маси частинки.

Його записано у вигляді:

$$\frac{d\vec{q}_v}{dt} = \delta m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Де $\vec{v} = \vec{v}(t)$ – швидкість центру мас частинки.

Зміну кількості руху частинки, обумовленого переміщенням маси відносно її поступального переміщення. Цю зміну кількості руху представимо у вигляді:

$$\frac{\delta \vec{q}_m}{\delta t} = \frac{d\delta \tilde{m}}{\delta t} \vec{v} = \frac{d\delta \tilde{m}_x}{\delta t} v_x \vec{i} + \frac{d\delta \tilde{m}_y}{\delta t} v_y \vec{j} + \frac{d\delta \tilde{m}_z}{\delta t} v_z \vec{k} \quad (2.1)$$

Тут $\delta \tilde{m}$ – переносна маса;

$d\delta \tilde{m}$ – зміна переносної через частинку маси;

$d\delta \tilde{m}_x$, $d\delta \tilde{m}_y$, $d\delta \tilde{m}_z$ – зміна переносної маси по напрямках x , y , z відповідно.

По (2.1) швидкість зміни переносної маси представляє тензорну величину:

$$\frac{\delta \tilde{m}}{\delta t} = \begin{vmatrix} \frac{d\delta \tilde{m}_x}{\delta t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\delta \tilde{m}_y}{\delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\delta \tilde{m}_z}{\delta t} \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

Враховуючи (2.2), зміна кількості руху частинки (2.1) перепишеться у вигляді:

$$\frac{d\vec{q}_m}{dt} = \frac{d\delta \tilde{m}}{dt} \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{d\delta \tilde{m}_x}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\delta \tilde{m}_y}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\delta \tilde{m}_z}{dt} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Швидкість зміни переносної маси $\frac{d\delta \tilde{m}_x}{dt}$ визначається по полю швидкості.

Для неоднорідного поля швидкості, слідує [6] елементарна зміна швидкості в напрямку осі x дорівнює:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

Швидкість зміни переносної маси через фіксовану частину dx, dy, dz в напрямку осі x запишеться у вигляді:

$$\frac{d\delta\tilde{m}_x}{\delta t} = \rho \frac{dv_x}{dt} dydzdt = \rho \frac{dv_x}{dt} dydzdt \frac{dx}{dx} = \rho \frac{dv_x}{dt} dydzdt \frac{1}{v_x}$$

Так як $\delta m = \rho dx dy dz$ – маса елементарної частинки, то зміна кількості руху, обумовлена переносом маси в напрямку осі x прийме вигляд:

$$\frac{d\delta\tilde{m}_x}{\delta t} v_x = \delta m \frac{dv_x}{dt} = \delta m \left(\frac{\delta v_x}{\delta x} v_x + \frac{\delta v_x}{\delta y} v_y + \frac{\delta v_x}{\delta z} v_z \right) = \delta m (\vec{v}\nabla) v_x \quad (2.4)$$

Тут переносна маса по величині дорівнює масі частинки.

Проводячи подібні викладки в напрямках двох інших осей, запишемо

$$\frac{d\vec{q}_m}{dt} = \delta m \begin{vmatrix} \frac{\delta v_x}{\delta x} & \frac{\delta v_x}{\delta y} & \frac{\delta v_x}{\delta z} \\ \frac{\delta v_y}{\delta x} & \frac{\delta v_y}{\delta y} & \frac{\delta v_y}{\delta z} \\ \frac{\delta v_z}{\delta x} & \frac{\delta v_z}{\delta y} & \frac{\delta v_z}{\delta z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

Або у векторному вигляді:

$$\frac{d\vec{q}_m}{dt} = \delta m (\vec{v}\nabla) \vec{v} \quad (2.6)$$

Де $(\vec{v}\nabla) \vec{v}$ – конвективне прискорення.

Таким чином зміна кількості руху «рідкої» частинки, при її русі в неоднорідному полі швидкості, прийме вигляд:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d\vec{q}_v}{dt} + \frac{d\vec{q}_m}{dt} = \delta m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \delta m \frac{d\vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} = \delta m \left[\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\nabla) \vec{v} \right] \quad (2.7)$$

2.3 Розподіл напружень в точці рухомої рідини

В рухомій ідеальній рідині виділимо елементарний об'єм у вигляді паралелепіпеда $dx dy dz$. Згідно уточненому виразу (2.7), для зміни кількості руху «рідкої» частинки, для рідини, обмеженої об'ємом елементарного паралелепіпеда і проносимої через неї, запишемо [4,5]

$$\delta m \vec{F} + d\vec{P}_x \Delta S_x + d\vec{P}_y \Delta S_y + d\vec{P}_z \Delta S_z = \delta m \frac{d\vec{v}}{dt} + \delta \tilde{m} (\vec{v} \nabla) \vec{v} \quad (2.8)$$

Тут: $d\vec{P}_x$, $d\vec{P}_y$, $d\vec{P}_z$ – рівнодійні поверхневих сил на гранях паралелепіпеда перпендикулярних відповідним осям; \vec{F} – одинична масова сила; $\Delta S_x = dydz$, $\Delta S_y = dxdz$, $\Delta S_z = dxdy$ – площі відповідних граней паралелепіпеда; δm – маса рідини в об'ємі паралелепіпеда; $\delta \tilde{m}$ – маса рідини проносимо через паралелепіпед.

Другий доданок правої частини рівняння (2.8), враховуючи (2.1), (2.4), (2.6), перетворено слідуячим чином:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{m} (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= \frac{d\delta \tilde{m}_x}{dt} v_x \vec{i} + \frac{d\delta \tilde{m}_y}{dt} v_y \vec{j} + \frac{d\delta \tilde{m}_z}{dt} v_z \vec{k} \\ &= \rho \frac{dv_x}{dt} dydz dt v_x \vec{i} + \rho \frac{dv_y}{dt} dxdz dt v_y \vec{j} + \rho \frac{dv_z}{dt} dxdy dt v_z \vec{k} \\ &= \rho v_x dv_x \Delta S_x \vec{i} + \rho v_y dv_y \Delta S_y \vec{j} + \rho v_z dv_z \Delta S_z \vec{k} \\ &= d \frac{\rho v_x^2}{2} \Delta S_x \vec{i} + d \frac{\rho v_y^2}{2} \Delta S_y \vec{j} + d \frac{\rho v_z^2}{2} \Delta S_z \vec{k}. \end{aligned}$$

Враховуючи це рівняння (2.8) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} \delta m \vec{F} + d\vec{P}_x \Delta S_x + d\vec{P}_y \Delta S_y + d\vec{P}_z \Delta S_z \\ = \delta m \frac{d\vec{v}}{dt} + d \frac{\rho v_x^2}{2} \Delta S_x \vec{i} + d \frac{\rho v_y^2}{2} \Delta S_y \vec{j} + d \frac{\rho v_z^2}{2} \Delta S_z \vec{k} \end{aligned}$$

Проектуючи на вісі координат, отримаємо:

$$x: \quad \delta m F_x + \delta P_{xx} \Delta S_x = \delta m \frac{dv_x}{dt} + d \frac{\rho v_x^2}{2} \Delta S_x;$$

$$y: \quad \delta m F_y + \delta P_{yy} \Delta S_y = \delta m \frac{dv_y}{dt} + d \frac{\rho v_y^2}{2} \Delta S_y;$$

$$z: \quad \delta m F_z + \delta P_{zz} \Delta S_z = \delta m \frac{dv_z}{dt} + d \frac{\rho v_z^2}{2} \Delta S_z;$$

Звідси:

$$\frac{\delta m}{\Delta S_x} F_x - dP_{xx} \frac{\Delta S_x}{\Delta S_x} = \frac{\delta m}{\Delta S_x} \frac{dv_x}{dt} + d \frac{\rho v_x^2}{2} \frac{\Delta S_x}{\Delta S_x};$$

$$\frac{\delta m}{\Delta S_y} F_y - dP_{yy} \frac{\Delta S_y}{\Delta S_y} = \frac{\delta m}{\Delta S_y} \frac{dv_y}{dt} + d \frac{\rho v_y^2}{2} \frac{\Delta S_y}{\Delta S_y};$$

$$\frac{\delta m}{\Delta S_z} F_z - dP_{zz} \frac{\Delta S_z}{\Delta S_z} = \frac{\delta m}{\Delta S_z} \frac{dv_z}{dt} + d \frac{\rho v_z^2}{2} \frac{\Delta S_z}{\Delta S_z};$$

Враховуючи, що $\lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\Delta S_x} = 0$; $\lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\Delta S_y} = 0$; $\lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\Delta S_z} = 0$,

в граничному положенні, тобто при стисненні паралелепіпеда в точку, отримаємо:

$$-dP_{xx} = d \frac{\rho v_x^2}{2}; \quad -dP_{yy} = d \frac{\rho v_y^2}{2}; \quad -dP_{zz} = d \frac{\rho v_z^2}{2};$$

Інтегруючи отримаємо:

$$-P_{xx} = \frac{\rho v_x^2}{2} + C_x;$$

$$-P_{yy} = \frac{\rho v_y^2}{2} + C_y;$$

$$-P_{zz} = \frac{\rho v_z^2}{2} + C_z;$$

$$\text{Із } P_{xx} \big|_{v_x=0} = P_{xx}^{\text{ст}} \Rightarrow C_x = -P_{xx}^{\text{ст}};$$

$$P_{yy} \big|_{v_y=0} = P_{yy}^{\text{ст}} \Rightarrow C_y = -P_{yy}^{\text{ст}};$$

$$P_{zz} \big|_{v_z=0} = P_{zz}^{\text{ст}} \Rightarrow C_z = -P_{zz}^{\text{ст}};$$

В точці нерухомої рідини напруження не залежать від орієнтування площадки на якій вони діють [1]

$$P_{xx}^{\text{ст}} = P_{yy}^{\text{ст}} = P_{zz}^{\text{ст}} = -P.$$

(2.11)

Тут P – гідростатичний тиск.

В точці рухомої рідини, умові (2.11), де $v_n = 0$, підкорюються поперечні напруження, напруження перпендикулярні лінії току. По величині вони дорівнюють гідростатичній складовій тиску в точці $-P$.

Враховуючи (2.9),(2.10),(2.11) запишемо:

$$P_{xx} + \frac{\rho v_x^2}{2} = P_{yy} + \frac{\rho v_y^2}{2} = P_{zz} + \frac{\rho v_z^2}{2} = -p \quad (2.12)$$

Із (2.12) для довільної площадки з нормаллю \vec{i}

$$P_{ii} + \frac{\rho v_i^2}{2} = -p = \text{const} \quad (\text{в точці рухомої рідини}) \quad (2.13)$$

Таким чином, статична складова тиску P_{ii} , в точці рухомої рідини, залежить від орієнтування площадки на якій вона розглядається і підкорюється закону (2.13) згідно якому: **на будь якій площадці в точці рухомої рідини сума гідростатичного і швидкісного тиску є величина постійна.**

Геометрична трактовка розподілу тиску на площадках в точці рухомої рідини представлена на рис. 2.1.

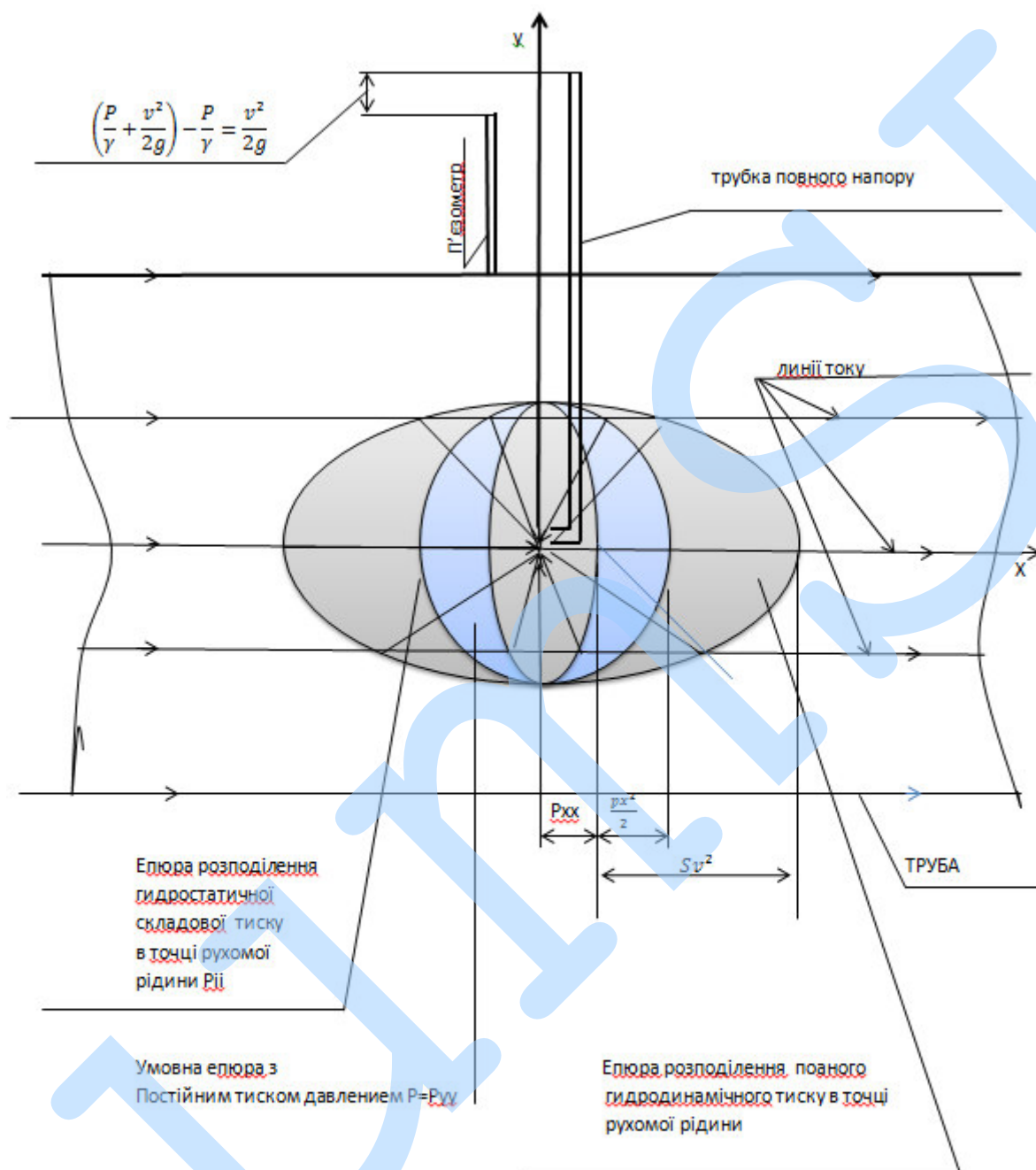


Рисунок 2.1 – Складові гідростатичного тиску в точці рухомої ідеальної рідини

2.4 Висновки до розділу 2

Напруженн в точці рухомої ідеальної, а значить і в'язкої рідини складаються із статичної і гідродинамічної складових.

Отримано закон, який визначає залежність розподілу статичного напруження в точці рухомої рідини від розташування площадки. Згідно закону, сума гідростатичного і швидкісного тиску є величиною постійною і дорівнює тиску на площадці паралельній лінії току, або дорівнює модулю поперечного потоку напруження. Гідродинамічний тиск повинен бути рівний $P_i^{\partial} = \rho v_i^2$, що узгоджується з дослідними даними.

3. Апробація отриманих результатів по напруженому стану в точці рухомої рідини.

3.1 Вихідні положення для розрахунку простого напірного трубопроводу

Апробація отриманих результатів проводилась на базі розрахунку простого напірного трубопроводу. Для розрахунку було уточнено рівняння Бернуллі. Його уточнена форма, для перетинів 1-1 і 2-2, плавно змінного потоку має вигляд:

$$z_1 + \frac{P_{n1}}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_{n2}}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (3.1)$$

Уточненим являється гідростатичний тиск P_1 і P_2 який входить в рівняння.

В рівнянні Бернуллі гідростатичний тиск не залежить від орієнтування площадки в точці рідини яка розглядається. Слідуючи рис. 2.1 напруження в точці рухомої рідини залежить від орієнтування площадки. Це приводить до уточнення рівняння (3.1) через зміну гідродинамічного тиску P_1 і P_2 поперечними потоку напруженнями P_{n1} і P_{n2} відповідно.

Згідно з результатами проведених досліджень, для розрахунку простого напірного трубопроводу, записане нове рівняння, яке включає в себе повздовжні напруження P_{l1} і P_{l2} . Воно подібне рівнянню бернуллі і має вигляд:

$$z_1 + \frac{P_{l1}}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{g} = z_2 + \frac{P_{l2}}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{g} + \sum h_{1-2} \quad (3.2)$$

3.2 Розрахунок простого напірного трубопроводу по рівнянню Бернуллі (3.1)

Простим називається трубопровід по якому рухається рідина без проміжних розгалужень трубопроводу. В запропонованій роботі суть розрахунку складається в побудові лінії повного напору $E - E$ і лінії п'езометричного напору $\Pi - \Pi$ для визначення гідродинамічних властивостей течії рідини по трубі для загального і запропонованого в роботі підходів.

Для 1 – 1 і 2 – 2 напишемо рівняння Бернуллі.

$$z_1 + \frac{P_{n1}}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_{n2}}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (3.3)$$

$$z_1 + \frac{P_{n1}}{\gamma} = h + \frac{P_M}{\gamma}; \quad H = \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (3.4)$$

Де $z_1 = h$, $P_{n1} = P_m$, $z_2 = 0$, $\frac{P_2}{\gamma} = 0$, $\sum h_{1-2}$ – сума втрат, $\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$ і $\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$ –

питома кінетична енергія частинки рідини.

Знайдемо витрати рідини за формулою:

$$Q^2 = \frac{\pi^2 g d^4 h}{8[1 + \zeta_{\text{вх}} + \lambda \frac{1}{d}]} \quad (3.5)$$

Рішення по знаходженню витрат Q проводим методом послідовних наближень. В першому наближенні приймемо квадратичну область опору, де

$$\zeta_{\text{вх}} = 0,5; \quad \lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25} = \left| \frac{d = 10 \text{ мм}}{\Delta = 0,05 \text{ мм}} \right| = 0,11 \left(\frac{0,05}{10}\right)^{0,25} = 0,029$$

З урахуванням цього маємо:

$$Q_I^2 = \frac{3,14^2 * 9,81 * 0,01^4 * 20}{8[1 + 0,5 + 0,029 * \frac{0,2}{0,01}]} = 1,16 * 10^{-6}$$

$$\text{Звідси } Q_I = \sqrt{Q_I^2} = 0,00108 \text{ м}^3/\text{с}$$

В другому наближенні:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 * 0,00108}{3,14 * 0,01^2} = 13,76 \text{ м/с}$$

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{13,76 * 0,01}{10^{-6}} = 137000$$

$$\text{Визначмо режим течії: } 500 \frac{d}{\Delta} = 500 \frac{0,01}{0,05} = 10^5$$

$Re > 500 \frac{d}{\Delta} \Rightarrow$ область квадратичного опору для якого ми правильно взяли коефіцієнти втрат у першому наближенні, а тому:

$$\zeta_{\text{вх}} = 0,5; \quad \lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25} = 0,029$$

Тоді ми маємо, що: $Q_I = 0,00108 \text{ м}^3/\text{с}$, $v = 13,76 \text{ м/с}$.

Тапер ми можемо знайти втрати на вході та по довжині.

$$h_{\text{вх}} = \zeta_{\text{вх}} \frac{v^2}{2g} = 0,5 \frac{13,76^2}{2 * 9,81} = 4,825$$

$$h_d = \lambda \frac{l v^2}{d 2g} = 0,029 * \frac{0,2}{0,01} * \frac{13,76^2}{2 * 9,81} = 5,597$$

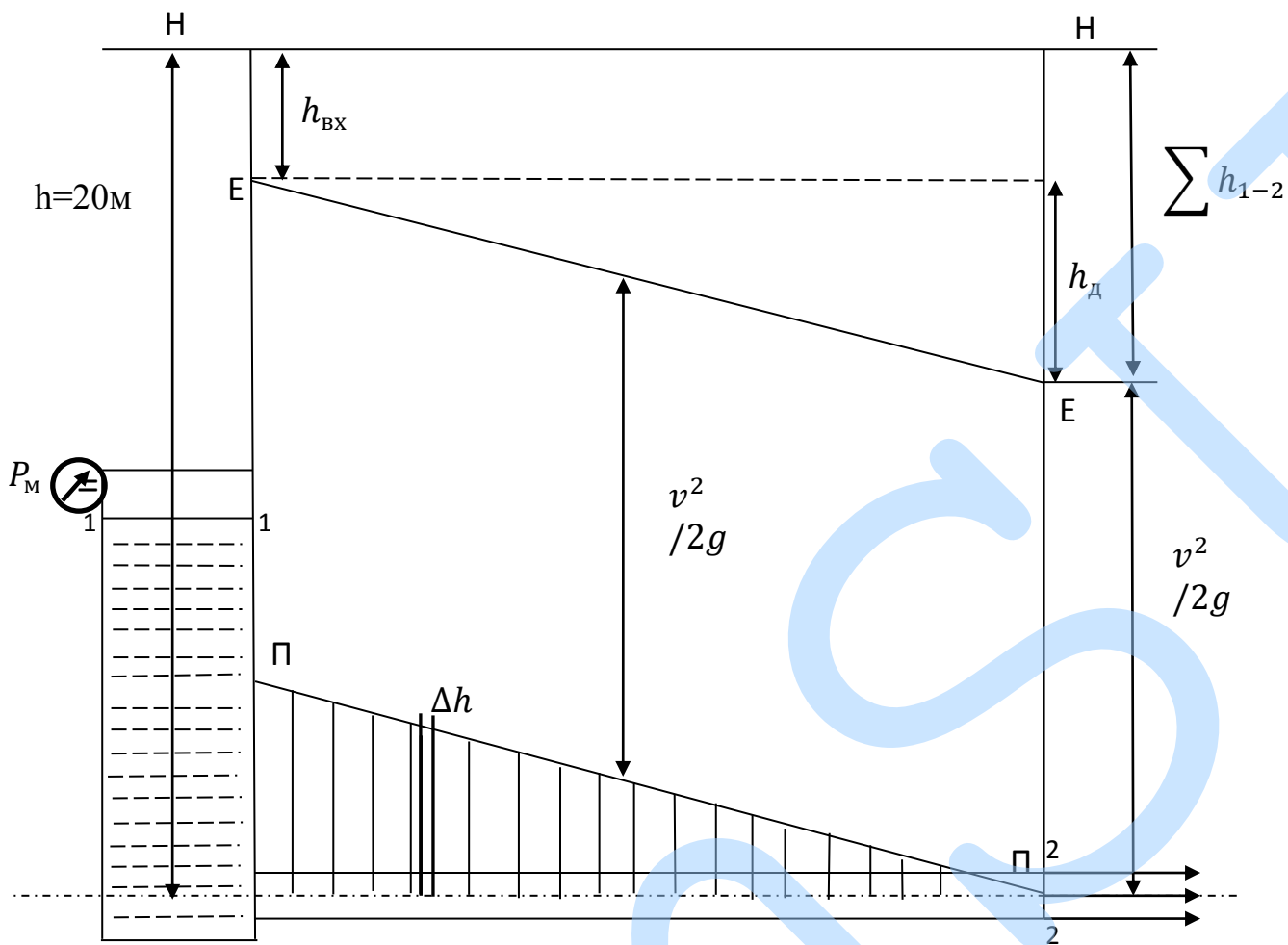


Рис. 3.1 - Геометрична інтерпретація отриманих результатів по класичному підходу

3.3 Розрахунок простого напірного трубопроводу по новому рівнянню

Для 1 – 1 і 2 – 2 напишемо нове рівняння (3.2)

$$z_1 + \frac{P_{l1}}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{g} = z_2 + \frac{P_{l2}}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{g} + \sum h_{1-2} \quad (3.6)$$

$$z_1 + \frac{P_{l1}}{\gamma} = h + \frac{P_M}{\gamma}; \quad H = \frac{v_2^2}{g} + \sum h_{1-2} \quad (3.7)$$

Де $z_1 = h$, $P_1 = P_M$, $z_2 = 0$, $\frac{P_2}{\gamma} = 0$, $\sum h_{1-2}$ – сума втрат, $\frac{\alpha_1 v_1^2}{g}$ і $\frac{\alpha_2 v_2^2}{g}$ – питома кінетична енергія частинки рідини.

Знайдемо витрати рідини за формулою:

$$Q^2 = \frac{\pi^2 g d^4 h}{8 \left[2 + \zeta_{\text{вх}} + \lambda \frac{l}{d} \right]} \quad (3.8)$$

Рішення по знаходженню витрат Q проводим методом послідовних наближень. В першому наближенні приймемо квадратичну область опору, де

$$\zeta_{\text{вх}} = 0,5; \quad \lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} = \left| \frac{d = 10 \text{ мм}}{\Delta = 0,05 \text{ мм}} \right| = 0,11 \left(\frac{0,05}{10} \right)^{0,25} = 0,029$$

З урахуванням цього маємо:

$$Q_2^2 = \frac{3,14^2 * 9,81 * 0,01^4 * 20}{8 \left[2 + 0,5 + 0,029 * \frac{0,2}{0,01} \right]} = 7,85 * 10^{-7}$$

$$\text{Звідси } Q_2 = \sqrt{Q_2^2} = 0,000886 \text{ м}^3/\text{с}$$

В другому наближенні:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 * 0,000886}{3,14 * 0,01^2} = 11,288 \text{ м/с}$$

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{11,288 * 0,01}{10^{-6}} = 112900$$

Визначмо режим течії:

$$500 \frac{d}{\Delta} = 500 \frac{0,01}{0,05} = 10^5$$

$Re > 500 \frac{d}{\Delta} \Rightarrow$ область квадратичного опору для якого ми правильно взяли коефіцієнти втрат у першому наближенні, а тому:

$$\zeta_{\text{вх}} = 0,5; \quad \lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} = 0,029$$

Тоді ми маємо, що: $Q_I = 0,000886 \text{ м}^3/\text{с}$, $v = 11,288 \text{ м/с}$.

Тапер ми можемо знайти втрати на вході та по довжині.

$$h_{\text{вх}} = \zeta_{\text{вх}} \frac{v^2}{g} = 0,5 \frac{11,288^2}{9,81} = 7,533$$

$$h_{\text{д}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{g} = 0,029 * \frac{0,2}{0,01} * \frac{11,288^2}{9,81} = 6,494$$

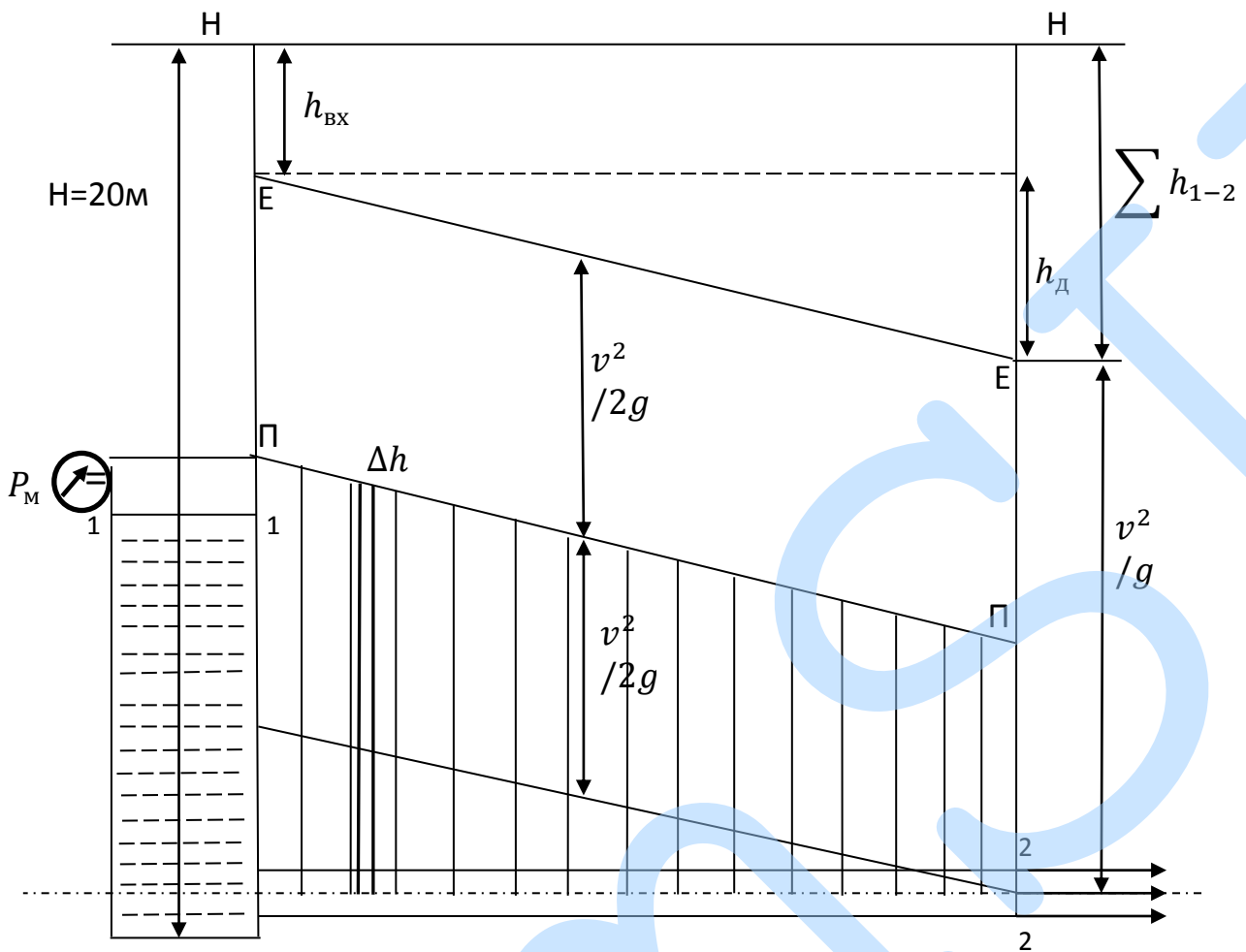


Рис. 3.2 - Геометрична інтерпретація отриманих результатів по запропонованому підходу

Записане нове рівняння (3.2) в співставленні з рівнянням Бернуллі перевірялося при проведенні гідравлічного розрахунку простого напірного трубопроводу. Схема гідравлічної установки (рис. 3.1 і рис. 3.2) включає в себе напірний резервуар в якому знаходиться рідина з надлишковим тиском і прямолінійну ділянку труби постійного перетину. Картина руху рідини по (3.1) і (3.2) наглядно представлена на рис. (3.1) і рис. (3.2) через розташування лінії п'езометричного напору П – П. Робота рівнянь (3.1) і (3.2) відслідковувалась по величині витрат рідини через напірний трубопровід. Результати досліджень наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Значення величин витрати рідини по 3.1 і 3.2

| $l, \text{ м}$ | 0,01 | 0,05 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 1,0 | 2,0 |
|-----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $Q_1, \text{ м}^3/\text{с}$ | 0,00126 | 0,00121 | 0,00116 | 0,00108 | 0,00091 | 0,00074 | 0,00058 |
| $Q_2, \text{ м}^3/\text{с}$ | 0,00098 | 0,00096 | 0,00093 | 0,00089 | 0,00078 | 0,00067 | 0,00054 |
| $\frac{Q_1}{Q_2}$ | 1,29 | 1,27 | 1,25 | 1,22 | 1,16 | 1,11 | 1,07 |

По результатам таблиці 3.1 залежність зміни витрат рідини через трубопровід в залежності від довжини трубопроводу по (3.1) і (3.2) представлена на рис. 3.3.

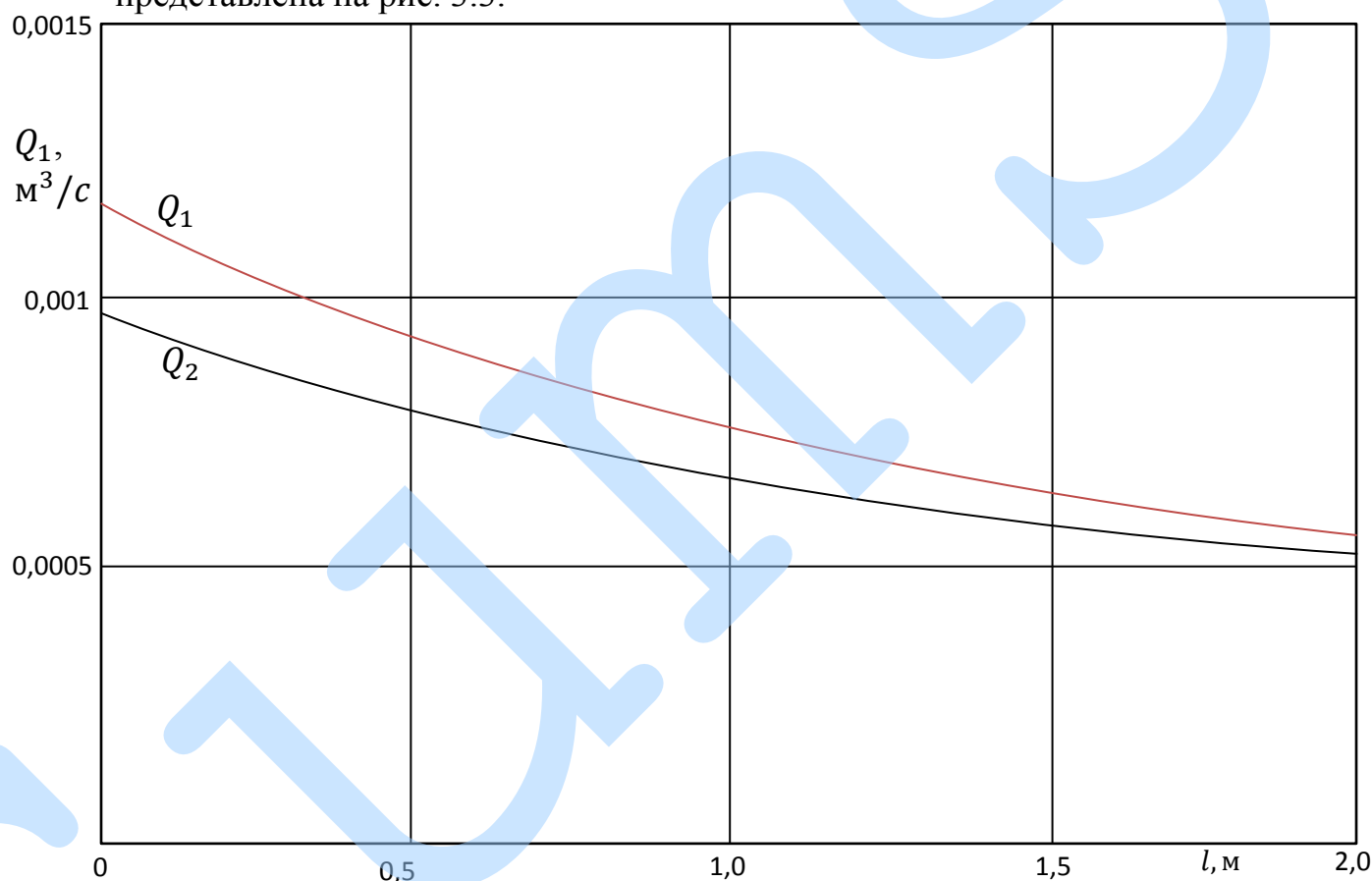


Рис. 3.3 – залежності зміни витрат рідини через трубопровід по (3.1) і (3.2).

По рисункам 3.1, 3.2 і 3.3 гідродинамічна картина руху рідини через досліджуваний напірний трубопровід, складається по рівнянню Бернуллі і по новому рівнянню суттєво відрізняється.

Епюра п'єзометричного тиску по (3.2) більш наповнена. Особливо вражає п'єзометричний тиск на виході, в перетині 2 – 2. Тут його величина дорівнює

швидкісному тиску $P_{n2} = \frac{\rho v^2}{2}$. По рівнянню Бернуллі в перетині 2 – 2 п'єзометричний тиск дорівнює нулю (рис. 3.1). По 3.2 внутрішня поверхня труби більш навантажена чим це слідує із рівняння (3.1).

По рівнянню (3.2) величина витрат рідини менше чим по рівнянню (3.1). Із (рис. 3.3) ця різниця по витратах нивелюється для довгого трубопроводу. До коротких трубопроводів до яких можна віднести циліндричний і торцевий дроселі витрати рідини значно менші ніж по рівнянню (3.1). Для допоміжних трактів гідромашин як по навантаженню на поверхні стінок дроселів так і по витратах через них, особливо для розвантажувальних пристроїв, це складає вагомий внесок як в забезпеченні їх надійності так і зменшенню гідравлічних втрат.

3.4. Висновки по розподілу 3

Проведені дослідження напруженого стану в точці рухомої рідини привели до отримання нового рівняння в замість рівнянню Бернуллі для розрахунку гідравлічних проточних частин, особливо допоміжних частин гідравлічних машин.

Показано, що розрахунки по новому рівнянню по зрівнянню з рівнянням Бернуллі дають значно менші витрати і значно більші величини тиску яким навантажені внутрішні поверхні стінок проточних частин.

Отриманий результат має суттєве практичне значення при розрахунку циліндричного і торцевого дроселів в гідромашинах.

ВИСНОВКИ

1. Дослідження літературних джерел по нормальній складовій напружень поверхневих сил в точці рухомої рідини вказує на те, що вони не залежать від орієнтації площадки і складають гідродинамічний тиск.

2. Отримана залежність розподілу гідростатичної складової напружень в точці рухомої рідини. Показано, що дана залежність підпорядковується закону згідно якому на будь-якій площадці в точці рухомої рідини сума гідростатичного і швидкісного тиску є величина постійна. Проведена геометрична трактовка розподілу тиску на площадках в точці рухомої рідини.

3. Урахування розподілу гідростатичної складової напружень в точці рухомої рідини дозволили уточнити рівняння Бернуллі і записати нове рівняння. Показано, що гідравлічний розрахунок напірних трубопроводів повинен здійснюватись по отриманому новому рівнянню.

4. Виконана апробація отриманих результатів на базі розрахунку простого напірного трубопроводу. Показано, що врахування розподілу напружень в точці рухомої рідини призводить до зменшення витрат рідини через трубопровід і збільшення тиску на стінки внутрішньої поверхні трубопроводу.

Перелік посилань

1. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика: учебник для вузов
М: Машыгостроение, 1978. – 463 с. 57-64
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М: Наука, 1978. – 847 с. 74-79.
3. Альтшуль А. Д. и др. Гидравлика и аэродинамика: учебник для вузов.
Альтшуль А. Д., Животовский Л. С., Иванов Л. П. – М: Стройиздат, 1987 – 414 с. 31-34.
4. Калиниченко П. М., Козлов Я. Р. Напряжения в движущейся идеальной жижкости // Материалы науч. – техн. конф. преподавателей, сотрудников и студентов: - Сумы, СумГУ, 2019.
5. Калініченко П. М., Міщенко С. О., Властивості напружень в рухомій рідині // сучасні технології в промисловому виробництві: матеріали VII всеукраїнської наук. – техн. конференції. Суми: Сум ДУ 2020 – с.142.
6. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М. : Наука, 1951. – с. 426