

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра наноелектроніки та модифікації поверхні

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

зі спеціальності 153 – «Мікро- та наносистемна техніка»

на тему:

«Аналіз стійкості фазової кінетики процесу розм'якшення поверхні льоду під час тертя»

Реброва Ксенія Сергіївна

Завідувач кафедрою

_____ проф. О.Д.Погребняк

Науковий керівник

_____ доц. О.В. Ющенко

« ___ » _____ 2020 р.

« ___ » _____ 2020 р.

Суми 2020

РЕФЕРАТ

Зміст містить 60 сторінки, 40 літературних джерел, 7 таблиці, 10 рисунків.

Робота складається: з вступу, аналітичного методу знаходження фазової площини і аналізу кінетики системи [1-9], з теоретичного огляду процесу розм'якшення льоду для другого роду та першого роду, техніки безпеки при роботі з персональним комп'ютером та охорони праці, висновків, списку використаних джерел і додатків.

В даному досліді був описаний процес отримання мастила яке виступає у ролі надтонкого розм'якшеного поверхневого шару льоду між двома твердими і гладкими поверхнями, що труться. Танення льоду спостерігається оскільки виникає спонтанна деформація зсуву [10] через зовнішнє надкритичне нагрівання. Використовуємо рівняння Кельвіна – Фойга у комбінації з рівнянням типу Ландау – Халатнікова які дозволяють описати в'язко - пружне середовище [11] та релаксацію для теплопровідності. Дані вирази дозволяють вивчити поведінку процесів під час плавлення льоду. Одним із можливих способів подальших досліджень є метод фазової площини який був обраний в даній роботі для аналізу станів системи, що можуть мати різні типи стійкості.

Ключові слова: НАПРУЖЕННЯ, МОДУЛЬ ЗСУВУ, ПЛАСТИЧНІСТЬ, ДЕФОРМАЦІЯ, ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1 Метод знаходження фазової площини і її аналіз	7
1.1 Властивості рішення автономної системи.....	7
1.2 Стійкість стаціонарного стану	10
1.3 Фазові траєкторії на площині.....	11
1.3.1 Власні параметри λ_1 і λ_2 дійсні і мають однаковий знак. λ єдине дійсне значення	14
1.3.2 Власні параметри λ_1 і λ_2 дійсні і мають різний знак	16
1.3.3 Власні параметри λ_1 і λ_2 комплексно – спряженні	17
РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ПЛАВЛЕННЯ ЛЬОДУ	20
2.1 Математична модель.....	21
2.2 Масштабування основних параметрів системи другого роду.....	23
2.3 Стійкі стани системи другого роду	25
2.4 Показники Ляпунова системи другого роду	26
2.5 Фазові портрети системи другого роду	33
РОЗДІЛ 3. РОЗДІЛ 3 МОДЕЛЬ ЖОРСТКОГО РЕЖИМУ САМООРГАНІЗАЦІЇ.....	36
3.1. Масштабування основних параметрів системи першого роду.....	36
3.2. Стійкі стани системи першого роду.....	37
3.3. Показники Ляпунова системи першого роду	40
РОЗДІЛ 4. ТЕХНІКА БЕЗПЕКИ ТА ОХОРОНИ П.РАЦІ	44
4.1 Техніка безпеки при роботі з ПК.....	44
4.2 Пожежна безпека та охорона праці.....	45
ВИСНОВКИ.....	47
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	48

ДОДАТОК А.....	51
ДОДАТОК В.....	57
ДОДАТОК С.....	58
ДОДАТОК D.....	58
ДОДАТОК Е.....	60
ДОДАТОК F.....	61

ВСТУП

Найрозповсюдженішим ресурсом на землі є вода. Вона з легкістю переходить з одного стану в інший, але звернемо увагу на лід. Він має широке застосування [12] як у природі так і в повсякденному житті людини. Вченні вже не перший рік цікавляться його властивостями і звертають увагу на процес межового тертя [13]. Цей процес розглядають в нанорозмірних трибологічних [14] системах де основні процеси такі як: тиск плавлення, поверхневий тиск, повзучість, руйнування, адгезія, фрикційне нагрівання виникають під час тертя об'єктів які контактують один з одним [15-19].

Вважається [11,20-24], що плівка яка створюється на приповерхневому шарі льоду завдяки фрикційному нагріву виступає у ролі мастила тому зменшується коефіцієнт тертя і збільшує зносостійкість. Зауважимо, що у порівнянні з стандартними макроскопічними вузлами тертя нанорозмірна система має незвичайні властивості. Тому при порівнянні об'ємних мастил з ультротонкими слідуює, що вони матимуть різну температуру плавлення і тверднення, а завдяки перебуванню шару мастила у двох структурних станах одночасно [24-26] швидкість тертя від сили тертя матиме немонотонну залежність. Це можна спостерігати в момент переривчастого режиму руху який має велику кількість особливостей. Зазвичай такий режим представляє систему з сухим тертям [27].

Однак наявність багатьох робіт [28] як теоретичних так і практичних не дає змогу до кінця проаналізувати переривчастий режим. Оскільки у реальному житті його складно проводити застосовують комп'ютерне моделювання для аналізу. Експеримент [29] був направлений на залежність впливу температури при збільшенні швидкості ковзання.

Оскільки аналізують нанорозмірну систему то слід пам'ятати, що в цьому випадку на неї впливають навіть невеликі зміни зовнішніх та внутрішніх параметрах.

В даній роботі завдяки системі з трьох диференціальних рівнянь які описують напруження, деформацію і температуру розм'якшеного шару можна представити модель межового тертя. В якій мастило має нестандартну поведінку під час руху повзунків, що труться [30].

РОЗДІЛ 1 Метод знаходження фазової площини і її аналіз

1.1 Властивості рішення автономної системи

Часто зустрічається ситуація, коли у різних напрямках науки треба застосувати диференціальні рівняння для аналізу поведінки моделі процесу. На практиці диференціальні рівняння які описують реальні ситуації з складними або їх взагалі не можливо розв'язати тому для отримання відповіді використовують різні точні та наближені методи. Один з таких методів – це метод фазової площини та побудова фазових портретів.

Система, яка складається зі звичайних диференціальних рівнянь що не має явно вираженої компоненти часу, називають автономна чи консервативна. Така система описує закон руху точки який не змінюється з часом. Автономна система [1-3] типу (1.1) показує векторне поле на фазовій площині

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2 \dots x_n) \end{cases} \quad (1.1)$$

В ній $f_1, f_2, x_1 \dots x_n$ є заданими та реальними функціями. Наведене вище рівняння можна для зручності переписати у векторній формі:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}) \quad (1.2)$$

Нехай $f_1(x_1, x_2 \dots x_n), f_2(x_1, x_2 \dots x_n)$ – неперервні функції що розташовані в межах певної області Q евклідової площини R^n , при цьому в заданій області неперервні похідні мають існувати не нижче першого порядку. Зауважимо, область Q може бути задана як необмеженою так і навпаки, це залежить від змінних $x_1, x_2 \dots x_n$, якщо вони володіють фізичним змістом [2]. Всі ці умови зводяться до теореми Коші – Ковалевської [1, 4], де задача Коші полягає у тому, що область $Q \subset R^n$ при цьому для будь якої точки $x_0 \in Q$ і для будь якого числа t_0 існує лише один розв'язок системи (1.1), який би задовольняв умові $\bar{x}_0 = \bar{\varphi}(t_0)$:

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(t) \quad (1.3)$$

При наявності попередніх умов і вирішенні $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ системи (1.1) отримаємо інтегральну криву у $(n+1)$ – мірному просторі змінних $t, x_1, x_2 \dots x_n$ по якій рухається точка $\bar{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)$, з певною векторною фазовою швидкістю $f(\bar{x})$ і напрямком її руху в сторону зростання параметру часу (t) . Ця крива має назву фазова траєкторія яка знаходиться в фазовому просторі R^n .

$$\bar{x} = \bar{\psi}(t) \quad (1.4)$$

Якщо систему (1.1) розглядати з точки зору розв'язків (1.3) та (1.4), то фазові траєкторії які відповідають (1.3-1.4) будуть або співпадати у площині R^n або не перетинатися у ній. Зробимо припущення, що фазові траєкторії мають спільну точку (1.5).

$$\bar{\varphi}(t_1) = \bar{\psi}(t_2) \quad (1.5)$$

Додаючи умову: $c = t_1 - t_2$ і $\bar{\gamma}(t) = \bar{\varphi}(t + c)$. Знаючи властивості автономної системи можна зробити висновок, що її розв'язком виступає $\bar{\gamma}(t)$. Тоді з (1.5) слідує рівність:

$$\bar{\gamma}(t) = \bar{\varphi}(t_2 + c) = \bar{\varphi}(t_1) = \bar{\psi}(t_2)$$

Провівши її аналіз бачимо, що $\bar{\gamma}(t)$ і $\bar{\psi}(t)$ в момент часу t_2 мають однакові початкові значення і через теорему існування вони співпадають:

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\gamma}(t) = \bar{\varphi}(t + c)$$

Звернемо також увагу, що кожна точка може бути початковою умовою, тому вся фазова площина заповнена різними фазовими траєкторіями які не перетинаються. Це впливає з якісної теорії динамічних систем [5] яка вивчає розбиття області Q на траєкторії і встановлення їх варіантів поведінки.

Нехай маємо деяку точку $\bar{a} \in Q \subset R^n$ для якої стан рівноваги визначається за умови, коли всі похідні за часом дорівнюють нулю, тоді фазова швидкість розраховується як:

$$f(\bar{a}) = 0 \quad (1.6)$$

Через особливу точку (1.6) векторного поля [1], вектор функції набуває вигляду:

$$\bar{x}(t) \equiv \bar{a} \quad (1.7)$$

Для перевірки підставимо (1.7) в (1.1) і отримаємо:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = f(\bar{a}) = 0 \quad (1.8)$$

Також можлива і зворотна умова, якщо (1.7) – рішення, то відповідно отримаємо (1.6) звідси слідує рівність:

$$f(\bar{a}) = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} = 0 \quad (1.9)$$

Проаналізувавши (1.8 - 1.9) можна зробити висновок, що (1.7) – це стан рівноваги або точка спокою системи (1.1). Точка спокою \bar{a} є цілою траєкторією. Якщо інші фазові траєкторії не мають перетину між собою то вони не входять у стан рівноваги, але наближаються до нього.

Характерні особливості фазових траєкторій (1.1):

- 1) Положення рівноваги – це точка, фіксоване значення і задовольняє умові (1.6) [4].
- 2) Замкнута гладка крива – цикл. Якщо (1.3) визначає замкнуту гладку криву у фазовому просторі, то такий розв'язок є періодичним і має вигляд [4,5]

$$\bar{\varphi}(t + T) = \bar{\varphi}(t), T > 0$$

- 3) Гладка крива без само-перетинів.

Крива буде гладкою при умові, якщо в кожній її точці вона матиме ненульовий дотичний вектор. Тобто в рівнянні (1.1) фазова траєкторіє відрізняється від положення рівноваги і задається (1.3), то у будь якій точці $\bar{x}_0 = \bar{\varphi}(t_0)$: має дотичний вектор $\bar{\varphi}(t_0) := f(\bar{\varphi}(t_0)) \neq 0$.

1.2 Стійкість стаціонарного стану

В динаміці багатомірних систем стани рівноваги [6] грають важливу роль, оскільки вони описують стаціонарні стани реальних систем. Але стійкість [7] системи – найважливіша властивість стану рівноваги.

Якщо проводити спостереження які показують зникне або ні наведена точка при невеликому відхиленні від стаціонарного стану можна зробити висновок чи буде особлива точка мати стійкий або нестійкий стаціонарний стан. Точка яку розглядають знаходиться в одній із особливих точок системи (1.1) в якій за визначенням $\frac{dx_1}{dt} = 0 \dots \frac{dx_n}{dt} = 0$. Можемо також записати визначення через формули і показники ε і δ .

Нехай в нашій системі (1.1) стан рівноваги $x = x^*$ буде стійким при умові, що для будь якого $\varepsilon > 0$ можна вказати $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з нерівності (1.10) виходить (1.11) при $t \geq t_0$.

$$\|x^* - x(t_0)\| < \delta \quad (1.10)$$

$$\|x^* - x(t)\| < \varepsilon \quad (1.11)$$

де δ – число яке обирається з умови $\delta \leq \varepsilon$; ε – число яке задає область допустимих збурень.

Якщо δ при заданих умовах неможливо знайти, то стан рівноваги є нестійким.

Маємо ще одне визначення, тільки цього разу стан рівноваги $x = x^*$ системи (1.1) буде асимптотично стійким, за умови якщо він стійкий за Ляпуновим [4-7] тоді з системи (1.1) для всіх рішень $x = x(t)$ які задовольняють умову (1.10), виконується рівність:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

Оскільки асимптотична стійкість стану рівноваги залежить від початкових збурень то вона буває трьох видів:

1. Стійкість в малому – коли визначення виконується при початкових умовах із скільки завгодно малої області стану рівноваги.
2. Стійкість у більшому – коли визначення виконується при початкових умовах із деякої обмеженої області.
3. Стійкість у цілому – коли визначення виконується при будь яких початкових умовах.

Існує ситуація, коли системи мають одночасно декілька станів рівноваги, вона має назву глобальна асимптотична стійкість [5] – кожна її траєкторія прямує до стану рівноваги. В тому випадку коли при малій зміні виду рівнянь характер систем (грубі системи) не змінюється, її поведінку у області стаціонарного стану можливо дослідити якщо розглядати спрощену лінійну систему[8].

1.3 Фазові траєкторії на площині

Для спрощення побудови фазового портрету і його аналізу, розглянемо систему лише з двох автономних диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (1.12)$$

Для подальшого їх розв'язку використовуємо перший метод Ляпунова, який полягає в лінійності функції $f_1(x, y)$ та $f_2(x, y)$ за умови $x(0) = 0$ та $y(0) = 0$.

При розкладанні даних функцій в ряд у точці $(0,0)$, отримаємо систему виду (1.13):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)y + R(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)y + E(x, y) \end{cases} \quad (1.13)$$

Де $R(x, y)$ і $E(x, y)$ – це частини функцій після розкладу в ряд якими нехтуємо оскільки для розв’язку поставленої задачі вони є недостатньо важливими і будуть прямувати до нуля за умови $x \rightarrow 0$ та $y \rightarrow 0$.

Якщо прибрати із системи (1.13) частини які більші першого порядку то отримуємо лінійну систему з a, b, c, q – константами тобто постійними коефіцієнти в декартових координатах (x, y) на фазовій площині.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + qy \end{cases} \quad (1.14)$$

Система рівнянь (1.14) має назву системи першого наближення для нелінійної системи (1.12) [9].

Далі отримуємо матрицю з частинних похідних (1.2.3):

$$\det D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Так як властивості і вид розв’язку системи (1.14) знаходиться завдяки власним числам матриці, то її загальний розв’язок буде у вигляді $x = Ae^{\lambda t}$ та $y = Be^{\lambda t}$:

$$\begin{cases} \lambda Ae^{\lambda t} = aAe^{\lambda t} + bBe^{\lambda t} \\ \lambda Be^{\lambda t} = cAe^{\lambda t} + qBe^{\lambda t} \end{cases}$$

А при скороченні на $e^{\lambda t}$ одержуємо рівняння у зручній алгебраїчній формі:

$$\begin{cases} \lambda A = aA + bB \\ \lambda B = cA + qB \end{cases} \quad (1.16)$$

Розглядаючи алгебраїчну систему (1.16) користуємося властивістю визначника яка вказує, що для заданої системи існує ненульовий розв’язок у випадку коли визначник дорівнює нулю. При розкритті визначника одержимо характеристичне рівняння системи (1.17):

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & q - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + q)\lambda + (aq - bc) = 0 \quad (1.17)$$

Значення $\lambda_{1,2}$ – це корені рівняння (1.17) вони можуть мати різний характер. Вони дозволяють проводити аналіз системи, поведінки фазових траєкторій системи (1.14). Вони впливають із розв'язку (1.17):

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + q}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + q)^2 - 4(aq - bc)}{4}}$$

Нехай, що обидва корені рівняння (1.17) є дійсними, та відповідають умові $\lambda_1 \neq \lambda_2$, і $\lambda_{1,2} \neq 0$. Виконуючі ці умови можемо записати систему (1.14) у вигляді лінійної комбінації змінних з показниками $\lambda_{1,2}$ при $t \in (-\infty, +\infty)$:

$$\begin{cases} x = c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} \\ y = c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (1.18)$$

Системи алгебраїчних рівнянь (1.16) завдяки взаємно - однозначному перетворенню координат, вирази (1.18) будуть мати класичний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1 \xi_1 \\ \frac{d\xi_2}{dt} = \lambda_2 \xi_2 \end{cases} \quad (1.19)$$

Її називають нормальною для грубих станів рівноваги. Де введені нові координати фазової площини:

$$\xi_1 = \alpha x + \beta y \quad \xi_2 = \gamma x + \delta y \quad (1.20)$$

Система (1.19) дозволяє спростити задачу аналізу фазової площини на відміну від системи (1.14).

Так як змінні рівняння (1.17) – дійсні, то можливо такі випадки:

- 1) Корені λ_1 і λ_2 – дійсні;
- 2) Корені λ_1 і λ_2 – комплексно – спряженні;
- 3) Корені $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ – єдине дійсне значення.

Завдяки дійсним змінним ми переходимо із фазової площини з координатами x та y у фазову площину, яка тепер має координати ξ_1 і ξ_2 . Роздивимося особливості кривих при різних параметрах λ_1 і λ_2 на фазовій площині ξ_1 і ξ_2 .

1.3.1 Власні параметри λ_1 і λ_2 дійсні і мають однаковий знак. λ єдине дійсне значення

Оскільки був зроблений перехід між площинами то з'явилася можливість поділити друге рівняння системи (1.19) на перше, виходячи з цього:

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\xi_2 \lambda_2}{\xi_1 \lambda_1}$$

Після інтегрування одержимо фазову траєкторію у явному вигляді:

$$\xi_2 = c |\xi_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Аналізуючи рівняння можемо сказати що $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ оскільки дані показники є дійсними і мають однаковий знак. Ця умова вказує нам, на те що фазові траєкторії будуть параболічного вигляду на фазовій площині. Щоб зрозуміти в якому напрямку рухаються дані криві, з'ясуємо який знак мають наші показники. Оскільки корені мають однаковий знак то вони можуть бути двох видів як позитивні $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ так і негативні $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

У випадку із негативними $\lambda_1 \lambda_2$ при підстановці їх у рівняння (1.20) побачимо, що $|\xi_1|$ і $|\xi_2|$ зменшуються за часом, а точка наближається до початку координат, але не досягне його за умови теореми Коші. Тому можемо стверджувати що дана область має вигляд стійкий вузол (рис.1.1 а). За умови позитивних значень $\lambda_1 \lambda_2$ інтегральні криві руху мають напрямок від початку координат тому він збільшується. Цей випадок має назву нестійкий вузол (рис.1.1 б).

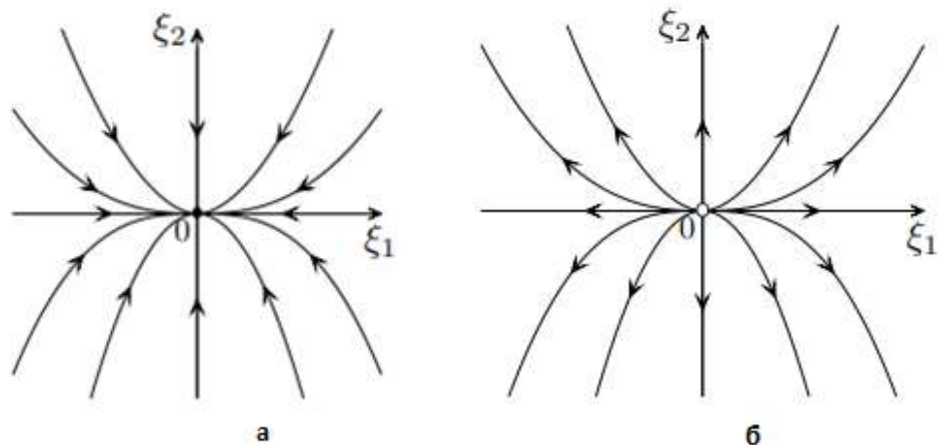


Рис. 1.1 (а) – стійкий вузол $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, (б) – нестійкий вузол $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

Стрілки які вказані на площинах показують напрямок руху точки з плином часу.

Якщо розглядати поведінку інтегральних кривих на фазовій площині з координатами x, y то вони будуть мати такий самий характер, проте варто зазначити, що у зв'язку із залежністю кута нахилу від коефіцієнтів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ дотичні до інтегральних кривих не співпадають із осями координат.

Розглянемо відмінну ситуацію, коли корені $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ вона має назву дикритичний вузол. При цьому його розділяють на два випадки коли $\lambda > 0$ вироджений нестійкий вузол (рис.1.2 а) в ньому траєкторії прямують від початку координат і $\lambda < 0$ вироджений стійкий вузол (рис.1.2 б) в ньому траєкторії прямують до початку. У цих випадках фазові траєкторії мають вигляд променів.

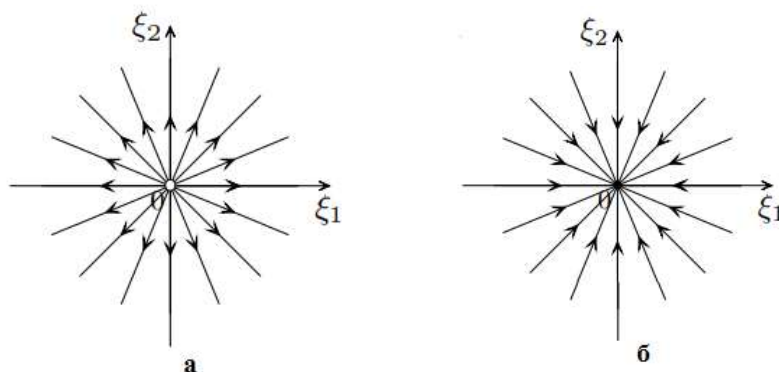


Рис 1.2 (а) - $\lambda > 0$ вироджений нестійкий вузол; (б) - $\lambda < 0$ вироджений стійкий вузол

1.3.2 Власні параметри λ_1 і λ_2 дійсні і мають різний знак

Переходячи від площини з одними координатами до іншої та повторюючи алгоритм застосований для коренів λ_1 і λ_2 які мають однаковий знак розділимо друге диференціальне рівняння на перше з (1.19) та отримаємо:

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = -\frac{\lambda_2 \xi_2}{\lambda_1 \xi_1}$$

Зауважимо, цього разу що $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ мають від'ємне значення оскільки λ_1, λ_2 дійсні і мають різний знак. В процесі інтегрування отримуємо рівняння:

$$\xi_2 = c|\xi_1|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Оскільки $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ від'ємне то можна стверджувати що фазові траєкторії мають схожість із гіперболічними функціями при цьому осі координат виступають у ролі асимптот для отриманих кривих. Кожна із осей координат має три основні фазові траєкторії: перша – це стан рівноваги; друга та третя – рух до стану рівноваги, всі інші траєкторії не досягають початку координат. Такий вид має назву сідло. Якщо аналізувати характер руху точки з плином часу то він може бути різний, це залежить від коренів λ_1 та λ_2 , які можуть бути двох видів: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ чи $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. За умови $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ точка буде мати напрямок руху до початку координат відносно координатної прямої ξ_1 та від початку координат відносно ξ_2 (рис.1.3 а). За умови зворотних значень $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, рух точки буде вздовж осі ξ_1 , від початку координат, а відносно осі ξ_2 до початку (рис.1.3 б). Зауважимо, що осі координат виступають у ролі інтегральними кривими які перетинаються на початку координат. Аналізуючи попередньо наведені дані, а також (рис 1.3 а, б) бачимо, що точка буде все одно віддалятися від стану рівноваги у зв'язку з цим сідло є нестійким типом фазової точки.

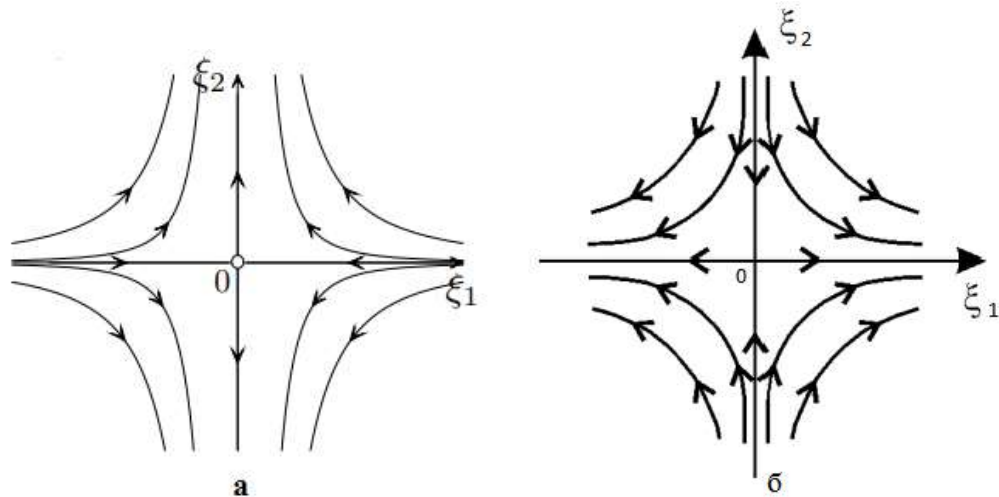


Рис.1.3 (а) – Сідло з коренями $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$; (б) – Сідло з коренями $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$.

Якщо розглядати поведінку на площині з координатами x, y то картина буде мати такий самий якісний характер.

1.3.3 Власні параметри λ_1 і λ_2 комплексно – спряженні

В даному випадку з'являються комплексні значення оскільки матриця D (1.15) є дійсною. Тому λ_1, λ_2 є комплексно – спряженими в яких α і β є дійсними коефіцієнтами і мають вид:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$$

$$\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1$$

Введемо додаткове лінійне перетворення яке дозволяє спростити рішення задачі. Воно буде відбуватись від даних значеннях x, y до спряжених ξ_1 і ξ_2 . І в цьому випадку значення g і w – дійсні.

$$\xi_1 = g + iw$$

$$\xi_2 = g - iw$$

Зауважимо, що за даних умов дійсні значення однакові, а уявні різні тільки у знаку. Далі підставляючи отримані вирази в (1.19) та проводимо диференціювання:

$$\frac{dg}{dt} = \alpha_1 g - \beta_1 w \quad (1.21)$$

$$\frac{dw}{dt} = \alpha_1 w + \beta_1 g \quad (1.22)$$

Поділимо друге рівняння на перше та проведемо підстановку, яка дозволяє перейти до полярних координат. Отриманий результат наведений нижче:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\alpha_1}{\beta_1 \rho} \quad (1.23)$$

Існує два випадки: коли мають тільки уявну частину $\lambda_1 \lambda_2 = \pm i\beta_1$, $\alpha_1 = 0$ або характеристичні значення комплексного виду $\lambda_1 \lambda_2 = \alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_1 \neq 0$. В обох випадках параметр $\beta_1 \neq 0$.

Якщо розглядати випадок коли два корені будуть уявні $\lambda_1 \lambda_2 = \pm i\beta_1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$ то фазові траєкторії точок які знаходяться на площині g, w будуть мати вид окружності і тому можна записати вираз $g^2 + w^2 = const$. На основній фазовій площині тобто на координатах x, y ці траєкторії матимуть вид еліпсу. Оскільки через початок координат не буде проходити жодна інтегральна крива цей випадок називають центром і виглядає як зображено на (рис.1.4).

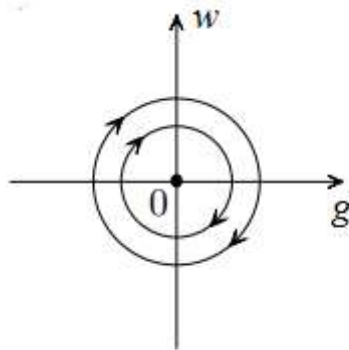


Рис. 1.4 Центр за умови $\lambda_1 \lambda_2 = \pm i\beta_1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$

Розглянемо тепер випадок з характеристичними значеннями комплексного виду $\lambda_1 \lambda_2 = \alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$. Тут можливі два розвитку подій: 1) за умови $\alpha_1 < 0$; 2) за умови $\alpha_1 > 0$. Щоб зрозуміти як змінюється поведінка траєкторій точок в залежності від наведених умов, виведемо значення ρ з формули (1.23):

$$\rho = C e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1} \varphi}$$

Це рівняння вказує, що ми маємо справу з типом траєкторії точок логарифмічних спіралей в полярних координатах g, w . Також всі спіралі мають особливу точку на початку координат. Розглянемо тепер напрямки їх руху зі зростанням часу. Для цього зробимо деякі математичні дії помножимо (1.21) на g , а (1.22) на w та складемо їх:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = \alpha_1 \rho$$

$$\text{Де } \rho = g^2 + w^2$$

Якщо розглядати першу умову $\alpha_1 < 0$ то ми маємо спіральні траєкторії що прямують до початку координат але вони не зможуть досягти його. Цей випадок має назву стійкий фокус (рис.1.5 а). За другої умови $\alpha_1 > 0$ точки будуть мати напрямки руху від початку координат тому такий випадок називають нестійкий фокус (рис.1.5 б).

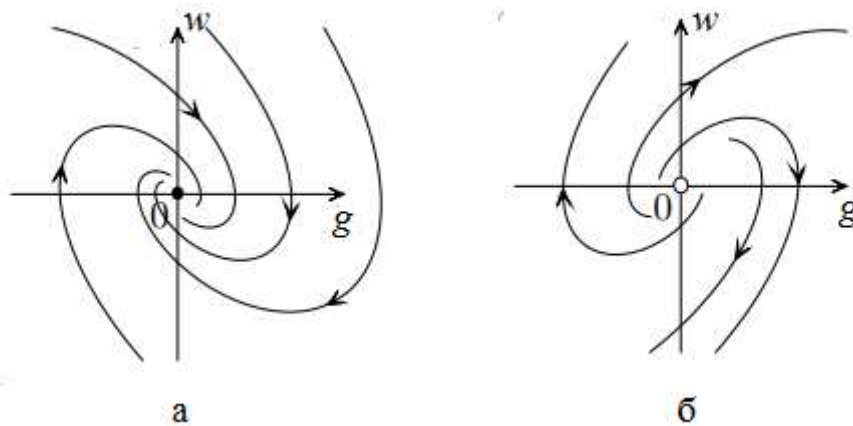


Рис.1.5 (а) – стійкий фокус $\lambda_1 \lambda_2 = \alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_1 < 0$; (б) - нестійкий фокус $\lambda_1 \lambda_2 = \alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_1 > 0$.

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ПЛАВЛЕННЯ ЛЬОДУ

Для експерименту попередньо було розм'якшено невелику кількість шару льоду, що виступає у ролі тонкої плівки [31] на поверхні самого льоду між двома повзунками. При дослідженні моделі плавлення слід застосувати метод фазових переходів. Розглянемо випадок із переходом першого порядку. Використовуючи вільну енергію Гінзбурга-Ландау у комбінації з методом молекулярної динаміки з'являється можливість визначити товщину плівки. Вона буде мікроскопічною та включатиме в себе лише декілька молекулярних шарів. Оскільки при збільшенні температури та застосуванні зовнішніх сил - лід тане, то мастило збільшується у товщині і тим самим зменшує силу тертя. Слід зазначити чим більша швидкість тим менша сила тертя тому залежність один від одного буде зростати поступово під впливом в'язкої складової напруги.

Зсувна компонента напруження з часом зазнає послаблення [12]:

$$\tau = \frac{\eta}{G} \quad (2.1)$$

Де G – модуль зсуву, η – зсувна в'язкість.

Процес замерзання рідини відбувається з часом. Оскільки можна стверджувати, що в момент замерзання в'язкість (η) яка наведена вище стає модулем (G) зробимо припущення, яке дозволяє в'язкопружну рідину представити у загальному випадку і тоді рівняння (2.1) має вигляд $\tau = \frac{\chi}{\gamma}$ (Де γ – кінетичний коефіцієнт, χ загальна сприйнятливність). Цей перехід потрібний, для спростування даного припущення оскільки правила застосування фазового переходу другого порядку суперечать йому. Записане рівняння дає можливість зрозуміти, що за умови в'язкості η яка має кінцеве значення модуль зсуву G зменшується та прямує до нуля. Оскільки ці значення еквівалентні χ і γ для фазового переходу справедливо зауважити, що сприйнятливність χ може постійно збільшувати своє значення в той

час коли кінетичний коефіцієнт γ не прямує до конкретного кінцевого значення. За даних умов можна стверджувати що відбувається в'язкопружній перехід.

Дослід базується на процесі танення льоду в момент тертя поверхонь у наслідку прикладених параметрів таких як температура T з одного боку та деформації ε і самоорганізації компонентів напруги σ з іншого. Щоб прослідкувати зв'язок між деформації та напруженістю скористаємося моделлю Кельвіна – Войта яка пояснює найпростіший випадок [12]. Основою для температурного ефекту є підвищення до критичних значень модуля зсуву разом зі зниженням температури при $G \neq 0$ для льоду і при $G = 0$ для води.

2.1 Математична модель

Розбираємо модель [12], що складається з конфігурації з прошарком мастила. Конфігурація в нашому випадку – це дві площини які мають коливальні рухи і тому відбувається процес тертя між: перший варіант, лід який треться об об'єкт; другий варіант, два шматка льоду. При цьому обидва варіанти мають між собою вже розм'якшений шар. Матеріали для об'єктів використовують як тверді так і гумові та інші. Звернемо увагу, що отримання тонкої плівки відбувається за механізмом безперервного переходу другого порядку.

Виведемо систему (2.2) з диференційних рівнянь для аналізу приведеної моделі. Для першого рівняння використаємо визначення Кельвіна – Фойгта оскільки маючи в'язкопружне середовище то на поверхні льоду ним можливо визначити релаксацію тензора деформації ε [26]. Друге рівняння передбачає в собі лінійну форму релаксації тензора напруження σ і називають його рівнянням типу Ландау - Халатникова.

Щоб завершити систему треба записати вираз де основною компонентою буде температура T . Це допоможе представити процес самоорганізації [24, 32-34] в якому тепер знаходяться параметр порядку ε , сполучене поле σ , параметр управління T ці

характеристики називаються ступенями вільності. Взавши до уваги, що в якості параметру порядку виступає тензор деформації то при розм'якшенні льоду $\varepsilon \neq 0$, а коли лід твердий то $\varepsilon = 0$. Для запису третього рівняння використовують відоме співвідношення засноване на теорії пружності [35]. Взавши до уваги всі умови система набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{\tau_\varepsilon} + \frac{\sigma}{\eta_\varepsilon}, \\ \tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + G(T)\varepsilon, \\ C_p \dot{T} = k\nabla^2 T - \sigma \frac{\varepsilon}{\tau_\varepsilon} + \frac{\sigma^2}{\eta_\varepsilon}. \end{cases} \quad (2.2)$$

В системі (2.2), $\eta_\varepsilon \equiv \tau_\varepsilon G_\varepsilon$ – ефективна в'язкість, τ_ε – час релаксації Дебая, $\tau_\sigma \equiv \frac{\eta}{G(T)}$ – релаксація з часом, $G(T)$ – модуль зсуву, k – теплопровідність, C_p – теплоємність, η_ε – ефективна в'язкість.

Маючи уявлення про різні коефіцієнти системи (2.2) проаналізуємо також деякі процеси які відбуваються завдяки доданкам рівнянь. Під час аналізу системи можемо сказати, що перше рівняння дає змогу отримати опис в'язко – пружної рідини оскільки на неї діє зсувна напруженість, на це вказує доданок $\frac{\sigma}{\eta_\varepsilon}$. Для другого рівняння треба зауважити, що фізичний зміст першого та другого рівняння системи відрізняється [20,26,29] тому реальна в'язкість і нерозслаблений модуль зсуву не будуть збігатися з ефективною в'язкістю і розслабленим модулем. Знаючи що від температури поверхневого шару льоду T значення G_ε , η , η_ε погано залежать, а якщо вона знизиться до критичного значення T_c то модуль зсуву $G(T)$ взагалі зникне тому зазвичай застосовують наближення $G_\varepsilon(T)$, $\eta(T)$, $\eta_\varepsilon(T) = const$. Виходячи з цього для значення $G(T)$ маємо можливість записати рівняння виду:

$$G(T) = G_0 \left(\frac{T}{T_c - 1} \right)$$

Якщо розібратися з компонентами третього рівняння можна прийти до висновку, що доданок $\frac{\sigma^2}{\eta_\varepsilon}$ дозволяє визначити дисипативне нагрівання в'язко -

пружної рідини що протікає під дією напруги σ якою варто знехтувати. Або є можливість записати рівняння для $k\nabla^2 T \approx \frac{k}{l^2}(\tau_T Q_0 - T)$ завдяки одномодовій апроксимації. Звернемо увагу на ще одне не менш важливе рівняння. Воно дозволяє пояснити внесок теплоти яка виділяється при поверхневому терті компоненти якої прямо залежать від зовнішніх умов $\tau_T \equiv \frac{l^2 c_p}{k}$ де показники τ_T – це час теплопровідності, l її масштаб.

$$Q = Q_0 + \frac{\sigma^2}{c_p \eta_\varepsilon}.$$

В цьому виразі Q_0 – тепло твердого тіла до верхнього шару льоду. Варто зазначити, що температура поверхні тертя яка може бути записана у вигляді залежності від кількості теплоти $T_e = \tau_T Q$ дозволяє застосувати попередню формулу для подальшого аналізу.

2.2 Масштабування основних параметрів системи другого роду

Формули які описанні у першому пункті другого розділу містять в собі багато констант, що ускладнюють подальші розрахунки. Тому проведемо певні математичні дії які дозволять позбутися розмірності наведених показників $\varepsilon, \sigma, T, t$ поділивши їх на масштаби $\varepsilon_s, \sigma_s, T_s, t_s$. Зазначимо, що вказані масштаби виступають у явному вигляді і записані в таких одиницях вимірювання:

$$t_s = \tau_\varepsilon \quad (2.3)$$

Де τ_ε – час релаксації деформації.

$$T_s = T_c. \quad (2.4)$$

Де T_c – критична температура.

$$\varepsilon_s = \left(\frac{\tau_\varepsilon^2 C_p T_s}{\eta_\varepsilon \tau_T} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

Де τ_ε - час релаксації деформації, C_p – теплопровідність матеріалів, η_ε – ефективна в'язкість, τ_T - час теплопровідності.

$$\sigma_s = \frac{\eta_\varepsilon \left(\frac{\tau_\varepsilon^2 C_p T_s}{\eta_\varepsilon \tau_T} \right)^{1/2}}{\tau_\varepsilon} \quad (2.6)$$

Детальне знаходження значень виразів (2.7) описані в [36]. Завдяки цим діям наведенні рівняння у (2.2) перетворюються на систему із безрозмірними змінними (2.7) яка вказує на в'язко – пружне середовище.

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon + \sigma, \\ \alpha \frac{d\sigma}{dt} = -\sigma + g(T - 1)\varepsilon, \\ \beta \frac{dT}{dt} = (T_e - T) - \sigma\varepsilon. \end{cases} \quad (2.7)$$

В якій коефіцієнти є ε – зсувна компонента деформації, σ – зсувна компонента напруження, T_e – температура поверхні тертя, T – температура рідини, що виступає у ролі мастила. Для знаходження показників також були введенні нові параметри для спрощення запису формул (2.7):

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}, \\ \beta &= \frac{\tau_T}{\tau_\varepsilon}, \\ T_e &= \tau_T Q, \\ g &= \frac{G_0}{G_\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Де τ_σ – час релаксації напруження, τ_T - час теплопровідності, Q – тепло яке діє на поверхні тертя, G_ε – модуль зсуву, G_0 – характерний модуль зсуву.

2.3 Стійкі стани системи другого роду

Для знаходження стійких станів треба визначити особливі точки на фазовій площині. В нашому випадку як і для всіх інших, щоб знайти стійкі стани треба скористатися умовами $\frac{dx_1}{dt} = 0 \dots \frac{dx_n}{dt} = 0$ які описана у другому пункті першого розділу. І тоді система (2.7) набуває вигляду:

$$\begin{cases} 0 = -\varepsilon + \sigma, \\ 0 = \frac{1}{\alpha}[-\sigma + g(T - 1)\varepsilon], \\ 0 = \frac{1}{\beta}[(T_e - T) - \sigma\varepsilon]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Зауважимо α і β представляють собою постійні значення. Якщо виразити ε з першого рівняння системи (2.9) і підставити його у друге, то одержимо вираз:

$$\sigma[-1 + g(T - 1)] = 0$$

З цього рівняння знаходимо чому дорівнюють показники σ і T :

$$\sigma = 0 \quad (2.10)$$

$$T = 1 + \frac{1}{g} \quad (2.11)$$

З експериментів і теорії [37-38] було доведено, що поверхні не будуть рухатися коли зсувна компонента напруження $\sigma = 0$ і тому відбувається твердіння граничного стану. При підстановці (2.10) у рівняння системи (2.9) дає змогу знайти шукані параметри для першої особливої точки С де вони мають вид:

$$\sigma = 0, \varepsilon = 0, T = T_e$$

Для визначення інших особливих точок зробимо підстановку знайденого виразу (2.11) у третє рівняння системи (2.9), отримаємо:

$$T_e - 1 - \frac{1}{g} = \varepsilon^2$$

За умови, що температура рідини більша ніж температура поверхні тертя $T > T_e$ відбувається процес плавлення поверхневого шару льоду [38-39] Оскільки лід тане, в цьому випадку будуть виконуватися різні стійкі стани, для яких $(\varepsilon_0^-, \sigma_0^-, T_0)$ або $(\varepsilon_0^+, \sigma_0^+, T_0)$ виступають показниками рідиноподібним типам тертя. Для знаходження координат цих стійких станів треба звернути увагу на початкову умову вони залежать від неї.

$$\varepsilon = \pm \sqrt{T_e - 1 - \frac{1}{g}}$$

$$\sigma = \pm \sqrt{T_e - 1 - \frac{1}{g}}$$

$$T = 1 + \frac{1}{g}$$

Ці координати у двох випадках мають однакову температуру рідини T , а зсувна компонента деформації ε і зсувна компонента напруження σ мають різний знак. Тому для точки А координати будуть додатні, для точки В від'ємні.

2.4 Показники Ляпунова системи другого роду

В даному пункті будемо шукати показники Ляпунова для кожної попередньо знайденої точки. Нехай розв'язок наведеної системи (2.7) набуває вигляду точок наближених до стаціонарного стану. Подальші розрахунки проводяться за допомогою системи (2.12).

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 + ae^{\lambda t}, \\ \sigma = \sigma_0 + be^{\lambda t}, \\ T = T_0 + ce^{\lambda t}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Де λ виступає у ролі показника Ляпунова, значення які відповідають стаціонарному стану $\varepsilon_0, \sigma_0, T_0$ – є координатами знайдених точок, а нові точки (відхилення), що розташовані поблизу $\varepsilon_0, \sigma_0, T_0$ це $-a, b, c$.

Завдяки математичним розрахункам ми можемо знехтувати деякими показниками які мають таку комбінацію ab, ac, cb, a^2b^2 а також степінь більшу другого порядку за умови $a, b, c \ll 1$, оскільки вони прямують до нуля і являють собою малі значення.

Тому зробивши підстановку (2.12) у перше рівняння системи (2.7) отримаємо вираз:

$$a\lambda e^{\lambda t} = -\varepsilon_0 - a e^{\lambda t} + \sigma_0 + b e^{\lambda t}$$

З цього рівняння прибираємо показники $-\varepsilon_0, \sigma_0$ оскільки вони є значеннями стаціонарного стану. Та після дії скорочення на $\frac{1}{e^{\lambda t}}$ отримаємо:

$$a[\lambda + 1] + b[-1] + c[0] = 0 \quad (2.13)$$

В момент підстановки (2.12) у друге рівняння системи (2.7) вираз набуває вигляду:

$$b\lambda e^{\lambda t} = \frac{1}{\alpha} [-\sigma_0 - b e^{\lambda t} + g(T_0 - 1 + c e^{\lambda t})(\varepsilon_0 + a e^{\lambda t})]$$

Провівши аналогічні дії, що і для першого рівняння тільки в цьому випадку значеннями стаціонарного стану стають $-\sigma_0, g(T_0 - 1)\varepsilon_0$, кінцеве рівняння має вигляд:

$$a[g(1 - T_0)] + b[\alpha\lambda + 1] + c[-g\varepsilon_0] = 0 \quad (2.14)$$

Підставимо (2.12) в останнє рівняння системи (2.7) отримаємо:

$$c\lambda e^{\lambda t} = \frac{1}{\beta} [T_e - T_0 - c e^{\lambda t} - (\sigma_0 + b e^{\lambda t})(\varepsilon_0 + a e^{\lambda t})]$$

Повторюємо дії, не забуваємо про: $T_e - T_0, -\sigma_0\varepsilon_0$ і одержуємо:

$$a[\sigma_0] + b[\varepsilon_0] + c[\beta\lambda + 1] = 0 \quad (2.15)$$

Маючи виведені рівняння (2.13-2.14) створюємо матрицю 3×3 і знаходимо детермінант:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ g(1 - T_0) & \alpha\lambda + 1 & -g\varepsilon_0 \\ \sigma_0 & \varepsilon_0 & \beta\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

При розрахунку детермінанту одержимо характеристичне рівняння (2.16).

$$(\lambda + 1)(\alpha\lambda + 1)(\beta\lambda + 1) + \sigma_0 g \varepsilon_0 + g(1 - T_0)(\beta\lambda + 1) + (g\varepsilon_0^2)(\lambda + 1) = 0 \quad (2.16)$$

Даний етап дає можливість визначити показник Ляпунова використовуючи знайдені координати у третьому пункті другого розділу для першої точки С і тому рівняння (2.16) набуває вигляду:

$$(\beta\lambda + 1)[(\lambda + 1)(\alpha\lambda + 1) + g(1 - T_e)] = 0 \quad (2.17)$$

З цього рівняння можна відразу визначити перший показник λ_1 який у будь – якому випадку буде від’ємний, що спрощує подальший аналіз.

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\beta}$$

Останні два показника будуть знаходитись з квадратного рівняння яке виходить з (2.17). і вони є його коренями.

$$\alpha\lambda^2 + \lambda(1 + \alpha) + 1 + g(1 - T_e) = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(1 + \alpha) \pm \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 4\alpha[1 + g(1 - T_e)]}}{2\alpha} \quad (2.18)$$

Аналізуючи формулу (2.18) бачимо, що корені рівняння $\lambda_{2,3}$ є комплексно спряженими. Дійсна частина має від’ємне значення і буде у будь – якому випадку такою як і для першого показником Ляпунова. Від знайдених коренів рівняння $\lambda_{1,2,3}$ залежить до якого типу стійкості буде відноситися задана стаціонарна точка С.

Таблиця 2.1 Залежність показників Ляпунова і координат точки С від параметрів α, β, g, T_e . Де $\alpha = 4, \beta = 5$ у п'яти випадках.

набір. парам.	1	2	3	4	5
g	0,27	0,8	0,88	0,4	0,4
T_e	5	0,1	20	10	2
δ₁	0	0	0	0	0
ε₁	0	0	0	0	0
T₁	5	0,1	20	10	2
λ_{1,1}	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2
λ_{1,2}	0,0158	-0.625+0.19i	1,4536113	0,3951103	-0,134465
λ_{1,3}	-1,2658	-0.625-0.19i	-2,7036113	-1,6451103	-1,115535
Типи стійкості	сідло- стійкий вуз	—	сідло- стійкий вуз	сідло- стійкий вуз	стійкий вузол

Щоб знайти показники Ляпунова для особливих точок А і В згадаємо їх координати які вказані у третьому пункті другого розділу. Оскільки вони відрізняються тільки у знаках коренів для σ_0, ε_0 , а T_0 для обох точок однакова з цього можна зробити висновок, що вони є симетричними у фазовому просторі і рішення буде швидшим.

Подальші дії будуть мати таку ж структуру рішення як і для точки С. У знайдене характеристичне рівняння (2.16) підставляємо наші координати для точки А тобто додатні значення і отримуємо:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 1)(\alpha\lambda + 1)(\beta\lambda + 1) + \left(\sqrt{T_e - 1 - \frac{1}{g}} \right) g \left(\sqrt{T_e - 1 - \frac{1}{g}} \right) \\
 & + g \left(1 - 1 - \frac{1}{g} \right) (\beta\lambda + 1) + \left(g \sqrt{T_e - 1 - \frac{1}{g}} \right)^2 (\lambda + 1) = 0
 \end{aligned}$$

Розкривши дужки і скомбінувавши деякі значення одержимо наступний вираз:

$$\lambda^3 \beta \alpha + \lambda^2 (\alpha + \alpha \beta + \beta) + \lambda \left[1 + \alpha + g \left(T_e - 1 - \frac{1}{g} \right) \right] + 2g \left(T_e - 1 - \frac{1}{g} \right) = 0 \quad (2.19)$$

Аналізуючи його звертаємо увагу, що воно записано у кубічній формі. Для вирішення цього складного рівняння зробимо спрощення ввівши таку заміну коефіцієнтів:

$$A = \beta \alpha,$$

$$B = (\alpha + \alpha \beta + \beta),$$

$$C = 1 + \alpha + g \left(T_e - 1 - \frac{1}{g} \right),$$

$$D = 2g \left(T_e - 1 - \frac{1}{g} \right).$$

Завдяки цьому рівняння (2.19) набуває спрощений вигляд:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

За допомогою рівнянь з коефіцієнтами A , B , C , D можливо розрахувати коефіцієнти полінома які записані в таблиці 2.3. Ці розрахунки потрібні для побудови фазового портрету за допомоги пакету MatLab.

Таблиця 2.2 Залежність показників Ляпунова і координат точки A від параметрів α , β , g , T_e . Де $\alpha = 4$, $\beta = 5$ у п'яти випадках.

набір. парам.	1	2	3	4	5
α	4	4	4	4	4
β	5	5	5	5	5
g	0,27	0,8	0,88	0,4	0,4
T_e	5	0,1	20	10	2
δ_2	0,544331	-	4,22654	2,54951	-
ε_2	0,544331	-	4,22654	2,54951	-
T_2	4,703704	2,25	2,136364	3,5	3,5

Таблиця 2.2 продовження

набір. парам.	1	2	3	4	5
$\lambda_{2,1}$	-1.2523	-1.1911	-1.4718 + 0.0000i	-1.3114 + 0.0000i	-1.2319
$\lambda_{2,2}$	-0.1571	-0.5309	0.0109 + 1.0334i	-0.0693 + 0.4398i	-0.3552
$\lambda_{2,3}$	-0.0407	0.2720	0.0109 - 1.0334i	-0.0693 - 0.4398i	0.1371
Типи стійкості	стійкий вузол	————	нестійк фокус	стійк фокус	————

Таблиця 2.3 Значення коефіцієнтів полінома

набір. парам	1	2	3	4	5
A	20	20	20	20	20
B	29	29	29	29	29
C	5,08	3,28	20,72	7,6	4,4
D	0,16	-3,44	31,44	5,2	-1,2

Для точки В всі математичні дії для розрахунку показників ідентичні як і для точки А тільки різниця у заданих координат, в цьому випадку вони мають від'ємні значення і тому одержимо такий вираз:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 1)(\alpha\lambda + 1)(\beta\lambda + 1) + \left(-\sqrt{T_e - 1 - \frac{1}{g}} \right) g \left(-\sqrt{T_e - 1 - \frac{1}{g}} \right) \\
 & + g \left(1 - 1 - \frac{1}{g} \right) (\beta\lambda + 1) + \left(g \left[-\sqrt{T_e - 1 - \frac{1}{g}} \right]^2 \right) (\lambda + 1) = 0
 \end{aligned}$$

Розкривши дужки і скомбінувавши деякі значення одержимо наступне:

$$\lambda^3 \beta \alpha + \lambda^2 (\alpha + \alpha \beta + \beta) + \lambda \left[1 + \alpha + g \left(T_e - 1 - \frac{1}{g} \right) \right] + 2g \left(T_e - 1 - \frac{1}{g} \right) = 0 \quad (2.20)$$

Оскільки це рівняння аналогічне рівнянню (2.19) не має сенсу шукати коефіцієнти полінома використовуємо які вже знайдені.

Таблиця 2.4 Залежність показників Ляпунова і координат точки В від параметрів α , β , g , T_e . Де $\alpha = 4$, $\beta = 5$ у п'яти випадках.

набір.парам.	1	2	3	4	5
g	0,27	0,8	0,88	0,4	0,4
T_e	5	0,1	20	10	2
δ₃	-0,54433	-	-4,22654	-2,54951	-
ε₃	-0,54433	-	-4,22654	-2,54951	-
T₃	4,703704	2,25	2,136364	3,5	3,5
λ_{3,1}	-1.2523	-1.1911	-1.4718 + 0.0000i	-1.3114 + 0.0000i	-1.2319
λ_{3,2}	-0.1571	-0.5309	0.0109 + 1.0334i	-0.0693 + 0.4398i	-0.3552
λ_{3,3}	-0.0407	0.2720	0.0109 - 1.0334i	-0.0693 - 0.4398i	0.1371
Типи стійкості	стійкий вузол	————	нестійк. фокус	стійк фокус	————

Для знаходження одних з важливих параметрів g і T_e та кількості областей існування особливих точок, була побудова фазова діаграма системи. Застосовуючи знайдені умови при яких існують точки А і В, а також використавши підстановку Ляпунова (2.12) у безрозмірну систему (2.7) знаходимо дискримінант кубічного рівняння (2.19-2.20) який дорівнює нулю. Вирішивши це будемо фазову діаграму (Рис 2.1).

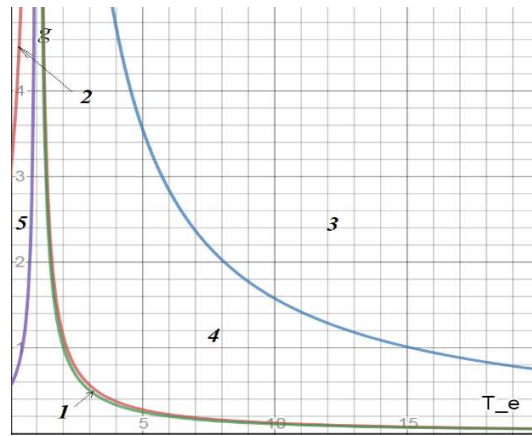


Рис. 2.1. Фазова діаграма системи

2.5 Фазові портрети системи другого роду

Для знаходження траєкторій точок і їх поведінки на фазовій площині використаємо програму MatLab. Щоб їх побудувати застосуємо всі знайдені параметри які вказанні в (табл. 2.1 – 2.4) та звернемося до метода Рунге – Кутта.

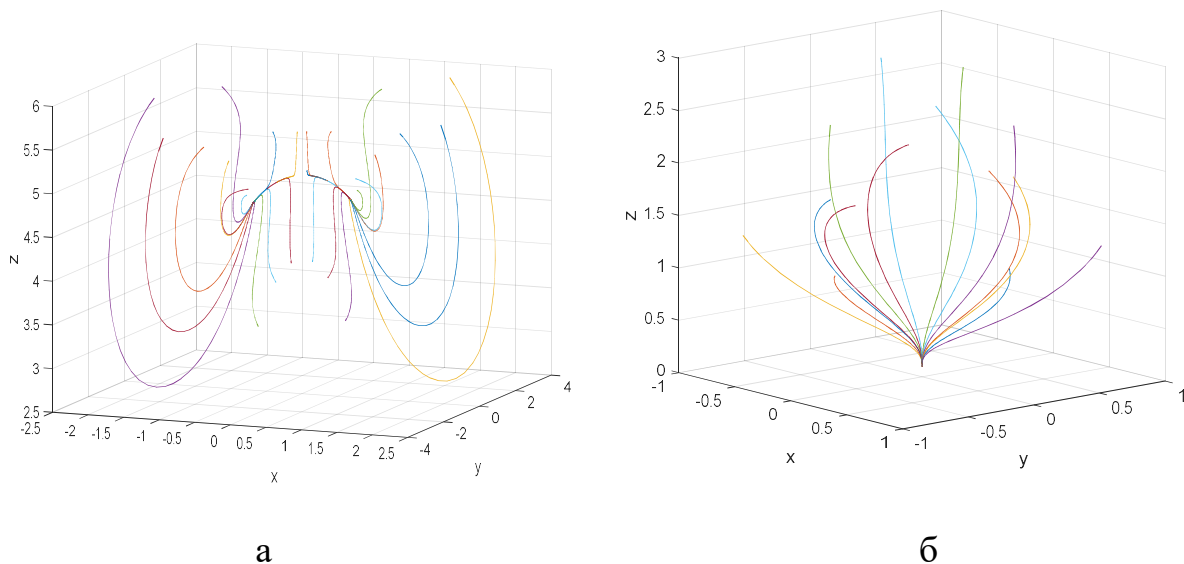


Рис. 2.2 Використовуючи (табл. 2.1 – 2.4) та $\alpha = 4$, $\beta = 5$ фазові портрети набувають вигляду: (а) – Портрет у трьох - вимірному просторі на координатних осях x, y, z для першої області з $g = 0,27$, $T_e = 5$; (б) - Портрет у трьох - вимірному просторі на координатних осях x, y, z для другої області з $g = 0,8$, $T_e = 0,1$.

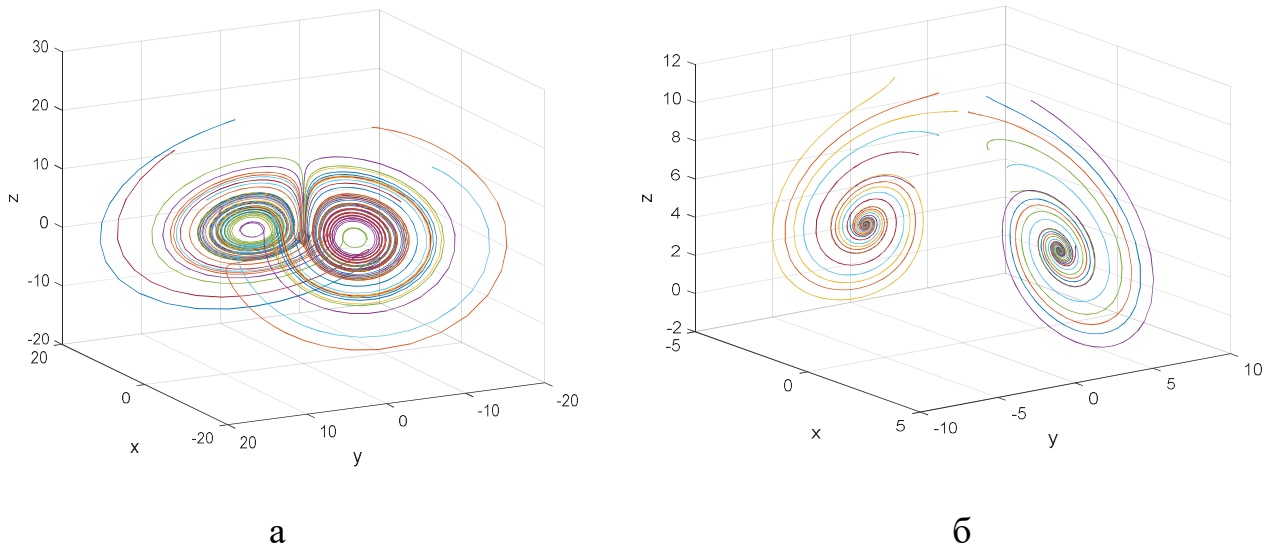


Рис. 2.3 Використовуючи (табл. 2.1 – 2.4) та $\alpha = 4$, $\beta = 5$ фазові портрети набувають вигляду: (а) – Портрет у трьох - вимірному просторі на координатних осях x, y, z для третьої області з $g = 0,88$, $T_e = 20$; (б) - Портрет у трьох - вимірному просторі на координатних осях x, y, z для четвертої області з $g = 0,4$, $T_e = 10$

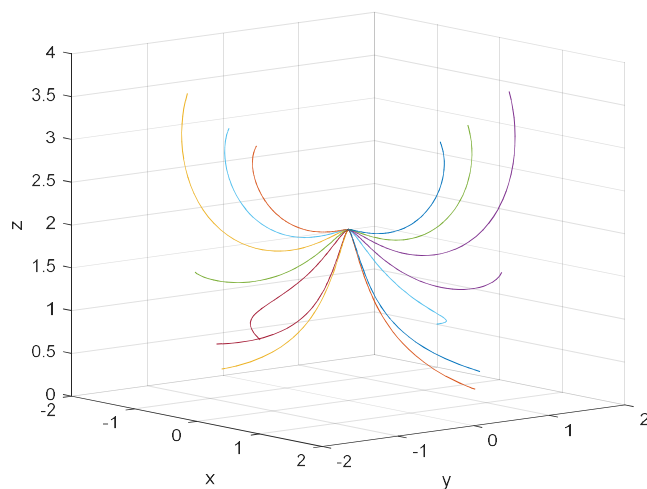


Рис. 2.4 Використовуючи (табл. 2.1 – 2.4) та $\alpha = 4$, $\beta = 5$ фазові портрети набувають вигляду у трьох - вимірному просторі на координатних осях x, y, z для п'ятої області з $g = 0,8$, $T_e = 0,1$.

Аналізуючи (Рис. 2.2 - 2.4) і (табл. 2.1 – 2.4) наглядно видно, що дана математична модель відрізняється за типом стійкості особливих точок та їх кількістю в п'ятих різних областях. Звернемо увагу на п'яту та другу області вони

мають тільки одну особливу точку яка відповідає за стійкість стану. Даний результат вказує на те, що задана фізична модель буде містити в собі тільки один стаціонарний стан, що відповідає твердому стану мастила між двома об'єктами. Для другої області стійкість стану матиме складний вид типу стійкий вузол – фокус, а для п'ятої області – звичайним стійким вузлом.

Для всіх інших областей (Рис. 2.2 а, Рис. 2.3 а, б) можемо спостерігати наявність трьох точок. Як було зазначено раніше точки А та В мають симетричний характер відносно початку координат але з фізичної точки зору вони характеризують різні режими деформації. (розтягування, стискання) Завдяки цьому і відбувається плавлення приповерхневого шару льоду для першої та четвертої області. Якщо проаналізувати третю область то ці точки є нестійкими і тому прошарок льоду буде залишатися твердим.

В четвертій та першій областях маємо три особливі точки які відповідають за стійкість стану. Їх наявність вказує на те, що в цих областях можливі два стани: твердий та рідкий. Завдяки цій умові підтверджується що тертя проходить із розривами у часі що й спостерігається в експерименті. Під час аналізу четвертої області бачимо, що маємо справу з дивним атрактором тобто зі складною поведінкою системи. В першій області – стійкими є точки що відповідають за стан розм'якшеного льоду.

РОЗДІЛ 3. РОЗДІЛ 3 МОДЕЛЬ ЖОРСТКОГО РЕЖИМУ САМООРГАНІЗАЦІЇ

Для подальшого аналізу попередньо заданої моделі яка описана системою диференційних рівнянь (2.2) скористаємося переходом першого роду. Різниця відмінних переходів полягає в тому, що для другого роду [40] був описаний плавний процес межового тертя і звідси впливає τ_ε – час релаксації Дебая є постійним показником, а для першого роду процес має стрибкоподібний вигляд і τ_ε є функцією яка набуває вигляду:

$$\frac{1}{\tau_\varepsilon} = \frac{1}{\tau_{\varepsilon 0}} \left[1 + \frac{k}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_\tau)^2} \right] \quad (3.1)$$

Де $\tau_{\varepsilon 0}$ – позитивна константа, k – параметр який вказує на зміну τ_ε , ε_τ масштаб залежності $\tau_\varepsilon(\varepsilon)$.

3.1. Масштабування основних параметрів системи першого роду

Під час підстановки рівняння (3.1) у (2.2) чотири умови системи не змінюються тому проводиться така сама математична дія як і у попередньому розділі. Позбавляємося розмірності показників $\varepsilon, \sigma, T, t$ поділивши на масштаби $\varepsilon_s, \sigma_s, T_s, t_s$ і виведемо їх одиниці вимірювання:

$$t_s = \tau_{\varepsilon 0}$$

$$T_s = T_c.$$

$$\varepsilon_s = \left(\frac{\tau_{\varepsilon 0}^2 C_p T_s}{\eta_\varepsilon \tau_T} \right)^{1/2}$$

$$\sigma_s = \eta_\varepsilon \left(\frac{C_p T_s}{\eta_\varepsilon \tau_T} \right)$$

Отримані значення використаємо у виразах які були описані раніше [36] для системи другого роду переходу. Ця математична дія дозволяє отримати безрозмірну систему першого роду, що вказує на в'язко – пружне середовище:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon \left[1 + \frac{k}{1 + \varepsilon^2/\gamma^2} \right] + \sigma, \\ \alpha \frac{d\sigma}{dt} = -\sigma + g(T - 1)\varepsilon, \\ \beta \frac{dT}{dt} = (T_e - T) - \sigma\varepsilon \left[1 + \frac{k}{1 + \varepsilon^2/\gamma^2} \right]. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\text{Де } \gamma = \varepsilon_\tau / \varepsilon_s$$

Для виразів (3.2) були введені додаткові показники, щоб зменшити об'єм рівнянь. У випадку з T_e та g вони такі самі як і для системи (2.7), а α і β набувають вигляду:

$$\alpha \equiv \frac{\tau_\sigma}{\tau_{\varepsilon 0}},$$

$$\beta = \frac{\tau_T}{\tau_{\varepsilon 0}}$$

3.2. Стійкі стани системи першого роду

Визначимо особливі точки системи (3.2) оскільки вони вказують на стійкі або ні стани. З огляду на те, що стійкість та нестійкість точки з'ясовується невеликим відхиленням від стаціонарного стану то для рішення диференціальних рівнянь скористаємося умовою стану рівноваги де за визначенням особлива точка має такі данні $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, $\frac{dT}{dt} = 0$ використавши це, отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\varepsilon \left[1 + \frac{k}{1 + \varepsilon^2/\gamma^2} \right] + \sigma, \\ 0 = \frac{1}{\alpha} [-\sigma + g(T - 1)\varepsilon], \\ 0 = \frac{1}{\beta} \left[(T_e - T) - \sigma\varepsilon \left[1 + \frac{k}{1 + \varepsilon^2/\gamma^2} \right] \right]. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Під час аналізу системи (2.9) і отриманої (3.3) можливо зробити висновок, що перше і третє рівняння відрізняються і мають складніший вигляд ніж при другого роду переходу. Тому ускладнилась подальша умова розрахунків диференційних рівнянь.

Для вирішення системи (3.3) звернемо увагу на α і β вони є фіксованими значеннями, а показники σ , ε , T являють собою координати особливих точок. Щоб знайти їх спочатку виразимо σ з другого рівняння:

$$\sigma = g(T - 1)\varepsilon$$

Зробивши підстановку цього виразу у третє рівняння (3.3) та провівши деякі математичні дії отримаємо:

$$T = \frac{T_e + \varepsilon^2 \left(\frac{T_e}{\gamma^2} + m \right) + \frac{g\varepsilon^4}{\gamma^2}}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + m \right) + \frac{g\varepsilon^4}{\gamma^2}} \quad (3.4)$$

У (3.4) була використана заміна де $m = g + gk$ яка дозволяє спростити вигляд умови. Ввівши (3.4) у перше рівняння системи (3.3) знаходимо вираз:

$$\sigma = \frac{(T_e - 1) \left(1 + \varepsilon^2/\gamma^2 \right) g\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + m \right) + \frac{g\varepsilon^4}{\gamma^2}} \quad (3.5)$$

Під час заміни σ у першому рівнянні системи (3.3) на вираз (3.5) дає змогу вивести першу особливу точку:

$$-\varepsilon \left[\frac{1 + \varepsilon^2/\gamma^2 + k}{1 + \varepsilon^2/\gamma^2} - \frac{(T_e - 1)(1 + \varepsilon^2/\gamma^2)g}{1 + \varepsilon^2(1/\gamma^2 + m) + g\varepsilon^4/\gamma^2} \right] = 0$$

Звідси слідує, що $\varepsilon = 0$, тому $\sigma = 0$, $T = T_e$. Це координати точки O.

Для знаходження інших особливих точок треба вирішити рівняння (3.6) і його значення підставити в виведені основні вирази (3.4-3.5).

$$\frac{1 + \varepsilon^2/\gamma^2 + k}{1 + \varepsilon^2/\gamma^2} - \frac{(T_e - 1)(1 + \varepsilon^2/\gamma^2)g}{1 + \varepsilon^2(1/\gamma^2 + m) + g\varepsilon^4/\gamma^2} = 0 \quad (3.6)$$

Під час деяких математичних розрахунків отримуємо бікубічний вираз:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^6 \left[\frac{g}{\gamma^4} \right] + \varepsilon^4 \left[\frac{(1/\gamma^2 + m)}{\gamma^2} + \frac{g(1+k)}{\gamma^2} - \frac{g(T_e - 1)}{\gamma^4} \right] \\ & + \varepsilon^2 \left[1/\gamma^2 + (1+k)(1/\gamma^2 + m) - 2g(T_e - 1)/\gamma^2 \right] + 1 + k - g(T_e - 1) \\ & = 0 \end{aligned}$$

У зв'язку з громосткістю рішення для знаходження коренів цього рівняння скористаємося програмою Maple у додаток С приведена копія коду.

Таблиця 3.1. Загальні умови

α	β	gam	k	m	g	T_e
4	5	0,1	1	0,2	0,1	15,05

Використавши умови (табл. 3.1) отримаємо чотири дійсні корені $\varepsilon_1 = -0,122$, $\varepsilon_2 = 0,122$, $\varepsilon_3 = -2,001$ $\varepsilon_4 = 2,001$ і два з уявними одиницями. Оскільки точки можливі лише з дійсними коренями то значення із уявними одиницями не використовуються. Підставивши реальні значення у рівняння (3.5) і (3.4) та скориставшись кодом у Maple (додаток D) дає змогу знайти координати для всіх точок які знаходяться на фазовій площині (табл.3.2).

Таблиця 3.2. Точки на фазовій площині з координати (σ, ε, T) .

набір парам	δ	ε	T
O	0	0	15,05
A	-0,1709779	-0,121946	15,02076654
B	0,17097794	0,1219462	15,02076654
D	-2,0062637	-2,001279	11,02490586
E	2,00626373	2,0012794	11,02490586

Завдяки тому, що були знайдені координати точок з'являється можливість побудувати фазовий портрет.

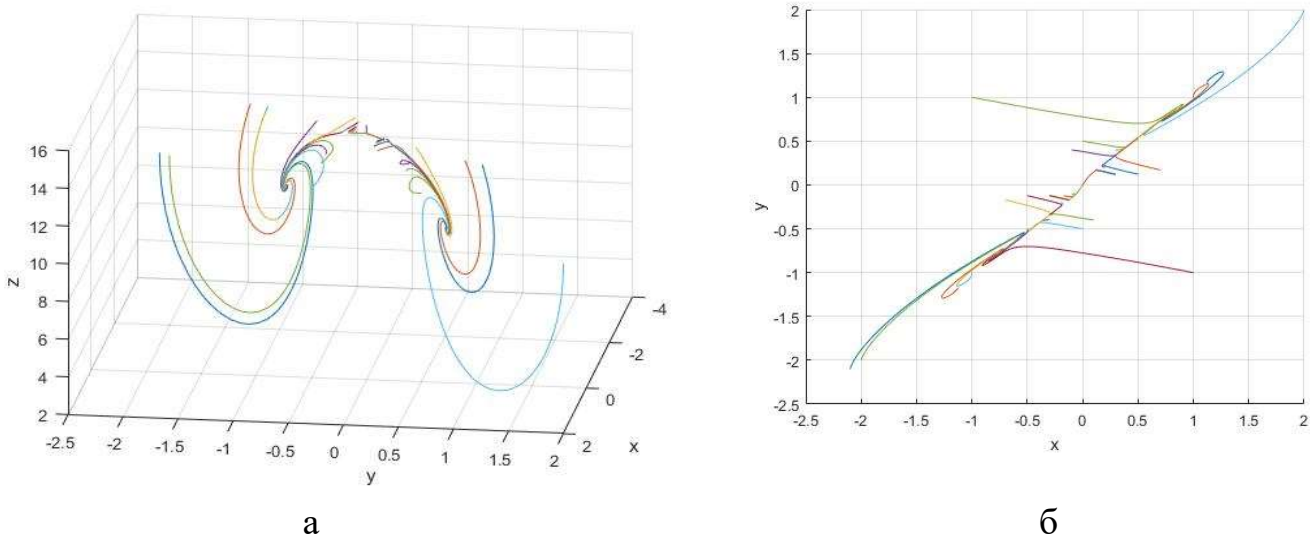


Рис. 3.1 Використовуючи (табл. 3.1 – 3.2) отримуємо фазовий портрет з реалізованими п'ятьма точками: (а) у трьох – вимірному просторі на координатних осях x, y, z ; (б) у двох вимірному просторі з координатами x, y .

3.3. Показники Ляпунова системи першого роду

Для того щоб аналізувати фазові криві та їх поведінку на фазовій площині знайдемо показників Ляпунова системи першого роду переходу (3.2) скориставшись

підстановкою (2.12). Як зазначено у четвертому пункті другого розділу $\varepsilon_0, \sigma_0, T_0$ – це координатами знайдених точок, а a, b, c – це відхилення від точок. Тому використовуючи умову $a, b, c \ll 1$, позбавляємося всіх показників які мають такий вид ab, ac, cb, a^2b^2 .

Підставивши систему (2.12) у перше рівняння (3.2) отримаємо вираз:

$$\begin{aligned} a\lambda e^{\lambda t} = & -\varepsilon_0 \left[1 + \frac{k}{1 + \varepsilon_0^2/\gamma^2} \right] - \frac{2a\varepsilon_0^2 e^{\lambda t}}{\gamma^2 (1 + \varepsilon_0^2/\gamma^2)} - a e^{\lambda t} \left[1 + \frac{k}{1 + \varepsilon_0^2/\gamma^2} \right] + \sigma_0 \\ & + \frac{2a\sigma_0\varepsilon_0 e^{\lambda t}}{\gamma^2 (1 + \varepsilon_0^2/\gamma^2)} + b e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Прибираємо першим і четвертим доданками цього рівняння оскільки вони є стаціонарними значеннями системи (3.2). А також скорочуємо на $\frac{1}{e^{\lambda t}}$ і отримуємо вираз в зручній алгебраїчній формі виду:

$$a \left[\lambda + \frac{3\varepsilon_0^2 + \gamma^2(1+k) - 2\sigma_0\varepsilon_0}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} \right] + b[-1] + c[0] = 0 \quad (3.7)$$

У випадку підстановки (2.12) у друге рівняння системи (3.2) одержимо такий самий вираз як і у пункті чотири розділу два, через те що основні рівняння системи (3.2) і (2.7) однакові. Тому вигляд рівності буде:

$$a[g(1 - T_0)] + b[\alpha\lambda + 1] + c[-g\varepsilon_0] = 0 \quad (3.8)$$

Під час підстановки умови (2.12) у друге рівняння системи (3.2) і провівши аналогічні математичні дії, що описані раніше, рівняння набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \beta c \lambda e^{\lambda t} = & T e - T_0 - c e^{\lambda t} + \frac{2a\varepsilon_0(T e - T_0)e^{\lambda t}}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} - \sigma_0\varepsilon_0 \left(1 + \frac{k}{1 + \varepsilon_0^2/\gamma^2} \right) \\ & - \left(1 + \frac{k}{1 + \varepsilon_0^2/\gamma^2} \right) (\varepsilon_0 b e^{\lambda t} + \sigma_0 a e^{\lambda t}) - \frac{2a\varepsilon_0^2\sigma_0 e^{\lambda t}}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} \end{aligned}$$

Знехтуємо першим та третім доданком, а також п'ятим і поділивши на $\frac{1}{e^{\lambda t}}$ одержимо у зручному вигляді вираз:

$$a \left[\frac{\sigma_0(\gamma^2 + 3\varepsilon_0^2 + k\gamma^2) - 2\varepsilon_0(Te - T_0)}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} \right] + b \left[\frac{\varepsilon_0(\gamma^2 + \varepsilon_0^2 + k\gamma^2)}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} \right] + c[\beta\lambda + 1] = 0 \quad (3.9)$$

Завдяки виведеним рівнянням (3.7-3.9) які представлені у зручній формі можливо побудувати матрицю з цих коефіцієнтів:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{3\varepsilon_0^2 + \gamma^2(1+k) - 2\sigma_0\varepsilon_0}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} & -1 & 0 \\ g(1 - T_0) & \alpha\lambda + 1 & -g\varepsilon_0 \\ \frac{\sigma_0(\gamma^2 + 3\varepsilon_0^2 + k\gamma^2) - 2\varepsilon_0(Te - T_0)}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} & \frac{\varepsilon_0(\gamma^2 + \varepsilon_0^2 + k\gamma^2)}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} & \beta\lambda + 1 \end{vmatrix} = \det A$$

Розкривши цю матрицю одержимо характеристичне рівняння виду:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda + \frac{3\varepsilon_0^2 + \gamma^2(1+k) - 2\sigma_0\varepsilon_0}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} \right) (\alpha\lambda + 1)(\beta\lambda + 1) \\ & + \left(\frac{\sigma_0(\gamma^2 + 3\varepsilon_0^2 + k\gamma^2) - 2\varepsilon_0(Te - T_0)}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} \right) (-1)(-g\varepsilon_0) \\ & - \left(\lambda + \frac{3\varepsilon_0^2 + \gamma^2(1+k) - 2\sigma_0\varepsilon_0}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_0(\gamma^2 + \varepsilon_0^2 + k\gamma^2)}{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} \right) (-g\varepsilon_0) \\ & - (g(1 - T_0)(-1)(\beta\lambda + 1) = 0 \end{aligned}$$

При вирішенні цієї рівності введемо корені тобто показники Ляпунова. Оскільки матриця та рівняння мають значні за розміром коефіцієнти то скористаємося кодом який був написаний на платформі Maple (Доданок Е) і табличними значеннями (табл.3.1). Знайдені корені оформлені у вигляді таблиці (табл. 3.3). Завдяки виведеним значенням стає можливим аналізувати стани рівноваги усіх знайдених точок у трьох-вимірному просторі.

Таблиця 3.3. Показники Ляпунова для п'ятьох точок

набір парам	λ_1	λ_2	λ_3	стан рівноваги
О	-0,2	-0,068	-2,182	стійкий вузол
А	0,094	-0,199	-1,266	сідло
В	0,094	-0,199	-1,266	сідло
Д	-0,093+0,151i	-1,259	-0,093-0,151i	стійкий фокус
Е	-0,093+0,151i	-1,259	-0,093-0,151i	стійкий фокус

Як бачимо задана модель співіснує у двох станах одночасно, на що вказує стійкий вузол (у стані льоду) і стійкі фокуси (у розм'якшеному стані) які розділені між собою сідлами. Таку модель поведінки спостерігають у більшості експериментальних даних.

РОЗДІЛ 4. ТЕХНІКА БЕЗПЕКИ ТА ОХОРОНИ П.РАЦІ

4.1 Техніка безпеки при роботі з ПК

Оскільки момент роботи за ПК існують такі фактори небезпеки як психологічні (надмірне навантаження на психіку) так і фізичні (захворювання суглобів, синдром сухого ока, удар струмом та ін.), то обов'язково треба дотримуватися наведених правил безпеки.

Місце для роботи за персональним комп'ютером повинно розташовуватися біля вікна. Вікно знаходиться не менше ніж 1,5 м, до робочої поверхні та переважно з лівої сторони для запобігання потрапляння прямих променів світла, також використовують жалюзі. За умови, що робоче місце знаходиться біля стіни дотримуються відстані у 1 м, при наявності двох столів то відстань між ними не менш 1,5 м

Приміщення в якому знаходиться ПК повинно добре охолоджуватися і вентилюватися через те що потрібно своєчасно охолоджувати техніку особливо у літку. Під час довгого використання ПК рекомендують застосовувати антистатика та зволожувач повітря оскільки на поверхнях техніки виникають невеликі розряди. Навколо робочого простору не повинно бути проводів.

Для робочої поверхні рекомендовано мати джерела освітлення з різних боків екрану які направлені паралельно напрямку погляду. Під час роботи з текстовими файлами (читання, редагування тощо) найбільш сприйнятливим для ока є білий фон та чорні знаки на ньому.

Відстань між монітором та очима користувача встановлюють 400-700 мм і так щоб він знаходиться в центрі стола. Екран має бути нахилений верхньою частиною від людини нижньою до нього. Розташування клавіатури дотримуються також 400-700 мм від очей або 200 – 300 см від краю стола.

Для зручної роботи рекомендовано сидіти рівно і трішки упиратися у спинку стільця. Ноги працівника стоять рівно на підлозі або використовують підставку для

них. Руки зігнуті у ліктях на 70-90° і не виснуть у повітрі, а у зап'ястях кут не повинен перевищувати 20° при використанні мишки вони не суттєво змінюють позицію. Нахилити голову рекомендують в межах 15-20°. Для дотримання цих правил використовують налаштування висоти стільця або стола.

Правила підготовки до початку роботи з ПК:

- В приміщенні увімкнути систему охолодження (кондиціонування);
- Звернути увагу на техніку чи надійно вона встановлена. Налаштувати монітор для роботи під себе;
- Звернути увагу на загальний вигляд апаратури Зробити візуальний аналіз на цілісність проводів та їх підключення (не має бути механічних пошкоджень). Перевірити розетки і штепсельну виделку;
- Для роботи за робочим місцем налаштувати освітлення за рекомендаціями вище;
- Налаштувати робочий стілець та зафіксувати його під себе;
- Доки комп'ютер вимкнений підключити необхідну апаратуру до системного блоку. Увімкнути послідовно: екран, а потім системний блок при наявності іншого обладнання (принтер та інше) увімкнути його.
- Налаштувати параметри екрану (яскравість, контрастність та інше).

4.2 Пожежна безпека та охорона праці

Організація пожежної безпеки доручається представнику якого обрало керівництво. Йому виділяється конкретна територія на якій він зобов'язаний проводити поставлену перед ним роботу. Самі правила які стосуються пожежної безпеки на підприємстві дотримується кожен працівник організації.

Відповідальний за організаційні заходи повинен своєчасно проводити їх, а саме:

- Забезпечувати протипожежними засобами (вогнегасник та інше) робочу територію;
- Зменшити до мінімуму проблему з загорянням предметів праці;
- Створення комфортних умов для безпечної роботи працівників;
- Контролювати працівників у виконанні правил пожежної безпеки
- Створювати та надавати регламенти співробітникам про гасіння пожежі та евакуацію з підприємства під час пожежі;
- Проводити інструктаж протипожежної безпеки.

Важливо щоб на підприємстві були якісні і добре встановлені вентиляційні системи, оскільки під час пожежі вони забезпечать швидке відведення угарного газу. На робочих місцях електроні прилади повинні попередньо буди протестовані на придатність і тільки потім використовуватися. Вентиляція, електроніка і засоби пожежогасіння мають час від часу проходити технічне обслуговування. Також грає суттєву роль забезпечення всіх працівників місцями для куріння.

Важливою складовою є наявність на стінах приміщення плану евакуації, протипожежної сигналізації та проведення інструктажу по використанню об'єкту. Знання які отримали співробітники під час навчання через деякий час перевіряють знову. Для збільшення інформації о протипожежної безпеки рекомендовано проводити тренінги для працівників.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі в рамках аналітичної частини розглянута загальна теорія щодо якісного методу розв'язання систем з двох диференціальних рівнянь. Окремо детально описані властивості рішення автономної системи, які задаються відповідними теоремами. Розглянуті умови, за яких з'являються стійкі стани досліджуваної системи. Доведено, що за допомогою використання першого методу Ляпунова для системи двох диференціальних рівнянь можна побудувати фазові траєкторії, які характеризують кінетику системи.

В другому та третьому розділах роботи розглянуті та проаналізовані математичні моделі опису процесу межового тертя за механізмами фазового переходу другого і першого роду. В якості базових рівнянь були обрані загальновідомі співвідношення для тензору деформації ϵ , тензору напруження σ і температури T . В результаті отримана система трьох диференціальних рівнянь, якісний розв'язок якої було проведено методом фазової площини. Для визначення різних кінетичних режимів поведінки системи в залежності від зовнішніх параметрів була побудована фазова діаграма, згідно якої існує п'ять областей, що характеризуються різною кількістю стійких станів системи. При цьому у двох областях реалізується тільки один твердоподібний стан, для трьох інших областей характерна різна кінетика для стійкого стану розм'якшеного льоду.

При використанні математичної моделі, що відповідає механізму фазового переходу першого роду, тобто враховує залежність часу релаксації параметра порядку від деформації, було отримано п'ять особливих точок, що характеризують різні стани системи. Аналіз методом показників Ляпунова довів, що в такому випадку стійкими є одразу два стани: твердого та розм'якшеного льоду, що відповідає більшості експериментальних даних. Таким чином запропоновані математичні моделі дозволяють описати переходи між різними станами поверхні льоду в рамках процесу межового тертя.

У четвертому розділі дипломної роботи було розглянуто техніка безпеки при роботі з персональним комп'ютером і пожежна безпека та охорона праці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пиголкина Т.С., Автономные системы. Фазовые траектории. Элементы теории устойчивости, учебно - методическое пособие МФТИ, 2013 – 40 с.
2. Ризниченко Г.Ю., Лекции по математическим моделям в биологии: Учебное пособие, часть 1, Ижевск 2002 – 232 с.
3. Некоркин В.И., Лекции по основам теории колебаний: Учебное пособие, Нижний Новгород 2011 – 233 с.
4. Двумерные динамические системы в приложениях, Составители: Касаткина Ю.А., Митряков Т.М., Учебно – методическое пособие Нижний Новгород 2016 – 47 с.
5. Родин Б.П., Методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие, Санкт – Петербург 2020 – 80 с.
6. Перов А.А., Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с частыми производными в приложениях: Учебное пособие, Нижний Новгород 2018 – 100 с.
7. Скоринкин А.И., Математическое моделирование биологических процессов: учебно – методическое пособие, Казань 2015 – 86 с.
8. Эрроумит Д., Плейс К., Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: перевод с англ. Вентцель Т.Д., Розова Н.Х., Мир, 1986 – 243 с.
9. В.В.Степанов, М.:Едиторал, Курс дифференциальных уравнений, УРСС, 2004 - 473 с.
10. A.V. Khomenko, D.S. Troshchenko, L.S. Metlov, Physical Review E., 2019, V-100, P.022110
11. A. Khomenko, Tribology Letters, 2018, V.66, Iss3. –art 82, dio:10.1007/s11249-018-1034-x.
12. Khomenko A.V., Khomenko K. P., Falko V. V., Condensed Matter Physics, 2016, Vol.19, No 3, 33002; 1-10; doi: 10.5488/CMP.19.33002.

13. Lyashenko, I. A., & Zaskoka, A. M, Ukrainian Journal of Physics, 58(1), 91, 2018, [dio:10.15407/ujpe58.01.0091](https://doi.org/10.15407/ujpe58.01.0091)
14. A.V. Khomenko, M. Zakharov, D. Boyko, Bo N. J. Persoon,, Belilstein Journal of Nanotechnology, 2018, Vol 9, pp. 1239-1246.
15. B.N.J. Persson, Sliding Friction. Physical Principles and Applications (Springer, Berlin, 2000).
16. O.A. Mazyar, G.K. Jennings, and C. McCabe, Langmuir 25, 5103 (2009)
17. A. Pertsin and M. Grunze, Langmuir 24, 135 (2008).
18. S. Lee, R. Iten, M. Müller, and N.D. Spencer, Macromolecules 37, 8349 (2005).
19. Sh. Yamada, Langmuir 21, 8724 (2005).
20. Wiese K., Kessel T.M., Mundl R., Wies B., Tire Sci. Technol., 2012, 40, No. 2, 124.
21. Kietzig A.M., Hatzikiriakos S.G., Englezos P., J. Appl. Phys., 2010, 107, No. 8, 081101; [doi:10.1063/1.3340792](https://doi.org/10.1063/1.3340792).
22. Kennedy F.E., Schulson E.M., Jones D.E., Philos. Mag. A, 2000, 80, No. 5, 1093; [doi:10.1080/01418610008212103](https://doi.org/10.1080/01418610008212103)
23. Khomenko A.V., Lyashenko I.A., Phys. Solid State, 2007, 49, No. 5, 936; [doi:10.1134/S1063783407050228](https://doi.org/10.1134/S1063783407050228).
24. Khomenko A.V., Yushchenko O.V., Phys. Rev. E, 2003, 68, 036110; [doi:10.1103/PhysRevE.68.036110](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.036110)
25. Lifshits E.M., Pitaevskii L.P., Course of Theoretical Physics, Vol. 10: Physical Kinetics, 1st Edn., Pergamon Press, Oxford, 1981.
26. Khomenko A.V., Phys. Lett. A, 2004, 329, No. 1–2, 140; [doi:10.1016/j.physleta.2004.06.091](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.06.091).
27. Я.А. Ляшенко, ЖТФ 81, №5, 115 (2011)
28. A. Benassi, A. Vanossi, G. E. Santoro, and E. Tosatti, Phys. Rev. Lett. 106, 256102 (2011)
29. Khomenko A.V., Lyashenko I.A., Tech. Phys., 2007, 52, No. 9, 1239; [doi:10.1134/S1063784207090241](https://doi.org/10.1134/S1063784207090241)
30. О.В Хоменко, А.В. Хоменко, Я.А. Ляшенко, Трение и износ 31, 412 (2010).

31. О.В. Хоменко, Д.В. Бойко, М.В. Захаров, Журнал нано- и электронной физики, 2015, Т.7, №1-с.01039(11сс)
32. Olemskoi A.I., Khomenko A.V., Tech. Phys., 2000, 45, 672; doi:10.1134/1.1259700.
33. Olemskoi A.I., Khomenko A.V., Tech. Phys., 2000, 45, 677; doi:10.1134/1.259702.
34. Olemskoi A.I., Khomenko A.V., Kharchenko D.O., Physica A, 2003, 323, 263; doi: 10.1016/S0378-4371(02)01991-X.
35. Landau L.D., Lifshitz E.M., Course of Theoretical Physics, Vol. 7: Theory of Elasticity, 3rd Edn., Butterworth-Heinemann, Oxford, 1986.
36. Реброва К.С., Дослідження стійких режимів процесу розм'якшення поверхні льоду при терті: Диплом, Суми 2019 – 53 с.
37. В.Л. Попов, ЖТФ 71, № 5, 100 (2001).
38. Sh. Yamada, Langmuir 21, 8724 (2005).
39. О.В. Хоменко, Я.О. Ляшенко, Журн. фіз. досл. 11, 268 (2007).
40. Mastropas, Z. P., & Myasnikov, E. N., Ukrainian Journal of Physics, 58(6), 573, 2018, doi.10.15407/ujpe58.06.0573

ДОДАТОК А

Для 1-ї області

```
>> a1=4; b=5;
```

```
Te=5; g=0.27;
```

```
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/a1)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];
%Система рівнянь
```

```
[t,a] = ode45(f,[0 100],[1 1.5 5.4]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 -1.5 5.4]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[1.5 2.3 6]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1.5 -2.3 6]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> grid on;
```

```
[t,a] = ode45(f,[0 100],[0.6 0.7 4.8]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.6 -0.7 4.8]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-1.5 -1.8 5.5]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f,[0 100],[1.5 1.8 5.5]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.8 0.9 5.2]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.8 -0.9 5.2]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.45 0.65 3.3]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.45 -0.65 3.3]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.11 0.15 4]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.11 -0.15 4]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.35 -0.25 5.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[0.35 0.25 5.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-2 -0.65 3.3]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[2 0.65 3.3]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[3.9 4 4.9]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.5 1 4.9]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.5 -1 4.9]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.05 0.06 5.05]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.05 0.06 5.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.05 -0.06 5.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 -0.5 6]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[1 0.5 6]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.25 -0.45 3.8]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.25 0.45 3.8]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

Для 2-ї області

```
>> a1=4; b=5;
```

```
Te=0.1; g=0.8;
```

```
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/a1)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];  
%Система рівнянь
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.25 0.45 1]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.25 -0.45 1]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.78 -0.7 1.3]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.78 0.7 1.3]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> grid on;
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.25 0.1 3]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.25 -0.1 3]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.11 -0.6 1.8]);hold on;
```

```

plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.11 -0.6 1.8]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.11 0.6 1.8]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.11 0.6 1.8]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.35 0.4 2.4]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.35 -0.4 2.4]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.35 0.4 2.4]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.35 -0.4 2.4]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));

```

Для 3-ї області

```

>> al=4; b=5;
Te=20; g=0.88;
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/al)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];
%Система рівнянь
[t,a] = ode45(f,[0 100],[5 6 21]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-5 -6 21]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> grid on;
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-1.7 0.2 0.08]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));

```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[8 6 5]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-8 -6 5]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-10 -11 15]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[10 11 15]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

Для 4-ї області

```
>> a1=4; b=5;
```

```
Te=10; g=0.4;
```

```
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/a1)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];
```

```
%Система рівнянь
```

```
[t,a] = ode45(f,[0 100],[0.5 0.8 11]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.5 -0.8 11]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> grid on;
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-2 -1.5 11.3]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[2 1.5 11.3]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[1 0.2 8.5]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 -0.2 8.5]);hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[3 2.9 3.9]);hold on;
```

```

plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-3 -2.9 3.9]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.1 0.2 10.1]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.1 -0.2 10.1]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.9 -1.8 6]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.9 1.8 6]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[1.2 1.1 7.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-1.2 -1.1 7.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));

```

Для 5-ї області

```
>> a1=4; b=5;
```

```
Te=2; g=0.4;
```

```
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/a1)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];
%Система рівнянь
```

```

[t,a] = ode45(f,[0 100],[0.5 0.8 3]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.5 -0.8 3]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> grid on;
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 -1.3 3.6]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));

```



```

>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[1 1.3 3.6]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.7 1 3.2]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.7 -1 3.2]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-1.5 -0.5 0.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[1.5 0.5 0.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[1.3 0.6 0.25]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-1.3 -0.6 0.25]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[1 1.2 1.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 -1.2 1.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[0.2 1 0.8]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 100],[-0.2 -1 0.8]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));

```

ДОДАТОК В

Програма для знаходження значень полінома

```

>> p=[20 29 5.08 0.16]; %Коеф. полінома
r=roots(p)
>> p=[20 29 3.28 -3.44];

```

```

r=roots(p)
>> p=[20 29 20.72 31.44];
r=roots(p)
>> p=[20 29 7.6 5.2];
r=roots(p)
>> p=[20 29 4.4 -1.2];
r=roots(p)

```

ДОДАТОК С

Програма для знаходження коренів бікубічного рівняння

```

k := 1 : gama := 0.1 : g := 0.1 : Te := 15.05 :
m := g + k · g :
a :=  $\frac{g}{gama^4}$  :
b :=  $\frac{\left(\frac{1}{gama^2} + m\right)}{gama^2} + \frac{g \cdot (1 + k)}{gama^2} - \frac{g \cdot (Te - 1)}{gama^4}$  :
c :=  $\frac{1}{gama^2} + (1 + k) \cdot \left(\frac{1}{gama^2} + m\right) - \frac{2 \cdot g \cdot (Te - 1)}{gama^2}$  :
d := 1 + k - g · (Te - 1) :
solve(a · x6 + b · x4 + c · x2 + d = 0, x) :

```

ДОДАТОК D

Програма для знаходження координат точок

```

k := 1 : gama := 0.1 : Te := 15.05 : g := 0.1 :
m := g + k · g :
E1 := -0.1219462154:
T1 :=  $\frac{\left(Te + E1^2 \cdot \left(\frac{Te}{gama^2} + m\right) + \frac{g \cdot E1^4}{gama^2}\right)}{\left(1 + E1^2 \cdot \left(\frac{1}{gama^2} + m\right) + \frac{g \cdot E1^4}{gama^2}\right)}$  :
sig1 :=  $\frac{\left((Te - 1) \cdot \left(1 + \frac{E1^2}{gama^2}\right) \cdot g \cdot E1\right)}{\left(1 + E1^2 \cdot \left(\frac{1}{gama^2} + m\right) + \frac{g \cdot E1^4}{gama^2}\right)}$  :
E2 := 0.1219462154:

```

$$T2 := \frac{\left(Te + E2^2 \cdot \left(\frac{Te}{gama^2} + m \right) + \frac{g \cdot E2^4}{gama^2} \right)}{\left(1 + E2^2 \cdot \left(\frac{1}{gama^2} + m \right) + \frac{g \cdot E2^4}{gama^2} \right)} :$$

$$sig2 := \frac{\left((Te - 1) \cdot \left(1 + \frac{E2^2}{gama^2} \right) \cdot g \cdot E2 \right)}{\left(1 + E2^2 \cdot \left(\frac{1}{gama^2} + m \right) + \frac{g \cdot E2^4}{gama^2} \right)} :$$

$$E3 := -2.001279367:$$

$$T3 := \frac{\left(Te + E3^2 \cdot \left(\frac{Te}{gama^2} + m \right) + \frac{g \cdot E3^4}{gama^2} \right)}{\left(1 + E3^2 \cdot \left(\frac{1}{gama^2} + m \right) + \frac{g \cdot E3^4}{gama^2} \right)} :$$

$$sig3 := \frac{\left((Te - 1) \cdot \left(1 + \frac{E3^2}{gama^2} \right) \cdot g \cdot E3 \right)}{\left(1 + E3^2 \cdot \left(\frac{1}{gama^2} + m \right) + \frac{g \cdot E3^4}{gama^2} \right)} :$$

$$E4 := 2.001279367:$$

$$T4 := \frac{\left(Te + E4^2 \cdot \left(\frac{Te}{gama^2} + m \right) + \frac{g \cdot E4^4}{gama^2} \right)}{\left(1 + E4^2 \cdot \left(\frac{1}{gama^2} + m \right) + \frac{g \cdot E4^4}{gama^2} \right)} :$$

$$sig4 := \frac{\left((Te - 1) \cdot \left(1 + \frac{E4^2}{gama^2} \right) \cdot g \cdot E4 \right)}{\left(1 + E4^2 \cdot \left(\frac{1}{gama^2} + m \right) + \frac{g \cdot E4^4}{gama^2} \right)} :$$

$$E0 := 0 :$$

$$sig0 := 0 :$$

$$T0 := Te :$$

ДОДАТОК Е

Програма для знаходження показників Ляпунова

```

restart;
a1 := λ +  $\frac{(3 \cdot E^2 + gam^2 \cdot (1 + k) - 2 \cdot \sigma \cdot E)}{gam^2 + E^2}$ ;
a2 := -1;
a3 := 0;
b1 := -g \cdot (T - 1);
b2 := 1 + alfa \cdot λ;
b3 := -g \cdot E;

c1 :=  $\frac{(\sigma \cdot (gam^2 + 3 \cdot E^2 + k \cdot gam^2) - 2 \cdot E \cdot (Te - T))}{gam^2 + E^2}$ ;
c2 :=  $\frac{E \cdot (gam^2 + E^2 + k \cdot gam^2)}{gam^2 + E^2}$ ;
c3 := β \cdot λ + 1;
A := Matrix([[a1, a2, a3], [b1, b2, b3], [c1, c2, c3]]);
De := collect(linalg[det](A), λ);

gam := 0.1;
alfa := 4;
β := 5;
k := 1;
g := 0.1;
Te := 15.05;

Es := Array([0, -0.12194621540.1219462154 -2.001279367
2.001279367]);
sigmas := Array([0, -0.17097794170.1709779417 -2.006263727
2.006263727]);
Ts := ([15.05, 15.02076654 15.02076654 11.02490586
11.02490586]);
for i from 1 to 5 do
E := Es[i];
σ := sigmas[i];
T := Ts[i];
resh[i] := solve(De, [λ]);
print(reshenie[i] = resh[i]);
end do;

```

ДОДАТОК F

Побудова фазового портрету для п'ятьох точок

```

>> a1=5; b=6; k=1; gamma2=0.01;
>> Te=15.05; g=0.1;
f = @(t,a) [-a(1)*(1+(k/(1+((a(1)^2)/gamma2))))+a(2); (1/a1)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1));
(1/b)*(Te-a(3))-a(2)*a(1)*(1+(k/(1+((a(1)^2)/gamma2))))];%Система рівнянь
grid on;
[t,a] = ode45(f,[0 100],[1 1 15.05]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[1 1 15.05]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[0 0 15.05]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 1 15.05]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 1 15.05]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 -1 15.05]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[1 -1 15.05]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[0 0 12]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[0 0.5 12]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[0 -0.5 12]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[0.12195 0.17098 15.0208]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));

```

```
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 -1 15.02]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 100],[-1 -1 15.02]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
>> [t,a] = ode45(f,[0 150],[-0.3 -0.122 15.02]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 150],[-0.3 -0.122 15.02]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 150],[0.3 0.122 15.02]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 150],[0.3 0.1174 14.94]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 150],[-0.3 -0.1174 14.94]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 150],[0 0 15.5]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 150],[-2 -2 11.0249]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f,[0 150],[2 2 11.0249]);hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```