

УДК [531.19+536.75+537.624]  
КП  
N госрегистрации 0106U001928  
Инв. N

Министерство образования и науки Украины  
Сумский государственный университет  
(СумГУ)

40007, г. Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2;  
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной работе  
д.ф.-м.н.  
\_\_\_\_\_ А.Н. Черноус

2007.12.28

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
**РАЗВИТИЕ НОВЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ  
ВОЗБУЖДЕННЫХ СИСТЕМ**  
(промежуточный)

Начальник НИС

к.т.н., доцент

В.А. Осипов

Руководитель НИР

д.ф.-м.н., профессор

С.И. Денисов

**2007**

Рукопись закончена 27 декабря 2007 г.

Результаты работы рассмотрены научно-техническим советом СумГУ,  
протокол от 22.11.2007, № 4

**СПИСОК АВТОРОВ**

Руководитель НИР, главный научный сотрудник, д.ф.-м.н., профессор	2007.12.25	С.И. Денисов (реферат, введение, разделы 1- 3, заключение)
Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н.	2007.12.25	Е.С. Денисова (введение, подраздел 1.2, за- ключение)
Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н.	2007.12.25	Т.В. Лютый (введение, подраздел 1.1, раз- дел 3, заключение)
Научный сотрудник	2007.12.25	А.Н. Витренко (реферат, введение, раздел 2, заключение)

## РЕФЕРАТ

Отчет о НИР. 77 с., 19 рис., 72 источника.

Объекты исследования – 1) классические частицы, находящиеся в постоянном силовом поле и кусочно-линейном одномерном потенциале; 2) затухающий нелинейный осциллятор, взаимодействующий со случайной средой и испытывающий внутренние флуктуации; 3) ансамбль магнитных наночастиц, возбуждаемых циркулярно-поляризованным магнитным полем.

Цель исследования – установление параметров внешних воздействий, в том числе характеристик шумов, качественно изменяющих поведение вышеуказанных объектов исследования.

Методы исследования: методы математической физики, методы статистической физики, стохастические методы, асимптотические методы, методы численного моделирования.

Найдено функцию плотности вероятности для положения частицы. Показано, что эта функция имеет регулярную и сингулярную части. Для экспоненциального распределения участков однородности дихотомической случайной силы определены статистические характеристики времени достижения частицы заданного уровня. Изучены режимы динамики магнитного момента наночастицы, и численно определены критерии их существования. Указана возможность перемагничивания наночастицы через режим неоднородной прецессии. Показано, что изменение интенсивности взаимной корреляции внешнего и внутреннего шумов осциллятора может приводить к неравновесному переходу, индуцированному шумом.

Результаты НИР могут быть использованы при подготовке специалистов физико-математического профиля, а также при разработке устройств записи информации, элементной базой которых являются ферромагнитные наночастицы.

**СВЕРХЗАТУХАЮЩАЯ ЧАСТИЦА, ДИХОТОМИЧЕСКИЙ ЗАМОРОЖЕННЫЙ БЕСПОРЯДОК, ФЕРРОМАГНИТНАЯ НАНОЧАСТИЦА, ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ЗАТУХАЮЩИЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР, НАНОБАЛКА.**

## СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТ.....	3
СОДЕРЖАНИЕ .....	4
ВВЕДЕНИЕ .....	6
1 Возбужденные системы, содержащие замороженный дихотомический беспорядок.....	9
1.1 Общие положения .....	9
1.2 Аналитически разрешимые модели с дихотомическим беспорядком .....	10
1.2.1 Модель и основные соотношения.....	10
1.2.2 Зависящая от времени функция плотности вероятности.....	13
1.2.3 Моменты плотности вероятности .....	18
1.2.4 Временная эволюция вероятности $P_t(x)$ .....	20
1.2.4.1 Асимптотическое поведение плотности вероятности $P_t(x)$ .....	22
1.2.4.2 Численное моделирование .....	25
1.2.5 Выводы к подразделу 1.2.....	26
1.3 Время достижения заданного уровня.....	26
1.3.1 Представление распределения времен достижения частицей заданного уровня в виде интеграла по траекториям.....	27
1.3.2 Характеристики функции времени достижения заданного уровня .....	30
1.3.3 Моменты времени достижения заданного уровня.....	33
1.3.4 Свойства плотности вероятности времени достижения заданного уровня .....	35
1.3.4.1 Поведение на малых расстояниях.....	36
1.3.4.2 Поведение на больших расстояниях.....	37
1.3.4.3 Численное подтверждение .....	38
1.3.4.4 Коэффициенты эксцесса и асимметрии.....	41
1.3.5 Выводы к подразделу 1.3.....	43
2 Неравновесный переход в нелинейном осцилляторе, индуцированный	

взаимной корреляцией шумовых источников .....	44
2.1 Общие положения .....	44
2.2 Обоснование модели .....	46
2.3 Равновесная плотность вероятности .....	48
2.4 Параметры порядка .....	50
2.5 Эффективный потенциал .....	53
2.6 Выводы к разделу 2 .....	54
3 Перемагничивание наночастицы циркулярно-поляризованным магнитным полем .....	55
3.1 Общие положения .....	55
3.2 Модель и основные соотношения .....	57
3.3 Численный анализ динамики магнитного момента.....	59
3.4 Выводы к разделу 3 .....	64
ВЫВОДЫ.....	65
Приложение А .....	67
Приложение В .....	68
Приложение С .....	70
Перечень ссылок .....	72

## ВВЕДЕНИЕ

В отличие от статистически равновесных систем возбужденные системы в состояниях, далеких от равновесного, демонстрируют гораздо большее многообразие явлений и свойств [1]. Весь спектр последних тесно связан с микроскопическими механизмами взаимодействий элементов системы. Естественными следствиями этого являются сложность теоретического описания и, одновременно, большое значение (в прикладном и фундаментальном смысле) точных результатов. Поэтому основной целью данной НИР есть разработка теоретических методов описания ряда ключевых моделей физики, а также исследование основных свойств изучаемых систем при различных внешних воздействиях с учетом флуктуаций среды. Следует отметить, что именно случайные воздействия среды в ряде случаев приводят к качественным изменениям в поведении систем. Примерами таких изменений могут служить индуцированные внешним шумом фазовые переходы [2], стохастический резонанс [3], резонансная активация [4], направленный транспорт [5].

Первой изучаемой системой является классическая частица, находящаяся в постоянном силовом поле и в кусочно-линейном одномерном случайном потенциале, представляющем специальный тип пространственной неоднородности, которая имеет случайный характер и называется замороженным дихотомическим беспорядком. В случае, когда диссипация энергии происходит достаточно быстро, удобно воспользоваться так называемым сверхзатухающим приближением, в рамках которого в уравнении движения пренебрегается наличием инерционного слагаемого. Одномерное уравнение движения для классических частиц в сверхзатухающем пределе является простой и, в то же время, очень эффективной моделью для изучения многих физических, биологических, экономических и других систем. В отсутствие шумов, зависящих от времени и обусловленных взаимодействием с флуктуирующим окружением, данное уравнение учитывает исключительно эффекты замороженного беспорядка. В этом

случае с его помощью описывается ряд физических явлений, таких как транспорт частиц в детерминистических рэтчетах с замороженным беспорядком [6 - 8], и динамика ряда локализованных структур, таких как доменные границы в случайных магнетиках и вихри в сверхпроводниках второго рода. Несмотря на отсутствие шума, для данного уравнения известны только несколько точных решений. Настоящая часть НИР посвящена поиску точного аналитического описания статистических характеристик частиц, находящихся в среде с замороженным дихотомическим беспорядком.

Вторая модель, которая изучается в настоящей работе, это затухающий нелинейный осциллятор, который взаимодействует со случайной средой и испытывает внутренние флуктуации. Стохастические осцилляторы с двумя источниками шума, один из которых внешний, другой – внутренний, являются актуальными объектами исследования. Физическими реализациями такого осциллятора являются, например, наномеханические системы, в том числе нанобалки [9, 10], используемые в качестве детекторов малых масс. Именно действие флуктуаций приводит к значительному поперечному смещению центра масс нанобалки. Наличие флуктуаций параметров внешней среды, а, также, флуктуаций параметров самого осциллятора моделируется случайными потенциалами, белым и/или цветными шумами, которые в общем случае взаимнокоррелированы. Целью данного этапа НИР является определение влияния корреляции шумов на статистические характеристики осциллятора.

И, наконец, последней изучаемой системой является ансамбль магнитных наночастиц, возбуждаемых циркулярно-поляризованным магнитным полем, плоскость поляризации которого перпендикулярна осям легкого намагничивания частиц. Актуальность изучения таких систем обусловлена, в первую очередь, перспективами использования наночастиц в качестве магнитных носителей информации [11-13]. Бит информации определяется тем, в каком из двух равновесных состояний, связанных с сильной одноосной анизотропией, находится магнитный момент наночастицы. Поэтому наиболее важным с точки зрения процесса записи и хранения данных является вопрос термостабильности

магнитного момента и управляемого переключения его состояния, причем последнее, в конечном счете, определяет время перезаписи информации. Исходя из этого, поиск способов быстрого и мало энергоемкого изменения направления магнитного момента является важной прикладной задачей, которая вызывает интерес исследователей [55-59].

В рамках данной НИР теоретически изучается влияние циркулярно-поляризованного магнитного поля на динамическую стабильность магнитного момента наночастицы.



# 1 ВОЗБУЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗАМОРОЖЕННЫЙ ДИХОТОМИЧЕСКИЙ БЕСПОРЯДОК

## 1.1 Общие положения

Одномерное уравнение движения для классических частиц в сверхзатухающем пределе представляет собой простую и, в то же время, очень полезную модель для изучения многих физических, биологических, экономических и других систем. В зависимости от характера сил, действующих на частицы, это уравнение служит основой для описания различных явлений в этих системах. В частности, если вынуждающее силовое поле содержит случайную составляющую, связанную с влиянием окружения, оно описывает множество явлений, вызванных шумом, в том числе индуцированные шумом переходы [2], направленный транспорт [14, 15], аномальную диффузию в неупорядоченных средах [16, 17] и стохастический резонанс [18]. Следует отметить, что в некоторых случаях, особенно в рамках приближения белого шума, статистические свойства решения этого уравнения могут быть получены аналитически.

Если среда случайно неоднородна, тогда вынуждающее силовое поле содержит случайные функции пространственных переменных. В этом случае сверхзатухающая динамика будет демонстрировать эффекты, вызванные как шумом, так и неоднородностями среды. При этом аномальное поведение системы может наблюдаться даже в простейшей ситуации аддитивного белого шума [17]. В последнем случае точные результаты были получены для беспорядка Синая [19-22], гауссова беспорядка [23-27], а также для ряда особых случаев не гауссова беспорядка [28-32].

Когда шумовая составляющая, обусловленная случайным окружением, становится незначительной, уравнения движения в сверхзатухающем пределе учитывают исключительно эффекты замороженного беспорядка. Это уравнение эффективно описывает, например, транспорт частиц в детерминистических

рэтчетах с замороженным беспорядком [6-8] и может быть использовано для изучения динамики локализованных структур, таких как доменные границы в случайных магнетиках и вихри в сверхпроводниках второго рода. Несмотря на то, что случайная составляющая, зависящая от времени, отсутствует, существует только несколько точных результатов в этой области. В настоящее время данная проблематика исследуется преимущественно численно или с использованием асимптотических методов. Данная же работа посвящена поиску точного аналитического описания статистических характеристик частиц, находящихся в среде с замороженным дихотомическим беспорядком.

## 1.2 Аналитически разрешимые модели с дихотомическим беспорядком

### 1.2.1 Модель и основные соотношения

Рассмотрим сверхзатухающую динамику классических частиц, которая подчиняется уравнению движения, записанному в безразмерном виде [33]

$$\dot{X}_t = f + g(X_t). \quad (1.1)$$

Здесь  $X_t$  обозначает координату частицы,  $f (> 0)$  – постоянная сила и  $g(x) = -dU(x)/dx = \pm g$  – дихотомическая случайная сила, создаваемая кусочно-линейным случайным потенциалом  $U(x)$  (см. рисунок 1.1). Предполагается, что случайные интервалы  $s_j$  линейных участков  $U(x)$  статистически независимы и распределены с такой же (экспоненциальной) плотностью вероятности  $p(s)$ . Кроме того, мы предполагаем, что имеют место условия  $f > g$  и  $g(+0) = -g$ . В начальный момент времени частицы находятся в начале координат, а все реализации случайного потенциала  $U(x)$  в начале координат являются возрастающими,  $dU(x)/dx|_{x=+0} = +g$ , поэтому

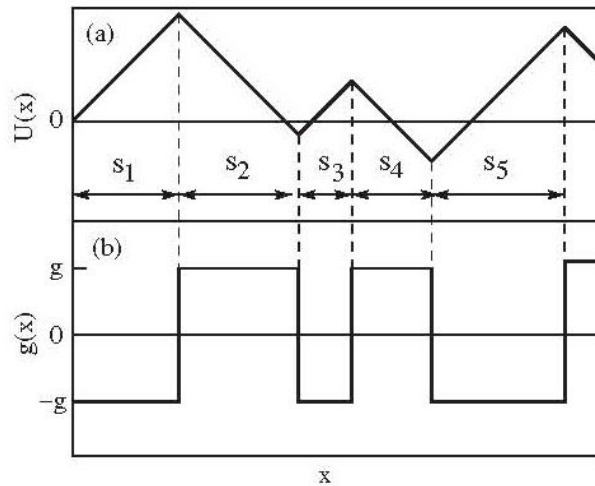


Рисунок 1.1 – Схематическое представление а) кусочно-линейного случайного потенциала  $U(x)$  и б) соответствующей дихотомической случайной силы  $g(x) = -dU(x)/dx$  как функции координаты  $x$ .

$$X_0 = 0, \quad g(+0) = -g. \quad (1.2)$$

В этом предположении нетривиальное решение уравнения (1.1) существует, если  $f > g$ . В противном случае частицы остаются локализованными в начале координат.

Уравнение (1.1) имеет минимальную форму, которая учитывает эффекты замороженного беспорядка при сверхзатухающем движении частиц. Его главное преимущество заключается в том, что многие статистические свойства  $X_t$  можно полностью описать аналитически. В частности, с его помощью можно исследовать многие важные физические явления, такие как низкотемпературный электрический ток через слоистые среды, толщина слоев которых случайна, а также распространения света в межзвездном пространстве.

Целью представленных исследований является установление явного вида плотности вероятности  $P_t(x)$  того, что  $X_t = x$  для момента времени  $t$ . Для решения поставленной задачи исходим из определения  $P_t(x)$  в виде

$$P_x(t) = \langle \delta(x - X_t) \rangle, \quad (1.3)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по траекториям  $g(x)$ , а  $\delta(x - X_t)$  является  $\delta$ -функцией Дирака. Далее введем общую вероятность  $W_n(t)$  того, что в данной реализации функции  $g(x)$  на интервале  $(0, X_t)$  имеется  $n$  ( $\geq 1$ ) смен знаков (переходов  $g \leftrightarrow -g$ ). В этом случае координата частицы  $X_t$  между  $n$ -ым и  $(n+1)$ -ым скачками  $g(x)$  может быть записана как

$$X_t = \sum_{j=1}^n s_j + \tilde{s}_{n+1}, \quad (1.4)$$

где  $\tilde{s}_{n+1} < s_{n+1}$ . В соответствии с (1.1) частица преодолевает расстояние  $s_j$  за время  $s_j/[f + (-1)^j g]$ , поэтому справедливо выражение

$$\sum_{j=1}^n \frac{s_j}{f + (-1)^j g} + \frac{\tilde{s}_{n+1}}{f + (-1)^{n+1} g} = t. \quad (1.5)$$

Это означает, что

$$\tilde{s}_{n+1} = [f + (-1)^{n+1} g] \left( t - \sum_{j=1}^n \frac{s_j}{f + (-1)^j g} \right). \quad (1.6)$$

Условие

$$\sum_{j=1}^n \frac{s_j}{f + (-1)^j g} \leq t, \quad (1.7)$$

являющееся следствием условия  $\tilde{s}_{n+1} \geq 0$ , определяет в  $n$ -мерном пространстве параметров  $s_j$  область  $\Omega_n(t)$  разрешенных значений  $s_j$ . Следовательно, поскольку вероятность того, что  $(n+1)$ -ый скачок  $g(x)$  имеет место при  $\tilde{s}_{n+1} < s$ , равна

$\int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds$ , можно получить

$$W_n(t) = \int_{\Omega_n(t)} \left( \prod_{j=1}^n ds_j p(s_j) \right) \int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds. \quad (1.8)$$

Если функция  $g(x)$  не содержит скачков на интервале  $(0, X_t)$ , т. е. если  $n = 0$ , об-

щая вероятность реализации такой траектории задается выражением

$$W_0(t) = \int_{\tilde{s}_1}^{\infty} p(s) ds, \quad (1.9)$$

где  $\tilde{s}_1 = (f - g)t$ . Отметим, что вероятности  $W_0(t)$  и  $W_n(t)$  нормированы на единицу:  $W_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) = 1$  (см. Приложение А).

Вышеуказанные результаты совместно с (1.3) показывают, что функция распределения вероятностей может быть записана в виде

$$P_t(x) = \delta[x - (f - g)t]W_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} P_t^{(n)}(x), \quad (1.10)$$

где

$$P_t^{(n)}(x) = \int_{\Omega_n(t)} \left( \prod_{j=1}^n ds_j p(s_j) \right) \int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds \delta \left( x - \sum_{j=1}^n s_j - \tilde{s}_{n+1} \right). \quad (1.11)$$

Эти выражения являются представлением плотности вероятности  $P_t(x)$  в виде интеграла по траекториям в случае дихотомической случайной силы  $g(x)$ . Здесь под траекторией следует понимать конкретную реализацию случайной функции  $g(x)$ . Подчеркнем, что данное представление есть достаточно общим и остается справедливым для произвольных плотностей  $p(s)$  распределений случайных интервалов  $s_j$ .

### 1.2.2 Зависящая от времени функция плотности вероятности

Результат, выражаемый формулой (1.10), в силу математической сложности не удобен в использовании. Основная сложность заключается в необходимости интегрирования по  $n$ -мерной области  $\Omega_n(t)$ , а также суммирования по всем  $n$ . В настоящем исследовании эта проблема решена для случая, когда длины случайных интервалов  $s_j$  распределены экспоненциально с плотностью  $p(s) = \lambda \exp(-\lambda s)$ , где  $\lambda^{-1}$  имеет смысл среднего значения для интервалов  $s_j$ . Ключевым моментом приближения, которое используется для достижения цели, яв-

ляется интегральное представление единичной функции Хевисайда [34]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(iz+y)\kappa}}{iz+y} dz = \begin{cases} 1, \kappa > 0 \\ 0, \kappa < 0 \end{cases}. \quad (1.12)$$

Здесь  $y$  – положительный действительный параметр. Если преобразовать выражение (1.11) с использованием соотношения (1.12), полагая что

$$\kappa = t - \sum_{j=1}^n s_j / [f + (-1)^j g], \quad (1.13)$$

получим

$$P_t^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\exp[(iz+y)t]}{iz+y} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n ds_j p(s_j) \exp[-(iz+y)s_j / (f + (-1)^j g)] \right) \times \\ \times \int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds \delta \left( x - \sum_{j=1}^n s_j - \tilde{s}_{n+1} \right). \quad (1.14)$$

Несмотря на то, что в (1.14) содержатся кратные интегралы, эта форма представления  $P_t^{(n)}(x)$  является более удобной по сравнению с (1.11), поскольку интегрирование в (1.14) производится по  $n$  независимым переменным  $s_j$ . Используя интегральное представление дельта-функции Дирака

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\eta x] d\eta, \quad (1.15)$$

а также принимая во внимание, что согласно (1.5)

$$\sum_{j=1}^{2m} s_j + \tilde{s}_{2m+1} = (f - g)t + \frac{2g}{f + g} \sum_{j=1}^m s_{2j}, \quad (1.16)$$

выражение (1.14) при  $p(s) = \lambda \exp(-\lambda s)$  и  $n = 2m$  может быть переписано в виде

$$P_t^{(2m)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp[-i\eta(x - (f - g)t)] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{iz + y} \exp[(iz + y - \lambda(f - g))t] I^m(v_1) I^m(v_2). \quad (1.17)$$

Здесь

$$I(v) = \int_0^{\infty} p(s) \exp[-(v - \lambda)s] ds = \frac{\lambda}{v}, \quad (1.18)$$

причем  $\text{Re}(v) > 0$  и

$$v_1 = \frac{iz + y}{f - g}, \quad v_2 = \frac{iz + y + 2g(\lambda - i\eta)}{f + g}. \quad (1.19)$$

Аналогичным образом, поскольку

$$\sum_{j=1}^{2m-1} s_j + \tilde{s}_{2m+1} = (f + g)t - \frac{2g}{f - g} \sum_{j=1}^m s_{2j-1}, \quad (1.20)$$

выражение (1.14) для  $n = 2m - 1$  приобретает вид

$$P_t^{(2m-1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp[-i\eta(x - (f + g)t)] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{iz + y} \exp[(iz + y - \lambda(f + g))t] I^m(v_3) I^{m-1}(v_4), \quad (1.21)$$

где

$$v_3 = \frac{iz + y - 2g(\lambda - i\eta)}{f - g}, \quad v_4 = \frac{iz + y}{f + g}. \quad (1.22)$$

Пользуясь методом контурного интегрирования, можно показать, что интегралы по переменной  $z$  в выражениях (1.17) и (1.21) не зависят от действительного положительного параметра  $y$ . Это значит, что в соответствии с определением (1.11), частные плотности вероятностей  $P_t^{(2m)}(x)$  и  $P_t^{(2m-1)}(x)$  также не зависят от параметра  $y$ . Таким образом, для расчета плотности вероятности  $P_t(x)$  мы можем использовать наиболее удобное значение  $y$ . В частности, если перед выполнением процедуры интегрирования по  $z$  сначала произвести суммирование по  $m$ , целесообразно выбрать  $y > \lambda(f - g)$ , чтобы избежать расходимости

сумм и интегралов. В этом случае условие  $\operatorname{Re}(v_k) > \lambda$  выполняется при всех  $k$ , и, следовательно, имеет место неравенство  $|I(v_k)| < 1$ , которое позволяет воспользоваться формулой суммирования геометрической прогрессии для вычисления сумм рядов

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} I^m(v_1)I^m(v_2) &= \frac{I(v_1)I(v_2)}{1 - I(v_1)I(v_2)}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} I^m(v_3)I^{m-1}(v_4) &= \frac{I(v_3)}{1 - I(v_3)I(v_4)}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Далее, осуществляя замену  $W_0(t) = \exp[-\lambda(f-g)t]$ , а также

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_t^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [P_t^{(2n)}(x) + P_t^{(2n-1)}(x)] \quad (1.24)$$

в уравнении (1.10) и учитывая вышеприведенные результаты, получим плотность вероятности  $P_t(x)$  в виде интеграла Фурье

$$P_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\eta) \exp[-i\eta x] d\eta, \quad (1.25)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_t(\eta) = & -\frac{\exp[-(\lambda - i\eta)ft]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{iz + y + 2g(\lambda - i\eta)}{(z - z_1)(z - z_2)} \exp[(\lambda - i\eta)gt] + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda(f-g)}{(z - z_3)(z - z_4)} \exp[-(\lambda - i\eta)gt] \right] \exp[(iz + y)t] dz \end{aligned} \quad (1.26)$$

– характеристическая функция  $X_t$ ,

$$\begin{aligned} z_1 &= g\eta + a(\eta) + i[y + \lambda g + b(\eta)], \\ z_2 &= g\eta - a(\eta) + i[y + \lambda g - b(\eta)], \\ z_3 &= -g\eta + a(\eta) + i[y - \lambda g + b(\eta)], \\ z_4 &= -g\eta - a(\eta) + i[y - \lambda g - b(\eta)] \end{aligned} \quad (1.27)$$

и  $a(\eta) = \lambda g^2 \eta / b(\eta)$ ,



$$b(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \lambda^2 f^2 - g^2 \eta^2 + \left[ (\lambda^2 f^2 - g^2 \eta^2)^2 + 4\lambda^2 g^4 \eta^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (1.28)$$

В итоге, вычисляя интеграл в (1.26) методом контурного интегрирования (см. Приложение В), находим характеристическую функцию  $\phi_t(\eta)$ , выраженную в элементарных функциях

$$\phi_t(\eta) = e^{-(\lambda - i\eta)ft} \left( \frac{\lambda f - ig\eta}{b(\eta) - ia(\eta)} \sinh[b(\eta)t - ia(\eta)t] + \cosh[b(\eta)t - ia(\eta)t] \right). \quad (1.29)$$

Как и ожидалось, характеристическая функция не зависит от вспомогательного параметра  $y$ . Функции  $a(\eta)$  и  $b(\eta)$  при  $|\eta| \rightarrow \infty$  стремятся к  $g\eta$  и к  $\lambda g$ , соответственно. В соответствии с этим,  $\phi_t(\eta) \sim \exp[i\eta(f - g)t]$  при  $|\eta| \rightarrow \infty$ , а, значит, плотность вероятности  $P_t(x)$  имеет сингулярную часть, пропорциональную  $\delta$ -функции Дирака. Следовательно

$$P_t(x) = \exp[-\lambda(f - g)t] \delta(x - (f - g)t) + \tilde{P}_t(x), \quad (1.30)$$

где

$$\tilde{P}_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_t(\eta) \exp[-i\eta x] d\eta, \quad (1.31)$$

$$\tilde{\phi}_t(\eta) = \phi_t(\eta) - \exp[-(f - g)(\lambda - i\eta)t], \quad (1.32)$$

и  $\tilde{\phi}_t(\eta) \rightarrow 0$  при  $|\eta| \rightarrow \infty$ . Выражения (1.29) – (1.32) описывают плотность вероятности  $P_t(x)$  в более простой и удобной форме по сравнению с (1.10) и (1.11) и являются основными результатами данной части работы. Это первый пример полного аналитического описания статистических свойств нетривиальных систем с замороженным беспорядком.

Изложенный подход может быть также использован для нахождения плотности вероятности  $P_t(x)$  в случае, когда дихотомическая случайная функция  $g(x)$  характеризуется другими начальными статистическими свойствами. В частности, можно задать условия  $g(+0) = -g$  с вероятностью  $p_1$  и  $g(+0) = +g$  с вероятностью  $p_2$  ( $p_1 + p_2 = 1$ ). В этом случае искомая плотность вероятности бу-

дет задаваться выражением

$$R_t(x) = p_1 P_t(x) + p_2 P_t(x) \Big|_{g \rightarrow -g}. \quad (1.33)$$

### 1.2.3 Моменты плотности вероятности

Моменты плотности вероятности

$$\langle X_t^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P_t(x) dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.34)$$

выражаются через характеристическую функцию известным способом

$$\langle X_t^k \rangle = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\eta^k} \phi_t(\eta) \Big|_{\eta=0}. \quad (1.35)$$

В принципе, с помощью определения (1.35) и выражения (1.29) моменты можно вычислить непосредственно. В частности, для первого момента можно записать

$$\langle X_t \rangle = \frac{f^2 - g^2}{f} t - \frac{g(f - g)}{2\lambda f^2} (1 - \exp[-2\lambda f t]). \quad (1.36)$$

В случае малых времен, для которых справедливо условие  $t \ll 1/\lambda f$ , последнее выражение обращается в  $\langle X_t \rangle = (f - g)t$ . Этот факт имеет простую интерпретацию: на малых временах условие  $g(X_t) = -g$  выполняется с практически единичной вероятностью, и практически с вероятностью 1 частицы будут двигаться с безразмерной скоростью  $f - g$ . Если  $t \gg g/\lambda f^2$ , то (1.36) преобразуется к виду  $\langle X_t \rangle = (f^2 - g^2)t/f$ , т.е. скорость частиц на больших расстояниях  $\langle v \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle X_t \rangle / t$ , что соответствует  $(f^2 - g^2)/f$  (см. рис. 1.2, а). Для того, чтобы объяснить в дальнейшем этот результат, обозначим общую длину четных отрезков, которые принадлежат интервалу  $(0, \langle X_t \rangle)$ , через  $s_{2m}$ , а нечетных – как  $s_{2m-1}$ . Как  $s_{2m}$ , так и  $s_{2m-1}$  стремятся к  $\langle X_t \rangle / 2$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, общее время, которое частица проводит либо в области четного, либо в области нечетного от-

резков, определяется в виде

$$t_- = \langle X_t \rangle / 2(f - g), \quad t_+ = \langle X_t \rangle / 2(f + g). \quad (1.37)$$

Поскольку  $t_+ + t_- = t$ , несложно увидеть, что в пределе больших времен

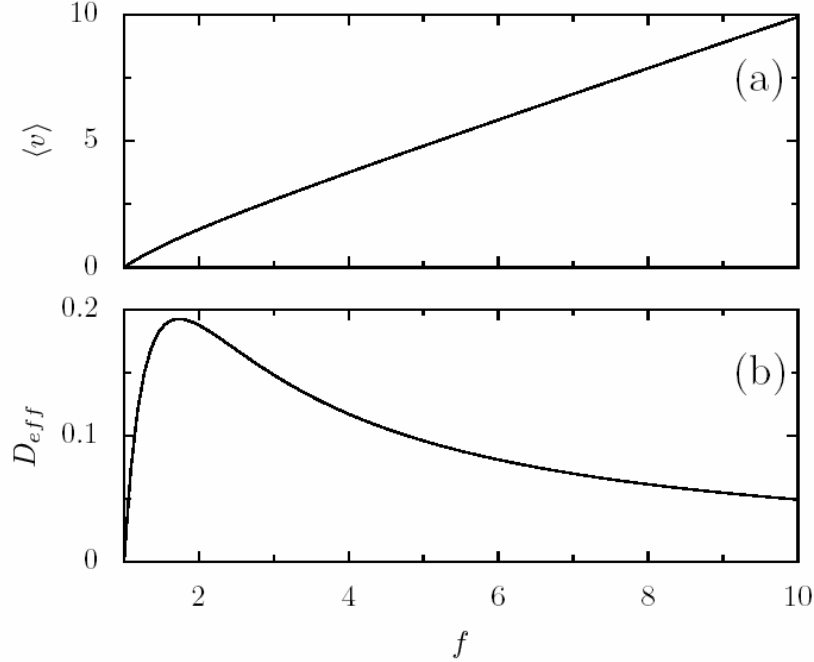


Рисунок 1.2 – Поведение средней скорости  $\langle v \rangle$  (а) и эффективного коэффициента диффузии  $D_{eff}$  (б) в зависимости от внешней силы для значений параметров  $\lambda = g = 1$ .

средняя скорость составляет  $\langle v \rangle = (f^2 - g^2)/f$ . Подчеркнем, что данный результат не зависит от вида плотности вероятности  $p(s)$  распределения длин интервалов  $s_j$ .

Второй момент в соответствии (1.35) и (1.29) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \langle X_t^2 \rangle = & \frac{(f^2 - g^2)^2}{f^2} t^2 - \frac{g(f^2 - g^2)(f - 2g)}{\lambda f^3} t - \frac{g^2(f - g)(f + 3g)}{2\lambda^2 f^4} + \\ & + \frac{g(f - g)}{2\lambda^2 f^4} [2\lambda f(f^2 + g^2)t + g(f + 3g)] \exp[-2\lambda ft]. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Как следствие, дисперсия  $\sigma_t^2 = \langle X_t^2 \rangle - \langle X_t \rangle^2$  координаты  $X_t$  частицы принимает вид

$$\sigma_t^2 = \frac{g^2(f-g)}{2\lambda^2 f^4} \left[ 4\lambda f(f+g)t - 3f - 5g + 4(f+g+2\lambda fgt)e^{-2\lambda ft} - (f-g)e^{-4\lambda ft} \right]. \quad (1.39)$$

На малых временах, когда  $t \ll 1/\lambda f$ , дисперсия  $\sigma_t^2$  положения частицы растет как  $t^3$ ,  $\sigma_t^2 = (4/3)\lambda g^2(f-g)t^3$ , в то время как на больших временах, когда  $t \gg 1/\lambda f$ , она растет линейно со временем  $\sigma_t^2 = g^2(f^2 - g^2)t/\lambda f^3$ . Последнее доказывает, что частицы демонстрируют нормальную смещенную диффузию с эффективным коэффициентом  $D_{eff}$

$$D_{eff} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_t^2}{2t} = \frac{g^2(f^2 - g^2)}{2\lambda f^3}. \quad (1.40)$$

Интересно, что  $D_{eff}$  изменяется монотонно с изменением внешней силы  $f$ :  $D_{eff} = (f-g)/\lambda$  при  $f \approx g$ ,  $D_{eff} = g^2/2\lambda f$  при  $f \gg g$  и  $\max(D_{eff}) = g/(3^{3/2}\lambda)$  для  $f = (3)^{1/2}g$ , см. рис. 1.2, б.

#### 1.2.4 Временная эволюция вероятности $P_t(x)$

В соответствии с выражениями (1.32) и (1.29) при  $t = 0$  выполняется соотношение  $\tilde{\phi}_0(\eta) = 0$ , поэтому имеют место равенства  $\tilde{P}_0(x) = 0$  и  $P_0(x) = \delta(x)$ . Этот результат есть прямое следствие начального условия  $X_0 = 0$ . При  $t > 0$  плотность вероятности  $P_t(x)$  содержит как сингулярную составляющую, пропорциональную  $\delta$ -функции, так и регулярную составляющую. Наличие сингулярной составляющей обусловлено наличием конечной, ненулевой вероятности того, что случайная функция  $g(x)$  не изменит знак на интервале  $[0, (f-g)t]$ . Общая вероятность реализации такой траектории  $W_0(t) = \exp[-\lambda(f-g)t]$  определяет вклад сингулярной части и, поскольку частицы движутся со скоростью  $f-g$ , это рас-

пределение также движется вправо с такой же скоростью.

Так как  $f - g$  и  $f + g$  – это наименьшая и наибольшая скорости движения, регулярная часть плотности вероятности  $\tilde{P}_t(x)$  определена на интервале  $[(f - g)t, (f + g)t]$ . Если координата  $x$  принадлежит этому интервалу, то  $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(x) = \lambda(f - g)/2g$ . Для малых, но конечных времен,  $\tilde{P}_t(x)$  является линейной убывающей функцией  $x$ . С ростом  $t$   $\tilde{P}_t(x)$  трансформируется в унимодальную форму.

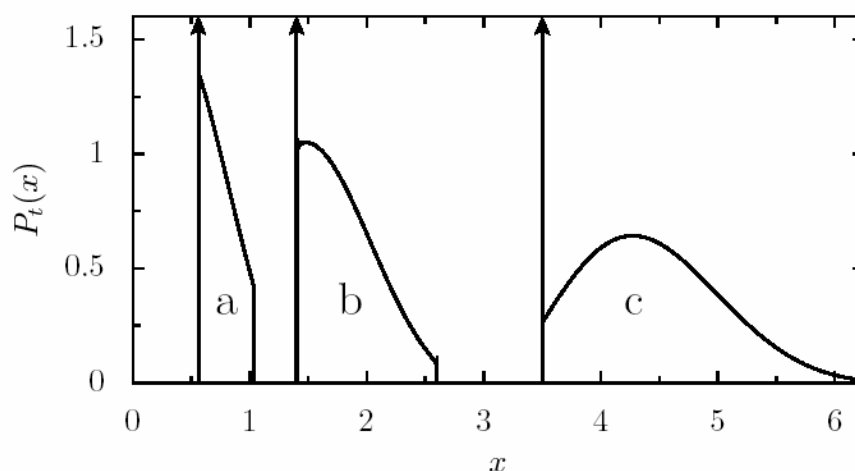


Рисунок 1.3 – Временная эволюция плотности вероятности  $P_t(x)$  при следующих значениях параметров:  $g = 0.3$ ;  $f = 1$ ;  $\lambda = 1$ . (a) –  $t = 0.75$ ; (b) –  $t = 2$ ; (c) –  $t = 5$ . Вертикальная стрелка обозначает  $\delta$ -сингулярность.

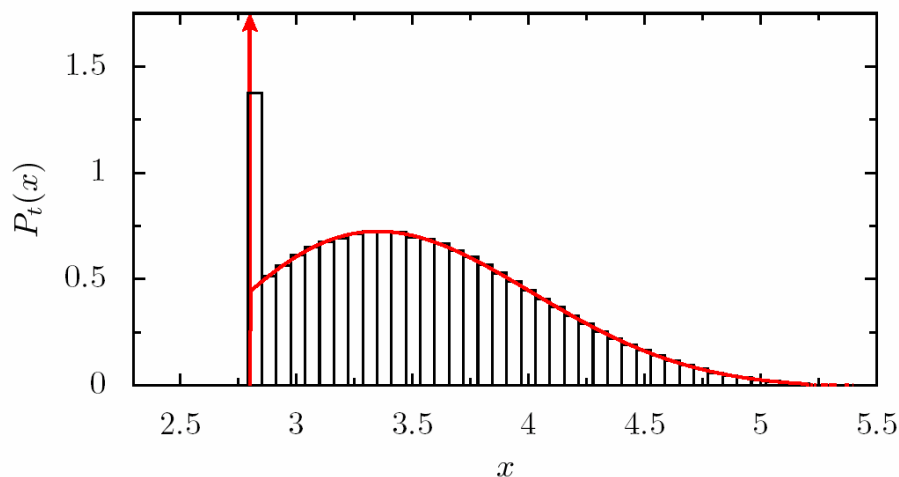


Рисунок 1.4 – Плотность вероятности  $P_t(x)$ , полученная теоретически и численно, при следующих значениях параметров:  $g = 0.3$ ;  $f = 1$ ;  $\lambda = 1$ ,  $t = 4$ . Сплошная

линия – теоретический результат, гистограмма – численный.

Эта особенность проиллюстрирована на рисунке 1.3. Чтобы проверить теоретические результаты, уравнение (1.1) было решено численно. Как видно из рисунка 1.4, они полностью подтверждаются численно.

#### 1.2.4.1 Асимптотическое поведение плотности вероятности $P_t(x)$

Основываясь на центральной предельной теореме теории вероятностей [35], следует ожидать, что плотность вероятности  $P_t(x)$  будет приобретать форму нормальной (гауссовой) плотности при  $t \rightarrow \infty$ . Чтобы проанализировать поведение функции  $P_t(x)$  на больших временах, рассмотрим масштабированную плотность вероятности

$$P'_t(\xi) = \sigma_t P_t(\langle X_t + \sigma_t \xi \rangle), \quad (1.41)$$

которая в соответствии с (1.25) может быть записана в форме

$$P'_t(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(u/\sigma_t) \exp(-iu\langle X_t \rangle/\sigma_t - iu\xi) du. \quad (1.42)$$

Полагая, что  $|u| \ll \sigma_t^{1/3}$ , и оставляя только первые два члена асимптотического разложения функции  $\phi_t(u/\sigma_t) \exp[-iu\langle X_t \rangle/\sigma_t]$  при  $t \rightarrow \infty$ , получим

$$\phi_t(u/\sigma_t) \exp[-iu\langle X_t \rangle/\sigma_t] = e^{-u^2/2} \left[ 1 - i \frac{gu^3}{2\sqrt{\lambda f(f^2 - g^2)t}} \right]. \quad (1.43)$$

Производя замену в (1.41) согласно (1.43), получим

$$P'_t(\xi) = P'_\infty(\xi) + G_t(\xi), \quad (1.44)$$

где

$$P'_\infty(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-u^2/2 - iu\xi] du = \frac{\exp[-\xi^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \quad (1.45)$$

– функция, задающая стандартное нормальное распределение, а

$$G_t(\xi) = -i \frac{g^2}{4\pi\lambda f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-u^2/2 - iu\xi] u^3 du = -\frac{g(3\xi - \xi^3)}{2\sqrt{\lambda f(f^2 - g^2)}t} P'_\infty(\xi) \quad (1.46)$$

( $|G(\xi)|/P'_\infty(\xi) \ll 1$ ) описывает отклонение  $P'_t(\xi)$  от  $P'_\infty(\xi)$ . Таким образом,  $P'_t(\xi)$  медленно ( $\sim t^{1/2}$ ) приближается к гауссовскому распределению при  $t \rightarrow \infty$ .

Количественно описать степень отклонения  $P_t(x)$  от распределения Гаусса можно с помощью коэффициента эксцесса

$$k(t) = \frac{\langle (X_t - \langle X_t \rangle)^4 \rangle}{\sigma_t^4} - 3. \quad (1.47)$$

Примечательно, что  $k(t)$  равен нулю, если  $X_t$  распределены по гауссовому закону. Эта временная зависимость вычислена с помощью выражения (1.35). Результат приведен на рисунке 1.5. В соответствии с центральной предельной теоремой, коэффициент эксцесса стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . На малых временах формула (1.30) преобразуется к виду

$$P_t(x) = [1 - \lambda(f - g)t] \delta[x - (f - g)t] + \frac{\lambda(f - g)}{2g}, \quad (1.48)$$

где  $x \in [(f - g)t, (f + g)t]$ . Для этой плотности вероятности можно получить  $\langle (X_t - \langle X_t \rangle)^4 \rangle = (16/5)\lambda g^4(f - g)t^5$ ,  $\sigma_t^2 = (4/3)\lambda g^2(f - g)t^3$ , и, таким образом,  $k(t) = (9/5)[\lambda(f - g)t]^{-1}$  при  $t \rightarrow 0$ . Расходимость коэффициента эксцесса при  $t \rightarrow 0$  подтверждает тот факт, что на малых временах плотность вероятности  $P_t(x)$  сильно отличается от нормальной.

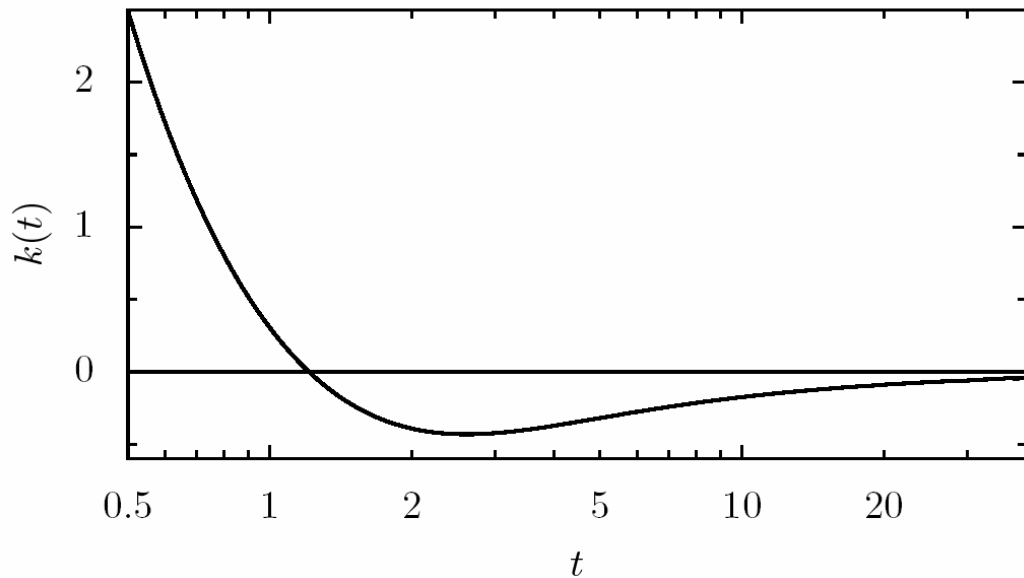


Рисунок 1.5 – Отклонение от Гауссового распределения. Коэффициент эксцесса в логарифмическом масштабе при  $f = 1$ ,  $g = 0.3$ ,  $\lambda = 1$ .

В то же время при  $t \rightarrow \infty$   $P_t(x)$  асимптотически стремится к нормальному распределению с дисперсией  $\sigma_t^2 \sim t$ . Это позволяет сделать интересный вывод: при определенных условиях поведение рассматриваемых частиц в пределе больших времен аналогично поведению броуновских частиц. Чтобы пояснить это, рассмотрим безразмерное уравнение динамики броуновских частиц в пределе большого затухания

$$\dot{x}_t = F + \xi(t), \quad x_0 = 0. \quad (1.49)$$

Здесь  $x_t$  – координата броуновской частицы,  $F$  – внешняя сила,  $\xi(t)$  – гауссовский тепловой белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляцией, пропорциональной  $\delta$ -функции:  $\overline{\xi(t)\xi(t')} = 2\Delta\delta(t-t')$ . Черта сверху означает усреднение по реализациям случайной функции  $\xi(t)$ , а  $\Delta$  есть интенсивность белого шума. Хорошо известно [36], что величина  $x_t$  распределена по гауссовому закону, ее среднее значение определяется как  $\overline{x_t} = Ft$ , а дисперсия  $\overline{(x_t - \overline{x_t})^2} = 2\Delta t$ . Таким образом, поведение броуновских частиц и



частиц, динамика которых описывается уравнением (1.1), на больших временах одно и то же, если предположить, что  $\overline{x_t} = \langle X_t \rangle$  и  $\overline{(x_t - \overline{x_t})^2} = \sigma_t^2$ . Отсюда следует, что  $F = (f^2 - g^2)/f$  и  $\Delta = D_{eff}$ . В случае броуновского движения интенсивность внешнего шума  $\Delta$  пропорциональна температуре. Таким образом,  $X_t$  может характеризоваться безразмерной эффективной температурой  $T_{eff} = D_{eff}$ .

#### 1.2.4.2 Численное моделирование

Численное решение уравнения (1.1) является полноценным инструментом для подтверждения проведенных теоретических исследований. При решении (1.1) численно следует воспользоваться отсутствием явной зависимости правой части от времени. В этом случае процесс вычисления будет максимально эффективным. В соответствии с (1.1), внутри каждого интервала с одним значением функции  $g(x) = \pm 1$  скорость частицы принимает значение  $f + g$  или  $f - g$ , соответственно. Таким образом, алгоритм состоит в последовательной генерации интервалов случайной длины в соответствии с экспоненциальным распределением и в последующем подсчете времени, которое необходимо для преодоления сгенерированного интервала со скоростью  $f + g$  или  $f - g$ . Общее время находится как сумма времен преодоления интервалов до тех пор, пока не будет достигнуто требуемое значение. Усреднение по ансамблю реализуется путем повторения вышеописанной процедуры с различными реализациями случайной функции  $g(x)$ . Плотность вероятности  $P_t(x)$  впоследствии представлялась в виде гистограммы конечных положений частиц. Используя описанный метод можно получить вид функции  $P_t(x)$  с такими же затратами машинного времени, как и вычисление интегралов Фурье в (1.25). Усреднение по  $10^7$  реализациям, как правило, занимает несколько секунд на современной платформе. Наличие сингулярной составляющей в  $P_t(x)$  распознается на гистограмме изменением ширины столбиков. Высота столбика, содержащего  $\delta$ -функцию, пропорциональна величине, обратной к ширине столбика.

### 1.2.5 Выводы к подразделу 1.2

Пользуясь методом интегрирования по траекториям, была вычислена функция плотности вероятности частиц, находящихся под действием дихотомической случайной силы  $g(x)$ , а также постоянной силы в сверхзатухающем пределе. В предположении, что интервалы, на которых функция  $g(x)$  постоянна, распределены по экспоненциальному закону, была определена плотность вероятности, зависящая от времени в виде интеграла Фурье. Было показано, что такая плотность вероятности содержит как регулярную, так и сингулярную (пропорциональную  $\delta$ -функции) части. Вклад сингулярной части экспоненциально убывает со временем, а общая плотность вероятности стремится к гауссовскому распределению с ростом времени как  $t^{-1/2}$ .

Были вычислены первый и второй моменты функции плотности вероятности, а также численно и аналитически изучена ее временная эволюция. Аналитические результаты полностью соответствуют численным, которые получены путем численного решения уравнения движения. Были получены асимптотические представления для функции плотности вероятности для больших и малых времен. Чтобы охарактеризовать степень отклонения полученной функции плотности вероятности, был найден зависящий от времени коэффициент эксцесса. Показано, что при определенных условиях поведение рассматриваемых частиц на больших временах идентично поведению броуновских частиц. В этом случае были вычислены эффективный коэффициент диффузии и эффективная температура.

## 1.3 Время достижения заданного уровня

Как указывалось ранее, если четные и нечетные интервалы  $s_j$ , на которых дихотомическая сила  $g(x)$  постоянна, распределены с различными экспоненциальными плотностями, уравнение (1.1) может быть использовано для изучения

ряда важных физических проблем. В частности, это уравнение является основой для описания адиабатического переноса частиц в случайно возмущенных одномерных каналах и представляет собой простую модель для изучения низкотемпературной динамики носителей заряда и локализованных структур в слоистых средах со случайной структурой. Помимо перечисленных примеров, следует отметить довольно неожиданное применение уравнения (1.1) в области астрофизики. В случае, когда облака в межзвездном пространстве распределены равномерно, расстояния между ними распределены по экспоненциальному закону. В этом случае, если предположить, что скорость света в облаках одинаковая, уравнение (1.1) может быть использовано для изучения статистических свойств расстояний, которые проходит свет, излучаемый звездой в различных направлениях.

### 1.3.1 Представление распределения времен достижения частицей заданного уровня в виде интеграла по траекториям

Согласно уравнению (1.1) (см. [60]), время достижения заданного уровня  $t_x$ , т.е. время, за которое частица находится в движении от начального положения до положения  $x$  ( $> 0$ ), описывается интегральным выражением

$$t_x = \int_0^x \frac{dx}{f + g(x)}. \quad (1.50)$$

Это время зависит от случайной функции  $g(x)$  и, следовательно, представляет собой случайную величину. Плотность вероятности  $P_x(t)$  события, что  $t_x = t$  для фиксированной координаты  $x$ , т.е. плотность вероятности времени достижения заданного уровня, определяется известным способом

$$P_x(t) = \langle \delta(t - t_x) \rangle, \quad (1.51)$$

где угловые скобки указывают усреднение по траекториям  $g(x)$ , а  $\delta(t - t_x)$  является  $\delta$ -функцией Дирака.

Чтобы получить точный вид  $P_x(t)$ , будем использовать подход, основанный на интегрировании по траекториям. В данном случае траекториями являются реализации случайной дихотомической функции (см. рисунок 1.1). Из-за дихотомического характера случайной функции  $g(x)$  удобно представить плотность вероятности в виде частичных плотностей

$$P_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x^{(n)}(t), \quad (1.52)$$

где  $P_x^{(n)}(t)$  – плотность вероятности тех траекторий  $g(x)$ , на которых происходит  $n$  изменений знака на интервале  $(0, x)$  и выполняется условие  $t_x = t$ . Для заданного  $n$  ( $\geq 1$ ), решение уравнения (1.1) можно записать в виде

$$X_t^{(n)} = \sum_{j=1}^n s_j + \tilde{s}_{n+1} \quad (1.53)$$

для  $\tilde{s}_{n+1} \in (0, s_{n+1})$ . С другой стороны, поскольку  $g(x) = (-1)^j g$ , если  $x$  принадлежит интервалу  $s_j$ , из уравнения (1.50) получаем

$$t_x^{(n)} = \sum_{j=1}^n \frac{s_j}{f + (-1)^j g} + \frac{\tilde{s}_{n+1}}{f + (-1)^{n+1} g}. \quad (1.54)$$

Если ввести обозначение  $X_t^{(n)} = x$  и сделать замену  $\tilde{s}_{n+1} \rightarrow x - \sum_{j=1}^n s_j$ , то результат (1.54) может быть записан следующим образом:

$$t_x^{(n)} = \frac{x}{f - (-1)^n g} - \frac{g}{f^2 - g^2} \sum_{j=1}^n [(-1)^n + (-1)^j] s_j. \quad (1.55)$$

Далее введем вероятность  $p(s_j)ds_j$  того, что  $j$ -ый скачок  $g(x)$  происходит на интервале  $ds_j$ , а также вероятность  $\int_l^\infty p(s)ds$  того, что расстояние между ближайшими переходами превышает  $l$ . Тогда вероятность  $dW_n(x)$  того, что функция  $g(x)$  на интервале  $(0, x)$  испытывает  $n$  скачков на промежутках  $ds_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), принимает вид

$$dW_n(x) = \int_{x - \sum_{j=1}^n s_j}^{\infty} p(s) ds \prod_{j=1}^n p(s_j) ds_j. \quad (1.56)$$

Поскольку  $\tilde{s}_{n+1} > 0$ , то положительные переменные интегрирования  $s_j$  должны соответствовать условию  $\sum_{j=1}^n s_j < x$ . Обозначая  $\Omega_n(x)$  область в  $n$ -мерном пространстве этих переменных, которая определяется по вышеупомянутому условию, мы получаем

$$P_x^{(n)}(t) = \int_{\Omega_n(x)} \delta(t - t_x^{(n)}) dW_n(x). \quad (1.57)$$

Наконец, учитывая, что  $t_x^{(0)} = x/(f - g)$  – это время достижения заданного уровня при  $n = 0$ , а  $W_0(x) = \int_x^{\infty} p(s) ds$  – это общая вероятность выборки таких траекторий  $g(x)$ , которые не меняют знак на интервале  $(x, 0)$ , мы получим следующее представление плотности вероятности времени достижения заданного уровня в виде интеграла по траектории

$$P_x(t) = \delta(t - t_x^{(0)}) W_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n(x)} \delta(t - t_x^{(n)}) dW_n(x). \quad (1.58)$$

Эта форма плотности вероятности времени достижения заданного уровня достаточно общая и обладает довольно сложной математической структурой. Исходя из уравнения (1.58), можно, тем не менее, получить два общих результата, которые справедливы для произвольной плотности вероятности  $p(s)$ : 1)  $P_x(t)$  для фиксированного  $x$  принадлежит интервалу  $[x/(f + g), x/(f - g)]$ , и 2)  $P_x(t)$  нормирована надлежащим образом, т.е.,  $\int_0^x P_x(t) dt = 1$ . Действительно, поскольку  $\min t_x^{(n)} = x/(f + g)$  и  $\max t_x^{(n)} = x/(f - g)$ , мы имеем  $\delta(t - t_x^{(n)}) \equiv 0$  и поэтому  $P_x(t) \equiv 0$ , если  $t \notin [x/(f + g), x/(f - g)]$ . Чтобы доказать второе утверждение, мы сначала отметим, что в соответствии с уравнением (1.58),  $\int_0^x P_x(t) dt = W_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)$ , где  $W_n(x) = \int_{\Omega_n(x)} dW_n(x)$  является вероятностью

того, что функция  $g(x)$  претерпела  $n$  скачков в интервале  $(0, x)$ . Далее, введя величину  $S_n(x) = \int_{\Omega_n(x)} \prod_{j=1}^b p(s_j) ds_j$ , мы приходим к выражениям  $W_0(x) = 1 - S_1(x)$  и  $W_n(x) = S_n(x) - S_{n+1}(x)$ , см. также [33]. Наконец, учитывая, что  $S_\infty(x) = 0$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) = S_1(x)$ , мы убеждаемся, что условие нормировки верно для произвольного значения  $p(x)$ .

### 1.3.2 Характеристики функции времени достижения заданного уровня

Используя интегральную запись для  $\delta$ -функции

$$\delta(t - t_x^{(n)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t - t_x^{(n)})} d\omega, \quad (1.59)$$

мы можем записать плотность вероятности в уравнении (1.58) в форме интеграла Фурье, т.е.

$$P_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.60)$$

Согласно уравнениям (1.58), (1.59) и (1.60), характеристическая функция  $\phi_x(\omega)$ , которая определяет все статистические свойства времени достижения заданного уровня  $t_x$ , может быть представлена в виде

$$\phi_x(\omega) = e^{i\omega t_x^{(0)}} W_0(x) + \tilde{\phi}_x(\omega), \quad (1.61)$$

где

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n(x)} e^{i\omega t_x^{(n)}} dW_n(x). \quad (1.62)$$

В общем случае для произвольной  $p(s)$  характеристическая функция имеет сложную структуру, включающую интегрирование по  $n$ -размерной области  $\Omega_n(x)$  и суммирование по всем  $n$ . Примечательно, однако, что  $\phi_x(\omega)$  может быть

выражена в элементарных функциях, если случайные интервалы  $s_j$  распределены экспоненциально, т.е. если  $p(s) = \lambda \exp(-\lambda s)$ , где  $\lambda^{-1}$  – средняя продолжительность интервала  $s_j$ . В этом случае вероятность (1.56) запишется как

$$dW_n(x) = e^{-\lambda x} \lambda^n \prod_{j=1}^n ds_j, \quad (1.63)$$

и выражение (1.62) приводится к виду

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_{\Omega_n(x)} e^{i\omega x^{(n)}} \prod_{j=1}^n ds_j. \quad (1.64)$$

Для расчета  $\tilde{\phi}_x(\omega)$  удобно преобразовать правую сторону уравнения (1.64) в виде отдельных интегралов по переменным  $s_j$ . Для этого мы используем подход [33] на основе интегрального представления ступенчатой функции

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(i\kappa+\eta)y}}{i\kappa+\eta} d\kappa = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}, \quad (1.65)$$

который справедлив для произвольного  $\eta > 0$ . Подставляя уравнение (1.65) в уравнение (1.64) и принимая  $y = x - \sum_{j=1}^n s_j$ , получим искомый результат

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = \frac{e^{-\lambda x}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \frac{e^{(i\kappa+\eta)x}}{i\kappa+\eta} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} e^{i\omega x^{(n)}} e^{-(i\kappa+\eta)\sum_{j=1}^n s_j} \prod_{j=1}^n ds_j. \quad (1.66)$$

Далее, используя тождество  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{m=1}^{\infty} [a_{2m-1} + a_{2m}]$  и имея ввиду, что согласно уравнению (1.55)

$$\begin{aligned} t_x^{(2m-1)} &= \frac{x}{f+g} + \frac{2g}{f^2-g^2} \sum_{j=1}^m s_{2j-1}, \\ t_x^{(2m)} &= \frac{x}{f-g} - \frac{2g}{f^2-g^2} \sum_{j=1}^m s_{2j}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

упростим выражение (1.66) к виду

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = \frac{e^{-\lambda x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{v_0 x}}{v_0} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ I^{m-1}(v_0) I^m(v_1) e^{i\omega x/(f+g)} + I^m(v_0) I^m(v_2) e^{i\omega x/(f-g)} \right] d\kappa. \quad (1.68)$$

Здесь

$$I(v_k) = \int_0^{\infty} p(s) e^{-(v_k - \lambda)s} ds = \frac{\lambda}{v_k} \quad (1.69)$$

( $\operatorname{Re} v_k > 0$ ,  $k = 0, 1, 2$ ) и

$$v_k = i\kappa + \eta + i \frac{2q\omega}{f^2 - g^2} \delta_k \quad (1.70)$$

при  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_1 = -1$  и  $\delta_2 = 1$ . Отметим, что правая часть уравнения (1.68) содержит произвольный положительный параметр  $\eta$ . Однако, согласно определению (1.62), левая часть уравнения (1.68) не зависит от  $\eta$ . Это значит, что окончательный результат вычисления рядов и интеграла в уравнении (1.68) также не должен зависеть от  $\eta$ . Вследствие этого, для вспомогательных расчетов мы можем выбрать наиболее подходящее значение для этого параметра.

С этой точки зрения целесообразно выбрать  $\eta > \lambda$ . В этом случае  $|I(v_k)| < 1$ , и ряды в уравнении (1.68) могут быть легко вычислены

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} I^{m-1}(v_0) I^m(v_1) &= \frac{\lambda v_0}{v_0 v_1 - \lambda^2}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} I^m(v_0) I^m(v_2) &= \frac{\lambda^2}{v_0 v_2 - \lambda^2}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Подставляя выражения (1.71) в (1.68) и учитывая, что  $W_0(x) = \exp(-\lambda x)$  и

$$e^{i\omega x^{(0)}} W_0(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{v_0 x}}{v_0} e^{i\omega x/(f-g)} d\kappa, \quad (1.72)$$

из (1.61) получаем



$$\phi_x(\omega) = \frac{e^{-\lambda x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{v_0 x} \left( \frac{\lambda e^{i\omega x/(f+g)}}{v_0 v_1 - \lambda^2} + \frac{v_2 e^{i\omega x/(f-g)}}{v_0 v_2 - \lambda^2} \right) d\kappa. \quad (1.73)$$

При расчете интегралов в выражении (1.73) (подробности приводятся в Приложении С), мы находим удивительно простое выражение для характеристической функции времени достижения заданного уровня

$$\phi_x(\omega) = e^{-\lambda x(1-ivf/g)} \left( \cosh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) + \frac{1+iv}{\sqrt{1-v^2}} \sinh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) \right), \quad (1.74)$$

где

$$v = \frac{\omega g}{\lambda(f^2 - g^2)}. \quad (1.75)$$

Отметим, что  $\phi_x(\omega)$ , будучи характеристической функцией, удовлетворяет условиям  $|\phi_x(\omega)| \leq 1$ ,  $\phi_x(0) = 1$  и  $\phi_x(-\omega) = \phi_x^*(\omega)$ , где звездочка означает комплексное сопряжение. Выражение (1.74) является нашим основным результатом, который позволяет исследовать основные свойства времени достижения заданного уровня аналитически.

### 1.3.3 Моменты времени достижения заданного уровня

Моменты времени достижения заданного уровня определяется как  $\langle t_x^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t^m P_x(t) dt$ , и их можно представить через характеристические функции следующим образом:

$$\langle t_x^m \rangle = \frac{1}{i^m} \frac{d^m}{d\omega^m} \phi_x(\omega) \Big|_{\omega=0}. \quad (1.76)$$

Согласно выражениям (1.74) и (1.76), первый момент, т. е. среднее время достижения заданного уровня, оказывается следующим:

$$\langle t_x \rangle = \frac{1}{2\lambda(f^2 - g^2)} [2\lambda fx + g - ge^{-2\lambda x}]. \quad (1.77)$$

На малых расстояниях от начала отсчета, когда  $\lambda x \ll 1$ , формула (1.77) принимает вид  $\langle t_x \rangle = x/(f - g)$ . Это ожидаемый результат: общая вероятность выборки тех траекторий  $g(x)$ , которые не меняют знак на интервале  $(0, x)$ , стремится к 1 при  $\lambda x \rightarrow 0$ , и, следовательно, средняя скорость частиц стремится к  $f - g$ . В другом предельном случае, когда  $\lambda x \gg 1$ , формула (1.77) преобразуется к  $\langle t_x \rangle = fx/(f^2 - g^2)$ . Этот результат подтверждается тем, что асимптотика средней скорости в пределе больших времен равна  $(f^2 - g^2)/f$  (см [33]).

Моменты высших порядков также могут быть рассчитаны непосредственно. В частности, для второго момента получаем

$$\langle t_x^2 \rangle = \frac{1}{2\lambda^2(f^2 - g^2)^2} [2\lambda^2 f^2 x^2 + 2\lambda g(f + g)x - g^2 - g(2\lambda fx - g)e^{-2\lambda x}]. \quad (1.78)$$

Центральные моменты,  $\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle$ , можно определить из конечных рядов

$$\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j \langle t_x^j \rangle \langle t_x \rangle^{m-j}, \quad (1.79)$$

где  $C_m^j$  – биномиальный коэффициент, или же, альтернативно, по формуле

$$\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle = \frac{1}{i^m} \left. \frac{d^m}{d\omega^m} \phi_x(\omega) e^{-i\omega \langle t_x \rangle} \right|_{\omega=0}. \quad (1.80)$$

В частности, с помощью одного из этих определений дисперсию времени достижения заданного уровня,  $\sigma_x^2 = \langle (t_x - \langle t_x \rangle)^2 \rangle$ , можно записать в виде

$$\sigma_x^2 = \frac{g^2}{4\lambda^2(f^2 - g^2)^2} [4\lambda x - 3 + 4e^{-2\lambda x} - e^{-4\lambda x}]. \quad (1.81)$$

На малых расстояниях, когда  $\lambda x \ll 1$ , дисперсия принимает вид

$$\sigma_x^2 = \frac{4\lambda g^2}{3(f^2 - g^2)^2} x^3, \quad (1.82)$$

а на больших расстояниях, когда  $\lambda x \gg 1$ , дисперсия записывается как

$$\sigma_x^2 = \frac{g^2}{\lambda^2(f^2 - g^2)^2} x. \quad (1.83)$$

Кроме того, центральные моменты времени пребывания обладают интересными масштабными свойствами. В частности, используя (1.80) совместно с выражениями (1.74) и (1.77), получаем

$$\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle = \left( \frac{g}{\lambda(f^2 - g^2)} \right)^m \Psi_m(\lambda x), \quad (1.84)$$

где

$$\Psi_m(\lambda x) = e^{-\lambda x} \left. \frac{d^m}{dz^m} \Phi(z, \lambda x) \right|_{z=0} \quad (1.85)$$

является функцией одной переменной  $\lambda x$  и

$$\Phi(z, \lambda x) = \exp\left(-z \frac{1 - e^{-2\lambda x}}{2}\right) \left( \cosh(\lambda x \sqrt{1 + z^2}) + \frac{1 + z}{\sqrt{1 + z^2}} \sinh(\lambda x \sqrt{1 + z^2}) \right). \quad (1.86)$$

Таким образом, центральные моменты показывают универсальную зависимость от параметров  $f$ ,  $g$  и  $\lambda$ , т.е.  $\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle \sim [g / \lambda(f^2 - g^2)]^m$ .

#### 1.3.4 Свойства плотности вероятности времени достижения заданного уровня

Как следует из выражения (1.74), характеристическая функция стремится к  $\exp(-\lambda x + i\omega x/(f - g))$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Согласно (1.60), это означает, что плотность вероятности времени пребывания содержит  $\delta$ -сингулярную составляющую, т.е.

$$P_x(t) = \delta\left(t - \frac{x}{f - g}\right) e^{-\lambda x} + \tilde{P}_x(t), \quad (1.87)$$

где

$$\tilde{P}_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.88)$$

обозначает регулярную составляющую  $P_x(t)$  и

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = \phi_x(\omega) - e^{-\lambda x + i\alpha x/(f-g)}. \quad (1.89)$$

Так как интенсивность  $\delta$ -сингулярной части уменьшается экспоненциально с увеличением  $x$ , то её вклад в  $P_x(t)$  играет важную роль на малых расстояниях от начального положения. Регулярная же составляющая определяет поведение  $P_x(t)$  на больших расстояниях.

#### 1.3.4.1 Поведение на малых расстояниях

При  $\lambda x \ll 1$  мы можем получить плотность вероятности  $P_x(t)$  в упрощенном варианте, без расчета интеграла в выражении (1.88). Для этого мы сначала отметим, что  $\delta$ -сингулярная составляющая  $P_x(t)$  определяется теми реализациями траектории  $g(x)$ , которые не меняют знак на интервале  $(0, x)$ . Соответственно, только те части пути, которые, по крайней мере, один раз меняют знак в этом интервале, формируют регулярную часть  $\tilde{P}_x(t)$ . Для малых значений  $\lambda x$  неоднократные изменения знака маловероятны. Поэтому, чтобы определить  $\tilde{P}_x(t)$ , мы считаем, что выборка пути происходит с одним изменением знака. В этом случае вероятность  $\tilde{P}_x(t)dt$  равна  $dW_1(x) = \lambda \exp(-\lambda x) ds_1$  и, поскольку  $t = t_x^{(1)} = x/(f+g) + 2gs_1/(f^2 - g^2)$ , соотношение  $\tilde{P}_x(t)dt = dW_1(x)$  при  $\lambda x \ll 1$  дает

$$\tilde{P}_x(t) = \frac{\lambda(f^2 - g^2)}{2g}. \quad (1.90)$$

Наконец, подставляя (1.90) в выражение (1.87), мы находим, что плотность вероятности времени достижения заданного уровня при  $\lambda x \ll 1$  равна

$$P_x(t) = \delta\left(t - \frac{x}{f-g}\right)(1 - \lambda x) + \frac{\lambda(f^2 - g^2)}{2g}. \quad (1.91)$$

На первый взгляд этот результат может быть неожиданным, поскольку регулярная часть плотности вероятности не зависит явно от  $x$  и  $t$ . Следует, однако, подчеркнуть, что формула (1.90) получена при условии, что  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ , где  $t_{\min} = x/(f+g)$  и  $t_{\max} = x/(f-g)$  (мы напоминаем, что  $\tilde{P}_x(t) \equiv 0$ , если  $t \notin [t_{\min}, t_{\max}]$ ). Это означает, что  $\tilde{P}_x(t)$  зависит от  $x$  и  $t$  неявно, приводя к уширению  $\tilde{P}_x(t)$ , если  $x$  растет. В начальной точке  $x = 0$  мы имеем  $t_{\min} = t_{\max} = 0$ , поэтому  $\tilde{P}_0(t) = 0$  и, в соответствии с условием  $t_0 = 0$ ,  $P_0(t) = \delta(t)$ . Отметим также, что условие нормировки  $\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} P_x(t) dt = 1$ , которое выполняется также и для соотношения (1.91), подтверждает справедливость (1.90).

#### 1.3.4.2 Поведение на больших расстояниях

Для изучения поведения плотности вероятности  $P_x(t)$  на больших расстояниях удобно ввести новую временную переменную  $\tau = (t - \langle t_x \rangle) / \sigma_x$ . Соответствующая приведенная плотность вероятности  $P'_x(t)$  выражается через  $P_x(t)$  как  $P'_x(t) = \sigma_x P_x(\langle t_x \rangle + \sigma_x \tau)$  и, согласно (1.60), может быть записана в виде

$$P'_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\mu / \sigma_x) e^{-i\mu \langle t_x \rangle / \sigma_x - i\mu \tau} d\mu. \quad (1.92)$$

Используя выражения (1.74), (1.77) и (1.81), характеристическая функция для  $P'_x(t)$  может быть записана как

$$\phi_x(\mu / \sigma_x) e^{-i\mu \langle t_x \rangle / \sigma_x} = e^{-\lambda x} \Phi(i\mu \Psi_2^{-1/2}(\lambda x), \lambda x), \quad (1.93)$$

где функция  $\Phi(z, \lambda x)$  определяется уравнением (1.86), а

$$\Psi_2(\lambda x) = \lambda x - \frac{3}{4} + e^{-2\lambda x} - \frac{1}{4} e^{-4\lambda x}. \quad (1.94)$$

Поскольку характеристическая функция (1.93) зависит только от  $\lambda x$  и переменной

интегрирования  $\mu$ , приведенная плотность вероятности (1.92) обладает тем замечательным свойством, что  $P'_x(t)$  – функция переменных  $\lambda x$  и  $\tau$ , которая не зависит ни от внешней силы  $f$ , ни от амплитуды  $g$  дихотомической случайной силы  $g(x)$ .

В случае больших расстояний, если  $\lambda x \gg 1$ , характеристическую функцию (1.93) при  $\mu^4 \ll \lambda x$  можно аппроксимировать двумя первыми членами разложения

$$\phi_x(\mu/\sigma_x)e^{-i\mu\langle t_x \rangle/\sigma_x} = e^{-\mu^2/2} \left( 1 - \frac{\mu^4}{8\lambda x} \right). \quad (1.95)$$

Подставляя (1.95) в выражение (1.93) и вычисляя интегралы, находим два первых члена разложения приведенной плотности вероятности

$$P'_x(\tau) = \frac{e^{-\tau^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 - \frac{3 - 6\tau^2 + \tau^4}{8\lambda x} \right), \quad (1.96)$$

которая имеет место, если выполняется условие  $\lambda x \gg \max(1, \tau^4)$ . В соответствии центральной предельной теоремой теории вероятностей (см., например, [35]), предельная плотность вероятности стремится к гауссовскому виду, то есть  $P'_\infty(\tau) = 2\pi^{-1/2} \exp(-\tau^2/2)$  и  $P'_x(\tau) - P'_\infty(\tau) \sim (\lambda x)^{-1}$  при  $\lambda x \rightarrow \infty$ .

#### 1.3.4.3 Численное подтверждение

Представленные численные расчеты преследовали две цели, а именно: 1) проверить аналитические выводы и 2) визуализировать полученные результаты. Последнее достигается путем сравнения плотности вероятности (1.87) с той, которая получена с помощью численного моделирования времени достижения заданного уровня (1.50). Здесь был использован программный пакет Maple для расчета интеграла Фурье в уравнении (1.88) и применены процедуры построения гистограмм, чтобы численно оценить плотность вероятности. Суть данной процедуры состоит в последовательном генерировании случайных интервалов  $s_j$  в соответствии с экспоненциальным распределением и последующим расче-

том времени достижения заданного уровня  $x$  для различных реализаций  $s_j$ . Плотность вероятности затем представлялась в виде гистограммы времен достижения заданного уровня частицами. Прделанное численное моделирование обнаруживает полное согласие с теоретическими расчетами, см. рисунок 1.6.

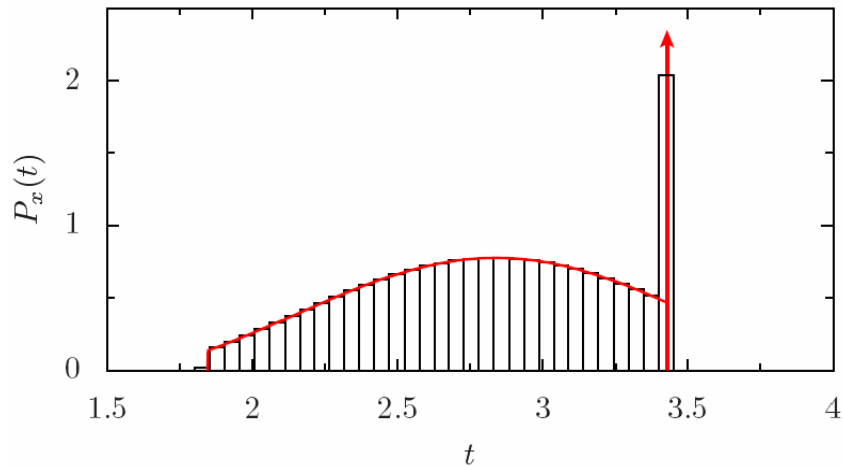


Рисунок 1.6 – Теоретическая и численная плотности вероятности времени достижения заданного уровня при  $x = 2.4$ . Сплошная линия (красная) – аналитический результат (1.87), гистограмма – численное моделирование времени достижения заданного уровня (1.50). Параметры силового поля:  $f = 1$ ,  $g = 0.3$  и  $\lambda = 1$ . Вертикальная стрелка показывает влияние  $\delta$ -сингулярной части на функцию  $P_x(t)$ .

Рисунок (1.7) иллюстрирует поведение плотности вероятности (1.87) на малых расстояниях. Как видно из рисунка 1.7(а), при очень малых значениях  $x$  плотность вероятности времени достижения определяется приближенной формулы (1.91). В соответствии с предположением, которое использовалось при выводе этой формулы, выборка траектории  $g(x)$ , которая на интервале  $(0, x)$  меняет знак более одного раза, не влияет на явную зависимость  $\tilde{P}_x(t)$  от времени  $t$ . Если  $x$  не является слишком малым, то есть вероятность выборки этих траекторий является небольшой, но ненулевой, как показано на рисунке 1.7(б)  $\tilde{P}_x(t)$  является практически линейной функцией  $t$ . С ростом  $x$  роль выборки этих пу-

тей становится все более важной: функция  $\tilde{P}_x(t)$  становится нелинейной, принимает унимодальную форму, и в конечном итоге приближается к гауссовской форме, см. рисунок 1.8.

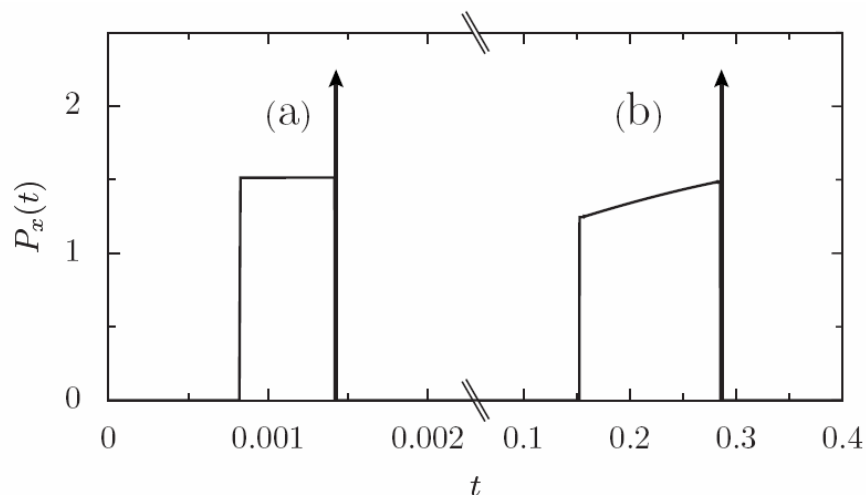


Рисунок 1.7 – Поведение плотности вероятности достижения заданного уровня  $P_x(t)$  на малых расстояниях при а)  $x = 10^{-3}$  и б)  $x = 0.2$ . Остальные параметры те же, что и на рисунке 1.6.

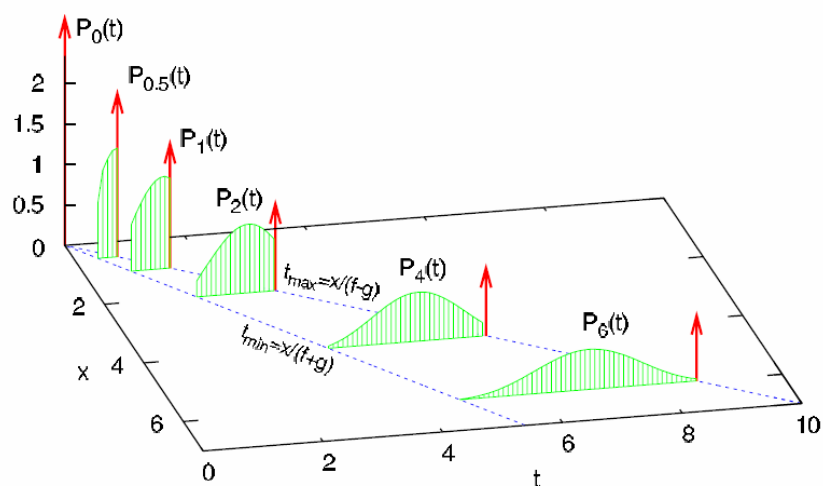


Рисунок 1.8 – Изображения плотности вероятности времени достижения заданного уровня для различных расстояний от начала системы координат. Поверхности (зеленые) изображают регулярную часть  $P_x(t)$ . Для того, чтобы визуальное



показать, что интенсивность  $\delta$ -сингулярной части  $P_x(t)$  экспоненциально уменьшается с  $x$ , длины вертикальных стрелок (красные) соответствуют выражению  $0.8 + 2\exp(-\lambda x)$ . Для удобства сравнения характеристики силового поля выбираются такими же, как на рисунках 1.6 и 1.7.

#### 1.3.4.4 Коэффициенты эксцесса и асимметрии

Для того чтобы количественно описать различие между распределением  $P_x(t)$  времен достижения заданного уровня и гауссовским распределением с идентичными значениями математического ожидания и дисперсии, были рассчитаны коэффициент асимметрии

$$s(x) = \frac{\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^3 \rangle}{\sigma_x^3}, \quad (1.97)$$

который характеризует степень асимметрии функции  $P_x(t)$ , и коэффициент эксцесса

$$k(x) = \frac{\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^4 \rangle}{\sigma_x^4} - 3, \quad (1.98)$$

который является мерой остроты пика функции  $P_x(t)$ . Так как  $s(x) \equiv 0$  и  $k(x) \equiv 0$ , если время достижения заданного уровня  $t_x$  подчиняется гауссовскому распределению, можно рассматривать коэффициенты асимметрии и эксцесса как параметры, определяющие отклонение функции распределения времени достижения заданного уровня от гауссовской. Используя выражение (1.84) для центральных моментов, из определений (1.97) и (1.98) получим

$$s(x) = \frac{\Psi_3(\lambda x)}{\Psi_2^{3/2}(\lambda x)}, \quad k(x) = \frac{\Psi_4(\lambda x)}{\Psi_2^2(\lambda x)} - 3, \quad (1.99)$$

т.е.  $s(x)$  и  $k(x)$  являются универсальными функциями одной переменной  $\lambda x$  (см. рисунок 1.9). Вычисляя  $\Psi_3(\lambda x)$  и  $\Psi_4(\lambda x)$  и принимая во внимание (1.94), мы находим явное выражение для коэффициентов асимметрии

$$s(x) = -\frac{2}{(4\lambda x - 3 + 4e^{-2\lambda x} - e^{-4\lambda x})^{3/2}} \left[ 2 + (3 - 12\lambda x)e^{-2\lambda x} - 6e^{-4\lambda x} + e^{-6\lambda x} \right], \quad (1.100)$$

и эксцесса

$$s(x) = -\frac{6}{(4\lambda x - 3 + 4e^{-2\lambda x} - e^{-4\lambda x})^2} \times \left[ 13 - 8\lambda x - 8(1 + 4\lambda x)e^{-2\lambda x} - 4(3 - 4\lambda x)e^{-4\lambda x} + 8e^{-6\lambda x} - e^{-8\lambda x} \right] \quad (1.101)$$

В формулах (1.100) и (1.101) вклад основного члена разложения по переменной  $\lambda x$  имеет следующий вид:  $s(x) = -(3\sqrt{3}/4)(\lambda x)^{-1/2}$  и  $k(x) = -(9/5)(\lambda x)^{-1}$  при  $\lambda x \ll 1$ , и  $s(x) = -(1/2)(\lambda x)^{-3/2}$  и  $k(x) = -3(\lambda x)^{-1}$  при  $\lambda x \gg 1$ . Эти результаты доказывают тот факт, что плотность вероятности  $P_x(t)$  времени достижения заданного уровня заметно отличается от гауссовской плотности на малых расстояниях и приближается к ней на больших. Кроме того, поскольку  $|k(x)/s(x)| \rightarrow \infty$  при условиях  $\lambda x \rightarrow 0$  и  $\lambda x \rightarrow \infty$ , коэффициент эксцесса может быть рассмотрен как основной параметр, определяющий степень отличия  $P_x(t)$  от гауссовского распределения. Отметим, что ввиду условия  $s(x) < 0$ , левая часть  $P_x(t)$  всегда расположена ниже, чем правая. Кроме того,  $P_x(t)$  имеет более ярко выраженный пик по сравнению с гауссовской плотностью на расстояниях с  $k(x) > 0$ , и более сплюснутый характер на расстояниях с  $k(x) < 0$ .

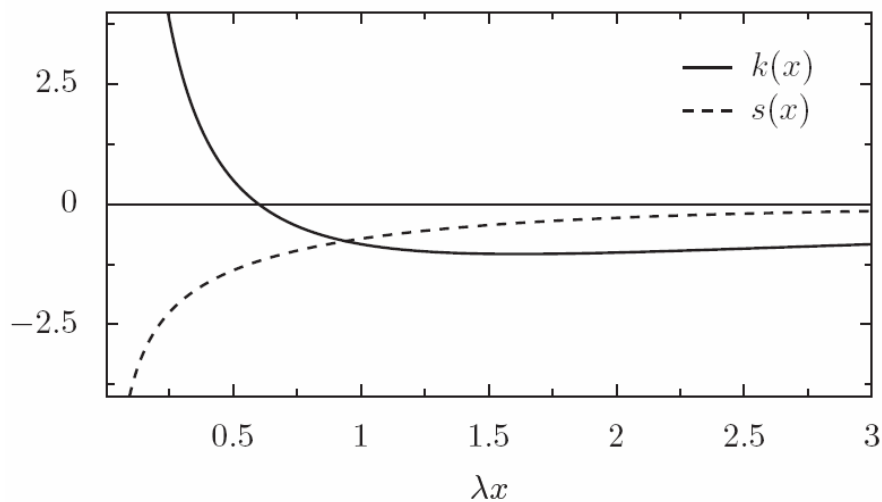


Рисунок 1.9 – Участки асимметрии  $s(x)$  (пунктирная линия) и эксцесса  $k(x)$  (сплошная линия) плотности вероятности достижения заданного уровня в зави-

симости от нормированного расстояния  $\lambda x$ .

### 1.3.5 Выводы к подразделу 1.3

Используя подход, основанный на интегрировании по траекториям, была рассчитана характеристическая функция времени достижения заданного уровня классических сверхзатухающих частиц, которые приводятся в движение постоянным полем в кусочно-линейном случайном потенциале, генерирующем дихотомическую случайную силу с экспоненциально распределенными пространственными интервалами непрерывности. Используя характеристическую функцию, были получены моменты времени достижения заданного уровня, установлены универсальные масштабные свойства центральных моментов, и показано, что плотность вероятности  $P_x(t)$  времени достижения заданного уровня содержит  $\delta$ -сингулярный вклад и регулярную составляющую. Установлено, что  $\delta$ -сингулярная часть, чей вклад уменьшается экспоненциально с увеличением  $x$ , играет основную роль на малых расстояниях, тогда как регулярная составляющая  $P_x(t)$  является определяющей на больших расстояниях  $x$ .

На очень малых расстояниях регулярная составляющая определяется конкретной реализацией траектории только с одной сменой знака на интервале  $(0, x)$ , и в этом случае ее значение не зависит от  $x$ . С ростом  $x$  вклад других реализаций траектории приводит к трансформации этой части  $P_x(t)$  в практически линейную функцию от  $t$ , затем в унимодальную форму, и, наконец, при  $x \rightarrow \infty$  она стремится к гауссовской плотности как  $x^{-1}$ . Кроме того, для того чтобы охарактеризовать различие плотности вероятности времени достижения заданного уровня от распределения Гаусса, были рассчитаны коэффициенты асимметрии и эксцесса. Показано, что функция  $P_x(t)$  имеет более ярко выраженный пик по сравнению с гауссовской плотностью при малых  $x$  и более плоскую форму при больших  $x$ .

## 2 НЕРАВНОВЕСНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕЛИНЕЙНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ, ИНДУЦИРОВАННЫЙ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ ШУМОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

### 2.1 Общие положения

В последние годы интенсивно исследуются сильно неравновесные открытые системы различной физической природы. Интерес к данному направлению объясняется тем, что при определенных условиях флуктуации окружающей среды, т.е. внешний шум, могут создавать структуры, появление которых невозможно при детерминированном внешнем воздействии. Тем самым проблема конструктивной роли шума занимает одно из центральных мест в современной физике.

Первыми указали на данную область исследования В. Хорстхемке (W. Horsthemke) и Р. Лефевр (R. Lefever) [2]. Используя точные результаты, они развеяли основанный на интуиции миф о том, что флуктуации внешней среды могут оказывать лишь дезорганизующее воздействие. Открытые ими индуцированные шумом неравновесные переходы – первый пример явления конструктивной роли шума в нелинейных системах. Более того, эти переходы по некоторым свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам и фазовым переходам в неравновесных системах при детерминированных внешних условиях, что позволило авторам говорить о новом классе фазовых переходов.

Возможность существования явлений, противоречащих интуиции, вызвала всплеск интереса к изучению сравнительно простых систем, для которых могут быть получены точные результаты. Да и сама теория индуцированных шумом неравновесных переходов сформулирована в рамках некоторых допущений и приближений, а именно: 1) рассматривается пространственно-однородная (нульмерная) система, т.е. ее состояние зависит только от времени; 2) состояние системы достаточно хорошо описывается одной динамической пе-

ременной; 3) время корреляции внешних флуктуаций пренебрежимо мало, что позволяет использовать приближение белого шума. Физическими системами, идеально удовлетворяющими этим требованиям, являются электрические контуры. Неудивительно, что именно с их помощью были получены первые экспериментальные подтверждения этой теории. Электрические контуры и в настоящее время не утратили свою актуальность при проверке существования новых теоретически предсказанных стохастических явлений.

Интерес к изучению нульмерных систем в последние годы также стимулируется бурным развитием нанотехнологий, позволяющих конструировать и наблюдать системы в наномасштабе. Среди всего многообразия данной области исследования можно выделить наномеханические системы, состояние которых может быть приемлемо описано одним параметром. Это, например, нанобалка [10], служащая детектором малых сил и масс. Движение ее центра масс может описываться классическим затухающим осциллятором Дуффинга. В таких системах, в отличие от макроскопических, значительными могут быть не только внешние флуктуации, но и внутренние, которые также необходимо учитывать. Следовательно, стохастические осцилляторы с двумя источниками шума, один из которых внешний, другой – внутренний, являются актуальными объектами исследования.

Образом указанной физической системы может служить частица на «пружине», совершающая одномерное движение. При своем движении во внешнем флуктуирующем потенциале частица вызывает изменения в состоянии тепловой бани, которая, в свою очередь, также воздействует на нее. Можно принять, что частица находится под влиянием внешнего шума и внутреннего шума, модифицированного внешним, что приводит к появлению взаимной корреляции. Известно, что она играет важную роль в одномодовом лазере [38-39], в явлениях индуцированного шумом транспорта классических [40-42] и квантовых [43] частиц, резонансной активации [44], стохастического резонанса [45-48], фазовых переходов в пространственно-распределенных системах [49]. В [50-52] изучаются различные нелинейные стохастические системы с двумя га-

уссовскими белыми шумами; показывается, что аддитивный шум, коррелированный или некоррелированный с мультипликативным шумом, может индуцировать неравновесные переходы. В [53] рассматривается бистабильная система с экспоненциальной корреляцией между белыми шумами; устанавливается, что при определенных значениях времени корреляции в системе параметр корреляции индуцирует последовательность двух неравновесных переходов. Неравновесные переходы, индуцированные взаимной корреляцией белых гауссовских шумов (каждый шум в отдельности не вызывает переходы, но вместе, благодаря взаимной корреляции, индуцируют), изучены в [54] на примерах простых модельных пространственно-однородных стохастических систем с одним устойчивым состоянием. Особенности влияния взаимной корреляции двух белых шумов на индуцированные шумом неравновесные переходы в нелинейных сильно затухающих осцилляторах ранее не изучались.

## 2.2 Обоснование модели

Рассматривается затухающий нелинейный осциллятор, физической реализацией которого являются, например, значительные упругие поперечные смещения центров масс нанобалок (см. рисунок 2.1). Детерминированное уравнение имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \alpha x^2 + \beta x^3 = 0,$$

где  $x(t)$  – координата центра масс;  $\lambda$  – коэффициент затухания;  $\omega_0$  – частота собственных колебаний;  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые параметры. Ограничимся случаем сильного затухания осциллятора, что позволяет пренебречь его инерционными свойствами. Это приближение применимо, если коэффициент затухания намного больше частоты собственных колебаний, т.е.  $\lambda \gg \omega_0$ , и соответствует движению в достаточно вязкой среде. Соответствующее уравнение движения запи-

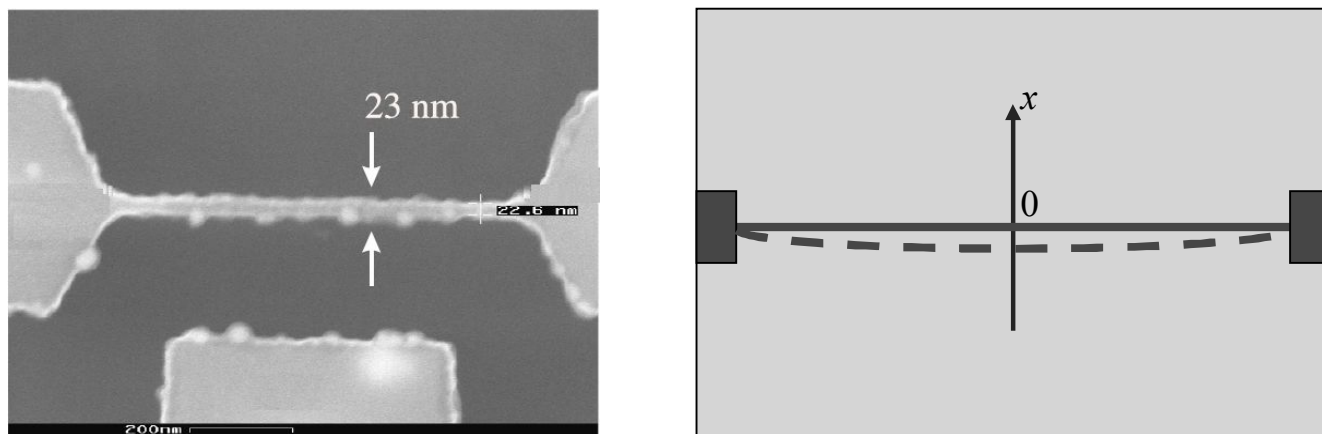


Рисунок 2.1 – Нанобалка. Фотография приведена из [9].

сывается в новом масштабе времени, для которого коэффициент при кубическом члене равняется единице

$$\dot{x} = -ax - bx^2 - x^3 \quad (a > 0 \text{ и } b > 0).$$

Предполагая, что выполняются условия  $a \gg b$  и  $b \ll 1$ , вводятся флуктуации параметров при квадратичном члене и скорости (флуктуации параметра при линейном члене пренебрегаются). Уравнение Ланжевена принимает вид

$$\dot{x} = -ax - b[1 - \xi_1(t)]x^2 - x^3 + \xi_2(t), \quad (2.1)$$

где  $\xi_1(t)$  – мультипликативный шум (флуктуации, вызванные случайностями в эффективной “пружине”);  $\xi_2(t)$  – аддитивный шум (случайная сила, обусловленная толчками со стороны окружающих частицу молекул). Если время релаксации системы ( $a^{-1}$  в линейном приближении) много меньше времени релаксации источников шума, тогда применимо приближение белого шума, т.е. шума с нулевым временем корреляции. В большинстве случаев флуктуации обусловлены множеством факторов, что приводит к гауссовским распределениям. Таким образом, принимается, что  $\xi_i(t)$  – внешние гауссовские белые шумы, средние значения которых равняются нулю, а корреляционные функции имеют вид

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\Delta_{ij} \delta(t-t'), \quad (2.2)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций шумов;  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака; матрица  $\Delta_{ij}$  записывается в следующей форме:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & r\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \\ r\sqrt{\Delta_1\Delta_2} & \Delta_2 \end{pmatrix},$$

$\Delta_1 (\geq 0)$  и  $\Delta_2 (\geq 0)$  – интенсивности шумов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ , соответственно;  $r$  – коэффициент корреляции между  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ . Если записывать уравнение Ланжевена (2.1) в каноническом виде

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^2 g_i(x(t)) \xi_i(t), \quad (2.3)$$

тогда  $f(x) = -ax - bx^2 - x^3$ ,  $g_1(x) = bx^2$ ,  $g_2(x) = 1$ .

### 2.3 Равновесная плотность вероятности

Динамику частиц можно описывать через плотность вероятности для состояний, удовлетворяющую уравнению Фоккера-Планка. В случае мультипликативных Гауссовских белых шумов существует бесконечное число уравнений Фоккера-Планка, соответствующих уравнению Ланжевена (2.3). Для того чтобы установить однозначное соответствие, примем, что каждый гауссовский белый шум  $\xi_i(t)$  характеризуется своим собственным параметром  $\gamma_i$  ( $0 \leq \gamma_i \leq 1$ ), определяющим моменты времени, в которых вычисляются значения мультипликативной функции  $g_i(x(t))$  в соответствующей интегральной сумме. Уравнение Фоккера-Планка имеет вид [54]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + h(x)] P(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} d(x) P(x, t), \quad (2.4)$$



где  $h(x)$  – индуцированный шумом коэффициент сноса,

$$h(x) = 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \gamma_i \Delta_{ij} g'_i(x) g_j(x);$$

$d(x)$  – коэффициент диффузии,

$$d(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta_{ij} g_i(x) g_j(x).$$

Так как статистические характеристики (средние значения и интенсивности) флуктуаций принимаются постоянными во времени, то можно ожидать, что по истечении достаточно долгого времени стохастическая система, описываемая уравнением Ланжевена (2.3), достигнет стационарного состояния. Это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  устанавливается стационарная плотность вероятности  $P_{st}(x)$ , которая не зависит от времени. На практике стационарное состояние устанавливается для моментов времени, значительных в сравнении со временем релаксации системы.

Учитывая, что для рассматриваемого случая с одним мультипликативным шумом выполняется соотношение  $h(x) = \gamma_1 d'(x)$ , и, принимая естественные граничные условия, записывается равновесная плотность вероятности в виде

$$P_{st}(x) = \frac{1}{Z d^{1-\gamma_1}(x)} \exp \left[ \int_0^x dy \frac{f(y)}{d(y)} \right], \quad (2.5)$$

где  $Z$  – нормирующий множитель. Определяется коэффициент диффузии, соответствующий уравнению (2.1)

$$d(x) = \Delta_1 b^2 (x^4 + 2rvx^2 + v^2),$$

где  $v = (1/b) \sqrt{\Delta_2/\Delta_1}$ .

Подставляя его в (2.5), записывается равновесная плотность вероятности:

$$P_{st}(x) = C (x^4 + 2rvx^2 + v^2)^{\gamma_1 - 1} \exp \left( - \frac{1}{\Delta_1 b^2} \int_0^x dy \frac{ay + by^2 + y^3}{y^4 + 2rvy^2 + v^2} \right). \quad (2.6)$$

Так как в данной задаче белый шум – модель реального шума с конечным временем корреляции, то параметр  $\gamma_1$  для мультипликативного шума  $\xi_1(t)$  принимается равным  $1/2$ , что соответствует исчислению Стратоновича. С другой стороны, не должно быть качественных различий между равновесными плотностями вероятности, как в исчислении Стратоновича, так и в исчислении Ито с параметром  $\gamma_1$ , равным  $0$ . В противном случае, такого рода расхождения свидетельствуют о неправильно выбранной процедуре описания системы.

## 2.4 Параметры порядка

Изучается влияние взаимной корреляции шумовых источников на наиболее вероятные равновесные состояния системы, которые служат параметрами порядка. Для этого записывается уравнение  $P'_{st}(x) = 0$ , которое определяет локальные точки экстремума равновесной плотности вероятности (2.5):

$$f(x) + d'(x)(\gamma_1 - 1) = 0. \quad (2.7)$$

Исследуется возможность существования неравновесных переходов, индуцированных взаимной корреляцией белых шумов, в стохастической системе, описываемой уравнением (2.1). При этом обращается внимание на то, чтобы каждый шум в отдельности эти переходы не вызывал. Это означает, что для  $r = 0$  уравнение (2.7) имеет такое же самое число корней, как и уравнение  $f(x) = 0$ , т.е. некоррелированные шумы не изменяют число наиболее вероятных состояний системы. А при некотором значении  $r = r_{cr}$  ( $r_{cr} \neq 0$  и  $-1 \leq r_{cr} \leq 1$ ) число локальных максимумов равновесной плотности вероятности  $P_{st}(x)$  является различным при  $r = r_{cr} - 0$  и при  $r = r_{cr} + 0$ . Наиболее вероятные состояния системы не соответствуют ее стационарным состояниям в детерминированном случае, т.е. при  $r = r_{cr}$  происходит индуцированный взаимной корреляцией шумов неравновесный переход.

Уравнение, определяющее точки экстремума плотности вероятности (2.6) имеет вид

$$x \left( x^2 + \frac{b}{1+\rho} x + \frac{a + \rho v r}{1+\rho} \right) = 0, \quad (2.8)$$

где  $\rho = 4(1 - \gamma_1)\Delta_1 b^2$ . Вначале исследуется это уравнение при  $r = 0$ . Дискриминант квадратного уравнения равен

$$D = \frac{b^2}{(1+\rho)^2} - \frac{4a}{1+\rho}.$$

Учитывая предположения о параметрах, приходим к выводу, что дискриминант всегда отрицательный. Уравнение (2.8) имеет единственный корень  $x = 0$ , наиболее вероятное равновесное состояние осциллятора соответствует точке устойчивого равновесия детерминированной системы, т.е. некоррелированные шумы не вызывают неравновесные переходы. В случае  $r \neq 0$  дискриминант равен

$$D = \frac{b^2}{(1+\rho)^2} - \frac{4(a + \rho v r)}{1+\rho}.$$

Приравнивая его к нулю, определяем критическое значение для корреляции

$$r_{cr} = \frac{b^2 - 4a - 4a\rho}{4\rho v(1+\rho)}.$$

Далее, учитывая предположения о параметрах, пренебрегаем в числителе  $b$ :

$$r_{cr} = -\frac{a}{\rho v}.$$

И, наконец, вводя параметр  $\eta = \rho/a$ , окончательно получим, что  $r_{cr} = -1/\eta v$ . При  $r > r_{cr}$  уравнение (2.8) имеет единственный действительный корень  $x = 0$ , и равновесная плотность вероятности (2.6) является одномодальной, как показано на рисунке 2.2а. При  $r < r_{cr}$  (это условие может быть выполнено, если имеет место неравенство  $|r_{cr}| < 1$ ) уравнение (2.8) имеет три корня, и равновесная плотность вероятности (2.6) – бимодальная как на рисунке 2.2б. Следовательно, при  $r = r_{cr}$  происходит одномодальный-бимодальный переход. Одномодальный-бимодаль-

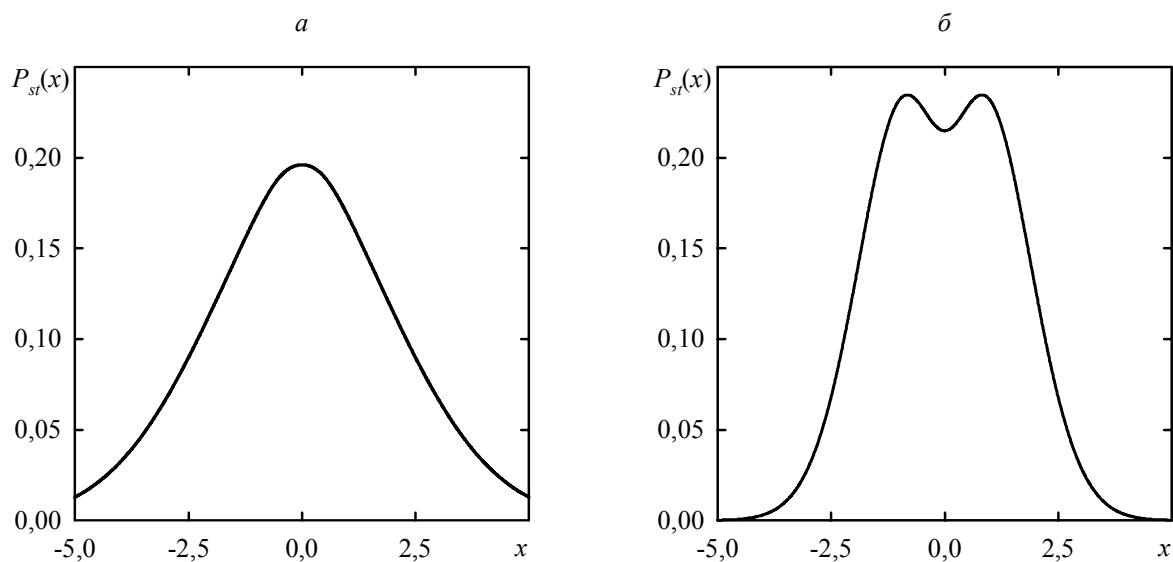


Рисунок 2.2 – Равновесная плотность вероятности при значениях  $\eta = 2$ ,  $\nu = 2$ ,  $\gamma_1 = 0,5$  ( $r_{cr} = -0,25$ ): а)  $r = 0$ ; б)  $r = -0,9$ .

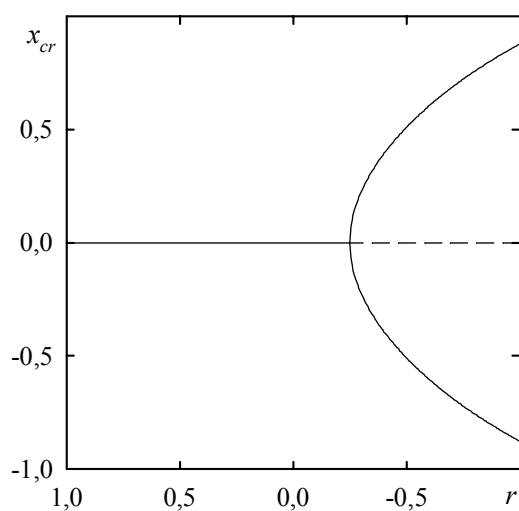


Рисунок 2.3 – Диаграмма бифуркации удвоения, соответствующая одномодальному-бимодальному переходу, индуцированному параметром корреляции ( $\eta = 2$ ,  $\nu = 2$ ,  $\gamma_1 = 0,5$   $r_{cr} = -0,25$ ).

ный неравновесный переход имеет отличительную особенность, а именно, глобальный максимум  $P_{st}(x)$  трансформируется в локальный минимум в точке пе-

рехода  $r = r_{cr}$ . Бифуркационная диаграмма представлена на рисунке 2.3.

Нужно отметить, что формально, положив параметр  $b$  восстанавливающей силы в уравнении (2.1) меньшим нуля, неравновесные переходы будут наблюдаться при положительной взаимной корреляции шумовых источников.

## 2.5 Эффективный потенциал

Равновесную плотность вероятности (2.5) можно представить в виде экспоненциального распределения Больцмана,  $P_{st}(x) \sim \exp[-U_{ef}(x)]$ , где  $U_{ef}(x)$  – эффективный потенциал. Он записывается в следующем виде:

$$U_{ef}(x) = -\int_0^x dy \frac{f(y)}{d(y)} + (1 - \gamma_1) \ln d(x). \quad (2.9)$$

При  $r = 0$  эффективный потенциал совпадает с детерминированным потенциалом  $U(x)$ . А при  $r = r_{cr}$  число его локальных минимумов изменяется, что свидетельствует о неравновесном переходе, индуцированном взаимной корреляцией шумов.

Выражение для эффективного потенциала, соответствующего плотности вероятности (2.6), имеет вид

$$U_{ef}(x) = \frac{1}{\Delta_1 b^2} \int_0^x dy \frac{ay + by^2 + y^3}{y^4 + 2rvy^2 + v^2} + (1 - \gamma_1) \ln[\Delta_1 b^2 (x^4 + 2rvx^2 + v^2)].$$

Его графики представлены на рисунке 2.4. При  $r > r_{cr}$  эффективный потенциал имеет один минимум (как показано на рисунке 2.1а), а при  $r < r_{cr}$  – два минимума (как показано на рисунке 2.4б).

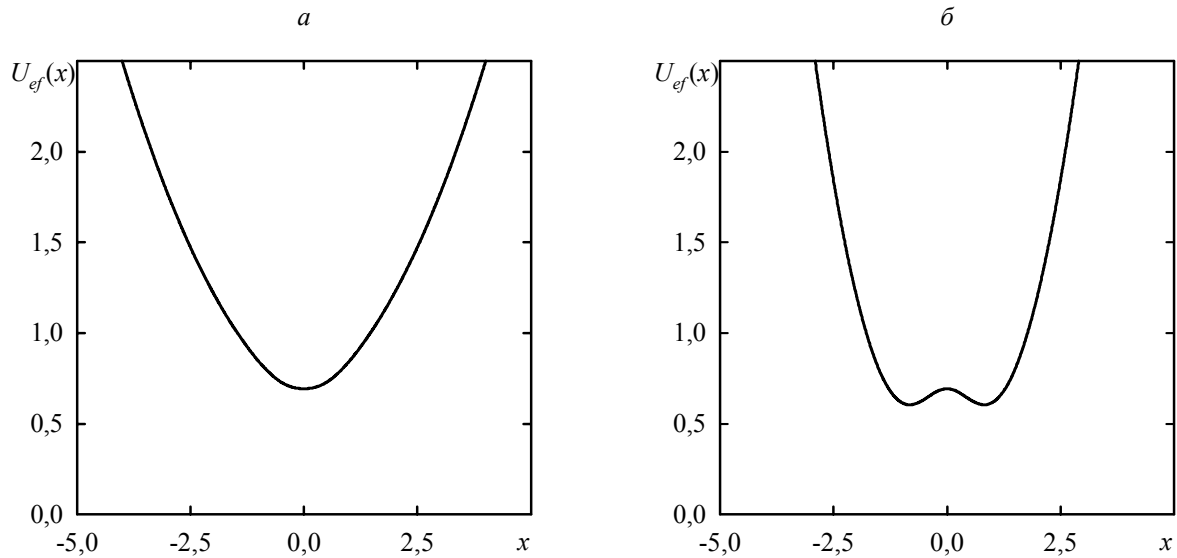


Рисунок 2.4 – Эффективный потенциал при значениях параметров  $\eta = 2$ ,  $\nu = 2$ ,  $a = 1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$  ( $r_{cr} = -0,25$ ): а)  $r = 0$ ; б)  $r = -0,9$ .

## 2.6 Выводы к разделу 2

1. Изучение явления индуцированных шумом неравновесных переходов в нелинейном осцилляторе с сильным затуханием достигается рассмотрением уравнения Ланжевена с взаимно-коррелированными гауссовскими белыми шумами, один из которых – мультипликативный, а другой – аддитивный. Записано соответствующее уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности состояний системы, из которого получены равновесная плотность вероятности, эффективный потенциал и параметры порядка.

2. Исследование влияния взаимной корреляции шумовых источников на равновесные состояния нелинейного сильно затухающего осциллятора показывает, что изменение интенсивности взаимной корреляции шумов может приводить к качественному изменению равновесной плотности вероятности, а именно к одномодальному-бимодальному неравновесному переходу, индуцированному шумом.

### 3 ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЕ НАНОЧАСТИЦЫ ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

#### 3.1 Общие положения

Актуальность изучения ферромагнитных наночастиц, а также их ансамблей диктуется, в первую очередь, перспективами использования таких объектов в качестве носителей информации в современных магнитных накопителях [11-13]. Бит информации в таких устройствах определяется тем, в каком из двух равновесных состояний, связанных с сильной одноосной анизотропией, находится магнитный момент  $\mathbf{m}$  наночастицы. Поэтому с точки зрения процесса записи данных важным является вопрос об управляемом переключении его состояния. В конечном итоге, эта проблема напрямую связана с быстродействием накопителей, которое ограничивается временем перемагничивания наночастиц в процессе записи. Таким образом, поиск способов быстрого и малоэнергетического изменения направления магнитного момента является важной прикладной задачей, которая вызывает значительный интерес исследователей [55-59].

Точное описание перемагничивания малой ферромагнитной частицы с одноосной анизотропией постоянным внешним полем  $\mathbf{H}$ , параллельным легкой оси, дано в работе [61]. В частности, было показано, что при некотором критическом значении поля  $\mathbf{H}_{cr}$  происходит переход магнитного момента из одного равновесного состояния в другое. В дальнейшем было показано, что подобные переходы происходят и при других внешних воздействиях. Так, из работ [57, 62] следует, что наночастица может перемагничиваться импульсным полем  $\mathbf{H}_\perp$ , перпендикулярным легкой оси. В [63] численно продемонстрирована возможность перехода между двумя равновесными направлениями магнитного момента под действием как постоянного поля  $\mathbf{H}$ , приложенного вдоль оси легкого намагничивания наночастицы, так и поля  $\mathbf{h}(t)$ , циркулярно-поляризованного в плоскости, перпендикулярной к легкой оси. При этом величина критического

поля  $\mathbf{H}_{cr}$  оказалась существенно меньше, чем в [61]. На уменьшение величины  $\mathbf{H}_{cr}$  указывают также результаты эксперимента по перемагничиванию наночастицы в присутствии радиочастотного импульса вращающегося поля  $\mathbf{h}(t)$  [64].

Идеи о перемагничивании наночастицы вращающимся полем  $\mathbf{h}(t)$  были предложены и численно исследованы в работах [65, 66, 67]. Последовательное аналитическое описание процесса перемагничивания наночастицы циркулярно-поляризованным полем было дано в работах [67, 68]. Исходя из критерия устойчивости прецессии магнитного момента под действием внешнего поля  $\mathbf{h}(t)$ , было показано, что инверсии направлений намагниченности могут обуславливаться исключительно циркулярно-поляризованным полем  $\mathbf{h}(t)$ . Кроме того, учет взаимодействия с термостатом [69] показывает, что случайное тепловое поле способно инициировать переключение намагниченности наночастицы в присутствии вращающегося поля. При этом амплитуды поля  $\mathbf{h}(t)$  являются существенно меньшими критических значений, на которых происходит потеря устойчивости прецессии магнитного момента.

Однако не всегда потеря устойчивости прецессии магнитного момента приводит к инвертированию направления магнитного момента. Как было показано в [70], намагниченность ферромагнитных пленок в присутствии вращающегося поля  $\mathbf{h}(t)$  может демонстрировать широкое многообразие форм своего движения. Вывод о том, что под действием поля  $\mathbf{h}(t)$  магнитный момент наночастицы может участвовать в более сложных, чем обычная прецессия, формах движения, следует также из работы [71]. В частности, отклонения  $\mathbf{m}$  от прецессионного движения могут быть подобными нутациям оси гироскопа [72] и заключаются в наложении на регулярное вращение магнитного момента колебаний величины угла между легкой осью и направлением вектора  $\mathbf{m}$ . Таким образом, потеря устойчивости может означать смену режимов движения, а важный с практической точки зрения вопрос о том, когда именно происходит перемагничивание наночастицы циркулярно-поляризованным полем, остается открытым. Решение этой проблемы и определяет цель настоящей работы.



### 3.2 Модель и основные соотношения

Будем рассматривать сферическую ферромагнитную одноосную наночастицу. Пусть ее ось легкого намагничивания совпадает с осью  $oz$  декартовой системы координат. Полагаем, что обменное взаимодействие спинов частицы достаточно велико, и поведение суммарного магнитного момента определяется моделью когерентного вращения – т.е. модуль магнитного момента является сохраняющейся величиной. В таком случае намагниченность частицы будет характеризоваться классическим магнитным моментом  $\mathbf{m}$  ( $|\mathbf{m}| = \text{const}$ ), динамика которого подчиняется уравнению Ландау-Лифшица

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} - \frac{\lambda \gamma}{m} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}), \quad (3.1)$$

где  $\gamma (> 0)$  – гиромагнитное отношение,  $\lambda (> 0)$  – безразмерный параметр затухания,  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  – эффективное магнитное поле, действующее на магнитный момент. При наличии только поля анизотропии  $\mathbf{H}_a$  уравнение (3.1) будет описывать затухающую прецессию магнитного момента безотносительно к начальному положению  $\mathbf{m}$  (см. рисунок 3.1a). В присутствии циркулярно-поляризованного поля  $\mathbf{h}(t)$  динамика магнитного момента будет носить более сложный характер. Рассмотрим ее детально.

Пусть на магнитный момент наночастицы действует поле вида

$$\mathbf{h}(t) = h \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \rho h \sin(\omega t) \mathbf{e}_y, \quad (3.2)$$

где  $h$  – амплитуда поля,  $\omega$  – его частота,  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  – орты декартовой системы координат,  $\rho = \pm 1$  для левой и правой поляризации соответственно. Магнитная энергия частицы в этом случае будет иметь вид

$$W = -\frac{1}{2} m H_a \cos^2 \theta - m h \sin \theta \cos(\varphi - \rho \omega t), \quad (3.3)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$ , соответственно, полярный и азимутальный углы вектора  $\mathbf{m}$ .

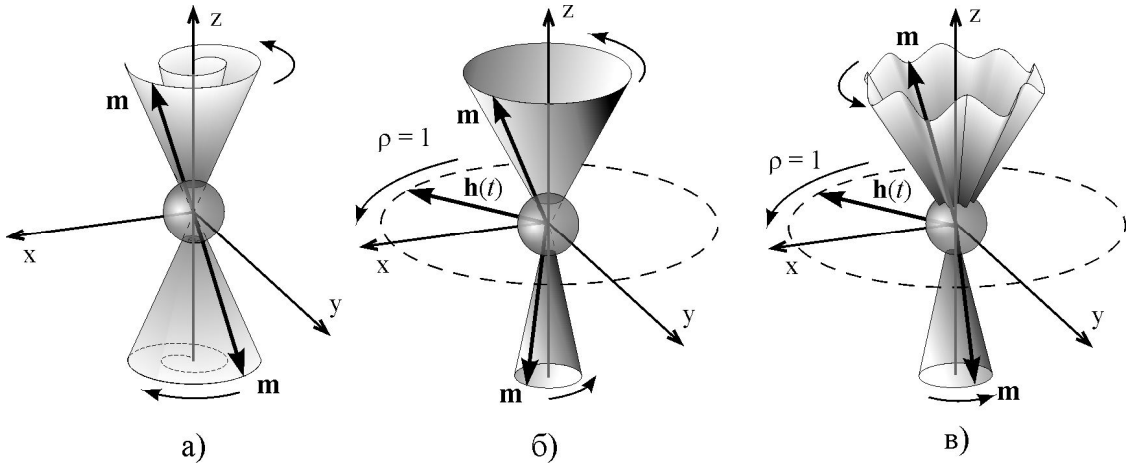


Рисунок 3.1 – Схематическое изображение прецессии магнитного момента. а) Затухающая прецессия без внешнего поля. б) Прецессия с постоянным углом в циркулярно-поляризованном поле. в) Колебания угла прецессии.

Используя сферическую симметрию задачи, а также выражения (3.2) и (3.3), уравнение (3.1) можно преобразовать в систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \gamma h \sin(\varphi - \rho\omega t) - \gamma\lambda \cos\theta (H_a \sin\theta - h \cos(\varphi - \rho\omega t)), \\ \dot{\varphi} = \gamma (H_a \cos\theta - \text{ctg}\theta \cos(\varphi - \rho\omega t)) - \frac{\gamma\lambda}{\sin\theta} h \sin(\varphi - \rho\omega t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Данная система имеет два типа решений и, соответственно, описывает два режима движения магнитного момента. Первый представляет собой прецессию вектора  $\mathbf{m}$  с некоторым постоянным углом (см. рисунок 3.1б). В соответствии с терминологией, введенной в [71], будем говорить, что в таком случае имеет место **P**-режим. Как было показано в [67], для **P**-режима система (3.4) преобразуется в алгебраическое уравнение

$$\tilde{h}^2 = \frac{1 - \cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1} \left[ \left( \cos \theta_1 - \frac{\rho \tilde{\omega}}{1 + \lambda^2} \right)^2 + \left( \frac{\lambda \tilde{\omega} \cos \theta_1}{1 + \lambda^2} \right)^2 \right], \quad (3.5)$$

где  $\tilde{h} = h/H_a$ ,  $\tilde{\omega} = \omega/\omega_r$ ,  $\omega_r = \gamma H_a$  – резонансная частота,  $\theta_1$  – угол установившейся прецессии магнитного момента. Решив уравнение (3.5), можно

найти величину угла  $\theta_1$ . В общем случае (3.5) имеет 4 корня, из которых устойчивыми могут быть 1, 2 или 3. Условие устойчивости задается выражением

$$\chi = \lambda(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_4) - \operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2(\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_1)^2 - 4\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3} > 0, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \cos^2 \theta_1 - \frac{\rho\tilde{\omega}(1 - \cos^2 \theta_1)}{(1 + \lambda^2) \cos \theta_1}, & \tilde{\omega}_2 &= 1 - \frac{\rho\tilde{\omega}(1 + \lambda^2 \cos^2 \theta_1)}{(1 + \lambda^2) \cos \theta_1}, \\ \tilde{\omega}_3 &= \cos^2 \theta - \frac{\rho\tilde{\omega}(1 + \lambda^2 \cos^2 \theta_1)}{(1 + \lambda^2) \cos \theta_1}, & \tilde{\omega}_4 &= 1 - \frac{\rho\tilde{\omega}(1 - \cos^2 \theta_1)}{(1 + \lambda^2) \cos \theta_1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Второй режим движения вектора  $\mathbf{m}$ , так называемый **Q**-режим, характеризуется периодическим отклонением угла прецессии магнитного момента от легкой оси (см. рисунок 3.1б) и до настоящего времени не имеет аналитического описания.

### 3.3 Численный анализ динамики магнитного момента

Поскольку аналитическое решение системы (3.4) в общем случае затруднено, целесообразно на первом этапе исследовать его численными методами. На рисунке 3.2 показаны варианты численного решения системы (3.4) с нулевыми начальными условиями для таких значений параметров:  $\lambda = 0.2$ ,  $\tilde{\omega} = 0.9$ ,  $\rho = 1$ . Очевидно, что первый график соответствует **P**-режиму, второй **Q**-режиму, а из третьего следует, что для данной амплитуды циркулярно-поляризованного поля равновесные состояния в области  $z > 0$  отсутствуют. Таким образом, поле  $\mathbf{h}(t)$  может радикально влиять на намагниченность наночастицы вдоль оси  $z$ , несмотря на то, что само не имеет отличной от нуля проекции на данную ось.

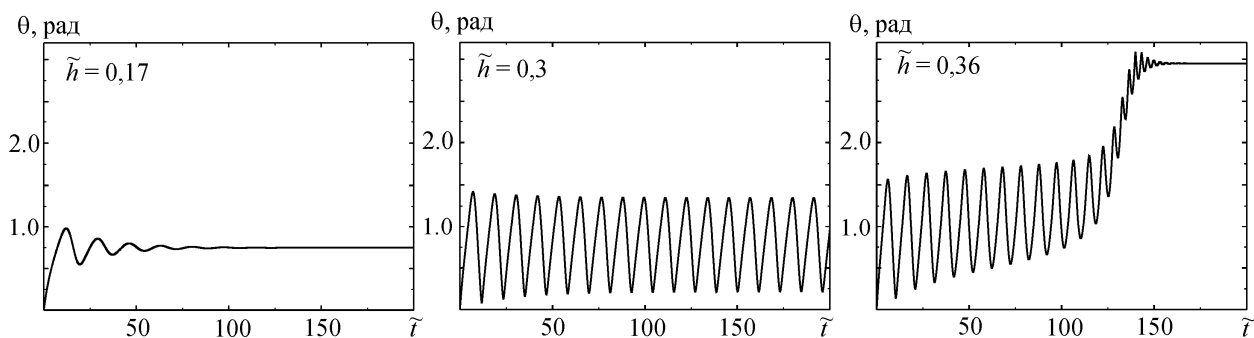


Рисунок 3.2 – Решение системы уравнений (3.4) для различных амплитуд циркулярно-поляризованного поля.

В частности, его действие может вызывать перемагничивание наночастицы. Для количественного описания данного явления система (3.4) решалась при квазистатическом изменении амплитуды поля  $h$ . Как видно из рисунка 3.2, для определенных частот магнитный момент наночастицы может скачкообразно менять свое направление, в то время как для других частот непосредственно инвертирование магнитного момента происходит через изменение характера его движения. Потеря устойчивости, или несоблюдение условия (3.6), здесь означает появление нутационных движений вектора  $\mathbf{m}$ , которые, в свою очередь,

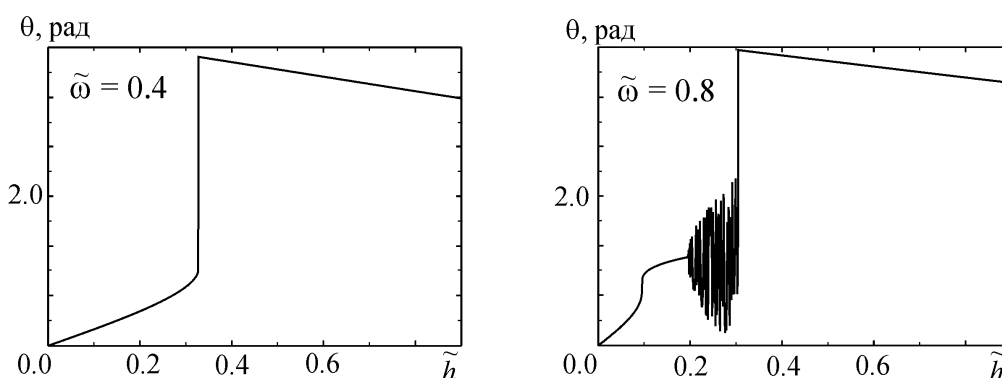


Рисунок 3.3 – Решение системы уравнений (3.4) при квазистатическом изменении амплитуды  $\tilde{h}$  циркулярно-поляризованного поля.

также становятся неустойчивыми с ростом амплитуды  $h$ , и магнитный момент возвращается к обычной прецессии, но уже в области отрицательных значений координаты  $z$ . Заметим, что такой переход носит необратимый характер, и любое дальнейшее изменение амплитуды  $h$  вращающегося поля будет иметь следствием лишь коррекцию угла прецессии.

Поскольку **P**-прецессия вектора  $\mathbf{m}$  описывается уравнением (3.5), целесообразно сравнить результаты, полученные с его помощью, с результатами численного решения (3.4). В частности, это позволит дать однозначный ответ на вопрос о том, при каких параметрах внешнего поля происходит перемагничивание наночастицы. На рисунке 3.4 изображены наиболее типичные ситуации, показывающие искомые различия, для следующих значений параметров:  $\lambda = 0.2$ ,  $\rho = 1$ . Для повышения информативности в качестве численного значения установленной величины  $\cos\theta_1$  на графике изображена ее постоянная составляющая. Нижний график каждой пары определяет области устойчивых решений (3.5) согласно критерию (3.6). Первая пара графиков характерна для небольших частот. Совпадение теоретического и численного значений величины  $\cos\theta_1$  в области положительных  $\chi$  свидетельствует о наличии **P**-режима движения магнитного момента. Потеря устойчивости решения (3.5) приводит к перемагничиванию наночастицы. Вторая пара наглядно демонстрирует сложный характер движения  $\mathbf{m}$ . В данном случае имеется три области, где  $\chi > 0$ , а потеря устойчивости не во всех случаях приводит к изменению знака  $m_z$ . С ростом  $h$  сначала имеет место скачкообразный переход в так называемый промежуточный **P**-режим в области положительных значений координаты  $z$  без возбуждения колебаний оси прецессии. Затем, при дальнейшем росте  $h$ , прецессионное движение вновь теряет устойчивость, что сопровождается возбуждением нутационных движений, или переходом в **Q**-режим, из которого впоследствии и происходит его переориентация. На третьей паре графиков описанный ранее промежуточный **P**-режим отсутствует. Потеря устойчивости приводит к переходу магнитного момента в **Q**-режим с последующим инвертированием направления.

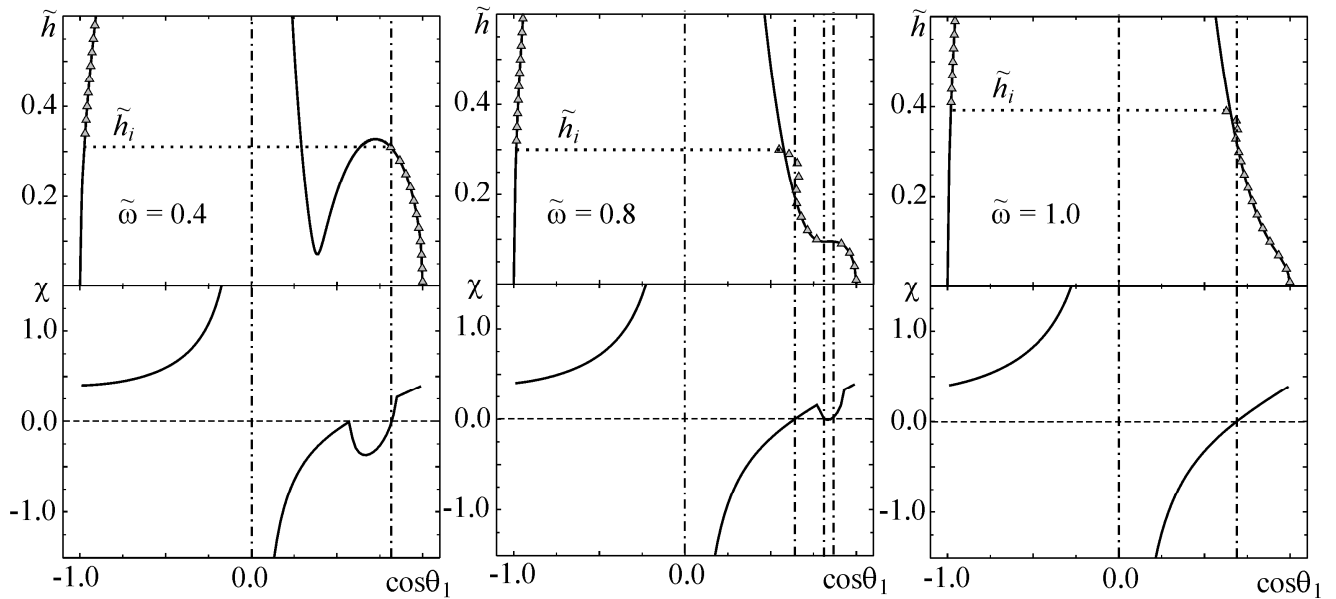


Рисунок 3.4 – Сравнение теоретических и численных результатов для различных значений частоты циркулярно-поляризованного поля. Нижние графики – поведение критерия устойчивости (3.6).

Многообразие режимов движения магнитного момента и возможные последовательности их смен показывают фазовые диаграммы, представленные на рисунке 3.5. Здесь область 1 соответствует **P**-режиму, 2 – **Q**-режиму, область 3 – промежуточному **P**-режиму, 4 – **P**-режиму в области отрицательных значений  $z$ . Каждая точка диаграммы, представленной на рисунке 3.5а, получена путем квазистатического изменения амплитуды вращающегося поля, в то время как для диаграмм рисунка 3.5б, в квазистатическом образе изменялась частота поля при фиксированной амплитуде. Стрелками указано направление изменений параметров. Как видно из рисунка, положение координат изменения режимов движения зависит от характера привнесения возмущений в систему. Так, с увеличением амплитуды поля вплоть до инверсии направления магнитного момента все изменения являются обратимыми, что условно показано двойными стрелками между областями 1,2 и 3 (см. рисунок 3.5а). Инверсия, или переход **m** в область 4, является необратимой: из области 4 магнитный момент уже не может попасть в другие области при обычном изменении параметров вращающе-

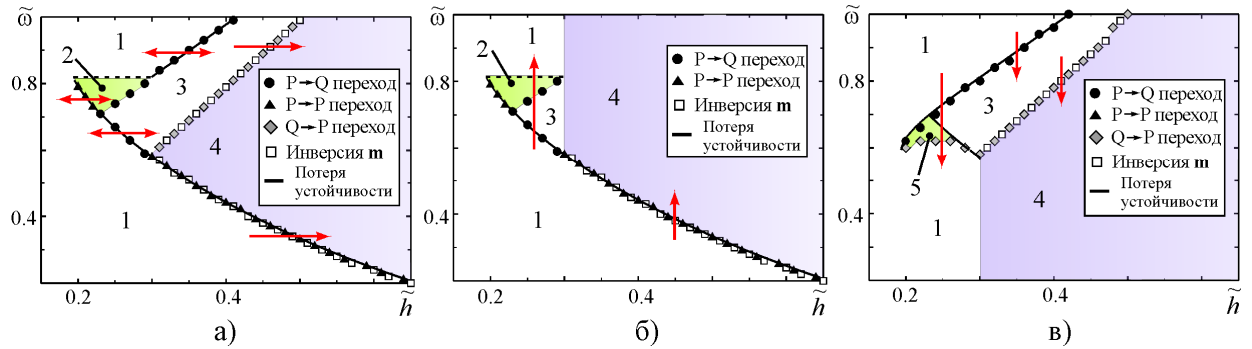


Рисунок 3.5 – Фазовые диаграммы, полученные: а) при квазистатическом изменении амплитуды циркулярно-поляризованного поля, б) при квазистатическом увеличении частоты поля, в) при квазистатическом уменьшении частоты поля.

гося поля для заданной его поляризации. То же самое можно сказать для магнитного момента, изначально сориентированного против оси  $z$ . Это условно показано стрелкой, направленной вправо на диаграмме.

Качественные отличия диаграмм рисунка 3.5б и в обусловлены неоднозначной частотной зависимостью равновесного значения проекции магнитного момента  $m_z$  в определенном диапазоне значений амплитуды вращающегося поля (см. рисунок 3.6а). При этом в зависимости от того, увеличивается или уменьшается частота, координаты точки потери устойчивости будут задаваться различными значениями корня алгебраического уравнения, получаемого приравниванием к нулю правой части выражения (3.6). Данный факт проиллюстрирован на рисунке 3.6б. С ростом частоты множество точек первой потери стабильности решения (3.5) образуют линию 4, в то время как с уменьшением частоты потеря стабильности впервые происходит в точках, лежащих на кривой 5. В заключение отметим, что переходная область 5 на диаграмме рисунка 3.5б стягивается в линию при устремлении времени ожидания устоявшегося решения уравнения (3.4) к бесконечности.

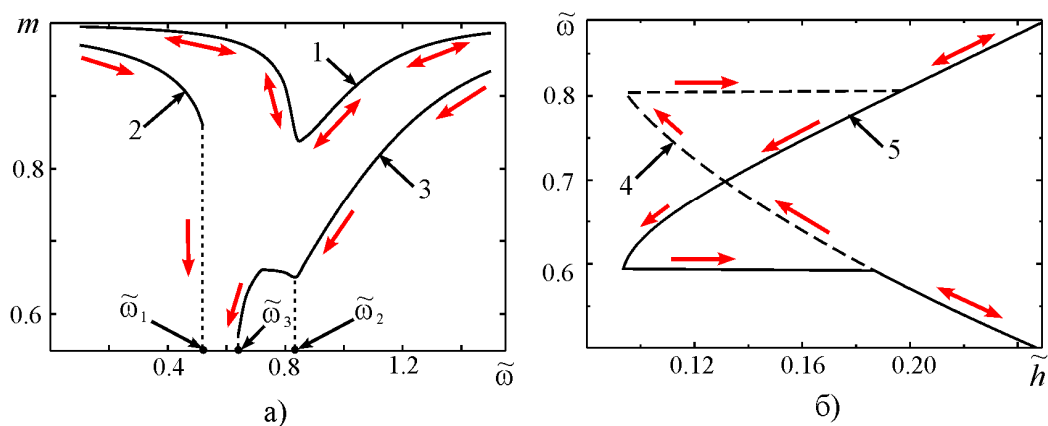


Рисунок 3.6 – а) Зависимости намагниченности наночастицы от частоты внешнего поля: 1 – при  $\tilde{h} = 0.09$ , 2 – при  $\tilde{h} = 0.23$ , частота возрастает, 3 – при  $\tilde{h} = 0.23$ , частота убывает.  $\tilde{\omega}_1$ ,  $\tilde{\omega}_3$  – точки переориентации  $\mathbf{m}$ ,  $\tilde{\omega}_2$  – точка смены режима движения  $\mathbf{m}$ . б) Поведение критерия устойчивости в зависимости от направления изменения  $\tilde{\omega}$ .

### 3.4 Выводы к разделу 3

В данном разделе численно исследована динамика магнитного момента сферической наночастицы. Детально проанализированы режимы прецессии магнитного момента и условия их возникновения. Численно подтверждена возможность скачкообразного перемагничивания наночастицы с помощью циркулярно-поляризованного внешнего поля. Показано, что результатом потери устойчивости прецессии магнитного момента может быть как инвертирование вектора магнитного момента, так и переход прецессии в неоднородный режим. Указана возможность перемагничивания наночастицы через режим неоднородной прецессии. Освещены аспекты неоднозначной частотной зависимости проекции магнитного момента на направление легкой оси. Полученные результаты могут иметь практическую ценность как для индустрии медиа-устройств, так и для экспериментальных методик по изучению ансамблей ферромагнитных наночастиц.



## ВЫВОДЫ

1. В случае большого затухания изучена динамика классических частиц, которые находятся в постоянном силовом поле и в случайном кусочно-линейном одномерном потенциале, представляющем специальный тип пространственно-неоднородной среды, которая имеет случайный характер (т.н. замороженный дихотомический беспорядок). Был получен ряд точных результатов. Пользуясь подходом, который базируется на интегрировании вдоль реализаций случайного дихотомического силового поля, была найдена функция плотности вероятности для положения частицы. Было показано, что данная функция имеет регулярную и сингулярную (пропорциональную  $\delta$ -функции Дирака) составляющие. При этом первая является определяющей на малых временных интервалах, в то время как последняя – на больших, поскольку вклад сингулярной части уменьшается со временем как  $t^{-1/2}$ . Для оценки степени отличия найденной функции распределения от гауссовского распределения найдена временная зависимость коэффициента эксцесса. Также показано, что при определенных условиях поведение частиц становится подобным броуновскому движению. Для данного случая были посчитаны эффективный коэффициент диффузии и температура.

2. Для экспоненциального распределения участков однородности случайной дихотомической силы были определены статистические характеристики времени достижения частицей заданного уровня. В частности, найдены выражения для плотности вероятности и моментов. Показано, что для малых расстояний плотность вероятности времени достижения частицей определенного уровня почти не зависит от времени, с ростом расстояния временная зависимость плотности вероятности становится линейной, а в дальнейшем – унимодальной, и переходит в форму гауссовского распределения на больших расстояниях. Для оценки степени отличия плотности вероятности времени достижения частицей заданного уровня от распределения Гаусса найдены вре-

менные зависимости коэффициентов эксцесса и асимметрии. Полученные результаты могут быть использованы для изучения движения заряженных частиц и локализованных структур в средах, которые состоят из однородных слоев, толщина которых случайна.

3. Исследование влияния взаимной корреляции шумовых источников на равновесные состояния нелинейного сильно затухающего осциллятора показывает, что изменение интенсивности взаимной корреляции может приводить к качественному изменению равновесной плотности вероятности, а именно к одномодальному-бимодальному неравновесному переходу, индуцированному шумом.

4. Детально проанализированы режимы прецессии магнитного момента и условия их возникновения. Численно подтверждена возможность скачкообразного перемагничивания наночастицы с помощью циркулярно-поляризованного внешнего поля. Показано, что результатом потери устойчивости прецессии магнитного момента может быть как инвертирование вектора магнитного момента, так и переход прецессии в неоднородный режим. Указана возможность перемагничивания наночастицы через режим неоднородной прецессии. Освещены аспекты неоднозначной частотной зависимости проекции магнитного момента на направление легкой оси. Полученные результаты могут иметь практическую ценность как для индустрии медиа-устройств, так и для экспериментальных методик по изучению ансамблей ферромагнитных наночастиц.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ НОРМИРОВКИ ДЛЯ  $W_n(t)$**

Введем величину

$$S_n(t) = \int_{\Omega_n(t)} \prod_{j=1}^n p(s_j) ds_j \quad (\text{A.1})$$

с  $n \geq 1$ . Согласно определениям  $\Omega_n(t)$  и  $\tilde{s}_k$ , (A.1) можно переписать в виде

$$S_n(t) = \int_0^{\tilde{s}_1} p(s_1) ds_1 \int_0^{\tilde{s}_2} p(s_2) ds_2 \dots \int_0^{\tilde{s}_n} p(s_n) ds_n. \quad (\text{A.2})$$

Используя в уравнении (1.8) интегральное выражение  $\int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds = 1 - \int_0^{\tilde{s}_{n+1}} p(s_{n+1}) ds_{n+1}$ , следующее из условий нормировки для  $p(s)$ , можно выразить плотность вероятности  $W_n(t)$  через величину  $S_n(t)$  следующим образом:

$$W_n(t) = S_n(t) - S_{n+1}(t). \quad (\text{A.3})$$

Учитывая тот факт, что  $S_{\infty}(t) = 0$ , такое представление функции  $W_n(t)$  дает  $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) = S_1(t)$ . С другой стороны, поскольку  $W_0(t) = 1 - S_1(t)$ , убеждаемся, что имеет место условие нормировки  $W_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) = 1$ .

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**  
**ВЫВОД УРАВНЕНИЯ (1.29)**

В соответствии с (1.26), характеристическая функция  $\phi_t(\eta)$  может быть записана в виде

$$\phi_t(\eta) = -e^{-(\lambda-i\eta)t} [A(\eta)e^{(\lambda-i\eta)gt} + B(\eta)e^{-(\lambda-i\eta)gt}], \quad (\text{B.1})$$

где

$$A(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iz + y + 2g(\lambda - i\eta)}{(z - z_1)(z - z_2)} e^{(iz+y)t} dz, \quad (\text{B.2})$$

$$B(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(f - g)}{(z - z_3)(z - z_4)} e^{(iz+y)t} dz. \quad (\text{B.3})$$

Применяя теорему о вычетах для вычисления интегралов в выражениях (B.2) и (B.3), получим

$$\begin{aligned} A(\eta) &= i[\text{Res}\Psi(\eta; z_1) + \text{Res}\Psi(\eta; z_2)], \\ B(\eta) &= i[\text{Res}\Phi(\eta; z_3) + \text{Res}\Phi(\eta; z_4)]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Здесь  $\text{Res}\Psi(\eta; z_{1,2})$  и  $\text{Res}\Phi(\eta; z_{3,4})$  это вычеты функций

$$\begin{aligned} \Psi(\eta; z) &= \frac{iz + y + 2g(\lambda - i\eta)}{(z - z_1)(z - z_2)} e^{(iz+y)t}, \\ \Phi(\eta; z) &= \frac{\lambda(f - g)}{(z - z_3)(z - z_4)} e^{(iz+y)t} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

комплексной переменной  $z$  в точке  $z_k$ . Полагая, что  $y > \lambda(f + g)$  (в этом случае  $\text{Im } z_k > 0$ ), и принимая во внимание, что  $\text{Res}\Psi(\eta; z_{1,2}) = \lim_{z \rightarrow z_{1,2}} (z - z_{1,2})\Psi(\eta; z)$  и  $\text{Res}\Phi(\eta; z_{3,4}) = \lim_{z \rightarrow z_{3,4}} (z - z_{3,4})\Phi(\eta; z)$ , из выражений (B.4), (B.5) и (1.27) находим

$$A(\eta) = -e^{-(\lambda-i\eta)gt} \left( \frac{g(\lambda-i\eta)}{b(\eta)-ia(\eta)} \sinh[b(\eta)t - ia(\eta)t] + \cosh[b(\eta)t - ia(\eta)t] \right),$$

$$B(\eta) = \frac{\lambda(g-f)}{b(\eta)-ia(\eta)} e^{(\lambda-i\eta)gt} \sinh[b(\eta)t - ia(\eta)t]. \quad (\text{B.6})$$

Окончательно, подставляя (B.6) в (B.1), получим (1.29).

## ПРИЛОЖЕНИЕ С

### ВЫВОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Для расчета интегралов в уравнении (1.73),

$$Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda e^{v_0 x}}{v_0 v_1 - \lambda^2} d\kappa, \quad Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_2 e^{v_0 x}}{v_0 v_2 - \lambda^2} d\kappa, \quad (\text{C.1})$$

используется метод контурного интегрирования [37]. Согласно (1.70) и (1.75), подынтегральные выражения в уравнении (C.1)  $R(\kappa) = \lambda \exp(v_0 x)/(v_0 v_1 - \lambda^2)$  и  $S(\kappa) = v_2 \exp(v_0 x)/(v_0 v_2 - \lambda^2)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} R(\kappa) &= -\frac{\lambda}{(\kappa - \kappa_1)(\kappa - \kappa_2)} e^{(i\kappa + \eta)x}, \\ S(\kappa) &= -\frac{i\kappa + \eta + 2i\lambda v}{(\kappa - \kappa_3)(\kappa - \kappa_4)} e^{(i\kappa + \eta)x}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{1,2} &= i\eta \pm i\lambda \sqrt{1 - v^2} + \lambda v, \\ \kappa_{3,4} &= i\eta \pm i\lambda \sqrt{1 - v^2} - \lambda v. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Формулы (C.2) показывают, что и  $R(\kappa)$ , и  $S(\kappa)$ , как функции комплексной переменной  $\kappa$ , имеют два полюса первого порядка  $\kappa = \kappa_{1,2}$  и  $\kappa = \kappa_{3,4}$ , соответственно. Если  $\eta > \lambda$ , то все полюсы находятся в верхней полуплоскости комплексной  $\kappa$ -плоскости, и теорема о вычетах дает

$$\begin{aligned} Y &= i[\text{Res}R(\kappa_1) + \text{Res}R(\kappa_2)], \\ Z &= i[\text{Res}S(\kappa_3) + \text{Res}S(\kappa_4)]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Поскольку вычеты в (C.4) определены как  $\text{Res}R(\kappa_{1,2}) = \lim_{\kappa \rightarrow \kappa_{1,2}} (\kappa - \kappa_{1,2})R(\kappa)$  и  $\text{Res}S(\kappa_{3,4}) = \lim_{\kappa \rightarrow \kappa_{3,4}} (\kappa - \kappa_{3,4})S(\kappa)$ , из выражений (C.2) и (C.3) получаем

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \sinh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) e^{i\lambda x v}, \\
 Z &= \left[ \frac{iv}{\sqrt{1-v^2}} \sinh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) + \cosh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) \right] e^{-i\lambda x v}.
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

Наконец, подставляя (C.5) в формулу

$$\phi_x(\omega) = e^{-\lambda x} \left[ Y e^{i\omega x / (f+g)} + Z e^{i\omega x / (f-g)} \right], \tag{C.6}$$

которая следует из уравнения (1.73) и (C.1), мы получим нужную характеристическую функцию (1.74).

**ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК**

1. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Физическая кинетика (Серия: «Теоретическая физика» Т.10). – М.: Наука, 1979.
2. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. – М.: Мир, 1990.
3. Benzi R., Sutera A., and Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A – 1981 – Vol. 14 – P. L 453.
4. Doering C.R. and Gadoua J.C. Resonant activation over a fluctuating barrier // Phys. Rev. Lett. – 1992 – Vol. 69 – P. 2318-2321.
5. Magnasco M.O. Forced thermal ratchets // Phys. Rev. Lett. – 1993 – Vol. 71 – P. 1477-1481.
6. M. N. Popescu, C. M. Arizmendi, A. L. Salas-Brito, and F. Family Disorder Induced Diffusive Transport in Ratchets // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol.85, №15. – P.3321-3324.
7. Lei Gao, Xiaoqin Luo, Shiqun Zhu, and Bambi Hu Dispersive anomalous diffusive transport in ratchets with long-range correlated spatial disorder // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol.67. – 062104
8. D. G. Zarlenga, H. A. Larrondo, C. M. Arizmendi, and F. Family Trapping mechanism in overdamped ratchets with quenched noise // Phys. Rev. E. – 2007. – Vol.75. – 051101.
9. Blick R.H. et al Nanostructured silicon for studying fundamental aspects of nanomechanics // J. Phys.: Condens. Matter. – 2002. – Vol. 14. – P. R905-R945.
10. Aldridge J.S. and Cleland A.N. Noise-enabled precision measurements of a Duffing nanomechanical resonator // Phys. Rev. Lett. – 2005 – Vol. 94 – 156403.
11. M. Albrecht, C. T. Rettner, A. Moser. Recording performance of high-density patterned perpendicular magnetic media // Appl. Phys. Lett. – 2002. – Vol.81, №15. – P.2875-2877.
12. Moser A., Takano K., Margulies D.T., Albrecht M., Sonobe Y., Ikeda Y., Sun



- S., Fullerton E.E. Magnetic recording: advancing into the future // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2002. – Vol.35. – P. R157-R167.
13. *The Physics of Ultra-High-Density Magnetic Recording*, edited by M.L. Plumer, J. Van Ek, and D. Weller, – Springer-Verlag, Berlin, 2001.
  14. P.Reimann, P. Hänggi Introduction to the physics of Brownian motors // *Appl. Phys. A.: Mater. Sci. Process.* – 2002. – Vol. 75. – P. 169-178.
  15. R.D. Astumian, P. Hänggi Brownian motors // *Physics Today.* – 2002. – Vol. 55, № 11. – P. 33-39.
  16. J.-P. Bouchaud, A. Comtet, A.Georges, P. Le Doussal Classical diffusion of a particle in a one-dimensional random force field. // *Ann. Physics.* – 1990. – Vol.201, №1. – P.285-341
  17. J.-P. Bouchaud and A. Georges Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications // *Phys. Rep.* – 1990. – Vol. 195. – P. 127.
  18. Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., and Marchesoni F. Stochastic resonance // *Rev. Mod. Phys.* – 1998 – Vol. 70 – P. 223-287.
  19. Ya. G. Sinai The Limiting Behavior of a One-Dimensional Random Walk in a Random Medium // *Theor. Probab. Appl.* – 1983. – Vol.27, №2. – P.256-268.
  20. B. Derrida Velocity and Diffusion Constant of a Periodic One-Dimensional Hopping Model // *J. Stat. Phys.* – 1983. – Vol.31, №3. – P. 433-450.
  21. A. O. Golosov Localization of random walks in one-dimensional random environments // *Comm. Math. Phys.*.. – 1984. – Vol.92, №4. – P.491-506
  22. C. Monthus Random walks and polymers in the presence of quenched disorder // *Lett. Math. Phys.*.. – 2006. – Vol.78. – P.207-233
  23. P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec Reaction-rate theory: fifty years after Kramers // *Rev. Mod. Phys.* – 1990. – Vol., №62. – P.251-341
  24. S. Schiedl Mobility in a one-dimensional disorder potential // *Z Phys. B: Condens. Matter.* – 1995. – Vol.97. – P.345-352
  25. P. Le Doussal, V.M. Vinokur Creep in One Dimension Phenomenological Theory of Glass Dinamycs // *Physica C.* – 1995. – Vol.254. – P.63-68

26. A.V. Lopatin, V. M. Vinokur Instanton Approach to the Langevin Motion of a Particle in a Random Potential // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol.86, №9. – P.1817-1820.
27. D. A. Gorokhov and G. Blatter Diffusion and creep of a particle in a random potential // *Phys. Rev. B.* – 1998. – Vol.58, №1. – P.213-217.
28. S.I Denisov Statistical dynamics of magnetic kinks // *J. Magn. Magn. Mater.* – 1995. – Vol.147. – P.406-408
29. S.I. Denisov, R.Yu. Lopatkin Coercivity and domain wall velocity in a fluctuating magnetic medium, // *Phys. Scr.* – 1997. – Vol.56. – P.423-425
30. P.E. Parris, M. Kus, D.H. Dunlap, V.M. Kenkre Nonlinear response theory: Transport coefficients for driving fields of arbitrary magnitude // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol.56, №5. – P.5295-5305
31. V.M. Kenkre, M. Kus, D.H. Dunlap, P.E. Pariss Nonlinear field dependence of the mobility of a charge subjected to a superposition of dichotomous stochastic potentials // *Phys. Rev. E.* – 1998. – Vol.58, №1. – P.99-106
32. S.I. Denisov, W. Horsthemke Mean first-passage time for an overdamped particle in a disordered force field // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol.62, №3. – P.3311-3321.
33. S. I. Denisov, M. Kostur, E. S. Denisova, and P. Hänggi Analytically solvable model of a driven system with quenched dichotomous disorder // *Phys. Rev. E.* – 2007. – Vol.75. – 061123.
34. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.
35. B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1954)
36. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. М., Высш. шк., 1990.
37. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol. 1.
38. Cao L. and Wu D.J. Cross-correlation of multiplicative and additive noises in a single-mode laser white-gain-noise model and correlated noises induced transitions // *Phys. Lett. A* – 1999 – Vol. 260 – P. 126-131.

39. Cao L. and Wu D.J. Mean first-passage time of laser phase in a single-mode laser // *Phys. Lett. A* – 2001 – Vol. 283 – P. 313-318.
40. Cao L. and Wu D.J. Fluctuation-induced transport in a spatially symmetric periodic potential // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 62 – P. 7478-7481.
41. Cao L. and Wu D.J. Noise-induced transport in a periodic system driven by Gaussian white noises with intensive cross-correlation // *Phys. Lett. A* – 2001 – Vol. 291 – P. 371-375.
42. Li J.H., Łuczka J., and Hänggi P. Transport of particles for a spatially periodic stochastic system with correlated noises // *Phys. Rev. E* – 2001 – Vol. 64 – 011113.
43. Fuliński A. and Góra P.F. Transport of a quantum particle in a dimer under the influence of two correlated dichotomic colored noises // *Phys. Rev. E* – 1993 – Vol. 48 – P. 3510-3517.
44. Li J.H., Hu B., Xing D.Y., and Dong J.M. Escape over a fluctuating barrier with additive and multiplicative noise // *Phys. Rev. E* – 1999 – Vol. 60 – P. 6443-6448.
45. Li J.H. and Hänggi P. Spatially periodic stochastic system with infinite globally coupled oscillators // *Phys. Rev. E* – 2001 – Vol. 64 – 011106.
46. Tessone C.J., Wio H.S., and Hänggi P. Stochastic resonance driven by time-modulated correlated white noise sources // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 62 – P. 4623-4632.
47. Jia Y., Yu S.N., and Li J.R. Stochastic resonance in a bistable system subject to multiplicative and additive noise // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 62 – P. 1869-1878.
48. Singh K.P., Ropars G., Brunel M., and Le Floch A. Lever-assisted two-noise stochastic resonance // *Phys. Rev. Lett.* – 2003 – Vol. 90 – 073901.
49. Olemskoi A.I., Kharchenko D.O., and Knyaz' I.A. Phase transitions induced by noise cross-correlations // *Phys. Rev. E* – 2005 – Vol. 71 – 041101.
50. Zaikin A.A. and Schimansky-Geier L. Spatial patterns induced by additive noise // *Phys. Rev. E* – 1998 – Vol. 58 – P. 4355-4360.

51. Landa P.S., Zaikin A.A., Ushakov V.G., and Kurths J. Influence of additive noise on transitions in nonlinear systems // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 61 – P. 4809-4820.
52. Zaikin A.A. and Kurths J. Additive noise in noise-induced nonequilibrium transitions // *Chaos* – 2001 – Vol. 11 – P. 570-580.
53. Jia Y. and Li J.R. Reentrance phenomena in a bistable kinetic model driven by correlated noise // *Phys. Rev. Lett.* – 1997 – Vol. 78 – P. 994-997.
54. Denisov S.I., Vitrenko A.N., Horsthemke W. Nonequilibrium transitions induced by the cross-correlation of white noises // *Phys. Rev. E.* – 2003. – Vol. 68. – P. 046132(5).
55. M. Bauer, J. Fassbender, B. Hillebrands. Switching behavior of a Stoner particle beyond the relaxation time limit // *Phys. Rev. B.* – 2000. – Vol.61. – P.3410 – 3416.
56. S. Kaka, S.E. Russek. Precessional switching of submicrometer spin valves // *J. Appl. Phys.* – 2002. – Vol.80, №12. – P.2958 –2960.
57. C. Serpico, I.D. Mayergoyz, G. Bertotti. Analytical solutions of Landau–Lifshitz equation for precessional switching // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol.93, №10. – P.6909-6911.
58. E.B. Myers, F.J. Albert, J.C. Sankey, E. Bonet, R.A. Buhrman, and D C. Ralph. Thermally Activated Magnetic Reversal Induced by a Spin-Polarized Current // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol.89, №19. – P.196801(4).
59. H.W. Schumacher, C. Chappert, R.C. Sousa, P.P. Freitas, and J. Miltat. Quasi-ballistic Magnetization Reversal // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol.90, №1. – P.017204(4).
60. S.I. Denisov, M. Kostur, E.S. Denisova, and P. Hanggi Arrival time distribution for a driven system containing quenched dichotomous disorder. // *Phys. Rev. E.* – 2007. – Vol.76. – 031101.
61. E.C. Stoner and E.P. Wolfarth // *Phil. Roy. Soc.* 240 599 (1948).
62. G. Bertotti, I. Mayergoyz, C. Serpico, M. Dimian. Comparison of analytical solutions of Landau–Lifshitz equation for “damping” and “precessional” switch-

- ings // J. Appl. Phys. – 2003. – Vol.93, №10. – P.6811-6813.
63. А.Ф. Хапиков. Динамика перемагничивания цилиндра в присутствии переменного магнитного поля // Письма в ЖЭТФ. – 1992. – Т.55, №6. – С. 349-352.
  64. C. Thirion, W. Wernsdorfer, D. Mailly. Switching of magnetization by nonlinear resonance studied in single nanoparticles // Nature Mat. – 2003. – Vol.2. – P.524-527.
  65. Л.Н.Котов, С.Н.Носов. Переориентация намагниченности в наночастицах и отклик на импульс поля // Журнал технической физики. – 2005. – Т.75, №10. – С. 55-60 (L.N. Kotov, S.N. Nosov. Magnetization switching in single domain particles and a response to a field pulse // Technical Physics. – Vol.50, №10. – P.1305–1310).
  66. Z.Z. Sun, X.R. Wang. Magnetization reversal through synchronization with a microwave // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol.74. – 132401.
  67. S.I. Denisov, T.V. Lyutyu, P. Hänggi, and K.N. Trohidou. Dynamical and thermal effects in nanoparticle systems driven by a rotating magnetic field // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol.74. – 104406.
  68. S.I. Denisov, K. Sakmann, P. Talkner, and P. Hanggi. Rapidly driven nanoparticles: Mean first-passage times and relaxation of the magnetic moment. // Phys. Rev. B. – 2007. – Vol.75 – 184432.
  69. S.I. Denisov, T.V. Lyutyu, and P. Hänggi. Magnetization of Nanoparticle Systems in a Rotating Magnetic Field // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol.97. – 227202.
  70. Д.И. Семенцов, А.М. Шутый. Нелинейная регулярная и стохастическая динамика намагниченности в тонкопленочных структурах. // УФН. – 2007. – Т.177, №8. – С. 831-857.
  71. G. Bertotti, C. Serpico, and I.D. Mayergoyz. Nonlinear Magnetization Dynamics under Circularly Polarized Field // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol.86, №4. – P.724-727.
  72. А.Н. Крылов, Ю.А. Крутков. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. Изд-во Академии Наук СССР. – Л. – 1932.