

УДК [531.19+536.75+537.624]
КП
N госрегистрации 0106U001928
Инв. N

Министерство образования и науки Украины
Сумский государственный университет
(СумГУ)

40007, г. Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2;
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
д.ф.-м.н.

_____ А.Н. Черноус

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
**РАЗВИТИЕ НОВЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ
ВОЗБУЖДЕННЫХ СИСТЕМ**
(заключительный)

Начальник НИЧ

к.т.н., доцент

В.А. Осипов

Руководитель НИР

д.ф.-м.н., профессор

С.И. Денисов

2008

Рукопись закончена 25 декабря 2008 г.

Результаты этой работы рассмотрены научно-техническим советом
СумГУ, протокол от 24.12.2008, № 5

СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР, главный научный сотрудник, д.ф.-м.н., профессор	2008.12.25	С.И. Денисов (реферат, введение, разделы 1- 5, заключение)
Заведующий лабораторией к.ф.-м.н.	2008.12.25	Т.В. Лютый (введение, раздел 1,2, заклю- чение)
Научный сотрудник	2008.12.25	Л.А. Денисова (разделы 1-3)
Старший научный сотрудник к.ф.-м.н.	2008.12.25	Е.С. Денисова (введение, раздел 4, заключе- ние)
Научный сотрудник к.ф.-м.н.	2008.12.25	А.Н. Витренко (раздел 3)
лаборант	2008.12.25	А.Ю.Поляков (пункт 1.3.3, раздел 2)

РЕФЕРАТ

Отчет о НИР. 168 с., 37 рис., 195 источников.

Объекты исследования – системы магнитных наночастиц в циркулярно-поляризованном магнитном поле и системы локализованных объектов (частиц, вихрей, доменных границ и т.п.), подверженных воздействию пространственных и временных шумов, в том числе экстремальных.

Цель исследования – разработка эффективных методов описания вышеуказанных систем, поиск и исследование в них новых эффектов, а также поиск потенциальных применений этих эффектов.

Методы исследования – методы математической и статистической физики, методы уравнений Ланжевена и Фоккера-Планка, метод функционального интегрирования, асимптотические методы, методы численного моделирования.

Предсказан и путем аналитического и численного решения уравнения Ландау-Лифшица всесторонне изучен эффект переключения намагниченности наночастиц под воздействием циркулярно-поляризованного магнитного поля. В рамках концепции первого достижения заданных границ случайным процессом построена теория термоиндуцированной намагниченности систем ферромагнитных наночастиц во вращающемся магнитном поле. Методом Ланжевена изучена диффузия частиц, взаимодействующих с флуктуирующей фрактальной средой, и предсказано изменение характера диффузии при изменении интенсивности шума, порождаемого этой средой. Разработан метод вычисления интегралов по траекториям для сред с дихотомическим замороженным беспорядком и в его рамках найдены точные функции распределения для частиц, движущихся в таких средах под действием постоянной силы. Выведено обобщенное уравнение Фоккера-Планка, описывающее единым образом все эффекты, включая полеты Леви, порождаемые произвольными белыми шумами.

Результаты НИР могут быть использованы при подготовке специалистов физико-математического профиля, а также при разработке устройств записи информации, элементной базой которых являются ферромагнитные наночастицы.

ФЕРРОМАГНИТНАЯ НАНОЧАСТИЦА, ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА, АНОМАЛЬНАЯ ДИФфуЗИЯ, ДИХОТОМИЧЕСКИЙ ЗАМОРОЖЕННЫЙ БЕСПОРЯДОК, ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА, ПОЛЕТЫ ЛЕВИ.

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТ.....	3
СОДЕРЖАНИЕ	4
ВВЕДЕНИЕ	8
1 Динамические и тепловые эффекты В ансамблях наночастиц, обусловленные циркулярно поляризованным магнитным полем	13
1.1 Описание модели.....	15
1.2 Динамические эффекты при однородной прецессии магнитного момента	17
1.2.1 Уравнения для вынужденной прецессии.....	17
1.2.2 Критерий стабильности	19
1.2.3 Малоугловая прецессия	21
1.2.4 Нулевое статическое магнитное поле.....	24
1.3 Однородная и неоднородная прецессия магнитного момента	27
1.3.1 Проблема перемагничивания наночастицы.....	27
1.3.2 Режимы прецессии магнитного момента под воздействием циркулярно-поляризованного магнитного поля	28
1.3.3 Фазовые диаграммы для различных значений параметров.....	35
1.4 Термические эффекты.....	38
1.4.1 Средние времена пребывания магнитного момента в равновесных состояниях.....	38
1.4.2 Индуцированная намагниченность.....	41
1.4.3 Закон релаксации	42
1.5 Выводы к разделу 1	43
2 Моделирование гистерезиса в двумерных спиновых системах.....	45
2.1 Однонаправленная анизотропия как способ повышения термостабильности магнитного момента.....	46

2.2	Сравнительный анализ основных моделей	47
2.3	Зависимости обменного поля смещения от параметров системы	54
2.3.1	Температурные зависимости	55
2.3.2	Зависимости от радиуса ядра	56
2.3.3	Зависимости от константы обменного взаимодействия в пограничном слое	59
2.4	Выводы к разделу 2	60
3	Статистические характеристики систем с мультипликативными шумами....	61
3.1	Аномальная диффузия частиц в случайной среде с фрактальными свойствами: учет автокорреляции	61
3.1.1	Понятие диффузии и развитие представлений о ней	61
3.1.2	Обоснование модели	64
3.1.3	Статистические характеристики	65
3.2	Неравновесный переход в нелинейном осцилляторе, индуцированный взаимной корреляцией шумовых источников	70
3.2.1	Общие положения	70
3.2.2	Обоснование модели	72
3.2.3	Равновесная плотность вероятности	74
3.2.4	Параметры порядка	76
3.2.5	Эффективный потенциал	79
3.3	Выводы к разделу 2	79
4	Возбужденные системы, содержащие замороженный дихотомический беспорядок	82
4.1	Общие положения	82
4.2	Аналитически разрешимые модели с дихотомическим беспорядком	83
4.2.1	Модель и основные соотношения	83
4.2.2	Зависящая от времени функция плотности вероятности	86
4.2.3	Моменты плотности вероятности	91
4.2.4	Временная эволюция вероятности $P_t(x)$	93
4.2.4.1	Асимптотическое поведение плотности вероятности $P_t(x)$	95

4.2.4.2	Численное моделирование	98
4.2.5	Выводы к подразделу 1.2.....	99
4.3	Время достижения заданного уровня.....	100
4.3.1	Представление распределения времен достижения частицей заданного уровня в виде интеграла по траекториям.....	100
4.3.2	Характеристики функции времени достижения заданного уровня	103
4.3.3	Моменты времени достижения заданного уровня	106
4.3.4	Свойства плотности вероятности времени достижения заданного уровня	108
4.3.4.1	Поведение на малых расстояниях.....	109
4.3.4.2	Поведение на больших расстояниях.....	110
4.3.4.3	Численное подтверждение	111
4.3.4.4	Коэффициенты эксцесса и асимметрии.....	114
4.3.5	Выводы к подразделу 1.3.....	116
5	Обобщенное уравнение Фоккера-Планка	117
5.1	Общие положения	117
5.2	Уравнение Ланжевена для случая случайного белого шума	118
5.3	Вывод обобщённого уравнения Фоккера-Планка	121
5.4	Частные случаи уравнения обобщённого уравнения Фоккера-Планка ...	125
5.4.1	Гауссовский белый шум	125
5.4.2	Пуассоновский белый шум	126
5.4.3	Сложный белый шум	127
5.4.4	Белые шумы Леви	128
5.4.5	Стационарные полеты Леви в замкнутой области.....	131
5.4.6	Белый шум определенный бесконечно делимым S_k	133
5.5	Точные решения обобщенного уравнения Фоккера-Планка	135
5.5.1	Линейный потенциал	135
5.5.2	Квадратичный потенциал	137
5.5.2.1	Пуассоновский белый шум	138
5.5.2.2	Белый шум Леви	139

5.5.2.3 Потенциал специального вида	140
5.6 Выводы к разделу 5	141
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	142
Приложение А	146
Приложение В	148
Приложение С	150
Приложение D	151
Перечень ссылок	153

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от статистически равновесных систем возбужденные системы в состояниях, далеких от равновесного, демонстрируют гораздо большее многообразие явлений и свойств [1]. Весь спектр последних тесно связан с микроскопическими механизмами взаимодействий элементов системы. Естественными следствиями этого являются сложность теоретического описания и, одновременно, большое значение (в прикладном и фундаментальном смысле) точных аналитических результатов. Поэтому основной целью данной НИР есть разработка теоретических методов описания ряда ключевых моделей физики, а также исследование основных свойств изучаемых систем при различных внешних воздействиях с учетом флуктуаций среды. Следует отметить, что именно случайные воздействия среды в ряде случаев приводят к качественным изменениям в поведении систем. Примерами таких изменений могут служить индуцированные внешним шумом фазовые переходы [2], стохастический резонанс [3], резонансная активация [4], направленный транспорт [5].

В качестве первой изучаемой системы рассматриваются ансамбли магнитных наночастиц, возбуждаемых циркулярно поляризованным магнитным полем, плоскость поляризации которого перпендикулярна осям легкого намагничивания частиц. Актуальность изучения таких систем обусловлена, в первую очередь, перспективами использования наночастиц в качестве магнитных носителей информации [5-10] Бит информации определяется тем, в каком из двух равновесных состояний, связанных с сильной одноосной анизотропией, находится магнитный момент наночастицы. Поэтому, наиболее важным с точки зрения процесса записи и хранения данных есть вопрос термостабильности магнитного момента и управляемого переключения его состояния. С увеличением плотности записи информации, размеры наночастиц необходимо уменьшать, и удовлетворить обоим требованиям становится все труднее. Кроме того, достаточно важной характеристикой работы магнитных накопителей есть их

быстродействие, которое, в конечном счете, ограничивается временем перемагничивания наночастиц в процессе записи. Поэтому поиск способов быстрого и мало энергоемкого изменения направления магнитного момента является важной прикладной задачей, которая вызывает интерес исследователей [11-15].

Одним из наиболее эффективных способов решения вопроса термоустойчивости информации при больших плотностях записи есть покрытие ферромагнитной частицы антиферромагнитной оболочкой [16, 17]. В результате взаимодействия пограничных спинов ферромагнитного ядра и антиферромагнитной оболочки, толщина которой составляет несколько атомных слоев, спиновые магнитные моменты ядра оказываются под влиянием эффективного магнитного поля (так называемого обменного поля смещения *exchange bias field*), имеющего обменную природу. Результатом действия этого поля является повышение магнитной энергии наночастицы при неизменной тепловой энергии, что эквивалентно повышению термостабильности.

В рамках исследований по данной НИР теоретически изучается влияние циркулярно-поляризованного магнитного поля на термическую и динамическую стабильность магнитного момента наночастицы, а, также, с помощью компьютерного моделирования изучаются эффекты, обусловленные взаимодействием ферромагнитного ядра и антиферромагнитной оболочки.

Вторая модель, которая всесторонне изучается в настоящей работе динамическая система с мультипликативными шумами. В качестве примера такой системы рассматривается частица, которая взаимодействует со случайной средой. Воздействие среды моделируется случайными потенциалами, белым и/или цветными шумами. Актуальность исследования статистических свойств таких систем определяется, в частности, тем, что при определенных условиях флуктуации внешней среды могут индуцировать новые явления, а проблема конструктивной роли шума занимает центральное место в современной физике [2, 18, 19]. Кроме того, поскольку поведение систем, взаимодействующих со случайной средой, может не отвечать интуитивным представлениям, важное значение приобретают точные результаты. Изучение таких систем стимулирует

ется также необходимостью точного описания процессов субдиффузии и супердиффузии. Данная часть НИР направлена на исследование особенностей аномальной диффузии частиц в среде, которая характеризуется фрактальными свойствами, а, также, на определение точных выражений для функций распределения, которыми однозначно характеризуются происходящие в системах случайные процессы. Вторым не менее важным примером динамической системы с мультипликативным шумом есть затухающий нелинейный осциллятор, который взаимодействует со случайной средой и испытывает внутренние флуктуации. Стохастические осцилляторы с двумя источниками шума, один из которых внешний, другой – внутренний, являются актуальными объектами исследования. Физическими реализациями такого осциллятора являются, например, наномеханические системы, в том числе нанобалки [20, 21] используемые в качестве детекторов малых масс. Именно действие флуктуаций приводит к значительному поперечному смещению центра масс нанобалки. Наличие флуктуаций параметров внешней среды, а, также, флуктуаций параметров самого осциллятора моделируется случайными потенциалами, белым и/или цветными шумами, которые в общем случае взаимнокоррелированы. Целью данного этапа НИР является определение влияния корреляции шумов на статистические характеристики осциллятора.

Следующей моделью, которая изучается в НИР является классическая частица, находящаяся в постоянном силовом поле и в кусочно-линейном одномерном случайном потенциале, представляющем специальный тип пространственной неоднородности, которая имеет случайный характер и называется замороженным дихотомическим беспорядком. В случае, когда диссипация энергии происходит достаточно быстро, удобно воспользоваться так называемым сверхзатухающим приближением, в рамках которого в уравнении движения пренебрегается наличием инерционного слагаемого. Одномерное уравнение движения для классических частиц в сверхзатухающем пределе является простой и, в то же время, очень эффективной моделью для изучения многих физических, биологических, экономических и других систем. В отсутствие шумов, зависящих

от времени и обусловленных взаимодействием с флуктуирующим окружением, данное уравнение учитывает исключительно эффекты замороженного беспорядка. В этом случае с его помощью описывается ряд физических явлений, таких как транспорт частиц в детерминистических рэтчетах с замороженным беспорядком [22 - 24], и динамика ряда локализованных структур, таких как доменные границы в случайных магнетиках и вихри в сверхпроводниках второго рода. Несмотря на отсутствие шума, для данного уравнения известны только несколько точных решений. Настоящая часть НИР посвящена поиску точного аналитического описания статистических характеристик частиц, находящихся в среде с замороженным дихотомическим беспорядком.

И, наконец, последней изучаемой системой в рамках данной НИР является широкий класс динамических систем, находящихся под воздействием сильно-флуктуирующей среды. Характер флуктуаций таков, что дисперсия наблюдаемой величины может принимать очень большие значения, что позволяет использовать модельное представление так называемых «процессов Леви». Под понятием «процесс Леви» следует понимать непрерывный во времени случайный процесс, независимые стационарные приращения которого распределены согласно медленно убывающему с ростом аргумента распределению, или так называемого распределения с «тяжелыми хвостами». Основным свойством этих распределений является то, что вкладом функции распределения при больших значениях аргумента нельзя пренебрегать. Иными словами, нельзя пренебрегать событиями редкими, но значимыми. Как следствие этому, классическая стохастическая теория, основанная на центральной предельной теореме, больше не применима.

Благодаря указанному характеру распределения приращения процесса Леви могут быть неограниченно большими. Если такой случайный процесс описывает положение частицы, ее координата может претерпевать скачкообразное изменение. Это обуславливает специфическое название для подобных процессов – «полеты Леви». Во многих разнообразных системах наблюдались экспериментально процессы, которые целесообразно описывать в рамках моде-

ли полетов Леви. Так, например, в работе [25], при получении флуоресцентных проб «живых полимеров» обнаружена аномальная самодиффузия по типу «случайных блужданий». Дисперсия такого процесса неограниченно растет. Степенная зависимость дисперсии от времени была обнаружена также при наблюдении за «помеченными» частицами в двумерном ламинарном вращающемся потоке жидкости [26], что также может быть интерпретировано как полеты Леви. Среди других примеров экспериментальных исследований, в интерпретации результатов которых используется концепция полетов Леви, следует указать исследования транспорта ионов в оптических решетках [27], и охлажденных атомов в лазерных полях [28], процессов просачивания воды сквозь почву [29, 30], и процессов миграций животных в поисках пищи [31 - 34]. Полеты Леви также предсказаны для большого числа моделируемых систем [35 - 37]. Широкая распространенность процессов Леви следует так же из центральной предельной теоремы [38], которая утверждает, что все ограниченные распределения надлежащим образом нормированных центральных сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин есть устойчивыми.

В данной НИР будет выведено обобщенное уравнение Фоккера-Планка, которое отвечает такому уравнению Ланжевена, и найдены его точные решения в отдельных случаях. Для случая шумов, чьи приращения распределены по законам с «тяжелыми хвостами», обобщенное уравнение Фоккера-Планка сведется к дробному уравнению Фоккера-Планка, параметры которого выражаются через асимптотические характеристики функции распределения. Так же будет получено точное стационарное решение дробного уравнения Фоккера-Планка, которое описывает полеты Леви частиц в бесконечно глубокой потенциальной яме.

1 ДИНАМИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В АНСАМБЛЯХ НАНОЧАСТИЦ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Одной из важных проблем, решаемых в данной работе, есть описание динамики магнитных моментов одноосных ферромагнитных наночастиц и устойчивости их прецессии относительно переориентаций. Очевидный общетеоретический интерес данной задачи проистекает из нелинейности и стохастичности прецессионной динамики магнитных моментов и процессов переориентации их направлений. Под переориентацией направления магнитного момента следует понимать переход между двумя равновесными состояниями, связанными с наличием большой одноосной анизотропии. Практическая же ценность неразрывно связана с тепловой стабильностью моментов магнитных компонентов современных ИТ-устройств, таких как магнитные накопители [5-10], модули энергонезависимой памяти (MRAM) [39-42]. Также подробная информация о динамике намагниченности наночастиц даст необходимый стимул в создании новых надежных и быстрых способов записи информации, основанных на управляемой стабильности прецессии магнитных моментов.

При низких температурах, когда тепловые колебания незначительны, главный интерес представляет стабильность магнитных моментов относительно воздействий внешних, зависящих от времени магнитных полей. В этом случае, проблема сводится к поиску решения детерминистического уравнения Ландау-Лифшица [43] и к анализу его устойчивости. Активные исследования этих вопросов, также мотивированы возможностью быстрого переворота магнитных моментов наночастиц [11-15]

Из-за тепловых колебаний, динамика магнитных моментов наночастиц становится стохастической, а процесс переориентации направления магнитного момента будет характеризоваться некоторыми, отличными от нуля вероятностями. В этом случае, динамика может быть описана уравнением Фоккера-

Планка, которое соответствует стохастическому уравнению Ландау-Лифшица [44]. В настоящее время данный подход используется для изучения магнитных свойств ансамблей наночастиц при конечных температурах, включая магнитную релаксацию [45-50].

Для описания ряда эффектов, вызванных вращающимся магнитным полем в данной работе используется как детерминистическое уравнение Ландау-Лифшица – в случае чисто детерминистических частиц, так и стохастическое уравнение – для случая слабо суперпарамагнитных наночастиц. Рассматриваемые эффекты возникают в результате различий между так называемым «верхним» и «нижним» (относительно выбранной оси) динамическим состояниями магнитных моментов. Данные устойчивые состояния обусловлены магнитным полем, вращающимся перпендикулярно к этой оси, и они отличны, даже в том случае, если постоянной магнитное поле вдоль нее по отсутствуют. Причиной этого является то, что магнитные моменты имеют однозначно определенное направление естественной прецессии – против часовой стрелки. Поэтому вращающееся поле в значительной степени влияет на динамику магнитных моментов, находящихся в «верхнем» или «нижнем» положении. Следует отметить, что в этом контексте некоторые следствия решений детерминистического уравнения Ландау-Лифшица, были предварительно рассмотрены при изучении ферромагнитного резонанса [51], нелинейных сил намагничивания [52], перемагничивания намагничивания цилиндров [53], и сферических наночастиц [54]. Однако в полной степени вышеупомянутые эффекты до настоящего времени не рассматривались.

1.1 Описание модели

Рассматривается одноосная ферромагнитная наночастица с пространственно-однородной намагниченностью, которая характеризуется полем анизотропии H_a и магнитным моментом $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$, модуль которого является константой неподвижной длины $|\mathbf{m}| = m$ [55]. Предположение об однородной намагниченности справедливо для однородных наночастиц, если обменная длина, то есть, расстояние, в пределах которого обменное взаимодействие является преобладающим (для типичных магнитных записывающих материалов порядок величины – 5-10 нм), превышает размер наночастицы. В других случаях, например, для наночастиц с покрытием, это можно рассматривать лишь как первое приближение. Полагается также, что постоянное магнитное поле \mathbf{H} приложено вдоль лёгкой оси намагничивания (оси z), и циркулярно поляризованное магнитное поле $\mathbf{h}(t)$ действует в плоскости xu (см. рисунок 1.1), то есть, $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ и

$$\mathbf{h}(t) = h \cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \rho h \sin(\omega t)\mathbf{e}_y. \quad (1.1)$$

где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z – единичные векторы вдоль соответствующих осей декартовой системы координат xuz ;

$$h = |\mathbf{h}(t)|;$$

ω – частота вращения $\mathbf{h}(t)$;

$\rho = -1$ или $+1$, которое соответствует вращению по часовой или против часовой стрелки $\mathbf{h}(t)$, соответственно;

Магнитная энергия для такой наночастицы определяется выражением:

$$W = -\frac{H_a}{2m} m_z^2 - Hm_z - \mathbf{m} \cdot \mathbf{h}(t), \quad (1.2)$$

где $m_z = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_z$ это z -ая компонента \mathbf{m} , а точка обозначает скалярное произведение.

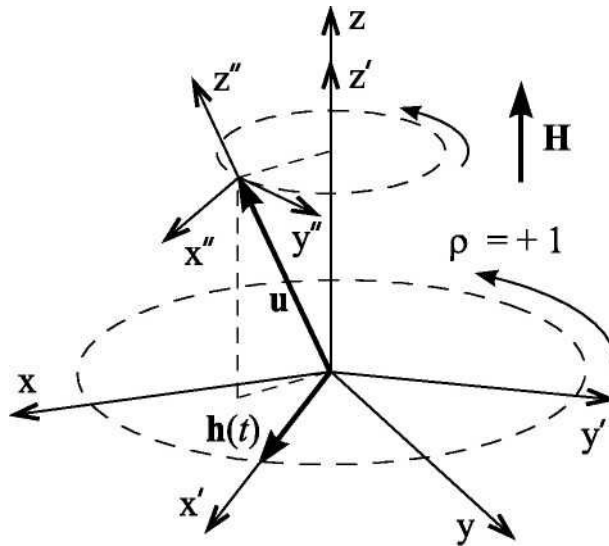


Рисунок 1.1 - Схематическое представление модели и используемых систем координат.

В детерминистическом случае, динамика магнитного момента наночастицы задается уравнением Ландау-Лифшица [43]:

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff} - \frac{\lambda \gamma}{m} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}). \quad (1.3)$$

где $\gamma (> 0)$ – гиромагнитное отношение;

$\lambda (> 0)$ – безразмерный параметр затухания;

$$\mathbf{H}_{eff} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} = \mathbf{h}(t) + (H_a \frac{m_z}{m} + H) \mathbf{e}_z \quad (1.4)$$

является эффективным магнитным полем, действующим на \mathbf{m} .

Если магнитный момент взаимодействует с количеством теплоты, мы используем стохастическое уравнение Ландау-Лифшица [44]:

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma \mathbf{m} \times (\mathbf{H}_{eff} + \mathbf{n}) - \frac{\lambda \gamma}{m} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – тепловое случайное магнитное поле с нулевым значением и корреляционной функцией $\langle n_\alpha(t_1) n_\beta(t_2) \rangle = 2\Delta \delta_{\alpha\beta} \delta(t_2 - t_1)$, $n_\alpha(t)$ ($\alpha = x,$

y, z) – Декартовы компоненты вектора $\mathbf{n}(t)$;

$\Delta = \lambda k_B T / \gamma m$ – интенсивность термического поля;

k_B – постоянная Больцмана;

T – термодинамическая температура;

$\delta(t)$ – дельта-функция Дирака;

$\delta_{\alpha\beta}$ – дельта-символ Кронекера.

Угловые скобки обозначают усреднение по всем реализациям $\mathbf{n}(t)$. Согласно (1.5), условная плотность вероятности $P = P(\theta, \varphi, t | \theta', \varphi', t')$ ($t \geq t'$), которая описывает статистические свойства \mathbf{m} относительно полярных θ и азимутальных φ углов и удовлетворяет прямому уравнению Фоккера-Планка [44, 56]:

$$\frac{\partial}{\partial t} P = -\frac{\partial}{\partial \theta} (f_1 + \gamma^2 \Delta \cot \theta) P + \gamma^2 \Delta \frac{\partial}{\partial \varphi} f_2 P + \frac{\gamma^2 \Delta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} P \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\gamma}{m \sin \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) W, \\ f_2 &= \frac{\gamma}{m \sin^2 \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) W. \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.2 Динамические эффекты при однородной прецессии магнитного момента

1.2.1 Уравнения для вынужденной прецессии

Для изучения вынужденной прецессии магнитного момента наночастицы и его стабильности относительно небольших возмущений, используется уравнение Ландау-Лифшица (1.3). Вектор $\mathbf{m}(t)$ представляется в виде

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}_0(t) + \mathbf{m}_1(t), \quad (1.8)$$

где $\mathbf{m}_0(t)$ описывает установившуюся прецессию $\mathbf{m}(t)$;

$\mathbf{m}_1(t)$ – некоторое незначительное отклонение от $\mathbf{m}_0(t)$.

Поскольку $|\mathbf{m}(t)| \approx |\mathbf{m}_0(t)| = m$, удобно ввести единичный вектор $\mathbf{u} = |\mathbf{m}_0(t)|/m$ и маленький безразмерный вектор $\mathbf{v} = |\mathbf{m}_1(t)|/m$ ($v = |\mathbf{v}| \ll 1$). Согласно этому, мы раскладываем эффективное магнитное поле (1.4) на вектор, не зависящий от \mathbf{v} :

$$\mathbf{H}_{eff}^{(0)} = \mathbf{h}(t) + (H_a u_z + H)\mathbf{e}_z \quad (1.9)$$

и на, зависящий от первой степени модуля \mathbf{v} :

$$\mathbf{H}_{eff}^{(1)} = H_a v_z \mathbf{e}_z. \quad (1.10)$$

Делая замену в уравнении (1.8) и подставляя эффективное поле в виде $\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}_{eff}^{(0)} + \mathbf{H}_{eff}^{(1)}$ в уравнение на уравнение Ландау-Лифшица (1.3) с учетом слагаемых нулевого порядка относительно вектора \mathbf{v} , получаем следующее уравнение для вектора \mathbf{u} :

$$\dot{\mathbf{u}} = -\gamma \mathbf{u} \times \mathbf{H}_{eff}^{(0)} - \lambda \gamma \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_{eff}^{(0)}). \quad (1.11)$$

Для удобства дальнейшего описания вводится так называемая вращающаяся система координат $x'y'z'$ (см. рисунок 1.1 и Приложение А). Данная система привязана к внешнему полю $\mathbf{h}(t)$ и вращается В предположении, что в этой системе координат компоненты $u_{x'}$, $u_{y'}$, и $u_{z'} = u_z$ вектора \mathbf{u} не зависят от времени, уравнение (1.11) можно привести к системе алгебраических уравнений. Действительно используя соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_{x'} \mathbf{e}_{x'} + u_{y'} \mathbf{e}_{y'} + u_z \mathbf{e}_z, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \rho \omega (-u_{y'} \mathbf{e}_{x'} + u_{x'} \mathbf{e}_{y'}), \\ \mathbf{H}_{eff}^{(0)} &= h \mathbf{e}_{x'} + (H_a u_z + H) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (1.12)$$

которые следуют уравнений (A1)-(A3) и взяв компоненты вектора \mathbf{u} (1.11) записанные в новой системе координат уравнения, легко получить:

$$\begin{aligned}\lambda u_{x'}(u_z^2 + \tilde{H}u_z + \tilde{h}u_{x'}) + u_{y'}(u_z + \tilde{H} - \rho\tilde{\omega}) &= \lambda\tilde{h}, \\ u_{x'}(u_z + \tilde{H} - \rho\tilde{\omega}) - \lambda u_{y'}(u_z^2 + \tilde{H}u_z + \tilde{h}u_{x'}) &= \tilde{h}u_z, \\ \lambda u_z(u_z^2 + \tilde{H}u_z + \tilde{h}u_{x'}) - \lambda(u_z + \tilde{H}) &= \tilde{h}u_{y'},\end{aligned}\tag{1.13}$$

где $\tilde{H} = H/H_a$, $\tilde{h} = h/H_a$, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_r$, и $\omega_r = \gamma H_a$. Простой анализ этой системы показывает, что $u_{x'}$, $u_{y'}$ могут быть выражены через u_z :

$$u_{x'} = \frac{1-u_z^2}{\tilde{h}u_z}(u_z + \tilde{H} - \rho\kappa), u_{y'} = -\rho\frac{\lambda\kappa}{\tilde{h}}(1-u_z^2)\tag{1.14}$$

где $\kappa = \tilde{\omega}/(1 + \lambda^2)$, а u_z удовлетворяет уравнению:

$$\tilde{h}^2 = \frac{1-u_z^2}{u_z^2}[(u_z + \tilde{H} - \rho\kappa)^2 + (\lambda\kappa u_z)^2]\tag{1.15}$$

Легко заметить, что уравнения (1.14) и (1.15) удовлетворяют условию $\mathbf{u}^2 = 1$. Также стоит заметить, что компоненты вектора \mathbf{u} в начальной системы координат, u_x и u_y , выражаются через компоненты вращающейся (штрихованной) системе координат как

$$\begin{aligned}u_x &= u_{x'} \cos(\omega t) - \rho u_{y'} \sin(\omega t), \\ u_y &= \rho u_{x'} \sin(\omega t) + u_{y'} \cos(\omega t).\end{aligned}\tag{1.16}$$

1.2.2 Критерий стабильности

В предположении, что решение уравнения (1.15) известно, в данном пункте вычисляется критерий стабильности для установившейся прецессии вектора магнитного момента \mathbf{m} . Для этого, используя уравнение (1.3), (1.11) и (1.8), записывается линейное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} = & -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{eff}^{(0)} - \gamma \mathbf{u} \times \mathbf{H}_{eff}^{(1)} - \\ & - \lambda \gamma [\mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}_{eff}^{(0)}) + \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_{eff}^{(0)}) + \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_{eff}^{(1)})], \end{aligned} \quad (1.17)$$

описывающее эволюцию малых отклонений магнитного момента \mathbf{m} от равновесия, которые характеризуются вектором \mathbf{v} . Поскольку для уравнения (1.3), значение $|\mathbf{m}|$ считается постоянным, для векторов \mathbf{v} и \mathbf{u} всегда выполняется условие $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + v^2 = 0$. Это означает что, с линейной точностью по v , вектор \mathbf{v} перпендикулярен к \mathbf{u} в каждый момент времени t . Поэтому, удобно ввести другую вращающуюся декартовую систему координат $x''y''z''$ (см. рисунок 1.1 и Приложение А), в котором векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} представлены как

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_{z''}, \mathbf{v} = v_{x''}(t)\mathbf{e}_{x''} + v_{y''}(t)\mathbf{e}_{y''}. \quad (1.18)$$

Здесь условие $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ выполняется автоматически.

В этой координатной системе, z'' – компонента является решением уравнения (1.17), в силу условия $d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/dt = 0$, а также условия

$$[\dot{\mathbf{v}} + \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{eff}^{(0)} + \lambda \gamma \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_{eff}^{(0)})] \cdot \mathbf{e}_{z''} = 0, \quad (1.19)$$

непосредственно вытекающего из (1.11). Проецируя уравнение (1.17) на оси x'' , y'' , с учетом уравнений (А4)-(А6), а также результатов предыдущего пункта, посредством прямых вычислений получаем

$$\dot{v}_{x''} = -\lambda \omega_1 v_{x''} - \omega_2 v_{y''}, \dot{v}_{y''} = \omega_3 v_{x''} - \lambda \omega_4 v_{y''}, \quad (1.20)$$

где $\omega_n = \omega_r \tilde{\omega}_n$ и

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 = u_z^2 + \frac{1}{u_z} [\tilde{H} - \rho \kappa (1 - u_z^2)], \quad \tilde{\omega}_2 = 1 + \frac{1}{u_z} [\tilde{H} - \rho \kappa (1 + \lambda^2 u_z^2)], \\ \omega_3 = u_z^2 + \frac{1}{u_z} [\tilde{H} - \rho \kappa (1 + \lambda^2 u_z^2)], \quad \tilde{\omega}_4 = 1 + \frac{1}{u_z} [\tilde{H} - \rho \kappa (1 - u_z^2)]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Таким образом, в первом приближении, устойчивость установившейся прецессии магнитного момента наночастицы, определяется устойчивостью ста-

ционарных решений $v_{x''} = v_{y''} = 0$, или неподвижной точки $(0,0)$, системы (1.20). Методика нахождения критерия устойчивости решения последней системы хорошо известна [57] и основана на анализе корней

$$\delta_{\pm} = -\frac{\lambda}{2}(\omega_1 + \omega_4) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2(\omega_4 - \omega_1)^2 - 4\omega_2\omega_3} \quad (1.22)$$

характеристического уравнения $(\delta + \lambda\omega_1)(\delta + \lambda\omega_4) + \omega_2\omega_3 = 0$, соответствующего этой систем. В частности критерий асимптотической устойчивости вынужденной прецессии имеет $\text{Re}(\delta_+) < 0$ или

$$\lambda(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_4) > \text{Re}\sqrt{\lambda^2(\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_1)^2 - 4\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3}. \quad (1.23)$$

Далее полученные общие результаты применяться к описанию малоугловой прецессии, в том числе в случае нулевого внешнего постоянного поля **H**.

1.2.3 Малоугловая прецессия

Предполагается, что прецессионные углы θ_{σ} (см. рисунок 1.2) магнитных моментов при $u_z > 0$ ($\sigma = +1$) и при $u_z < 0$ ($\sigma = -1$) являются малыми, т. е. $\theta_{\sigma} \ll 0$. В соответствии с этим, u_z может быть представлено в виде $u_z = \sigma(1 - \varepsilon^2/2)$, где согласно уравнения (1.15) малый параметр ε^2 равен

$$\varepsilon^2 = \frac{\tilde{h}^2}{(\sigma + \tilde{H} - \rho\kappa)^2 + \lambda^2\kappa^2}. \quad (1.24)$$

Тогда с учетом (1.14) с линейной точностью по ε можно записать

$$\begin{aligned} u_{x'} &= \tilde{h} \frac{1 + \sigma\tilde{H} - \sigma\rho\kappa}{(\sigma + \tilde{H} - \rho\kappa)^2 + \lambda^2\kappa^2}, \\ u_{y'} &= -\tilde{h} \frac{\rho\lambda\kappa}{(\sigma + \tilde{H} - \rho\kappa)^2 + \lambda^2\kappa^2}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

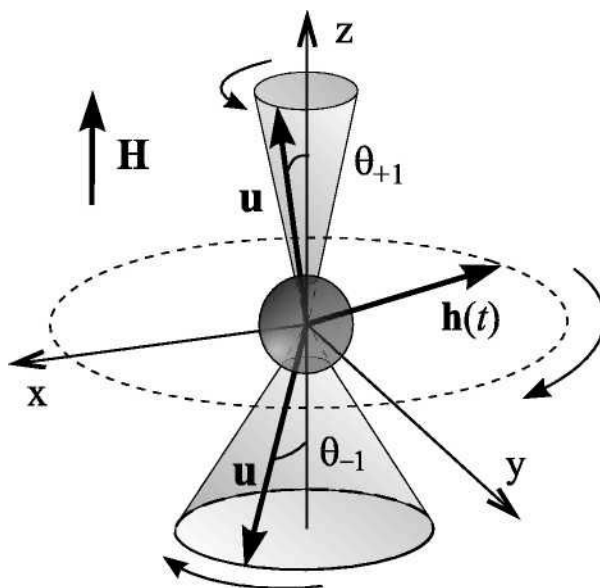


Рисунок 1.2 – Схематическое изображение углов прецессии для «верхних» и «нижних» положений магнитных моментов (стрелками показано направление изображают направления их естественной прецессии).

Следует отметить, что даже при отсутствии статического магнитного поля, т.к. $\tilde{H} = 0$, динамика магнитных моментов в «нижнем» ($\sigma = -1$) и «верхнем» ($\sigma = +1$) положении будет существенно отличаться. Причиной является то, что естественная прецессия направлена против часов стрелки, и, поэтому, только для одного из положений магнитного момента направление вращения поля совпадает с направлением естественной прецессии. Другими словами, магнитное поле, вращающееся в плоскости, перпендикулярной к лёгкой оси намагничивания, снимает вырождение между «верхним» и «нижним» положениями магнитного момента.

Анализ показывает, что малоугловая прецессия является устойчивой только при выполнении условия $\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_4 > 0$. Записав сумму $\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_4$ с квадратичной точностью по ε ,

$$\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_4 = 2 + 2\sigma\tilde{H} - \varepsilon^2(1 - \sigma\tilde{H} + 2\sigma\rho\kappa), \quad (1.26)$$

и решая уравнение $\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_4 = 0$ относительно \tilde{H} , можно найти критическое магнитное поле

$$\tilde{H}_{cr} = -\sigma + \tilde{h}^2 \frac{\sigma + \rho\kappa}{(1 + \lambda^2)\kappa^2}, \quad (1.27)$$

которое разделяет устойчивую и неустойчивую прецессию для данного значения σ . Устоявшаяся прецессия будет устойчивой для любых $\tilde{H} > \tilde{H}_{cr} |_{\sigma=+1}$ или для $\tilde{H} < \tilde{H}_{cr} |_{\sigma=-1}$. В силу того, что при $\tilde{H} = \tilde{H}_{cr}$ прецессия для положения $-\sigma$ устойчива, будут происходить переходы магнитного момента из неустойчивого положения σ в стабильное $-\sigma$. Если $\rho = \sigma$, то вращающееся поле всегда уменьшает стабильность прецессии, поскольку $\tilde{H}_{cr} |_{\sigma=+1} > -1$ и $\tilde{H}_{cr} |_{\sigma=-1} < +1$. Напротив, если $\rho = -\sigma$, тогда в зависимости от уменьшенной частоты κ вращающегося поля может как уменьшать (если $\kappa < 1$), так и увеличивать (если $\kappa > 1$) стабильность. Максимально стабильной будет прецессия при $\kappa = 2$. Также отметим, что поскольку $\varepsilon \ll 1$ и обычно $\lambda < 1$, формула (1.27) будет справедлива только при условии когда $\kappa \gg \tilde{h}$.

Для важного наглядного примера, рассмотрим систему из N наночастиц, магнитные моменты у $N/2$ из которых направлены вдоль оси z , и соответственно, у других $N/2$ частиц он имеет обратное направление. Тогда динамическая безразмерная намагниченность системы $\mu_d = (1/N) \sum_{i=1}^N u_{zi}$ (i индекс наночастицы) принимает форму $\mu_d = (1/2) \sum_{\sigma} \sigma \cos \theta_{\sigma}$ или при $\theta_{\sigma} \ll 1$ — $\mu_d = (\theta_{-1}^2 - \theta_{+1}^2)/4$. Учитывая то, что $\tilde{H} = 0$ и используя формулу

$$\theta_{\sigma} = \frac{\tilde{h}}{\sqrt{(1 - \sigma\rho\kappa)^2 + \lambda^2\kappa^2}} \quad (1.28)$$

которая следует из соотношений $\sin\theta_\sigma = \varepsilon$ и уравнения (1.24), величину динамической намагниченности можно записать так

$$\mu_d = -\tilde{h}^2 \frac{\rho\kappa}{[1 + (1 + \lambda^2)\kappa^2]^2 - 4\kappa^2}. \quad (1.29)$$

Этот результат показывает, что (i) наличие намагниченности μ_d является чисто динамическим эффектом, т.к. $\mu_d = 0$, если $\kappa = \tilde{\omega}/(1 + \lambda^2) = 0$, (ii) направление намагниченности и направление вращения магнитного поля определяются правилом левой руки, и (iii) зависимость μ_d от κ всегда показывает резонирующий характер. Максимум для μ_d зависит от $\kappa = \kappa_m$, где

$$\kappa_m = \frac{1}{\sqrt{3}(1 + \lambda^2)} \sqrt{1 - \lambda^2 + 2\sqrt{1 + \lambda^2 + \lambda^4}}, \quad (1.30)$$

и $\mu_d|_{\kappa=\kappa_m} = -\rho(\tilde{h}/2\lambda)^2$ для $\lambda \ll 1$. Если $\tilde{h} \ll \lambda$, то динамическое намагничивание мало, но как мы покажем далее, оно может быть изменено под влиянием термических флуктуаций.

1.2.4 Нулевое статическое магнитное поле

В случае нулевого магнитного поля $H = 0$ выражение (1.15) можно переписать в форме $h = F_p(u_z)$, где

$$F_p(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} \sqrt{(x - \rho\kappa)^2 + (\lambda\kappa x)^2} \quad (1.31)$$

($-1 \leq x \leq 1$). Согласно определению, функция $F_p(x)$ удовлетворяет условиям: $F_p(-x) = F_{-p}(x)$, $F_p(-1) = F_p(+1) = 0$, $F_p(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, и она имеет локальный минимум при $x = \rho x_1$ ($x_1 > 0$) и локальный максимум при $x = \rho x_2$ ($x_2 > 0$) (см. рисунок 1.3).

Детальный анализ показывает, что для фиксированного значения ρ пре-

цессия магнитного момента наночастицы при условии $\sigma = -\rho$ устойчива для всех значений h . Другими словами, единственное решение уравнения $\tilde{h} = F_p(u_z)$ при $\text{sgn}(u_z) = -\rho$ всегда существует и оно устойчиво. В этом случае, зависимость между u_z и \tilde{h} показана на рисунке (1.4) (кривая 1).

Прецессия магнитного момента для условия $\sigma = \rho$ (когда $\text{sgn}(u_z) = \rho$) показывает качественно другое поведение зависимости от \tilde{h} . Оно устойчиво только если $|u_z| > x_2$, что подразумевает что $\tilde{h} < \tilde{h}_{cr} = F_p(\rho x_2)$ (см. рисунок (1.4), кривая 2). При $\tilde{h} = \tilde{h}_{cr} + 0$ решение $u_z|_{\sigma=\rho} = \rho x_2$ и $u_z|_{\sigma=\rho} = \rho x_3$ ($x_3 > 0$) есть неустойчивым и магнитный момент переориентируется от состояния $u_z|_{\sigma=\rho} = \rho x_2$ в состояние $u_z|_{\sigma=-\rho} = -\rho x_4$ ($x_4 > 0$) Как отмечено выше, новое состояние стабильно для всех \tilde{h} , так что обратный переход не происходит при фиксированном ρ .

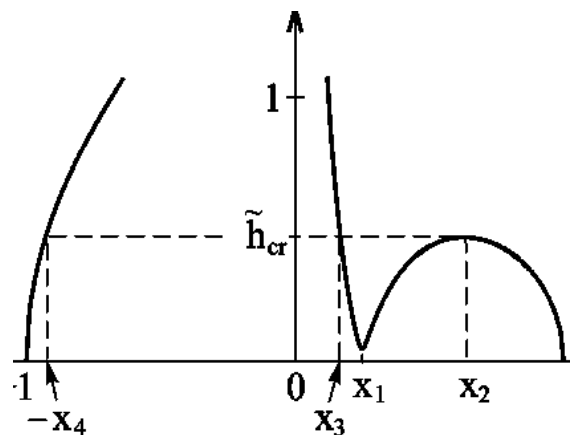


Рисунок 1.3 – График функции $F_{+1}(x)$ для $\kappa = 0.25$ и $\lambda = 0.2$. Если $\kappa \rightarrow 0$, то $x_n \rightarrow 0$,

$$F_{+1}(x) \rightarrow 0, \text{ и } \tilde{h}_{cr} = F_{+1}(x_2) \rightarrow 1.$$

Для важного случая, малой частоты внешнего поля ($\kappa \ll 1$), который легко реализуется на эксперименте, анализ стабильности вынужденной прецессии можно выполнить аналитически. В частности, было установлено, что

$$u_z = \sigma \sqrt{1 - \tilde{h}^2} - \rho \frac{\tilde{h}^2}{1 - \tilde{h}^2} \kappa \quad (1.32)$$

если $1 - \tilde{h}^2 \gg \kappa^{2/3}$; и $u_z|_{\sigma=-\rho} = -\rho \kappa / \tilde{h}$ если $\tilde{h} \gg 1$. Используя приближенные выражения

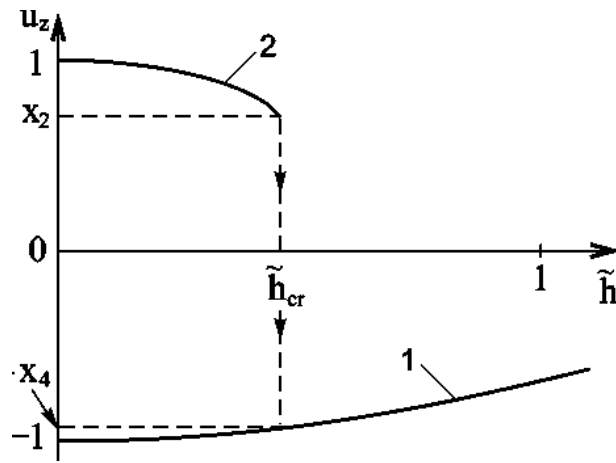


Рисунок 1.4 – График не меняющихся решений уравнения $\tilde{h} = F_p(u_z)$ для тех же параметров, что и на рисунке (1.3). Для $\rho = -1$ кривые 1 и 2 должны быть зеркально отражены относительно оси \tilde{h} .

$$\omega_1 = \omega_3 = u_z^2 - \rho \frac{\kappa}{u_z}, \quad \omega_2 = \omega_4 = 1 - \rho \frac{\kappa}{u_z} \quad (1.33)$$

было показано, что критерий устойчивости (1.22) для $\sigma = \rho$ теперь запишется как $|u_z| > x_2$, а критическое значение амплитуды вращающегося поля – $\tilde{h}_{cr} = 1 - (2/3)\kappa^{2/3}$. Окончательно, решая уравнения $dF_p/dx = 0$ и $\tilde{h}_{cr} = F_p(x)$ относительно x мы получим асимптотики $x_1 = \kappa$, $x_2 = \kappa^{1/3}$, $x_3 = \kappa/2$ и $x_4 = 2\kappa^{1/3}$. Следует отметить наличие скачка $\Delta u_z = x_2 + x_4$, который имеет место при переходе магнитного момента из одного состояния в другое, а его величина стремится к 0 при $\kappa \rightarrow 0$. Величина этого скачка является достаточно большой даже при достаточно малых частотах (например $u_z = 0,3$ при $\kappa = 10^{-3}$).

Мы подчёркиваем, что этот интересный феномен скачкообразного перехода магнитных моментов из одного состояния в другое под действием вращающегося поля, является результатом естественной прецессии магнитных моментов. Это имеет место лишь для наночастиц, относительно которых выполняется условие $\sigma\rho = +1$, т.е. если направление вращения внешнего поля совпадает с направлением естественной прецессии магнитных моментов.

1.3 Однородная и неоднородная прецессия магнитного момента

1.3.1 Проблема перемагничивания наночастицы

Точное описание перемагничивания малой ферромагнитной частицы с одноосной анизотропией постоянным внешним полем \mathbf{H} , параллельным легкой оси, дано в работе [58]. В частности, было показано, что при некотором критическом значении поля \mathbf{H}_{cr} происходит переход магнитного момента из одного равновесного состояния в другое. В дальнейшем было показано, что подобные переходы происходят и при других внешних воздействиях. Так, из работ [13, 59] следует, что наночастица может перемагничиваться импульсным полем \mathbf{H}_\perp , перпендикулярным легкой оси. В [53] численно продемонстрирована возможность перехода между двумя равновесными направлениями магнитного момента под действием как постоянного поля \mathbf{H} , приложенного вдоль оси легкого намагничивания наночастицы, так и поля $\mathbf{h}(t)$, циркулярно-поляризованного в плоскости, перпендикулярной к легкой оси. При этом величина критического поля \mathbf{H}_{cr} оказалась существенно меньше, чем в [58]. На уменьшение величины \mathbf{H}_{cr} указывают также результаты эксперимента по перемагничиванию наночастицы в присутствии радиочастотного импульса вращающегося поля $\mathbf{h}(t)$ [60].

Идеи о перемагничивании наночастицы вращающимся полем $\mathbf{h}(t)$ были предложены и численно исследованы в работах [61, 62, 55]. Последовательное аналитическое описание процесса перемагничивания наночастицы циркулярно-поляризованным полем было дано в работах [55, 63]. Исходя из критерия устойчивости прецессии магнитного момента под действием внешнего поля $\mathbf{h}(t)$, было показано, что инверсии направлений намагниченности могут обуславливаться исключительно циркулярно-поляризованным полем $\mathbf{h}(t)$. Кроме того, учет взаимодействия с термостатом [64] показывает, что случайное тепловое поле способно инициировать переключение намагниченности наночастицы в присутствии вращающегося поля. При этом амплитуды поля $\mathbf{h}(t)$ являются су-

щественно меньшими критических значений, на которых происходит потеря устойчивости прецессии магнитного момента.

Однако не всегда потеря устойчивости прецессии магнитного момента приводит к инвертированию направления магнитного момента. Как было показано в [65], намагниченность ферромагнитных пленок в присутствии вращающегося поля $\mathbf{h}(t)$ может демонстрировать широкое многообразие форм своего движения. Вывод о том, что под действием поля $\mathbf{h}(t)$ магнитный момент наночастицы может участвовать в более сложных, чем обычная прецессия, формах движения, следует также из работы [66]. В частности, отклонения \mathbf{m} от прецессионного движения могут быть подобными нутациям оси гироскопа [67] и заключаются в наложении на регулярное вращение магнитного момента колебаний величины угла между легкой осью и направлением вектора \mathbf{m} . Таким образом, потеря устойчивости может означать смену режимов движения, а важный с практической точки зрения вопрос о том, когда именно происходит перемагничивание наночастицы циркулярно-поляризованным полем, остается открытым. Решение этой проблемы и определяет цель настоящей работы.

1.3.2 Режимы прецессии магнитного момента под воздействием циркулярно-поляризованного магнитного поля

Оставаясь в рамках модели введенной выше, перепишем уравнение Ландау-Лифшица (1.3) в виде системы уравнений относительно азимутального и полярного углов магнитного момента наночастицы

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \gamma h \sin(\varphi - \rho\omega t) - \gamma\lambda \cos\theta (H_a \sin\theta - h \cos(\varphi - \rho\omega t)), \\ \dot{\varphi} = \gamma (H_a \cos\theta - \operatorname{ctg}\theta \cos(\varphi - \rho\omega t)) - \frac{\gamma\lambda}{\sin\theta} h \sin(\varphi - \rho\omega t). \end{cases} \quad (1.34)$$

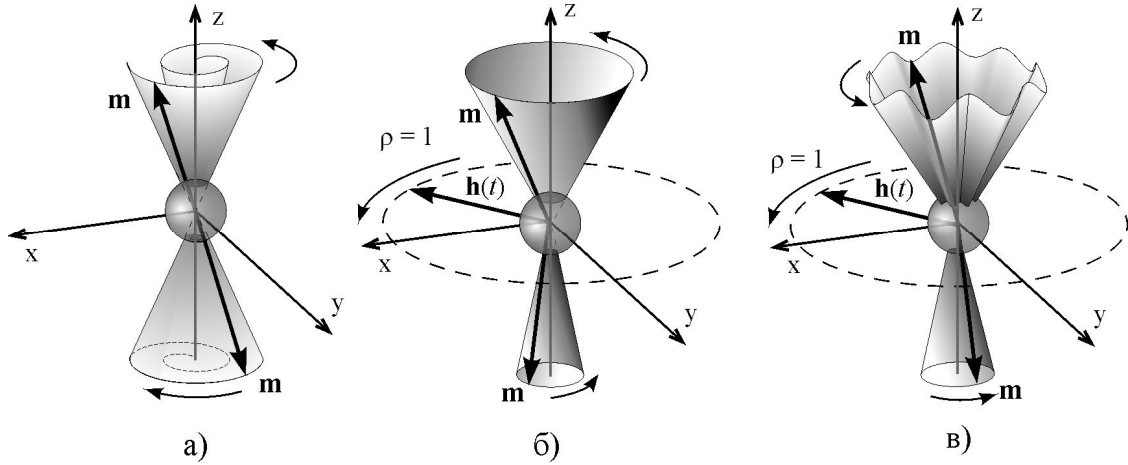


Рисунок 1.5 – Схематическое изображение прецессии магнитного момента. а) Затухающая прецессия без внешнего поля. б) Прецессия с постоянным углом в циркулярно-поляризованном поле. в) Колебания угла прецессии.

Данная система имеет два типа решений и, соответственно, описывает два режима движения магнитного момента. Первый представляет собой прецессию вектора \mathbf{m} с некоторым постоянным углом (см. рисунок 1.5б). В соответствии с терминологией, введенной в [66], будем говорить, что в таком случае имеет место **P**-режим. Для **P**-режима система (1.34) преобразуется в алгебраическое уравнение (1.15), которое для наглядности перепишем в виде

$$\tilde{h}^2 = \frac{1 - \cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1} \left[\left(\cos \theta_1 - \frac{\rho \tilde{\omega}}{1 + \lambda^2} \right)^2 + \left(\frac{\lambda \tilde{\omega} \cos \theta_1}{1 + \lambda^2} \right)^2 \right], \quad (1.35)$$

где θ_1 – угол установившейся прецессии магнитного момента. Решив уравнение (1.35), можно найти величину угла θ_1 . В общем случае (1.35) имеет 4 действительных корня, из которых устойчивыми могут быть 1, 2 или 3. Условие устойчивости задается выражением (1.23)

Второй режим движения вектора \mathbf{m} , так называемый **Q**-режим, характеризуется периодическим отклонением угла прецессии магнитного момента от легкой оси (см. рисунок 1.5в) и до настоящего времени не имеет аналитическо-

го описания. Поскольку аналитическое решение системы (1.34) в общем случае затруднено, целесообразно на первом этапе исследовать его численными методами. На рисунке 1.6 показаны варианты численного решения системы (1.34) с нулевыми начальными условиями для таких значений параметров: $\lambda = 0.2$, $\tilde{\omega} = 0.9$, $\rho = 1$. Очевидно, что первый график соответствует **P**-режиму, второй **Q**-режиму, а из третьего следует, что для данной амплитуды циркулярно-поляризованного поля равновесные состояния в области $z > 0$ отсутствуют. Таким образом, поле $\mathbf{h}(t)$ может радикально влиять на намагниченность наночастицы вдоль оси z , несмотря на то, что само не имеет отличной от нуля проекции на данную ось.

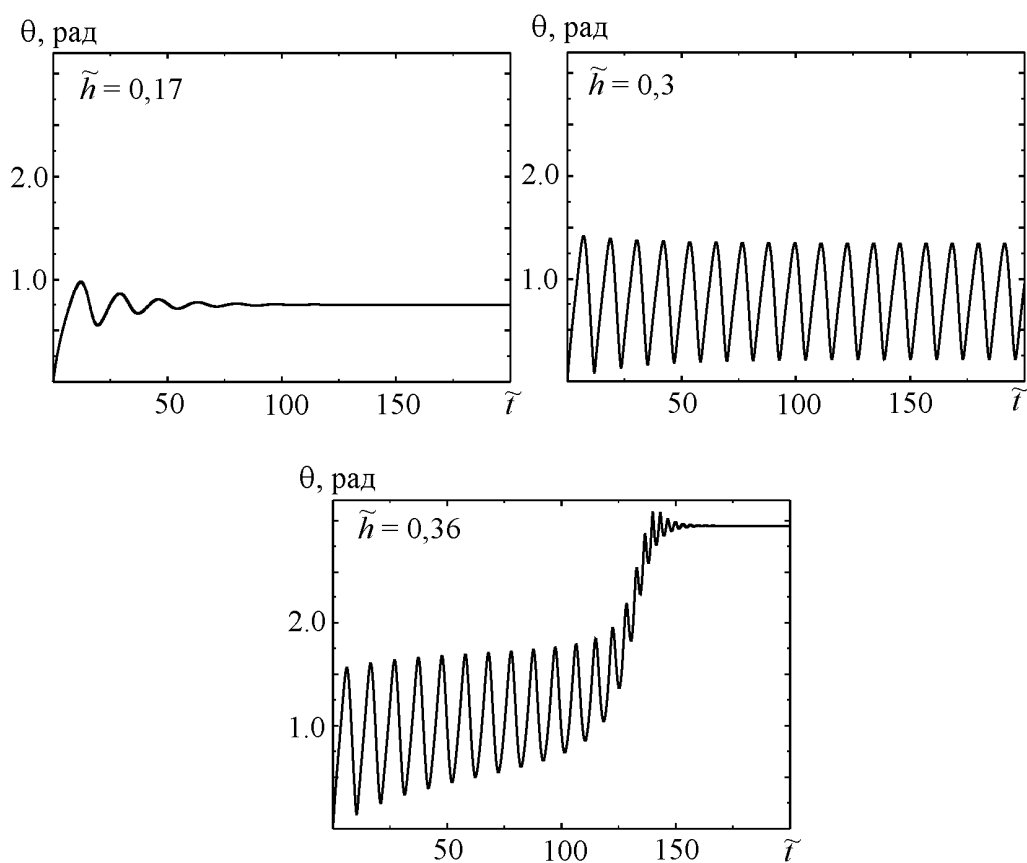


Рисунок 1.6 – Решение системы уравнений (1.34) для различных амплитуд циркулярно-поляризованного поля.

В частности, его действие может вызывать перемагничивание наночастицы. Для количественного описания данного явления система (1.34) решалась при квазистатическом изменении амплитуды поля h . Как видно из рисунка 1.6, для определенных частот магнитный момент наночастицы может скачкообразно менять свое направление, в то время как для других частот непосредственно инвертирование магнитного момента происходит через изменение характера его движения. Потеря устойчивости, или несоблюдение условия (1.23), здесь означает появление нутационных движений вектора \mathbf{m} , которые, в свою очередь,

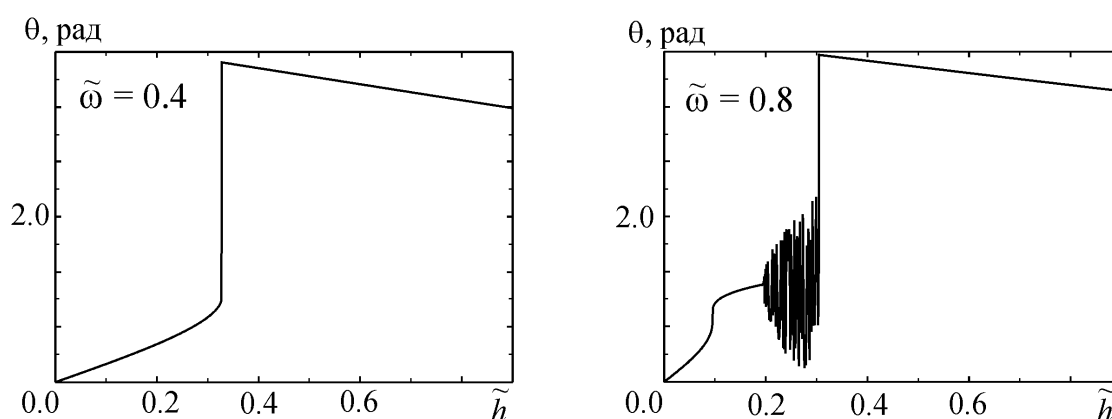


Рисунок 1.7 – Решение системы уравнений (1.34) при квазистатическом изменении амплитуды \tilde{h} циркулярно-поляризованного поля.

также становятся неустойчивыми с ростом амплитуды h , и магнитный момент возвращается к обычной прецессии, но уже в области отрицательных значений координаты z . Заметим, что такой переход носит необратимый характер, и любое дальнейшее изменение амплитуды h вращающегося поля будет иметь следствием лишь коррекцию угла прецессии.

Поскольку **P**-прецессия вектора \mathbf{m} описывается уравнением (1.35), целесообразно сравнить результаты, полученные с его помощью, с результатами численного решения (1.34). В частности, это позволит дать однозначный ответ на вопрос о том, при каких параметрах внешнего поля происходит перемагничивание наночастицы. На рисунке 1.8 изображены наиболее типичные ситуации,

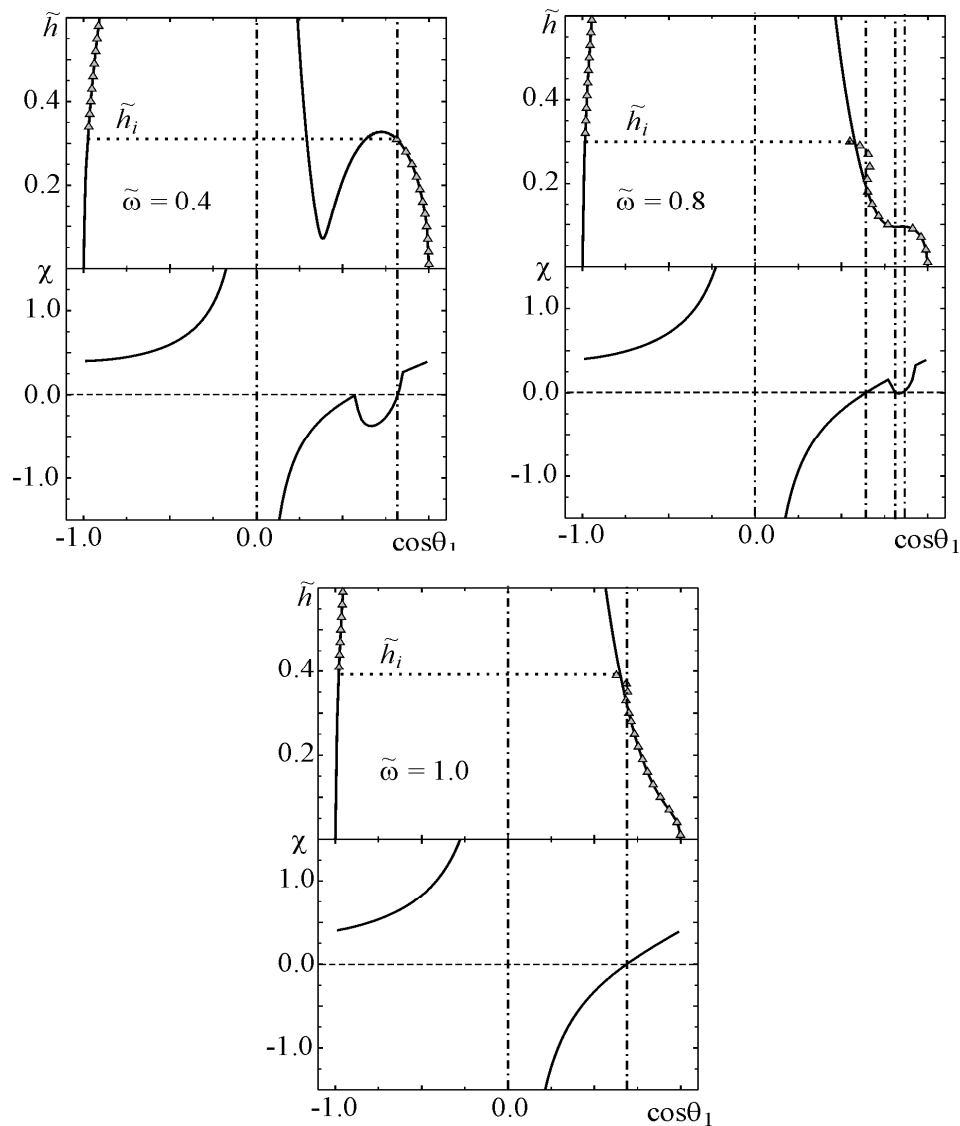


Рисунок 1.8 – Сравнение теоретических и численных результатов для различных значений частоты циркулярно-поляризованного поля. Нижние графики – поведение критерия устойчивости.

показывающие искомые различия, для следующих значений параметров: $\lambda = 0.2$, $\rho = 1$. Для повышения информативности в качестве численного значения установленной величины $\cos\theta_1$ на графике изображена ее постоянная составляющая. Нижний график каждой пары определяет области устойчивых решений (1.35) согласно критерия стабильности (1.23). Первая пара графиков характерна для небольших частот. Совпадение теоретического и численного значений величины $\cos\theta_1$ в области положительных χ свидетельствует о наличии **P**-режима движения

магнитного момента. Потеря устойчивости решения (1.35) приводит к перемагничиванию наночастицы. Вторая пара наглядно демонстрирует сложный характер движения \mathbf{m} . В данном случае имеется три области, где $\chi > 0$, а потеря устойчивости не во всех случаях приводит к изменению знака m_z . С ростом h сначала имеет место скачкообразный переход в так называемый промежуточный **P**-режим в области положительных значений координаты z без возбуждения колебаний оси прецессии. Затем, при дальнейшем росте h , прецессионное движение вновь теряет устойчивость, что сопровождается возбуждением нутационных движений, или переходом в **Q**-режим, из которого впоследствии и происходит его переориентация. На третьей паре графиков описанный ранее промежуточный **P**-режим отсутствует. Потеря устойчивости приводит к переходу магнитного момента в **Q**-режим с последующим инвертированием направления.

Многообразие режимов движения магнитного момента и возможные последовательности их смен показывают фазовые диаграммы, представленные на рисунке 1.9. Здесь область 1 соответствует **P**-режиму, 2 – **Q**-режиму, область 3 – промежуточному **P**-режиму, 4 – **P**-режиму в области отрицательных значений z . Каждая точка диаграммы, представленной на рисунке 1.9а, получена путем квазистатического изменения амплитуды вращающегося поля, в то время как для диаграмм рисунка 1.9б, в квазистатическом образом изменялась частота поля при фиксированной амплитуде. Стрелками указано направление изменений параметров. Как видно из рисунка, положение координат изменения режимов движения зависит от характера привнесения возмущений в систему. Так, с увеличением амплитуды поля вплоть до инверсии направления магнитного момента все изменения являются обратимыми, что условно показано двойными стрелками между областями 1,2 и 3 (см. рисунок 1.9а). Инверсия, или переход \mathbf{m} в область 4, является необратимой: из области 4 магнитный момент уже не может попасть в другие области при обычном изменении параметров вращающегося поля для заданной его поляризации. То же самое можно сказать для магнитного момента, изначально сориентированного против оси z . Это условно показано стрелкой, направленной вправо на диаграмме.

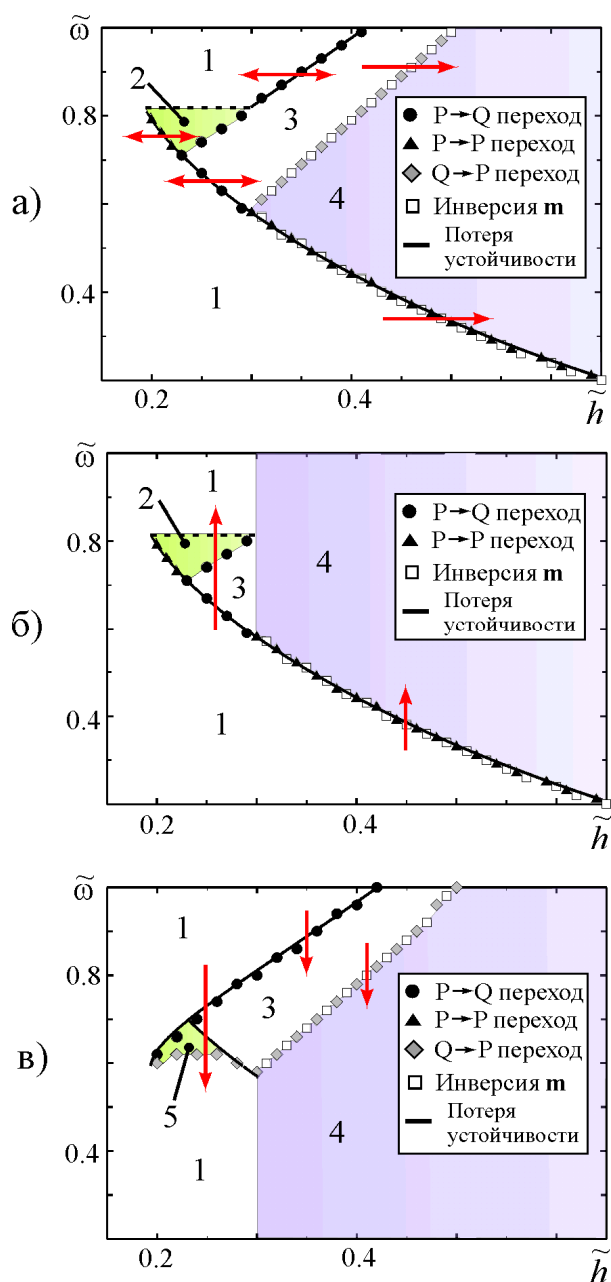
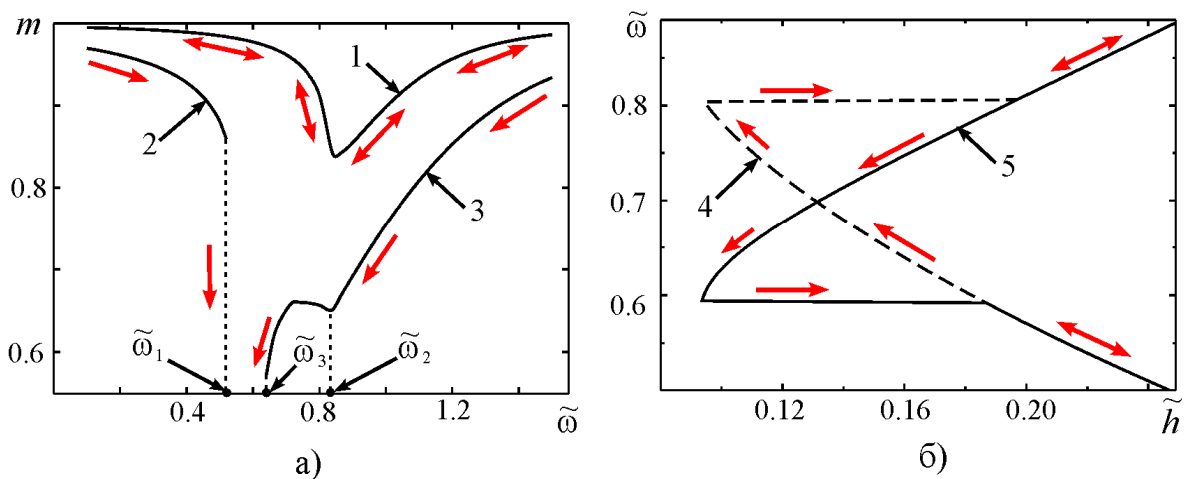


Рисунок 1.9 – Фазовые диаграммы, полученные: а) при квазистатическом изменении амплитуды циркулярно-поляризованного поля, б) при квазистатическом увеличении частоты поля, в) при квазистатическом уменьшении частоты поля.

Качественные отличия диаграмм рисунка 1.9б и в обусловлены неоднозначной частотной зависимостью равновесного значения проекции магнитного момента m_z в определенном диапазоне значений амплитуды вращающегося поля (см. рисунок 1.10а). При этом в зависимости от того, увеличивается или

уменьшается частота, координаты точки потери устойчивости будут задаваться различными значениями корня алгебраического уравнения, получаемого из критерия стабильности (1.23). Данный факт проиллюстрирован на рисунке 1.10б. С ростом частоты множество точек первой потери стабильности решения (1.35) образуют линию 4, в то время как с уменьшением частоты потеря стабильности впервые происходит в точках, лежащих на кривой 5. В заключение отметим, что переходная область 5 на диаграмме рисунка 1.9б стягивается в линию при устремлении времени ожидания устоявшегося решения уравнения (1.34) к бесконечности.

Рисунок 1.10 – а) Зависимости намагниченности наночастицы от частоты



внешнего поля: 1 – при $\tilde{h} = 0.09$, 2 – при $\tilde{h} = 0.23$, частота возрастает, 3 – при $\tilde{h} = 0.23$, частота убывает. $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_3$ – точки переориентации \mathbf{m} , $\tilde{\omega}_2$ – точка смены режима движения \mathbf{m} . б) Поведение критерия устойчивости в зависимости от направления изменения $\tilde{\omega}$.

1.3.3 Фазовые диаграммы для различных значений параметров

Динамика магнитного момента наночастицы, находящейся под действием циркулярно-поляризованного внешнего поля, может в значительной степени модифицироваться постоянным полем \mathbf{H} , приложенным вдоль легкой оси наночастицы. В частности, это может приводить к тому, что амплитуда и частота вращающегося поля, при которых происходит переключение намагниченности, будут существенно меньше по сравнению со случаем отсутствия поля \mathbf{H} . Данный факт продемонстрирован на рисунке 1.11. Представленная фазовая диаграмма получена при наличии поля $\mathbf{H} = -0.9\mathbf{H}_a$; $\lambda = 0.2$. Обозначение областей совпадает с аналогичными обозначениями рисунка 1.9.

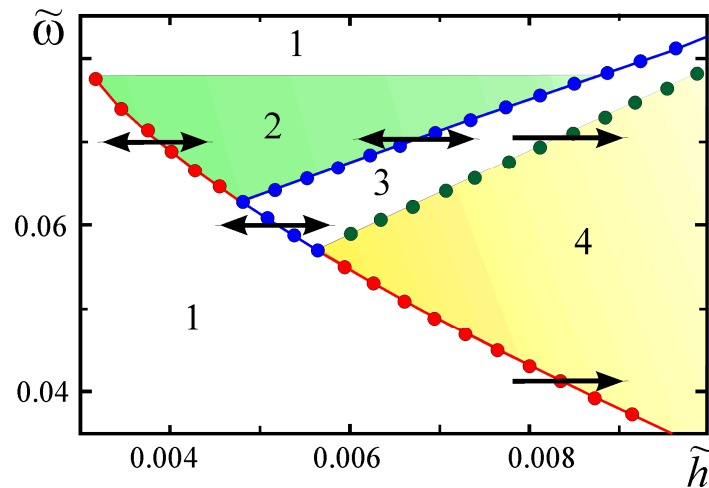


Рисунок 1.11 – Фазовая диаграмма, полученная при квазистатическом изменении амплитуды циркулярно-поляризованного поля при наличии внешнего постоянного поля.

Возможность совместного управления динамикой \mathbf{m} с помощью вращающегося и статического магнитных полей демонстрируют фазовые диаграммы рисунка 1.12, полученные при фиксированной частоте вращающегося поля. Обозначения областей диаграмм аналогичны предыдущим. Из рисунков видно, что если статическое поле направлено вдоль оси z , потенциальный барьер для переориентации магнитного момента повышается, и, как следствие, амплитуда вращающегося поля, при которой происходит переориентация, растёт

(см. рисунок 1.12а). Для отрицательных значений H высота потенциального барьера, наоборот, понижается, и уменьшается величина h . В то же время наблюдается появление неоднородного режима прецессии и перемагничивание через этот режим. Таким образом, частотный диапазон, на котором может возникать неоднородный режим прецессии, может быть изменен внешним постоянным полем. Полученная информация имеет практическую ценность, поскольку открывает возможности по комбинированному использованию внешних воздействий различных типов для управления динамикой намагниченности наночастицы.

Также в процессе численного исследования была установлена зависимость характера прецессии вектора \mathbf{m} от параметра затухания λ . Из диаграмм рисунка 1.13 видно, что величина амплитуды поля, при котором

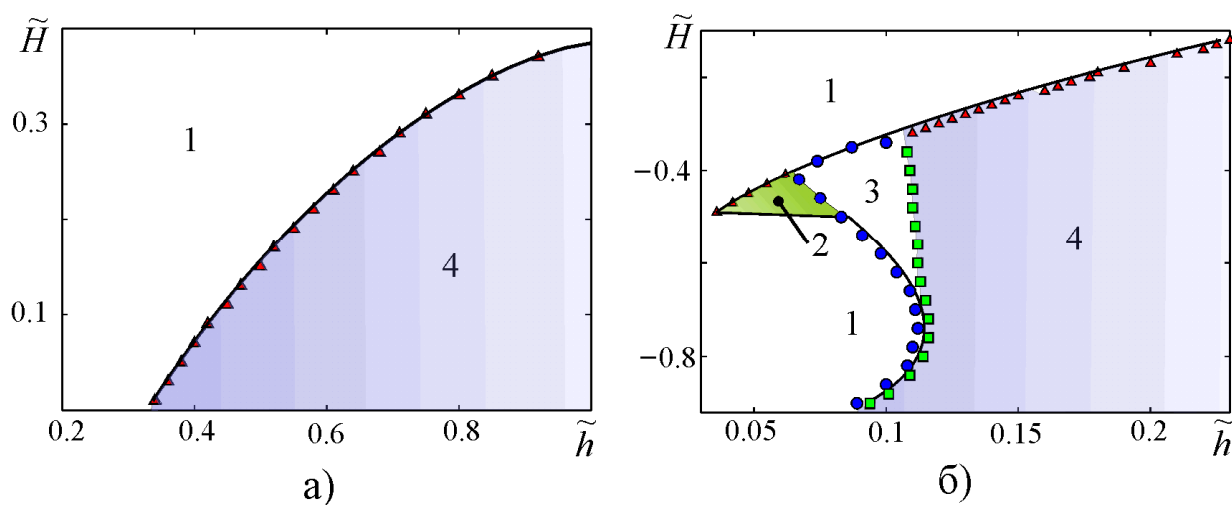


Рисунок 1.12 – Фазовые диаграммы в переменных “амплитуда вращающегося поля” – “постоянное поле”, полученные при квазистатическом изменении амплитуды. Сплошная линия – критерий стабильности, треугольники – переход от **P**-режима к **P**-режиму, круги – переход от **P**-режима к **Q**-режиму, прямоугольники – переход от **Q**-режима к **P**-режиму.

происходит переключение намагниченности, а также области однородной и неоднородной прецессии, существенным образом определяются диссипацией

энергии в системе.

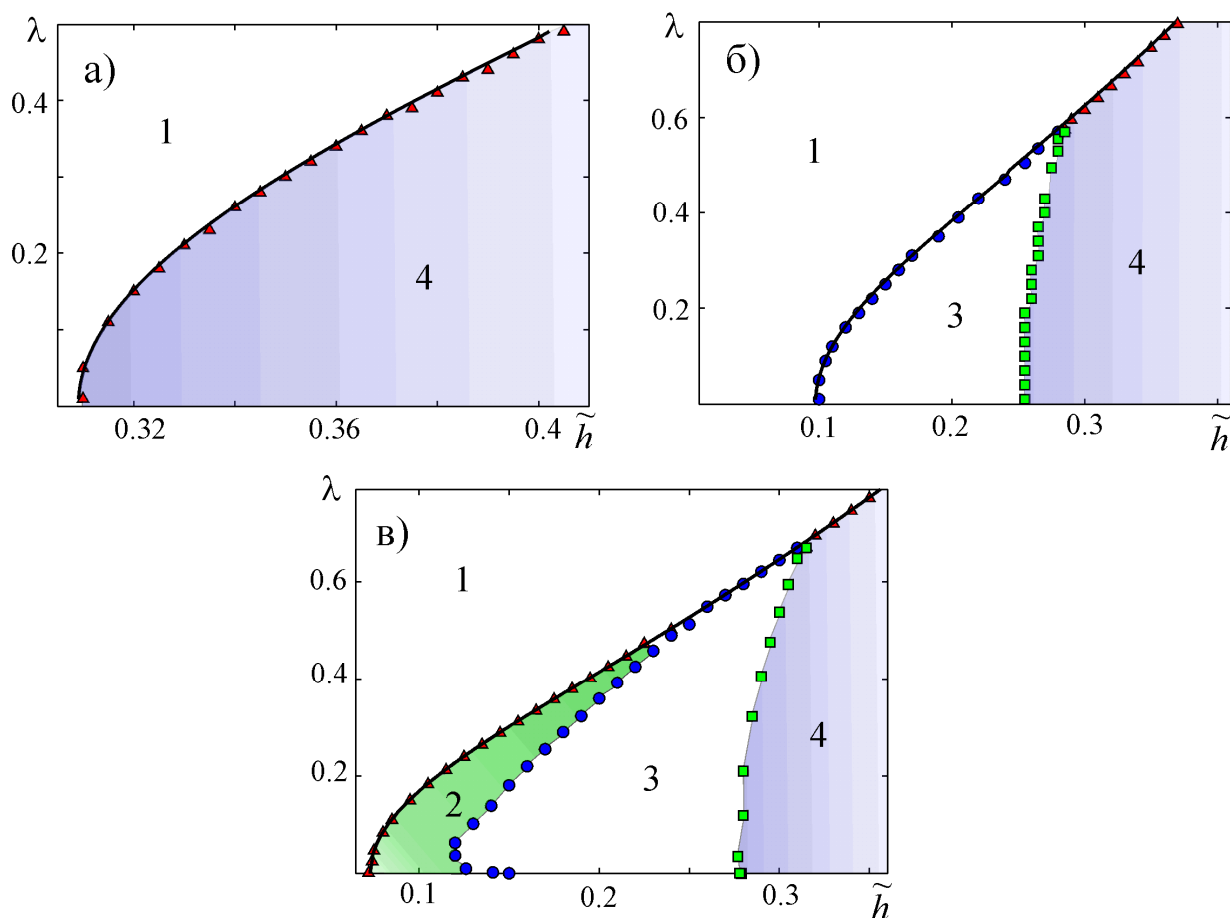


Рисунок 1.13 – Фазовые диаграммы в переменных “амплитуда вращающегося поля” – “параметр диссипации”. а) $\tilde{\omega} = 0.4$, б) $\tilde{\omega} = 0.7$ в) $\tilde{\omega} = 0.75$.

1.4 Термические эффекты

1.4.1 Средние времена пребывания магнитного момента в равновесных состояниях

Если магнитные моменты взаимодействуют с термостатом, то их динамика становится стохастической и описывается вышеуказанным уравнением Фоккера-Планка (1.6). За счет тепловой активации, магнитные моменты могут претерпевать случайные флуктуации, которые, в свою очередь, могут обусловить переходы магнитного момента из одного состояния (σ) в другое ($-\sigma$). В связи с

этим возникает важная задача о влиянии вращающегося магнитного поля на средние времена t_σ пребывания магнитного момента в равновесных состояниях при отсутствии внешнего постоянного поля ($H = 0$). В принципе, проблема может быть разрешена на основании уравнения (1.6). В частности, данный подход есть приемлемым в случае переменного магнитного поля, линейно поляризованного вдоль оси легкого намагничивания [68] Однако, так как искомые средние времена могут быть выражены через средние времена достижения случайным процессом заданного уровня, то для решения этой проблемы удобно использовать обратное уравнение Фоккера-Планка [56, 69]

$$\frac{\partial}{\partial t'} P = -(f'_1 + \gamma^2 \Delta \cot \theta') \frac{\partial}{\partial \theta} P - \gamma^2 \Delta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P - f'_2 \frac{\partial}{\partial \varphi'} P - \frac{\gamma^2 \Delta}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial^2}{\partial \varphi'^2} P \quad (1.36)$$

$[f'_{1,2} = f'_{1,2}(\theta', \varphi', t')]$, что эквивалентно уравнению (1.6). В рамках данной методики, можно вычислить времена t_σ в ряде частных случаев. В силу большой математической сложности данной задачи здесь приводится ее приближенное решение, которое, однако, дает качественно аналогичные результаты, что и точное решение. В рассматриваемом случае малоугловой прецессии, магнитные моменты слабо суперпарамагнитных частиц (т.е. частиц, для которых величина магнитной энергии существенно превышает тепловую, что отражено в условии $a = H_a m / 2k_B T \gg 1$) почти все время находятся возле конических поверхностей с углами конуса (1.28). Полагается, что если разместить на этих условных поверхностях отражающие границы, то слагаемые, отвечающие за наличие вращающегося поля, могут быть исключены из выражения (1.36). Затем, заменив условную плотность вероятности P на $P = P(\theta, t | \theta', t)$ и приняв во внимание, что $f'_1 = -0.5\lambda\omega_r \sin 2\theta'$, уравнение (1.36) упрощается к более простой форме:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \bar{P} = -\left(\frac{\lambda}{2} \omega_r \sin 2\theta' - \gamma^2 \Delta \cot \theta'\right) \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P} - \gamma^2 \Delta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P} \quad (1.37)$$

Далее используется процедура [70] для нахождения времени достижения

магнитным моментом, который находится в состоянии σ , уровня с максимальной магнитной энергией

$$T_\sigma(\theta') = \int_0^\infty d\tau \int_{\theta_\sigma^{(1)}}^{\theta_\sigma^{(2)}} d\theta P(\theta, t | \theta', 0) \quad (1.38)$$

и получаем обычное из выражения (1.37) обыкновенное дифференциальное уравнение для этих величин

$$\frac{d^2 T_\sigma(\theta')}{d\theta'^2} + (\cot \theta' - a \sin 2\theta') \frac{dT_\sigma(\theta')}{d\theta'} + at_r = 0 \quad (1.39)$$

Здесь $\theta' \in (\theta_{+1}, \pi/2)$ если $\sigma = +1$, $\theta' \in (\pi/2, \pi - \theta_{-1})$ если $\sigma = -1$, $\theta_{+1}^{(1)} = \theta_{+1}$, $\theta_{+1}^{(2)} = \theta_{-1}^{(1)} = \pi/2$, $\theta_{+1}^{(2)} = \pi - \theta_{-1}$, и $t_r = 2/\lambda\omega_r$ – это характерное времени релаксации для прецессионного движения магнитного момента. Искомые времена пребывания магнитного момента в равновесных состояниях t_σ выражаются через средние времена $T_\sigma(\theta')$ достижения магнитным моментом уровня максимальной энергии выражаются следующим образом $t_\sigma = 2T_\sigma(\pi[1 - \sigma]/2 + \sigma\theta_\sigma)$. Решая уравнения (1.39), с использованием в качестве граничных условий наличие поглощающую и отображающую границы, т.е. $T_\sigma(\pi/2) = 0$ и $dT_\sigma(\theta')/d\theta'|_{\theta' = \pi(1 - \sigma)/2 + \sigma\theta_\sigma} = 0$, получаем для случая малоугловой прецессии слабо суперпарамагнитных наночастиц ($a \gg 1$ и $\theta_\sigma \ll 1$):

$$t_\sigma = \frac{t_r}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp[a(1 + \sigma 2\tilde{H}_\sigma)] \quad (1.40)$$

где $\tilde{H}_\sigma = -\sigma\theta_\sigma^2/2$ может интерпретироваться как эффективное магнитное поле, действующее на наночастицу в состоянии σ .

Согласно этому результату, вращающееся магнитное поле уменьшает средние времена резиденции. Однако, за счет естественной прецессии, уменьшение средних времен разное для верхних и нижних магнитных моментов. Как будет показано ниже, этот факт вызывает сильное увеличение динамической намагниченности и приводит к модификации закона ослабления.

1.4.2 Индуцированная намагниченность

Ранее намагниченность стационарного состояния ансамбля наночастиц во вращающемся магнитном поле была определена как $\mu = (1/N) \sum_{i=1}^N m_{zi} / m$ ($N \rightarrow \infty$). Обозначив среднее количество магнитных моментов в состоянии σ как N_σ и вводя в рассмотрение вероятность $p_\sigma = N_\sigma/N$ ($p_{+1} + p_{-1} = 1$) того, что магнитный момент находится в том или ином состоянии, перепишем μ в форме

$$\mu = \sum_{\sigma} p_{\sigma} \langle \cos \theta \rangle_{|\sigma} \quad (1.41)$$

где $\langle \cos \theta \rangle_{|\sigma} = (1/N_\sigma) \sum_{i \in N_\sigma} \cos(\theta_i)$ – среднее значение проекции приведенного магнитного момента на ось z m_{zi}/m в состоянии σ . Если $a \gg 1$, то термические флуктуации малы и $\langle \cos \theta \rangle_{|\sigma}$ в выражении (1.41) может быть записан $\sigma \cos \theta_\sigma \approx \sigma(1 - \theta_\sigma^2/2)$. При этом намагниченность может быть представлена в виде $\mu = \mu_t + \mu_{id} + \mu_d$. Здесь $\mu_t = \sum_{\sigma} \sigma p_{\sigma}$ и $\mu_{id} = \sum_{\sigma} \sigma(2p_{\sigma} - 1)\theta_{\sigma}^2/4$ есть вклад термических флуктуаций в общую намагниченность μ , и μ_d чистая динамическая намагниченность полученная из выражения (1.29). Поскольку $\theta_{\sigma} \ll 1$, условие $\mu_t/\mu_{id} \gg 1$ выполняется, значит $\mu \approx \mu_t + \mu_d$. Стоит подчеркнуть, что уменьшение температуры (увеличение a) уменьшает флуктуации магнитных моментов, но не разницу между вероятностями p_{+1} и p_{-1} , т.е. μ_t . Более того, это значит, что также как и в двухуровневых моделях, $|\mu_t|$ будет возрастать с увеличением a .

Далее принимая во внимание, что в стационарном состоянии вероятность определяется $p_{\sigma} = t_{\sigma}/(t_{+1} + t_{-1})$ и используя выражение (1.40), получим

$$\mu_t = \tanh[a(\tilde{H}_{+1} + \tilde{H}_{-1})] \quad (1.42)$$

Сравнивая μ_t с намагниченностью парамагнетика Изинга, $\tanh(2a\tilde{H})$, легко заметить, что циркулярно поляризованное магнитное поле индуцирует в себя такую же намагниченность наночастицы μ_t , как и внешнее магнитное поле

$(\tilde{H}_{+1} + \tilde{H}_{-1})/2$ приложено перпендикулярно плоскости поляризации. Интересно отметить, что $(\tilde{H}_{+1} + \tilde{H}_{-1})/2 = \mu_d$, в то время как μ_t определяется (1.42). Отсюда $\mu_t = \tanh(2a\mu_d)$. Поскольку $a \gg 1$ и $|\mu_d| \ll 1$, эти соотношения показывают, что $\mu_t/\mu_d \gg 1$, а значит $\mu \approx \mu_t$, т.е. термические флуктуации обуславливают значительный рост динамической намагниченности. В частности, если $a|\mu_d| \ll 1$, то $\mu_t/\mu_d = 2a$. Как и в случае с μ_d , зависимость μ_t от k имеет резонансный характер и, как ожидалось, $|\mu_t|$ увеличивается с уменьшением температуры (см. рисунок 1.14).

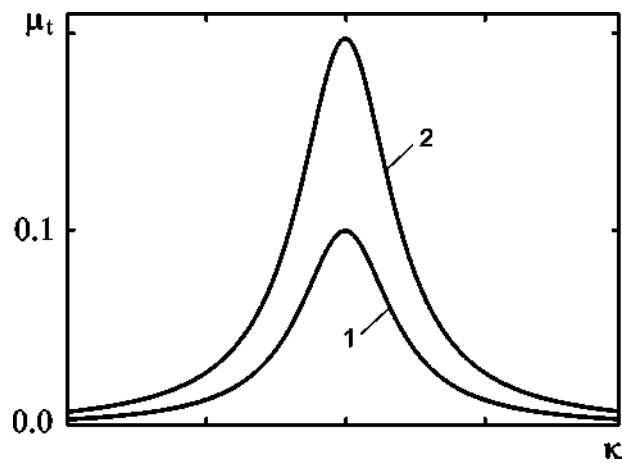


Рисунок 1.14 – График зависимости намагниченности от частоты k для параметров $\tilde{h} = 10^{-3}$, $\lambda = 10^{-2}$, $a = 20$ (кривая 1), и $a = 40$ (кривая 2). Температура в последнем случае в два раза меньше, чем для предыдущего случая.

1.4.3 Закон релаксации

В качестве второго примера, рассмотрим термоиндуцированную магнитную релаксацию в ансамбле наночастиц, управляемую вращающимся полем [71]. Т.к. интенсивность переходов магнитного момента наночастицы из состояния σ в состояние $-\sigma$, определяется $1/t_\sigma$, дифференциальное уравнение, которое определяет временную зависимость намагниченности $\mu(t)$ этой системы может быть записано:

$$\dot{\mu}(t) = \mu(t) \left(\frac{1}{t_{+1}} + \frac{1}{t_{-1}} \right) - \frac{1}{t_{+1}} + \frac{1}{t_{-1}} \quad (1.43)$$

Полагая $\mu(0) = 1$ (здесь пренебрегаем динамической намагниченностью), из уравнения (1.43) получим закон релаксации:

$$\mu(t) = (1 - \mu_t) \exp(-t/\tau) + \mu_t \quad (1.44)$$

где

$$\tau = \tau_0 \frac{\exp[a(H_{+1} - H_{-1})]}{\cosh[a(H_{+1} + H_{-1})]} \quad (1.45)$$

есть время релаксации в присутствии вращающегося магнитного поля, и $\tau_0 = (t_r/4)\sqrt{\pi/a} \exp a$ – время релаксации в отсутствии вращающегося магнитного поля. Т.о. вращающееся магнитное поле уменьшает время релаксации ($\tau/\tau_0 < 1$) и приводит к ненулевой равновесной намагниченности [$\mu(\infty) = \mu_t$]

1.5 Выводы к разделу 1

В данной работе были количественно исследованы динамические и термические эффекты в системе наночастиц, которые проистекают от воздействия магнитных моментов с циркулярно поляризованным магнитным полем вращающегося в плоскости, перпендикулярной лёгкой оси наночастиц, а также с термостатом. Главным результатом есть обоснование различного характера динамики магнитного момента (как детерминистической так и стохастической) вблизи двух его устойчивых состояний. Важно, благодаря естественной прецессии, которая всегда происходит против часовой стрелки, указанное отличие может быть существенным даже при отсутствии внешнего постоянного поля.

Для описания динамических эффектов при нулевой температуре, было использовано детерминистическое уравнение Ландау-Лифшица, которое было решено для малоугловой прецессии магнитного момента. Было показано, что вращающееся поле, в зависимости от его частоты и поляризации, может либо

увеличить, либо уменьшить устойчивость прецессии. Для нулевого постоянно-го поля, была найдена динамическая намагниченность ансамбля наночастиц и предсказан эффект переключения намагниченности – скачкообразного изменения ее величины. Данный эффект имеет место при некоторой критической амплитуде вращающегося магнитного поля только для наночастиц одного сорта – т.е. для тех, направление естественной прецессии магнитных моментов которых совпадает с направлением магнитного поля вращения.

Детально проанализированы режимы прецессии магнитного момента и условия их возникновения. Численно подтверждена возможность скачкообразного перемагничивания наночастицы с помощью циркулярно-поляризованного внешнего поля. Показано, что результатом потери устойчивости прецессии магнитного момента может быть как инвертирование вектора магнитного момента, так и переход прецессии в неоднородный режим. Указана возможность перемагничивания наночастицы через режим неоднородной прецессии. Освещены аспекты неоднозначной частотной зависимости проекции магнитного момента на направление легкой оси.

Для конечных температур с использованием обратного уравнения Фоккера-Планка, были рассчитаны средние времена пребывания магнитного момента в одном из двух равновесных состояний. Используя полученный результат была изучена релаксация намагниченности слабо суперпарамагнитных наночастиц, во вращающемся магнитном поле. Было показано, что такое поле, плоскость поляризации которого перпендикулярна к оси легкого намагничивания, равно как и постоянное поле, направленное вдоль легкой оси, может обусловит наличие ненулевой равновесной намагниченности. Обнаружено, что тепловые флуктуации способны сильно увеличить динамическую намагниченность, а вращающееся поле может изменять время релаксации.

Полученные результаты могут иметь практическую ценность как для индустрии медиа-устройств, так и для экспериментальных методик по изучению ансамблей ферромагнитных наночастиц.

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА В ДВУМЕРНЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ

Следующей важной задачей, решаемой в настоящей НИР есть изучение наночастиц с покрытием, а, также, новых свойств, обусловленных особенностями их внутреннего строения. В первую очередь это вызвано факторами прикладного характера, поскольку композитные магнитные материалы находят все более широкое применение в различных компонентах современных ИТ-устройств. Бурное развитие информационных технологий и их огромное социально-экономическое значение на данном этапе развития общества выдвигает все более высокие требования перед индустрией средств мультимедиа. Удовлетворить этим требованиям можно только обладая глубокими знаниями о природе процессов, протекающих как в производстве компонентов ИТ-устройств, так и во время их функционирования.

Среди новых перспективных магнитных материалов следует выделить целый класс композитов, образованных упорядоченными ансамблями однодоменных ферромагнитных частиц, внедренных в немагнитную твердую матрицу. Так, двумерные решетки таких частиц, легкие оси которых перпендикулярны плоскости распределения, являются непосредственными носителями информации для устройств записи, называемых perpendicular patterned-media (PPM) [6-9]. Примечательно, что прогнозируемая плотность записи последних ~ 100 Tbit/inch². Ансамбли более сложных по геометрии и структуре нанообъектов – магнитных туннельных переходов (magnetic tunnel junctions) [72] – успешно применяются в новых перспективных устройствах спинтроники, таких как модули энергонезависимой памяти (MRAM) [39-42], сверхчувствительные магнитные датчики.

2.1 Однонаправленная анизотропия как способ повышения термостабильности магнитного момента

Миниатюризация компонентов вычислительной техники при одновременном увеличении производительности возможна исключительно за счет уменьшения размеров их базовых структурных элементов. Это неизбежно приводит к неустойчивости основных свойств таких элементов относительно тепловых флуктуаций. Так в РРМ-накопителях, где битам данных соответствуют определенные направления магнитных моментов наночастиц, термоиндуцированные изменения этих направлений эквивалентны потерям информации. В вычислительных компонентах неустойчивость к тепловым флуктуациям обуславливает нестабильность процесса вычисления и, следовательно, приводит к ошибкам в обработке данных.

Существенно улучшить термостабильность магнитного момента ферромагнитной наночастицы можно за счет покрытия ее антиферромагнитной оболочкой [16, 17]. Взаимодействие пограничных спинов ферромагнитного ядра и антиферромагнитной оболочки, толщина которой составляет несколько атомных слоев, приводит к возникновению нового свойства – так называемой однонаправленной анизотропии [73], при которой магнитный момент наночастицы обладает только одним равновесным направлением. Данное явление принято характеризовать величиной эффективного поля, называемого обменным полем смещения.

Явление однонаправленной анизотропии впервые было обнаружено еще в 1956 году [74] и интенсивно изучается в последнее десятилетие [73], однако его природа так и не выяснена до конца. В отсутствие удовлетворительного теоретического описания большое значение приобретает численный эксперимент. Традиционно для поиска равновесных свойств ансамблей магнитных моментов используется так называемое микромагнитное моделирование, основанное на методах Монте-Карло [75, 76]. Несмотря на то, что численные исследования магнитных наночастиц указанным методом проводятся достаточно давно, изуче-

нию частиц с покрытием посвящено лишь небольшое количество современных работ [77-79]. В силу новизны задачи на данном этапе отсутствует как подробная информация о влиянии внутренних свойств на величину поля обменного смещения, так и остается неясным ряд технических вопросов относительно самого численного моделирования.

Опыт численного исследования подобных систем показывает, что процесс моделирования требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому для тестирования конкретных алгоритмов и методик целесообразно использовать низкоразмерные модели. В данной работе мы использовали двумерные модели, которые, с одной стороны, позволяют наблюдать явление смещения петли гистерезиса, присущее реальным наночастицам с покрытием, а, с другой стороны, не требуют значительных затрат машинного времени. Кроме того, такие модели могут иметь и самостоятельную ценность как для изучения магнитных свойств моноатомных пленок, так и для описания трехмерных структур, характеризующихся несколькими осями анизотропии.

2.2 Сравнительный анализ основных моделей

Рассмотрим участок двумерной квадратной решетки спиновых магнитных моментов \mathbf{S}_i , ограниченный окружностью радиуса $R + \Delta R$ [80]. Будем считать, что вектора \mathbf{S}_i лежат в плоскости данной окружности и взаимодействуют друг с другом посредством обменного взаимодействия. Также полагаем, что взаимодействие в пределах окружности радиуса R является ферромагнитным и характеризуется константой J_C , а в кольце внутренним радиусом R и толщиной ΔR – антиферромагнитным с константой J_S . Взаимодействие пограничных спинов ферромагнитного ядра и антиферромагнитной оболочки характеризуется константой J_{if} , знак которой определяет характер взаимодействия. В предположении, что ось легкого намагничивания ядра совпадает с аналогичной осью оболочки, а константы анизотропии ядра K_C и оболочки K_S находятся в соотношении $K_C \ll K_S$, что есть характерным для частиц кобальта, покрытых слоем

оксида [74], механизм возникновения обменного поля смещения H_{EB} следующий. При действии на частицу внешнего переменного магнитного поля $\mathbf{h}(t)$, спиновые магнитные моменты ферромагнитного ядра испытывают ориентационное действие со стороны этого поля, в то время как спиновые моменты оболочки удерживаются более сильным эффективным полем анизотропии. Спиновые магнитные моменты оболочки, которые непосредственно прилегают к ферромагнитному ядру за счет взаимодействия через границу раздела ферромагнетик-антиферромагнетик обуславливают некоторое преимущественное направление спинов ядра. Это эквивалентно действию некоторого эффективного постоянного поля, которое и называют обменным полем смещения.

Для непосредственного осуществления моделирования запишем гамильтониан в форме, традиционно используемой в рамках подобных задач [77-79]

$$\begin{aligned} \frac{H}{k_B} = & -J_C \sum_{\langle i,j \in C \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - K_C \sum_{i \in C} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{e}_i)^2 - J_S \sum_{\langle i,j \in C \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \\ & - K_S \sum_{i \in S} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{e}_i)^2 - J_{I'} \sum_{\langle i \in C, j \in S \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \mathbf{h} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь угловые скобки обозначают суммирование по ближайшим соседям. Наиболее простой в реализации является модель Изинга [76]. Ее простота обусловлена предположением о существовании только двух возможных положений вектора s_i вдоль легкой оси. Такой подход оправдан для систем с большой анизотропией, и благодаря низким требованиям к вычислительной мощности ЭВМ, он успешно применялся для исследования фазовых переходов и магнитной восприимчивости макроскопических ферромагнитных образцов [75].

Поэтому, естественно, что первым шагом в исследовании явления однонаправленной анизотропии стало именно применение модели Изинга к исследуемой системе. Численный эксперимент проводился в три этапа. На первом из них полагалось, что все спины оболочки имеют одинаковое направление и сохраняют свои начальные позиции на протяжении всего моделирования. Были выбраны следующие значения параметров: $R = 9d$, где d – период решетки;

$\Delta R = 2d$; $J_C = 5$ К; $K_C = 1$ К; $J_{if} = -2,5$ К; $T = 0,1$ К. Внешнее поле прикладывалось вдоль оси легкого намагничивания и изменялось в пределах $h \in [-15; 15]$ К с шагом $\Delta h = 0,1$ К. Число шагов Монте-Карло на каждое значение поля – $N = 5 \cdot 10^3$ на спин. Шагом Монте-Карло в соответствии с алгоритмом Метрополиса [75, 76] называется численное испытание, проводимое над случайно выбранным спином системы, состоящее в инвертировании его текущего положения в соответствии с вероятностью $p \sim \exp(-\Delta E/T)$. Здесь ΔE – разность между энергиями инвертированного и текущего положений выбранного спина. Поскольку энергия анизотропии для любого из двух состояний остается неизменной, для корректного учета влияния анизотропии полагалось, что инвертирование сопровождается преодолением потенциального барьера $K_C(\mathbf{S}_i)^2$, величина которого прибавлялась к ΔE .

На втором этапе процесс моделирования проводился в соответствии с методикой реальных экспериментов [41, 77]: частица охлаждалась в присутствии постоянного магнитного поля. Начальная температура $T_1 = 15$ К, шаг по температуре $\Delta T = 0,1$ К, $J_S = -2,5$ К. Значения остальных параметров совпадают с предыдущим случаем. Такое решение позволяет системе приблизиться к конфигурации, отвечающей минимуму энергии. Третий этап повторяет второй с тем отличием, что $J_{if} = 0$. По сути, это соответствует моделированию поведения частицы без оболочки. Результаты моделирования представлены на рисунке 2.1. Здесь по вертикальной оси отложена приведенная намагниченность ферромагнитного ядра

$$M = \frac{1}{N_R} \left| \sum_{i \in R} \mathbf{S}_i / S \right| \quad (2.2)$$

где N_R – количество спинов ядра.

В случае фиксированных спинов оболочки эффективное поле однонаправленной анизотропии оказывается максимальным, о чем свидетельствует максимальный сдвиг петли гистерезиса. В состоянии с наименьшей энергией, к которому приближается система в процессе охлаждения, пограничные спины

оболочки имеют некоторое преимущественное направление, вдоль которого, однако, ориентированы не все спины, что эквивалентно уменьшению эффективного поля (рисунок 2.1б, 1). Это подтверждается меньшим по величине смещением петли гистерезиса (рисунок 2.1б, 2). И, наконец, при отсутствии взаимодействия в интерфейсном слое, смещение петли будет отсутствовать (рисунок 2.1б, 3). Совокупность полученных данных однозначно показывает, что причиной однонаправленной анизотропии, есть обменное взаимодействие спинов ядра и оболочки в интерфейсном слое. Величина моля обменного смещения H_{EB} определяется из графика как

$$H_{EB} = (H_{cl} + H_{cr})/2 \quad (2.3)$$

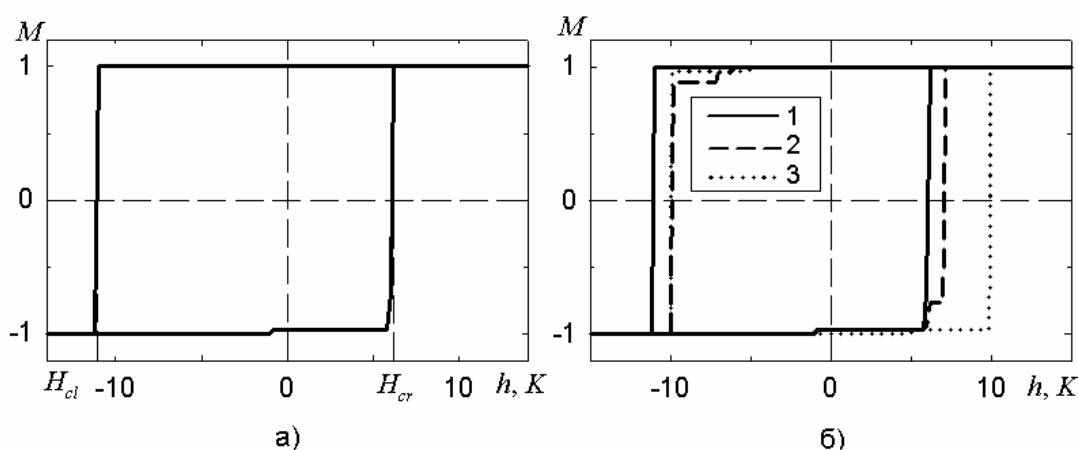


Рисунок 2.1 - Модель Изинга. Магнитный гистерезис наночастицы с покрытием: а) для фиксированных спинов оболочки; б) для фиксированных спинов оболочки (1), для охлажденной в поле частицы (2), для случая отсутствия взаимодействия в интерфейсном слое частицы (3)

Анализ результатов показывает, что для данной задачи модель Изинга является нереалистичной, что в первую очередь связано с предложением о наличии только двух положений вектора спина S_i . Данное упрощение затрудняет исследование явления однонаправленной анизотропии, поскольку в процессе

численного эксперимента спины оболочки не удерживаются в первоначальном положении. Кроме того, в рамках данной модели процесс перемагничивания происходит посредством образования и последующего движения доменной границы (см. рис. 2.2). Это противоречит известному факту, что перемагничивание достаточно малой частицы происходит за счет когерентного вращения всех ее спинов [58].

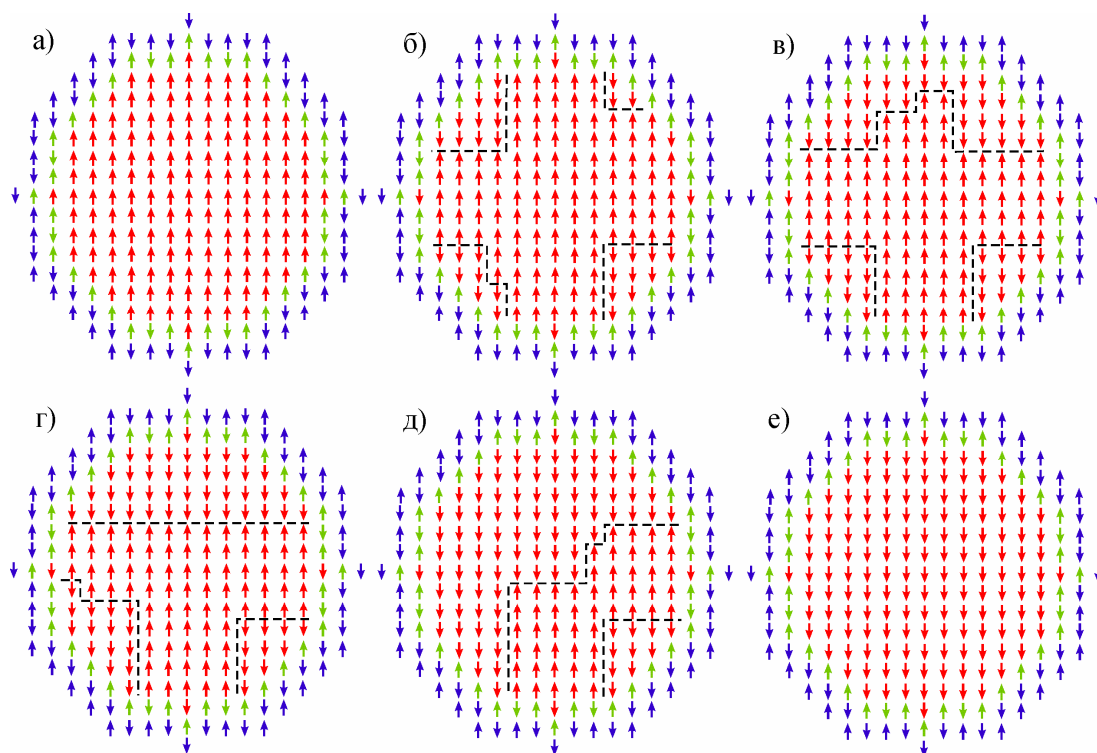


Рисунок 2.2 - Модель Изинга. Процесс перемагничивания наночастицы. Светлые стрелки – пограничные спины оболочки. Пунктирная линия – доменная граница.

Главные недостатки модели Изинга устраняет модель Гейзенберга, которая допускает произвольную ориентацию спинов системы S_i . В то же время, эта модель требует гораздо больших затрат машинного времени и, главное, допускает различные варианты реализации, дающие принципиально различные результаты. Первый вариант основан на произвольном изменении полярного угла, задающего направление спина, во всей области допустимых значений $(0; 2\pi]$ в пределах каждого шага Монте-Карло. Однако, как и в случае модели Изинга,

такой подход не учитывает, что одна и та же энергия анизотропии может соответствовать двум положениям спина в силу квадратичной зависимости энергии анизотропии от его направления: $K_C(\mathbf{S}_i \mathbf{e}_i)^2 = K_C S_i^2 \cos^2 \theta_i$. Здесь θ_i – полярный угол спина \mathbf{S}_i . Добавление к разности энергий предыдущего и последующего положений спинов определенной величины потенциального барьера в данном случае приведет к резкому увеличению затрат машинного времени, поскольку эту величину нужно вычислять заново на каждом шаге. Второй вариант реализации модели Гейзенберга предполагает изменение направления выбранного спина на каждом шаге Монте-Карло лишь в пределах некоторой небольшой окрестности $\Delta\theta$ ($\Delta\theta = 30^\circ$) от первоначального положения θ_i . Именно этот подход обеспечивает должную реалистичность моделирования динамики спиновых магнитных моментов наночастицы с покрытием при приемлемых затратах машинного времени. Это подтверждается протеканием процесса перемагничивания наночастицы в соответствии с моделью когерентного вращения (см. рисунок. 2.3).

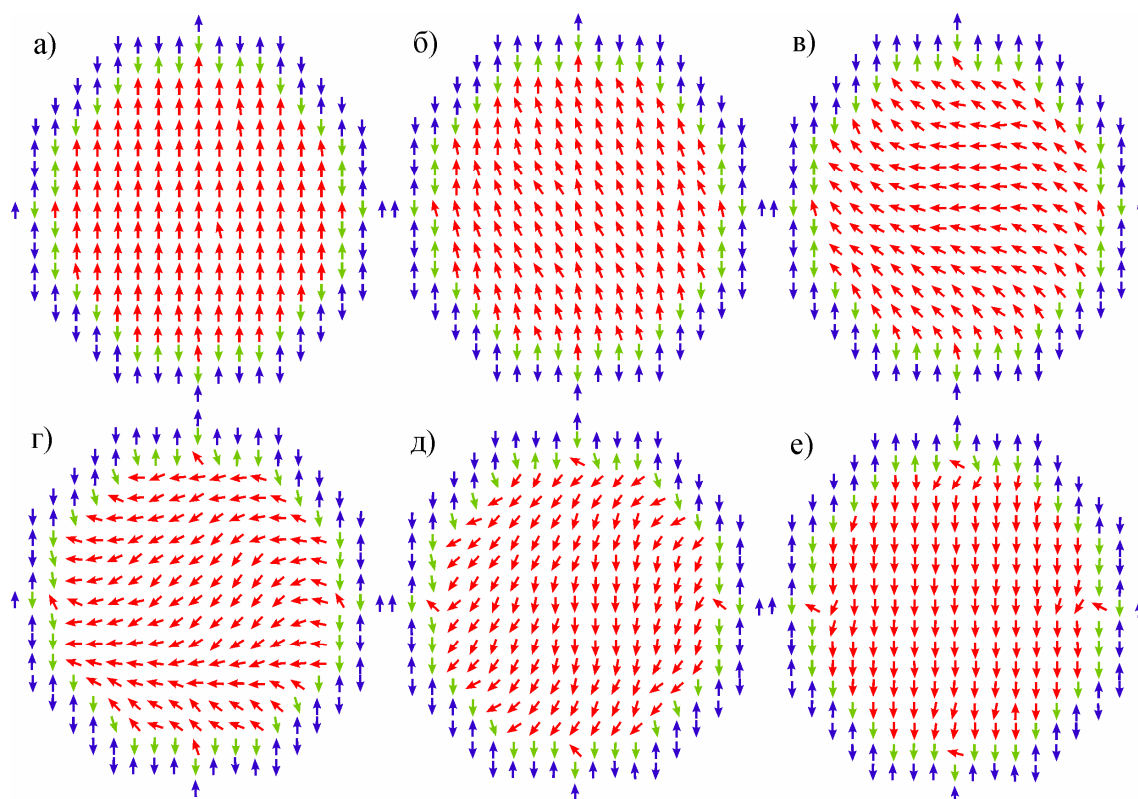


Рисунок 2.3 - Модель Гейзенберга. Процесс перемагничивания наночастицы (когерентное вращение). Светлые стрелки – пограничные спины оболочки.

Результаты моделирования представлены на рисунке (2.4). Для сравнения параметры частицы выбраны точно такими же, как и для модели Изинга (см. рисунок 2.1). Как и ранее, здесь моделирование проводилось для фиксированных

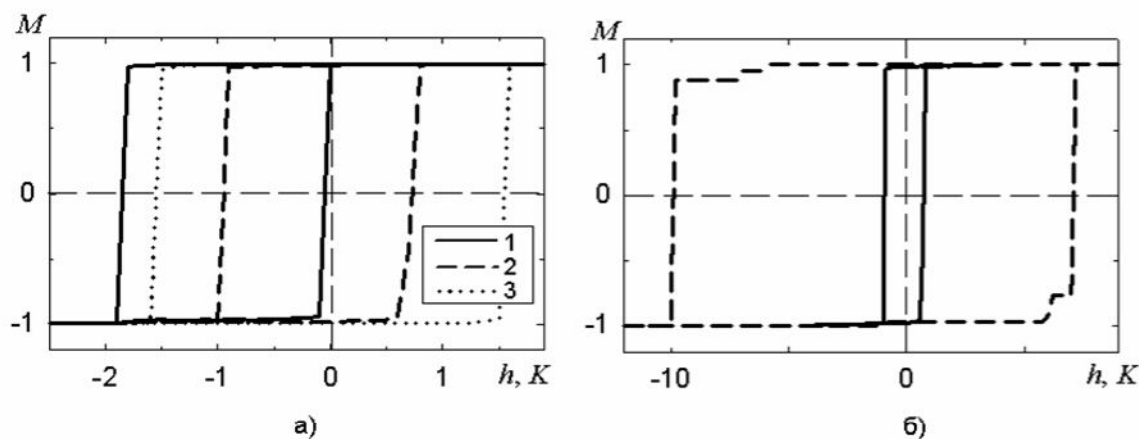


Рисунок 2.4 - Магнитный гистерезис наночастицы с покрытием. Модель Гейзенберга: а) для фиксированных спинов оболочки (1), для охлажденной в поле частицы (2), для случая отсутствия взаимодействия в интерфейсном слое частицы (3); б) сравнение с моделью Изинга (пунктирная линия)

спинов оболочки, для охлажденной в поле частицы и для случая отсутствия взаимодействия в пограничном слое. Как видно из рисунков 2.1б и 2.4а, общий характер размещения петель гистерезиса для обеих моделей одинаков, однако есть ряд отличий, обусловленных спецификой каждой модели. Так, коэрцитивная сила

$$H_C = (H_{cr} - H_{cl})/2 \quad (2.4)$$

предсказываемая моделью Гейзенберга при одинаковом числе шагов Монте-Карло, оказывается на порядок меньше, чем для модели Изинга. Это продиктовано большей гибкостью модели Гейзенберга. Второе отличие связано с ярко выраженным уменьшением коэрцитивной силы для модели Гейзенберга при наличии

оболочки. Это указывает на большую роль пограничных спинов оболочки в иницировании перемагничивания частицы.

В литературе можно встретить результаты численного исследования магнитных спиновых систем с помощью так называемого комбинированного метода, изложенного в работе [81]. Суть этого метода состоит в использовании трех типов шагов Монте-Карло. Первый тип подразумевает обычную инверсию вектора \mathbf{S}_i , второй тип состоит в изменении направления спина \mathbf{S}_i на произвольный угол, третий – изменение направления \mathbf{S}_i в малой окрестности его предыдущего положения. Авторы утверждают, что при определенном соотношении числа шагов всех трех типов, процесс моделирования является наиболее эффективным с точки зрения отношения машинных затрат и реалистичности. Однако такое утверждение необоснованно, поскольку, как было указано выше, только изменение положения спина в некоторой окрестности от первоначального положения в рамках одного шага Монте-Карло позволяет адекватно описывать процессы перемагничивания наночастиц.

2.3 Зависимости обменного поля смещения от параметров системы

Естественный интерес представляет информация о том, как ведет себя обменное поле смещения и коэрцитивное поле при изменении параметров системы. Данный интерес диктуется практическими соображениями: воспользоваться новым свойством можно лишь обладая детальной фактической информацией о всех его проявлениях. В настоящем разделе представлены результаты численного моделирования гистерезиса в комплексной двумерной магнитной наночастице при различных значениях температуры, различных размерах частицы, а, также, зависимости от интенсивности обменного взаимодействия пограничных слоев ферромагнитного ядра и антиферромагнитной оболочки.

2.3.1 Температурные зависимости

С ростом температуры любое магнитное упорядочение будет разрушаться. В предположении, что анизотропия ферромагнитного ядра меньше, чем анизотропия антиферромагнитной оболочки, для упрощения моделирования полагалось, что спины оболочки не подвержены тепловым флуктуациям и имеют жестко заданное антиферромагнитное упорядочение. В последствии планируется провести моделирование для более реалистичной ситуации, когда спины оболочки не фиксированы. Сравнение данных поможет более отчетливо представить суть явления однонаправленной анизотропии.

Результат моделирования в рамках вышеуказанного допущения приведен на рисунке 2.5. Здесь были выбраны следующие параметры моделирования: $R = 9d$; $\Delta R = 2d$; $J_C = 10$ К; $K_C = 1$ К; $J_{if} = -5$ К. Внешнее поле прикладывалось вдоль оси легкого намагничивания и изменялось в пределах $h \in [-3.5; 3.5]$ К с шагом $\Delta h = 0,1$ К. Число шагов Монте-Карло на каждое значение поля – $N = 1 \cdot 10^3$ на спин. Спад кривой (1) до нуля указывает на разрушение ферромагнитного упорядочения ядра. Вследствие этого происходит также слабый спад

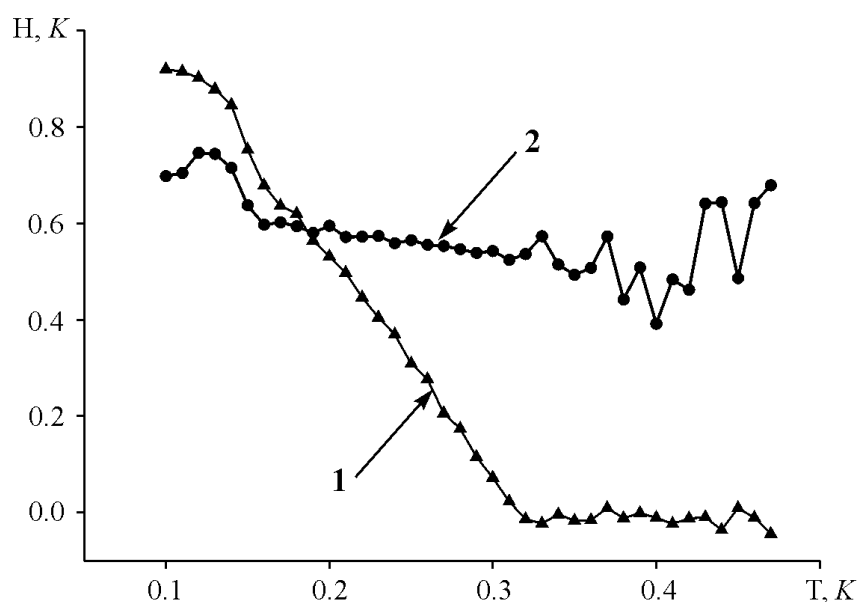


Рисунок 2.5 – Температурные зависимости коэрцитивного поля H_C (1) обменного поля смещения H_{EB} (2)

величина обменного поля смещения, поскольку связь между фиксированными спинами оболочки и спинами ядра становится менее существенной в флуктуационной динамике спинов ядра.

2.3.2 Зависимости от радиуса ядра

Поскольку однонаправленная анизотропия есть результатом комплекса поверхностных эффектов, то она должна демонстрировать существенную зависимость от геометрических параметров наночастицы. В нашем случае, частица имеет форму круга, и геометрия границы раздела ядро-оболочка будет зависеть от радиуса частицы по двум причинам. Первая – это удельный вклад энергии пограничного взаимодействия по сравнению с общей энергией. Энергия взаимодействия спинов в ядре пропорциональна числу спинов, которое в свою очередь зависит от радиуса R по квадратичному закону. В то же время, рост радиуса R приводит к линейному росту числа поверхностных спинов. Поэтому, изучаемый эффект будет ярко выражен для сравнительно небольших частиц. Вторая причина заключается в различной форме пограничного слоя и изменение R на единицу может приводить к значительным структурным изменениям поверхностного слоя, и в последствии, характера процесса перемагничивания частицы.

Первым шагом исследования однонаправленной анизотропии для частиц с разными размерами есть нахождение зависимостей $H_C(R)$ и $H_{EB}(R)$ как и в предыдущем случае температурной зависимости для фиксированных спинов оболочки (см. рис. 2.6). Параметры моделирования здесь такие же, как и в предыдущем случае, с той разницей, что температура принималась $T = 0,1$ К, а число шагов Монте-Карло на каждое значение поля – $N = 2 \cdot 10^3$ на спин.

Из графика видно, что коэрцитивная сила H_C растет с радиусом, в силу увеличения магнитной энергии спинов ядра. В то же время, как и ожидалось, обменное поле смещения H_{EB} показывает немонотонную зависимость в пределах, показанных на рисунке, на фоне общей тенденции к уменьшению при больших значениях радиуса R . На рисунке 2.7 показаны два различных типа

формирования поверхностного слоя, которые обуславливают разную степень влияния поверхностных эффектов и, следовательно, различные значения H_{EB} .

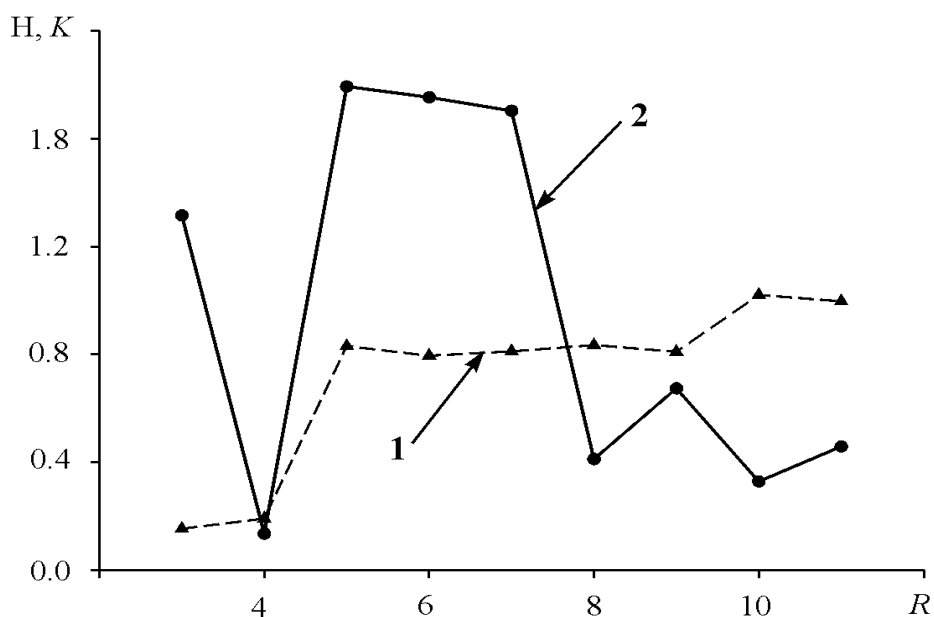


Рисунок 2.6 - Зависимости коэрцитивного поля H_C (1) обменного поля смещения H_{EB} (2) от радиуса частицы.

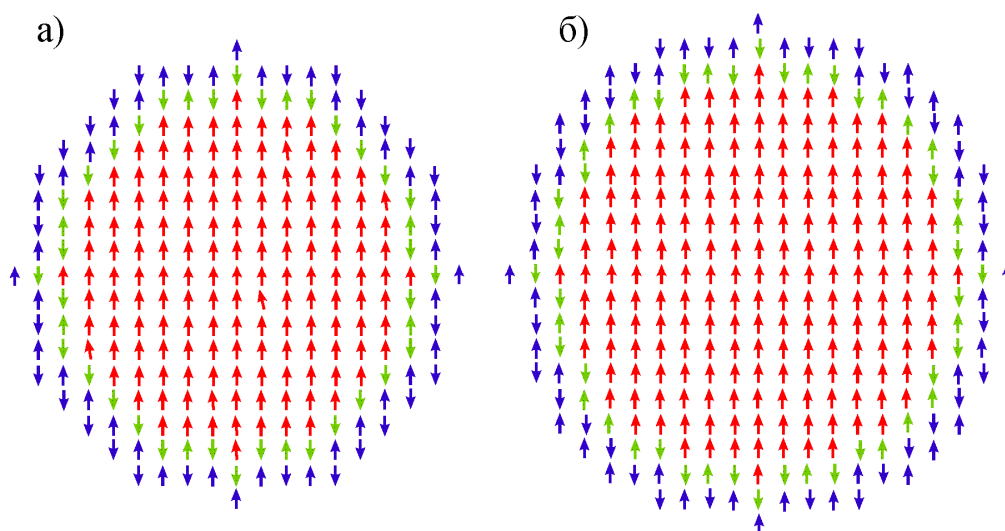


Рисунок 2.7 – Разные типы пограничных слоев: а) для $R = 7d$, б) для $R = 8d$. Структуру, сходную с рис. 2.7а еще имеют частицы с радиусом ядра 5, 6 и 9, поэтому значения поля смещения для них больше, чем для частиц другого радиуса.

Более реалистичная ситуация, в которой спины оболочки также подвержены тепловым флуктуациям, демонстрирует качественно подобные зависимости $H_{EB}(R)$ и $H_C(R)$. Нами была проведена серия численных экспериментов для различного числа итераций, результаты которой представлены на рисунках. Здесь принималось, что значения параметров системы соответствуют вышеуказанным, константа обменного взаимодействия спинов оболочки – $J_S = -5$ К; константа анизотропии – $K_S = 20$ К. Как видно из графиков, с ростом числа итераций искомые зависимости приближаются к соответствующим зависимостям для фиксированных спинов оболочки. Отличия в графиках обусловлены в том числе и наличием близкорасположенных квазиравновесных уровней частицы, отличающихся упорядочением спинов оболочки. Для преодоления этой проблемы необходимо производить усреднение по большей выборке, чтобы учесть основные реализации ансамбля. Также в этом контексте стоит изучить возможность проявления т.н. трейнинг-эффекта [73], суть которого состоит в изменении пели гистерезиса при каждом новом цикле премагничивания частицы.

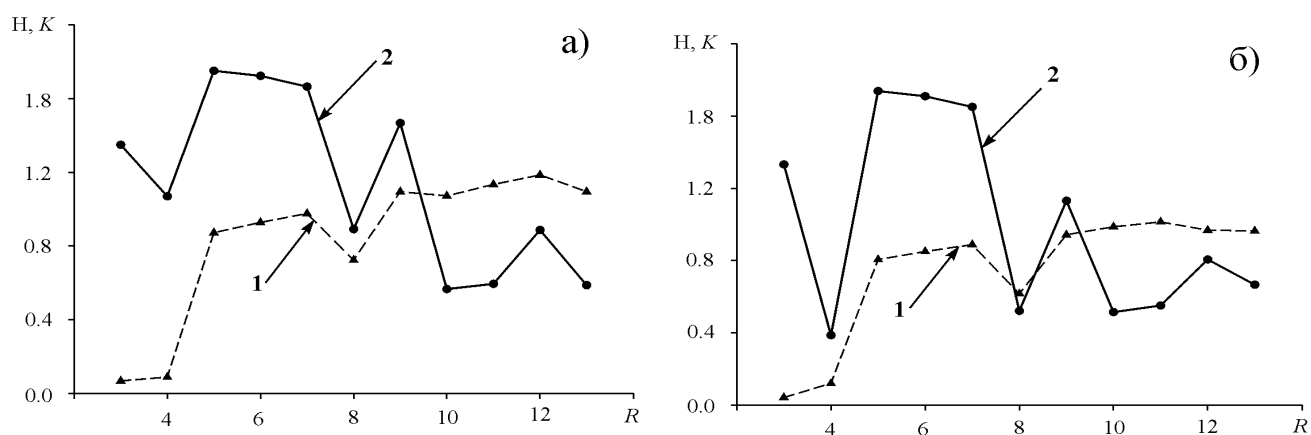


Рисунок 2.8 - Зависимости коэрцитивного поля H_C (1) обменного поля смещения H_{EB} (2) от радиуса частицы. Число итераций на спин а) – 10^3 , б) – $2 \cdot 10^3$.

2.3.3 Зависимости от константы обменного взаимодействия в пограничном слое

С ростом J_{if} по абсолютному значению растет поле смещения и уменьшается коэрцитивная сила, поскольку спины оболочки являются «инициаторами» процесса перемагничивания. Следовательно, чем интенсивнее взаимодействие через интерфейсный слой – тем при меньших значениях внешнего поля будет начинаться массовая переориентация спинов ядра. Любопытно, что зависимость $H_{EB}(J_{if})$ есть нелинейная: значительный рост (по абсолютной величине) наблюдается только в интервалах (2; 4) и (-4; -2). В интервале значений J_{if} (-2; -2) частица практически не обнаруживает явления обменного смещения не смотря на то, что величина коэрцитивного поля на данном интервале уже заметно изменяется.

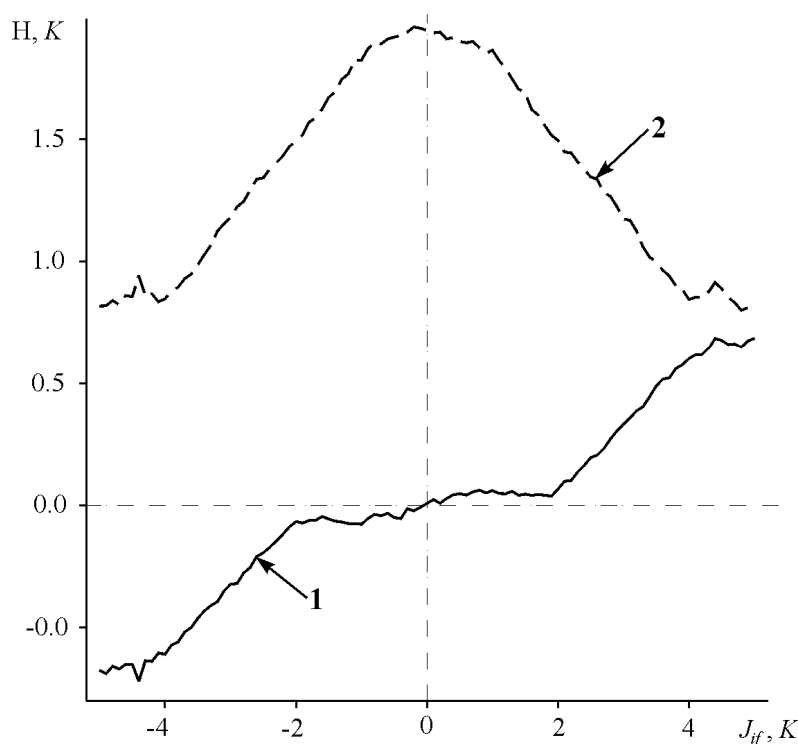


Рисунок 2.9 – Зависимости коэрцитивного поля H_C (2) обменного поля смещения H_{EB} (1) от константы J_{if} обменного взаимодействия на границе ядра и оболочки.

2.4 Выводы к разделу 2

Таким образом, в настоящей работе было численно изучено явление однонаправленной анизотропии для двумерной сложной спиновой системы по типу ядро-оболочка. Установлено, что причиной данного явления есть взаимодействие пограничных спинов ядра и оболочки в интерфейсном слое, а, также большая магнитная анизотропия материала оболочки. Был проведен сравнительный анализ применения различных моделей реализации численного эксперимента. Показано, что адекватно отразить реальную динамику спиновых магнитных моментов можно только в рамках модели Гейзенберга, причем случайные изменения положений спиновых магнитных моментов на каждом шаге Монте-Карло нужно проводить лишь в небольшой окрестности их текущих положений.

В рамках разработанного метода было проведено достаточно полное численное исследование влияния внешних и внутренних параметров на величину обменного смещения. В частности, были исследованы температурные зависимости H_C и H_{EB} , исследована и объяснена недородная зависимость этих величин от радиуса вследствие различной структуры поверхностного слоя. Также построены зависимости H_C и H_{EB} от константы обменного взаимодействия на границе ядро-оболочка. Анализ результатов подтверждает, причиной наличия однонаправленной анизотропии есть взаимодействие спинов ферромагнитного ядра и антиферромагнитной оболочки. С другой стороны, полученная в процессе работы информация может служить как исходная для постановки новых задач по исследованию данного явления, в том числе и теоретического.

3 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

3.1 Аномальная диффузия частиц в случайной среде с фрактальными свойствами: учет автокорреляции

3.1.1 Понятие диффузии и развитие представлений о ней

Как известно, броуновское движение приводит к диффузии частиц, т.е. к выравниванию концентрации, роль которой играет вероятность нахождения частицы в том или ином элементе объема жидкости [82]. Причем средний квадрат смещения частиц описывается линейной зависимостью от времени:

$$\langle (\Delta \mathbf{r})^2 \rangle = \langle (\mathbf{r} - \langle \mathbf{r} \rangle)^2 \rangle = 2dD_1t, \quad (3.1)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор частицы;

d – пространственное измерение;

D_1 – коэффициент диффузии размерности $\text{см}^2\text{с}^{-1}$.

Такое диффузионное поведение присуще многим физическим, химическим, биологическим, экономическим и другим системам [2-18]. Главным инструментом его понимания является модель случайных блужданий, предложенная Пирсоном. Согласно этой модели частица совершает скачки одинаковой длины в любом направлении через одинаковые промежутки времени. Плотность вероятности ее положения в пределе непрерывного времени имеет гауссовскую форму и описывается уравнением диффузии. Соответствующее уравнение Ланжевена имеет простейшую форму с постоянным коэффициентом затухания и аддитивным гауссовским белым шумом [83].

Однако с середины 70-х годов прошлого столетия начинают накапливаться примеры диффузионных систем, для которых закон (3.1) не выполняется. В настоящее время существует множество процессов, описываемых так называемой аномальной диффузией (для обзора, см., например, [36-85]), для которых

$$\langle (\Delta \mathbf{r})^2 \rangle = \langle (\mathbf{r} - \langle \mathbf{r} \rangle)^2 \rangle = 2dD_\nu t^\nu, \quad (3.2)$$

где D_ν – обобщенный коэффициент диффузии размерности $\text{см}^2 \text{с}^{-\nu}$;

ν – показатель аномальной диффузии, $\nu \neq 1$.

Согласно общепринятой терминологии, случай $\nu > 1$ называется супердиффузией (диффузия более быстрая в сравнении с нормальной диффузией), а случай $0 < \nu < 1$ – субдиффузией (диффузия более медленная в сравнении с нормальной диффузией).

Первым известным примером субдиффузии стал транспорт электронов и вакансий в аморфных полупроводниках под действием электрического поля [86, 87]. Ученые Х. Шер (H. Scher) и Э. Монтролл (E. Montroll) обнаружили [86], что заряды при движении захватываются локальными неоднородностями, из которых освобождаются благодаря тепловым флуктуациям. Причем время пребывания в ловушках более длительное, чем это следует из классической картины диффузии. Для описания этого процесса они предложили модель непрерывных случайных блужданий со степенным распределением Паретто-Леви для времени ожидания между скачками. Другие примеры субдиффузионных процессов: транспорт на объектах с фрактальной геометрией [88,89], рассеивание трассера в пространственно периодическом потоке жидкости [90], динамика дробы в полимерах [91], и др.

Классический пример супердиффузионного процесса – парная диффузия Ричардсона [92,93]: две частицы, двигаясь в турбулентной жидкости, удаляются друг от друга за время t на расстояние l , причем $\langle l^2(t) \rangle \propto t^3$. Это явление было впервые экспериментально обнаружено еще в 1926 году Ричардсоном (L.F. Richardson) [92], и для его теоретического объяснения он предложил обобщенное уравнение диффузии с коэффициентом диффузии, зависящим от расстояния по степенному закону. Спустя тридцать лет Бэтчелор (G.K. Batchelor) [94] раскритиковал Ричардсона, и рассмотрел уравнение с коэффициентом диффузии, зависящим только от времени по степенному закону. При этом он отметил,

что оценку каждой модели должен дать эксперимент. Релевантный эксперимент, проведенный спустя тридцать лет Лавджоем (S. Lovejoy) [95] в контексте соотношения периметра и площади для зон дождя и облаков, показал, что оба предположения должны быть исключены. И, наконец, Хентшель (H.G.E. Hentschel) и Прокачча (I. Procaccia) [96], исходя из фрактальной природы турбулентности, предложили свою теорию относительной турбулентной диффузии, основанную на уравнении диффузии с коэффициентом диффузии, зависящим как от расстояния, так и от времени по степенному закону. В рамках этой теории выполняется модифицированный закон $4/3$ Ричардсона и выводится фрактальная размерность границ облаков, согласующаяся с экспериментальными данными. Теоретическое объяснение турбулентной диффузии также было дано в 1987 году в рамках концепции непрерывных случайных блужданий, при которых частица остается в движении с постоянной скоростью без изменения направления в течение случайного времени, распределенного по закону Парето-Леви (блуждания Леви) [93]. К настоящему времени супердиффузия обнаружена в хаотичных системах [97, 98], в случайных полях скорости [99], во вращающихся потоках жидкости [100, 101], внутри живой клетки [102], на поверхности твердых тел [103], в квантовой оптике [104], и др.

Существует несколько общих методов для описания явления аномальной диффузии. Первый из них основывается на дробном исчислении и включает в себя дробные диффузионные уравнения [105, 106], дробные уравнения Фоккера-Планка [107-110] или дробные уравнения Ланжевена [111 - 112]. Другой метод исходит из обобщенных обыкновенных уравнений Ланжевена. Он очень удобен для рассмотрения диффузионного поведения и особенно информативен, если могут быть получены точные решения этих уравнений [113 - 116]. Помимо указанных стохастических систем с источником внешнего цветного шума, этот метод применяется также для изучения аномальной диффузии в системах с внутренним цветным шумом, описываемых обобщенным уравнением Ланжевена с ядром памяти силы трения [117 - 124]. Нужно также отметить сравнительно простые модели, описываемые обыкновенными уравнениями Ланжевена с 1)

аддитивным гауссовским белым шумом и изменяющимся во времени по степенному закону гармоническим потенциалом [125] и 2) с мультипликативным гауссовским белым шумом, интенсивность которого зависит как от координаты, так и от времени [126]. В рамках этих моделей описывается широкий класс диффузионных процессов: суб- и супердиффузионных, затянутых и сжатых экспоненциальных. В частности, в [126] исследуется случай мультипликативного шума со степенной зависимостью интенсивности и от координаты и от времени, соответствующий диффузии в комплексных системах, обладающими фрактальными свойствами, таких как турбулентная жидкость [96]. Последний метод получил дальнейшее обобщение на случай двух мультипликативных гауссовских белых шумов [127], и соответствующее уравнение движения нашло применение при моделировании электронно-дырочного транспорта в квантовых ямах [128]. Принимая во внимание тот факт, что белый шум с нулевым временем автокорреляции в природе не существует, возникает интерес исследовать диффузию частиц в реалистичной случайной среде, обладающей фрактальными свойствами, флуктуации в которой характеризуются ненулевым временем автокорреляции.

3.1.2 Обоснование модели

Для простоты движение классических частиц в случайной среде рассматривается в одном измерении. При этом все качественные особенности, характерные для двух и трех измерений, сохраняются. Воздействие среды на частицу учитывается посредством шума с известными статистическими характеристиками. Причем его интенсивность является функцией, как координаты, так и времени. Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\dot{x} = g(x, t)\xi(t), \quad (3.3)$$

где x – координата частицы (точка означает производную по времени);

$x(0) = x_0 > 0$ – начальное значение координаты;

$g(x, t)$ – амплитуда флуктуаций мультипликативного шума $\xi(t)$.

Предположим, что мультипликативная функция распадается во времени и пространстве, т.е. $g(x, t) = G(x) / \lambda(t)$. С физической точки зрения функцию $\lambda(t)$ можно интерпретировать как коэффициент затухания, зависящий от времени. Уравнение Ланжевена (3.3) примет вид

$$\lambda(t)\dot{x} = G(x)\xi(t). \quad (3.4)$$

Рассмотрим случай с ограничением $G(x) > 0$ для всех x и $\lambda(t) > 0$ для всех t .

Эффект памяти, присутствующий в любой реалистичной среде, учтем посредством стационарного гауссовского шума с нулевым средним значением и произвольной корреляционной функцией:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = r(|t - t'|) \quad (3.5)$$

На функцию $r(u)$ накладывается два ограничения: $r(0) > 0$, т.е. дисперсия, характеризующая разброс значений, положительна; $r(\infty) = 0$, т.е. значения шума в моменты времени, значительно удаленные друг от друга, не коррелируют друг с другом. Предположение о гауссовском шуме выполняется во многих случаях согласно центральной предельной теореме, т.к. его эффект обусловлен кумулятивным действием многих случайных факторов среды. В дальнейшем допустим, что шум – внешний, следовательно, он не связан с затуханием флуктуационно-диссипативной теоремой.

3.1.3 Статистические характеристики

Для того чтобы изучить диффузионные режимы частиц, совершающих одномерное движение в случайной среде, определим статистические моменты для координаты. Для этого используем некоторые результаты предыдущих исследований.

Следуя результатам работы [127], решение уравнения Ланжевена (3.4) можно представить в виде

$$x(t) = \Psi^{-1}[\Xi(t) + u_0], \quad (3.6)$$

где функция $\Psi^{-1}(u)$ взаимно обратная к функции $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) - \Psi(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{G(x')} ; \quad (3.7)$$

$\Xi(t)$ – гауссовский случайный процесс:

$$\Xi(t) = \int_0^t \frac{\xi(\tau) d\tau}{\lambda(\tau)} ; \quad (3.8)$$

$$u_0 = \Psi(x_0).$$

Гауссовский случайный процесс (3.8) полностью характеризуется нулевым средним значением и корреляционной функцией:

$$K(t, t') = \langle \Xi(t) \Xi(t') \rangle = \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' \frac{r(|\tau - \tau'|)}{\lambda(\tau)\lambda(\tau')} \quad (t > t'). \quad (3.9)$$

Соответственно, выражение для моментов плотности вероятности координаты частицы имеет вид

$$\langle x^n(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy [\Psi^{-1}(y\sigma(t) + u_0)]^n e^{-y^2/2}. \quad (3.10)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$;

$\sigma^2(t) = \langle \Xi^2(t) \rangle$ – дисперсия случайного процесса $\Xi(t)$:

$$\sigma^2(t) = \int_0^t \int_0^t d\tau d\tau' \frac{r(|\tau - \tau'|)}{\lambda(\tau)\lambda(\tau')}. \quad (3.11)$$

Фрактальные свойства среды (масштабную инвариантность) учтем посредством амплитуды флуктуаций, зависящей от координаты и от времени по степенному закону, т.е.

$$G(x) \sim |x|^\alpha \quad (x \rightarrow \infty), \quad \lambda(t) \sim bt^\beta \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.12)$$

где $\alpha (\leq 1)$ и $\beta (\leq 1/2)$ – некоторые действительные параметры.

Предполагается, что система статистически симметрична относительно преобразования $x \rightarrow -x$.

В случае гауссовского белого шума [$r(u) = \Delta\delta(u)$, Δ – интенсивность] уравнение Ланжевена (3.4) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ описывает тепловую диффузию броуновских частиц в вязкой жидкости в крупном масштабе времени (на временных интервалах, значительно больших времени релаксации скорости частиц). Случай $\alpha = 0$ и $\beta = 1/4$ (условие эффективного коэффициента затухания, зависящего от времени) соответствует тепловой диффузии в неоднородной среде, а именно внутри живой клетки [102]. И, наконец, случай с произвольными функциями (3.12) рассматривается в [126] в контексте диффузии частиц в комплексной среде, например в турбулентной жидкости. Случай аномальной диффузии частиц, возбуждаемых внешним гауссовским шумом с произвольной корреляционной функцией (3.9) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ подробно исследуется в работе [114], а при $\alpha \neq 0$ и $\beta = 0$ в [115].

В дальнейшем рассмотрим случай линейного мультипликативного шума ($\alpha=1$) и запишем выражение для дисперсии координаты частицы, $\sigma_x^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$. В соответствии с результатами [127] оно имеет вид

$$\sigma_x^2(t) \sim 2\tilde{x}^2 e^{2\sigma^2(t)} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.13)$$

где \tilde{x} – некоторый пространственный масштаб.

Подставим выражение для коэффициента трения (3.12) в выражение для корреляционной функции (3.9), получим

$$K(t, t') \sim \int_{\tilde{t}}^t \int_{\tilde{t}}^{t'} d\tau d\tau' \frac{r(|\tau - \tau'|)}{(\tau\tau')^\beta} \quad (t, t' \rightarrow \infty),$$

где \tilde{t} – некоторый временной масштаб.

Введем новые переменные $\tau - \tau' = u$ и $\tau\tau' = v$ и найдем якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial u} & \frac{\partial \tau_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial u} & \frac{\partial \tau_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}}.$$

Определив область интегрирования для новых переменных, корреляционную функцию (3.9) случайного процесса $\Xi(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} K(t, t') \sim \frac{1}{b^2} & \left[\int_0^{t'} dur(u) \int_{\tilde{t}^2 + u\tilde{t}}^{t'^2 - ut'} \frac{dv}{v^\beta} \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} + \right. \\ & + \int_0^{t-t'} dur(u) \int_{\tilde{t}^2 + u\tilde{t}}^{t'^2 + ut'} \frac{dv}{v^\beta} \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} + \\ & \left. + \int_{t-t'}^t dur(u) \int_{\tilde{t}^2 + u\tilde{t}}^{t^2 - ut} \frac{dv}{v^\beta} \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right] \quad (t, t' \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Соответственно, выражение для дисперсии (3.11) примет вид

$$\sigma^2(t) \sim \frac{2}{b^2} \int_0^t dur(u) \int_{\tilde{t}^2 + u\tilde{t}}^{t^2 - ut} \frac{dv}{v^\beta} \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.14)$$

Нужно отметить, что в частном случае белого шума [$r(u) = \Delta\delta(u)$] выражение (3.14) переходит в известные выражения [127]:

$$\sigma^2(t) \sim \frac{2\Delta}{b^2} \frac{t^{1-2\beta}}{1-2\beta} \quad (t \rightarrow \infty),$$

если $\beta < 1/2$;

$$\sigma^2(t) \sim (2/l^2) \ln(t/\tilde{t}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

если $\beta = 1/2$.

В дальнейшем рассмотрим случай $\beta = 1/2$, именно при этом значении параметра коэффициента затухания была обнаружена нехарактерная для обычных диффузионных процессов зависимость характера диффузии от интенсивности эффективного белого шума [127]. Для вычисления дисперсии (3.14) в

этом случае используем табличный интеграл:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{u^2v + 4v^2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} u^2 + 2v + \sqrt{u^2v + 4v^2} \right).$$

Асимптотика дисперсии случайного процесса (3.8) примет вид

$$\sigma^2(t) \sim \frac{2\Delta_r}{b^2} \ln \frac{t}{\tilde{t}} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.15)$$

где Δ_r – интенсивность цветного шума:

$$\Delta_r = \int_0^{\infty} dur(u).$$

Подставляя выражение (3.15) в выражение для дисперсии координаты частицы (3.13), окончательно получим

$$\sigma_x^2(t) \sim 2\tilde{x}^2 \left(\frac{t}{\tilde{t}} \right)^{\frac{4\Delta_r}{b^2}} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.16)$$

Эта асимптотическая формула демонстрирует замечательную особенность специального класса систем с линейным мультипликативным шумом, а именно: характер диффузионного режима определяется интенсивностью Δ_r цветного шума. Следуя общепринятой терминологии, скажем, что система демонстрирует субдиффузию, если $\Delta_r < b^2/4$, нормальную диффузию, если $\Delta_r = b^2/4$, и супердиффузию, если $\Delta_r > b^2/4$.

3.2 Неравновесный переход в нелинейном осцилляторе, индуцированный взаимной корреляцией шумовых источников

3.2.1 Общие положения

В последние годы интенсивно исследуются сильно неравновесные открытые системы различной физической природы. Интерес к данному направлению объясняется тем, что при определенных условиях флуктуации окружающей среды, т.е. внешний шум, могут создавать структуры, появление которых невозможно при детерминированном внешнем воздействии. Тем самым проблема конструктивной роли шума занимает одно из центральных мест в современной физике.

Первыми указали на данную область исследования В. Хорстхемке (W. Horsthemke) и Р. Лефевр (R. Lefever) [2]. Используя точные результаты, они развеяли основанный на интуиции миф о том, что флуктуации внешней среды могут оказывать лишь дезорганизующее воздействие. Открытые ими индуцированные шумом неравновесные переходы – первый пример явления конструктивной роли шума в нелинейных системах. Более того, эти переходы по некоторым свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам и фазовым переходам в неравновесных системах при детерминированных внешних условиях, что позволило авторам говорить о новом классе фазовых переходов.

Возможность существования явлений, противоречащих интуиции, вызвала всплеск интереса к изучению сравнительно простых систем, для которых могут быть получены точные результаты. Да и сама теория индуцированных шумом неравновесных переходов сформулирована в рамках некоторых допущений и приближений, а именно: 1) рассматривается пространственно-однородная (нульмерная) система, т.е. ее состояние зависит только от времени; 2) состояние системы достаточно хорошо описывается одной динамической переменной; 3) время корреляции внешних флуктуаций пренебрежимо мало, что позволяет использовать приближение белого шума. Физическими системами,

идеально удовлетворяющими этим требованиям, являются электрические контуры. Неудивительно, что именно с их помощью были получены первые экспериментальные подтверждения этой теории. Электрические контуры и в настоящее время не утратили свою актуальность при проверке существования новых теоретически предсказанных стохастических явлений.

Интерес к изучению нульмерных систем в последние годы также стимулируется бурным развитием нанотехнологий, позволяющих конструировать и наблюдать системы в наномасштабе. Среди всего многообразия данной области исследования можно выделить наномеханические системы, состояние которых может быть приемлемо описано одним параметром. Это, например, нанобалка [21], служащая детектором малых сил и масс. Движение ее центра масс может описываться классическим затухающим осциллятором Дуффинга. В таких системах, в отличие от макроскопических, значительными могут быть не только внешние флуктуации, но и внутренние, которые также необходимо учитывать. Следовательно, стохастические осцилляторы с двумя источниками шума, один из которых внешний, другой – внутренний, являются актуальными объектами исследования.

Образом указанной физической системы может служить частица на «пружине», совершающая одномерное движение. При своем движении во внешнем флуктуирующем потенциале частица вызывает изменения в состоянии тепловой бани, которая, в свою очередь, также воздействует на нее. Можно принять, что частица находится под влиянием внешнего шума и внутреннего шума, модифицированного внешним, что приводит к появлению взаимной корреляции. Известно, что она играет важную роль в одномодовом лазере [129-130], в явлениях индуцированного шумом транспорта классических [131-133] и квантовых [134] частиц, резонансной активации [135], стохастического резонанса [136-139], фазовых переходов в пространственно-распределенных системах [140]. В [141-143] изучаются различные нелинейные стохастические системы с двумя гауссовскими белыми шумами; показывается, что аддитивный шум, коррелированный или некоррелированный с мультипликативным шумом, мо-

жет индуцировать неравновесные переходы. В [144] рассматривается бистабильная система с экспоненциальной корреляцией между белыми шумами; устанавливается, что при определенных значениях времени корреляции в системе параметр корреляции индуцирует последовательность двух неравновесных переходов. Неравновесные переходы, индуцированные взаимной корреляцией белых гауссовских шумов (каждый шум в отдельности не вызывает переходы, но вместе, благодаря взаимной корреляции, индуцируют), изучены в [145] на примерах простых модельных пространственно-однородных стохастических систем с одним устойчивым состоянием. Особенности влияния взаимной корреляции двух белых шумов на индуцированные шумом неравновесные переходы в нелинейных сильно затухающих осцилляторах ранее не изучались.

3.2.2 Обоснование модели

Рассматривается затухающий нелинейный осциллятор, физической реализацией которого являются, например, значительные упругие поперечные смещения центров масс нанобалок (см. рисунок 3.1). Детерминированное уравнение имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \alpha x^2 + \beta x^3 = 0,$$

где $x(t)$ – координата центра масс; λ – коэффициент затухания; ω_0 – частота собственных колебаний; α и β – некоторые параметры. Ограничимся случаем сильного затухания осциллятора, что позволяет пренебречь его инерционными свойствами. Это приближение применимо, если коэффициент затухания намного больше частоты собственных колебаний, т.е. $\lambda \gg \omega_0$, и соответствует движению в достаточно вязкой среде. Соответствующее уравнение движения записывается в новом масштабе времени, для которого коэффициент при кубическом члене равняется единице

$$\dot{x} = -ax - bx^2 - x^3 \quad (a > 0 \text{ и } b > 0).$$

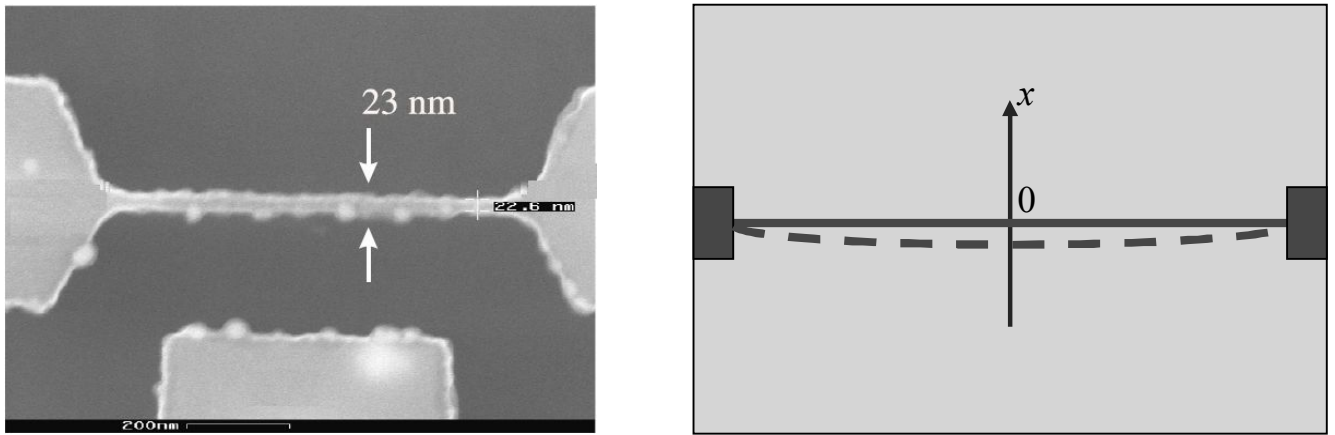


Рисунок 3.1 – Нанобалка. Фотография приведена из [20].

Предполагая, что выполняются условия $a \gg b$ и $b \ll 1$, вводятся флуктуации параметров при квадратичном члене и скорости (флуктуации параметра при линейном члене пренебрегаются). Уравнение Ланжевена принимает вид

$$\dot{x} = -ax - b[1 - \xi_1(t)]x^2 - x^3 + \xi_2(t), \quad (3.17)$$

где $\xi_1(t)$ – мультипликативный шум (флуктуации, вызванные случайностями в эффективной “пружине”); $\xi_2(t)$ – аддитивный шум (случайная сила, обусловленная толчками со стороны окружающих частицу молекул). Если время релаксации системы (a^{-1} в линейном приближении) много меньше времени релаксации источников шума, тогда применимо приближение белого шума, т.е. шума с нулевым временем корреляции. В большинстве случаев флуктуации обусловлены множеством факторов, что приводит к гауссовским распределениям. Таким образом, принимается, что $\xi_i(t)$ – внешние гауссовские белые шумы, средние значения которых равняются нулю, а корреляционные функции имеют вид

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\Delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (3.18)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций шумов; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; матрица Δ_{ij} записывается в следующей форме:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & r\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \\ r\sqrt{\Delta_1\Delta_2} & \Delta_2 \end{pmatrix},$$

$\Delta_1 (\geq 0)$ и $\Delta_2 (\geq 0)$ – интенсивности шумов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, соответственно; r – коэффициент корреляции между $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Если записывать уравнение Ланжевена (3.17) в каноническом виде

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^2 g_i(x(t))\xi_i(t), \quad (3.19)$$

тогда $f(x) = -ax - bx^2 - x^3$, $g_1(x) = bx^2$, $g_2(x) = 1$.

3.2.3 Равновесная плотность вероятности

Динамику частиц можно описывать через плотность вероятности для состояний, удовлетворяющую уравнению Фоккера-Планка. В случае мультипликативных Гауссовских белых шумов существует бесконечное число уравнений Фоккера-Планка, соответствующих уравнению Ланжевена (3.19). Для того чтобы установить однозначное соответствие, примем, что каждый гауссовский белый шум $\xi_i(t)$ характеризуется своим собственным параметром γ_i ($0 \leq \gamma_i \leq 1$), определяющим моменты времени, в которых вычисляются значения мультипликативной функции $g_i(x(t))$ в соответствующей интегральной сумме. Уравнение Фоккера-Планка имеет вид [145]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + h(x)]P(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} d(x)P(x, t), \quad (3.20)$$

где $h(x)$ – индуцированный шумом коэффициент сноса,

$$h(x) = 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \gamma_i \Delta_{ij} g'_i(x) g_j(x);$$

$d(x)$ – коэффициент диффузии,

$$d(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta_{ij} g_i(x) g_j(x).$$

Так как статистические характеристики (средние значения и интенсивности) флуктуаций принимаются постоянными во времени, то можно ожидать, что по истечении достаточно долгого времени стохастическая система, описываемая уравнением Ланжевена (3.19), достигнет стационарного состояния. Это означает, что при $t \rightarrow \infty$ устанавливается стационарная плотность вероятности $P_{st}(x)$, которая не зависит от времени. На практике стационарное состояние устанавливается для моментов времени, значительных в сравнении со временем релаксации системы.

Учитывая, что для рассматриваемого случая с одним мультипликативным шумом выполняется соотношение $h(x) = \gamma_1 d'(x)$, и, принимая естественные граничные условия, записывается равновесная плотность вероятности в виде

$$P_{st}(x) = \frac{1}{Z d^{1-\gamma_1}(x)} \exp \left[\int_0^x dy \frac{f(y)}{d(y)} \right], \quad (3.21)$$

где Z – нормирующий множитель. Определяется коэффициент диффузии, соответствующий уравнению (3.17)

$$d(x) = \Delta_1 b^2 (x^4 + 2rvx^2 + v^2),$$

где $v = (1/b) \sqrt{\Delta_2/\Delta_1}$.

Подставляя его в (3.21), записывается равновесная плотность вероятности:

$$P_{st}(x) = C (x^4 + 2rvx^2 + v^2)^{\gamma_1-1} \exp \left(- \frac{1}{\Delta_1 b^2} \int_0^x dy \frac{ay + by^2 + y^3}{y^4 + 2rvy^2 + v^2} \right). \quad (3.22)$$

Так как в данной задаче белый шум – модель реального шума с конечным временем корреляции, то параметр γ_1 для мультипликативного шума $\xi_1(t)$ принимается равным $1/2$, что соответствует исчислению Стратоновича. С другой сторо-

ны, не должно быть качественных различий между равновесными плотностями вероятности, как в исчислении Стратоновича, так и в исчислении Ито с параметром γ_1 , равным 0. В противном случае, такого рода расхождения свидетельствуют о неправильно выбранной процедуре описания системы.

3.2.4 Параметры порядка

Изучается влияние взаимной корреляции шумовых источников на наиболее вероятные равновесные состояния системы, которые служат параметрами порядка. Для этого записывается уравнение $P'_{st}(x) = 0$, которое определяет локальные точки экстремума равновесной плотности вероятности (3.21):

$$f(x) + d'(x)(\gamma_1 - 1) = 0. \quad (3.23)$$

Исследуется возможность существования неравновесных переходов, индуцированных взаимной корреляцией белых шумов, в стохастической системе, описываемой уравнением (3.17). При этом обращается внимание на то, чтобы каждый шум в отдельности эти переходы не вызывал. Это означает, что для $r = 0$ уравнение (3.23) имеет такое же самое число корней, как и уравнение $f(x) = 0$, т.е. некоррелированные шумы не изменяют число наиболее вероятных состояний системы. А при некотором значении $r = r_{cr}$ ($r_{cr} \neq 0$ и $-1 \leq r_{cr} \leq 1$) число локальных максимумов равновесной плотности вероятности $P_{st}(x)$ является различным при $r = r_{cr} - 0$ и при $r = r_{cr} + 0$. Наиболее вероятные состояния системы не соответствуют ее стационарным состояниям в детерминированном случае, т.е. при $r = r_{cr}$ происходит индуцированный взаимной корреляцией шумов неравновесный переход.

Уравнение, определяющее точки экстремума плотности вероятности (3.22) имеет вид

$$x \left(x^2 + \frac{b}{1+\rho} x + \frac{a + \rho vr}{1+\rho} \right) = 0, \quad (3.24)$$

где $\rho = 4(1 - \gamma_1)\Delta_1 b^2$. Вначале исследуется это уравнение при $r = 0$. Дискриминант квадратного уравнения равен

$$D = \frac{b^2}{(1 + \rho)^2} - \frac{4a}{1 + \rho}.$$

Учитывая предположения о параметрах, приходим к выводу, что дискриминант всегда отрицательный. Уравнение (3.24) имеет единственный корень $x = 0$, наиболее вероятное равновесное состояние осциллятора соответствует точке устойчивого равновесия детерминированной системы, т.е. некоррелированные шумы не вызывают неравновесные переходы. В случае $r \neq 0$ дискриминант равен

$$D = \frac{b^2}{(1 + \rho)^2} - \frac{4(a + \rho vr)}{1 + \rho}.$$

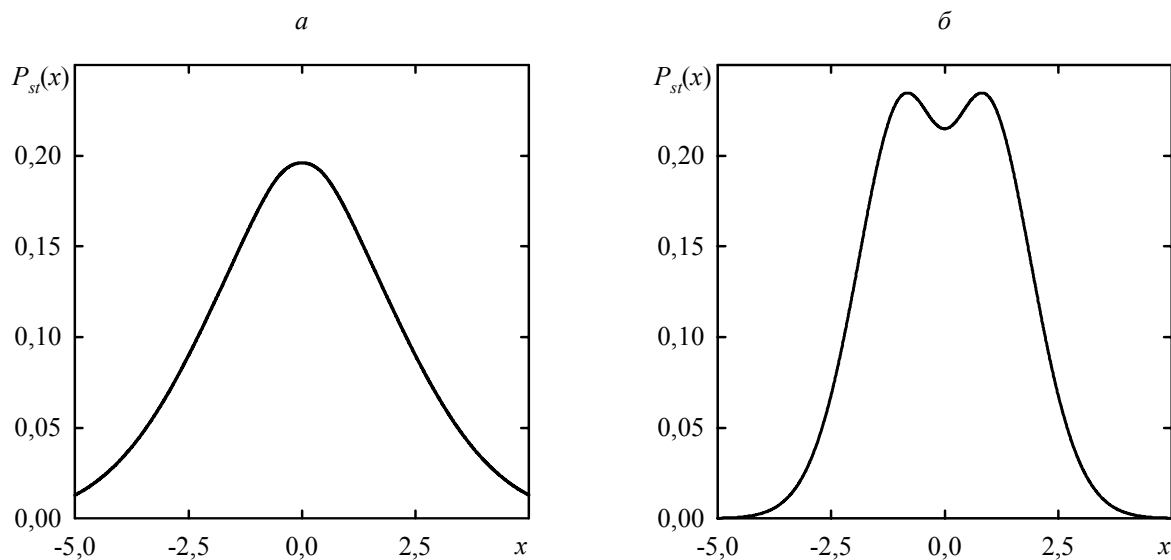
Приравнивая его к нулю, определяем критическое значение для корреляции

$$r_{cr} = \frac{b^2 - 4a - 4a\rho}{4\rho v(1 + \rho)}.$$

Далее, учитывая предположения о параметрах, пренебрегаем в числителе b :

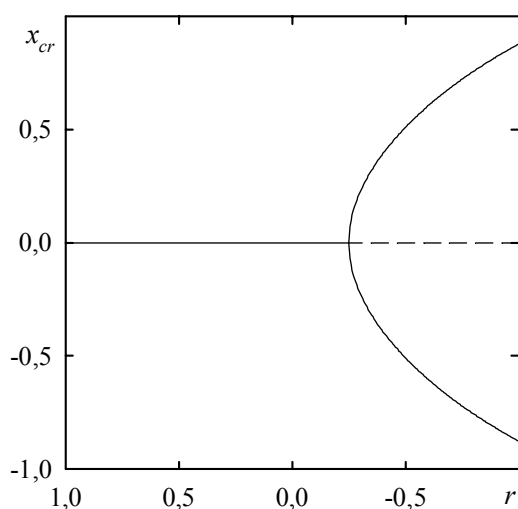
$$r_{cr} = -\frac{a}{\rho v}.$$

И, наконец, вводя параметр $\eta = \rho/a$, окончательно получим, что $r_{cr} = -1/\eta v$. При $r > r_{cr}$ уравнение (3.24) имеет единственный действительный корень $x = 0$, и равновесная плотность вероятности (3.22) является одномодальной, как показано на рисунке 3.2а. При $r < r_{cr}$ (это условие может быть выполнено, если имеет место неравенство $|r_{cr}| < 1$) уравнение (3.24) имеет три корня, и равновесная плотность вероятности (3.22) – бимодальная как на рисунке 3.2б. Следовательно, при $r = r_{cr}$ происходит одномодальный-бимодальный переход. Одномодальный-бимодальный неравновесный переход имеет отличительную особенность, а именно, глобальный максимум $P_{st}(x)$ трансформируется в локальный минимум в точке перехода $r = r_{cr}$. Бифуркационная диаграмма представлена на ри-



сунке 3.3.

Рисунок 3.2 – Равновесная плотность вероятности при значениях $\eta = 2$, $\nu = 2$,



$\gamma_1 = 0,5$ ($r_{cr} = -0,25$): а) $r = 0$; б) $r = -0,9$.

Рисунок 3.3 – Диаграмма бифуркации удвоения, соответствующая одномодальному-бимодальному переходу, индуцированному параметром корреляции ($\eta = 2$, $\nu = 2$, $\gamma_1 = 0,5$ $r_{cr} = -0,25$).

Нужно отметить, что формально, положив параметр b восстанавливаю-

щей силы в уравнении (3.17) меньшим нуля, неравновесные переходы будут наблюдаться при положительной взаимной корреляции шумовых источников.

3.2.5 Эффективный потенциал

Равновесную плотность вероятности (3.21) можно представить в виде экспоненциального распределения Больцмана, $P_{st}(x) \sim \exp[-U_{ef}(x)]$, где $U_{ef}(x)$ – эффективный потенциал. Он записывается в следующем виде:

$$U_{ef}(x) = -\int_0^x dy \frac{f(y)}{d(y)} + (1 - \gamma_1) \ln d(x). \quad (3.25)$$

При $r = 0$ эффективный потенциал совпадает с детерминированным потенциалом $U(x)$. А при $r = r_{cr}$ число его локальных минимумов изменяется, что свидетельствует о неравновесном переходе, индуцированном взаимной корреляцией шумов.

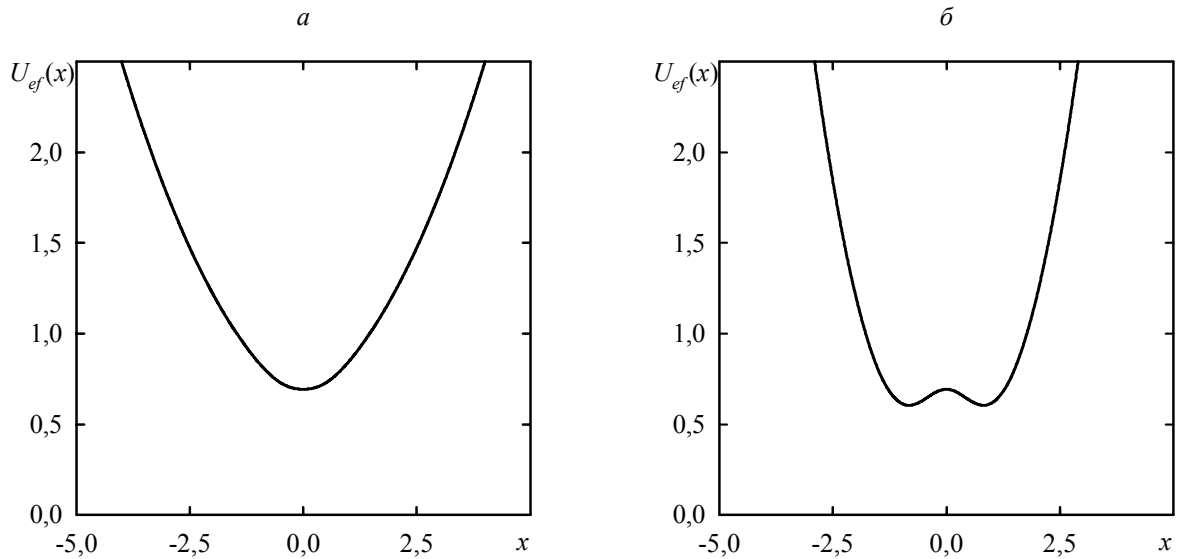
Выражение для эффективного потенциала, соответствующего плотности вероятности (3.22), имеет вид

$$U_{ef}(x) = \frac{1}{\Delta_1 b^2} \int_0^x dy \frac{ay + by^2 + y^3}{y^4 + 2rvy^2 + v^2} + (1 - \gamma_1) \ln[\Delta_1 b^2 (x^4 + 2rvx^2 + v^2)].$$

Его графики представлены на рисунке 3.4. При $r > r_{cr}$ эффективный потенциал имеет один минимум (как показано на рисунке 3.1а), а при $r < r_{cr}$ – два минимума (как показано на рисунке 3.4б).

3.3 Выводы к разделу 2

1. Изучено явление индуцированных шумом неравновесных переходов в нелинейном осцилляторе с сильным затуханием путем анализа уравнения Ланжевена с взаимно-коррелированными гауссовскими белыми шумами, один из которых – мультипликативный, а другой – аддитивный. Записано соответ-



вующее уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности состояний системы, из которого получены равновесная плотность вероятности, эффективный потенциал и параметры порядка.

Рисунок 3.4 – Эффективный потенциал при значениях параметров $\eta = 2$, $\nu = 2$, $a = 1$, $\gamma_1 = 0,5$ ($r_{cr} = -0,25$): а) $r = 0$; б) $r = -0,9$.

2. Исследование влияния взаимной корреляции шумовых источников на равновесные состояния нелинейного сильно затухающего осциллятора показывает, что изменение интенсивности взаимной корреляции шумов может приводить к качественному изменению равновесной плотности вероятности, а именно к одно-модальному-бимодальному неравновесному переходу, индуцированному шумом.

3. Исследовано диффузионного поведения классических частиц в реалистичной случайной среде, обладающей фрактальными свойствами, достигается путем анализа уравнения Ланжевена с мультипликативным гауссовским цветным шумом, характеризующимся произвольной корреляционной функцией. Принимается, что мультипликативная функция зависит как от координаты частицы, так и от времени по степенному закону.

4. Установлено, что для специального класса систем с линейным мультипликативным шумом характер диффузионного поведения может определяться интенсивностью Δ цветного шума. Показано, что существует критическое значение

интенсивности Δ_{cr} такое, что при $\Delta < \Delta_{cr}$ имеет место субдиффузия, при $\Delta = \Delta_{cr}$ – нормальная диффузия, а при $\Delta > \Delta_{cr}$ – супердиффузия. Впервые это явление было обнаружено для эффективного гауссовского белого шума [127].

4 ВОЗБУЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗАМОРОЖЕННЫЙ ДИХОТОМИЧЕСКИЙ БЕСПОРЯДОК

4.1 Общие положения

Одномерное уравнение движения для классических частиц в сверхзатухающем пределе представляет собой простую и, в то же время, очень полезную модель для изучения многих физических, биологических, экономических и других систем. В зависимости от характера сил, действующих на частицы, это уравнение служит основой для описания различных явлений в этих системах. В частности, если вынуждающее силовое поле содержит случайную составляющую, связанную с влиянием окружения, оно описывает множество явлений, вызванных шумом, в том числе индуцированные шумом переходы [2], направленный транспорт [146, 147], аномальную диффузию в неупорядоченных средах [35, 36] и стохастический резонанс [148]. Следует отметить, что в некоторых случаях, особенно в рамках приближения белого шума, статистические свойства решения этого уравнения могут быть получены аналитически.

Если среда случайно неоднородна, тогда вынуждающее силовое поле содержит случайные функции пространственных переменных. В этом случае сверхзатухающая динамика будет демонстрировать эффекты, вызванные как шумом, так и неоднородностями среды. При этом аномальное поведение системы может наблюдаться даже в простейшей ситуации аддитивного белого шума [36]. В последнем случае точные результаты были получены для беспорядка Синая [149-152], гауссова беспорядка [153-157], а также для ряда особых случаев не гауссова беспорядка [158-162].

Когда шумовая составляющая, обусловленная случайным окружением, становится незначительной, уравнения движения в сверхзатухающем пределе учитывают исключительно эффекты замороженного беспорядка. Это уравнение эффективно описывает, например, транспорт частиц в детерминистических

рэгчетах с замороженным беспорядком [22-24] и может быть использовано для изучения динамики локализованных структур, таких как доменные границы в случайных магнетиках и вихри в сверхпроводниках второго рода. Несмотря на то, что случайная составляющая, зависящая от времени, отсутствует, существует только несколько точных результатов в этой области. В настоящее время данная проблематика исследуется преимущественно численно или с использованием асимптотических методов. Данная же работа посвящена поиску точного аналитического описания статистических характеристик частиц, находящихся в среде с замороженным дихотомическим беспорядком.

4.2 Аналитически разрешимые модели с дихотомическим беспорядком

4.2.1 Модель и основные соотношения

Рассмотрим сверхзатухающую динамику классических частиц, которая подчиняется уравнению движения, записанному в безразмерном виде [163]

$$\dot{X}_t = f + g(X_t). \quad (4.1)$$

Здесь X_t обозначает координату частицы, $f (> 0)$ – постоянная сила и $g(x) = -dU(x)/dx = \pm g$ – дихотомическая случайная сила, создаваемая кусочно-линейным случайным потенциалом $U(x)$ (см. рисунок 4.1). Предполагается, что случайные интервалы s_j линейных участков $U(x)$ статистически независимы и распределены с такой же (экспоненциальной) плотностью вероятности $p(s)$. Кроме того, мы предполагаем, что имеют место условия $f > g$ и $g(+0) = -g$. В начальный момент времени частицы находятся в начале координат, а все реализации случайного потенциала $U(x)$ в начале координат являются возрастающими, $dU(x)/dx|_{x=+0} = +g$, поэтому

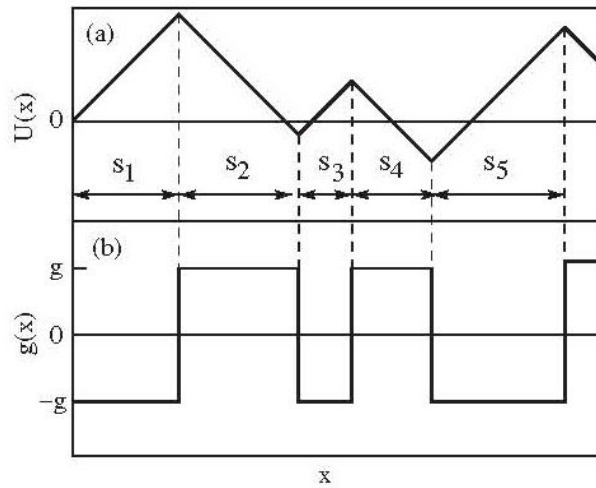


Рисунок 4.1 – Схематическое представление а) кусочно-линейного случайного потенциала $U(x)$ и б) соответствующей дихотомической случайной силы $g(x) = -dU(x)/dx$ как функции координаты x .

$$X_0 = 0, \quad g(+0) = -g. \quad (4.2)$$

В этом предположении нетривиальное решение уравнения (4.1) существует, если $f > g$. В противном случае частицы остаются локализованными в начале координат.

Уравнение (4.1) имеет минимальную форму, которая учитывает эффекты замороженного беспорядка при сверхзатухающем движении частиц. Его главное преимущество заключается в том, что многие статистические свойства X_t можно полностью описать аналитически. В частности, с его помощью можно исследовать многие важные физические явления, такие как низкотемпературный электрический ток через слоистые среды, толщина слоев которых случайна, а также распространения света в межзвездном пространстве.

Целью представленных исследований является установление явного вида плотности вероятности $P_t(x)$ того, что $X_t = x$ для момента времени t . Для решения поставленной задачи исходим из определения $P_t(x)$ в виде

$$P_x(t) = \langle \delta(x - X_t) \rangle, \quad (4.3)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по траекториям $g(x)$, а $\delta(x - X_t)$ является δ -функцией Дирака. Далее введем общую вероятность $W_n(t)$ того, что в данной реализации функции $g(x)$ на интервале $(0, X_t)$ имеется n (≥ 1) смен знаков (переходов $g \leftrightarrow -g$). В этом случае координата частицы X_t между n -ым и $(n+1)$ -ым скачками $g(x)$ может быть записана как

$$X_t = \sum_{j=1}^n s_j + \tilde{s}_{n+1}, \quad (4.4)$$

где $\tilde{s}_{n+1} < s_{n+1}$. В соответствии с (4.1) частица преодолевает расстояние s_j за время $s_j/[f + (-1)^j g]$, поэтому справедливо выражение

$$\sum_{j=1}^n \frac{s_j}{f + (-1)^j g} + \frac{\tilde{s}_{n+1}}{f + (-1)^{n+1} g} = t. \quad (4.5)$$

Это означает, что

$$\tilde{s}_{n+1} = [f + (-1)^{n+1} g] \left(t - \sum_{j=1}^n \frac{s_j}{f + (-1)^j g} \right). \quad (4.6)$$

Условие

$$\sum_{j=1}^n \frac{s_j}{f + (-1)^j g} \leq t, \quad (4.7)$$

являющееся следствием условия $\tilde{s}_{n+1} \geq 0$, определяет в n -мерном пространстве параметров s_j область $\Omega_n(t)$ разрешенных значений s_j . Следовательно, поскольку вероятность того, что $(n+1)$ -ый скачок $g(x)$ имеет место при $\tilde{s}_{n+1} < s$, равна

$\int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds$, можно получить

$$W_n(t) = \int_{\Omega_n(t)} \left(\prod_{j=1}^n ds_j p(s_j) \right) \int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds. \quad (4.8)$$

Если функция $g(x)$ не содержит скачков на интервале $(0, X_t)$, т. е. если $n = 0$, об-

щая вероятность реализации такой траектории задается выражением

$$W_0(t) = \int_{\tilde{s}_1}^{\infty} p(s) ds, \quad (4.9)$$

где $\tilde{s}_1 = (f - g)t$. Отметим, что вероятности $W_0(t)$ и $W_n(t)$ нормированы на единицу: $W_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) = 1$ (см. Приложение А).

Вышеуказанные результаты совместно с (4.3) показывают, что функция распределения вероятностей может быть записана в виде

$$P_t(x) = \delta[x - (f - g)t]W_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} P_t^{(n)}(x), \quad (4.10)$$

где

$$P_t^{(n)}(x) = \int_{\Omega_n(t)} \left(\prod_{j=1}^n ds_j p(s_j) \right) \int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds \delta \left(x - \sum_{j=1}^n s_j - \tilde{s}_{n+1} \right). \quad (4.11)$$

Эти выражения являются представлением плотности вероятности $P_t(x)$ в виде интеграла по траекториям в случае дихотомической случайной силы $g(x)$. Здесь под траекторией следует понимать конкретную реализацию случайной функции $g(x)$. Подчеркнем, что данное представление есть достаточно общим и остается справедливым для произвольных плотностей $p(s)$ распределений случайных интервалов s_j .

4.2.2 Зависящая от времени функция плотности вероятности

Результат, выражаемый формулой (4.10), в силу математической сложности не удобен в использовании. Основная сложность заключается в необходимости интегрирования по n -мерной области $\Omega_n(t)$, а также суммирования по всем n . В настоящем исследовании эта проблема решена для случая, когда длины случайных интервалов s_j распределены экспоненциально с плотностью $p(s) = \lambda \exp(-\lambda s)$, где λ^{-1} имеет смысл среднего значения для интервалов s_j . Ключ-

чевым моментом приближения, которое используется для достижения цели, является интегральное представление единичной функции Хевисайда [164]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(iz+y)\kappa}}{iz+y} dz = \begin{cases} 1, \kappa > 0 \\ 0, \kappa < 0 \end{cases}. \quad (4.12)$$

Здесь y – положительный действительный параметр. Если преобразовать выражение (4.11) с использованием соотношения (4.12), полагая что

$$\kappa = t - \sum_{j=1}^n s_j / [f + (-1)^j g], \quad (4.13)$$

получим

$$P_t^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\exp[(iz+y)t]}{iz+y} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n ds_j p(s_j) \exp[-(iz+y)s_j / (f + (-1)^j g)] \right) \times \\ \times \int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds \delta \left(x - \sum_{j=1}^n s_j - \tilde{s}_{n+1} \right). \quad (4.14)$$

Несмотря на то, что в (4.14) содержатся кратные интегралы, эта форма представления $P_t^{(n)}(x)$ является более удобной по сравнению с (4.11), поскольку интегрирование в (4.14) производится по n независимым переменным s_j . Используя интегральное представление дельта-функции Дирака

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\eta x] d\eta, \quad (4.15)$$

а также принимая во внимание, что согласно (4.5)

$$\sum_{j=1}^{2m} s_j + \tilde{s}_{2m+1} = (f - g)t + \frac{2g}{f + g} \sum_{j=1}^m s_{2j}, \quad (4.16)$$

выражение (4.14) при $p(s) = \lambda \exp(-\lambda s)$ и $n = 2m$ может быть переписано в виде

$$P_t^{(2m)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp[-i\eta(x - (f - g)t)] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{iz + y} \exp[(iz + y - \lambda(f - g))t] I^m(v_1) I^m(v_2). \quad (4.17)$$

Здесь

$$I(v) = \int_0^{\infty} p(s) \exp[-(v - \lambda)s] ds = \frac{\lambda}{v}, \quad (4.18)$$

причем $\text{Re}(v) > 0$ и

$$v_1 = \frac{iz + y}{f - g}, \quad v_2 = \frac{iz + y + 2g(\lambda - i\eta)}{f + g}. \quad (4.19)$$

Аналогичным образом, поскольку

$$\sum_{j=1}^{2m-1} s_j + \tilde{s}_{2m+1} = (f + g)t - \frac{2g}{f - g} \sum_{j=1}^m s_{2j-1}, \quad (4.20)$$

выражение (4.14) для $n = 2m - 1$ приобретает вид

$$P_t^{(2m-1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp[-i\eta(x - (f + g)t)] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{iz + y} \exp[(iz + y - \lambda(f + g))t] I^m(v_3) I^{m-1}(v_4), \quad (4.21)$$

где

$$v_3 = \frac{iz + y - 2g(\lambda - i\eta)}{f - g}, \quad v_4 = \frac{iz + y}{f + g}. \quad (4.22)$$

Пользуясь методом контурного интегрирования, можно показать, что интегралы по переменной z в выражениях (4.17) и (4.21) не зависят от действительного положительного параметра y . Это значит, что в соответствии с определением (4.11), частные плотности вероятностей $P_t^{(2m)}(x)$ и $P_t^{(2m-1)}(x)$ также не зависят от параметра y . Таким образом, для расчета плотности вероятности $P_t(x)$ мы можем использовать наиболее удобное значение y . В частности, если перед

выполнением процедуры интегрирования по z сначала произвести суммирование по m , целесообразно выбрать $y > \lambda(f - g)$, чтобы избежать расходимости сумм и интегралов. В этом случае условие $\operatorname{Re}(v_k) > \lambda$ выполняется при всех k , и, следовательно, имеет место неравенство $|I(v_k)| < 1$, которое позволяет воспользоваться формулой суммирования геометрической прогрессии для вычисления сумм рядов

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} I^m(v_1)I^m(v_2) &= \frac{I(v_1)I(v_2)}{1 - I(v_1)I(v_2)}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} I^m(v_3)I^{m-1}(v_4) &= \frac{I(v_3)}{1 - I(v_3)I(v_4)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Далее, осуществляя замену $W_0(t) = \exp[-\lambda(f - g)t]$, а также

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_t^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [P_t^{(2n)}(x) + P_t^{(2n-1)}(x)] \quad (4.24)$$

в уравнении (4.10) и учитывая вышеприведенные результаты, получим плотность вероятности $P_t(x)$ в виде интеграла Фурье

$$P_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\eta) \exp[-i\eta x] d\eta, \quad (4.25)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_t(\eta) = & -\frac{\exp[-(\lambda - i\eta)ft]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{iz + y + 2g(\lambda - i\eta)}{(z - z_1)(z - z_2)} \exp[(\lambda - i\eta)gt] + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda(f - g)}{(z - z_3)(z - z_4)} \exp[-(\lambda - i\eta)gt] \right] \exp[(iz + y)t] dz \end{aligned} \quad (4.26)$$

– характеристическая функция X_t ,

$$\begin{aligned} z_1 &= g\eta + a(\eta) + i[y + \lambda g + b(\eta)], \\ z_2 &= g\eta - a(\eta) + i[y + \lambda g - b(\eta)], \\ z_3 &= -g\eta + a(\eta) + i[y - \lambda g + b(\eta)], \\ z_4 &= -g\eta - a(\eta) + i[y - \lambda g - b(\eta)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

и $a(\eta) = \lambda g^2 \eta / b(\eta)$,

$$b(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \lambda^2 f^2 - g^2 \eta^2 + \left[(\lambda^2 f^2 - g^2 \eta^2)^2 + 4\lambda^2 g^4 \eta^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (4.28)$$

В итоге, вычисляя интеграл в (4.26) методом контурного интегрирования (см. Приложение В), находим характеристическую функцию $\phi_t(\eta)$, выраженную в элементарных функциях

$$\phi_t(\eta) = e^{-(\lambda - i\eta)ft} \left(\frac{\lambda f - ig\eta}{b(\eta) - ia(\eta)} \sinh[b(\eta)t - ia(\eta)t] + \cosh[b(\eta)t - ia(\eta)t] \right). \quad (4.29)$$

Как и ожидалось, характеристическая функция не зависит от вспомогательного параметра y . Функции $a(\eta)$ и $b(\eta)$ при $|\eta| \rightarrow \infty$ стремятся к $g\eta$ и к λg , соответственно. В соответствии с этим, $\phi_t(\eta) \sim \exp[i\eta(f - g)t]$ при $|\eta| \rightarrow \infty$, а, значит, плотность вероятности $P_t(x)$ имеет сингулярную часть, пропорциональную δ -функции Дирака. Следовательно

$$P_t(x) = \exp[-\lambda(f - g)t] \delta(x - (f - g)t) + \tilde{P}_t(x), \quad (4.30)$$

где

$$\tilde{P}_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_t(\eta) \exp[-i\eta x] d\eta, \quad (4.31)$$

$$\tilde{\phi}_t(\eta) = \phi_t(\eta) - \exp[-(f - g)(\lambda - i\eta)t], \quad (4.32)$$

и $\tilde{\phi}_t(\eta) \rightarrow 0$ при $|\eta| \rightarrow \infty$. Выражения (4.29) – (4.32) описывают плотность вероятности $P_t(x)$ в более простой и удобной форме по сравнению с (4.10) и (4.11) и являются основными результатами данной части работы. Это первый пример полного аналитического описания статистических свойств нетривиальных систем с замороженным беспорядком.

Изложенный подход может быть также использован для нахождения плотности вероятности $P_t(x)$ в случае, когда дихотомическая случайная функция $g(x)$ характеризуется другими начальными статистическими свойствами. В

частности, можно задать условия $g(+0) = -g$ с вероятностью p_1 и $g(+0) = +g$ с вероятностью p_2 ($p_1 + p_2 = 1$). В этом случае искомая плотность вероятности будет задаваться выражением

$$R_t(x) = p_1 P_t(x) + p_2 P_t(x) \Big|_{g \rightarrow -g}. \quad (4.33)$$

4.2.3 Моменты плотности вероятности

Моменты плотности вероятности

$$\langle X_t^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P_t(x) dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.34)$$

выражаются через характеристическую функцию известным способом

$$\langle X_t^k \rangle = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\eta^k} \phi_t(\eta) \Big|_{\eta=0}. \quad (4.35)$$

В принципе, с помощью определения (4.35) и выражения (4.29) моменты можно вычислить непосредственно. В частности, для первого момента можно записать

$$\langle X_t \rangle = \frac{f^2 - g^2}{f} t - \frac{g(f - g)}{2\lambda f^2} (1 - \exp[-2\lambda f t]). \quad (4.36)$$

В случае малых времен, для которых справедливо условие $t \ll 1/\lambda f$, последнее выражение обращается в $\langle X_t \rangle = (f - g)t$. Этот факт имеет простую интерпретацию: на малых временах условие $g(X_t) = -g$ выполняется с практически единичной вероятностью, и практически с вероятностью 1 частицы будут двигаться с безразмерной скоростью $f - g$. Если $t \gg g/\lambda f^2$, то (4.36) преобразуется к виду $\langle X_t \rangle = (f^2 - g^2)t/f$, т.е. скорость частиц на больших расстояниях $\langle v \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle X_t \rangle / t$, что соответствует $(f^2 - g^2)/f$ (см. рис. 4.2, а). Для того, чтобы объяснить в дальнейшем этот результат, обозначим общую длину четных отрезков,

которые принадлежат интервалу $(0, \langle X_t \rangle)$, через s_{2m} , а нечетных – как s_{2m-1} . Как s_{2m} , так и s_{2m-1} стремятся к $\langle X_t \rangle/2$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, общее время, которое частица проводит либо в области четного, либо в области нечетного отрезков, определяется в виде

$$t_- = \langle X_t \rangle/2(f - g), \quad t_+ = \langle X_t \rangle/2(f + g). \quad (4.37)$$

Поскольку $t_+ + t_- = t$, несложно увидеть, что в пределе больших времен

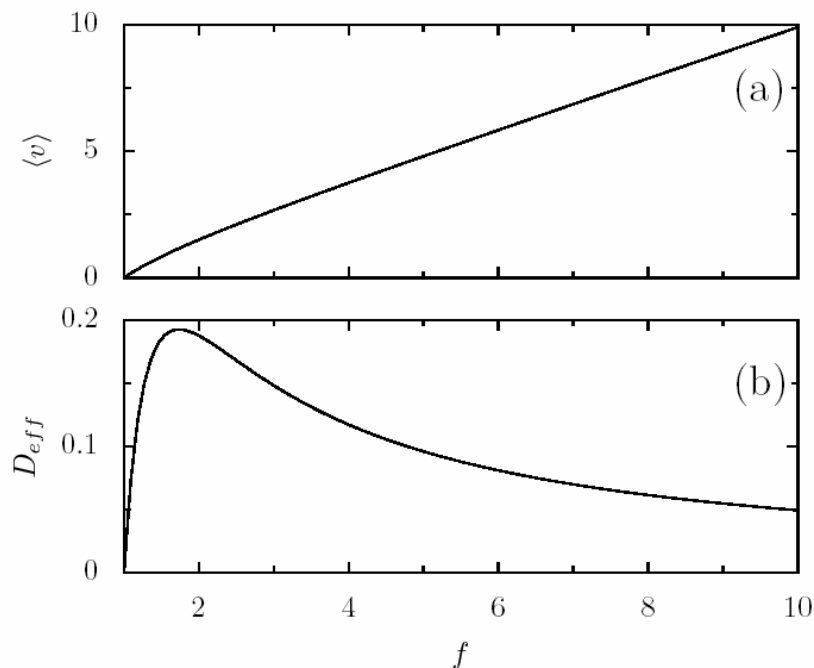


Рисунок 4.2 – Поведение средней скорости $\langle v \rangle$ (а) и эффективного коэффициента диффузии D_{eff} (б) в зависимости от внешней силы для значений параметров $\lambda = g = 1$.

средняя скорость составляет $\langle v \rangle = (f^2 - g^2)/f$. Подчеркнем, что данный результат не зависит от вида плотности вероятности $p(s)$ распределения длин интервалов s_j .

Второй момент в соответствии (4.35) и (4.29) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \langle X_t^2 \rangle = & \frac{(f^2 - g^2)^2}{f^2} t^2 - \frac{g(f^2 - g^2)(f - 2g)}{\lambda f^3} t - \frac{g^2(f - g)(f + 3g)}{2\lambda^2 f^4} + \\ & + \frac{g(f - g)}{2\lambda^2 f^4} [2\lambda f(f^2 + g^2)t + g(f + 3g)] \exp[-2\lambda ft]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Как следствие, дисперсия $\sigma_t^2 = \langle X_t^2 \rangle - \langle X_t \rangle^2$ координаты X_t частицы принимает вид

$$\sigma_t^2 = \frac{g^2(f - g)}{2\lambda^2 f^4} [4\lambda f(f + g)t - 3f - 5g + 4(f + g + 2\lambda fgt)e^{-2\lambda ft} - (f - g)e^{-4\lambda ft}]. \quad (4.39)$$

На малых временах, когда $t \ll 1/\lambda f$, дисперсия σ_t^2 положения частицы растет как t^3 , $\sigma_t^2 = (4/3)\lambda g^2(f - g)t^3$, в то время как на больших временах, когда $t \gg 1/\lambda f$, она растет линейно со временем $\sigma_t^2 = g^2(f^2 - g^2)t/\lambda f^3$. Последнее доказывает, что частицы демонстрируют нормальную смещенную диффузию с эффективным коэффициентом D_{eff}

$$D_{eff} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_t^2}{2t} = \frac{g^2(f^2 - g^2)}{2\lambda f^3}. \quad (4.40)$$

Интересно, что D_{eff} изменяется монотонно с изменением внешней силы f : $D_{eff} = (f - g)/\lambda$ при $f \approx g$, $D_{eff} = g^2/2\lambda f$ при $f \gg g$ и $\max(D_{eff}) = g/(3^{3/2}\lambda)$ для $f = (3)^{1/2}g$, см. рисунок 4.2б.

4.2.4 Временная эволюция вероятности $P_t(x)$

В соответствии с выражениями (4.32) и (4.29) при $t = 0$ выполняется соотношение $\tilde{\phi}_0(\eta) = 0$, поэтому имеют место равенства $\tilde{P}_0(x) = 0$ и $P_0(x) = \delta(x)$. Этот результат есть прямое следствие начального условия $X_0 = 0$. При $t > 0$ плотность вероятности $P_t(x)$ содержит как сингулярную составляющую, пропорциональную δ -функции, так и регулярную составляющую. Наличие сингулярной со-

ставляющей обусловлено наличием конечной, ненулевой вероятности того, что случайная функция $g(x)$ не изменит знак на интервале $[0, (f - g)t]$. Общая вероятность реализации такой траектории $W_0(t) = \exp[-\lambda(f - g)t]$ определяет вклад сингулярной части и, поскольку частицы движутся со скоростью $f - g$, это распределение также движется вправо с такой же скоростью.

Так как $f - g$ и $f + g$ – это наименьшая и наибольшая скорости движения, регулярная часть плотности вероятности $\tilde{P}_t(x)$ определена на интервале $[(f - g)t, (f + g)t]$. Если координата x принадлежит этому интервалу, то $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(x) = \lambda(f - g)/2g$. Для малых, но конечных времен, $\tilde{P}_t(x)$ является линейной убывающей функцией x . С ростом t $\tilde{P}_t(x)$ трансформируется в унимодальную форму.

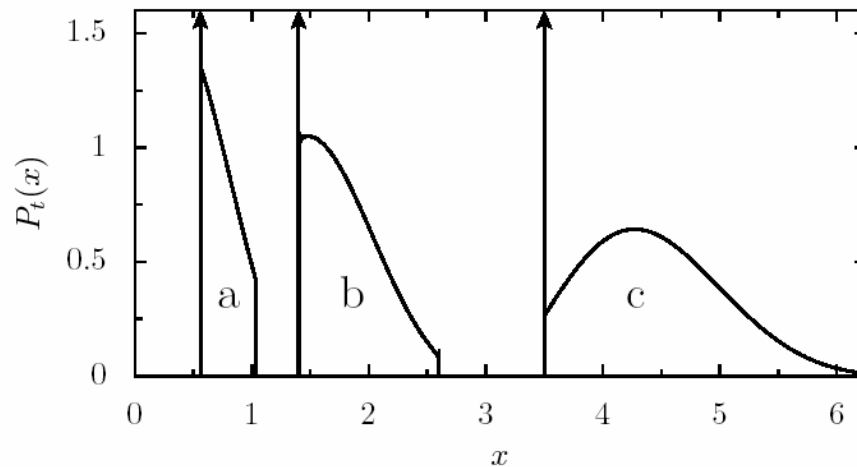


Рисунок 4.3 – Временная эволюция плотности вероятности $P_t(x)$ при следующих значениях параметров: $g = 0.3$; $f = 1$; $\lambda = 1$. (a) – $t = 0.75$; (b) – $t = 2$; (c) – $t = 5$. Вертикальная стрелка обозначает δ -сингулярность.

Эта особенность проиллюстрирована на рисунке 4.3. Чтобы проверить теоретические результаты, уравнение (4.1) было решено численно. Как видно из рисунка 4.4, они полностью подтверждаются численно.

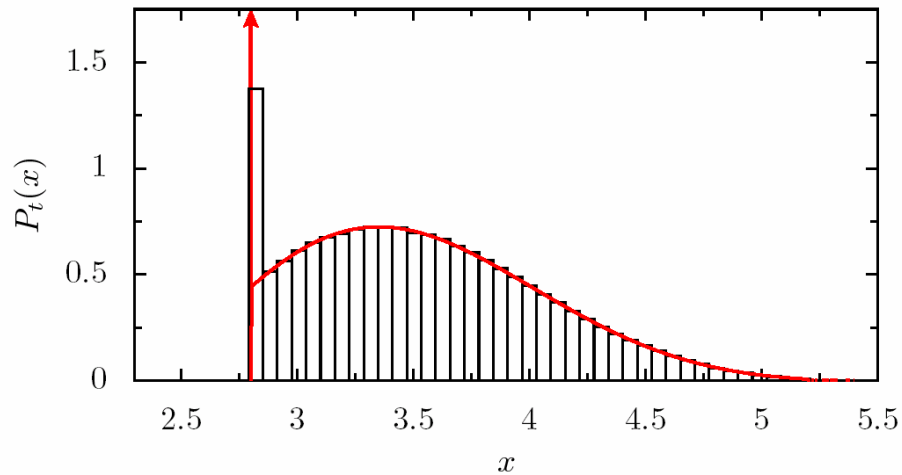


Рисунок 4.4 – Плотность вероятности $P_t(x)$, полученная теоретически и численно, при следующих значениях параметров: $g = 0.3$; $f = 1$; $\lambda = 1$, $t = 4$. Сплошная линия – теоретический результат, гистограмма – численный.

4.2.4.1 Асимптотическое поведение плотности вероятности $P_t(x)$

Основываясь на центральной предельной теореме теории вероятностей [38], следует ожидать, что плотность вероятности $P_t(x)$ будет приобретать форму нормальной (гауссовой) плотности при $t \rightarrow \infty$. Чтобы проанализировать поведение функции $P_t(x)$ на больших временах, рассмотрим масштабированную плотность вероятности

$$P'_t(\xi) = \sigma_t P_t(\langle X_t + \sigma_t \xi \rangle), \quad (4.41)$$

которая в соответствии с (4.25) может быть записана в форме

$$P'_t(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(u/\sigma_t) \exp(-iu\langle X_t \rangle/\sigma_t - iu\xi) du. \quad (4.42)$$

Полагая, что $|u| \ll \sigma_t^{1/3}$, и оставляя только первые два члена асимптотического разложения функции $\phi_t(u/\sigma_t) \exp[-iu\langle X_t \rangle/\sigma_t]$ при $t \rightarrow \infty$, получим

$$\phi_t(u/\sigma_t)\exp[-iu\langle X_t \rangle/\sigma_t] = e^{-u^2/2} \left[1 - i \frac{gu^3}{2\sqrt{\lambda f(f^2 - g^2)}t} \right]. \quad (4.43)$$

Производя замену в (4.41) согласно (4.43), получим

$$P'_t(\xi) = P'_\infty(\xi) + G_t(\xi), \quad (4.44)$$

где

$$P'_\infty(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-u^2/2 - iu\xi] du = \frac{\exp[-\xi^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.45)$$

– функция, задающая стандартное нормальное распределение, а

$$G_t(\xi) = -i \frac{g^2}{4\pi\lambda f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-u^2/2 - iu\xi] u^3 du = -\frac{g(3\xi - \xi^3)}{2\sqrt{\lambda f(f^2 - g^2)}t} P'_\infty(\xi) \quad (4.46)$$

($|G(\xi)|/P'_\infty(\xi) \ll 1$) описывает отклонение $P'_t(\xi)$ от $P'_\infty(\xi)$. Таким образом, $P'_t(\xi)$ медленно ($\sim t^{1/2}$) приближается к гауссовскому распределению при $t \rightarrow \infty$.

Количественно описать степень отклонения $P_t(x)$ от распределения Гаусса можно с помощью коэффициента эксцесса

$$k(t) = \frac{\langle (X_t - \langle X_t \rangle)^4 \rangle}{\sigma_t^4} - 3. \quad (4.47)$$

Примечательно, что $k(t)$ равен нулю, если X_t распределены по гауссовому закону. Эта временная зависимость вычислена с помощью выражения (4.35). Результат приведен на рисунке 4.5. В соответствии с центральной предельной теоремой, коэффициент эксцесса стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. На малых временах формула (4.30) преобразуется к виду

$$P_t(x) = [1 - \lambda(f - g)t] \delta[x - (f - g)t] + \frac{\lambda(f - g)}{2g}, \quad (4.48)$$

где $x \in [(f - g)t, (f + g)t]$. Для этой плотности вероятности можно получить $\langle (X_t - \langle X_t \rangle)^4 \rangle = (16/5)\lambda g^4 (f - g)t^5$, $\sigma_t^2 = (4/3)\lambda g^2 (f - g)t^3$, и, таким образом,

$k(t) = (9/5)[\lambda(f - g)t]^{-1}$ при $t \rightarrow 0$. Расходимость коэффициента эксцесса при $t \rightarrow 0$ подтверждает тот факт, что на малых временах плотность вероятности $P_t(x)$ сильно отличается от нормальной.

В то же время при $t \rightarrow \infty$ $P_t(x)$ асимптотически стремится к нормальному распределению с дисперсией $\sigma_t^2 \sim t$. Это позволяет сделать интересный вывод: при определенных условиях поведение рассматриваемых частиц в пределе больших времен аналогично поведению броуновских частиц. Чтобы пояснить это, рассмотрим безразмерное уравнение динамики броуновских частиц в пределе большого затухания

$$\dot{x}_t = F + \xi(t), \quad x_0 = 0. \quad (4.49)$$

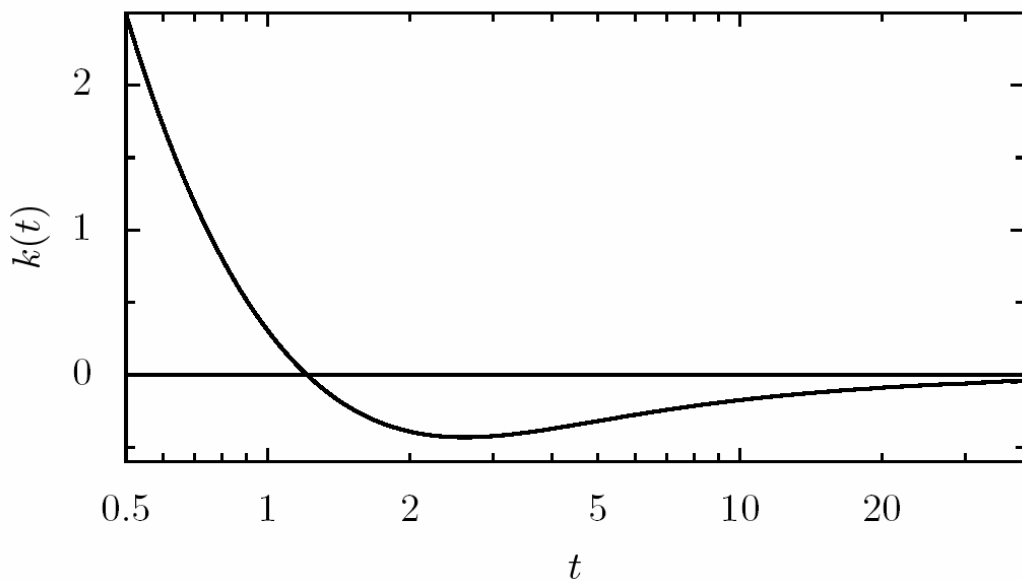


Рисунок 4.5 – Отклонение от Гауссового распределения. Коэффициент эксцесса в логарифмическом масштабе при $f = 1$, $g = 0.3$, $\lambda = 1$.

Здесь x_t – координата броуновской частицы, F – внешняя сила, $\zeta(t)$ – гауссовский тепловой белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляцией, пропорциональной δ -функции: $\overline{\xi(t)\xi(t')} = 2\Delta\delta(t - t')$. Черта сверху означает усреднение по реализациям случайной функции $\zeta(t)$, а Δ есть интенсивность белого шума. Хорошо известно [18], что величина x_t распреде-

лена по гауссовому закону, ее среднее значение определяется как $\overline{x_t} = Ft$, а дисперсия $\overline{(x_t - \overline{x_t})^2} = 2\Delta t$. Таким образом, поведение броуновских частиц и частиц, динамика которых описывается уравнением (4.1), на больших временах одно и то же, если предположить, что $\overline{x_t} = \langle X_t \rangle$ и $\overline{(x_t - \overline{x_t})^2} = \sigma_t^2$. Отсюда следует, что $F = (f^2 - g^2)/f$ и $\Delta = D_{eff}$. В случае броуновского движения интенсивность внешнего шума Δ пропорциональна температуре. Таким образом, X_t может характеризоваться безразмерной эффективной температурой $T_{eff} = D_{eff}$.

4.2.4.2 Численное моделирование

Численное решение уравнения (4.1) является полноценным инструментом для подтверждения проведенных теоретических исследований. При решении (4.1) численно следует воспользоваться отсутствием явной зависимости правой части от времени. В этом случае процесс вычисления будет максимально эффективным. В соответствии с (4.1), внутри каждого интервала с одним значением функции $g(x) = \pm 1$ скорость частицы принимает значение $f + g$ или $f - g$, соответственно. Таким образом, алгоритм состоит в последовательной генерации интервалов случайной длины в соответствии с экспоненциальным распределением и в последующем подсчете времени, которое необходимо для преодоления сгенерированного интервала со скоростью $f + g$ или $f - g$. Общее время находится как сумма времен преодоления интервалов до тех пор, пока не будет достигнуто требуемое значение. Усреднение по ансамблю реализуется путем повторения вышеописанной процедуры с различными реализациями случайной функции $g(x)$. Плотность вероятности $P_t(x)$ впоследствии представлялась в виде гистограммы конечных положений частиц. Используя описанный метод можно получить вид функции $P_t(x)$ с такими же затратами машинного времени, как и вычисление интегралов Фурье в (4.25). Усреднение по 10^7 реализациям, как правило, занимает несколько секунд на современной платформе. Наличие сингулярной составляющей в $P_t(x)$ распознается на гистограмме изменением ширины столбиков. Высота столбика, содержащего δ -функцию, пропорциональна величине, обратной к ширине столбика.

4.2.5 Выводы к подразделу 1.2

Пользуясь методом интегрирования по траекториям, была вычислена функция плотности вероятности частиц, находящихся под действием дихотомической случайной силы $g(x)$, а также постоянной силы в сверхзатухающем пределе. В предположении, что интервалы, на которых функция $g(x)$ постоянна, распределены по экспоненциальному закону, была определена плотность вероятности, зависящая от времени в виде интеграла Фурье. Было показано, что такая плотность вероятности содержит как регулярную, так и сингулярную (пропорциональную δ -функции) части. Вклад сингулярной части экспоненциально убывает со временем, а общая плотность вероятности стремится к гауссовскому распределению с ростом времени как $t^{-1/2}$.

Были вычислены первый и второй моменты функции плотности вероятности, а также численно и аналитически изучена ее временная эволюция. Аналитические результаты полностью соответствуют численным, которые получены путем численного решения уравнения движения. Были получены асимптотические представления для функции плотности вероятности для больших и малых времен. Чтобы охарактеризовать степень отклонения полученной функции плотности вероятности, был найден зависящий от времени коэффициент эксцесса. Показано, что при определенных условиях поведение рассматриваемых частиц на больших временах идентично поведению броуновских частиц. В этом случае были вычислены эффективный коэффициент диффузии и эффективная температура.

4.3 Время достижения заданного уровня

Как указывалось ранее, если четные и нечетные интервалы s_j , на которых дихотомическая сила $g(x)$ постоянна, распределены с различными экспоненциальными плотностями, уравнение (4.1) может быть использовано для изучения ряда важных физических проблем. В частности, это уравнение является основой для описания адиабатического переноса частиц в случайно возмущенных одномерных каналах и представляет собой простую модель для изучения низкотемпературной динамики носителей заряда и локализованных структур в слоистых средах со случайной структурой. Помимо перечисленных примеров, следует отметить довольно неожиданное применение уравнения (4.1) в области астрофизики. В случае, когда облака в межзвездном пространстве распределены равномерно, расстояния между ними распределены по экспоненциальному закону. В этом случае, если предположить, что скорость света в облаках одинаковая, уравнение (4.1) может быть использовано для изучения статистических свойств расстояний, которые проходит свет, излучаемый звездой в различных направлениях.

4.3.1 Представление распределения времен достижения частицей заданного уровня в виде интеграла по траекториям

Согласно уравнению (4.1) (см. [163]), время достижения заданного уровня t_x , т.е. время, за которое частица находится в движении от начального положения до положения x (> 0), описывается интегральным выражением

$$t_x = \int_0^x \frac{dx}{f + g(x)}. \quad (4.50)$$

Это время зависит от случайной функции $g(x)$ и, следовательно, представляет собой случайную величину. Плотность вероятности $P_x(t)$ события, что $t_x = t$ для фиксированной координаты x , т.е. плотность вероятности времени достижения

заданного уровня, определяется известным способом

$$P_x(t) = \langle \delta(t - t_x) \rangle, \quad (4.51)$$

где угловые скобки указывают усреднение по траекториям $g(x)$, а $\delta(t - t_x)$ является δ -функцией Дирака.

Чтобы получить точный вид $P_x(t)$, будем использовать подход, основанный на интегрировании по траекториям. В данном случае траекториями являются реализации случайной дихотомической функции (см. рисунок 4.1). Из-за дихотомического характера случайной функции $g(x)$ удобно представить плотность вероятности в виде частичных плотностей

$$P_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x^{(n)}(t), \quad (4.52)$$

где $P_x^{(n)}(t)$ – плотность вероятности тех траекторий $g(x)$, на которых происходит n изменений знака на интервале $(0, x)$ и выполняется условие $t_x = t$. Для заданного n (≥ 1), решение уравнения (4.1) можно записать в виде

$$X_t^{(n)} = \sum_{j=1}^n s_j + \tilde{s}_{n+1} \quad (4.53)$$

для $\tilde{s}_{n+1} \in (0, s_{n+1})$. С другой стороны, поскольку $g(x) = (-1)^j g$, если x принадлежит интервалу s_j , из уравнения (4.50) получаем

$$t_x^{(n)} = \sum_{j=1}^n \frac{s_j}{f + (-1)^j g} + \frac{\tilde{s}_{n+1}}{f + (-1)^{n+1} g}. \quad (4.54)$$

Если ввести обозначение $X_t^{(n)} = x$ и сделать замену $\tilde{s}_{n+1} \rightarrow x - \sum_{j=1}^n s_j$, то результат (4.54) может быть записан следующим образом:

$$t_x^{(n)} = \frac{x}{f - (-1)^n g} - \frac{g}{f^2 - g^2} \sum_{j=1}^n [(-1)^n + (-1)^j] s_j. \quad (4.55)$$

Далее введем вероятность $p(s_j) ds_j$ того, что j -ый скачок $g(x)$ происходит на

интервале ds_j , а также вероятность $\int_l^\infty p(s)ds$ того, что расстояние между ближайшими переходами превышает l . Тогда вероятность $dW_n(x)$ того, что функция $g(x)$ на интервале $(0,x)$ испытывает n скачков на промежутках ds_j ($j = 1, \dots, n$), принимает вид

$$dW_n(x) = \int_{x - \sum_{j=1}^n s_j}^\infty p(s)ds \prod_{j=1}^n p(s_j)ds_j. \quad (4.56)$$

Поскольку $\tilde{s}_{n+1} > 0$, то положительные переменные интегрирования s_j должны соответствовать условию $\sum_{j=1}^n s_j < x$. Обозначая $\Omega_n(x)$ область в n -мерном пространстве этих переменных, которая определяется по вышеупомянутому условию, мы получаем

$$P_x^{(n)}(t) = \int_{\Omega_n(x)} \delta(t - t_x^{(n)})dW_n(x). \quad (4.57)$$

Наконец, учитывая, что $t_x^{(0)} = x/(f - g)$ – это время достижения заданного уровня при $n = 0$, а $W_0(x) = \int_x^\infty p(s)ds$ – это общая вероятность выборки таких траекторий $g(x)$, которые не меняют знак на интервале $(x,0)$, мы получим следующее представление плотности вероятности времени достижения заданного уровня в виде интеграла по траектории

$$P_x(t) = \delta(t - t_x^{(0)})W_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n(x)} \delta(t - t_x^{(n)})dW_n(x). \quad (4.58)$$

Эта форма плотности вероятности времени достижения заданного уровня достаточно общая и обладает довольно сложной математической структурой. Исходя из уравнения (4.58), можно, тем не менее, получить два общих результата, которые справедливы для произвольной плотности вероятности $p(s)$: 1) $P_x(t)$ для фиксированного x принадлежит интервалу $[x/(f + g), x/(f - g)]$, и 2) $P_x(t)$ нормирована надлежащим образом, т.е., $\int_0^x P_x(t)dt = 1$. Действительно, поскольку

ку $\min t_x^{(n)} = x/(f + g)$ и $\max t_x^{(n)} = x/(f - g)$, мы имеем $\delta(t - t_x^{(n)}) \equiv 0$ и поэтому $P_x(t) \equiv 0$, если $t \notin [x/(f + g), x/(f - g)]$. Чтобы доказать второе утверждение, мы сначала отметим, что в соответствии с уравнением (4.58), $\int_0^x P_x(t) dt = W_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)$, где $W_n(x) = \int_{\Omega_n(x)} dW_n(x)$ является вероятностью того, что функция $g(x)$ претерпела n скачков в интервале $(0, x)$. Далее, введя величину $S_n(x) = \int_{\Omega_n(x)} \prod_{j=1}^n p(s_j) ds_j$, мы приходим к выражениям $W_0(x) = 1 - S_1(x)$ и $W_n(x) = S_n(x) - S_{n+1}(x)$, см. также [163]. Наконец, учитывая, что $S_{\infty}(x) = 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) = S_1(x)$, мы убеждаемся, что условие нормировки верно для произвольного значения $p(x)$.

4.3.2 Характеристики функции времени достижения заданного уровня

Используя интегральную запись для δ -функции

$$\delta(t - t_x^{(n)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t - t_x^{(n)})} d\omega, \quad (4.59)$$

мы можем записать плотность вероятности в уравнении (4.58) в форме интеграла Фурье, т.е.

$$P_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (4.60)$$

Согласно уравнениям (4.58), (4.59) и (4.60), характеристическая функция $\phi_x(\omega)$, которая определяет все статистические свойства времени достижения заданного уровня t_x , может быть представлена в виде

$$\phi_x(\omega) = e^{i\omega t_x^{(0)}} W_0(x) + \tilde{\phi}_x(\omega), \quad (4.61)$$

где

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n(x)} e^{i\omega t_x^{(n)}} dW_n(x). \quad (4.62)$$

В общем случае для произвольной $p(s)$ характеристическая функция имеет сложную структуру, включающую интегрирование по n -размерной области $\Omega_n(x)$ и суммирование по всем n . Примечательно, однако, что $\phi_x(\omega)$ может быть выражена в элементарных функциях, если случайные интервалы s_j распределены экспоненциально, т.е. если $p(s) = \lambda \exp(-\lambda s)$, где λ^{-1} – средняя продолжительность интервала s_j . В этом случае вероятность (4.56) запишется как

$$dW_n(x) = e^{-\lambda x} \lambda^n \prod_{j=1}^n ds_j, \quad (4.63)$$

и выражение (4.62) приводится к виду

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_{\Omega_n(x)} e^{i\omega x^{(n)}} \prod_{j=1}^n ds_j. \quad (4.64)$$

Для расчета $\tilde{\phi}_x(\omega)$ удобно преобразовать правую сторону уравнения (4.64) в виде отдельных интегралов по переменным s_j . Для этого мы используем подход [163] на основе интегрального представления ступенчатой функции

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(i\kappa+\eta)y}}{i\kappa+\eta} d\kappa = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}, \quad (4.65)$$

который справедлив для произвольного $\eta > 0$. Подставляя уравнение (4.65) в уравнение (4.64) и принимая $y = x - \sum_{j=1}^n s_j$, получим искомый результат

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = \frac{e^{-\lambda x}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \frac{e^{(i\kappa+\eta)x}}{i\kappa+\eta} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} e^{i\omega x^{(n)}} e^{-(i\kappa+\eta)\sum_{j=1}^n s_j} \prod_{j=1}^n ds_j. \quad (4.66)$$

Далее, используя тождество $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{m=1}^{\infty} [a_{2m-1} + a_{2m}]$ и имея ввиду, что согласно уравнению (4.55)

$$t_x^{(2m-1)} = \frac{x}{f+g} + \frac{2g}{f^2-g^2} \sum_{j=1}^m s_{2j-1},$$

$$t_x^{(2m)} = \frac{x}{f-g} - \frac{2g}{f^2-g^2} \sum_{j=1}^m s_{2j}, \quad (4.67)$$

упростим выражение (4.66) к виду

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = \frac{e^{-\lambda x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{v_0 x}}{v_0} \sum_{m=1}^{\infty} \left[I^{m-1}(v_0) I^m(v_1) e^{i\omega x/(f+g)} + I^m(v_0) I^m(v_2) e^{i\omega x/(f-g)} \right] d\kappa. \quad (4.68)$$

Здесь

$$I(v_k) = \int_0^{\infty} p(s) e^{-(v_k - \lambda)s} ds = \frac{\lambda}{v_k} \quad (4.69)$$

($\text{Re } v_k > 0$, $k = 0, 1, 2$) и

$$v_k = i\kappa + \eta + i \frac{2q\omega}{f^2 - g^2} \delta_k \quad (4.70)$$

при $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = -1$ и $\delta_2 = 1$. Отметим, что правая часть уравнения (4.68) содержит произвольный положительный параметр η . Однако, согласно определению (4.62), левая часть уравнения (4.68) не зависит от η . Это значит, что окончательный результат вычисления рядов и интеграла в уравнении (4.68) также не должен зависеть от η . Вследствие этого, для вспомогательных расчетов мы можем выбрать наиболее подходящее значение для этого параметра.

С этой точки зрения целесообразно выбрать $\eta > \lambda$. В этом случае $|I(v_k)| < 1$, и ряды в уравнении (4.68) могут быть легко вычислены

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} I^{m-1}(v_0) I^m(v_1) &= \frac{\lambda v_0}{v_0 v_1 - \lambda^2}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} I^m(v_0) I^m(v_2) &= \frac{\lambda^2}{v_0 v_2 - \lambda^2}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Подставляя выражения (4.71) в (4.68) и учитывая, что $W_0(x) = \exp(-\lambda x)$ и

$$e^{i\omega t_x^{(0)}} W_0(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{v_0 x}}{v_0} e^{i\omega x/(f-g)} d\kappa, \quad (4.72)$$

из (4.61) получаем

$$\phi_x(\omega) = \frac{e^{-\lambda x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{v_0 x} \left(\frac{\lambda e^{i\omega x/(f+g)}}{v_0 v_1 - \lambda^2} + \frac{v_2 e^{i\omega x/(f-g)}}{v_0 v_2 - \lambda^2} \right) d\kappa. \quad (4.73)$$

При расчете интегралов в выражении (4.73) (подробности приводятся в Приложении С), мы находим удивительно простое выражение для характеристической функции времени достижения заданного уровня

$$\phi_x(\omega) = e^{-\lambda x(1-ivf/g)} \left(\cosh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) + \frac{1+iv}{\sqrt{1-v^2}} \sinh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) \right), \quad (4.74)$$

где

$$v = \frac{\omega g}{\lambda(f^2 - g^2)}. \quad (4.75)$$

Отметим, что $\phi_x(\omega)$, будучи характеристической функцией, удовлетворяет условиям $|\phi_x(\omega)| \leq 1$, $\phi_x(0) = 1$ и $\phi_x(-\omega) = \phi_x^*(\omega)$, где звездочка означает комплексное сопряжение. Выражение (4.74) является нашим основным результатом, который позволяет исследовать основные свойства времени достижения заданного уровня аналитически.

4.3.3 Моменты времени достижения заданного уровня

Моменты времени достижения заданного уровня определяется как $\langle t_x^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t^m P_x(t) dt$, и их можно представить через характеристические функции следующим образом:

$$\langle t_x^m \rangle = \frac{1}{i^m} \frac{d^m}{d\omega^m} \phi_x(\omega) \Big|_{\omega=0}. \quad (4.76)$$

Согласно выражениям (4.74) и (4.76), первый момент, т. е. среднее время достижения заданного уровня, оказывается следующим:

$$\langle t_x \rangle = \frac{1}{2\lambda(f^2 - g^2)} [2\lambda fx + g - ge^{-2\lambda x}]. \quad (4.77)$$

На малых расстояниях от начала отсчета, когда $\lambda x \ll 1$, формула (4.77) принимает вид $\langle t_x \rangle = x/(f - g)$. Это ожидаемый результат: общая вероятность выборки тех траекторий $g(x)$, которые не меняют знак на интервале $(0, x)$, стремится к 1 при $\lambda x \rightarrow 0$, и, следовательно, средняя скорость частиц стремится к $f - g$. В другом предельном случае, когда $\lambda x \gg 1$, формула (4.77) преобразуется к $\langle t_x \rangle = fx/(f^2 - g^2)$. Этот результат подтверждается тем, что асимптотика средней скорости в пределе больших времен равна $(f^2 - g^2)/f$ (см [163]).

Моменты высших порядков также могут быть рассчитаны непосредственно. В частности, для второго момента получаем

$$\langle t_x^2 \rangle = \frac{1}{2\lambda^2(f^2 - g^2)^2} [2\lambda^2 f^2 x^2 + 2\lambda g(f + g)x - g^2 - g(2\lambda fx - g)e^{-2\lambda x}]. \quad (4.78)$$

Центральные моменты, $\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle$, можно определить из конечных рядов

$$\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j \langle t_x^j \rangle \langle t_x \rangle^{m-j}, \quad (4.79)$$

где C_m^j – биномиальный коэффициент, или же, альтернативно, по формуле

$$\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle = \frac{1}{i^m} \frac{d^m}{d\omega^m} \phi_x(\omega) e^{-i\omega \langle t_x \rangle} \Big|_{\omega=0}. \quad (4.80)$$

В частности, с помощью одного из этих определений дисперсию времени достижения заданного уровня, $\sigma_x^2 = \langle (t_x - \langle t_x \rangle)^2 \rangle$, можно записать в виде

$$\sigma_x^2 = \frac{g^2}{4\lambda^2(f^2 - g^2)^2} [4\lambda x - 3 + 4e^{-2\lambda x} - e^{-4\lambda x}]. \quad (4.81)$$

На малых расстояниях, когда $\lambda x \ll 1$, дисперсия принимает вид

$$\sigma_x^2 = \frac{4\lambda g^2}{3(f^2 - g^2)^2} x^3, \quad (4.82)$$

а на больших расстояниях, когда $\lambda x \gg 1$, дисперсия записывается как

$$\sigma_x^2 = \frac{g^2}{\lambda^2(f^2 - g^2)^2} x. \quad (4.83)$$

Кроме того, центральные моменты времени пребывания обладают интересными масштабными свойствами. В частности, используя (4.80) совместно с выражениями (4.74) и (4.77), получаем

$$\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle = \left(\frac{g}{\lambda(f^2 - g^2)} \right)^m \Psi_m(\lambda x), \quad (4.84)$$

где

$$\Psi_m(\lambda x) = e^{-\lambda x} \frac{d^m}{dz^m} \Phi(z, \lambda x) \Big|_{z=0} \quad (4.85)$$

является функцией одной переменной λx и

$$\Phi(z, \lambda x) = \exp\left(-z \frac{1 - e^{-2\lambda x}}{2}\right) \left(\cosh(\lambda x \sqrt{1 + z^2}) + \frac{1 + z}{\sqrt{1 + z^2}} \sinh(\lambda x \sqrt{1 + z^2}) \right). \quad (4.86)$$

Таким образом, центральные моменты показывают универсальную зависимость от параметров f , g и λ , т.е. $\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^m \rangle \sim [g / \lambda(f^2 - g^2)]^m$.

4.3.4 Свойства плотности вероятности времени достижения заданного уровня

Как следует из выражения (4.74), характеристическая функция стремится к $\exp(-\lambda x + i\omega x/(f - g))$ при $|\omega| \rightarrow \infty$. Согласно (4.60), это означает, что плотность вероятности времени пребывания содержит δ -сингулярную составляющую, т.е.

$$P_x(t) = \delta\left(t - \frac{x}{f - g}\right) e^{-\lambda x} + \tilde{P}_x(t), \quad (4.87)$$

где

$$\tilde{P}_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.88)$$

обозначает регулярную составляющую $P_x(t)$ и

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = \phi_x(\omega) - e^{-\lambda x + i\alpha x/(f-g)}. \quad (4.89)$$

Так как интенсивность δ -сингулярной части уменьшается экспоненциально с увеличением x , то её вклад в $P_x(t)$ играет важную роль на малых расстояниях от начального положения. Регулярная же составляющая определяет поведение $P_x(t)$ на больших расстояниях.

4.3.4.1 Поведение на малых расстояниях

При $\lambda x \ll 1$ мы можем получить плотность вероятности $P_x(t)$ в упрощенном варианте, без расчета интеграла в выражении (4.88). Для этого мы сначала отметим, что δ -сингулярная составляющая $P_x(t)$ определяется теми реализациями траектории $g(x)$, которые не меняют знак на интервале $(0, x)$. Соответственно, только те части пути, которые, по крайней мере, один раз меняют знак в этом интервале, формируют регулярную часть $\tilde{P}_x(t)$. Для малых значений λx неоднократные изменения знака маловероятны. Поэтому, чтобы определить $\tilde{P}_x(t)$, мы считаем, что выборка пути происходит с одним изменением знака. В этом случае вероятность $\tilde{P}_x(t)dt$ равна $dW_1(x) = \lambda \exp(-\lambda x) ds_1$ и, поскольку $t = t_x^{(1)} = x/(f+g) + 2gs_1/(f^2 - g^2)$, соотношение $\tilde{P}_x(t)dt = dW_1(x)$ при $\lambda x \ll 1$ дает

$$\tilde{P}_x(t) = \frac{\lambda(f^2 - g^2)}{2g}. \quad (4.90)$$

Наконец, подставляя (4.90) в выражение (4.87), мы находим, что плотность вероятности времени достижения заданного уровня при $\lambda x \ll 1$ равна

$$P_x(t) = \delta\left(t - \frac{x}{f-g}\right)(1 - \lambda x) + \frac{\lambda(f^2 - g^2)}{2g}. \quad (4.91)$$

На первый взгляд этот результат может быть неожиданным, поскольку регулярная часть плотности вероятности не зависит явно от x и t . Следует, однако, подчеркнуть, что формула (4.90) получена при условии, что $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$, где $t_{\min} = x/(f+g)$ и $t_{\max} = x/(f-g)$ (мы напоминаем, что $\tilde{P}_x(t) \equiv 0$, если $t \notin [t_{\min}, t_{\max}]$). Это означает, что $\tilde{P}_x(t)$ зависит от x и t неявно, приводя к уширению $\tilde{P}_x(t)$, если x растет. В начальной точке $x = 0$ мы имеем $t_{\min} = t_{\max} = 0$, поэтому $\tilde{P}_0(t) = 0$ и, в соответствии с условием $t_0 = 0$, $P_0(t) = \delta(t)$. Отметим также, что условие нормировки $\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} P_x(t) dt = 1$, которое выполняется также и для соотношения (4.91), подтверждает справедливость (4.90).

4.3.4.2 Поведение на больших расстояниях

Для изучения поведения плотности вероятности $P_x(t)$ на больших расстояниях удобно ввести новую временную переменную $\tau = (t - \langle t_x \rangle) / \sigma_x$. Соответствующая приведенная плотность вероятности $P'_x(t)$ выражается через $P_x(t)$ как $P'_x(t) = \sigma_x P_x(\langle t_x \rangle + \sigma_x \tau)$ и, согласно (4.60), может быть записана в виде

$$P'_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\mu / \sigma_x) e^{-i\mu \langle t_x \rangle / \sigma_x - i\mu \tau} d\mu. \quad (4.92)$$

Используя выражения (4.74), (4.77) и (4.81), характеристическая функция для $P'_x(t)$ может быть записана как

$$\phi_x(\mu / \sigma_x) e^{-i\mu \langle t_x \rangle / \sigma_x} = e^{-\lambda x} \Phi(i\mu \Psi_2^{-1/2}(\lambda x), \lambda x), \quad (4.93)$$

где функция $\Phi(z, \lambda x)$ определяется уравнением (4.86), а

$$\Psi_2(\lambda x) = \lambda x - \frac{3}{4} + e^{-2\lambda x} - \frac{1}{4} e^{-4\lambda x}. \quad (4.94)$$

Поскольку характеристическая функция (4.93) зависит только от λx и переменной

интегрирования μ , приведенная плотность вероятности (4.92) обладает тем замечательным свойством, что $P'_x(t)$ – функция переменных λx и τ , которая не зависит ни от внешней силы f , ни от амплитуды g дихотомической случайной силы $g(x)$.

В случае больших расстояний, если $\lambda x \gg 1$, характеристическую функцию (4.93) при $\mu^4 \ll \lambda x$ можно аппроксимировать двумя первыми членами разложения

$$\phi_x(\mu/\sigma_x)e^{-i\mu\langle t_x \rangle/\sigma_x} = e^{-\mu^2/2} \left(1 - \frac{\mu^4}{8\lambda x} \right). \quad (4.95)$$

Подставляя (4.95) в выражение (4.93) и вычисляя интегралы, находим два первых члена разложения приведенной плотности вероятности

$$P'_x(\tau) = \frac{e^{-\tau^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{3 - 6\tau^2 + \tau^4}{8\lambda x} \right), \quad (4.96)$$

которая имеет место, если выполняется условие $\lambda x \gg \max(1, \tau^4)$. В соответствии центральной предельной теоремой теории вероятностей (см., например, [38]), предельная плотность вероятности стремится к гауссовскому виду, то есть $P'_\infty(\tau) = 2\pi^{-1/2} \exp(-\tau^2/2)$ и $P'_x(\tau) - P'_\infty(\tau) \sim (\lambda x)^{-1}$ при $\lambda x \rightarrow \infty$.

4.3.4.3 Численное подтверждение

Представленные численные расчеты преследовали две цели, а именно: 1) проверить аналитические выводы и 2) визуализировать полученные результаты. Последнее достигается путем сравнения плотности вероятности (4.87) с той, которая получена с помощью численного моделирования времени достижения заданного уровня (4.50). Здесь был использован программный пакет Maple для расчета интеграла Фурье в уравнении (4.88) и применены процедуры построения гистограмм, чтобы численно оценить плотность вероятности. Суть данной процедуры состоит в последовательном генерировании случайных интервалов s_j в соответствии с экспоненциальным распределением и последующим расчетом времени достижения заданного уровня x для различных реализаций s_j .

Плотность вероятности затем представлялась в виде гистограммы времен достижения заданного уровня частицами. Прделанное численное моделирование обнаруживает полное согласие с теоретическими расчетами, см. рисунок 4.6.

Рисунок (4.7) иллюстрирует поведение плотности вероятности (4.87) на малых расстояниях. Как видно из рисунка 4.7(а), при очень малых значениях x плотность вероятности времени достижения определяется приближенной формулы (4.91). В соответствии с предположением, которое использовалось при выводе этой формулы, выборка траектории $g(x)$, которая на интервале $(0, x)$ меняет знак более одного раза, не влияет на явную зависимость $\tilde{P}_x(t)$ от времени t . Если x не является слишком малым, то есть вероятность выборки этих траекторий является небольшой, но ненулевой, как показано на рисунке 4.7(б) $\tilde{P}_x(t)$ является практически линейной функцией t . С ростом x роль выборки этих путей становится все более важной: функция $\tilde{P}_x(t)$ становится нелинейной, принимает унимодальную форму, и в конечном итоге приближается к гауссовской форме, см. рисунок 4.8.

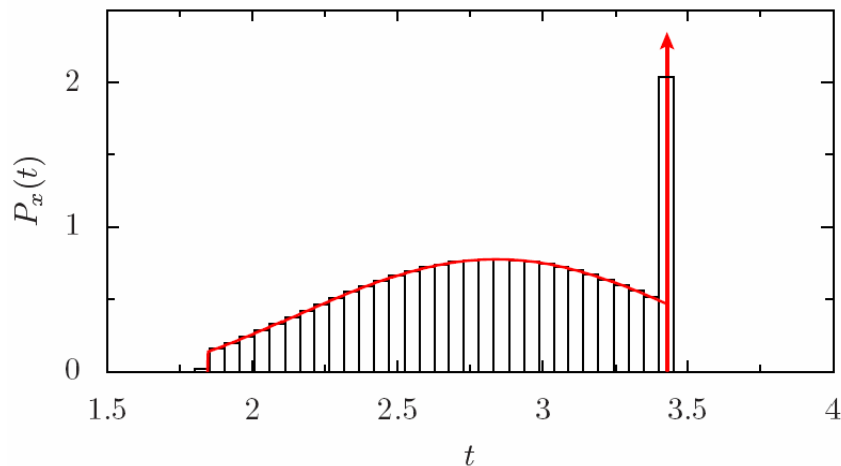


Рисунок 4.6 – Теоретическая и численная плотности вероятности времени достижения заданного уровня при $x = 2.4$. Сплошная линия (красная) – аналитический результат (4.87), гистограмма – численное моделирование времени достижения заданного уровня (4.50). Параметры силового поля: $f = 1$, $g = 0.3$ и $\lambda = 1$. Вертикальная стрелка показывает влияние δ -сингулярной части на функцию $P_x(t)$.

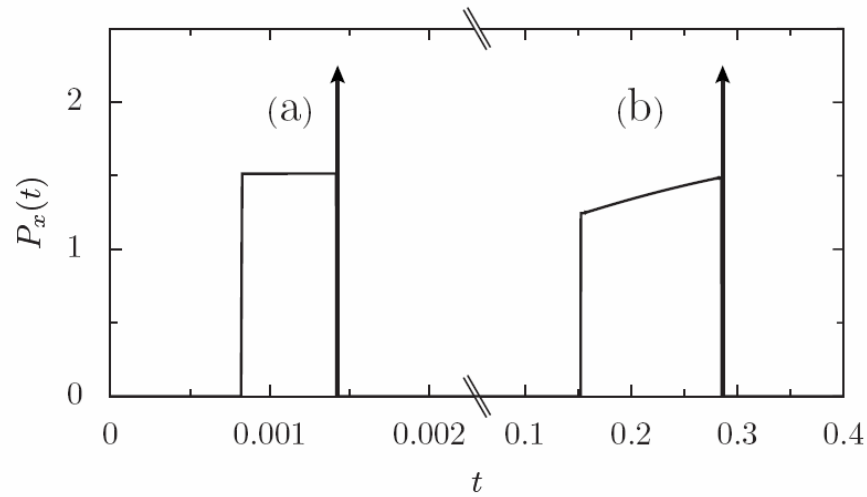


Рисунок 4.7 – Поведение плотности вероятности достижения заданного уровня $P_x(t)$ на малых расстояниях при а) $x = 10^{-3}$ и б) $x = 0.2$. Остальные параметры те же, что и на рисунке 4.6.

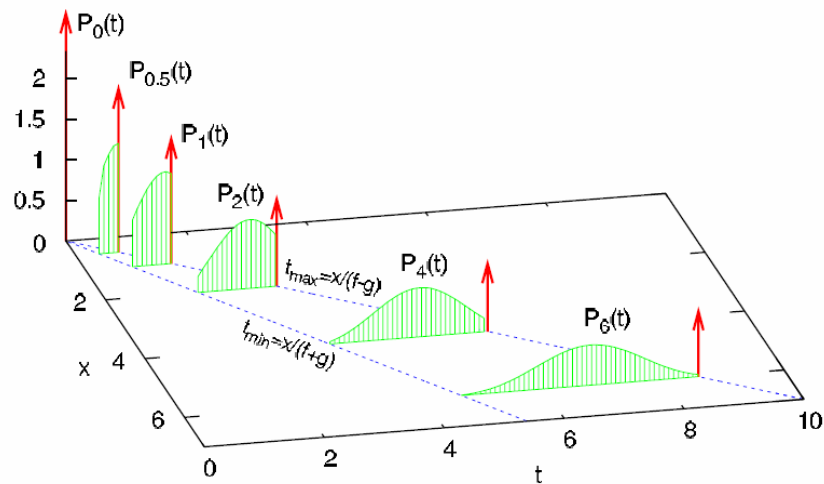


Рисунок 4.8 – Изображения плотности вероятности времени достижения заданного уровня для различных расстояний от начала системы координат. Поверхности (зеленые) изображают регулярную часть $P_x(t)$. Для того, чтобы визуально показать, что интенсивность δ -сингулярной части $P_x(t)$ экспоненциально уменьшается с x , длины вертикальных стрелок (красные) соответствуют выражению $0.8 + 2\exp(-\lambda x)$. Для удобства сравнения характеристики силового поля выбираются такими же, как на рисунках 4.6 и 4.7.

4.3.4.4 Коэффициенты эксцесса и асимметрии

Для того чтобы количественно описать различие между распределением $P_x(t)$ времен достижения заданного уровня и гауссовским распределением с идентичными значениями математического ожидания и дисперсии, были рассчитаны коэффициент асимметрии

$$s(x) = \frac{\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^3 \rangle}{\sigma_x^3}, \quad (4.97)$$

который характеризует степень асимметрии функции $P_x(t)$, и коэффициент эксцесса

$$k(x) = \frac{\langle (t_x - \langle t_x \rangle)^4 \rangle}{\sigma_x^4} - 3, \quad (4.98)$$

который является мерой остроты пика функции $P_x(t)$. Так как $s(x) \equiv 0$ и $k(x) \equiv 0$, если время достижения заданного уровня t_x подчиняется гауссовскому распределению, можно рассматривать коэффициенты асимметрии и эксцесса как параметры, определяющие отклонение функции распределения времени достижения заданного уровня от гауссовской. Используя выражение (4.84) для центральных моментов, из определений (4.97) и (4.98) получим

$$s(x) = \frac{\Psi_3(\lambda x)}{\Psi_2^{3/2}(\lambda x)}, \quad k(x) = \frac{\Psi_4(\lambda x)}{\Psi_2^2(\lambda x)} - 3, \quad (4.99)$$

т.е. $s(x)$ и $k(x)$ являются универсальными функциями одной переменной λx (см. рисунок 4.9). Вычисляя $\Psi_3(\lambda x)$ и $\Psi_4(\lambda x)$ и принимая во внимание (4.94), мы находим явное выражение для коэффициентов асимметрии

$$s(x) = -\frac{2}{(4\lambda x - 3 + 4e^{-2\lambda x} - e^{-4\lambda x})^{3/2}} \left[2 + (3 - 12\lambda x)e^{-2\lambda x} - 6e^{-4\lambda x} + e^{-6\lambda x} \right], \quad (4.100)$$

и эксцесса

$$s(x) = -\frac{6}{(4\lambda x - 3 + 4e^{-2\lambda x} - e^{-4\lambda x})^2} \times \quad (4.101)$$

$$\times \left[13 - 8\lambda x - 8(1 + 4\lambda x)e^{-2\lambda x} - 4(3 - 4\lambda x)e^{-4\lambda x} + 8e^{-6\lambda x} - e^{-8\lambda x} \right]$$

В формулах (4.100) и (4.101) вклад основного члена разложения по переменной λx имеет следующий вид: $s(x) = -(3\sqrt{3}/4)(\lambda x)^{-1/2}$ и $k(x) = -(9/5)(\lambda x)^{-1}$ при $\lambda x \ll 1$, и $s(x) = -(1/2)(\lambda x)^{-3/2}$ и $k(x) = -3(\lambda x)^{-1}$ при $\lambda x \gg 1$. Эти результаты доказывают тот факт, что плотность вероятности $P_x(t)$ времени достижения заданного уровня заметно отличается от гауссовской плотности на малых расстояниях и приближается к ней на больших. Кроме того, поскольку $|k(x)/s(x)| \rightarrow \infty$ при условиях $\lambda x \rightarrow 0$ и $\lambda x \rightarrow \infty$, коэффициент эксцесса может быть рассмотрен как основной параметр, определяющий степень отличия $P_x(t)$ от гауссовского распределения. Отметим, что ввиду условия $s(x) < 0$, левая часть $P_x(t)$ всегда расположена ниже, чем правая. Кроме того, $P_x(t)$ имеет более ярко выраженный пик по сравнению с гауссовской плотностью на расстояниях с $k(x) > 0$, и более сплюснутый характер на расстояниях с $k(x) < 0$.

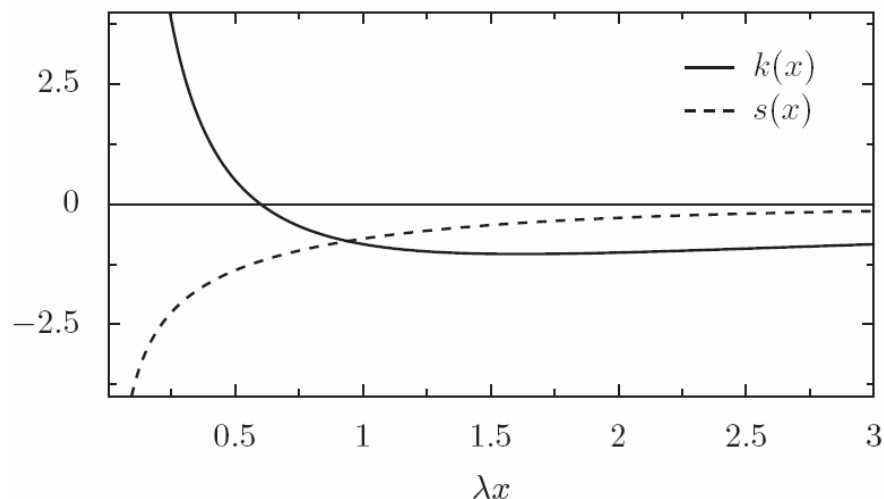


Рисунок 4.9 – Участки асимметрии $s(x)$ (пунктирная линия) и эксцесса $k(x)$ (сплошная линия) плотности вероятности достижения заданного уровня в зависимости от нормированного расстояния λx .

4.3.5 Выводы к подразделу 1.3

Используя подход, основанный на интегрировании по траекториям, была рассчитана характеристическая функция времени достижения заданного уровня классических сверхзатухающих частиц, которые приводятся в движение постоянным полем в кусочно-линейном случайном потенциале, генерирующем дихотомическую случайную силу с экспоненциально распределенными пространственными интервалами непрерывности. Используя характеристическую функцию, были получены моменты времени достижения заданного уровня, установлены универсальные масштабные свойства центральных моментов, и показано, что плотность вероятности $P_x(t)$ времени достижения заданного уровня содержит δ -сингулярный вклад и регулярную составляющую. Установлено, что δ -сингулярная часть, чей вклад уменьшается экспоненциально с увеличением x , играет основную роль на малых расстояниях, тогда как регулярная составляющая $P_x(t)$ является определяющей на больших расстояниях x .

На очень малых расстояниях регулярная составляющая определяется конкретной реализацией траектории только с одной сменой знака на интервале $(0, x)$, и в этом случае ее значение не зависит от x . С ростом x вклад других реализаций траектории приводит к трансформации этой части $P_x(t)$ в практически линейную функцию от t , затем в унимодальную форму, и, наконец, при $x \rightarrow \infty$ она стремится к гауссовской плотности как x^{-1} . Кроме того, для того чтобы охарактеризовать различие плотности вероятности времени достижения заданного уровня от распределения Гаусса, были рассчитаны коэффициенты асимметрии и эксцесса. Показано, что функция $P_x(t)$ имеет более ярко выраженный пик по сравнению с гауссовской плотностью при малых x и более плоскую форму при больших x .

5 ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА

5.1 Общие положения

Введённое почти 100 лет назад [166], уравнение Ланжевена стало одним из наиболее удобных и мощных инструментов для изучения феномена шума в системах, взаимодействующих с флуктуирующей средой [167]. Главное преимущество подхода, основанного на этом уравнении, заключается в обеспечении физически ясного и математически удобного объяснения стохастической динамики подобных систем. Так же данный подход особенно эффективен, если шум, который описывает действие внешней среды, может быть представлен как производная по времени (в смысле обобщенных функций) от стационарного процесса с независимыми приращениями неперекрывающихся интервалов. В этом случае решения уравнения Ланжевена принадлежат к классу Марковских процессов, свойства которых хорошо известны (см., например [2, 18, 69, 168]). Стационарные процессы с независимыми приращениями и нулевым начальным состоянием составляют класс так называемых Леви-процессов [169]. Для краткости, будем называть Леви-процессами такие процессы, производные от которых представляют собой шум, генерирующий данный процесс.

Большое количество физических, биологических, финансовых и других систем успешно описываются с помощью сверхзатухающего уравнения Ланжевена, или стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка. Одна из основных статических характеристик систем, взаимодействующих с флуктуирующей средой – плотность вероятности случайной величины, являющейся решением уравнения Ланжевена. Если решение указанного уравнения при аппроксимации реальных шумов белым шумом, носит марковский характер, плотность вероятности удовлетворяет замкнутой форме обобщённого уравнения Фоккера-Планка. Это уравнение еще называют дифференциальным уравнением Колмогорова-Чепмена [19]. Явная форма этого уравнения определяется главным образом характером распределения приращений белого шума.

В частности, для гауссовского распределения приращений имеет место обыкновенное уравнение Фоккера-Планка [18, 69, 168], а для медленно спадающих распределений имеет место дробное уравнение Фоккера-Планка [170 - 175]. Недавно было показано [176], что обобщённое уравнение Фоккера-Планка может быть представлено унифицировано, используя характеристическую функцию процесса генерации белого шума для случая случайного распределения приращений аддитивного белого шума.

5.2 Уравнение Ланжевена для случая случайного белого шума

Характер изменения со временем координаты динамической системы, взаимодействующей с флуктуирующей средой чаще всего описывается безразмерным уравнением Ланжевена с мультипликативным шумом для сверхзатухающего случая

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + g(x(t), t)\xi(t). \quad (6.1)$$

Для различных систем переменные в уравнении (6.1) имеют различные значения. Для того, что бы снять неопределённость, мы называем $x(t)$ [$x(0) = 0$] координатой частицы, $f(x, t) = -\partial U(x, t)/\partial x$ силовым полем, $U(x, t)$ внешним детерминистическим потенциалом, $\xi(t)$ случайной силой (шумом), являющейся результатом взаимодействия частицы с флуктуирующей средой, и $g(x, t)$ мультипликативным шумовым элементом. При определённых условиях [18, 177], реальный шум $\xi(t)$ с ограниченным временем корреляции может быть аппроксимирован идеализированным белым шумом с нулевым временем корреляции. Основное преимущество этой аппроксимации, в том, что оно эффективно охватывает все существующие шумовые эффекты и, благодаря марковскому характеру $x(t)$, многие из этих эффектов могут быть представлены аналитически.

Из-за сингулярного характера белого шума, быть осторожным при интер-

претации выражения (6.1). Отправной точкой есть тот факт [178], что любой белый шум может быть представлен как производная по времени (в смысле обобщенных функций) от стационарного процесса с независимыми приращениями $\delta\eta = \eta(t + \tau) - \eta(t)$. Последнее приращение определяется как интеграл по времени в смысле сходимости распределения $\int_t^{t+\tau} dt' \xi(t') = \delta\eta(t)$. Следовательно, приращение координаты частицы $\delta x(t) = x(t + \tau) - x(t)$ за время τ ($\tau \rightarrow 0$) может быть записан в форме

$$\delta x(t) = f(x(t), t)\tau + g(x(t), t)\delta\eta(t) \quad (6.2)$$

который определяет смысл выражения (6.1) в интерпретации Ито [179].

Для фиксированного τ , распределение приращений $\delta\eta(j\tau)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) полностью описывается плотностью вероятности перехода $p(\eta_{j+1}, \tau | \eta_j)$, где η_{j+1} и η_j показывают возможные значения $\eta(j\tau + \tau)$ и $\eta(j\tau)$ соответственно. Эта плотность, обычно, нормирована $\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_{j+1} p(\eta_{j+1}, \tau | \eta_j) = 1$, и удовлетворяет условию $\lim_{\tau \rightarrow 0} p(\eta_{j+1}, \tau | \eta_j) = \delta(\Delta\eta)$, где $\delta(\cdot)$ означает δ -функцию Дирака, а $\Delta\eta = \eta_{j+1} - \eta_j$. Более того, если существует начальный момент для $\eta(j\tau + \tau)$, то он принимает нулевое значение, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_{j+1} \eta_{j+1} p(\eta_{j+1}, \tau | \eta_j) = 0$. Для упрощения, мы считаем, что $p(\eta_{j+1}, \tau | \eta_j) = p(\Delta\eta, \tau)$.

Процесс генерирования белого шума, т.е. марковский процесс $\eta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{[t/\tau]-1} \delta\eta(j\tau)$ при $\eta(0) = 0$ ($[t/\tau]$ указывает на целую часть от t/τ) также полностью задается вероятности перехода $p(\eta_{j+1}, \tau | \eta_j)$ для $\tau \rightarrow 0$. Отметим, что все плотности вероятностей переходов вида $p(\eta_{j+q}, q\tau | \eta_j)$ могут быть представлены через $p(\eta_{j+1}, \tau | \eta_j)$ путём использования уравнения Колмогорова-Чепмена [2, 69]. В частности, для $q = 2$, получается $p(\eta_{j+2}, 2\tau | \eta_j) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_{j+1} p(\eta_{j+2}, \tau | \eta_{j+1}) p(\eta_{j+1}, \tau | \eta_j)$. Таким образом, статистические свойства решения уравнения (6.1) могут также характеризоваться плотностью вероятности $p(\eta_{j+1}, \tau | \eta_j)$.

Если, например, плотность вероятности перехода имеет гауссовскую форму, т.е.

$$p(\Delta\eta, \tau) = \frac{\exp\left[-\frac{\Delta\eta^2}{4D\tau}\right]}{\sqrt{4\pi D\tau}}, \quad (6.3)$$

то $\eta(n\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} \delta\eta(j\tau)$ есть дискретным Виннеровским процессом, который полностью описывается двумя параметрами,

$$\langle \delta\eta(j\tau) \rangle = 0, \quad \langle \delta\eta(j\tau) \delta\eta(l\tau) \rangle = 2D\delta_{jl}\tau \quad (6.4)$$

Угловые скобки показывают усреднение по приращениям $\delta\eta(j\tau)$, а δ_{nm} – символ Кронекера. Эти формулы – дискретно временные версии усреднения $\langle \xi(t) \rangle = 0$, и корреляционной функции $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ гауссовского белого шума $\xi(t)$ интенсивности D . Таким образом, выражения (6.2) и (6.4) полностью определяют уравнение Ланжевена (6.1) для случая мультипликативного гауссовского белого шума [2].

Вывод уравнения Фоккера-Планка подразумевает, что первые два момента $\delta\eta(j\tau)$ существуют [2, 168]. Поскольку, если $p(\Delta\eta, \tau)$ медленно спадающая функция $\Delta\eta$, то второй момент не существует. В этом случае, производная от уравнения Фоккера-Планка, которое соответствует уравнению Ланжевена (6.1), должна быть основана исключительно на уравнении (6.2). Мы подчёркиваем, что белый шум, который характеризуется медленно спадающим распределением $p(\Delta\eta, \tau)$ качественно отличается от обыкновенного белого шума, характеризуемого $p(\Delta\eta, \tau)$ с ограниченной дисперсией. Так, для последнего характерна независимость от частоты спектральной мощности $\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \xi(0)\xi(t) \rangle$, где ω – частота. Именно поэтому шум и называется белым. В то же время, для медленно убывающего распределения спектральная мощность не существует. Тем не менее, распределения такого вида являются удобным инструментом для изучения важного класса случайных процессов, которые допускают нечастые, но скачкообразные изменения.

5.3 Вывод обобщённого уравнения Фоккера-Планка

Мы определяем плотность вероятности координаты частицы $x(t)$ стандартным методом:

$$P(x, t) = \langle \delta(x - x(t)) \rangle \quad (6.5)$$

Для получения соответствующего данной вероятности уравнения движения, необходимо определить средние значения $F(x(t))$ и $F(x(t), \delta\eta(t))$ для $P(x, t)$; здесь функции $F(x)$ и $F(x, y)$ полагаются детерминистическими. Принимая во внимание вышеуказанное определение усреднения, $\langle F(x(t)) \rangle$ означает усреднение $F(x(t))$ по всем приращениям $\delta\eta(j\tau)$ при $j = 0, 1, \dots, [t/\tau] - 1$ и $\tau \rightarrow 0$. Из уравнений (6.2) и (6.5) очевидно, что результат может быть представлен как усреднение, относительно $x(t)$, т.е.

$$\langle F(x(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) P(x, t) \quad (6.6)$$

Для того чтобы выразить $\langle F(x(t), \delta\eta(t)) \rangle$ через вероятность $P(x, t)$, мы используем двухуровневую процедуру усреднения [180]. Поскольку переменные $x(t)$ и $\delta\eta(t)$ являются статически независимыми и распределёнными согласно плотности вероятности $P(x, t)$ и $p(\Delta\eta, \tau)$, соответственно можем получить

$$\langle F(x(t), \delta\eta(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx P(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} dy F(x, y) p(y, \tau) \quad (6.7)$$

Для дальнейших вычислений введем преобразование Фурье $P_k(t)$ для выражения $P(x, t)$ согласно определению

$$\Phi\{u(x)\} \equiv u_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} u(x) \quad (6.8)$$

и найдём, используя уравнение (6.5), что $P_k(t) = \langle \exp[-ikx(t)] \rangle$. Уравнение (6.2) предполагает, что для $\tau \rightarrow 0$, приращение $P_k(t)$, т.е. $\delta P_k = P_k(t + \tau) - P_k(t)$,

может быть представлен в форме

$$\delta P_k = -ik\tau \left\langle e^{-ikx(t)} f(x(t), t) \right\rangle + \left\langle e^{-ikx(t)} (e^{-ikg(x(t), t)\delta\eta(t)} - 1) \right\rangle. \quad (6.9)$$

В соответствии с уравнениями (6.6) и (6.8), первое слагаемое в правой части выражения (6.9) преобразуется к

$$ik \left\langle e^{-ikx(t)} f(x(t), t) \right\rangle = \Phi \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) P(x, t) \right\} \quad (6.10)$$

и согласно уравнению (6.7) второе слагаемое представляется как

$$\left\langle e^{-ikx(t)} (e^{-ikg(x(t), t)\delta\eta(t)} - 1) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} [p_{kg(y, t)}(\tau) - 1] P(y, t) \quad (6.11)$$

где $p_k(\tau) = \Phi \{p(x, \tau)\} = \langle \exp[-ik\delta\eta(t)] \rangle$ есть характеристическая функция $\delta\eta(t)$.

Подставляя уравнения (6.10) и (6.11) в уравнение (6.9), деля его на τ и находя предел, мы получим следующее выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} P_k(t) = -F \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) P(x, t) \right\} + \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} \phi_{kg(y, t)} P(x, y), \quad (6.12)$$

где

$$\phi_k = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [p_k(\tau) - 1] \quad (6.13)$$

Поскольку плотность вероятности перехода $p(\Delta\eta, \tau)$ нормирована, т.е. $p_0(\tau) = 1$, то предел (6.13) должен удовлетворять условию $\phi_0 = 0$. Если $k \neq 0$, то существуют три различных случая, зависящих от того, насколько быстро $p_k(\tau) - 1$ стремится к 0 при $\tau \rightarrow 0$. Первый, если $p_k(\tau) - 1 = o(\tau)$, то $\phi_k = 0$ и белый шум не воздействует на систему вообще. Второй, если $p_k(\tau) - 1 = o(\tau)$ стремится к нулю быстрее чем τ , тогда $|\phi_k| = \infty$, т.е. влияние шума настолько сильное, что система немедленно переходит в окончательное состояние. Наконец, случай, который наиболее интересен, относится к $p_k(\tau) - 1 = O(\tau)$, т.е. $0 < |\phi_k| < \infty$, и бе-

лый шум воздействует на систему необычным способом.

Применяем обратное преобразование Фурье, которое определяется как

$$\Phi^{-1}\{u_k\} \equiv u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} u_k \quad (6.14)$$

к уравнению (6.12). Используя определение (6.13) получим

$$\Phi^{-1}\{e^{-iky} \phi_{kg(y,t)}\} = \frac{1}{|g(y,t)|} \phi\left(\frac{x-y}{g(y,t)}\right) \quad (6.15)$$

где функция

$$\phi(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [p(x, \tau) - \delta(x)] \quad (6.16)$$

является особой статистической характеристикой $p(\Delta\eta, \tau)$ при $\tau \rightarrow 0$, которая описывает влияние белого шума на систему. Поэтому искомое уравнение для $P(x, t)$, которое соответствует уравнению Ланжевена для случая произвольного белого шума, принимает форму

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) P(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{P(y, t)}{|g(y, t)|} \phi\left(\frac{x-y}{g(y, t)}\right) \quad (6.17)$$

В соответствии с определением (6.5), решение последнего уравнения должно быть нормировано и удовлетворять начальным условиям $P(x, 0) = \delta(x)$. Следует отметить, что указанное уравнение есть кратким представлением комбинации уравнений Фоккера-Планка и Колмогорова-Феллера, которые есть основными уравнениями непрерывного и дискретного марковского процессов, соответственно [19]. Для краткости, мы будем называть его обобщённым уравнением Фоккера-Планка.

Для более глубокого понимания связи между обобщённым уравнением Фоккера-Планка и свойствами белого шума, мы приводим характеристическую функцию $S_k = \langle \exp(-ik\eta(1)) \rangle$ процесса генерации белого шума $\eta(t)$ при $t = 1$. Используя выражение $\eta(1) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{[1/\tau]-1} \delta\eta(j\tau)$, она может быть записана $S_k = \lim_{\tau \rightarrow 0} (p_k(\tau))^{[1/\tau]}$. Потом заменяя $p_k(\tau)$ выражением $1 + \tau\phi_k$ и принимая во внимание

что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}$, мы определяем $S_k = \exp(\phi_k)$, т.е. $\phi_k = \ln S_k$. Т.о. из уравнения (6.12) получили альтернативную форму обобщённого уравнения Фоккера-Планка,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) P(x, t) + \Phi^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} P(y, t) \ln S_{kg(y, t)} \right\}. \quad (6.18)$$

Это уравнение отвечает за влияние любого унифицированного воздействия белого шума, а именно по средствам характеристической функции S_k , процесса генерации белого шума $\eta(t)$ при $t = 1$. В случае аддитивного белого шума, где $g(x, t) = 1$, уравнение (6.12) преобразуется

$$\frac{\partial}{\partial t} P_k(t) = -\Phi \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) P(x, t) \right\} + P_k(t) \phi_k \quad (6.19)$$

а обобщённое уравнение Фоккера-Планка (6.18) упрощается до [176]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) P(x, t) + \Phi^{-1} \{ P_k(t) \ln S_k \} \quad (6.20)$$

Отметим, что проблема получения обобщенного уравнения Фоккера-Планка, соответствующего уравнению Ланжевена (6.1) рассматривалась и ранее используя аппарат процессов Леви [183, 181 - 184]. В отличие от этого, уравнения (6.20) и (6.18), выведенные выше, записаны через характеристическую функцию S_k случайного процесса при $t = 1$. Поскольку стационарный процесс с независимыми бесконечно делимыми приращениями, $\ln S_k$ может быть представлено формулой Леви-Хинчине, которая объединяет характеристическую функцию с подходом Леви. Таким образом, оба указанные подхода приводят к различным формам уравнения Фоккера-Планка. Однако предложенный в данной работе подход является более удобным для практических приложений. В самом деле, плотность вероятности перехода полностью описывает процесс генерации шуму и в соответствии с (6.17) и $S_k = \exp(\phi_k)$ точно представляет характеристическую функцию S_k . В то же самое время, преобразовать формулу Леви-Хинчине и применить подход Леви с использованием характеристической функции S_k , является сложной задачей. [185]

5.4 Частные случаи уравнения обобщённого уравнения Фоккера-Планка

Для того, чтобы подтвердить обоснованность выражений (6.17) и (6.20) и продемонстрировать их практичность, мы рассмотрим несколько специфических белых шумов, для которых уравнения Фоккера-Планка и (6.1) известны.

5.4.1 Гауссовский белый шум

Плотность вероятности перехода $p(\Delta\eta, \tau)$ для гауссовского белого шума приведена в уравнении (6.3). Соответственно, $p_k(\tau) = \exp(-D\tau k^2)$, $\phi_k = -Dk^2$ и $S_k = \exp(-Dk^2)$. Отсюда $\Phi^{-1}\{P_k(t)k^2\} = -\partial^2 P(x, t)/\partial x^2$, выражение (6.20) приобретает вид обычного уравнения Фоккера-Планка [168] для случая аддитивного гауссовского шума [2, 69],

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)P(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \quad (6.21)$$

Если гауссовский шум мультипликативный, то $\phi_{kg(y, t)} = -Dk^2 g^2(y, t)$ и

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} \phi_{kg(y, t)} P(y, t) \right\} &= -D\Phi^{-1} \left\{ k^2 F \left\{ g^2(x, t) P(x, t) \right\} \right\} = \\ &= D \frac{\partial^2}{\partial x^2} g^2(x, t) P(x, t) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к выражению (6.12), мы снова получим обыкновенное уравнение Фоккера-Планка [2, 69]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)P(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} g^2(x, t)P(x, t) \quad (6.23)$$

Это соответствует интерпретации Ито уравнения Ланжевена для случая мультипликативного гауссовского белого шума. Отметим, что последнее выражение может быть получено из уравнения (6.17) с учетом того, что $\phi(\cdot) = D\partial^2 \delta(\cdot)/\partial x^2$.

5.4.2 Пауссоновский белый шум

В качестве второго примера мы рассмотрим пауссоновский белый шум, т.е. произвольная последовательность δ -импульсов, которая определяется как [186, 187]

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{n(t)} z_i \delta(t - t_i) \quad (6.24)$$

Здесь $n(t)$ – пауссоновский дискретный процесс с вероятностью $P(n(t) = n) = (\lambda t)^n \exp(-\lambda t)/n!$ для $n \geq 0$ достижений заданного уровня в интервале $(0, t]$, λ – темп процесса, t_i – времена достижений заданного уровня процессом, и z_i – произвольные независимые переменные с нулевым математическим ожиданием, распределенные с одинаковой плотностью вероятности $q(z)$. Так же принимается, что $\xi(t) = 0$, при $n(t) = 0$. Процесс генерирования белого шума $\eta(t)$ является постоянным скачкообразным Марковским процессом, приращения которого $\delta\eta(t) = \int_t^{t+\tau} dt' \xi(t')$ соответствуют

$$\delta\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } n(\tau) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n(\tau)} z_i & \text{при } n(\tau) \geq 1 \end{cases} \quad (6.25)$$

Чтобы найти плотность вероятности перехода $p(\Delta\eta, \tau)$, используем определение $p(\Delta\eta, \tau) = \langle \delta(\Delta\eta - \delta\eta(t)) \rangle$, которое совместно с уравнением (6.25) даёт результат

$$p(\Delta\eta, \tau) = P_0(\tau)\delta(\Delta\eta) + W(\Delta\eta, \tau) \quad (6.26)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (6.26) есть плотностью вероятности $\delta\eta(t)$ при условии, что ни один из δ -импульсов не произошёл в течение временного интервала τ . Второе слагаемое

$$W(\Delta\eta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Delta\eta - \sum_{i=1}^n z_i) \times \prod_{j=1}^n q(z_j) dz_j \quad (6.27)$$

представляет плотность вероятности $\delta\eta(t)$ при условии, что как минимум один импульс произошёл в течение временного интервала. Запишем вероятности $P_n(\tau) = P(n(\tau) = n)$ с линейной точностью по τ , т.е. $P_0(\tau) = 1 - \lambda\tau$, $P_1(\tau) = \lambda\tau$, и $P_{n \geq 2}(\tau) = 0$, и с помощью уравнений (6.26) и (6.27) получим

$$p(\Delta\eta, \tau) = (1 - \lambda\tau)\delta(\Delta\eta) + \lambda\tau q(\Delta\eta) \quad (6.28)$$

В соответствии с определением (6.16), для этой плотности вероятности $\phi(x) = \lambda[q(x) - \delta(x)]$, и обобщённое уравнение Фоккера-Планка (6.17) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)P(x, t) + \lambda P(x, t) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{P(y, t)}{|g(y, t)|} q\left(\frac{x-y}{g(y, t)}\right) \quad (6.29)$$

Для $g(x, t) = 1$, т.е. для случая аддитивного пауссоновского белого шума, это уравнение согласуется с полученными ранее [186 - 189]. Разумеется, поскольку $S_k = \exp[-\lambda(1 - q_k)]$, $q(x) = \Phi^{-1}\{g_k\}$ и $\delta(x) = \Phi^{-1}\{1\}$, та же форма уравнения (6.29) (при $g(x, y) = 1$) следует из уравнения (6.20). Отметим, что широкий класс белых шумов, которые представлены произвольными последовательностями δ -импульсов малым числом импульсов λ на единицу времени, характеризуется той же плотностью вероятности (6.28). По этому, обобщённое уравнение Фоккера-Планка (6.29) также применимо для этих шумов.

5.4.3 Сложный белый шум

Далее рассмотрим белый шум $\xi(t) = \sum_{m=1}^M \xi_m(t)$, составляющий набор независимых белых шумов $\xi_m(t)$. В этом случае, процесс генерирования белого шума может быть записан в виде

$$\eta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{m=1}^M \sum_{j=0}^{[t/\tau]-1} \delta\eta_m(j\tau) \quad (6.30)$$

По причине статистической независимости приращений $\delta\eta(j\tau)$ процесса

генерации $\eta_m(t)$, характеристическая функция $S_k = \langle \exp[-ik\eta(1)] \rangle$ для $\eta(1)$ выражается через характеристическую функцию $S_{mk} = \langle \exp[-ik\eta_m(1)] \rangle$, для $\eta_m(1)$ следующим образом следует ниже: $S_k = \prod_{m=1}^M S_{mk}$. Поэтому, в случае аддитивного сложного белого шума обобщённое уравнение Фоккера-Планка (6.20) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)P(x, t) + \sum_{m=1}^M \Phi^{-1} \{ P_k(t) \ln S_{mk} \} \quad (6.31)$$

В частности, при $M = 2$ и $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ есть соответственно гауссовским и пуассоновским белыми шумами, последнее уравнение можно преобразовать к виду [19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)P(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) - \lambda P(x, t) + \\ & + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy P(y, t) q(x - y) \end{aligned} \quad (6.32)$$

5.4.4 Белые шумы Леви

Центральная предельная теорема [38] указывает, что для широкого класса надлежащим образом масштабированных плотностей вероятности перехода $p(\Delta\eta, \tau)$, характеристическая функция S_k соответствует стационарному распределению Леви $S_k = S_k(\alpha, \beta, \gamma, \rho)$. Хорошо известно [190], что $S_k(\alpha, \beta, \gamma, \rho)$ зависит от четырёх параметров: индекса стабильности $\alpha \in (0, 2]$, параметра асимметрии $\beta \in [-1, 1]$, параметра разброса $\gamma \in (0, \infty)$ и параметра расположения $\rho \in (-\infty; \infty)$. Предполагая, в соответствии с начальным условием $P(x, 0) = \delta(x)$, что $\rho = 0$ и исключая из рассмотрения особый случай, когда $\alpha = 1$ и $\beta \neq 0$ одновременно (в случае $|\phi_k| = \infty$), мы получаем $S_k = S_k(\alpha, \beta, \gamma)$, где [190]

$$S_k(\alpha, \beta, \gamma) = \exp \left[-\gamma |k|^\alpha \left(1 + i\beta \operatorname{sgn}(k) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] \quad (6.33)$$

Далее для упрощения принимаем, что условие $g(y, t) > 0$ выполняется для всех y и t . В этом случае

$$\ln S_{kg(y,t)} = g^a(y, t) \ln S_k(\alpha, \beta, \gamma) \quad (6.34)$$

и применяя обратное преобразование Фурье (6.12) к (6.14) мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)P(x, t) + \Phi^{-1}\{G_k(t) \ln S_k(\alpha, \beta, \gamma)\} \quad (6.35)$$

где

$$G_k(t) = F\{g^\alpha(x, t)P(x, t)\} \quad (6.36)$$

Уравнение (6.35) может быть переписано в форме, содержащей производные Римана-Лиувилля, определённые как [191]

$${}_s D_{\pm}^{\sigma} h(x) = \frac{(\pm 1)^n}{\Gamma(n - \sigma)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^{s \pm x} dy h(x \mp y) y^{n-\sigma-1} \quad (6.37)$$

где ${}_s D_{+}^{\sigma}$ и ${}_s D_{-}^{\sigma}$ означают операторы левую и правую производные порядка σ ($0 < \sigma < \infty$), соответственно. Функция $h(x)$ определена на интервале $[-s, s]$, $n = 1 + [\sigma]$, и $\Gamma(z)$ – гамма функция. Используя характеристическую функцию (6.33), мы для начала представим натуральный логарифм как указано ниже:

$$\ln S_k(\alpha, \beta, \gamma) = -\gamma \frac{(1 + \beta)(ik)^\alpha + (1 - \beta)(-ik)^\alpha}{2 \cos(\pi\alpha/2)} \quad (6.38)$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (6.37) учетом, что $h(x) = g^\alpha(x, t)P(x, t)$, находим

$$(\pm ik)^\alpha G_k(t) = F\{ {}_{\infty} D_{\pm}^{\alpha} g^\alpha(x, t)P(x, t) \} \quad (6.39)$$

и объединяя результат с выражением (6.38) мы получим дробное уравнение Фоккера-Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)P(x, t) - \frac{\gamma}{2 \cos(\pi\alpha/2)} [(1+\beta) {}_{\infty}D_+^{\alpha} + (1-\beta) {}_{\infty}D_-^{\alpha}] \times \\ \times g^{\alpha}(x, t)P(x, t) \end{aligned} \quad (6.40)$$

Уравнение (6.40) представляет все известные формы дробного уравнения Фоккера-Планка, которые согласуются с уравнением Ланжевена для случая белого шума Леви. Оно может быть легко записано в форме, содержащей производную Рисса, которая определяется как [191]

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial |x|^{\alpha}} h(x) = -F^{-1} \{ |k|^{\alpha} h_k \} \quad (6.41)$$

С помощью этого определения и отношений

$$({}_{\infty}D_+^{\alpha} + {}_{\infty}D_-^{\alpha})h(x) = 2 \cos \frac{\pi\alpha}{2} F^{-1} \{ |k|^{\alpha} h_k \} \quad (6.42)$$

и

$$({}_{\infty}D_+^{\alpha} - {}_{\infty}D_-^{\alpha})h(x) = 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} F^{-1} \{ |k|^{\alpha-1} h_k \} \quad (6.43)$$

которые следуют прямо из представления Фурье ${}_{\infty}D_{\pm}^{\alpha}h(x) = \Phi^{-1} \{ (\pm ik)^{\alpha} h_k \}$ для производных Римана-Лиувилля, уравнение (6.40) может быть упрощено до

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)P(x, t) + \gamma \frac{\partial^{\alpha}}{\partial |x|^{\alpha}} g^{\alpha}(x, t)P(x, t) + \\ + \gamma\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial |x|^{\alpha-1}} g^{\alpha}(x, t)P(x, t) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Очевидно, что для $\alpha = 2$ это уравнение принимает форму обыкновенного уравнения Фоккера-Планка (6.23) при $D = \gamma$. Для $\alpha < 2$, различные частные случаи были описаны несколькими авторами [170 - 175].

Стоит подчеркнуть то, что согласно обобщённой предельной центральной теореме, обоснованность выражений (6.40) и (6.44) не исчерпывается белым шумом Леви, чьи приращения распределены по стационарному закону. Напри-

мер, такие же уравнения получены для надлежащим образом масштабированной плотности вероятности перехода отличной от стационарной но при условии, что но их «хвосты» совпадают. Для этих случаев, когда плотность вероятности перехода не полностью совпадает со стационарным распределением, основная проблема заключается в нахождении стабильных параметров α , β и γ для плотности вероятности перехода $p(\Delta\eta, \tau)$. Однако, это планы для дальнейших исследований.

5.4.5 Стационарные полеты Леви в замкнутой области

Используем уравнение (6.44) для случая стационарных полетов Леви в бесконечно глубокой потенциальной яме. Мы предполагаем, что $f(x, t) = 0$, внутри ямы – т. е. для $x \in [-l, l]$, и что границы при $x = \pm l$ непреодолимы для частиц – т. е., $P(x, t) = 0$ при $|x| > l$. Для этих условий, уравнение (6.44) для стационарной плотности вероятности $P_{st}(x)$ упрощается до

$$(1 + \beta) {}_l D_+^\alpha P_{st}(x) + (1 - \beta) {}_l D_-^\alpha P_{st}(x) = 0.$$

Переписывая это уравнение как $dJ(x)/dx = 0$, где $J(x)$ – это поток вероятности, и используя граничное условие $J(\pm l) = 0$ [168], мы получаем уравнение $J(x) = 0$ при $0 < \alpha < 1$ читается как

$$(1 + \beta) \int_{-l}^x dy \frac{P_{st}(y)}{(x-y)^\alpha} - (1 - \beta) \int_x^{-l} dy \frac{P_{st}(y)}{(y-x)^\alpha} = 0. \quad (6.45)$$

Факт того, что ${}_l D_+^\alpha (l \pm x)^{\alpha-1} = 0$ [191] предполагает, что нужно искать решение уравнения (6.45) в виде $P_{st}(x) = C(l+x)^{-\nu}(l-x)^\mu$, где C – нормировочный множитель. Параметры ν и μ определены уравнением

$$\begin{aligned} (1 + \beta) B(1 - \alpha, 1 - \nu) z^{1-\alpha} F(1 - \alpha, \mu; 2 - \alpha - \nu; -z) = \\ = (1 - \beta) B(1 - \alpha, 1 - \mu) F(1 - \alpha, \mu; 2 - \alpha - \mu; -z^{-1}). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Здесь $z = (l+x)/(l-x)$, $B(a, b) = \Gamma(a) \Gamma(b) / \Gamma(a+b)$ является бета-

функцией, и $F(a, b; c; y)$ – это Гассовская гипергеометрическая функция. Уравнение (6.46) должно не зависеть от x , до тех пор, пока ν и μ не зависят от x . Это требование приводит к условию $\alpha + \nu + \mu = 2$. Используя отношение $F(a, b; c; -y) = (1 + y)^{-\alpha}$ [193], преобразуем уравнение (6.46) к виду

$$(1 + \beta)B(1 - \alpha, 1 - \nu) - (1 - \beta)B(1 - \alpha, 1 - \mu) = 0. \quad (6.47)$$

Решая уравнение $\alpha + \nu + \mu = 2$ и (6.47) относительно ν и μ , получим

$$\begin{cases} \mu \\ \nu \end{cases} = 1 - \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{\pi} + \arctg\left(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right), \quad (6.48)$$

где $\arctg(x)$, есть основным значением обратной функции тангенса. Подобные вычисления для случая $1 < \alpha \leq 2$ приводят к такому же результату, и формула (6.48) есть правильной для всех $\alpha \in (0, 2]$ (исключая случай, когда $\alpha = 1$ $\beta \neq 0$). Наконец, рассчитывая нормировочный множитель C , получаем

$$P_{st}(x) = (2l)^{1-\alpha} \frac{(l+x)^{-\nu} (l-x)^{-\mu}}{B(1-\nu, 1-\mu)}. \quad (6.49)$$

Уравнение (6.48) и (6.49) представляют наш второй главный результат. Частицы, которые совершают полеты Леви распределены в бесконечно глубокой потенциальной яме согласно бета распределению (см. 6.1). Главное свойство этого распределения состоит в сингулярности поведения $P_{st}(x)$ при $|x| \rightarrow l$ при $\alpha < 2$ и $\beta \neq \pm 1$. По той причине, что и для случая, $\alpha < 2$ частицы могут совершать случайные переходы в обоих направлениях. Тем не менее, границы не пересекаемы, и следовательно частицы сконцентрированы в основном возле этих двух границ. В частности, для $\beta = 0$, уравнение (6.48) и (6.49) дает виде

$$P_{st}(x) = (2l)^{1-\alpha} \Gamma(\alpha) (l^2 - x^2)^{\alpha/2-1} / \Gamma^2(\alpha/2).$$

С другой стороны, для $\beta = \pm 1$, односторонние переходы доминируют и частицы сконцентрированы возле одной из границ. В частности,

$$P_{st}(x) = \delta(l - \operatorname{sgn}(\beta)x),$$

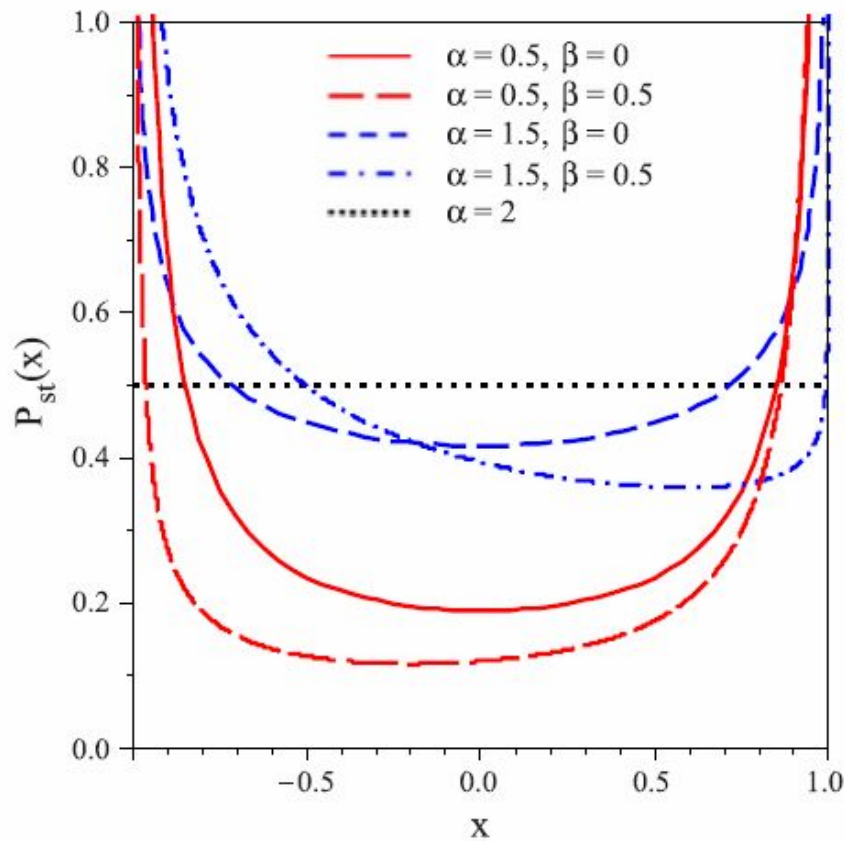


Рисунок 6.1 – (Цветные линии) Участки стационарной плотности вероятности (6.49) для разных значений параметра α и β и $l = 0$

если $0 < \alpha \leq 1$, и

$$P_{st}(x) = (2l)^{1-\alpha} (1-\alpha)[l + \operatorname{sgn}(\beta)x]^{\alpha-2},$$

если $1 < \alpha \leq 2$. Наконец, для $\alpha = 2$ траектории $x(t)$ непрерывны и стационарное распределение однородно – т. е., $P_{st}(x) = 1/(2l)$. (см. рисунок 6.1)

5.4.6 Белый шум определенный бесконечно делимым S_k

Хорошо известно (см, например, [169, 185]), что любой стационарный процесс с независимыми приращениями, включая и процесс генерации шума, есть бесконечно делимым. Это значит, что условие $S_k = [S_k^{(n)}]^n$ при $S_k^{(n)}$ – характеристической функции, выполняется для любых целых положительных n . В

это случае, $\ln S_k$ может быть записано в виде [185]:

$$\ln S_k = \int_{-\infty}^{\infty} dz p(z) \frac{\exp[-ikz] - 1 + ik \sin z}{z^2}, \quad (6.50)$$

где $\rho(z)$ – плотность меры Леви при $\eta(1)$. В соответствии с интегральным представлением дельта-функции $\delta(\cdot) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(\cdot)}$, последний член уравнения (6.18) может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} P(y, t) \ln S_{kg(y, t)} \right\} = \\ \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\rho(z)}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\delta[x - y - zg(y, t)] - \delta(x - y) + \right. \\ \left. + \sin z \frac{\delta}{\delta x} g(x, t) \delta(x - y) \right) P(y, t). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Вычисляя интеграл в уравнении (6.51) и используя формулу

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta[x - y - zg(y, t)] P(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} g^n(x, t) P(x, t) \equiv \\ \equiv \exp\left(-z \frac{\partial}{\partial x} g(x, t)\right) P(x, t), \end{aligned} \quad (6.52)$$

которая следует из разложения Тейлора $\delta[x - y - zg(y, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \times g^n(y, t) (\partial/\partial x)^n \delta(x - y)$, мы получили обобщенное уравнение Фоккера-Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) P(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\rho(z)}{z^2} \times \\ \times \left[\exp\left(-z \frac{\partial}{\partial x} g(x, t)\right) - 1 + \sin z \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right] P(x, t), \end{aligned} \quad (6.53)$$

которое было получено в [183] в рамках функционального подхода.

5.5 Точные решения обобщенного уравнения Фоккера-Планка

Важным аспектом обобщенного уравнения Фоккера-Планка (6.20), соответствующего уравнению Ланжевена (6.1), является то, что в некоторых случаях его можно решить для всех характеристических функций S_k , то есть для всех белых шумов, которые задаются через временную производную от процессов генерации шума. Это дает уникальную возможность подробно изучить воздействие различных белых шумов на одну и ту же систему. Далее будет рассмотрено динамику сверхзатухающих частиц в линейном и квадратическом потенциале. Также будет получено стационарное решение дробного уравнения Фоккера-Планка (6.40) в случае мультипликативного белого шума Леви и потенциала специального вида.

5.5.1 Линейный потенциал

В данном случае $U(x, t) = U(x) = -f_0x$ (f_0 – постоянная сила, действующая на частицу) и, так как $\Phi\{\delta f(x, t)P(x, t)/\delta x\} = ikf_0P_k(t)$, соотношение (6.12) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}P_k(t) = (-ikf_0 + \phi_k)P_k(t). \quad (6.54)$$

Решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальному условию $P_k(0) = 1$, которое следует из условия $P(x, 0) = \delta(x)$, представлено формулой

$$P_k(t) = \exp(-ikf_0t + \phi_k). \quad (6.55)$$

Таким образом, используя соотношение и $S_k = \exp(\phi_k)$, можем записать решение уравнения (6.20) как

$$P(x, t) = \Phi^{-1}\{S_k^t \exp(-iktf_0)\}. \quad (6.56)$$

Для того чтобы исследовать, как ведут себя свободные частицы, при $f_0 = 0$, которое зависит от характера белого шума, мы посчитали второй момент

$\langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 P(x, t)$ координаты частицы $x(t)$. Используя уравнение (6.56) и интегральную формулу $\delta''(k) = -(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{ikx}$, мы получили

$$\langle x^2(t) \rangle = -\frac{d^2}{dk^2} S_k^t \Big|_{k=0}. \quad (6.57)$$

Так как в случае свободных частиц $x(t) = \eta(t)$, мы имеем $S_k = P_k(1)$, то нормировка $P(x, t)$ дает $S_0 = 1$. Кроме того, если первый момент $x(t)$ существует, то он равен нулю, т.к. $dS_k/dk|_{k=0} = 0$. При этих условиях, уравнение (6.57) сводится к виду

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2(1) \rangle t. \quad (6.58)$$

Если второй момент $\langle x^2(1) \rangle$, который может быть представлен в виде $\langle x^2(1) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\langle \left[\sum_{j=0}^{\lfloor 1/\tau \rfloor - 1} \delta\eta(j\tau) \right]^2 \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \langle \delta\eta^2(0) \rangle / \tau$ при $\langle \delta\eta^2(0) \rangle = \langle [\eta(\tau) - \eta(0)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 p(y, \tau)$, т.е., $\langle \delta\eta^2(0) \rangle = O(\tau)$, существует, тогда белый шум приводит к обычному диффузионному процессу.

В частности $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$ для Гауссовского белого шума, и $\langle \delta\eta^2(0) \rangle = \lambda t \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 q(y)$ для Пуассоновского белого шума. Если плотности вероятности перехода $p(\Delta\eta, \tau)$ имеет т. н. «тяжелый хвост», т.е., $\langle \delta\eta^2(0) \rangle \rightarrow \infty$, то $P(x, t)$ растет таким образом, что $\langle x^2(t) \rangle$ не существует. Такое поведение показано, например, через плотность вероятности $P(x, t) = \Phi^{-1} \{S_k^t(\alpha, \beta, \gamma)\}$ свободных частиц, движение которых обусловлено белым шумом Леви при $\alpha < 2$ [170]. В то время, как коррелированный шум вызывает множество различных диффузионных процессов свободных частиц [114], шум, возникающий в результате рассматриваемого процесса генерации, может приводить лишь к обычной диффузии (при $\langle \delta\eta^2(0) \rangle < \infty$), или к поведению, качественно отличающемуся от диффузии, который характеризуется плотностью вероятности $P(x, t)$ с бесконечным вторым моментом (при $\langle \delta\eta^2(0) \rangle = \infty$).

5.5.2 Квадратичный потенциал

В случае квадратичного потенциала, где $U(x, t) = U(x) = bx^2/2$ ($b > 0$), уравнение (6.19) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P_k(t) + bk \frac{\partial}{\partial t} P_k(t) = P_k(t) \phi_k. \quad (6.59)$$

Это основное решение может быть получено при помощи характеристических методов [192], например, и будет выглядеть так

$$P_k(t) = \exp\left(\frac{1}{b} \int_0^k dz \frac{\phi_z}{z} + c_1\right) \Psi\left(\frac{1}{b} \ln|k| + c_2 - t\right), \quad (6.60)$$

где $\Psi(x)$ – случайная функция, и c_1 и c_2 – константы интегрирования. Так как, $P_k(0) = 1$, из выражения (6.60) получим

$$\Psi\left(\frac{1}{b} \ln|k| + c_2\right) = \exp\left(-\frac{1}{b} \int_0^k dz \frac{\phi_z}{z} - c_1\right) \quad (6.61)$$

Заменив k на ke^{-bt} в этом соотношении, мы получили

$$\Psi\left(\frac{1}{b} \ln|k| + c_2 - t\right) = \exp\left(-\frac{1}{b} \int_0^{ke^{-bt}} dz \frac{\phi_z}{z} - c_1\right) = \exp\left(-\frac{1}{b} \int_0^k dz \frac{\phi_{ze^{-bt}}}{z} - c_1\right), \quad (6.62)$$

и подставляя этот результат в уравнение (6.60), мы получили

$$P_k(t) = \exp\left(-\frac{1}{b} \int_0^k dz \frac{\phi_{ze^{-bt}} - \phi_z}{z}\right). \quad (6.63)$$

В итоге, говоря, что $\phi_k = \ln S_k$, зависимое от времени решение уравнения (6.20), $P(x, t) = \Phi^{-1}\{P_k(t)\}$, может быть записано в виде

$$P(x, t) = F^{-1}\left\{\exp\left(-\frac{1}{b} \int_0^k dz \frac{1}{z} \ln \frac{S_{ze^{-bt}}}{S_z}\right)\right\}. \quad (6.64)$$

Отметим, что $\ln(S_{ze^{-bt}}/S_z) \sim -btzd \cdot \ln S_z/dz$ при $b \rightarrow 0$. Отсюда

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{b} \int_0^k dz \frac{1}{z} \ln \frac{S_{ze^{-bt}}}{S_z} = -\ln S_k^t, \quad (6.65)$$

и в случае свободных частиц, т. е., $b = 0$, решение уравнения (6.64) сводится к $P(x, t) = \Phi^{-1}\{S_k^t\}$. Этот результат подтвержден уравнением (6.56) при $f_0 = 0$.

5.5.2.1 Пуассоновский белый шум

В качестве первого примера применения полученных результатов, рассмотрим Пуассоновский белый шум. В этом случае $\phi_k = -\lambda(1 - q_k)$, и уравнение (6.63) дает

$$P_k(t) = \exp\left(-\frac{\lambda}{b} \int_0^k dz \frac{q_{ze^{-bt}} - q_z}{z}\right). \quad (6.66)$$

Далее, находим, что плотность вероятности $q(\Delta\eta)$ экспоненциальная, то есть $q(\Delta\eta) = (r/2)\exp[-r|\Delta\eta|]$ при $r > 0$. Это значит, что $q_k = r^2(r^2 + k^2)^{-1}$,

$$\int_0^k dz \frac{q_{ze^{-bt}} - q_z}{z} = \int_0^k dz \frac{r^2(1 - e^{-2bt})z}{(r^2 + z^2)(r^2 + z^2 e^{-2bt})} = \frac{1}{2} \ln \frac{r^2 + k^2}{r^2 + k^2 e^{-2bt}}, \quad (6.67)$$

и уравнение (6.66) принимает вид

$$P_k(t) = \left(\frac{r^2 + k^2 e^{-2bt}}{r^2 + k^2}\right)^{\frac{\lambda}{2b}}. \quad (6.68)$$

При $t \rightarrow \infty$ зависимое от времени решение $P(x, t) = \Phi^{-1}\{P_k(t)\}$ обобщенного уравнения Фоккера-Планка (6.20) ведет к стационарному решению $P_{st}(x, t) = \Phi^{-1}\{P_k(\infty)\}$. Используя отношение [164]

$$\int_0^\infty dk \frac{\cos kx}{(r^2 + k^2)^s} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \left(\frac{|x|}{2r}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(r|x|), \quad (6.69)$$

где $\text{Re } s > 0$ и $K_i(x)$ – модифицированные функции Бесселя третьего типа (или функции Макдональда) [193], мы получаем

$$P_{st}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r(r|x|)^{s-1/2}}{2^s \Gamma(s)} K_{s-1/2}(r|x|), \quad (6.70)$$

при $s = \lambda/(2b)$. Это так называемое K -распределение, которое является одним из основных распределений описывающим статистические свойства рассеивания волн [194]. Это интересно с той точки зрения, что для $s \leq 1/2$ стационарная плотность вероятности демонстрирует сингулярное поведение возле дна ($x = 0$) потенциальной ямы: $P_{st}(x, t) \sim 1/|x|^{1-2s}$ если $0 < s < 1/2$, и $P_{st}(x, t) \sim \ln|x|$, если $s = 1/2$.

5.5.2.2 Белый шум Леви

В данном случае $S_k = S_k(\alpha, \beta, \gamma)$ и уравнение (6.33) следует трактовать следующим образом

$$\ln \frac{S_{ze^{-bt}}}{S_z} = \gamma(1 - e^{-abt}) |z|^\alpha \left(1 + i\beta \operatorname{sgn}(z) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right). \quad (6.71)$$

Используя полученный результат и интегральную формулу

$$\int_0^k dz \frac{|z|^\alpha}{z} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn} z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{|k|^\alpha}{\alpha} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn} k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.72)$$

мы получили, что

$$\int_0^k dz \frac{1}{z} \ln \frac{S_{ze^{-bt}}}{S_z} = \frac{\gamma}{\alpha} (1 - e^{-abt}) |k|^\alpha \times \left(1 + i\beta \operatorname{sgn}(k) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right), \quad (6.73)$$

и решение уравнения (6.64) будет иметь вид

$$P(x, t) = \Phi^{-1} \left\{ S_k \left(\alpha, \beta, \gamma \frac{1 - e^{-abt}}{\alpha b} \right) \right\}. \quad (6.74)$$

Отметим, что эти особые случаи этого решения были известны до этого. Особенно, зависящие от времени решения для симметричного белого шума Леви ($\beta = 0$) было получено в [170], и стационарное решение для асимметричного белого шума Леви в [195].

5.5.2.3 Потенциал специального вида

В качестве третьего примера получим стационарную плотность вероятности $P_{st}(x)$ для сверхзатухающих частиц, взаимодействующих с потенциалом специального вида

$$U(x) = c \int_0^x dy y g^\alpha(y) \quad (6.75)$$

где $c > 0$ и задается мультипликативным белым шумом Леви при $g(x, t) = g(x) > 0$. В случае $f(x, t) = -cxg^\alpha(x)$ уравнение (6.35) сводится к

$$c \frac{d}{dx} xG(x) + F^{-1}\{G_k \ln S_k(\alpha, \beta, \gamma)\} = 0, \quad (6.76)$$

где $G(x) = g^\alpha(x) P_{st}(x)$. Используя преобразование Фурье в уравнение (6.76), мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-ck \frac{d}{dx} G_k + G_k \ln S_k(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad (6.77)$$

интегрирование которого даст

$$\ln \frac{G_k}{G_0} = \frac{1}{c} \int_0^k dz \frac{1}{z} \ln S_k(\alpha, \beta, \gamma). \quad (6.78)$$

Используя определение (6.33) и интегральную формулу (6.72), получим

$$G_k = G_0 S_k(\alpha, \beta, \gamma / \alpha c). \quad (6.79)$$

Таким образом,

$$P_{st}(x) = G_0 g^{-\alpha}(x) F^{-1}\{S_k(\alpha, \beta, \gamma / \alpha c)\}. \quad (6.80)$$

Чтобы исключить $G_0 = \langle g^\alpha(x(t)) \rangle$ из уравнения (6.80), мы используем условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} dx P_{st}(x) = 1$, и получаем искомую плотность вероятности

$$P_{st}(x) = \frac{g^{-\alpha}(x) F^{-1}\{S_k(\alpha, \beta, \gamma / \alpha c)\}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx g^{-\alpha}(x) F^{-1}\{S_k(\alpha, \beta, \gamma / \alpha c)\}}. \quad (6.81)$$

Уравнение (6.81) является первым аналитическим решением дробного уравнения Фоккера-Планка (6.40) соответствующего уравнению Ланжевена (6.1) с мультипликативным белым шумом.

5.6 Выводы к разделу 5

Получена новая форма обобщенного уравнения Фоккера-Планка, соответствующего уравнению Ланжевена для сверхзатухающих частиц, взаимодействующими с флуктуирующей средой. Действие последней описывается с помощью мультипликативного белого шума, задающимся процессом генерации, независимые приращения которого распределены по произвольному закону. Главное преимущество полученного обобщенного уравнения Фоккера-Планка состоит в том, что оно учитывает действие белого шума единообразно – посредством характеристической функции процесса генерирования белого шума для безразмерного времени $t = 1$. Так как характеристическая функция полностью описывается плотностью вероятности перехода процесса генерирования, то именно данная плотность вероятности, в конечном счете, определяет слагаемое в обобщенном уравнении Фоккера-Планка, которое описывает влияние шума на поведение системы. Данный факт был подробно рассмотрен для различных белых шумов, включая белые шумы Пуассона и Леви.

Обобщенное уравнение Фоккера-Планка для частицы было решено для линейного и квадратичного потенциалов и произвольного аддитивного белого шума. Важной особенностью данных аналитических решений является, предоставляемая ими возможность исследовать влияния различных белых шумов на одну и ту же систему. В качестве иллюстрации, были выведены и детально проанализированы зависящие от времени и стационарные решения, которые соответствуют белым шумам Пуассона и Леви. Кроме того, также было представлено аналитическое решение дробного уравнения Фоккера-Планка, которое описывает стационарное распределение сверхзатухающих частиц в потенциале заданного вида, под действием мультипликативного белого шума Леви.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной НИР получены следующие основные результаты:

1 Изучено влияние на тепловую и динамическую стабильность магнитного момента одноосной ферромагнитной наночастицы циркулярно поляризованного магнитного поля (поля, которое вращается в плоскости, перпендикулярной оси легкого намагничивания). Показано, что, вследствие естественной прецессии магнитного момента, наличие такого поля снимает вырождение в направлении, перпендикулярном плоскости поляризации и существенно изменяет термическую и динамическую стабильность магнитных моментов. Данный результат не является тривиальным, поскольку вращающееся поле не имеет компонент вдоль легкой оси намагничивания наночастицы. Снятие вырождения приводит к тому, что, во-первых, циркулярно поляризованное поле намагничивает систему наночастиц, легкие оси которых перпендикулярны плоскости поляризации поля, а направление естественной прецессии совпадает с направлением вращения поля. И, во-вторых, с помощью поляризованного поля можно контролируемым образом изменять относительную термостабильность магнитных моментов в “верхнем” и “нижнем” состояниях, что может быть использовано в устройствах записи и хранения информации. Данные результаты были получены с помощью детерминистского и стохастического уравнений Ландау-Лифшица. С помощью первого найден критерий устойчивости вынужденной прецессии магнитного момента при нулевой температуре и впервые показано, что при определенной амплитуде поля происходит переориентация магнитных моментов, направление естественной прецессии которых совпадает с направлением вращения поля. А с помощью стохастического уравнения Ландау-Лифшица и соответствующего обратного уравнения Фоккера-Планка разработан метод определения вероятностей переориентации магнитных моментов и рассчитана резонансная зависимость намагниченности от частоты поля. Используя аналитические и численные решения уравнения Ландау-Лифшица, построены фазо-

вые диаграммы для прецессионных состояний магнитного момента и определены сценарии магнитной переориентации наночастицы. Показано, что в случае, когда направление естественной прецессии магнитного момента совпадает с направлением поляризации поля, может существовать три типа вынужденной прецессии: 1) периодическая прецессия с малым постоянным углом прецессии (P_1 прецессия), 2) периодическая прецессия с большим постоянным углом прецессии (P_2 прецессия), и 3) квазипериодическая прецессия с переменным углом прецессии (Q прецессия). Если направления естественной прецессии и поляризации поля противоположные, тогда существует только один тип вынужденной прецессии – периодическая прецессия (P прецессия). Показано также, что переориентация магнитного момента вследствие увеличения амплитуды поляризованного поля может происходить по трем сценариями: (а) P_1 - P переориентация, (б) P_1 - Q - P переориентация, и (в) P_1 - P_2 - Q - P переориентация.

2 С помощью уравнений Ланжевена и Фоккера-Планка изучены особенности аномальной диффузии частиц в средах, которые характеризуются фрактальными свойствами, и впервые выявлено явление изменения характера диффузии вследствие изменения интенсивности шума для системы, которая находится под влиянием двух зависимых мультипликативных шумов. Для этого случая найдена зависящая от времени точная функция распределения и рассчитаны ее основные числовые характеристики. Кроме того, определена точная функция распределения частиц, которые движутся под действием постоянной силы в случайном кусочно-линейном потенциале. Последний результат имеет фундаментальное значение, поскольку позволяет исследовать процесс термализации и найти эффективную температуру таких частиц. Это является первым примером возбужденных систем, для которых эффективная температура может быть определена исходя из точной функции распределения.

3 В случае большого затухания изучена динамика классических частиц, которые находятся в постоянном силовом поле и взаимодействуют со случайным кусочно-линейным потенциалом, описывающим влияние сред с замороженным дихотомическим беспорядком. В рамках метода, который базируется

на интегрировании по реализациям случайного дихотомического силового поля, найдена точная плотность функции распределения частиц по координатам. Показано, что эта плотность имеет регулярную часть, которая является определяющей на малых временах, и сингулярную (пропорциональную δ -функции Дирака) часть, играющую основную роль на больших временах. Для оценки степени отличия найденной функции распределения от гауссовского распределения рассчитана временная зависимость коэффициента эксцесса. Показано, что при определенных условиях динамика частиц становится подобной броуновскому движению, и в этом случае рассчитаны эффективный коэффициент диффузии частиц и эффективная температура среды. Кроме того, определены статистические характеристики времени прибытия частицы, находящейся в начальный момент времени в начале координат, в заданную точку на координатной оси. В частности, найдены точные выражения для плотности вероятности и моментов этого времени. Показано, что при малых расстояниях от начала координат плотность вероятности времени прибытия является почти постоянной, с ростом этого расстояния плотность вероятности становится линейной функцией времени, а при дальнейшем увеличении расстояния становится унимодальной и приближается к гауссовскому распределению. Для оценки степени отличия найденного распределения от гауссовского рассчитаны временные зависимости коэффициентов эксцесса и асимметрии. Полученные результаты могут быть использованы для изучения движения заряженных частиц в случайно-неоднородных слоистых средах.

4 Разработан новый метод описания систем, взаимодействующих с сильнофлуктуирующей средой, динамика которых подчиняется уравнению Ланжевена. Влияние среды моделируется шумом, который генерируется однородным случайным процессом с независимыми приращениями, распределенными произвольным образом. Выведено обобщенное уравнение Фоккера-Планка, отвечающее такому уравнению Ланжевена, и найдены его точные решения в отдельных случаях. Показано, что в случае шумов, чьи генерирующие процессы имеют приращения, распределенные по законам с «тяжелыми хво-

стами», обобщенное уравнение Фоккера-Планка сводится к дробному уравнению Фоккера-Планка, параметры которого выражаются через асимптотические характеристики плотности вероятности перехода генерирующего процесса. Найдено точное стационарное решение дробного уравнения Фоккера-Планка, которое описывает полеты Леви для частиц в бесконечно глубокой потенциальной яме. Показано, что частицы в яме распределены согласно бета-распределению, имеющему сингулярности на границах ямы. Это означает, что частицы, совершающие полеты Леви, концентрируются преимущественно вблизи непроницаемых границ. Данный результат может быть полезным при изучении распределения тяжелых ионов в сильно неравновесной плазме и частиц в турбулентном потоке.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВРАЩАЮЩАЯСЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Вращающаяся декартова система координат x' , y' , z' образована ортами $\mathbf{e}_{x'}(t)$, $\mathbf{e}_{y'}(t)$ и $\mathbf{e}_{z'}(t)$, которые выражаются через орты начальной (лабораторной) координатной системы так:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{x'} &= \cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \rho \sin(\omega t)\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{y'} &= -\rho \sin(\omega t)\mathbf{e}_x + \cos(\omega t)\mathbf{e}_y\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

$\mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_z$. Согласно выражению (A.1), обратное преобразование имеет форму:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \cos(\omega t)\mathbf{e}_{x'} - \rho \sin(\omega t)\mathbf{e}_{y'} \\ \mathbf{e}_y &= \rho \sin(\omega t)\mathbf{e}_{x'} + \cos(\omega t)\mathbf{e}_{y'}\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

и

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_{x'} &= \rho\omega t\mathbf{e}_{y'} \\ \dot{\mathbf{e}}_{y'} &= -\rho\omega\mathbf{e}_{x'}\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Объединенные векторы вращения $\mathbf{e}_{x''}(t)$, $\mathbf{e}_{y''}(t)$ и $\mathbf{e}_{z''}(t)$ в декартовой системе координат может быть представлена в следующей форме

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{x''} &= \frac{(u_{x'}\mathbf{e}_{x'} + u_{y'}\mathbf{e}_{y'})u_{z'}}{\sqrt{u_{x'}^2 + u_{y'}^2}} - \sqrt{u_{x'}^2 + u_{y'}^2}\mathbf{e}_{z'}, \\ \mathbf{e}_{y''} &= \frac{(-u_{y'}\mathbf{e}_{x'} + u_{x'}\mathbf{e}_{y'})u_{z'}}{\sqrt{u_{x'}^2 + u_{y'}^2}}, \\ \mathbf{e}_{z''} &= u_{x'}\mathbf{e}_{x'} + u_{y'}\mathbf{e}_{y'} + u_{z'}\mathbf{e}_{z'}\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

которая получена обратной трансформацией из

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{x'} &= \frac{(u_x u_z \mathbf{e}_{x'} - u_y \mathbf{e}_{y'}) u_z'}{\sqrt{u_{x'}^2 + u_{y'}^2}} + u_x \mathbf{e}_{z''}, \\
\mathbf{e}_{y'} &= \frac{(u_y u_z \mathbf{e}_{x''} + u_x \mathbf{e}_{y''})}{\sqrt{u_{x'}^2 + u_{y'}^2}} + u_y \mathbf{e}_{z''}, \\
\mathbf{e}_{z''} &= -\sqrt{u_{x'}^2 + u_{y'}^2} \mathbf{e}_{x''} + u_z \mathbf{e}_{z''}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Отсюда и из выражения (A.3) простыми вычислениями получим:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_{x''} &= \rho \omega u_z \mathbf{e}_{y''}, \\
\dot{\mathbf{e}}_{y''} &= -\rho \omega (u_z \mathbf{e}_{x''} + \sqrt{u_{x'}^2 + u_{y'}^2} \mathbf{e}_{z''})
\end{aligned} \tag{A.6}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ (4.29)

В соответствии с (4.26), характеристическая функция $\phi_t(\eta)$ может быть записана в виде

$$\phi_t(\eta) = -e^{-(\lambda-i\eta)t} [A(\eta)e^{(\lambda-i\eta)gt} + B(\eta)e^{-(\lambda-i\eta)gt}], \quad (\text{B.1})$$

где

$$A(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iz + y + 2g(\lambda - i\eta)}{(z - z_1)(z - z_2)} e^{(iz+y)t} dz, \quad (\text{B.2})$$

$$B(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(f - g)}{(z - z_3)(z - z_4)} e^{(iz+y)t} dz. \quad (\text{B.3})$$

Применяя теорему о вычетах для вычисления интегралов в выражениях (B.2) и (B.3), получим

$$\begin{aligned} A(\eta) &= i[\text{Res}\Psi(\eta; z_1) + \text{Res}\Psi(\eta; z_2)], \\ B(\eta) &= i[\text{Res}\Phi(\eta; z_3) + \text{Res}\Phi(\eta; z_4)]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Здесь $\text{Res}\Psi(\eta; z_{1,2})$ и $\text{Res}\Phi(\eta; z_{3,4})$ это вычеты функций

$$\begin{aligned} \Psi(\eta; z) &= \frac{iz + y + 2g(\lambda - i\eta)}{(z - z_1)(z - z_2)} e^{(iz+y)t}, \\ \Phi(\eta; z) &= \frac{\lambda(f - g)}{(z - z_3)(z - z_4)} e^{(iz+y)t} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

комплексной переменной z в точке z_k . Полагая, что $y > \lambda(f + g)$ (в этом случае $\text{Im } z_k > 0$), и принимая во внимание, что $\text{Res}\Psi(\eta; z_{1,2}) = \lim_{z \rightarrow z_{1,2}} (z - z_{1,2})\Psi(\eta; z)$ и $\text{Res}\Phi(\eta; z_{3,4}) = \lim_{z \rightarrow z_{3,4}} (z - z_{3,4})\Phi(\eta; z)$, из выражений (B.4), (B.5) и (4.27) находим

$$A(\eta) = -e^{-(\lambda-i\eta)gt} \left(\frac{g(\lambda-i\eta)}{b(\eta)-ia(\eta)} \sinh[b(\eta)t - ia(\eta)t] + \cosh[b(\eta)t - ia(\eta)t] \right),$$

$$B(\eta) = \frac{\lambda(g-f)}{b(\eta)-ia(\eta)} e^{(\lambda-i\eta)gt} \sinh[b(\eta)t - ia(\eta)t]. \quad (\text{B.6})$$

Окончательно, подставляя (B.6) в (B.1), получим (4.29).

ПРИЛОЖЕНИЕ С
ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ НОРМИРОВКИ ДЛЯ $W_n(t)$

Введем величину

$$S_n(t) = \int_{\Omega_n(t)} \prod_{j=1}^n p(s_j) ds_j \quad (\text{C.1})$$

с $n \geq 1$. Согласно определениям $\Omega_n(t)$ и \tilde{s}_k , (C.1) можно переписать в виде

$$S_n(t) = \int_0^{\tilde{s}_1} p(s_1) ds_1 \int_0^{\tilde{s}_2} p(s_2) ds_2 \dots \int_0^{\tilde{s}_n} p(s_n) ds_n. \quad (\text{C.2})$$

Используя в уравнении (4.8) интегральное выражение $\int_{\tilde{s}_{n+1}}^{\infty} p(s) ds = 1 - \int_0^{\tilde{s}_{n+1}} p(s_{n+1}) ds_{n+1}$, следующее из условий нормировки для $p(s)$, можно выразить плотность вероятности $W_n(t)$ через величину $S_n(t)$ следующим образом:

$$W_n(t) = S_n(t) - S_{n+1}(t). \quad (\text{C.3})$$

Учитывая тот факт, что $S_{\infty}(t) = 0$, такое представление функции $W_n(t)$ дает $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) = S_1(t)$. С другой стороны, поскольку $W_0(t) = 1 - S_1(t)$, убеждаемся, что имеет место условие нормировки $W_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ D

ВЫВОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Для расчета интегралов в уравнении (4.73),

$$Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda e^{v_0 x}}{v_0 v_1 - \lambda^2} d\kappa, \quad Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_2 e^{v_0 x}}{v_0 v_2 - \lambda^2} d\kappa, \quad (D.1)$$

используется метод контурного интегрирования [165]. Согласно (4.70) и (4.75), подынтегральные выражения в уравнении (D.1) $R(\kappa) = \lambda \exp(v_0 x) / (v_0 v_1 - \lambda^2)$ и $S(\kappa) = v_2 \exp(v_0 x) / (v_0 v_2 - \lambda^2)$ можно записать в виде

$$R(\kappa) = -\frac{\lambda}{(\kappa - \kappa_1)(\kappa - \kappa_2)} e^{(i\kappa + \eta)x},$$

$$S(\kappa) = -\frac{i\kappa + \eta + 2i\lambda v}{(\kappa - \kappa_3)(\kappa - \kappa_4)} e^{(i\kappa + \eta)x}, \quad (D.2)$$

где

$$\kappa_{1,2} = i\eta \pm i\lambda \sqrt{1 - v^2} + \lambda v,$$

$$\kappa_{3,4} = i\eta \pm i\lambda \sqrt{1 - v^2} - \lambda v. \quad (D.3)$$

Формулы (D.2) показывают, что и $R(\kappa)$, и $S(\kappa)$, как функции комплексной переменной κ , имеют два полюса первого порядка $\kappa = \kappa_{1,2}$ и $\kappa = \kappa_{3,4}$, соответственно. Если $\eta > \lambda$, то все полюсы находятся в верхней полуплоскости комплексной κ -плоскости, и теорема о вычетах дает

$$Y = i[\text{Res}R(\kappa_1) + \text{Res}R(\kappa_2)],$$

$$Z = i[\text{Res}S(\kappa_3) + \text{Res}S(\kappa_4)]. \quad (D.4)$$

Поскольку вычеты в (D.4) определены как $\text{Res}R(\kappa_{1,2}) = \lim_{\kappa \rightarrow \kappa_{1,2}} (\kappa - \kappa_{1,2})R(\kappa)$ и $\text{Res}S(\kappa_{3,4}) = \lim_{\kappa \rightarrow \kappa_{3,4}} (\kappa - \kappa_{3,4})S(\kappa)$, из выражений (D.2) и (D.3) получаем

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \sinh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) e^{i\lambda x v}, \\
 Z &= \left[\frac{iv}{\sqrt{1-v^2}} \sinh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) + \cosh(\lambda x \sqrt{1-v^2}) \right] e^{-i\lambda x v}.
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Наконец, подставляя (D.5) в формулу

$$\phi_x(\omega) = e^{-\lambda x} \left[Y e^{i\omega x / (f+g)} + Z e^{i\omega x / (f-g)} \right], \tag{D.6}$$

которая следует из уравнения (4.73) и (D.1), мы получим нужную характеристическую функцию (4.74).

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Физическая кинетика (Серия: «Теоретическая физика» Т.10). – М.: Наука, 1979.
2. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. – М.: Мир, 1990.
3. Benzi R., Sutera A., and Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A – 1981 – Vol. 14 – P. L 453.
4. Doering C.R. and Gadoua J.C. Resonant activation over a fluctuating barrier // Phys. Rev. Lett. – 1992 – Vol. 69 – P. 2318-2321.
5. Magnasco M.O. Forced thermal ratchets // Phys. Rev. Lett. – 1993 – Vol. 71 – P. 1477-1481.
6. M. Albrecht, C. T. Rettner, A. Moser Recording performance of high-density patterned perpendicular magnetic media // Appl. Phys. Lett. – 2002. – Vol.81, №15. – P.2875-2877
7. M. Albrecht, S. Ganesan, Charles T. Rettner Patterned Perpendicular and Longitudinal Media: A Magnetic Recording Study // IEEE Trans. Magn. – 2003. – Vol.39, №5. – P.2323-2325.
8. J. Moritz, L. Buda, B. Dieny, and J. P. Nozieres Writing and reading bits on pre-patterned media // Appl. Phys. Lett. – 2004. – Vol.84, №9. – P.1519-1521.
9. Moser A., Takano K., Margulies D.T., Albrecht M., Sonobe Y., Ikeda Y., Sun S., Fullerton E.E Magnetic recording: advancing into the future // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2002. – Vol.35. – P. R157-R167.
10. The Physics of Ultra-High-Density Magnetic Recording, edited by M. L. Plumer, J. Van Ek, and D. Weller, – Springer-Verlag, Berlin, 2001.
11. M. Bauer, J. Fassbender, B. Hillebrands Switching behavior of a Stoner particle beyond the relaxation time limit // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol.61. – P.3410 – 3416.
12. S. Kaka, S. E. Russek Precessional switching of submicrometer spin valves // J.

- Appl. Phys. – 2002. – Vol.80, №12. – P.2958 –2960.
13. C. Serpico, I. D. Mayergoyz, G. Bertotti Analytical solutions of Landau–Lifshitz equation for precessional switching // J. Appl. Phys. – 2003. – Vol.93, №10. – P.6909-6911.
 14. E. B. Myers, F. J. Albert, J. C. Sankey, E. Bonet, R. A. Buhrman, and D. C. Ralph Thermally Activated Magnetic Reversal Induced by a Spin-Polarized Current // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol.89, №19. – P.196801(4).
 15. H.W. Schumacher, C. Chappert, R. C. Sousa, P. P. Freitas, and J. Miltat Quasiballistic Magnetization Reversal // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol.90, №1. – P.017204(4).
 16. V. Skumryev, S. Stoyanov, Y. Zhang Beating the superparamagnetic limit with exchange bias // Nature. – 2003. – Vol.423. – P.850-853.
 17. J. Eisenmenger, I. K. Schuller Magnetic nanostructures: Overcoming thermal fluctuations // Nature Materials – 2003 – Vol.2.– P.437-438.
 18. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. М., Высш. шк., 1990.
 19. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986.
 20. Blick R.H. et al Nanostructured silicon for studying fundamental aspects of nanomechanics // J. Phys.: Condens. Matter. – 2002. – Vol. 14. – P. R905-R945.
 21. Aldridge J.S. and Cleland A.N. Noise-enabled precision measurements of a Duffing nanomechanical resonator // Phys. Rev. Lett. – 2005 – Vol. 94 – 156403.
 22. M. N. Popescu, C. M. Arizmendi, A. L. Salas-Brito, and F. Family Disorder Induced Diffusive Transport in Ratchets // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol.85, №15. – P.3321-3324.
 23. Lei Gao, Xiaoqin Luo, Shiqun Zhu, and Bambi Hu Dispersive anomalous diffusive transport in ratchets with long-range correlated spatial disorder // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol.67. – 062104
 24. D. G. Zarlenga, H. A. Larrondo, C. M. Arizmendi, and F. Family Trapping

- mechanism in overdamped ratchets with quenched noise // *Phys. Rev. E.* – 2007. – Vol.75. – 051101.
25. A. Ott, J.-P. Bouchaud, D. Langevin, and W. Urbach, Anomalous Diffusion in “Living Polymers”: a Genuine of Levy Flights? // *Phys. Rev. Lett.* – 1990. – Vol.65, №17 P. 2201-2205.
 26. T. H. Solomon, E. R. Weeks, and H. L. Swinney, Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Vol.71, No21.– P. 3975-3978.
 27. H. Katori, S. Schlipf, and H. Walther, Anomalous Dynamics of a Single Ion in an Optical Lattice // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol.79 No12. – P. 2221-2224.
 28. F. Bardou, J.-P. Bouchaud, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Levy Statistics and Laser Cooling* . – Cambridge University Press, Cambridge, England, 2002.
 29. D. A. Benson, R. Schumer, R. M. W. Meerschaert, and S. W. Wheatcraft, Fractional Dispersion, Lévy Motion, and the MADE Tracer Tests // *Transp. Porous Media.* – 2001. – Vol.42. – P. 211-240.
 30. B. Berkowitz, J. Klafter, R. Metzler, and H. Scher, Physical pictures of transport in heterogeneous media: Advection-dispersion, random-walk, and fractional derivative formulations. // *Water Resour. Res.* – 2002. – Vol.38, No12. – P. 1191.
 31. G. M. Viswanathan et al, Lévy flight search patterns of wandering albatrosses // *Nature (London).* – 1996. – Vol.381, P. 413-415.
 32. D. Austin, W. D. Bowen, and J. I. McMillan, Intraspecific variation in movement patterns: modeling individual behaviour in a large marine predator // *Oikos.* – 2004. –Vol.105. – P. 15-30.
 33. B. Baeumer, M. Kovács, and M. Meerschaert, Fractional Reproduction-Dispersal Equations and Heavy Tail Dispersal Kernels // *Bull. Math. Biol.* – 2007. – Vol.69, P.2281-2297.
 34. A. M. Edwards et al., Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer // *Nature (London).* – 2007. – Vol. 449. – P. 1044 - 1048.

35. J.-P. Bouchaud, A. Comtet, A. Georges, P. Le Doussal Classical diffusion of a particle in a one-dimensional random force field. // *Ann. Physics.* – 1990. – Vol.201, №1. – P.285-341
36. Bouchaud J.P. and Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications // *Phys. Rep.* – 1990 – Vol. 195 – P. 127-293.
37. Lévy Flights and Related Topics in Physics, edited by M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and U. Frisch, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
38. B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1954)
39. E.Y. Tsymbal, O.N. Mryasov and P.R. LeClair Spin-dependent tunnelling in magnetic tunnel junctions // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2003. – Vol.15. – P.R109-R142.
40. Costa-Krämer J.L., Anguita J., Martín J.I., Martínez-Boubeta C., Cebollada A., Briones F. Magnetic coupling in epitaxial Fe/MgO/Fe microtunnel junction arrays // *Nanotechnology.* – 2002. – Vol.13. – P.695-700.
41. Ph. Moriarty Nanostructured materials // *Rep. Prog. Phys.* – 2001. – Vol.64. – P.297–381.
42. B.F. Cockburn Tutorial on magnetic tunnel junction magnetoresistive random-access memory // *IEEE Trans. Magn.* – 2004. – №9-10. – P.46-51.
43. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел. – *Phys. Zs. Sowiet*, 1935; см перевод в кн. Ландау Л.Д. Собрание трудов, т.1. – М.: Наука, 1969. – С.128-143.
44. Brown W.F., Jr. Thermal fluctuations of a single-domain particle // *Phys. Rev.* – 1963. – Vol.130, №5. – P.1677-1686.
45. Klik I., Gunther L. First-passage-time approach to overbarrier relaxation of magnetization // *J. Stat. Phys.* – 1990. – Vol.60, №3/4. – P.473-484.
46. García-Palacios J. L. and Lázaro F.J. Langevin-dynamics study of the dynamical properties of small magnetic particles // *Phys. Rev. B.* – 1998. – Vol.58, №22 – P.14937-14958.

47. Denisov S.I., Trohidou K.N. Mean-Field Theory of Magnetic Relaxation for 2D Nanoparticle Ensembles // *Phys. Stat. Sol.* – 2002. – Vol.189, №2. – P. 265-268
48. Денисов С.И., Лютый Т.В., Нефедченко В.Ф. Магнитная релаксация в двумерных ансамблях наночастиц: приближение среднего поля // *Металлофиз. новейшие технол.* – 2002. – т.24, №1.– сс. 17-24.
49. Denisov S.I., Trohidou K.N. Fluctuation theory of magnetic relaxation for two-dimensional ensembles of dipolar interacting nanoparticles // *Phys. Rev. B.* – 2001. – Vol.64, 184433(10).
50. Denisov S.I., Lyutyu T.V., Trohidou K.N. Magnetic relaxation in two-dimensional nanoparticle ensembles // *Phys. Rev. B* – 2003 – Vol. **67**, 075301.
51. *Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials*, edited by P. E. Wigen. – World Scientific, Singapore, 1994.
52. G. Bertotti, C. Serpico, and I. D. Mayergoyz Nonlinear Magnetization Dynamics under Circularly Polarized Field // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol.86, №4. – P.724-727.
53. А.Ф. Хапиков Динамика перемагничивания цилиндра в присутствии переменного магнитного поля // *Письма в ЖЭТФ.* – 1992. – Т.55, №6. – С. 359-362.
54. A. Magni, G. Bertotti, C. Serpico, I.D. Mayergoyz Dynamic generalization of Stoner–Wohlfarth model // *J. Appl. Phys.* – 2001. – Vol.89, №11. – P.7451-7453.
55. S.I. Denisov, T.V. Lyutyu, P. Hänggi, K.N. Trohidou Dynamical and thermal effects in nanoparticle systems driven by a rotating magnetic field // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol.74. – P.104406(8).
56. Denisov S.I., Yunda A.N. Thermal-induced inversion of the magnetic moment in superparamagnetic particles // *Physica B.* – 1998. – Vol.245, №3. – P.282-287.
57. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Пер. с нем. – М.: Наука. 1976, – 576с.
58. Stoner E.C., Wohlfarth E.P. A mechanism of magnetic hysteresis in

- heterogeneous alloys // Phys. Dept., Univ. of Leeds, UK. – 1948 (Переиздано в IEEE Trans. Magn. – 1991. – Vol.27, №4. – P.3475-3518).
59. G. Bertotti, I. Mayergoyz, C. Serpico, M. Dimian. Comparison of analytical solutions of Landau–Lifshitz equation for “damping” and “precessional” switchings // J. Appl. Phys. – 2003. – Vol.93, №10. – P.6811-6813.
60. C. Thirion, W. Wernsdorfer, D. Mailly. Switching of magnetization by nonlinear resonance studied in single nanoparticles // Nature Mat. – 2003. – Vol.2. – P.524-527.
61. Л.Н.Котов, С.Н.Носов. Переориентация намагниченности в наночастицах и отклик на импульс поля // Журнал технической физики. – 2005. – Т.75, №10. – С. 55-60 (L.N. Kotov, S.N. Nosov. Magnetization switching in single domain particles and a response to a field pulse // Technical Physics. – Vol.50, №10. – P.1305–1310).
62. Z.Z. Sun, X.R. Wang. Magnetization reversal through synchronization with a microwave // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol.74. – 132401.
63. S.I. Denisov, K. Sakmann, P. Talkner, and P. Hanggi. Rapidly driven nanoparticles: Mean first-passage times and relaxation of the magnetic moment. // Phys. Rev. B. – 2007. – Vol.75 – 184432.
64. S.I. Denisov, T.V. Lyutyu, and P. Hänggi. Magnetization of Nanoparticle Systems in a Rotating Magnetic Field // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol.97. – 227202.
65. Д.И. Семенцов, А.М. Шутый. Нелинейная регулярная и стохастическая динамика намагниченности в тонкопленочных структурах. // УФН. – 2007. – Т.177, №8. – С. 831-857.
66. G. Bertotti, C. Serpico, and I.D. Mayergoyz. Nonlinear Magnetization Dynamics under Circularly Polarized Field // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol.86, №4. – P.724-727.
67. А.Н. Крылов, Ю.А. Крутков. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. Изд-во Академии Наук СССР. – Л. – 1932.
68. A. Pérez-Madrid and J. M. Rubí Stochastic resonance in a system of

- ferromagnetic particles // *Phys. Rev. E.* – 1995. – Vol.51. – P.4159-4164.
69. P. Hänggi, H. Thomas, Stochastic processes: Time evolution, symmetries and linear response // *Phys. Rep.* – 1982. – Vol.88, №4. – P.207-319.
 70. P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec Reaction-rate theory: fifty years after Kramers // *Rev. Mod. Phys.* – 1990. – Vol.62, №2. – P.251-341.
 71. S.I. Denisov, T.V. Lyutyu, and P.Hänggi Magnetization of Nanoparticle Systems in a Rotating Magnetic Field // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol.97. – P.227202(4).
 72. R. Skomski Nanomagnets // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2003. – Vol.15. – P.R841-R896.
 73. J. Nogués, J. Sort, V. Langlais, V. Skumryev Exchange bias in nanostructures // *Physics Reports.* – 2005. – Vol.422. – P. 65 – 117.
 74. W.H. Meiklejohn, C.P. Bean New Magnetic Anisotropy // *Phys. Rev.* – 1957. – Vol.105, №3. – P.904-913.
 75. Методы Монте-Карло в статистической физике: Под. ред. К. Биндера, пер с англ. – М.: Мир. 1982. – 400 с.
 76. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: в 2-х частях. Часть 2: Пер. с англ. – М.: Мир. 1990. – 400 с.
 77. Ò. Iglesias, X. Batlle, A. Labarta Microscopic origin of exchange bias in core/shell nanoparticles // *Phys. Rev. B.* – 2005. – Vol.72. – 212401(4).
 78. Ò. Iglesias, A. Labarta Monte Carlo simulation study of exchange biased hysteresis loops in nanoparticles // *Physica B.* – 2006. – Vol.372. – P.247-250.
 79. E. Eftaxias, K. N. Trohidou Numerical study of the exchange bias effects in magnetic nanoparticles with core/shell morphology // *Phys. Rev. B.* – 2005. – Vol.71. – 134406(6).
 80. Т.В. Лютый, А.Ю. Поляков. А.В. Рот-Серов Моделирование гистерезиса в двумерных спиновых системах // *Вестник СумГУ.* – 2006. – №9(93). – С. 63-70.
 81. D. Hinzke, U. Nowak Monte Carlo simulation of magnetization switching in a Heisenberg model for small ferromagnetic particles // *Comp. Phys. Comm.* –

1999. – №121-122. – P.334-337.
82. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Гидродинамика. – Т.6 – М.: Наука, 1986. – 736с.
 83. Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy // *Rev. Mod. Phys.* – 1943 – Vol. 15 – P. 1–89.
 84. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // *Phys. Rep.* – 2002 – Vol. 371 – P. 461-580.
 85. Metzler R. and Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2004 – Vol. 37 – P. R161-R208.
 86. Scher H. and Montroll E. Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids // *Phys. Rev. B* – 1975 – Vol. 12 – P. 2455-2477.
 87. Gu Q., Schiff E.A., Grebner S., and Schwartz R. Non-Gaussian transport measurements and the Einstein relation in amorphous silicon // *Phys. Rev. Lett.* – 1996 – Vol. 76 – P. 3196-3199.
 88. Havlin S., Movshovitz D., Trus B. and Weiss G.H. Probability densities for the displacement of random walks on percolation clusters // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1985 – Vol. 18 – P. L719-L722.
 89. Porto M., Bunde A., Havlin S., and Roman H.E. Structural and dynamical properties of the percolation backbone in two and three dimensions // *Phys. Rev. E* – 1997 – Vol. 56 – P. 1667-1675.
 90. Young W., Pumir A., Pomeau Y. Anomalous diffusion of tracer in convection rolls // *Phys. Fluids A* – 1989 – Vol. 1 – P. 462-469.
 91. Amblard F., Maggs A.C., Yurke B., Pargellis A.N., and Leibler S. Subdiffusion and anomalous local viscoelasticity in actin networks // *Phys. Rev. Lett.* – 1996 – Vol. 77 – P. 4470-4473.
 92. Richardson L.F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph // *Proc. Roy. Soc. A* – 1926 – Vol. 110 – P. 709-737.
 93. Shlesinger M.F., West M.F., Klafter J. Levy dynamics of enhanced diffusion: application to turbulence // *Phys. Rev. Lett.* – 1987 – Vol. 58 – P. 1100-1103.

94. Batchelor G.K. Diffusion in a field of homogeneous turbulence. II. The relative motion of particles // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1952 – Vol. 48 – P. 345-362.
95. Lovejoy S. Area-perimeter relation for rain and cloudy areas // Science – 1982 – Vol. 216 – P. 185-187.
96. Hentschel H.G.E. and Procaccia I. Relative diffusion in turbulent media: the fractal dimension of clouds // Phys. Rev. A – 1984 – Vol. 29 – P. 1461-1470.
97. Geisel T., Nierwetberg J., and Zacherl A. Accelerated diffusion in Josephson junctions and related chaotic systems // Phys. Rev. Lett. – 1985 – Vol. 54 – P. 616-619.
98. Bohr T. and Pikovsky A. Anomalous diffusion in the Kuramoto-Sivashinsky equation // Phys. Rev. Lett. – 1993 – Vol. 70 – P. 2892-2895.
99. Zumofen G., Klafter J., and Blumen A. Trapping aspects in enhanced diffusion // J. Stat. Phys. – 1991 – Vol. 65 – P. 991-1013.
100. Solomon T.H., Weeks E.R., and Swinney H.L. Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow // Phys. Rev. Lett. – 1993 – Vol. 71 – P. 3975-3978.
101. Weeks E.R. and Swinney H.L. Anomalous diffusion resulting from strongly asymmetric random walks // Phys. Rev. E – 1998 – Vol. 57 – P. 4915-4920.
102. Caspi A., Granek R., and Elbaum M. Enhanced diffusion in active intracellular transport // Phys. Rev. Lett. – 2000 – Vol. 85 – P. 5655-5658.
103. Luedtke W.D. and Landman U. Slip diffusion and Levy flights of an adsorbed gold nanocluster // Phys. Rev. Lett. – 1999 – Vol. 82 – P. 3835-3838.
104. Schaufler S., Schleich W.P., and Yakovlev V.P. Keyhole look at Levy flights in subrecoil laser cooling // Phys. Rev. Lett. – 1999 – Vol. 83 – P. 3162-3165.
105. Hilfer R. Exact solutions for a class of fractal time random walks // Fractals – 1995 – Vol. 3 – P. 211-216.
106. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Phys. Rep. – 2000 – Vol. 339 – P. 1-77.
107. Fogedby H.C. Langevin equations for continuous time Lévy flights // Phys. Rev.

- E – 1994 – Vol. 50 – P. 1657-1660.
108. Compte A. Stochastic foundations of fractional dynamics // *Phys. Rev. E* – 1996 – Vol. 53 – P. 4191-4193.
109. Metzler R., Barkai E., and Klafter J. Anomalous diffusion and relaxation close to thermal equilibrium: a fractional Fokker-Planck equation approach // *Phys. Rev. Lett.* – 1999 – Vol. 82 – P. 3563-3567.
110. Barkai E. Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application // *Phys. Rev. E* – 2001 – Vol. 63 – 046118.
111. Lutz E. Fractional Langevin equation // *Phys. Rev. E* – 2001 – Vol. 64 – 051106.
112. Bazzani A., Bassi G., and Turchetti G. Diffusion and memory effects for stochastic processes and fractional Langevin equations // *Physica A* – 2003 – Vol. 324 – P. 530-550.
113. Masoliver J. and Wang K. G. Free inertial processes driven by Gaussian noise: probability distributions, anomalous diffusion, and fractal behavior // *Phys. Rev. E* – 1995 – Vol. 51 – P. 2987-2995.
114. Denisov S.I. and Horsthemke W. Anomalous diffusion of particles driven by correlated noise // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 62 – P. 7729-7734.
115. Denisov S.I. and Horsthemke W. Statistical properties of a class of nonlinear systems driven by colored multiplicative Gaussian noise // *Phys. Rev. E* – 2002 – Vol. 65 – 031105.
116. O’Shaughnessy B. and Procaccia I. Analytical solutions for diffusion on fractal objects // *Phys. Rev. Lett.* – 1985 – Vol. 54 – P. 455-458.
117. Muralidhar R., Ramkrishna D., Nakanishi H., and Jacobs D. Anomalous diffusion – a dynamic perspective // *Physica A* – 1990 – Vol. 167 – P. 539-559.
118. Porrà J.M., Wang K.G., and Masoliver J. Generalized Langevin equations: anomalous diffusion and probability distributions // *Phys. Rev. E* – 1996 – Vol. 53 – P. 5872-5881.
119. Wang K.G. and Tokuyama M. Nonequilibrium statistical description of anomalous diffusion // *Physica A* – 1999 – Vol. 265 – P. 341-351.

120. Srokowski T. Nonstationarity induced by long-time noise correlations in the Langevin equation // *Phys. Rev. Lett.* – 2000 – Vol. 85 – P. 2232-2235.
121. Morgado R., Oliveira F.A., Batrouni G.G., and Hansen A. Relation between anomalous and normal diffusion in systems with memory // *Phys. Rev. Lett.* – 2002 – Vol. 89 – 100601.
122. Bao J.D. and Zhuo Y.Z. Anomalous dissipation: strong non-Markovian effect and its dynamical origin // *Phys. Rev. E* – 2005 – Vol. 71 – 010102(R).
123. Mokshin A.V., Yulmetyev R.M., and Hänggi P. Simple measure of memory for dynamical processes described by a generalized Langevin equation // *Phys. Rev. Lett.* – 2005 – Vol. 95 – 200601.
124. Vinales A.D. and Desposito M.A. Anomalous diffusion: Exact solution of the generalized Langevin equation for harmonically bounded particle // *Phys. Rev. E* – 2006 – Vol. 73 – 016111.
125. Lillo F. and Mantegna R.N. Drift-controlled anomalous diffusion: a solvable Gaussian model // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 61 – P. R4675-R4678.
126. Kwok Sau Fa Exact solution of the Fokker-Planck equation for a broad class of diffusion coefficients // *Phys. Rev. E* – 2005 – Vol. 72 – 020101(R).
127. Denisov S.I., Vitrenko A.N., Horsthemke W., Hänggi P. Anomalous diffusion for overdamped particles driven by cross-correlated white noise sources // *Phys. Rev. E* – 2006 – Vol. 73 – 036120.
128. Borges J.B., da Silva S.W., Morais P.C., Monte A.F.G. Optical signatures of asymmetric fractal diffusion of electron-hole plasma in semiconductor quantum wells // *Appl. Phys. Lett.* – 2006 – Vol. 89 – 142103.
129. Cao L. and Wu D.J. Cross-correlation of multiplicative and additive noises in a single-mode laser white-gain-noise model and correlated noises induced transitions // *Phys. Lett. A* – 1999 – Vol. 260 – P. 126-131.
130. Cao L. and Wu D.J. Mean first-passage time of laser phase in a single-mode laser // *Phys. Lett. A* – 2001 – Vol. 283 – P. 313-318.
131. Cao L. and Wu D.J. Fluctuation-induced transport in a spatially symmetric periodic potential // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 62 – P. 7478-7481.

132. Cao L. and Wu D.J. Noise-induced transport in a periodic system driven by Gaussian white noises with intensive cross-correlation // *Phys. Lett. A* – 2001 – Vol. 291 – P. 371-375.
133. Li J.H., Łuczka J., and Hänggi P. Transport of particles for a spatially periodic stochastic system with correlated noises // *Phys. Rev. E* – 2001 – Vol. 64 – 011113.
134. Fuliński A. and Góra P.F. Transport of a quantum particle in a dimer under the influence of two correlated dichotomic colored noises // *Phys. Rev. E* – 1993 – Vol. 48 – P. 3510-3517.
135. Li J.H., Hu B., Xing D.Y., and Dong J.M. Escape over a fluctuating barrier with additive and multiplicative noise // *Phys. Rev. E* – 1999 – Vol. 60 – P. 6443-6448.
136. Li J.H. and Hänggi P. Spatially periodic stochastic system with infinite globally coupled oscillators // *Phys. Rev. E* – 2001 – Vol. 64 – 011106.
137. Tessone C.J., Wio H.S., and Hänggi P. Stochastic resonance driven by time-modulated correlated white noise sources // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 62 – P. 4623-4632.
138. Jia Y., Yu S.N., and Li J.R. Stochastic resonance in a bistable system subject to multiplicative and additive noise // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 62 – P. 1869-1878.
139. Singh K.P., Ropars G., Brunel M., and Le Floch A. Lever-assisted two-noise stochastic resonance // *Phys. Rev. Lett.* – 2003 – Vol. 90 – 073901.
140. Olemskoi A.I., Kharchenko D.O., and Knyaz' I.A. Phase transitions induced by noise cross-correlations // *Phys. Rev. E* – 2005 – Vol. 71 – 041101.
141. Zaikin A.A. and Schimansky-Geier L. Spatial patterns induced by additive noise // *Phys. Rev. E* – 1998 – Vol. 58 – P. 4355-4360.
142. Landa P.S., Zaikin A.A., Ushakov V.G., and Kurths J. Influence of additive noise on transitions in nonlinear systems // *Phys. Rev. E* – 2000 – Vol. 61 – P. 4809-4820.
143. Zaikin A.A. and Kurths J. Additive noise in noise-induced nonequilibrium

- transitions // *Chaos* – 2001 – Vol. 11 – P. 570-580.
144. Jia Y. and Li J.R. Reentrance phenomena in a bistable kinetic model driven by correlated noise // *Phys. Rev. Lett.* – 1997 – Vol. 78 – P. 994-997.
 145. Denisov S.I., Vitrenko A.N., Horsthemke W. Nonequilibrium transitions induced by the cross-correlation of white noises // *Phys. Rev. E.* – 2003. – Vol. 68. – P. 046132(5).
 146. P.Reimann, P. Hänggi Introduction to the physics of Brownian motors // *Appl. Phys. A.: Mater. Sci. Process.* – 2002. – Vol. 75. – P. 169-178.
 147. R.D. Astumian, P. Hänggi Brownian motors // *Physics Today.* – 2002. – Vol. 55, № 11. – P. 33-39.
 148. Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., and Marchesoni F. Stochastic resonance // *Rev. Mod. Phys.* – 1998 – Vol. 70 – P. 223-287.
 149. Ya. G. Sinai The Limiting Behavior of a One-Dimensional Random Walk in a Random Medium // *Theor. Probab. Appl.* – 1983. – Vol.27, №2. – P.256-268.
 150. B. Derrida Velocity and Diffusion Constant of a Periodic One-Dimensional Hopping Model // *J. Stat. Phys.* – 1983. – Vol.31, №3. – P. 433-450.
 151. A. O. Golosov Localization of random walks in one-dimensional random environments // *Comm. Math. Phys.*.. – 1984. – Vol.92, №4. – P.491-506
 152. C. Monthus Random walks and polymers in the presence of quenched disorder // *Lett. Math. Phys.*.. – 2006. – Vol.78. – P.207-233
 153. P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec Reaction-rate theory: fifty years after Kramers // *Rev. Mod. Phys.* – 1990. – Vol., №62. – P.251-341
 154. S. Schiedl Mobility in a one-dimensional disorder potential // *Z Phys. B: Condens. Matter.* – 1995. – Vol.97. – P.345-352
 155. P. Le Doussal, V.M. Vinokur Creep in One Dimension Phenomenological Theory of Glass Dynamics // *Physica C.* – 1995. – Vol.254. – P.63-68
 156. A.V. Lopatin, V. M. Vinokur Instanton Approach to the Langevin Motion of a Particle in a Random Potential // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol.86, №9. – P.1817-1820.
 157. D. A. Gorokhov and G. Blatter Diffusion and creep of a particle in a random

- potential // *Phys. Rev. B.* – 1998. – Vol.58, №1. – P.213-217.
158. S.I Denisov Statistical dynamics of magnetic kinks // *J. Magn. Magn. Mater.* – 1995. – Vol.147. – P.406-408
159. S.I. Denisov, R.Yu. Lopatkin Coercivity and domain wall velocity in a fluctuating magnetic medium, // *Phys. Scr.* – 1997. – Vol.56. – P.423-425
160. P.E. Parris, M. Kus, D.H. Dunlap, V.M. Kenkre Nonlinear response theory: Transport coefficients for driving fields of arbitrary magnitude // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol.56, №5. – P.5295-5305
161. V.M. Kenkre, M. Kus, D.H. Dunlap, P.E. Pariss Nonlinear field dependence of the mobility of a charge subjected to a superposition of dichotomous stochastic potentials // *Phys. Rev. E.* – 1998. – Vol.58, №1. – P.99-106
162. S.I. Denisov, W. Horsthemke Mean first-passage time for an overdamped particle in a disordered force field // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol.62, №3. – P.3311-3321.
163. S. I. Denisov, M. Kostur, E. S. Denisova, and P. Hänggi Analytically solvable model of a driven system with quenched dichotomous disorder // *Phys. Rev. E.* – 2007. – Vol.75. – 061123.
164. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.
165. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics.* – McGraw-Hill, New York, 1953, Vol. 1.
166. Paul Langevin Sur la theorie du mouvement brownien // *C. R. Acad. Sci.* – 1908. – Vol.146. – 530–533.
167. W. T. Coffey, Yu. P. Kalmykov, and J. T. Waldron, *The Langevin Equation*, 2nd ed. – World Scientific, Singapore, 2004.
168. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
169. K. Sato, *Levy processes and infinitely divisible distributions*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999)
170. S. Jespersen, R. Metzler, and H. C. Fogedby, Lévy flights in external force fields: Langevin and fractional Fokker-Planck equations and their solutions //

- Phys. Rev. E. – 1999. – Vol.59, P.2736-2745.
171. R. Metzler and J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach // Phys. Rep. – 2000. – Vol.339. – P. 1-77.
 172. P. D. Ditlevsen, Anomalous jumping in a double-well potential // Phys. Rev. E. – 1999. – Vol.60, P.172-179.
 173. Yanovsky, V.V, A.V. Chechkin, D. Schertzer, A.V. Tur, Levy Anomalous Diffusion and Fractional Fokker-Planck Equation // Physica A. – 2000. – Vol. 282, №1-2, P. 13-34.
 174. D. Brockmann and I. M. Sokolov, Levy flights in external force fields: from models to equations //Chem. Phys. – 2002. – Vol.284, P. 409 – 421.
 175. A. V. Chechkin, V. Y. Gonchar, J. Klafter, and R. Metzler, Fundamentals of Lévy flight processes //Adv. Chem. Phys. – 2006. –Vol. 133. – P. 439 – 451.
 176. S. I. Denisov, W. Horsthemke, and P. Hanggi, Steady-state Lévy flights in a confined domain // Phys. Rev. E. –2008. – Vol. 77. – 061112(5).
 177. P. Hänggi and P. Jung, Colored Noise in Dynamical Systems // Adv. Chem. Phys. – 1995. –Vol. 89, P. 239-326.
 178. I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod, The Theory of Stochastic Processes. – Springer, Berlin. – 2004, Vol. 1.
 179. K. Ito, Stochastic differential equations in a differentiable manifold // Nagoya Math. J. – 1950. – Vol. 1. – P. 35-47.
 180. Denisov S.I., Vitrenko A.N., Horsthemke W. Nonequilibrium transitions induced by the cross-correlation of white noises // Phys. Rev. E – 2003 – Vol. 68 – 046132.
 181. I. Eliazar and J. Klafter Lévy-Driven Langevin systems: Targeted Stochasticity // J. Stat. Phys.. – 2003. – Vol.111. – P.739-768
 182. I. Eliazar and J. Klafter Levy, Ornstein-Uhlenbeck and Subordination: Spectral vs. Jump Description // J. Stat. Phys.. – 2005. – Vol.119. – P.165-196.
 183. A. Dubkov and B. Spagnolo, Generalized wiener process and kolmogorov's equation for diffusion induced by non-gaussian noise source // Fluct. Noise Lett. – 2005. – Vol.5, L267-L274.

184. A. A. Dubkov, B. Spagnolo; V. V. Uchaikin Levy Flight Superdiffusion: an Introduction // *J. Bifurcat. Chaos.* – 2008. – Vol.18, №9. – P.2649-2672
185. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2nd ed. – Wiley, New York. – 1971, Vol. 2.
186. P. Hänggi, On Derivations and Asymptotic and Solutions of Master Equations Representations // *Z. Phys. B.* – 1978. – Vol. 30. – P. 85-95.
187. P. Hänggi, Langevin Description of Markovian Integro-Differential Master Equations // *Z. Phys. B.* – 1980. – Vol. 36. – P. 271-282.
188. P. Hanggi, Correlation Functions and Masterequations of Generalized (Non-Markovian) Langevin Equations // *Z. Phys. B.* – 1978. – Vol. 31. – P. 407-416.
189. N. G. van Kampen, Process with delta-correlated cumulants // *Physica A.* – 1980. –Vol. 102, No 3. – P. 489-495.
190. V M. Zolotarev, *One-Dimensional Stable Distributions* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1986).
191. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications* (Gordon and Breach, New York, 1993).
192. A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, and A. Moussiaux, *Handbook of First-Order Partial Differential Equations.* – Taylor & Francis: London, 2002.
193. H. Bateman and A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol. 1, 2
194. E. Jakeman and R. J. A. Tough, Non-Gaussian models for the. statistics of scattered waves // *Adv. Phys.* – 1988. – Vol. 37, No5. – P. 471-529.
195. B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak, and P. Hänggi, Escape driven by α -stable white noises // *Phys. Rev. E.* – 2007. –Vol. 75. – 021109(8).