Министерство образования и науки Украины

Сумский государственный университет

Жиленко Т. И., Сивоконь В. В.

МАТЕМАТИКА В ИНФОГРАФИКЕ. ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом Сумского государственного университета

Сумы
Сумский государственный университет
2021

УДК 373.167.1.514
Ж72

Рецензенты:

И. О. Шуда – доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой математического анализа и методов оптимизации Сумского государственного университета (г. Сумы, Украина);

Е. В. Семенихина – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информатики Сумского государственного педагогического университета им. А. С. Макаренко (г. Сумы, Украина)

Рекомендовано к печати
ученым советом Сумского государственного университета
как учебное пособие
(протокол № 12 от 8 апреля 2021 года)

Жиленко Т. И.

Ж72 Математика в инфографике. Геометрия : учебное пособие / Т. И. Жиленко, В. В. Сивоконь. – Сумы : Сумский государственный университет, 2021. – 139 с.

Учебное пособие составлено согласно программы «Элементарная математика». Руководство написано упрощенным языком для студентов иностранцев, начинающих изучать русский язык. Оно станет надежным помощником студентам и поможет педагогам в подборе материала к занятиям.

Для студентов подготовительного отделения департамента по работе с иностранными гражданами.

УДК 373.167.1.514

ОГЛАВЛЕНИЕ

С.

ПРЕДИСЛОВИЕ…………………………………………7

ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ
И ИХ СВОЙСТВА...9

Аксиомы планиметрии...9

Простейшие геометрические фигуры...............................10

Лучи...11

Основные аксиомы...12

ТРЕУГОЛЬНИКИ...13

Формулы площади для произвольного треугольника...........21

Формулы площади для прямоугольного треугольника.........22

Формулы площади для равнобедренного треугольника.......23

Формулы площади для равностороннего треугольника........23

Формулы длины биссектрис, высот, медиан, радиусов
окружностей...24

ОКРУЖНОСТЬ...33

Формулы для окружности и ее элементов.............................35

Представление об элементах окружности и круга................36

Теоремы о хордах...37

Теоремы о касательных и секущих к окружности................37

Теоремы об углах, связанных с окружностью.......................43

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ...45

Произвольные четырехугольники...............................45

Параллелограмм...46

Прямоугольник...48

Ромб...48

Правильный четырехугольник (квадрат)..............................49

Трапеция...49

Равнобедренная трапеция..51

Формулы для равнобедренной трапеции...............................53

Формулы площади равнобедренной трапеции......................54

Прямоугольная трапеция...55

Правильные многоугольники...56

Правильный треугольник...58

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ...............................59

Формулы для координат в плоскости....................................59

Уравнения фигур..59

Уравнение окружности..59

Уравнение эллипса..59

Уравнение гиперболы..60

Уравнения прямых...60

Взаимное размещение прямых в плоскости..........................60

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ...62

Действия с векторами..62

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ.....................66

Общие определения и теоремы..66

Осевая симметрия...68

Понятия и теоремы, связанные с осевой симметрией..........68

Центральная симметрия..69

Понятия и теоремы,
связанные с центральной симметрией..................................69

Поворот..70

Теоремы, связанные с поворотом...70

Гомотетия..70
Понятие коэффициента подобия..70
Инверсия..72
Свойства инверсии...72
СТЕРЕОМЕТРИЯ..76
Аксиомы стереометрии...76
Взаимное расположение прямых в пространстве.................76
Взаимное расположение плоскостей в пространстве............77
Взаимное расположение прямой и плоскости.......................78
МНОГОГРАННИКИ И ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ.............................80
Призма..80
Тетраэдр. Условные обозначения.......................................80
Свойства тетраэдра...81
Пирамида...85
Цилиндр...86
Конус...86
Усеченный конус..87
Шар..88
Шаровой сегмент..88
Шаровой слой...89
Шаровой сектор..89
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ.......................................90
Правильная призма...90
Правильная пирамида...90
КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ.....................91
ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ...94

Действия с векторами..94
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ.................97
Геометрические преобразования. Движение..........................97
Параллельный перенос..97
Гомотетия и преобразования подобия....................................98
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ...99
РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ
ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ…………....123
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ…………….128

ПРЕДИСЛОВИЕ

Это учебное пособие предназначено для педагогов при подготовке и проведении занятий по элементарной математике, а также поможет студентам-иностранцам лучше усвоить геометрический материал.

При изучении элементарной математики геометрический материал занимает важное место, его изучают в отдельно выделенной части курса.

Наглядное представление геометрии позволяет формировать у студентов пространственные и геометрические представления и понятия, чертежные, измерительные, графические навыки и умения.

Пособие содержит справочный теоретический материал, состоящий из основных теорем, лемм, аксиом, формул и рисунков, а также задачи практического характера. Такая подача материала поможет правильно выбрать методы и приемы изучения элементов наглядной геометрии.

Наличие геометрических знаний способствует более успешному изучению таких учебных предметов, как физика, черчение, начертательная геометрия, механика, детали машин и прочее.

В пособии студенты познакомятся со следующими геометрическими фигурами: точка, прямая, отрезок, окружность, многоугольники и геометрическими телами (призма, шар, цилиндр, пирамида, конус), с их элементарными свойствами, а также с величинами (длина, площадь, объем).

Разнообразные задания будут способствовать развитию наблюдательности, памяти, обогащению жизненного опыта, подготовке к будущей профессии.

Простейшие геометрические фигуры и их свойства

Аксиомы планиметрии

1. *Какая бы не была прямая, существуют точки, которые принадлежат этой прямой, и точки, которые ей не принадлежат.*
2. *Через любые две разные точки можно провести прямую и только одну.*
3. *Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*
4. *Каждый отрезок имеет определенную длину.*
5. *Каждый угол имеет определенную меру.*
6. *Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.*
7. *На любой прямой от заданной точки в заданном направлении можно отложить отрезок данной длины и только один.*
8. *От любого луча в данной полуплоскости можно отложить данный угол с вершиной в начале луча и только один.*
9. *Какой бы не был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном размещении относительно заданной точки.*
10. *Через точку, которая не лежит на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой (аксиома Эвклида).*
11. *Для любых двух точек существует единственный отрезок, для которого эти точки являются концами.*

Простейшие геометрические фигуры

1. *Точка.*
2. *Прямая.*
3. *Луч.*
4. *Отрезок.*
5. *Угол.*
6. *Плоскость.*
7. *Полуплоскость.*

Прямая

Основное свойство прямой. *Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.*

Теорема. *Любые две пересекающиеся прямые имеют одну общую точку.*

Теорема. *Через каждую точку прямой проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.*

Признак параллельности прямых. *Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.*

Через данную точку M, не принадлежащую прямой a, можно провести прямую b, параллельную прямой a.

Основное свойство (аксиома) параллельных прямых. *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

Теорема. *Любые две пересекающиеся прямые имеют одну общую точку.*

Теорема. *Через каждую точку прямой проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.*

Теорема. *Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.*

Теорема. *Если* $a \parallel c$, $b \parallel c$, *тогда* $a \parallel c$.

Теорема. *Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.*

Теорема. *Когда сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна* $180°$*, то прямые параллельны.*

Теорема. *Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.*

Если $a \perp b$, $b \parallel c$, *тогда* $a \perp c$.

Теорема. *Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

Теорема. *Все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.*

Лучи

Теорема. *Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудаленных от его сторон.*

Теорема. *Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.*

Отрезки

Основное свойство длины отрезка. *Если точка C является внутренней точкой отрезка AB, то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB.*

Теорема. *Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка.*

Теорема Фалеса. *Если параллельные прямые, которые пересекают стороны угла, отсекают на одной из его сторон равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*

Теорема про пропорциональные отрезки. *Если параллельные прямые пересекают стороны угла, а отрезки, которые образуются на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, которые образовались на второй стороне угла.*

Углы

Теорема. *Сумма смежных углов равна* $180°$.

Теорема. *Вертикальные углы равны.*

Основные аксиомы

1. *Для любых двух точек существует единственный отрезок, для которого эти точки являются концами.*
2. *Каждый отрезок имеет определенную длину.*
3. *Каждый угол имеет определенную величину.*
4. *Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.*

Треугольники

Основное свойство равенства треугольников. *Для данного треугольника ABC существует равный ему треугольник* $A_1B_1C_1$ *такой, что*
$AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1.$

I признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого, то такие треугольники равны.*

II признак равенства треугольников (по стороне и двум прилежащим к ней углам). *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны.*

III признак равенства треугольников (по трем сторонам). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны.*

Теорема. *Соответственные биссектрисы, медианы и высоты в равных треугольниках равны.*

Теорема. *Сумма углов треугольника равна* $180°$.

Среди углов треугольника не менее двух углов острые.

Теорема. *Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.*

Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

Неравенство треугольника. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.*

Теорема. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и, наоборот, против большего угла лежит большая сторона.*

Теорема. *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то и третьи углы этих треугольников равны.*

Теорема. *В любом треугольнике существуют углы не меньше* $60°$ *и не больше* $60°$.

Теорема. *Средняя линия треугольника, которая соединяет середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.*

Теорема. *Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении* $2:1$, *считая от вершины треугольника.*

Свойство биссектрисы треугольника. *Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.*

Свойство биссектрисы внешнего угла треугольника. *Биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе смежного угла.*

Лемма (про подобные треугольники). *Прямая, которая параллельна стороне треугольника и пересекает две другие* *его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.*

Теорема. *Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.*

Теорема. *Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

I признак подобия треугольников (по двум углам). *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

II признак подобия треугольников. *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равные, то такие треугольники подобны.*

III признак подобия треугольников. *Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Теорема. *Отрезок, который соединяет основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от данного треугольника ему подобный.*

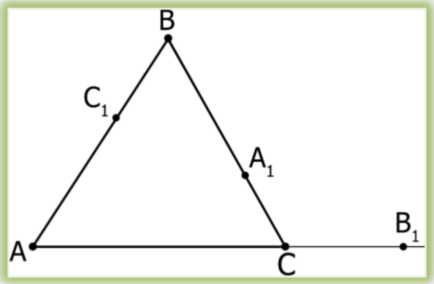
Теорема. *В подобных треугольниках медианы, проведенные из вершин соответствующих углов, относятся как соответствующие стороны.*

Теорема (про окружность Аполлония). *Геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек является заданным положительным числом, отличным от* 1, *– это окружность.*

Теорема. *Квадрат длины биссектрисы внутреннего угла треугольника равен разности произведения сторон, ее заключающих, и произведения отрезков третьей стороны, возникающих при пересечении ее с данной биссектрисой.*

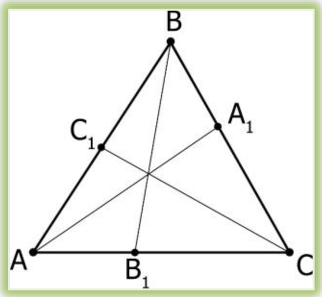
Теорема Менелая. *На стороне AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки* C_1 *и* A_1*, а на продолжении стороны AC – точку* B_1*. Для того, чтобы точки* A_1, B_1, C_1 *лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

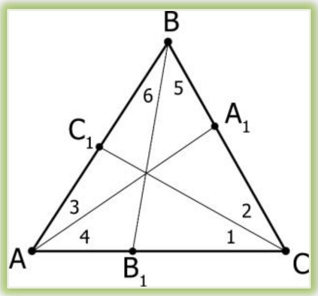


Теорема Чевы. *Для того чтобы чевианы* AA_1, BB_1, CC_1 *(точки* A_1,B_1,C_1 *взяты произвольно на противолежащей от вершины стороне) треугольника ABC пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

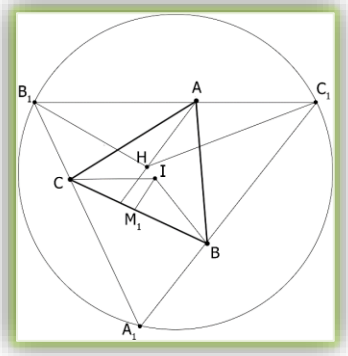


$$\frac{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 2\cdot\sin\angle 3}{\sin\angle 4\cdot\sin\angle 5\cdot\sin\angle 6}=1.$$



Теорема. *В любом треугольнике центр описанной окружности, центр масс и ортоцентр лежат на одной прямой (прямой Эйлера).*

Лемма. *Если точка H – ортоцентр треугольника ABC, то* IM_1 *– расстояние от центра I вписанной окружности до стороны BC, то* $\mathrm{AH}=2\mathrm{IM}_1$.



Теорема. *Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, которые соединяют вершины треугольника с его ортоцентром, лежат на одной окружности, радиус которой равен* $\frac{1}{2}R$*, где R – радиус описанной окружности данного треугольника (окружность девяти точек).*

Теорема. *Радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC можно рассчитать по таким формулам:*

$$r_A = \frac{S}{p-a}; \qquad r_B = \frac{S}{p-b}; \qquad r_C = \frac{S}{p-c},$$

где S – площадь треугольника ABC; p – его полупериметр.

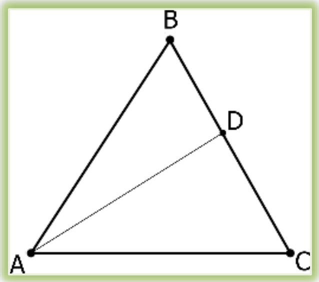
Теорема. *В треугольнике ABC выполняется равенство*

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}.$$

Теорема. *Когда в треугольнике ABC выполняется равенство* $a^2 + b^2 = 5c^2$*, то медианы, проведенные из вершин A и B, перпендикулярны.*

Теорема Стюарта. *Если на стороне BC треугольника ABC взято точку D, то выполняется равенство*

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$$



Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Пусть a, b, c – стороны треугольника ABC, причем a – его наибольшая сторона. Если $a^2 < b^2 + c^2$, *то треугольник является остроугольным. Если* $a^2 > b^2 + c^2$, *то треугольник является тупоугольным. Если* $a^2 = b^2 + c^2$, *то треугольник является прямоугольным.*

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Лемма. *Хорда окружности равна произведению диаметра на синус любого вписанного угла, который опирается на данную хорду.*

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

Теорема тангенсов

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}} \qquad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}$$

где a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ *– углы треугольника, противолежащие соответственно сторонам a, b, c.*

Теорема котангенсов

$$\frac{p-a}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{p-b}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=\frac{p-c}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=r,$$

где p – полупериметр треугольника: a, b, c *– стороны треугольника;* α, β, γ *– углы, лежащие против, соответственно, сторон a, b, c; r – радиус вписанной окружности.*

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

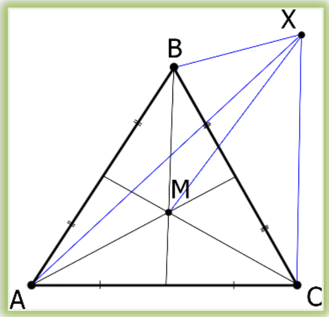
Теорема. *Если высоты непрямоугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, то радиусы описанных окружностей вокруг треугольников AHB, BHC, AHC и ABC равны.*

Теорема (формула Эйлера). *Расстояние d между центрами вписанной и описанной окружности можно найти по формуле*

$$d=\sqrt{R^2-2Rr},$$

где r и R – соответственно радиусы его описанной и вписанной окружностей.

Теорема. *Прямые, которые содержат высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*



Теорема (формула Лейбница). *Если медианы треугольника ABC пересекаются в точке M, то для любой точки X выполняется равенство*

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = \\ = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2.$$

Формулы площади для произвольного треугольника

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{4}$$

$$S = 2R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

$$S = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha},$$ *β, γ – прилежащие углы к стороне a;*

α – противолежащий угол

$$S = \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)},$$ *α, β – прилежащие углы к стороне a*

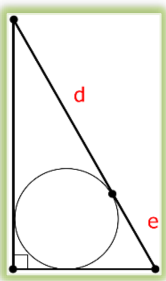
$$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) = \frac{r_a r_b r_c}{p} = \sqrt{r r_a r_b r_c}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}$$

$$S = \sqrt{\frac{R h_a h_b h_c}{2}}$$

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|}{2}$$

Формулы площади
для прямоугольного треугольника



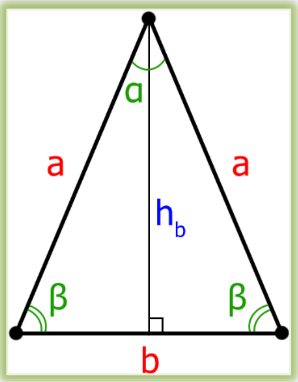
$$S = \frac{1}{2}ab$$

$$S = de$$

$$S = (p-a)(p-b)$$

$$S = rr_c, \qquad \angle C = 90°$$

Формулы площади для равнобедренного треугольника



$$S = \frac{b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{2}$$

$$S = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$$

$$S = \left(a + \frac{b}{2}\right) r$$

$$S = \frac{b^2}{4\, tg\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы площади для равностороннего треугольника

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

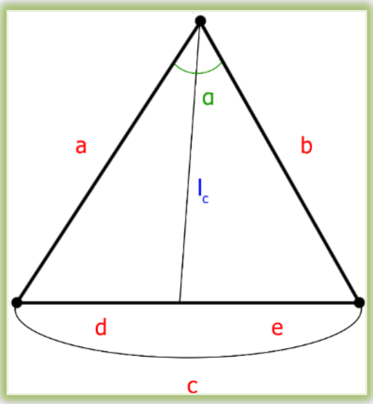
$$S = 3\sqrt{3}r^2$$

$$S = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{36}P^2$$

Формулы длины биссектрис, высот, медиан, радиусов окружностей

Длина биссектрисы



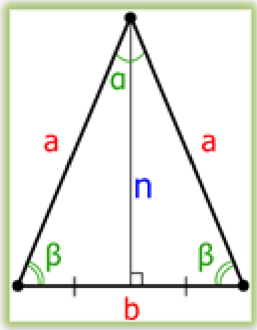
$$l_c = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

$$l_c = \sqrt{a \cdot b - d \cdot e}$$

Для равнобедренного треугольника



$$n = a \sin \beta$$

$$n = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \beta$$

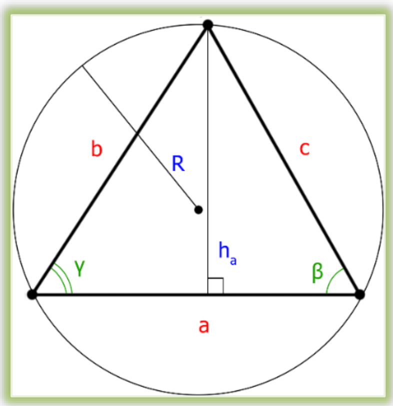
$$n = a \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = a \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$n = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

Для равностороннего треугольника

$$n = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

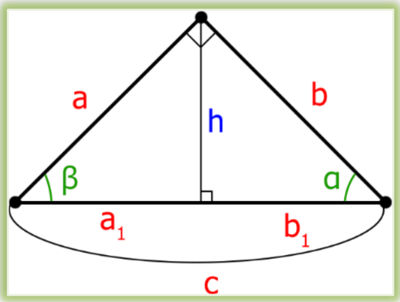
Длина высоты



$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_a = \frac{bc}{2R}$$



Для прямоугольного треугольника

$$h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

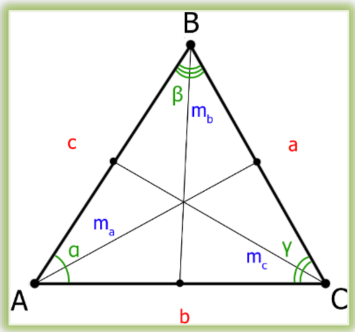
$$h = a_1 b_1$$

$$h = c \sin\alpha \cos\alpha = c \sin\beta \cos\beta$$

$$h = b \sin\alpha = a \sin\beta$$

$$h = \sqrt{a_1 b_1}$$

Длина медианы



$$\mathrm{m_a} = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2} = \frac{\sqrt{c^2 + b^2 + 2cb\cos\alpha}}{2}$$

$$\mathrm{m_b} = \frac{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\beta}}{2}$$

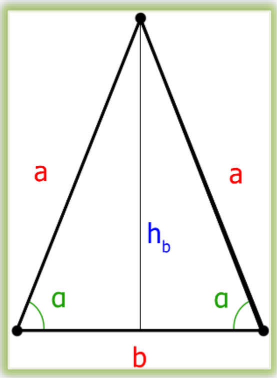
$$m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}}{2}$$

Длина радиуса вписанной окружности

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$$

Для равнобедренного треугольника



$$r = \frac{b\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}}{2}$$

$$r = a \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = a\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$r = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{b}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$r = \frac{bh_b}{b + \sqrt{4h_b^2 + b^2}}$$

$$r = \frac{h\sqrt{a^2 - h_b^2}}{a + \sqrt{a^2 - h_b^2}}$$

Для равностороннего треугольника

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{1}{2}R$$

Для прямоугольного треугольника

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{a+b+c}} = \frac{\mathrm{a+b-c}}{2}$$

Длина радиуса описанной окружности

$$R = \frac{abc}{4S}$$

$$4\mathrm{R} = \mathrm{r_a} + \mathrm{r_b} + \mathrm{r_c} - \mathrm{r}$$

Для равнобедренного треугольника

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

Для равностороннего треугольника

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$R = \frac{2h}{3}$$

$$R = 2r$$

Для прямоугольного треугольника

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{c}{2}$$

Длина радиусов вневписанных окружностей

$$\frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{1}{\mathrm{r_a}} + \frac{1}{\mathrm{r_b}} + \frac{1}{\mathrm{r_c}}$$

$$\mathrm{r_a r_b} = \mathrm{p(p-c)} \qquad \mathrm{r r_a} = \mathrm{(p-b)(p-c)}$$

$$r_A = (p - c)\,\mathrm{ctg}\frac{B}{2} = (p - b)\,\mathrm{ctg}\frac{C}{2} = p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

Теорема. *Сумма расстояний от центра описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон равна сумме радиусов вписанной и описанной окружностей.*

Определение. *Ортотреугольник – треугольник, вершины которого являются основаниями высот описанного треугольника; обладает наименьшим периметром из всех вписанных треугольников.*

Равнобедренный треугольник

Теорема. *В равнобедренном треугольнике: углы при основании равны; биссектриса треугольника, проведенная к его основанию, является медианой и высотой треугольника.*

Теорема. *Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.*

Теорема. *Биссектрисы, медианы и высоты, проведенные из углов при основании равнобедренного треугольника, равны.*

Равносторонний треугольник

Теорема. *Центры вписанной и описанной окружностей совпадают.*

Прямоугольный треугольник

Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам. *Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.*

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу. *Если катет и прилежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему острому углу другого, то такие треугольники равны.*

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.

Если катет и противолежащий угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого, то такие треугольники равны.

Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Теорема. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.*

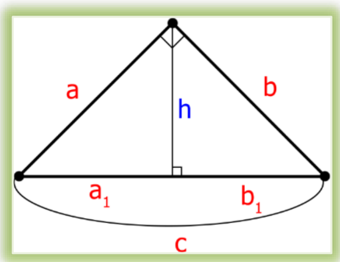
Если из одной точки, лежащей на прямой, к этой прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр меньше наклонной.

Теорема. *В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.*

Теорема. *Катет, лежащий против угла* 30°, *равен половине гипотенузы.*

Теорема. *Центр описанной окружности в прямоугольном треугольнике принадлежит его гипотенузе и является ее серединой.*

В равнобедренном прямоугольном треугольнике углы при гипотенузе равны 45°.



Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$h^2 = a_1 \cdot b_1$$

$$a^2 = a_1 \cdot c$$

$$b^2 = b_1 \cdot c$$

Теорема. *Если в треугольнике ABC выполняется равенство* $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$, *то этот треугольник является прямоугольным.*

Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

Теорема. *Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету.*

Теорема. *Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к данному катету.*

Теорема. *Катет прямоугольного треугольника равен частному от деления другого катета на тангенс угла, прилежащего к первому катету.*

Теорема. *Катет прямоугольного треугольника равен произведению другого катета на котангенс угла, прилежащего к первому катету.*

Теорема. *Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла.*

Теорема. *Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.*

Окружность

Теорема. *Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.*

Теорема. *Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен к этой хорде.*

Теорема (свойство касательной). *Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*

Признак касательной к окружности. *Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.*

Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Теорема. *Около любого треугольника можно описать окружность.*

Три серединных перпендикуляра сторон треугольника пересекаются в одной точке.

Центр окружности, описанной около треугольника, – это точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.

Теорема. *В любой треугольник можно вписать окружность.*

Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

Центр окружности, вписанной в треугольник, – это точка пересечения биссектрис треугольника.

Диаметр больше любой другой хорды, отличной от диаметра.

Хорды окружности равны, если они равноудалены от ее центра.

Равные хорды окружности равноудалены от ее центра.

Если окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M и касается продолжений двух других сторон, тогда сумма длин отрезков BC и MB будет равна полупериметру треугольника ABC.

Радиус вписанной окружности в прямоугольный треугольник можно рассчитать по формуле

$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{a+b-c}}{2}$, *a и b – катет; c – гипотенуза; r – радиус вписанной окружности.*

Если в треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AB в точке M, $\mathrm{BC} = \mathrm{a}$, *то* $\mathrm{AM} = \mathrm{p} - \mathrm{a}$, *где p – полупериметр треугольника ABC.*

Формулы для окружности и ее элементов

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2R}$$

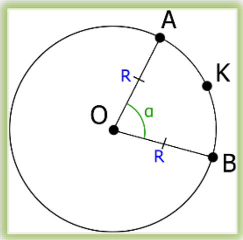
$$C = 2\pi R$$

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

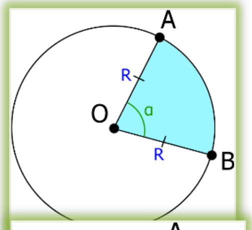
$$S_{\text{кол}} = \pi(R^2 - r^2)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ ***– градусы***	$\boldsymbol{\alpha}$ ***– радианы***
$\boldsymbol{l = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}}$	$l = \alpha R$
$\boldsymbol{S}_{\text{сект}} = \boldsymbol{\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}}$	$S_{\text{сект}} = \frac{1}{2}\alpha R^2$
$\boldsymbol{S}_{\text{сегм}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180^\circ} - \sin\alpha\right)R^2}$	$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)\,R^2$

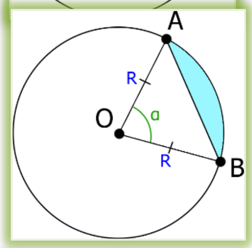
Представление об элементах окружности и круга



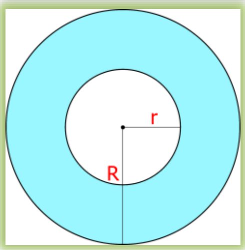
Дуга AKB с градусной мерой, равной α.



Закрашенная часть круга – его сектор.



Закрашенная часть круга – его сегмент.



Закрашенная часть круга – его кольцо.

Теоремы о хордах

Теорема. *Равные хорды окружности равноудалены от ее центра.*

Теорема. *Равные хорды окружности стягивают дуги с одинаковыми градусными мерами.*

Теорема. *Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен к этой хорде.*

Теорема. *Диаметр больше любой другой хорды, отличной от диаметра.*

Свойство хорд, которые пересекаются. *При пересечении двух хорд получаются отрезки, произведение длин которых у одной хорды равно соответствующему произведению у другой.*

Теорема. *Если хорда делится точкой на два отрезка, то их произведение будет равно* $\mathrm{R}^2 - \mathrm{d}^2$*, где R – радиус окружности;* d *– расстояние от данной точки до центра окружности.*

Теорема. *Градусные меры дуг окружности, что содержатся между двумя параллельными хордами, равны.*

Теоремы о касательных и секущих к окружности

Свойство касательной. *Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*

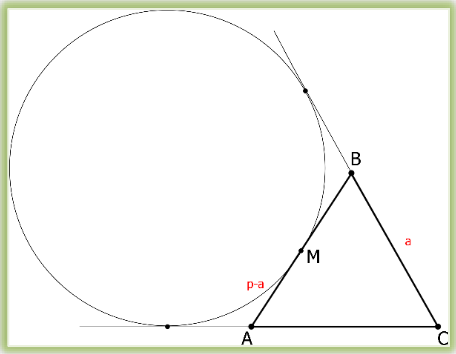
Признак касательной к окружности. *Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна* *радиусу, проведенному в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.*

Свойство касательной и секущей. *Если из внешней точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от данной точки до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от данной точки до точек ее пересечения с окружностью.*

Теорема. *Если из внешней точки провести секущую к окружности, то произведение длин отрезков от данной точки до точек пересечения секущей с окружностью будет равно* $\mathrm{d}^2 - \mathrm{R}^2$, *где d – расстояние от точки M до центра окружности; R – радиус окружности.*

Теорема. *Если из внешней точки проведены две секущие к окружности, то произведение длин отрезков от данной точки до точек пересечения первой секущей с окружностью равно произведению длин отрезков от данной точки до точек пересечения второй секущей с окружностью.*

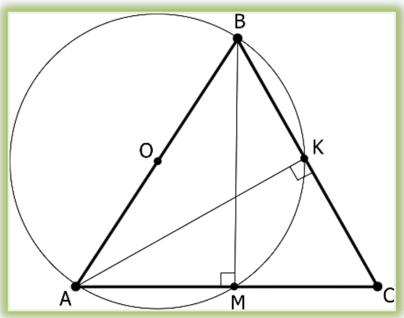
Теоремы для окружностей, связанных с геометрическими фигурами

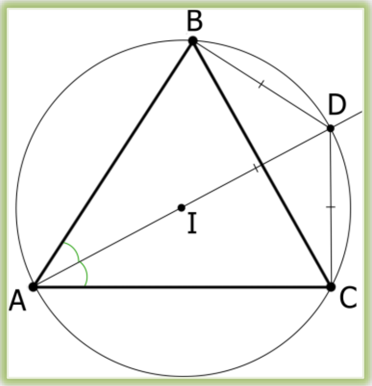


Теорема. *Если окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M и касается продолжений двух других сторон, тогда сумма длин отрезков BC и MB будет равна полупериметру треугольника ABC.*

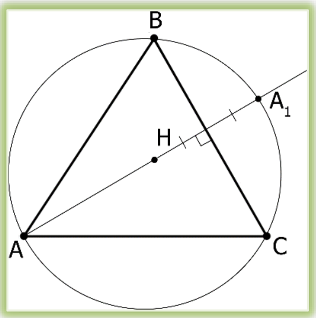
Теорема. *Если в треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AB в точке M,* $BC = a$, *то*
$AM = p - a$, *где p – полупериметр треугольника ABC.*

Теорема. *Окружность, построенная на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, пересекает прямые AC и BC в точках M и K соответственно так, что AK и BM – высоты треугольника ABC.*

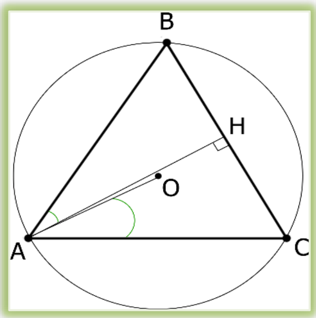




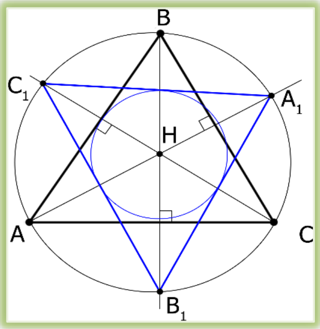
Теорема. *Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке D. Точка I – инцентр треугольника ABC,* $\mathrm{DI} = \mathrm{DB} = \mathrm{DC}$.



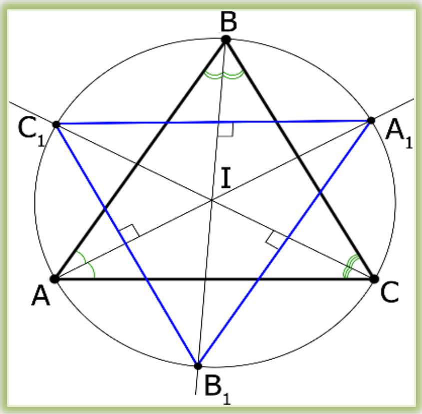
Теорема. *Точка H – ортоцентр треугольника ABC. Прямая AH пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке* A_1. *BC делит* HA_1 *пополам.*



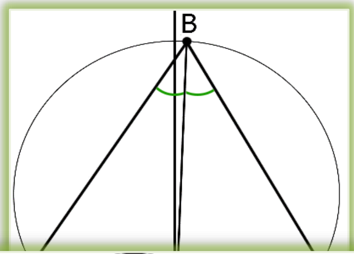
Теорема. *Отрезок AH – высота треугольника ABC.* $\angle\mathrm{BAH} = \angle\mathrm{OAC}$, *где O – центр описанной окружности треугольника ABC.*



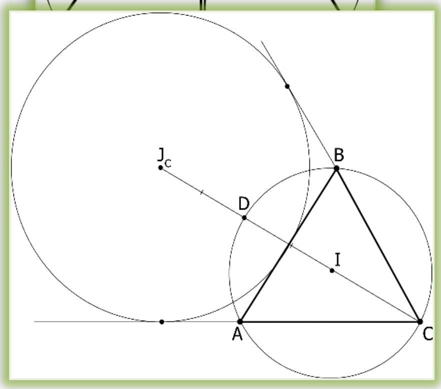
Теорема. *Прямые, которые содержат высоты остроугольного треугольника ABC, пересекают его описанную окружность в точках* A_1, B_1, C_1. *Ортоцентр треугольника ABC является инцентром треугольника* $A_1B_1C_1$.



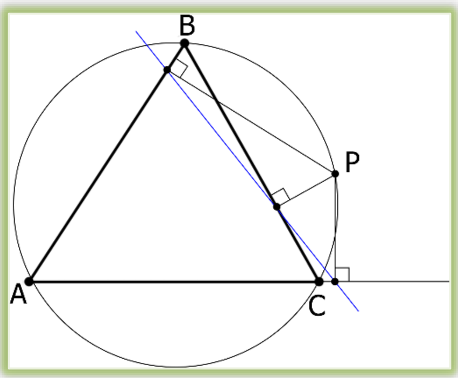
Теорема. *Прямые, которые содержат биссектрисы треугольника ABC, пересекают его описанную окружность в точках* A_1, B_1, C_1. *Инцентр треугольника ABC есть ортоцентром треугольника* $A_1B_1C_1$.



Теорема. *Описанная окружность треугольника ABC, биссектриса угла B и серединный перпендикуляр стороны AC проходят через одну точку.*



Теорема. *Расстояние от инцетра треугольника до точки пересечения биссектрисы с описанной окружностью при указанной вершине треугольника равно расстоянию от точки пересечения до центра вневписанной окружности при данной вершине.*



Теорема. *Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или их продолжений) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой (прямой Уоллеса).*

Теоремы об углах, связанных с окружностью

Свойство угла между касательной и хордой. *Угол, образованный хордой и касательной к окружности, равен половине меры дуги, которую стягивает хорда.*

Теорема. *Если из одной точки к окружности провести две касательных, то отрезки касательных, которые соединяют данную точку с точками касания, будут равны.*

Теорема. *Градусная мера вписанного угла равняется половине градусной меры дуги, на которую он опирается.*

Описанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу, равны.

Вписанный угол, который опирается на диаметр (полуокружность) – прямой.

Теорема. *Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается.*

Теорема. *Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на эту дугу.*

Теорема. *Вертикальные углы, образованные пересекающимися хордами окружности, равны полусумме мер дуг, на которые опираются.*

Теорема. *Угол за пределами окружности, образованный продолжениями хорд, которые не пересекаются, равен полуразности дуг, на которые он опирается.*

Четырехугольники

Произвольные четырехугольники

Теорема. *Длина любой стороны четырехугольника меньше от суммы длин трех других его сторон.*

Теорема. *Отрезки, которые соединяют середины противолежащих сторон четырехугольника, точкой пересечения делятся пополам.*

Теорема. *Отрезки, которые соединяют середины противолежащих сторон выпуклого четырехугольника, и отрезок, который соединяет середины диагоналей, пересекаются в одной точке.*

Теорема. *Для того, чтобы четырехугольник был вписанным, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противолежащих углов равнялась* 180°.

Теорема. *Для того, чтобы четырехугольник был описанным, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противолежащих сторон были равными.*

Теорема. *Произведение площадей двух треугольников при равных вертикальных углах равно произведению площадей двух треугольников при других равных вертикальных углах (треугольники образованы пересечением диагоналей в четырехугольнике).*

Теорема. *Чтобы доказать то, что предполагаемые стороны четырехугольника параллельны (предполагаемые основания трапеции), необходимо и достаточно выполнение равенства площадей треугольников, которые* *находятся при предполагаемых боковых сторонах трапеции.*

Теорема. *Если диагонали описанного четырехугольника пересекаются, то сумма радиусов описанных окружностей двух треугольников при равных вертикальных углах будет равна сумме радиусов двух других треугольников при равных вертикальных углах.*

Формулы площади четырехугольников

$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi$, *S – площадь четырехугольника ABCD: φ – угол между его диагоналями.*

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$, *S – площадь четырехугольника, φ – угол между его диагоналями.*

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, *четырехугольник вписан в окружность.*

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos \theta}$,
θ – полусумма противолежащих углов (любых).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{4}(ac+bd+d_1d_2)(ac+bd-d_1d_2)}$$

Параллелограмм

Теорема. *У параллелограмма противолежащие стороны равны.*

Теорема. *У параллелограмма противолежащие углы равны.*

Теорема. *У параллелограмма диагонали точкой пересечения делятся пополам.*

Определение. *Точка, в которой пересекаются прямые, которые содержат высоты треугольника, называют ортоцентром.*

Определение. *Точка, в которой пересекаются прямые, которые содержат биссектрисы треугольника, называют инцентром (центром вписанной окружности).*

Определение. *Точка, в которой пересекаются прямые, которые содержат медианы треугольника, называют центроидом (центр масс).*

Теорема. *Биссектрисы острого и тупого угла параллелограмма, прилежащих к одной стороне, образуют прямоугольный треугольник.*

Теорема. *Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен острому углу параллелограмма.*

Теорема. *Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины острого угла, равен тупому углу параллелограмма.*

Теорема. *Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

Теорема. *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

Формулы площади параллелограмма

$$S = ab\sin\alpha$$

$$\mathrm{S} = \mathrm{ah_a}$$

Прямоугольник

Теорема. *Диагонали прямоугольника равны.*

Теорема. *Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм – прямоугольник.*

Теорема. *Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.*

Формулы площади прямоугольника

$$S = ab$$

Ромб

Теорема. *Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

Теорема. *Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.*

Теорема. *Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм – ромб.*

Теорема. *Высоты ромба равны.*

Формулы площади ромба

$$\mathrm{S} = \mathrm{ah}$$

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

$$S = a^2 \sin\alpha$$

$$S = \frac{4r^2}{\sin\alpha}$$

$$S = 2ar$$

Правильный четырехугольник (квадрат)

$$\alpha = 90°$$

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = 2r = \sqrt{2}R$$

$$d = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}r = 2R$$

$$r = \frac{a}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2} = r\sqrt{2}$$

$$P = 4a$$

$$S = a^2 = 4r^2 = 2R^2 = \frac{d^2}{2}$$

Трапеция

Теорема. *Среднюю линию трапеции можно рассчитать по таким формулам:*

$$\mathrm{m} = \frac{(\mathrm{a} + \mathrm{b})}{2}$$

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{d_1 d_2}}{2\mathrm{h}} \sin\varphi$$

Теорема. *Средняя линия трапеции делит диагонали трапеции пополам.*

Теорема. *Отрезок, который соединяет середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен их полуразности.*

Теорема. *Середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.*

Формулы для трапеции

$a = 2m - b \qquad b = 2m - a$

$a = \frac{d_1 d_2}{h} \sin\varphi - b \qquad b = \frac{d_1 d_2}{h} \sin\varphi - a$

$c = \frac{h}{\sin\alpha} \qquad d = \frac{h}{\sin\beta}$

$$d_1 = \sqrt{d^2 + ab - \frac{a(d^2 - c^2)}{a - b}}$$

$$d_2 = \sqrt{c^2 + ab - \frac{a(c^2 - d^2)}{a - b}}$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + d^2 - 2a\sqrt{d^2 - h_a^2}}$$

$$d_2 = \sqrt{a^2 + c^2 - 2a\sqrt{c^2 - h_a^2}}$$

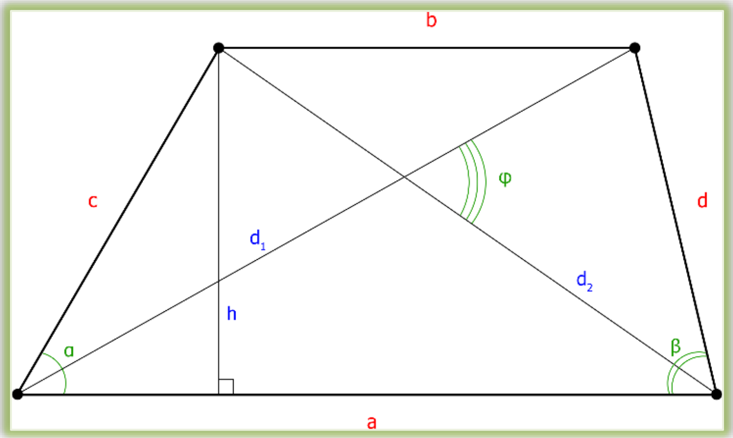
$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$$

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{(a - b)^2 + c^2 - d^2}{2(a - b)}\right)^2}$$

$$h = c\sin\alpha = d\sin\beta$$

$$h = \frac{d_1 d_2}{2m}\sin\varphi$$

Формулы площади трапеции



$$S = mh$$

Равнобедренная трапеция

Теорема. *Когда углы при одном из оснований трапеции равны, то данная трапеция является равнобедренной.*

Теорема. *Углы при основаниях у равнобедренной трапеции равны.*

Теорема. *Диагонали в равнобедренной трапеции равны.*

Теорема. *Диагонали равнобедренной трапеции точкой пересечения делятся пополам.*

Основные свойства равнобедренной трапеции

- *Сумма углов, прилегающих к боковой стороне, равна* $180°$.
- *Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона равна средней линии трапеции.*

- *Вокруг равнобедренной трапеции можно описать окружность.*
- *Если диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, то высота* h *равна полусумме оснований (длине средней линии)*

$$h = m = \frac{a + b}{2}.$$

- *Если диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, то площадь трапеции можно рассчитать по формуле*

$$S = h^2.$$

- *Если диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне, то она делит трапецию на два треугольника: прямоугольный и равнобедренный.*
- *Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, тогда*

$$h^2 = ab.$$

- *Прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции.*
- *Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит основание трапеции на два отрезка, меньший из которых равняется полуразности оснований, а больший – полусумме оснований (средней линии трапеции).*

Формулы для равнобедренной трапеции

$$\boxed{\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma}$$

$a = 2m - b$

$b = 2m - a$

$a = \frac{d^2 - c^2}{b}$

$b = \frac{d^2 - c^2}{a}$

$a = \frac{d^2}{h}\sin\gamma - b$

$b = \frac{d^2}{h}\sin\gamma - a$

$a = \frac{2S}{h} - b$

$b = \frac{2S}{h} - a$

$a = b + 2h\,ctg\,\alpha$

$b = a - 2h\,ctg\,\alpha$

$a = b + 2c\cos\alpha$

$b = a - 2c\cos\alpha$

$$m = a - h\,ctg\,\alpha$$

$$m = b + h\,ctg\,\alpha$$

$$m = a - \sqrt{c^2 - h^2}$$

$$m = b + \sqrt{c^2 - h^2}$$

$$m = \frac{d^2}{2h}\sin\varphi$$

$c = \frac{h}{\sin\alpha}$

$h = \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{4}}$

$c = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$

$h = c\sin\gamma$

$c = \frac{S}{m\sin\gamma}$

$h = \frac{a-b}{2}\,tg\,\alpha$

$$h = \frac{d^2}{2m} \sin\varphi$$

$$d = \sqrt{h^2 + m^2}$$

$$d = \frac{\sqrt{4h^2 + (a+b)^2}}{2}$$

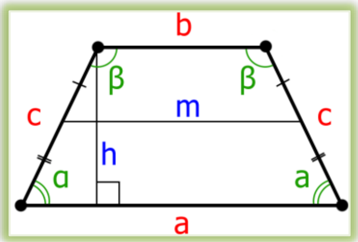
$$d = \sqrt{c^2 + ab}$$

$$d = \sqrt{\frac{2mh}{\sin\varphi}}$$

$$R = \frac{acd}{4\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-d)}}, p = \frac{a+c+d}{2},\ a - \text{большее основание}$$

Формулы площади равнобедренной трапеции

$$\boxed{\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma}$$



$$S = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{4c^2 - (a-b)^2}$$

$$S = c \sin\alpha\,(a - c\cos\alpha) \qquad S = c \sin\alpha\,(b + c\cos\alpha)$$

$$S = \frac{4r^2}{\sin\gamma} \qquad S = \frac{h^2}{\sin\gamma} \qquad S = \frac{ab}{\sin\gamma}$$

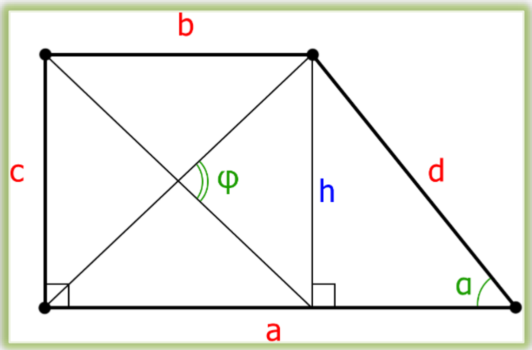
$$S = r\,(a+b) \qquad S = m \cdot \sqrt{ab} \qquad S = c \cdot \sqrt{ab}$$

$\boxed{c = r}$, *если в трапецию можно вписать окружность*

Прямоугольная трапеция

Формулы для прямоугольной трапеции

$$\boxed{c = h}$$



$$a = b + \sqrt{d^2 - c^2} \qquad b = a - \sqrt{d^2 - c^2}$$

$$a = \frac{d_1 d_2}{c}\sin\varphi - b \qquad b = \frac{d_1 d_2}{c}\sin\varphi - a$$

$$a = \frac{2S}{c} - b \qquad b = \frac{2S}{c} - a$$

$$c = \sqrt{d^2 - (a-b)^2} \qquad d = \sqrt{c^2 + (a-b)^2}$$

$$c = (a-b)\,tg\,\alpha \qquad d = \frac{a-b}{\cos\alpha}$$

$$c = d\sin\alpha \qquad d = \frac{c}{\sin\alpha}$$

$$c = \frac{d_1 d_2}{2m}\sin\varphi \qquad d = \frac{S}{m\sin\alpha}$$

Правильные многоугольники

Теорема. *Сумма углов выпуклого n-угольника равняется* $180^\circ(\mathrm{n}-2)$.

Теорема. *Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равняется* 360°.

Теорема. *Количество диагоналей n-угольника можно рассчитать по формуле*

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-3)}{2}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} > 3.$$

Теорема Птолемея. *Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противолежащих сторон.*

Лемма. *Площадь квадрата со стороной* $\frac{1}{\mathrm{n}}$ *ед. (n – натуральное число) равна* $\frac{1}{\mathrm{n}^2}$ ед^2.

Теорема. *Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.*

Теорема. *Площадь описанного многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.*

$$\mathrm{S} = \mathrm{rp},$$

где r – радиус вписанной окружности; p – полупериметр.

Формула площади Гаусса

$$S = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \cdots + x_{n-1}y_n - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - \cdots - x_ny_{n-1}\right|$$

Теорема. *Любой правильный многоугольник является одновременно вписанным и описанным, причем центры его описанной и вписанной окружностей совпадают.*

$$a = 2r\, tg\left(\frac{180°}{n}\right) = 2R\sin\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$P = an$$

$$r = \frac{a}{2\, tg\left(\frac{180°}{n}\right)} = R\cos\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$R = \frac{a}{2\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} = \frac{r}{\cos\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

$$S = \frac{na^2}{4\, tg\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

$$S = \frac{1}{2}anr$$

$$S = r^2n\, tg\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}R^2n\sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

Количество сторон правильного n-угольника	**n = 3**	**n = 4**	**n = 6**
Радиус описанной окружности	$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радиус вписанной окружности	$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Правильный треугольник

$$\alpha = 60°$$

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}r = \sqrt{3}R$$

$$P = 3a$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3r = \frac{3R}{2}$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}R = \frac{h}{3}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = 2r = \frac{2h}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}ar = 3\sqrt{3}r^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36}P^2$$

Метод координат на плоскости

Формулы для координат в плоскости

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \qquad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

λ – отношение первого отрезка ко второму

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ *– координаты точки пересечения медиан*

Уравнения фигур

Теорема. *Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B является константой, – это прямая, перпендикулярная прямой AB.*

Уравнение окружности

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Уравнение окружности в каноническом виде с центром в точке с координатами $(a; b)$ *и радиусом R.*

Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Уравнение эллипса в каноническом виде.

Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Уравнение гиперболы в каноническом виде.

Уравнения прямых

$$ax + by + c = 0$$

$$y = kx + b, k = tg\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

(уравнение прямой, которая проходит через точку с координатами $(\mathrm{x}_0; \mathrm{y}_0)$ *перпендикулярно до ненулевого вектора* $\vec{\mathrm{n}}(\mathrm{a}; \mathrm{b})$*)*

Взаимное размещение прямых в плоскости

Прямые пересекаются, если $\mathrm{k}_1 \neq \mathrm{k}_2$.

Прямые перпендикулярны, если $\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2 = -1$.

Прямые параллельны, если $\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2$.

Прямые совпадают, если $\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2, \mathrm{b}_1 = \mathrm{b}_2$.

Формулы для уравнений прямых

$$k = tg\ \alpha$$

(α – угол, образованный линейной функцией с положительным направлением оси абсцисс, α – острый, если $k > 0$, α – тупой, если $k < 0$; k – угловой коэффициент, b – показатель ординаты)

$$tg\ \beta = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$$

(β – угол, образованный между двумя прямыми, $k_1 k_2 \neq -1$; если $\beta = 0$, то прямые параллельны)

$$p = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(p – длина перпендикуляра, опущенного из точки с координатами $(x_0; y_0)$ к прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$)

Векторы на плоскости

$\vec{0}$ – *нулевой вектор*

$$|\vec{0}| = 0$$

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ *или* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – *коллинеарные векторы*

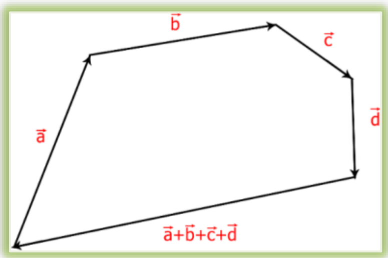
$\vec{a} = \vec{b}$, *если* $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ *и* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(x_2 - x_1; y_2 - y_1)}$$

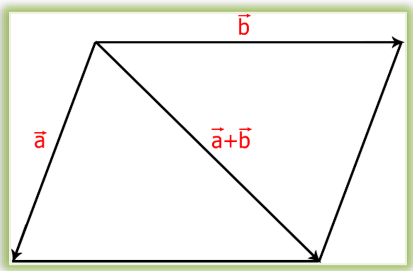
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Действия с векторами

Правило многоугольника



Правило параллелограмма



Свойства действий над векторами

$$\vec{a} \pm \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a}(a_1; b_1) + \vec{b}(a_2; b_2) = \vec{c}(a_1 + a_2; b_1 + b_2)$$

$$\vec{a}(a_1; b_1) - \vec{b}(a_2; b_2) = \vec{c}(a_1 - a_2; b_1 - b_2)$$

$$k \cdot \vec{a}(a_1; b_1) = \vec{b}(ka_1; kb_1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| cos\,\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

$$cos\,\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

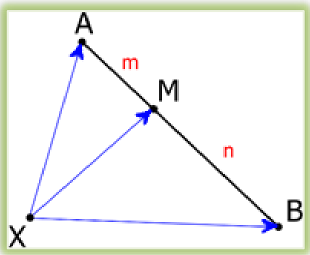
Теорема. *Для любых n точек* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$ *выполняется равенство*

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} + \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} + \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4} + \dots + \overrightarrow{\mathrm{A}_{\mathrm{n}-1}\mathrm{A}_\mathrm{n}} + \overrightarrow{\mathrm{A}_\mathrm{n}\mathrm{A}_1} = \vec{0}.$$

Теорема. *Если векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны и* $\vec{a} \neq \vec{0}$*, то существует такое число k, что* $\vec{b} = k\vec{a}$.

Теорема. *Если точки O, A и B лежат на одной прямой, то существует такое число k, что* $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$.

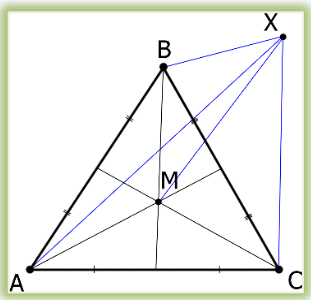
Теорема. *Если* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– неколлинеарные векторы, тогда для любого вектора* $\vec{c}$ *существует единственная пара чисел* $(x; y)$ *такая, что*



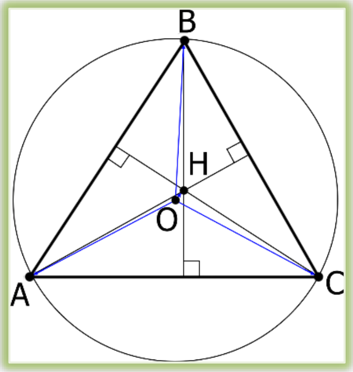
$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Теорема. *Пусть M – точка отрезка AB, что* $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$. *Для любой точки X выполняется равенство*

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

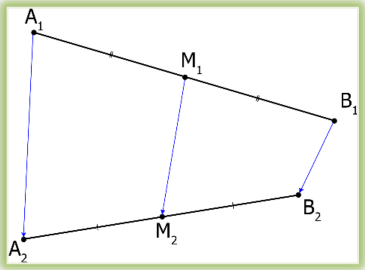


Теорема. *Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Для произвольной точки X будет выполняться равенство* $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.



Теорема. *Если точка H – ортоцентр треугольника ABC, а точка O – центр его описанной окружности, то выполняется равенство*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$



Теорема. *Если точки* M_1 *и* M_2 *– середины отрезков* A_1B_1 *и* A_2B_2 *соответственно, то выполняется равенство*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right).$$

Преобразования фигур на плоскости

Общие определения и теоремы

Запись преобразования фигуры

$$f(F) = F_1,$$

где F – прообраз фигуры $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_1}$ *– образ фигуры F (при отображении (преобразовании) фигуры F).*

Определение. *Преобразование f является обратимым, если разным точкам фигуры соответствуют разные образы. Каждое обратимое преобразование имеет обратное преобразование.*

Определение. *Преобразования* f *и* $\mathrm{f_1}$ *называются взаимно обратными, если преобразование* $\mathrm{f_1}$ *является обратным преобразованию* f*, а преобразование f является обратным преобразованию* $\mathrm{f_1}$.

Определение. *Преобразование f является тождественным, если* $\mathrm{f(X) = X}$.

Определение. *Преобразование h называют композицией преобразований f и g, если* $\mathrm{f(F) = F_1, g(F_1) = F_2}$, *а* $\mathrm{h(F) = F_2}$.

Определение. *Преобразование фигуры F, которое сохраняет расстояние между точками, называют движением фигуры F.*

Теорема. *При движении фигуры F образами любых ее трех точек, которые лежат на одной прямой, есть три точки, которые лежат на одной прямой, а образами трех точек,* *которые не лежат на одной прямой, есть три точки, которые не лежат на одной прямой.*

При движении отрезка, луча, прямой, угла образами есть соответственно отрезок, луч, прямая, угол.

Теорема. *Если f – движение угла ABC и* $f(\angle ABC) = \angle A_1B_1C_1$, *то* $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Теорема. *Если f – движение треугольника ABC и* $f(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$, *то* $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Теорема. *Если f и g – движения, то композиция этих преобразований также является движением.*

Определение. *Две фигуры называются равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур есть образом другой.*

Параллельный перенос

Теорема. *Параллельный перенос является движением.*

Если фигура F_1 *– образ фигуры F при параллельном переносе, то* $F_1 = F$.

Теорема. *Если каждой точке* $X(x; y)$ *фигуры F поставлена в соответствие точка* $X_1(x + m; y + n)$, *где m и n – заданные числа, то такое преобразование фигуры F является параллельным переносом на вектор* $\vec{a}(m; n)$.

Теорема. *Если точки* A_1 *и* B_1 *не принадлежат прямой AB и являются образами соответственно точек A и B при параллельном переносе прямой AB, тогда четырехугольник* AA_1BB_1 *– параллелограмм.*

Осевая симметрия

Запись осевой симметрии

S_l – осевая симметрия относительно прямой l.

Понятия и теоремы, связанные с осевой симметрией

Определение. *Точки A и $\mathrm{A_1}$ называют симметричными относительно прямой l, если прямая l является серединным перпендикуляром отрезка $\mathrm{AA_1}$. Если точка A принадлежит прямой l, то ее считают симметричной самой себе относительно прямой l.*

Свойство осевой симметрии. *Осевая симметрия является движением.*

Если $\mathrm{S_l(F) = F_1}$, то $\mathrm{F = F_1}$.

Осевая симметрия является обратимым преобразованием. Если $\mathrm{S_l(F) = F_1}$, то $\mathrm{S_l(F_1) = F}$, то есть $\mathrm{S_l \circ S_l(F) = F}$.

Определение. *Фигуру F называют симметричной относительно прямой l, если $\mathrm{S_l(F) = F}$.*

Теорема. *Если фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.*

Теорема. *Если многоугольник имеет две или больше осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.*

Теорема. *Если две оси симметрии параллельны, то композиция симметрий относительно этих осей является параллельным переносом.*

Центральная симметрия

Запись центральной симметрии

S_O – центральная симметрия относительно точки O.

Понятия и теоремы, связанные с центральной симметрией

Определение. *Точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA_1. Точку O считают симметричной самой себе.*

Свойство центральной симметрии. *Центральная симметрия является движением.*

Если $S_O(F) = F_1$, *то* $F = F_1$.

Центральная симметрия является обратимым преобразованием. Если $S_O(F) = F_1$, *то* $S_O(F_1) = F$, *то есть* $S_O \circ S_O(F) = F$.

Определение. *Фигуру F называют симметричной относительно точки O, если* $S_O(F) = F$.

Теорема. *Образом прямой при симметрии относительно точки, которая ей не принадлежит, является прямая, параллельная данной.*

Теорема. *Композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.*

Теорема. *Композиция центральной симметрии и параллельного переноса является центральной симметрией.*

Теорема. *Композиция четного количества центральных симметрий является параллельным переносом.*

Теорема. *Композиция нечетного количества центральных симметрий является центральной симметрией.*

Поворот

Запись поворота

R_O^α – *поворот относительно центра в точке O на угол* α.

Теоремы, связанные с поворотом

Свойство поворота. *Поворот является движением.*

Если фигура F_1 – *образ фигуры F при повороте, то* $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1$.

Теорема. *Если оси симметрии не параллельны, то композицией двух осевых симметрий является поворот вокруг его точки пересечения осей.*

Теорема Шаля. *Любое движение фигуры является композицией не более чем трех осевых симметрий.*

Гомотетия

Запись гомотетии

H_O^k – *гомотетия относительно точки O с коэффициентом* k.

Понятие коэффициента подобия

Пусть точки A и B – произвольные точки фигуры F, а точки A_1 *и* B_1 – *их образы при преобразовании подобия. Точки* A_1

и B_1 *принадлежат фигуре* F_1, *которая подобна фигуре F, тогда* $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ *– коэффициент подобия.*

Фигура F_1 *подобна фигуре F с коэффициентом k. Фигура F подобна фигуре* F_1 *с коэффициентом* $\frac{1}{k}$.

Понятия и теоремы, связанные с гомотетией

Теорема. *При гомотетии фигуры F с коэффициентом k все расстояния между ее точками изменяются в* $|k|$ *раз, то есть если точки A и B – произвольные точки фигуры F, а* A_1 *и* B_1 *– их соответственные образы при гомотетии с коэффициентом k, то* $A_1B_1 = |k|AB$.

Если треугольник $A_1B_1C_1$ *гомотетичный треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии k, то* $\Delta A_1B_1C_1 \overset{k}{\approx} \Delta ABC$.

Теорема. *При гомотетии фигуры F образами любых ее трех точек, которые лежат на одной прямой, есть три точки, которые лежат на одной прямой, а образами трех точек, которые не лежат на одной прямой, есть три точки, которые не лежат на одной прямой.*

При гомотетии отрезка, луча, прямой образами есть соответственно отрезок, луч, прямая. При гомотетии угла образом есть угол, равный данному. При гомотетии треугольника образом есть треугольник, подобный данному.

Определение. *Две фигуры называют подобными, если одну из них можно получить из другой в результате композиции двух преобразований: гомотетии и движения.*

Теорема. *Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

Теорема. *Образом прямой при гомотетии с центром в точке, которая ей не принадлежит, есть прямая, параллельная данной.*

Теорема. *Когда неравные треугольники ABC и* $A_1B_1C_1$ *есть такими, что* $AB||A_1B_1$, $BC||B_1C_1$, $CA||C_1A_1$, *то существует такая точка* O *и число* $k \neq 0$, $|k| \neq 1$, *что* $H_O^k(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$.

Теорема. *Гомотетия при* $k = -1$ *является центральной симметрией.*

Теорема. *Гомотетия при* $k = 1$ *является тождественным преобразованием.*

Теорема. *При* $k \neq 1$ *и* $k \neq -1$ *гомотетия не является движением.*

Инверсия

Запись инверсии

I_O^R *– инверсия относительно окружности с центром в точке O и радиусом R.*

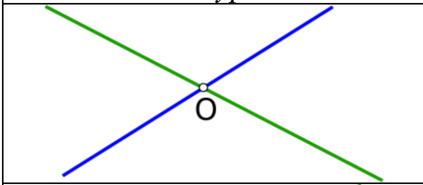
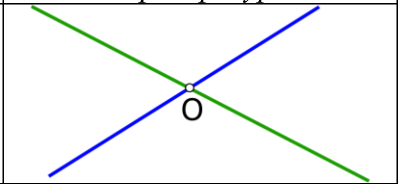
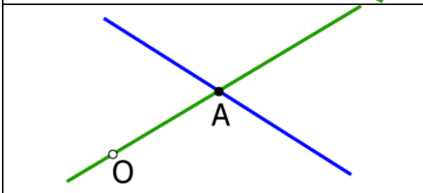
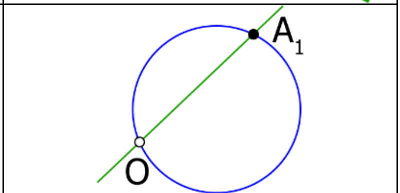
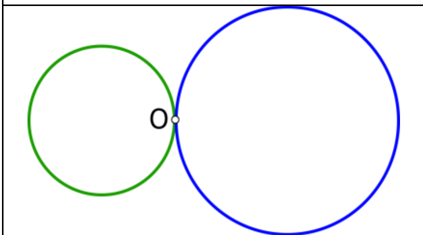
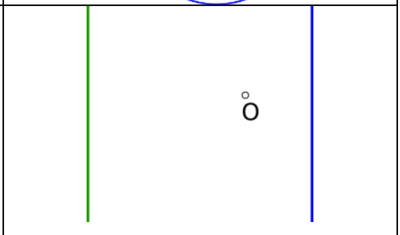
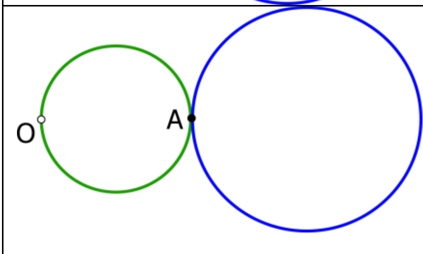
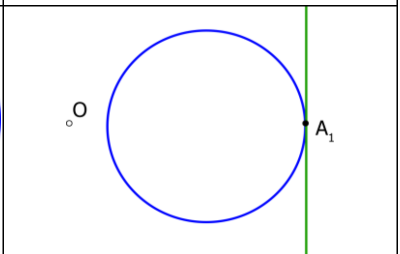
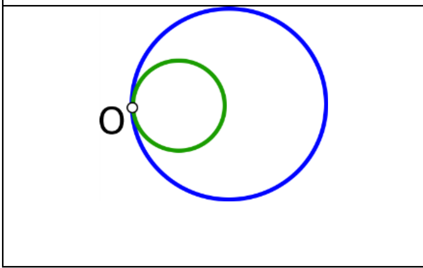
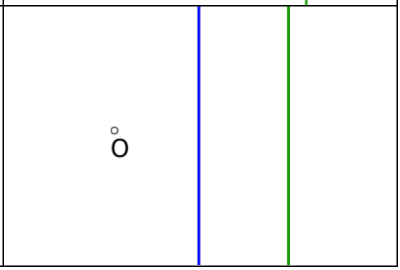
Свойства инверсии

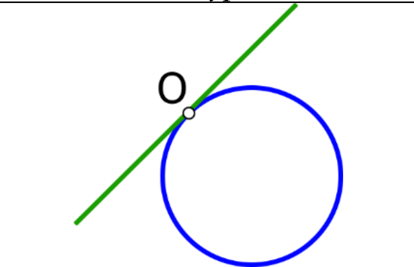
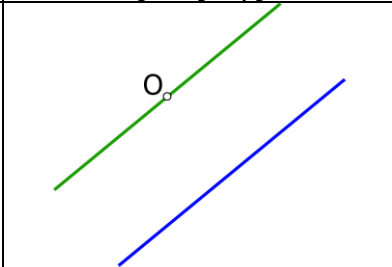
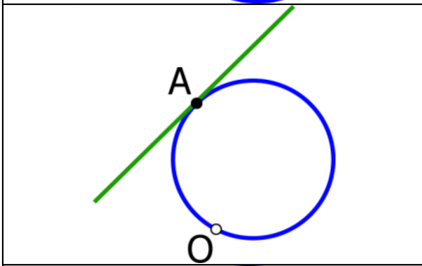
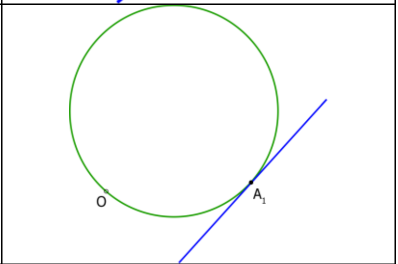
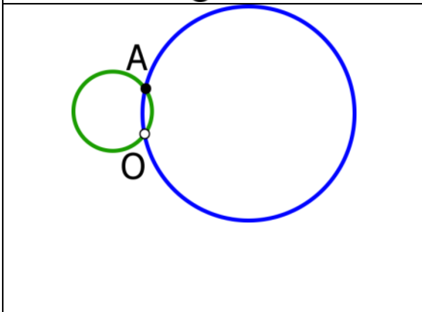
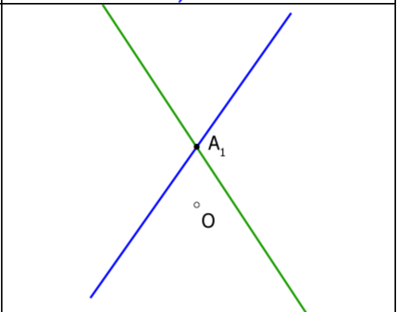
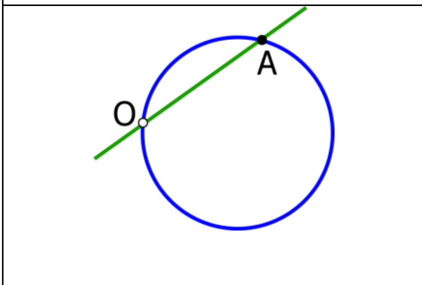
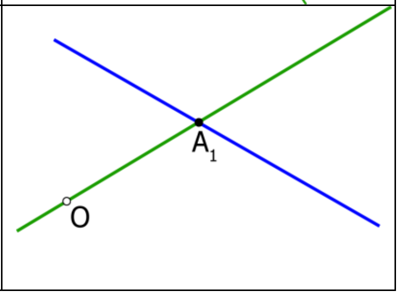
- *Образы точек, которые лежат внутри окружности инверсии (не включая центр окружности), есть точки, которые лежат за пределами окружности и наоборот.*
- *Если X – произвольная точка окружности инверсии, то* $I_O^R(X) = X$, *то есть все точки окружности*

инверсии являются недвижимыми точками этого преобразования.

- *Инверсия является обратимым преобразованием. Преобразование, обратное к инверсии* $\mathrm{I}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{R}}$, *есть эта же самая инверсия* $\mathrm{I}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{R}}$.
- *Образом прямой, которая проходит через центр инверсии, есть эта же самая прямая.*
- *Образом прямой, которая не проходит через центр инверсии, есть окружность, которая проходит через центр инверсии.*
- *Образом окружности, которая проходит через центр инверсии, есть прямая, которая не проходит через центр инверсии.*
- *Образом окружности, которая не проходит через центр инверсии, есть окружность, которая не проходит через центр инверсии.*
- *Если* $\mathrm{I}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}_1, \quad \mathrm{I}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}_1$, *то* $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 = \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{R}^2}{\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}}$.

Некоторые фигуры при инверсии

Фигура	*Образ фигуры*
	
	
	
	
	

Фигура	*Образ фигуры*
	
	
	
	

Стереометрия

Аксиомы стереометрии

1. *В пространстве существует (по крайней мере одна) плоскость и точка, которая не лежит в данной плоскости.*
2. *Через любые три точки, которые не лежат на одной прямой, можно провести плоскость и к тому же только одну.*
3. *Если две точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.*
4. *Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, которая проходит через эту точку.*

Взаимное расположение прямых в пространстве

Признак скрещивающихся прямых. *Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает данную плоскость, но не пересекает первую прямую, то данные прямые являются скрещивающимися.*

Признак параллельности прямых. *Если прямая, которая не лежит в данной плоскости, параллельна какой-либо прямой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.*

Теорема. *Через любую точку пространства, которая не лежит на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и только одну.*

Теорема. *Две прямые, параллельные третьей, параллельны.*

Теорема. *Если плоскости проходят через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекают эту* *плоскость, то прямая их пересечения параллельна данной прямой.*

Теорема. *Если две прямые, которые пересекаются, параллельны другим прямым, которые пересекаются, то угол между первыми прямыми равен углу между другими.*

Теорема. *Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой.*

Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Признак параллельности плоскостей. *Если две прямые, которые пересекаются и лежат в одной плоскости, параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.*

Признак перпендикулярности плоскостей. *Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.*

Теорема. *Параллельные плоскости пересекаются секущей плоскостью по параллельным прямым.*

Теорема. *Отрезки параллельных прямых, которые отсекаются параллельными прямыми, равны.*

Теорема. *Если отрезки, которые проектируются, не параллельны проектирующей прямой, то при параллельном проектировании:*

1) *отрезки фигуры отображаются отрезками;*
2) *параллельные отрезки – параллельными отрезками или в виде отрезков одной прямой;*
3) *отношение длин параллельных отрезков или отрезков одной прямой сохраняется.*

Теорема. *Произвольный треугольник* $A'B'C'$ *может быть отображением данного треугольника ABC.*

Теорема. *Если на плоскости отображений* α *отображению* ΔABC *соответствует* $\Delta A'B'C'$*, то на плоскости можно однозначно построить отображение произвольной точки, которая лежит в плоскости* ΔABC.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. *Если прямая, которая пересекает плоскость, перпендикулярна к двум прямым плоскости, которые проходят через точку пересечения, то она перпендикулярна к плоскости.*

Теорема. *Через прямую и точку, которая не лежит на ней, можно провести плоскость и к тому же только одну.*

Теорема. *Через две прямые, которые пересекаются, можно провести плоскость и к тому же только одну.*

Теорема. *Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.*

Теорема. *Две прямые, перпендикулярные к одной плоскости, параллельны.*

Теорема. *Если из одной точки, взятой за пределами плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и наклонные, то:*

1. *Две наклонные, которые имеют равные проекции, равны.*
2. *Из двух наклонных та большая, проекция которой большая.*
3. *Перпендикуляр короче любой наклонной.*

Теорема о трех перпендикулярах. *Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно к проекции наклонной, перпендикулярна к этой наклонной. И наоборот, если прямая плоскости перпендикулярна к наклонной, то она перпендикулярна и к проекции наклонной.*

Теорема. *Прямая, проведенная в одной из двух перпендикулярных плоскостей перпендикулярно к прямой их пересечения, перпендикулярна к другой плоскости.*

Теорема. *Площадь проекции многоугольника на плоскость равняется площади данного многоугольника, умноженной на косинус угла между их плоскостями.*

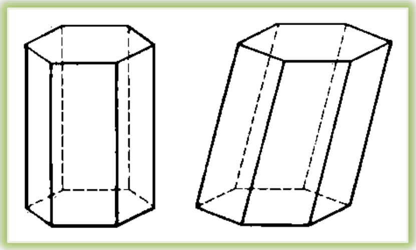
$$S' = S \cdot \cos\alpha$$

Пространственная теорема Пифагора. *Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на три взаимно перпендикулярные прямые.*

Теорема. *Угол между наклонной и плоскостью наименьший из всех углов, которые наклонная образует с прямыми, проведенными на плоскости через основание наклонной.*

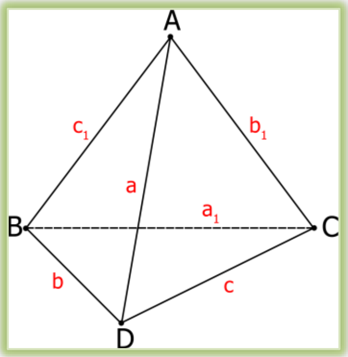
Многогранники и тела вращения

Призма



Тетраэдр.

Условные обозначения



A, B, C, D – вершины тетраэдра;

a, b, c, a_1, b_1, c_1 – ребра тетраэдра;

$\alpha_B, \beta_B, \gamma_B$ – плоские углы при вершине B;

$\widehat{AB}, \widehat{a_1}, \widehat{b_1}$ – двухгранные углы;

n_a, n_b, n_c – средние линии тетраэдра;

h_A, h_B, h_C, h_D – высоты тетраэдра;

A_h, B_h, C_h, D_h – основания высот тетраэдра;

m_A, m_B, m_C, m_D – медианы тетраэдра;

G_A, G_B, G_C, G_D – основания медиан (центроиды граней) тетраэдра;

G – *центроид тетраэдра;*

H – *ортоцентр (точка пересечения высот) тетраэдра;*

S_A, S_B, S_C, S_D – *площади граней;*

V – *объем тетраэдра.*

Свойства тетраэдра

- *Средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.*
- *Длины средних линий тетраэдра можно найти по таким формулам:*

$$n_a = \frac{\sqrt{b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2}}{2};$$

$$n_b = \frac{\sqrt{a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2}}{2};$$

$$n_c = \frac{\sqrt{a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}}{2}.$$

- *Медиана тетраэдра, которая лежит на диагонали описанного вокруг него параллелепипеда, равна* $\frac{2}{3}$ *длины этой диагонали.*
- *Медиана тетраэдра меньше от среднего арифметического трех ребер, которые выходят из той же самой вершины.*
- *Пусть K, L, M, N, E, F – точки, которые лежат соответственно на ребрах AB, AC, CD, DB, AD и BC тетраэдра ABCD так, что в любых каких-либо трех*

его гранях выполняется условие Чевы. Тогда условие Чевы выполняется и в четвертой грани.

- *Для того, чтобы через точки K, N, M, L, которые принадлежат соответственно ребрам AB, BD, DC, CA тетраэдра или их продолжениям, можно было провести плоскость, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось такое условие:*

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KB}} \cdot \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{ND}} \cdot \frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{MC}} \cdot \frac{\mathrm{CL}}{\mathrm{LA}} = 1.$$

- *Пусть точки K, L, M, N, E, F – точки, которые лежат на ребрах AB, AC, CD, DB, AD и BC тетраэдра ABCD. Чтобы прямые KM, NL и EF имели общую точку, необходимо и достаточно, чтобы в трех каких-либо гранях этого тетраэдра выполнялось условие Чевы.*
- *Если* $\mathrm{AA_1}$, $\mathrm{BB_1}$, $\mathrm{CC_1}$, $\mathrm{DD_1}$ *– чевианы тетраэдра ABCD, которые пересекаются в точке O, то*

$$\frac{\mathrm{OA_1}}{\mathrm{AA_1}} + \frac{\mathrm{OB_1}}{\mathrm{BB_1}} + \frac{\mathrm{OC_1}}{\mathrm{CC_1}} + \frac{\mathrm{OD_1}}{\mathrm{DD_1}} = 1, \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AA_1}} + \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{BB_1}} + \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CC_1}} + \frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{DD_1}} = 3.$$

- *Известно, что заданные точки на ребрах или гранях тетраэдра одновременно задают сечение его плоскостью.*
- *Если секущую плоскость провести через середины K и M ребер AB и CD тетраэдра так, чтобы она пересекала ребра AC и BD соответственно в точках L и N, а продолжения ребер AD и BC – в точках E и F, то* $\mathrm{AL:LC = BN:ND = BF:FC = AE:ED}$ *и* $\mathrm{KE:KN =}$ $\mathrm{= KF:KL = EF:LN}$.
- *Две высоты тетраэдра пересекаются тогда и только тогда, когда ребро, из концов которого*

опущены эти высоты, перпендикулярно противолежащему ребру тетраэдра.

- *Косинус противолежащего угла тетраэдра можно найти по таким формулам:*

$$\cos \widehat{aa_1} = \frac{|b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2|}{2aa_1};$$

$$\cos \widehat{bb_1} = \frac{|a^2 + a_1^2 - c^2 - c_1^2|}{2bb_1};$$

$$\cos \widehat{cc_1} = \frac{|a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2|}{2cc_1}.$$

Если $a \perp a_1$ *тогда и только тогда, когда*

$$b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2.$$

Если $a \perp a_1$, *то* $bb_1 \cos \widehat{bb_1} = cc_1 \cos \widehat{cc_1}$.

Если $a \perp a_1$ *и* $b \perp b_1$, *то* $c \perp c_1$.

Если $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$, *то* $a \perp a_1$, $b \perp b_1, c \perp c_1$.

- *Каждая высота ортоцентричного тетраэдра проходит через ортоцентр противолежащей грани.*
- *Только в ортоцентричном тетраэдре суммы квадратов противолежащих ребер равны между собой*

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2.$$

Если в ортоцентричном тетраэдре поменять местами какие-либо два противолежащих ребра, то получим тетраэдр (если такой существует), который также будет ортоцентричным.

- *Только в ортоцентричном тетраэдре средние линии равны между собой.*
- *Только в ортоцентричном тетраэдре точка пересечения высот H делит каждую высоту на части, произведения которых равны между собой.*

$$AH \cdot HA_h = BH \cdot HB_h = CH \cdot HC_h = DH \cdot HD_h$$

- *Грань-гипотенуза прямоугольного тетраэдра имеет наибольшую площадь.*
- *Наибольшая грань прямоугольного тетраэдра – треугольник остроугольный.*
- *В прямоугольном тетраэдре сумма квадратов площадей граней-катетов равна квадрату площади грани гипотенузы.*

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2$$

- *В прямоугольном тетраэдре выполняется неравенство*

$$S_D < S_A + S_B + S_C \leq \sqrt{3}S_D.$$

Теорема. *Все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении* $1:3$.

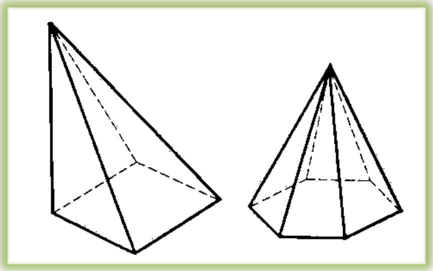
Определение. *Тетраэдр, в котором все четыре высоты имеют общую точку, называют ортоцентричным.*

Определение. *Тетраэдр называют прямоугольным, если три плоских угла при одной вершине прямые. Прямоугольный тетраэдр является ортоцентричным.*

Определение. *Призма – это многогранник с двумя равными параллельными основаниями и боковыми гранями – параллелограммами.*

Прямая призма	*Наклонная призма*
$\boldsymbol{V = S_{\text{осн}} \cdot h = S_{\text{осн}} \cdot l}$	$\boldsymbol{V = S_{\text{осн}} \cdot h}$
$\boldsymbol{S_{\text{б.п.}} = P_{\text{перп. сеч.}} \cdot l}$	$\boldsymbol{S_{\text{б.п.}} = P_{\text{перп. сеч.}} \cdot l}$
$\boldsymbol{S_{\text{б.п.}} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$	$\boldsymbol{S_{\text{б.п.}} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$
$\boldsymbol{S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S_{\text{осн}}}$	$\boldsymbol{S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S_{\text{осн}}}$

Пирамида



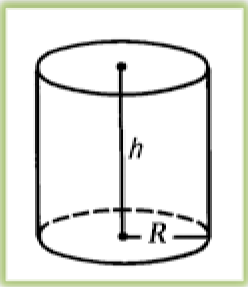
Определение. *Пирамида – это многогранник, основание которого представляет собой многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной.*

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H$$

$$S_{\text{б.п.}} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + S_{\text{осн}}$$

Цилиндр



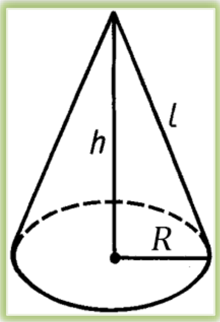
Определение. *Цилиндр – это геометрическое тело, образуемое вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.*

$$V = \pi R^2 h$$

$$S_{\text{б.п.}} = 2\pi R h$$

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R(R + h)$$

Конус



Определение. *Конус – это геометрическое тело, образуемое вращением прямоугольного треугольника вокруг катета.*

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

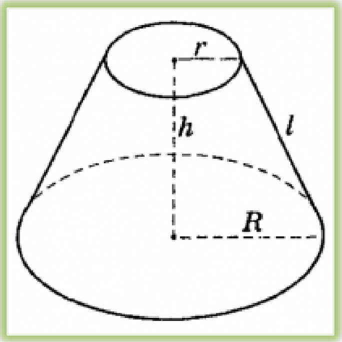
$$S_{\text{б.п.}} = \pi R l$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + S_{\text{осн}} = \pi R(l + R)$$

$$l = \sqrt{R^2 + h^2}$$

Усеченный конус



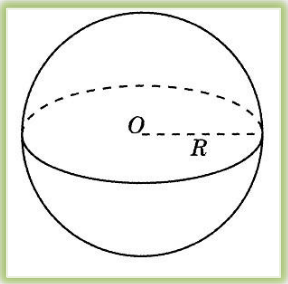
Определение. *Усеченный конус – часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью.*

$$V = \frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$$

$$S_{\text{б.п.}} = \pi l(R + r)$$

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + \pi(R^2 + r^2) = \pi(lR + lr + R^2 + r^2)$$

Шар

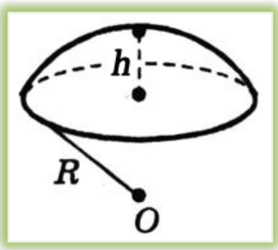


Определение. *Шар – это геометрическое тело, образованное вращением круга вокруг своего диаметра.*

$$S_{\text{п.п.}} = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Шаровой сегмент

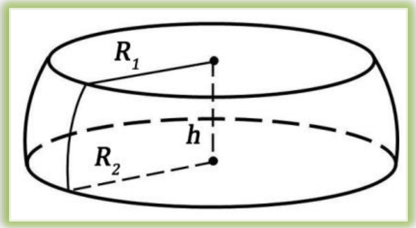


Определение. *Шаровой сегмент – это часть шара, отсеченная плоскостью.*

$$S_{\text{п.п.}} = 2\pi Rh$$

$$V = \frac{\pi h^2(3R - h)}{3}$$

Шаровой слой

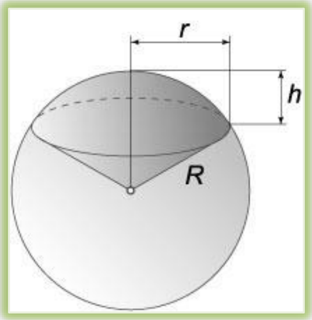


Определение. *Шаровой слой – это часть шара, ограниченная двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.*

$$S_{\text{п.п.}} = 2\pi Rh$$

$$V = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi(R_1^2 + R_2^2)h}{2}$$

Шаровой сектор



Определение. *Шаровой сектор – это часть шара, ограниченная кривой поверхностью шарового сегмента и конической поверхностью, основанием которой служит основание сегмента, а вершиной – центр шара.*

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Правильные многогранники

Правильная призма

$$V = \frac{n}{4} h a^2 \, ctg \left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$S_{\text{б.п.}} = \frac{n}{2} a^2 ctg \left(\frac{180°}{n}\right) + nah$$ (для прямой призмы)

Правильная пирамида

$$V = \frac{na^2h}{12 \, tg \left(\frac{180°}{n}\right)}$$

$$S_{\text{б.п.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} h$$

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + S_{\text{осн}}$$

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2 \, tg \left(\frac{180°}{n}\right)}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{H^2 + r^2}$$

Координатный метод в пространстве

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} \qquad z_0 = \frac{z_1+z_2}{2}$$

$$x_0 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad y_0 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad z_0 = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

λ – отношение первого отрезка ко второму;

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ *– координаты точки пересечения медиан,*

Уравнение сферы

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Уравнение сферы в каноническом виде с центром в точке с координатами $(a; b)$ и радиусом R.

Уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$$

Общий вид уравнения плоскости. Нормальный вектор имеет вид $\overrightarrow{(\mathrm{A}; \mathrm{B}; \mathrm{C})}$, который перпендикулярен к данной плоскости.

$$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}} = 1$$

Уравнение плоскости в отрезках, где

$$\mathrm{a} = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}, \mathrm{b} = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}, \mathrm{c} = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}.$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \mathrm{B}(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0) + \mathrm{C}(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0) = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathrm{M}(\mathrm{x}_0; \mathrm{y}_0; \mathrm{z}_0)$ *и перпендикулярной вектору нормали* $\overrightarrow{(\mathrm{A}; \mathrm{B}; \mathrm{C})}$.

Уравнения прямых

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \end{cases}$$

Уравнение прямой, образованной в результате пересечения двух плоскостей в пространстве. Точка с координатами $(x; y; z)$ *принадлежит этой прямой.*

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt, \end{cases}$$

$$m = x_2 - x_1, n = y_2 - y_1, p = z_2 - z_1,$$

$$t = \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} == \frac{z - z_1}{p}.$$

Параметрическое уравнение прямой. Используется для нахождения точки пересечения прямых, прямой и сферы, прямой и плоскости. Если один или два параметра (но не три) равны нулю, то прямая будет параллельна к одной или двум координатным прямым.

Угол между плоскостями

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$$

Взаимное расположение плоскостей

Плоскости параллельны, если $\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} = \frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2} = \frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2}$.

Плоскости перпендикулярны, если $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2 = 0$.

Плоскости совпадают, если $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1 == \mathrm{D}_2$.

Расстояние от точки до плоскости

$$p = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$M(x_0; y_0; z_0)$ *– точка. Уравнение плоскости вида* $Ax + By + +Cz + D = 0$.

Расстояние между параллельными плоскостями

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Плоскости заданы уравнением вида
$Ax + By + Cz + D = 0$.

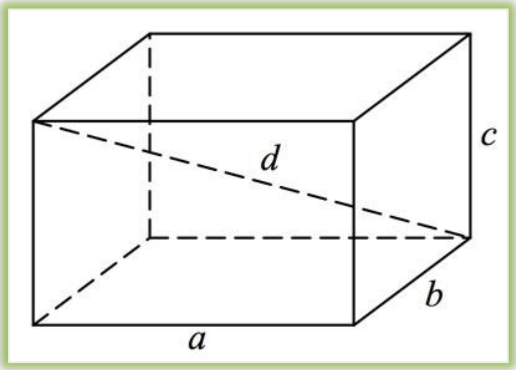
Векторы в пространстве

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Действия с векторами

Правило параллелограмма



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Свойства действий над векторами

$$\vec{a}(a_1; b_1; c_1) + \vec{b}(a_2; b_2; c_2) = \vec{c}(a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2)$$

$$\vec{a}(a_1; b_1; c_1) - \vec{b}(a_2; b_2; c_2) = \vec{c}(a_1 - a_2; b_1 - b_2; c_1 - c_2)$$

$$k \cdot \vec{a}(a_1; b_1; c_1) = \vec{b}(ka_1; kb_1; kc_1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Теорема. *Если G – центроид n точек* $A_1, A_2, \dots, A_n$*, а X – произвольная точка пространства, то*

$$\overrightarrow{XG} = \frac{\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + \dots + \overrightarrow{XA_n}}{n}.$$

Если G – середина отрезка AB, или точка пересечения медиан треугольника ABC, или центроид тетраэдра ABCD, то соответственно

$$\overrightarrow{XG} = \frac{\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}}{2}, \overrightarrow{XG} = \frac{\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}}{3}, \overrightarrow{XG} = \frac{\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}}{4}.$$

Компланарность векторов

Определение. *Компланарные векторы – векторы, параллельные одной плоскости или лежащие на одной плоскости.*

Определение. *Смешанное произведение векторов – скалярное произведение вектора* $\vec{a}$ *на векторное произведение векторов* $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$.

Определение. *Векторное произведение – вектор, перпендикулярный обоим исходным векторам, норма которого равна площади параллелограмма, образованного исходными векторами, а выбор из двух направлений определяется так, чтобы ориентация пространства и тройки векторов (по порядку стоящих в произведении и получившегося вектора) совпадали.*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= i(a_y b_z - a_z b_y) - j(a_x b_z - a_z b_x) + k(a_x b_y - a_y b_x)$$

Условия компланарности векторов

1. *Три вектора компланарны, если их смешанное произведение равно 0.*
2. *Три вектора компланарны, если они линейно зависимы.*
3. *Три вектора компланарны, если хотя бы один из них является нулевым.*
4. *Три вектора компланарны, если среди них есть два коллинеарных вектора.*
5. *n векторов компланарны, если среди них не более двух линейно зависимых вектора.*
6. *Два вектора всегда компланарны.*

Нахождение смешанного произведения векторов

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\left(\vec{\mathrm{b}}\times\vec{\mathrm{c}}\right)$$

Преобразования фигур в пространстве

Геометрические преобразования. Движение

Теорема. *Точки, которые лежат на прямой, в результате движения переходят в точки, которые лежат на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.*

Движение прямую отображает на прямую, луч – на луч, отрезок – на отрезок, который равен данному.

Теорема. *Движение отображает треугольник на треугольник, который равен данному.*

Движение отображает угол на угол, который равен данному.

Теорема. *Симметрия относительно точки – движение.*

Теорема. *Симметрия относительно плоскости – движение.*

Теорема. *Поворот вокруг прямой является движением.*

Теорема. *Параллельный перенос – движение.*

Параллельный перенос

Теорема. *Если каждой точке* $\mathrm{X}(x; y; z)$ *фигуры F поставлена в соответствие точка* $\mathrm{X}_1(x + m; y + n; z + p)$, *где m,n, p – заданные числа, то такое преобразование фигуры F является параллельным переносом на вектор* $\vec{a}(m; n; p)$.

Гомотетия и преобразования подобия

Теорема. *Гомотетия отображает прямую, которая не проходит через центр гомотетии, на параллельную ей прямую.*

Теорема. *Гомотетия отображает плоскость, которая не проходит через центр гомотетии, на параллельную ей плоскость.*

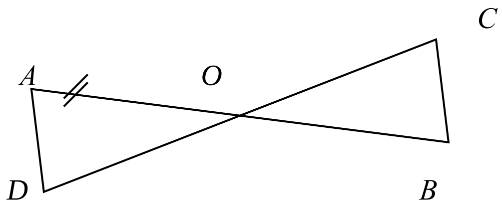
Теорема. *Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, гомотетично этому основанию относительно вершины пирамиды. Площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.*

Практическая часть

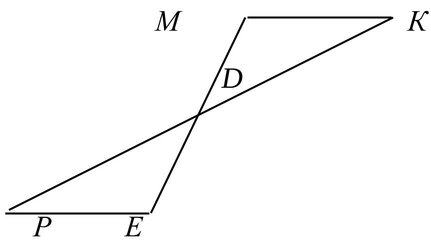
Планиметрия

Параллельность прямых

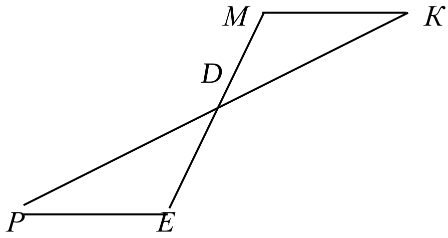
1. На рисунке отрезки *AB и CD* имеют общую середину *O*. Докажите, что $\angle DAO = \angle CBO$.



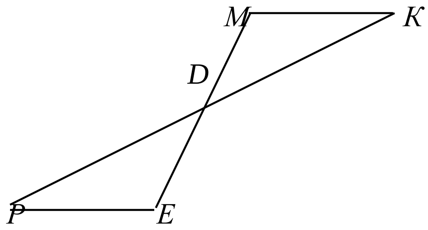
2. На рисунке отрезки *ME* и *PK* точкой *D* делятся пополам. Докажите, что $\angle KMD = \angle PED$.



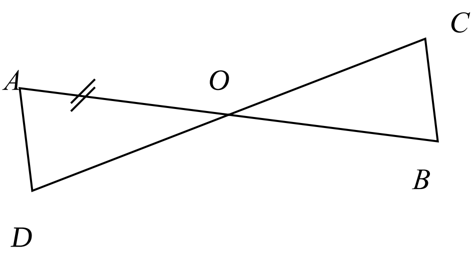
3. На рисунке отрезки ME и PK точкой D делятся пополам. Докажите, что $\angle KMD = \angle PED$.



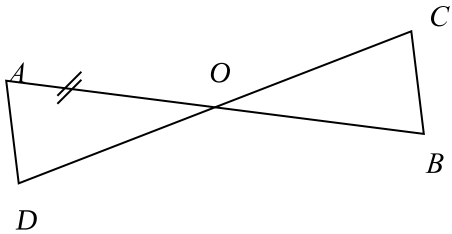
4. На рисунке отрезки ME и PK точкой D делятся пополам. Докажите, что $\angle KMD = \angle PED$.



5. На рисунке отрезки AB *и* CD имеют общую середину O. Докажите, что $\angle DAO = \angle CBO$.



6. На рисунке отрезки *AB и CD* имеют общую середину *O*. Докажите, что $\angle DAO = \angle CBO$.



7. Луч AD – биссектриса угла A. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что ∠ ADB = ∠ ADC. Докажите, что AB = AC.
8. На сторонах угла D отмечены точки M и K так, что DM = DK. Точка P лежит внутри угла D и PK = PM. Докажите, что луч DP – биссектриса угла MDK.
9. На сторонах угла D отмечены точки M и K так, что DM = DK. Точка P лежит внутри угла D и PK = PM. Докажите, что луч DP – биссектриса угла MDK.
10. На сторонах угла D отмечены точки M и K так, что DM = DK. Точка P лежит внутри угла D и PK = PM. Докажите, что луч DP – биссектриса угла MDK.
11. Луч AD – биссектриса угла A. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что ∠ ADB = ∠ ADC. Докажите, что AB = AC.
12. Луч AD – биссектриса угла A. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что ∠ ADB = ∠ ADC. Докажите, что AB = AC.
13. В равнобедренном треугольнике с периметром 48 см боковая сторона относится к основанию как 5 : 2. Найдите стороны треугольника.
14. В равнобедренном треугольнике с периметром *5 6 см* основание относится к боковой стороне как *2 : 3*. Найдите стороны треугольника.

Произвольный треугольник

Уровень 1

1. Существует ли треугольник, стороны которого равны 2 см, 3 см и 8 см?
2. Градусные меры углов треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите углы этого треугольника.
3. Градусные меры двух внутренних углов треугольника равны 70^0 и 80^0. Вычислите градусную меру наименьшего внешнего угла треугольника.
4. Стороны треугольника равны 3 см, 5 см и 7 см. Найдите средний по величине угол треугольника.
5. Площадь треугольника ABC равна 18 см^2, AC = = 8 см, BC = 9 см. Найдите градусную меру.
6. Периметр треугольника равен 32 см, а радиус вписанной окружности – 1,5 см. Вычислите площадь данного треугольника.
7. Найдите длину наименьшей высоты треугольника со сторонами 13 см, 20 см, 21 см.

Уровень 2

8. Дан треугольник ABC: AB = 3 дм, BC = 8 дм, AC = = 7 дм. Найдите отрезки, на которые биссектриса AE разбивает сторону BC.
9. Две стороны треугольника, угол между которыми равен 120^0, относятся как 5 : 3. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 30 см.
10. Радиус круга, описанного вокруг треугольника ABC, равен 6 см. Найдите радиус круга, описанного вокруг треугольника AOC, где O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC.
11. В треугольнике, периметр которого равен 60 см, одна из сторон делится точкой касания вписанного

в него круга на отрезки 24 см и 5 см. Вычислите площадь этого треугольника.

12. Какая длина наименьшей медианы треугольника со сторонами 11 см, 12 см и 13 см?
13. В треугольнике со сторонами 9 см, 10 см и 17 см круг касается двух меньших сторон, а его центр лежит на большей стороне. Найдите радиус круга.

Уровень 3

14. На медиане BE треугольника ABC отмечены точки M так, что BM : ME = 3 : 1. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника AME равна 3 см^2.
15. В треугольнике из одной вершины проведены высота, биссектриса и медиана. Расстояние от второй вершины треугольника до основания высоты, биссектрисы и медианы соответственно равны 21 см, 25 см, 25,5 см. Вычислите периметр треугольника.

Равнобедренный и равносторонний треугольники

Уровень 1

1. Существует ли равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 6 см?
2. Угол при вершине равнобедренного треугольника на 20^0 меньше угла при основании. Найдите углы этого треугольника.
3. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 50^0. Какой угол образует боковая

сторона треугольника с медианой, проведенной к основанию?

4. Найдите наибольший внешний угол равнобедренного треугольника, если внутренний угол при основании равен 70^0.
5. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а биссектриса, проведенная к ней – 4 см. Вычислите периметр данного треугольника.
6. Сторона равностороннего треугольника равна 6 дм. Найдите его площадь.
7. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а угол при основании 30^0. Найдите диаметр круга, описанного вокруг данного треугольника.
8. Найдите радиус круга, вписанного в равнобедренный треугольник с основанием 6 см и боковой стороной 5 см.
9. Вычислите сумму радиусов описанной и вписанной окружностей для правильного треугольника со стороной 3 см.
10. Вычислите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной 16 см и углом при основании 150^0.

Уровень 2

11. В равнобедренном треугольнике боковая сторона точкой касания вписанной окружности делится на отрезки 36 см и 32 см, начиная от вершины треугольника. Найдите площадь этого треугольника.
12. В равнобедренном треугольнике высота равна 32 см, а длина вписанной окружности равна 24 см. Вычислите периметр треугольника.

13. Основа равнобедренного треугольника равна 12 см, а медиана, проведенная к боковой стороне – 15 см. Найдите боковую сторону треугольника.
14. В равнобедренный треугольник вписан квадрат со стороной 2 см так, что сторона квадрата лежит на основании треугольника. Найдите стороны треугольника, если известно, что центр тяжести треугольника совпадает с центром тяжести квадрата.
15. До правильного треугольника со стороной 1 см вписали круг. К окружности провели касательную параллельно основе. Вычислите площадь треугольника, которую отсекает от данного треугольника эта касательная.
16. В равнобедренный треугольник со сторонами 13 см, 13 см и 10 см вписали полукруг так, что он примыкает к основе и одной боковой стороне, а его центр лежит на другой боковой стороне. Найдите радиус круга.

Уровень 3

17. В треугольнике со сторонами 20 см, 26 см и 26 см провели биссектрисы углов при основании до пересечения их с боковыми сторонами. Найдите расстояние между этими точками пересечения
18. Медианы треугольника равны 10 см, 10 см и 12 см. Найдите площадь треугольника.

Прямоугольный треугольник

Уровень 1

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 см и 12 см. Вычислите периметр данного треугольника.
2. Найдите углы прямоугольного треугольника, если их градусные меры относятся как 1 : 2 : 3.
3. Сумма двух углов прямоугольного треугольника равна. Вычислите градусную меру каждого угла этого треугольника.
4. Вычислите градусную меру наибольшего внешнего угла прямоугольного треугольника, если один из его острых углов равен.
5. Дано прямоугольный треугольник с катетом 5 см и противоположным углом 300^0. Найдите длину его гипотенузы.
6. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Каким будет значение синуса наименьшего угла треугольника?
7. Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника соответственно равны 10 см и 8 см. Вычислите косинус большего острого угла треугольника.
8. Меньший катет прямоугольного треугольника равен 5 см, а его проекция на гипотенузу 4 см. Вычислите гипотенузу треугольника.
9. Проекции катетов прямоугольного треугольника на гипотенузу равны 4 дм и 1 дм. Найдите больший катет данного треугольника.
10. Найдите длину медианы прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если катеты данного треугольника равны 5 см и 12 см.

Уровень 2

11. Вычислите длину высоты прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если длины катетов равны 3 см и 4 см.
12. Укажите место нахождения точки, равноудаленной от вершин прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см. Найдите это расстояние.
13. Где находится точка, равноудаленная от сторон прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см? Найдите это расстояние.
14. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 4 см, а радиус вписанного круга – 1 см. Найдите длину гипотенузы.
15. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит противоположный катет на отрезки 5 см и 4 см. Вычислите длину гипотенузы.
16. Центр окружности, которая примыкает к катетам прямоугольного треугольника, принадлежит гипотенузе. Найдите радиус этого круга, если длины катетов равны 7 см и 3 см.

Уровень 3

17. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла к гипотенузе проведены медиана и высота, расстояние между основаниями которых равно 7 см. Вычислите периметр треугольника, если длина описанной вокруг треугольника окружности равна 25 см.
18. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см^2. Вычислите диаметр вписанного в треугольник круга.

Четырехугольник. Параллелограмм

Уровень 1

1. Один из углов параллелограмма на 20^0 больше, чем другой. Найдите эти углы.
2. Угол, который образует диагональ прямоугольника с его большей стороной, равен 33^0. Найдите угол между диагоналями данного прямоугольника.
3. Острый угол ромба равен 28^0. Найдите угол, который образует меньшая диагональ ромба с его стороной.
4. Биссектриса острого угла параллелограмма делит его сторону на отрезки 7 см и 3 см, начиная от вершины тупого угла. Найдите периметр параллелограмма.
5. Стороны прямоугольника относятся как 4 : 9, а его площадь равна 144 см^2. Вычислите периметр прямоугольника.
6. Стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см. Найдите синус угла между его диагоналями.
7. Стороны параллелограмма равны 5 см и 16 см, а угол между ними 30^0. Вычислите меньшую высоту этого параллелограмма.
8. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его диагональ увеличить в 1,5 раза?
9. В описанном около окружности четырехугольнике сумма двух противоположных сторон равна 40 см. Остальные две стороны относятся как 1 : 3. Найдите длину большего из них.
10. Найдите периметр параллелограмма, если его высоты равны 6 см и 7,5 см, а площадь – 60 см^2.
11. Найдите радиус вписанной в ромб окружности, если диагонали ромба равны 6 см и 8 см.

12. Стороны параллелограмма равны 6 см и 7 см, а сумма его диагоналей – 18 см. Найдите диагонали параллелограмма.

Уровень 2

13. Периметр прямоугольника равен 14 см. Длина описанной окружности 5π см. Вычислите площадь прямоугольника.
14. Точка касания вписанной в ромб окружности делит его сторону на отрезки 3 см и 1 см. Найдите углы ромба.
15. Отрезок AM соединяет вершину квадрата ABCD с серединой стороны BC. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника AMCD.
16. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на диагональ, делит ее на отрезки 18 см и 32 см. Вычислите площадь прямоугольника.
17. В параллелограмме острый угол равен 60^0, а диагональ делит тупой угол в отношении 1 : 3. Вычислите периметр и большую диагональ параллелограмма, если его меньшая диагональ равна $8\sqrt{3}$ см
18. В прямоугольнике биссектриса прямого угла делит диагональ на отрезки 30 см и 40 см. Вычислите отрезки, на которые делит эта биссектриса сторону прямоугольника.

Уровень 3

19. С вершины противоположных углов прямоугольника к его диагонали проведены перпендикуляры, расстояние между основаниями которых равно 16 см. Длины этих

перпендикуляров равны 6 см. Вычислите площадь прямоугольника.

20. Диагональ ромба делит его высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки 26 см и 10 см. Вычислите площадь ромба.

Параллельность прямых и плоскостей

1. Прямые a и b лежат в параллельных плоскостях α и β. Могут ли эти прямые быть: а) параллельными; б) скрещивающимися? Сделайте рисунок для каждого возможного случая.
2. Прямые a и b лежат в пересекающихся плоскостях α и β. Могут ли эти прямые быть: а) параллельными; б) скрещивающимися? Сделайте рисунок для каждого возможного случая.
3. Через точку O, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые l и m. Прямая l пересекает плоскости α и β в точках A_1 и A_2 соответственно, прямая m – в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка A_2B_2, если $A_1B_1 = 12$ см, $B_1O : OB_2 = 3 : 4$.
4. Через точку O, не лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые l и m. Прямая l пересекает плоскости α и β в точках A_1 и A_2 соответственно, прямая m – в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $A_2B_2 = 15$ см, $OB_1 : OB_2 = 3 : 5$.
5. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки M, N и K, являющиеся серединами.
6. Изобразите тетраэдр DABC и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки M и N,

являющиеся серединами ребер DC и BC, и точку K, такую, что $\mathbf{K} \in \mathbf{DA}, \mathbf{AK} : \mathbf{KD} = 1:3.$

Окружность

1. Через точку A окружности проведены диаметр AC и две хорды AB и AD, равные радиусу этой окружности. Найдите углы четырехугольника $ABCD$ и градусные меры дуг AB, BC, CD и AD.
2. Отрезок BD – диаметр окружности с центром O. Хорда AC делит пополам радиус OB и перпендикулярна к нему. Найдите углы четырехугольника $ABCD$ и градусные меры дуг AB, BC, CD и AD.
3. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а боковая сторона равна 15 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.
4. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 9 см, а само основание равно 24 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.
5. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. Расстояние от точки O до прямой AB равно 6 см, $\angle AOC = 90^0$, $\angle OBC = 15^0$. Найдите: *а*) $\angle ABO$; *б*) радиус окружности.
6. В треугольнике ABC с прямым углом C вписана окружность с центром O, касающаяся сторон AB, BC и CA в точках D, E и F соответственно. Известно, что $OC = 2$ см. Найдите: *а*) радиус окружности; *б*) углы EOF и EDF.

Четырехугольник. Трапеция
Уровень 1

1. Боковые стороны и меньшее основание прямоугольной трапеции соответственно равны 8 см, 10 см и 10 см. Найдите большее основание трапеции.
2. Трапеция ABCM содержит три равные стороны AB = BC = CM. Сумма его острых углов равна 90^0. Вычислите тупой угол трапеции.
3. Длина средней линии равнобедренной трапеции – 16 см, длины оснований относятся как 1 : 3. Вычислите большее основание трапеции.
4. В равнобедренной трапеции диагональ образует угол 30^0 с основанием, высота равна 2 см. Найдите длину средней линии трапеции.
5. Диагональ AC трапеции ABCM является биссектрисой острого угла BAM. Найдите длину средней линии трапеции, если AM = 18 см, AB = = 14 см.
6. В равнобедренной трапеции углы относятся, как 1 : 2, боковая сторона равна 3 см, а периметр 13 см. Вычислите длину оснований трапеции.
7. В прямоугольной трапеции основания равны 25 см и 37 см, а меньшая диагональ является биссектрисой тупого угла. Найдите периметр трапеции.
8. Равносторонняя трапеция имеет периметр 16 см и описана вокруг окружности радиусом $\sqrt{2}$ см. Найдите угол при основании трапеции.
9. Боковые стороны прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равны 2 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

10. В параллельную трапецию, которая имеет площадь 40 см^2 и боковую сторону 8 см, можно вписать круг. Вычислите длину этого круга.

Уровень 2

11. Основы трапеции 28 см и 11 см, а боковые стороны – 25 см и 26 см. Вычислите длину высоты трапеции.
12. Основы трапеции равны 10см и 90см, а диагонали – 75см и 35см. Найдите площадь трапеции.
13. Вокруг трапеции с основаниями 12 см и 16 см описали круг. Вычислите его длину, если высота трапеции равна 14 см.
14. Средняя линия трапеции равна 10 см и делит ее площадь в отношении $3:5$. Найдите длины оснований трапеции.
15. Равносторонняя трапеция имеет высоту 2 см и угол $\pi/3$ между ее диагоналями, который противоположен основам. Вычислите длину средней линии трапеции.
16. Найдите периметр трапеции с углами при основании 30^0 и 60^0, которая описана вокруг круга радиусом $3-\sqrt{3}$.

Уровень 3

17. Вокруг окружности описана равносторонняя трапеция с острым углом 45^0. Найдите отношение радиусов описанного и вписанного кругов.
18. В трапеции ABCM: $\angle A:\angle B:\angle C:\angle M = 2:4:5:1$, $AB=3$, $AM=16$. Найдите длину меньшего основания трапеции.

Декартовы координаты на плоскости

Уровень 1

1. Найдите координаты точки, которая делит отрезок АВ пополам, если А(3; 4), В(–2; –8).
2. Точка М(2; –5) – середина отрезка АВ, А(–1; 3). Найдите координаты точки В.
3. Составьте уравнение окружности, диаметром которого является отрезок АВ, если А(–5; 9), В(7; –3).
4. Составьте уравнение окружности, центром которой является точка Р(–6; 4) и которая примыкает к оси ординат.
5. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки А(2; –5) и В(–5; 10).
6. Найдите точку пересечения прямых $2x-7y=-16$ и $6x+11y=16$.
7. Найдите длину медианы ВМ треугольника, вершинами которого являются точки А(3; –2), В(2; 3) и С(7; 4).
8. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку М(–1; 9) параллельно прямой $y=-7x+3$.
9. Составьте уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y=-x+3$ и проходит через точку А(1; 5).
10. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку А(2; 6) и образует с положительным направлением оси абсцисс угол 120^0.
11. Даны три вершины параллелограмма А(4; –4), В(6; –2) и С(0; 4). Найдите координаты четвертой вершины, которая противоположна вершине В.

12. Найдите площадь круга, которая ограничивает круг, заданную уравнением $x^2+y^2+6x-14y+50=0$.
13. Найдите периметр треугольника, ограниченного осями координат и прямой $4x-3y=12$.

Уровень 2

14. Запишите уравнение прямой, которая проходит через центры двух кругов $x^2+y^2-6x-4y=3$ и $x^2+y^2+2x+2y=2$.
15. Найдите координаты всех точек С оси абсцисс таких, что треугольник ABC – равнобедренный, если A(1; 1), B(2; 3).
16. Составьте уравнение окружности, центр которого находится на оси абсцисс и проходит через точки A(–4; 1) и B(8; 9).
17. Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки A(1; –7) и B(–3; 5).
18. Вычислите длину перпендикуляра, опущенного из точки M(3; 4) на прямую .
19. Определите координаты точки С, которая симметрична точке М относительно прямой AB, если A(–2; 1), B(0; –1), M(2; 3).

Уровень 3

20. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y=4x+2$ и пересекает прямую $y=-8x+9$ в точке, принадлежащей оси ординат.
21. Найдите координаты точки, равноудаленной от осей координат и от точки A(3; 6).
22. Составьте уравнение круга, который проходит через точки A(–3; 7), B(–8; –2) и C(–6; –2).

Метод координат в пространстве

Уровень 1

1. Найдите расстояние от точки A(1; 2; 3) до начала координат.
2. Найдите расстояние между точками A(–1; 1; –1) и B(–1; 0; –2).
3. В треугольнике ABC найдите длину медианы AM, если A(2; 1; 3), B(2; 1; 5), C(0; 1; 1).
4. В треугольнике ABC A(2; 1; 3), B(2; 1; 5), C(0; 1; 1). Найдите длину медианы CM.
5. На оси Ox найдите точку, равноудаленную от точек A(1; 2; 2) и B(–2;1; 4).
6. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек A(–2; 1; 4) и B(1; 2; 2).
7. На оси абсцисс найдите точку M, расстояние от которой до точки A(3; –3; 0) равно 5.
8. На оси Oy найдите точку M, расстояние от которой до точки C(4; 3; 0) равно 5.
9. Точки A(3; 1; 8), B(4; 7; 1), C(3; 5; –8) – вершины параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершины D и длину диагонали BD.
10. Точки – вершины параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершины D и длину диагонали BD.

Уровень 2

11. Найдите координаты концов отрезка, который точками C(2; 0; 2) и M(5; –2; 0) разделен на три равные части.
12. Точки C(3; 4; 3) и B(2; 5; 4) разделяют отрезок AM на три равные части. Найдите координаты точек A и M.

13. Концы отрезка A(5; –2; 1) и B(5; 3; 6). Найдите точку, симметричную середине отрезка относительно плоскости xOz.
14. Концы отрезка A(7; –3; 4) и B(4; 7; 8). Найдите точку, симметричную середине отрезка относительно плоскости xOy.
15. Точка M(2; 6; 3) – середина отрезка, концы которого находятся на оси Ox и в плоскости yOz. Найдите координаты концов и длину отрезка.
16. Точка B(2; 8; 5) – середина отрезка, концы которого находятся на оси Oz и в плоскости xOy. Найдите координаты концов и длину отрезка.

Уровень 3

17. Точка M(2; 6; 3) – середина отрезка, концы которого находятся на оси Ox и в плоскости yOz. Найдите координаты концов и длину отрезка.
18. Найдите координаты концов отрезка и его длину, если середина отрезка находится в точке A(2; 8; 5), а концы отрезка на оси Oz и в плоскости xOy.
19. На оси аппликат найдите точку A, равноудаленную от точек M(–2; 3; 5) и B(7; 11; –12).
20. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек A(1; 2; 2) и B(–2; 1; 4).
21. Точки A(3; –6; 2) и A_1 симметричны относительно плоскости yOz. Найдите расстояние AA_1.
22. Точка B_1 симметрична точке B(3; –4; 7) относительно координатной плоскости xOz. Найдите расстояние BB_1.
23. Докажите, что треугольник с вершинами A(7; 1; –5), B(4; –3; –4), C(1; 3; –2) – равнобедренный.

24. Докажите, что треугольник с вершинами A(3; –2; 1), B(–2; 1; 3), C(1; 3; –2) – равносторонний.
25. Докажите, что треугольник с вершинами A(1; 0; 1), B(1; 1; 0), C(1; 1; 1) – прямоугольный. Найдите расстояние от начала координат до центра окружности, описанной вокруг этого треугольника.
26. Докажите, что треугольник с вершинами A(2; 0; 5), B(3; 4; 0), C(2; 4; 0) – прямоугольный. Найдите расстояние от начала координат до центра окружности, описанной вокруг этого треугольника.
27. Составьте уравнение сферы, которая проходит через начало координат, а ее центр находится в точке O(4; –4; 2).
28. Составьте уравнение сферы, которая проходит через точку A(2; –1; –3), а ее центр находится в точке C(3; –2; 1).

Стереометрия

Многогранники

1. Основанием пирамиды DABC является правильный треугольник ABC, сторона которого равна a. Ребро перпендикулярно к плоскости ABC, а плоскость DBC составляет с плоскостью ABC угол 30^o. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Основанием пирамиды MABCD является квадрат ABCD, ребро MD перпендикулярно к плоскости основания, AD = DM = a. Найдите площадь поверхности пирамиды.
3. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб ABCD, сторона которого равна a и угол равен 60^o. Плоскость AD_1C_1 составляет с плоскостью основания угол 60^o.

   Найдите:

   а) высоту ромба;

   б) высоту параллелепипеда;

   в) площадь боковой поверхности параллелепипеда;

   г)* площадь поверхности параллелепипеда.
4. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм ABCD, стороны которого равны $\mathbf{a}\sqrt{2}$ и $2a$, острый угол равен 45^o. Высота параллелепипеда равна меньшей высоте параллелограмма.

   Найдите:

   а) меньшую высоту параллелограмма;

   б) угол между плоскостью ABC_1 и плоскостью основания;

   в) площадь боковой поверхности параллелепипеда;

г)* площадь поверхности параллелепипеда.

5. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен 60^0. Найдите объём пирамиды.
6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см и составляет с плоскостью основания угол 60^0. Найдите объём пирамиды.

Цилиндр, конус

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь основания цилиндра равна 16π см^2. Найдите площадь поверхности цилиндра.
2. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого 4 см. Найдите площадь поверхности цилиндра.
3. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите: а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми 60°; б) площадь боковой поверхности конуса.
4. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен 120°. Найдите: а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми 30°; б) площадь боковой поверхности конуса.
5. Диаметр шара равен $2m$. Через конец диаметра проведена плоскость под углом 45° к нему. Найдите длину линии пересечения сферы с этой плоскостью.

6. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого 4 см. Найдите площадь поверхности цилиндра.
7. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите: а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми 60°; б) площадь боковой поверхности конуса.
8. Диаметр шара равен $4m$. Через конец диаметра проведена плоскость под углом 30° к нему. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.
9. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите объем пирамиды.
10. В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 30°. Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью ее основания угол в 45°. Найдите объем цилиндра.
11. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см и составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите объем пирамиды.
12. В конус вписана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 30°. Боковая грань пирамиды, проходящая через данный катет, составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем конуса.

Шар и сфера

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна а, а высота равна 2а. Найдите радиус описанного шара.
2. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна а, а высота равна 4а. Найдите радиус описанного шара.
3. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 1, 2 и 4. Найдите радиус описанного шара.
4. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 5. Найдите радиус описанного шара.
5. Вершины прямоугольного треугольника АВС ($\angle C = 90^0$) принадлежат сфере; $\angle BAC = 30^0$; ВС = 2. Расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно $\sqrt{5}$. Найдите радиус сферы
6. Вершины прямоугольного треугольника АВС ($\angle C = 90^0$) принадлежат сфере. Катеты треугольника 6 см и 8 см. Радиус сферы равен $\sqrt{26}$. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.
7. Куб с ребром, равным $\sqrt{2}$ вписан шар. Найдите площадь поверхности шара.
8. Куб вписан в шар. Найдите площадь поверхности шара, если ребро куба равно $\sqrt{6}$.
9. В шаре на расстоянии 6 см от центра шара проведено сечение, площадь которого равна 64π. Найдите радиус шара.
10. В шаре радиуса 26 см на расстоянии 10 см от центра проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения.

11. Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол в $60°$. Найдите отношение объемов конуса и шара.
12. Объем цилиндра равен 96π см^3, площадь его осевого сечения – 48 см^2. Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.
13. В конус, осевое сечение которого есть правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.
14. Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат. Найдите отношение объемов цилиндра и шара.

РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Русский	**Английский**
1. Аксиома	1. Axiom
2. Апофема	2. Apothem
3. Биссектриса	3. Bisector
4. Боковая поверхность	4. Side surface
5. Вертикальные углы	5. Vertical angles
6. Внешний угол	6. Outer corner
7. Внутренний угол	7. Inner corner
8. Вписанная окружность	8. Inscribed circle
9. Геометрическое место точек (г. м. т.)	9. Geometric locus of points
10. Гипотенуза	10. Hypotenuse
11. Двугранный угол	11. Dihedral angle
12. Диагональ	12. Diagonal
13. Диаметр	13. Diameter
14. Длина окружности	14. Is long

Русский	**Английский**
15. Касательная	15. Tangent
16. Катет	16. Leg
17. Квадрат	17. Square
18. Конус	18. Cone
19. Коэффициент подобия	19. Similarity coefficient
20. Круг	20. Circle
21. Круговой сегмент	21. Circular segment
22. Круговой сектор	22. Circular sector
23. Куб	23. Cube
24. Лемма	24. Lemma
25. Линейный угол	25. Linear angle
26. Медиана	26. Median
27. Многоугольник	27. Polygon
28. Многогранник	28. Polyhedron
29. Наклонная	29. Oblique
30. Объём	30. Volume
31. Описанная окружность	31. Circumscribed circle

Русский	Английский
32. Ось конуса	32. Axis of the cone
33. Ось цилиндра	33. Cylinder axis
34. Осевая симметрия	34. Axial symmetry
35. Отрезок	35. Cut
36. Отношение	36. Attitude
37. Прямая	37. Direct
38. Параллельность прямых	38. Parallelism of lines
39. Перпендикуляр	39. Perpendicular
40. Проекция	40. Projection
41. Периметр	41. Perimeter
42. Площадь	42. Area
43. Параллелограмм	43. Parallelogram
44. Прямоугольник	44. Rectangle
45. Призма	45. Prism
46. Параллелепипед	46. Parallelepiped
47. Пирамида	47. Pyramid
48. Полная поверхность	48. Full surface

Русский	**Английский**
49. Правильная фигура	49. The correct figure
50. Подобие фигур	50. Semblance of figures
51. Радиус	51. Radius
52. Развернутый угол	52. Wide angle
53. Равнобедренный треугольник, трапеция	53. Isosceles triangle, trapezoid
54. Равнобокая трапеция	54. Isosceles trapezoid
55. Равносторонний треугольник	55. Equilateral triangle
56. Расстояние	56. Distance
57. Ромб	57. Rhombus
58. Секущая	58. Secant
59. Следствие	59. Consequence
60. Смежный угол	60. Adjacent corner
61. Средняя линия	61. Midline
62. Сфера	62. Scope
63. Точка	63. Point
64. Тело вращения	64. Body of revolution

Русский	Английский
65. Теорема	65. Theorem
66. Тетраэдр	66. Tetrahedron
67. Тупой угол	67. Obtuse angle
68. Трехгранный угол	68. Trihedral angle
69. Усеченная фигура	69. Truncated figure
70. Формула	70. Formula
71. Хорда окружности	71. Circle chord
72. Центр	72. Center
73. Центральный угол	73. Central angle
74. Цилиндр	74. Cylinder
75. Шар	75. Ball
76. Шаровой слой	76. Ball layer

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апостолова Г. В. Геометрия. 9 класс : двухуровневый учебник для общеобразовательных учебных заведений / Г. В. Апостолова. – Киев : Генеза, 2009. – 304с.
2. Атанасян Л. С. Геометрия. 10–11 классы / Л. С. Атанасян и др. – Москва : Просвещение, 2008. – 255 с.
3. Бабенко С. П. Все уроки геометрии. 10 класс. Академический уровень / С. П. Бабенко. – Харьков : Основа, 2010. – 318 с.
4. Геометрия. 11 класс. Академический уровень, профильный уровень / Г. Бевз, В. Бевз, Н. Владимирова, В. Владимиров. – 2011, 172 с.
5. Бевз Г. Геометрия. 9 класс / Г. Бевз, В. Бевз, Н. Владимирова. – Москва : Образование, 2017. – 274 с.
6. Бевз Г. Геометрия. 10 класс / Г. Бевз, В. Бевз, Н. Владимирова. – Киев : Генеза, 2010. – 232с.
7. Бевз Г. П. Геометрия : учебник для 8 кл. средних общеобразовательных учреждений / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владимирова. – Киев : Башня, 2008. – 256 с.
8. Билянина О. Я. Геометрия 10 класс. Академический уровень / О. Я. Билянина, Г. И. Билянин, В. А. Швец. – Киев : Генеза, 2010. – 256 с.

9. Бродский Я. Геометрия. Учебник. 10–11 класс / Я. Бродский. – Тернополь : Учебная книга – Богдан, 2003. – 288 с.
10. Бурда М. И. Геометрия. 10 класс. Учебник для общеобразовательных учебных заведений. Академический уровень / М. И. Бурда, Н. А. Тарасенкова.
11. Математика. Контроль учебных достижений. Сборник задач. 11 класс. Уровень стандарта / Г. М. Возняк, М. В. Подручная, Е. В. Моховик, В. И. Кулешко : учебное пособие. – Тернополь : Учебники и пособия, 2012. – 80 с.
12. Возняк Г. М. Математика. 11 класс. Сборник тестовых заданий. Уровень стандарта : учебное пособие / Г. М. Возняк, Н. В. Бабий. – Тернополь : Учебники и пособие, 2011. – 128 с.
13. Саакян С. М. Изучение геометрии. 10–11 класс. Книга для учителя / С. М. Саакян, В. В. Бутузов. – Москва, 2010. – 240 с.
14. Истер А. С. Геометрия : учебник для 8 класса общеобразовательных учебных заведений / А. С. Истер. – Киев : Генеза, 2016. – 216 с.
15. Истер А. С. Устные упражнения по алгебре и геометрии. 11 класс / А. С. Истер – Тернополь : Учебники и пособия, 2002. – 64 с.
16. Компаниец Н. П. Исторические моменты на уроках геометрии (8 класс) [Электронный ресурс] / Н. П. Компаниец. – 2016. – Режим доступа к ресурсу :

http://klasnaocinka.com.ua/ru/article/istorichni-momenti-na-urokakh-geometriyi-8-klas.html.
17. Мугаллимова С. Р. Векторный метод в школьном курсе геометрии [Электронный ресурс] / С. Р. Мугаллимова. – Режим доступа : http://festival.lseptember.ru.
18. Тадеев В. Геометрия. Основы стереометрии. Учебник. 11 класс / В. Тадеев. – Тернополь : Учебная книга – Богдан, 2004. – 480 с
19. Тадеев В. Геометрия. Учебник. 10 класс / В. Тадеев. – Тернополь : Учебная книга – Богдан, 2003. – 384 с.
20. Тарасенкова Н. А. Элементы стереометрии в основной школе. Уроки стереометрии в 9 классе : методическое пособие для учителей общеобразовательных учебных заведений / Н. А. Тарасенкова. – Харьков : Веста: Ранок, 2002. – 128 с.
21. Тертышная Е. В. История возникновения понятия вектор [Электронный ресурс] / Е. В. Тертышная. – Режим доступа : https://sites.google.com/site/mirgeometrii/.
22. Федченко Л. Я. Сборник заданий для тематических и итоговых аттестаций по геометрии для 7–9 классе : методическое пособие / Л. Я. Федченко. – Донецк : Каштан, 2009. – 304 с.
23. Федченко Л. Я. Разноуровневые задания для тематических и итоговых контрольных работ в 7–9 классах / Л. Я. Федченко, Г. М. Литвиненко. – Донецк, 2004. – 106 с.

24. Геометрия 11. Академический уровень / А. Хацкевич, Д. Номировский В. Полонский, М. Якир. – Харьков : Гимназия, 2016. – 192 с.
25. Геометрия 11 класс. Сборник задач и контрольных работ / А. Г. Хацкевич, В. Б. Полонский, Ю. М. Рабинович, М. С. Якир. – Харьков : Гимназия, 2011. – 113 с.
26. Геометрия 9 класс для классов с углубленным изучением / А. Г. Хацкевич, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Харьков : Гимназия, 2009. – 278 с.
27. Изучаем математику [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.testmath.com.ru/.
28. Математика для школы [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://formula.com.ru/.

Електронне навчальне видання

Жиленко Тетяна Іванівна,

Сивоконь Вадим Володимирович

МАТЕМАТИКА В ІНФОГРАФІЦІ. ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

(Російською мовою)

Художнє оформлення обкладинки В. В. Сивоконь
Редактор І. О. Кругляк
Комп'ютерне верстання: В. В. Сивоконь, Т. І. Жиленко

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 8,14. Обл.-вид. арк. 5,78.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.