

УДК 537.624
УКПП
№ держреєстрації 0119U100772
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
(СумДУ)

40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2;
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи
д-р фіз.-мат. наук, проф.
_____ А. М. Чорноус

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ
СПРЯМОВАНИЙ ТРАНСПОРТ ТА ДИСИПАЦІЯ ЕНЕРГІЇ В
СИСТЕМАХ ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК І
МАГНІТНИХ СКІРМІОНІВ
(проміжний)

Керівник НДР
д-р фіз.-мат. наук, проф.

С. І. Денисов

(25.12.2020)

2020

Рукопис завершено 25 грудня 2020 р.

Результати роботи розглянуті на засідання наукової ради СумДУ, протокол від ____ грудня 2020 р. № ____

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, голов. наук. співроб. д-р фіз.-мат. наук, проф.	25.12.2020	С. І. Денисов (реферат, вступ, розділи 1, 2, висновки)
Старш. наук. співроб. канд. фіз. -мат. наук, доцент	25.12.2020	Т. В. Лютий (реферат, розділ 1)
Старш. наук. співроб. канд. фіз. - мат. наук, доцент	25.12.2020	О. С. Денисова (підрозділи 1.2, 2.1)
Мол. наук. співроб.	25.12.2020	Б. О. Педченко (підрозділи 1.1, 2.2)
Мол. наук. співроб.	25.12.2020	В. В. Рева (підрозділи 1.1, 2.2)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 38 с., 5 рис., 39 джерел.

РОЗБАВЛЕНІ ФЕРОРІДИНИ, ОДНОДОМЕННІ НАНОЧАСТИНКИ, ГРАДІЄНТНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ, РІВНЯННЯ БАЛАНСУ, ТРАНСЛЯЦІЙНА ТА ОБЕРТАЛЬНА ДИНАМІКА.

Предмет дослідження – умови існування спрямованого транспорту зазначених об'єктів та залежність швидкості їх дрейфу і потужності втрат енергії від величини чисел Рейнольдса, характеристик зовнішнього магнітного поля, ступеню спінової поляризації струму, дипольної взаємодії, величини поля магнітної анізотропії, дефектної структури плівки, температури та інших параметрів.

Об'єкт дослідження – спрямований транспорт (дрейф) феромагнітних наночастинок і магнітних скірміонів, причиною якого є реакція середовища, і енергетичні процеси в них.

Мета дослідження – розвиток теорії спрямованого транспорту феромагнітних наночастинок у в'язкій рідині та магнітних скірміонів у феромагнітних плівках, а також визначення потужності втрат енергії в таких системах.

Методи дослідження – методи мікромагнетизму, математичної фізики, чисельні методи.

Теоретично вивчається детерміністична динаміка однодоменних феромагнітних наночастинок у розбавлених ферорідинах, що знаходяться під впливом стаціонарного або періодичного у часі градієнтного магнітного поля. Показано, що оскільки градієнтне магнітне поле генерує як трансляційний, так і обертальний рухи частинок, ці рухи пов'язані між собою. Встановлено, що в залежності від початкового положення зважених феромагнітних наночастинок існує чотири режими їх спрямованого транспорту в стаціонарному градієнтному магнітному полі. Для кожного з них проведено теоретичний і чисельний траєкторний аналіз. Проведено також симетрійний аналіз розв'язку базової системи рівнянь, що описують коливальний та обертальний рухи наночастинки під дією періодичного у часі градієнтного магнітного поля, та знайдено періодичний розв'язок цієї системи рівнянь у випадку високочастотних осциляцій поля.

Результати НДР можуть бути використані в біомедицині та процесах сепарації наночастинок.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 СТАЛЕ У ЧАСІ ГРДІЄНТНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ.....	7
1.1 Рівняння руху.....	7
1.1.1 Випадок малих чисел Рейнольдса	9
1.2 Динаміка наночастинок.....	10
1.2.1 Динаміка наночастинок при $H_{\perp} = 0$	10
1.2.2 Динаміка наночастинок при $H_{\perp} \neq 0$	16
2 ЗМІННЕ У ЧАСІ ГРАДІЄНТНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ.....	22
2.1 Особливості моделі.....	22
2.2 Теоретичний аналіз	23
2.2.1 Точні результати.....	23
2.2.2 Динаміка наночастинок при $\nu \ll 1$	26
ВИСНОВКИ	31
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	34

ВСТУП

Наночастинки феромагнетика у однодоменому стані, зважені у в'язкій рідині, являють собою цікавий клас систем з точки зору низки фізичних властивостей. Такі системи мають широку перспективу застосування у біомедицині застосування, зокрема метод магінтної гіпертермії для лікування онкологічних захворювань, контрастування магнітних зображень, доставка ліків та багато інших (див., наприклад, останні огляди [1–6] та посилення в них). Ці застосування базуються на конкретних фізичних властивостях, які головним чином зумовлені магнітною та механічною (як поступальною, так і обертовою) динамікою таких наночастинок. Ось чому важливо правильно послуговуватись верифікованою методологією опису, зокрема у частині рівнянь руху. Один з найнадійніших методів, запропонованих для виведення цих рівнянь, базується на концепції загального імпульсу частинки, що включає кутову та спінову частини імпульсу. В рамках цього підходу було виведено та проаналізовано рівняння зв'язаного механічного руху та намагніченості частинки, зокрема для знаходження її кутової швидкості [7–10], а також передбачено та вивчено ряд непересічних ефектів у цих системах, залежних від магнітокристалічної анізотропії [11–13].

У той же час, для випадку великої енергії анізотропії порівняно з іншими енергетичними величинами, вектор намагніченості наночастинки доцільно розглядати як «вморожений» в її кристалічну решітку [14,15]. Такий підхід ще називається моделлю жорсткого диполя. Переваги від її використання очевидні: динаміка наночастинок повністю описує динаміку намагніченості і, відповідно, магнітні властивості таких систем. Це наближення було застосовано, в тому числі, для дослідження ролі магнітної дипольної взаємодії та теплових флуктуацій в процесі розсіювання енергії [16–18], утворення кластерів внаслідок взаємодії [19–21], прецесії феромагнітних наночастинок у детерміністичному та стохастичному випадках [22–24] та низки інших явищ.

В рамках попередніх етапів даної НДР, послуговуючись данною моделлю, було теоретично та чисельно вивчено вплив спрямованого транспорту (дрейфу) феромагнітних наночастинок, індукованого силою Магнуса [25–27]. Зокрема, було встановлено, що частинки, рух яких у в'язкій рідині являє собою синхронізовані поступальні коливання (викликані осци-

лювальною рушійною силою) та неоднорідна прецесія (викликана неоднорідним магнітним полем, що обертається), здійснюють ненульовий у середньому поступальний рух (т.з. дрейф) у визначеному напрямку зі сталою середньою швидкістю. Як величину, так напрямок швидкості такого дрейфу можна досить просто контролювати і змінювати шляхом коригування зовнішніх параметрів, цей ефект має перспективи використання, зокрема, під час адресної доставки лікарських препаратів та сепарації макромолекул та вірусів. Однак, співвідношення швидкості дрейфу до швидкості наночастинок, спричиненої рушійною силою, що має неосцилювальний характер, пропорційне до числа Рейнольдса (для випадку обертання), яке для нанорозмірних частинок є порівняно невеликим. Саме тому швидкість частинок, що знаходяться під дією неосцилювальної рушійної сили, як правило, істотно перевищує відповідну швидкість дрейфу.

Найрозповсюдженішим способом генерування рушійної сили, що діє на магнітні наночастинки, є магнітне поле, що змінюється у просторі, або градієнтне поле. Не зважаючи на те, що вплив такого поля на магнітні наночастинки добре вивчений з точки зору магнітної сепарації макромолекул та вірусних частинок (див., наприклад, [28, 29]), повний аналіз їх спрямованого транспорту при застосуванні градієнтного та однорідних магнітних полів, наскільки відомо станом на сьогодні, ще не виконано. Оскільки рівномірне поле сильно впливає на орієнтацію намагніченості, очікується, що це поле може бути використано для контролю та управління спрямованим транспортом зважених феромагнітних наночастинок, індукованим градієнтним магнітним полем. Тому в цій роботі ми прагнемо вивчити динаміку таких наночастинок з особливим акцентом на їх транспортні властивості та можливі застосування.

Результати НДР опубліковані у роботах [30, 31].

1 СТАЛЕ У ЧАСІ ГРДІЄНТНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

1.1 Рівняння руху

Ми вивчаємо спрямований транспорт феромагнітної наночастинки, яка має форму сфери радіусом a , зважена у в'язкій рідині, та має намагніченість $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$, де $|\mathbf{M}| = M = \text{const}$. Радіус частинки покладається досить малим, для того, щоб її можна було вважати повністю однодоменною, і в той же час настільки великим, що можна знехтувати взаємодією з термостатом (для різних матеріалів справедливність та адекватність цих умов, проаналізовано у роботі [32] та у наведених посиланнях). На додачу, магнітне поле анізотропії припускається досить великим, для того, щоб частинка могла розглядатися в рамках моделі жорсткого диполя. У цьому наближенні намагніченість частинки вважається завжди спрямованою за напрямком легкої вісі частинки i , отже, намагніченість можна розглядати як змінну у відомому кінематичному рівнянні

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}, \quad (1.1)$$

де $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ – вектор кутової швидкості наночастинки, знак \times означає векторний добуток, а крапка над вектором означає похідну за часом t . Також робиться припущення, що радіус-вектор центру наночастинки $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ змінюється дуже повільно, що похідна від намагніченості $\dot{\mathbf{M}}$ обчислюється як для фіксованого радіус-вектора \mathbf{R} .

Розглядається ситуація, коли частинка перебуває під впливом як сталого однорідного \mathbf{H}_\perp , так і змінного у просторі градієнтного \mathbf{H}_g магнітних полів:

$$\mathbf{H}_\perp = H_\perp \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{H}_g = gR_x \sin(\Omega t + \phi) \mathbf{e}_x. \quad (1.2)$$

Тут $H_\perp (\geq 0)$ – величина напруженості однорідного магнітного поля, $g (> 0)$ – градієнтне магнітне поле \mathbf{H}_g , R_x – x компонента вектора \mathbf{R} , а \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y та \mathbf{e}_z – одиничні вектори вздовж відповідних осей декартової системи координат xyz . Варто зауважити, що стале у часті та просторі поле $\mathbf{H}_\parallel = H_\parallel \mathbf{e}_x$ разом із градієнтним полем \mathbf{H}_g діють як модифіковане (зміщене) градієнтне магнітне поле $g(R_x + H_\parallel/g) \mathbf{e}_x$, або \mathbf{H}_\parallel здійснює зсув позиції, у якій виконується умова $\mathbf{H}_g = \mathbf{0}$. Отже, без втрати загальності,

на цьому етапі цілком можна припустити, що $H_{\parallel} = 0$.

Щоб описати динаміку намагніченості у полях розглянутого вигляду вважається, що вектор намагніченості наночастинки \mathbf{M} знаходиться у площині xy :

$$\mathbf{M} = M(\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y), \quad (1.3)$$

де $\varphi = \varphi(t)$ є азимутальним кутом вектора \mathbf{M} . З кінематичного рівняння випливає зв'язок між цим кутом та кутовою швидкістю частинки визначається тривіальним виразом

$$\dot{\varphi} = \omega_z. \quad (1.4)$$

Далі записуються рівняння поступальної та обертальної динаміки наночастинки, що зважена у в'язкій рідині. Через малий розмір об'єкту інерційними властивостями доцільно знехтувати (дивись нижче). Отже, зберігаючи лише доданки, які відповідають за рух та наявне тертя, ці рівняння можна записати у вигляді рівняння балансу сил, $\mathbf{f}_d + \mathbf{f}_f = \mathbf{0}$, та балансу обертальних моментів, $\mathbf{t}_d + \mathbf{t}_f = \mathbf{0}$. Тут \mathbf{f}_d – рушійна сила, що виникає внаслідок градієнтного магнітного поля, \mathbf{f}_f – сила тертя, \mathbf{t}_d – рушійний момент, що утворюється результируючим магнітним полем $\mathbf{H}_{\perp} + \mathbf{H}_g$, а \mathbf{t}_f – момент сили тертя. З огляду на те, що як рушійна сила, так і обертальний момент можуть бути легко визначені як $\mathbf{f}_d = V(\mathbf{M} \cdot \partial/\partial \mathbf{R})\mathbf{H}_g$ ($V = 4\pi a^3/3$ – об'єм частинки, крапка позначає скалярний добуток) і $\mathbf{t}_d = V\mathbf{M} \times (\mathbf{H}_{\perp} + \mathbf{H}_g)$ та після здійснення необхідних обчислень за допомогою виразів (1.2) і (1.3), наведені вище рівняння можуть бути переписані як

$$MVg \cos \varphi \mathbf{e}_x + \mathbf{f}_f = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

і

$$MV(H_{\perp} \cos \varphi - gR_x \sin \varphi) \mathbf{e}_z + \mathbf{t}_f = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

Оскільки явні вирази для \mathbf{f}_f і \mathbf{t}_f загалом невідомі, нижче ми розглядаємо лише випадок малих чисел Рейнольдса (для наночастинок ця умова не є занадто обмежувальною).

1.1.1 Випадок малих чисел Рейнольдса

Числа Рейнольдса для поступального та обертального рухів, визначаються відповідно як $\text{Re} = 2\rho a|\mathbf{v}|/\eta$ та $\text{Re}_\omega = \rho a^2|\boldsymbol{\omega}|/\eta$, відіграють найважливішу роль у знаходженні \mathbf{f}_f і \mathbf{t}_f . Тут ρ – густина рідини, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ – поступальна швидкість частинки, а η – в'язкість рідини (динамічна). Якщо дані параметри вибрані таким чином, що $\text{Re} \ll 1$ і $\text{Re}_\omega \ll 1$, потік рідини, що обтікає частинку, та який, індукований її рухом, є ламінарним і, згідно з [33], $\mathbf{f}_f = -6\pi\eta a\mathbf{v}$ і $\mathbf{t}_f = -8\pi\eta a^3\boldsymbol{\omega}$. Скористаємося останнім виразом та з співвідношення (1.6) знаходимо $\boldsymbol{\omega} = \omega_z\mathbf{e}_z$, де

$$\omega_z = \frac{M}{6\eta}(H_\perp \cos \varphi - gR_x \sin \varphi). \quad (1.7)$$

Потім, підстановкою (1.7) у (1.4), можна отримати рівняння для азимутального кута вектора намагніченості:

$$\dot{\varphi} - \omega_\perp \cos \varphi + \omega_g r_x \sin \varphi = 0, \quad (1.8)$$

$$\omega_\perp = \frac{MH_\perp}{6\eta}, \quad \omega_g = \frac{Mga}{6\eta} \quad (1.9)$$

– характерні частоти, що виникають відповідно з однорідного та градієнтного магнітних полів. Не втрачаючи загальності, вважається, що азимутальний кут у початку відліку часу (початковий азимутальний кут) $\varphi(0) = \varphi_0$ задовольняє умові $\varphi_0 \in [0, \pi]$.

Одержане вище рівняння (1.5) з \mathbf{f}_f демонструє, що швидкість наночастинки \mathbf{v} має лише компоненту вздовж вісі x

$$v_x = v_0 \cos \varphi, \quad (1.10)$$

де

$$v_0 = \frac{2Mga^2}{9\eta} = \frac{4}{3}\omega_g a \quad (1.11)$$

– так звана характерна швидкість наночастинки. З використанням виразів (1.10) та (1.11), легко одержати

$$r_x = r_{x0} + \frac{4}{3}\omega_g \int_0^t \cos \varphi(t') dt' \quad (1.12)$$

з $r_{x0} = r_x(0)$, що єнічим іншим, як початковим положенням наночастинки.

Система рівнянь (1.8) та (1.12) у сукупності з початковими значеннями координат частинки φ_0 і r_{x0} повністю описує її обертальну та поступальну динаміку. Відповідно до (1.12), рівняння (1.8) є інтегрально-диференціальним (оскільки напруженість градієнтного магнітного поля, яке діє на частинки, змінюється під час їх поступального руху). Перепишавши його у формі

$$\frac{\dot{\varphi} - \omega_{\perp} \cos \varphi}{\sin \varphi} = -\omega_g r_x \quad (1.13)$$

і взявши похідну від часу від обох частин, рівняння (1.13) длоцільно привести до автономного диференціального рівняння другого порядку

$$\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \omega_{\perp} \dot{\varphi} + \frac{4}{3} \omega_g^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi = 0. \quad (1.14)$$

Як показує (1.8), розв'язок (1.14) повинно задовольняти початковим умовам $\varphi(0) = \varphi_0$ і

$$\dot{\varphi}(0) = \omega_{\perp} \cos \varphi_0 - \omega_g r_{x0} \sin \varphi_0. \quad (1.15)$$

1.2 Динаміка наночастинок

Оскільки аналіз динаміки наночастинок у випадках відсутності та присутності однорідного магнітного поля H_{\perp} відрізняється, ми розглянемо ці випадки окремо.

1.2.1 Динаміка наночастинок при $H_{\perp} = 0$

Оскільки для випадку, що розглядається, $\omega_{\perp} = 0$, нелінійне диференціальне рівняння другого порядку (1.14) легко переписати у вигляді лінійного диференціального рівняння першого порядку для $q = \dot{\varphi}^2$. Справді, якщо подати q як функцію кутової координати φ , тобто $q = q(\varphi)$, і приймаючи до уваги, що $q'_{\varphi} = 2\dot{\varphi}$ ($q'_{\varphi} = dq/d\varphi$), вираз (1.14) можна переписати як

$$q'_\varphi \sin \varphi - 2q \cos \varphi + \frac{8}{3} \omega_g^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi = 0 \quad (1.16)$$

Відповідно до виразу (1.15), розв'язок даного рівняння повинен задовольняти вищезазначеній умові $q(\varphi_0) = q_0$, де

$$q_0 = \omega_g^2 r_{x0}^2 \sin^2 \varphi_0. \quad (1.17)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.16) записується у такому вигляді (дивись, наприклад, формулу (13.1.4) у [34]):

$$q = C \sin^2 \varphi - \frac{4}{3} \omega_g^2 \sin^2 \varphi \ln \sin^2 \varphi, \quad (1.18)$$

де C – деяка константа інтегрування, що потребує встановлення з умови (1.17),

$$C = \omega_g^2 r_{x0}^2 + \frac{4}{3} \omega_g^2 \ln \sin^2 \varphi_0, \quad (1.19)$$

та за допомогою (1.11), розв'язок рівняння (1.18) можна переписати у вигляді

$$q = \omega_g^2 \left(r_{x0}^2 - \frac{4}{3} \ln \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi_0} \right) \sin^2 \varphi. \quad (1.20)$$

З цього та рівняння (1.8), яке за умови $H_\perp = 0$ має розв'язком $q = \dot{\varphi}^2 = \omega_g^2 r_x^2 \sin^2 \varphi$, отримуємо, нарешті, співвідношення

$$r_x^2 = r_{x0}^2 - \frac{4}{3} \ln \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi_0}, \quad (1.21)$$

яке буде відігравати істотну роль в усьому подальшому аналізі динаміки наночастинки, зваженої в рідині під дією зовнішніх полів зазначених типів.

Варто почати аналіз із зауваження, що величина початкової кутової швидкості $\dot{\varphi}(0) = -\omega_g r_{x0} \sin \varphi_0$ визначається початковим положенням наночастинки r_{x0} . Разом із виразом (1.8), що відповідно до (1.21) та з урахуванням останнього факту, може бути подано як

$$\dot{\varphi} = -\text{sgn}(r_x) \omega_g \left(r_{x0}^2 - \frac{4}{3} \ln \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi_0} \right)^{1/2} \sin \varphi \quad (1.22)$$

[$\text{sgn}(x) = \pm 1$, якщо $x \gtrless 0$], значить, що лінійна швидкість наночастинки $v_x = v_0 \cos \varphi$ за умови $t \neq 0$ також залежить від величини r_{x0} (у зв'язку з цим варто нагадати, що початкове значення швидкості $v_x(0) = v_0 \cos \varphi_0$ є однаковим для усіх початкових положень r_{x0}). Для визначеності припускаємо, що $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, і тоді з (1.22) випливає, що азимутальний кут φ монотонно зменшується з часом від φ_0 до 0 (і тому v_x монотонно збільшується з $v_0 \cos \varphi_0$ до v_0), якщо $r_{x0} \geq 0$. Іншими словами, всі частинки з $r_{x0} \geq 0$ здійснюють рух праворуч зі швидкостями, які асимптотично прямують до v_0 . Крім того, чим більшим є значення початкового положення частинки, тим раніше швидкість наночастинки прямує до насиченого значення v_0 . З метою класифікації ми позначаємо динаміку наночастинок за $r_{x0} \geq 0$ динамічним режимом номер один.

Динамічний режим номер два має місце для наночастинок з $r_{x0} \in (-l, 0)$, де

$$l = \left(\frac{4}{3} \ln \frac{1}{\sin^2 \varphi_0} \right)^{1/2}. \quad (1.23)$$

У даному випадку всі частинки також рухаються праворуч. Однак, на відміну від вищеописаної ситуації, азимутальний кут намагніченості частинки φ на першому етапі збільшується від початкової величини φ_0 до деякого $\varphi_m < \pi/2$ (поки не буде досягнуто певного положення, що визначається як $r_x = 0$), а на другому етапі монотонно зменшується асимптотично до 0 з часом. У цьому випадку швидкість дрейфу наночастинки спочатку спадає від $v_0 \cos \varphi_0$ до $v_0 \cos \varphi_m$, але згодом починає зростати до v_0 .

Динамічні властивості коли $r_{x0} = -l$ відповідають третьому режиму, який, за великим рахунком, є граничним випадком режиму номер два. Тут, як і у попередньому випадку, частинка спочатку рухається праворуч, однак після досягнення положення, що характеризується $r_x = 0$ і $\varphi_m = \pi/2$ її рух зупиняється. Проте, варто зауважити, що цей стан нестійкий: через флуктуації частинка залишає околиці цієї точки і рухається або ліворуч, або праворуч.

Нарешті, динамічний режим номер чотири умовою реалізацією має $r_{x0} < -l$. Тут азимутальний кут φ збільшується монотонно з часом від

початкової величини φ_0 до π , і кожна частинка рухається праворуч лише у часовому інтервалі $(0, t_s)$, що залежить від r_{x0} . При $t = t_s$ частинка зупиняється [$v_x(t_s) = 0$, тобто $\varphi(t_s) = \pi/2$] в точці $r_x(t_s) = -(r_{x0}^2 - l^2)^{1/2}$, а потім (коли $t > t_s$) рухається ліворуч, досягаючи швидкості $-v_0$ на великих часових проміжках. Що стосується додатної величини початкової координати $r_{x0} > 0$, то чим більшим є значення $|r_{x0}|$, тим швидше досягається гранична величина швидкості $-v_0$.

Слід також зазначити, що в особливому випадку, коли $\varphi_0 = \pi/2$, лише два динамічні режими, перший і четвертий, можуть бути реалізовані відповідно при $r_{x0} > 0$ і $r_{x0} < 0$. Оскільки в цьому випадку $l = 0$, то другий і третій режими зводяться до стану $r_x = r_{x0} = 0$, який є нестабільним (частинка з $r_{x0} = 0$ рухається або вліво, або вправо).

Для того, щоб проілюструвати отримані теоретичні результати та підтвердити їх чисельно розглянемо наночастинки SmCo_5 , зважені у воді за кімнатної температури (295 К), які характеризуються параметрами $M = 1.36 \times 10^3 \text{ emu cm}^{-3}$, $\rho_n = 8.31 \text{ g cm}^{-3}$ - густина частинок, $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$ і $\eta = 9.62 \times 10^{-3} \text{ P}$. Також вибирається $a = 2 \times 10^{-5} \text{ cm}$ (критичний діаметр однодоменного стану для цих частинок становить приблизно $7.5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ [35]) та $g = 10^2 \text{ Oe cm}^{-1}$, знаходимо $v_0 = 1.26 \times 10^{-3} \text{ cm s}^{-1}$ і $\omega_g = 47.12 \text{ s}^{-1}$. За допомогою цих параметрів, із заміною $|\mathbf{v}|$ на v_0 і $|\boldsymbol{\omega}|$ на $MgR_x/6\eta$ з $|R_x| = 1 \text{ cm}$, визначення Re і Re_ω дають $\text{Re} = 5.24 \times 10^{-6}$ та $\text{Re}_\omega = 9.8 \times 10^{-2}$. Оскільки подання $\mathbf{t}_f = -8\pi\eta a^3 \boldsymbol{\omega}$ виконується навіть для $\text{Re}_\omega \lesssim 10$ [36], використане наближення малих чисел Рейнольдса є цілком виправданим. Варто нагадати, що в рамках використаної моделі було знехтувано інерційними доданками $\rho_n V \dot{\mathbf{v}}$ і $J \dot{\boldsymbol{\omega}}$ [$J = (2/5)\rho_n V a^2$ - момент інерції частинки] відповідно в рівняннях (1.5) та (1.6). Елементарний розрахунок показує, що підстави тому є, і цими доданками дійсно можна сміливо знехтувати коли $t \gg \max\{t_{tr}, t_r\}$, де

$$t_{tr} = \frac{2\rho_n a^2}{9\eta}, \quad t_r = \frac{\rho_n a^2}{15\eta} \quad (1.24)$$

- часи релаксації поступальної та обертальної динаміки. Оскільки, відповідно до виразу (1.24), $\max\{t_{tr}, t_r\} = t_{tr} = 7.68 \times 10^{-8} \text{ s}$, можна переконатися, що інерційні ефекти в динаміці наночастинок SmCo_5 є незначними вже при $t \gg 10^{-7} \text{ s}$. Нарешті, одночастинкове наближення, що

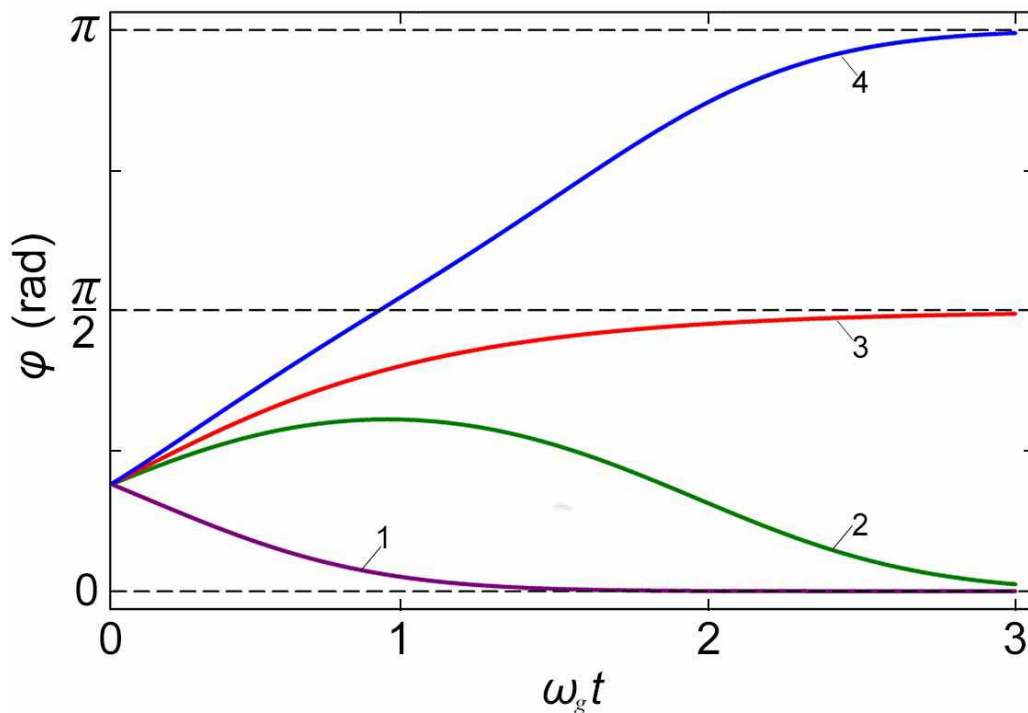


Рисунок 1.1 – Графіки залежності $\varphi = \varphi(t)$, отримані за допомогою чисельного розв’язання рівняння (1.14) для $H_{\perp} = 0$, $\varphi_0 = 0.6 \text{ rad}$ та різних значень початкового положення частинок r_{x0} . Оскільки, відповідно до (1.23), у цьому випадку $l = 1.235$, значення r_{x0} вибрані для відтворення всіх передбачуваних режимів динаміки наночастинок: $r_{x0} = 1.0$ (крива 1), $r_{x0} = -1.0$ (крива 2), $r_{x0} = -l$ (крива 3) і $r_{x0} = -1.5$ (крива 4).

використовується в нашій теоретичній моделі, є виправданим, тобто магнітною диполь-дипольною та гідродинамічною взаємодіями можна знехтувати, якщо середня відстань d між наночастинками досить велика. Зокрема, енергія диполь-дипольної взаємодії двох частинок, $(MV)^2/d^3$, є незначною порівняно з енергією частинок в градієнтному магнітному полі, $MV|\mathbf{H}_g|$, якщо $d \gg (4\pi M/3g|R_x|)^{1/3}a$. У той же час умова малості гідродинамічної взаємодії, яка виконується, коли об’ємна частка наночастинок мала, тобто $V/d^3 \ll 1$, не є настільки обмежувальною: $d \gg (4\pi/3)^{1/3}a$.

На рисунку 1.1 показано залежність азимутального кута φ намагніченості наночастишки від безрозмірного часу $\omega_g t$ для різних значень початкового положення r_{x0} .

Вони подають всі чотири вищеописані режими поведінки функції $\varphi = \varphi(t)$, за умови $r_{x0} \geq 0$ (режим номер один, крива 1), $r_{x0} \in (-l, 0)$ (режим номер два, крива 2), $r_{x0} = -l$ (режим номер три, крива 3) і $r_{x0} < -l$ (режим номер чотири, крива 4). Рисунок 1.2 ілюструє часову залежність

обезрозміреної координати частинки r_x за тих самих умов, що і на рисунку 1.1.

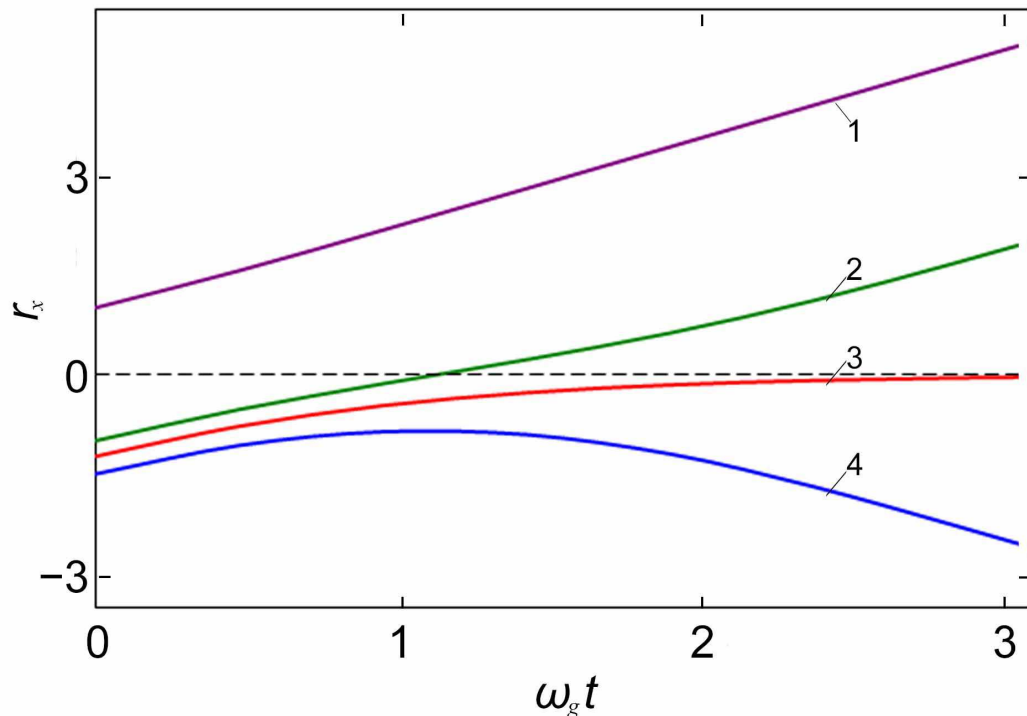


Рисунок 1.2 – Графіки залежності безрозмірного положення наночастинки $r_x = r_x(t)$, отримані з (1.12) розв'язком рівняння (1.14), для тих самих параметрів, що на рисунку 1.1.

Як видно, чисельні результати, подані на цих рисунках, підтверджують існування класифікованих режимів динаміки наночастинок. Нарешті, для перевірки теоретичного результату, висловленого співвідношенням (1.21) ми використали чисельні результати з рисунків 1.1 та 1.2 для обчислення величини $\Gamma = r_x^2 + (4/3) \ln(\sin^2 \varphi / \sin^2 \varphi_0)$ для двох моментів часу та різних значень початкового положення частинки r_{x0} . Порівняння отриманих даних з теоретичною залежністю $\Gamma = r_{x0}^2$, дивись рисунок 1.3, підтверджує їх достовірність.

Як було зазначено вище, магнітне поле виду \mathbf{H}_{\parallel} зміщує точку, в якій виконується умова $\mathbf{H}_g = \mathbf{0}$. Останнє означає, що \mathbf{H}_{\parallel} зсуває також і інтервали, в яких реалізуються зазначені режими динаміки наночастинок (наприклад, динамічний режим номер один реалізується за умови коли $r_{x0} > -H_{\parallel}/ga$). Треба зазначити, що, оскільки безрозмірне значення зсуву $|H_{\parallel}|/ga$ може бути достатньо великим навіть для досить незначних амплітуд H_{\parallel} (наприклад, у нашому випадку воно дорівнює 10^4 , коли

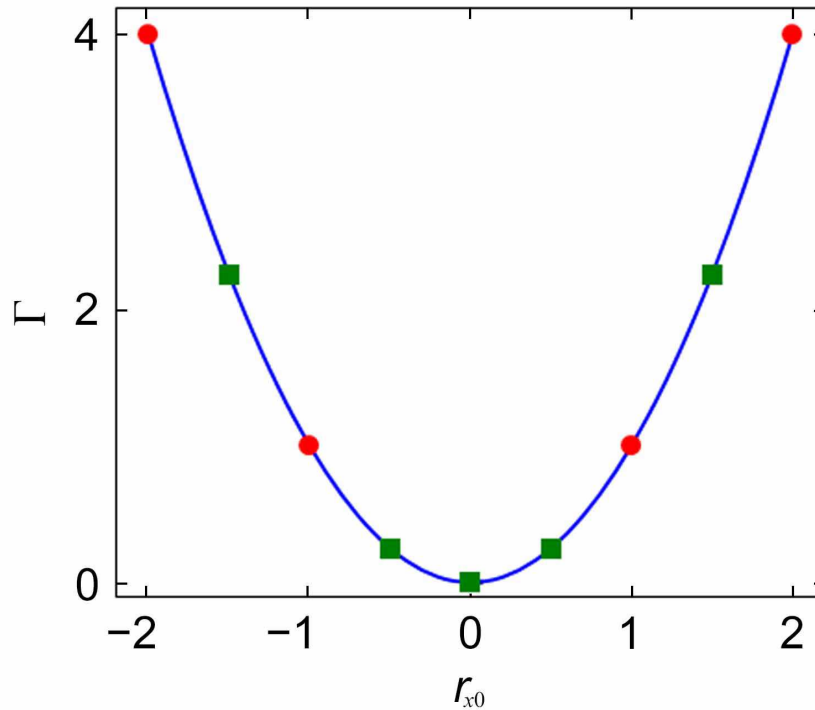


Рисунок 1.3 – Залежність величини Γ від обезрозміреного початкового положення наночастинки r_{x0} . Числові дані позначені символами (кола і квадрати відповідають відповідно $\omega_g t = 1$ і $\omega_g t = 3$), а теоретичний результат $\Gamma = r_{x0}^2$ відображається суцільною кривою.

$H_{\parallel} = 20 \text{ Oe}$), зміна величини магнітного поля H_{\parallel} може бути доречним способом зміни режимів дрейфового руху.

1.2.2 Динаміка наночастинок при $H_{\perp} \neq 0$

Теоретичний аналіз транспортних властивостей наночастинок є більш складним у цьому випадку. Тому аналітичне вивчення проводиться лише для малих і великих значень часу. Для пошуку асимптотичних розв'язків за умови $t \rightarrow 0$ зручно використовувати рівняння (1.8) та (1.12), які у першому наближенні дозволяють отримати

$$\varphi = \varphi_0 + (\omega_{\perp} \cos \varphi_0 - \omega_g r_{x0} \sin \varphi_0) t \quad (1.25)$$

і

$$r_x = r_{x0} + \frac{v_0}{a} \cos \varphi_0 t. \quad (1.26)$$

Результат (1.26), як і для попереднього випадку характеризується тим, що всі наночастилки на початку відліку часу рухаються праворуч з одна-

ковою початковою швидкістю $v_0 \cos \varphi_0$ [варто нагадати, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$]. На відміну від цього, обертання наночастинок в даному випадку має залежати не лише від r_{x0} , але й від H_\perp .

Проведений у даній НДР якісний аналіз демонструє, що аналогічно як і для $H_\perp = 0$, чотири режими динаміки наночастинок існують і для $H_\perp \neq 0$. Зазначені режими генеруються відповідно при $r_{x0} \geq l_1$, $r_{x0} \in (-l_2, l_1)$, $r_{x0} = -l_2$ і $r_{x0} < -l_2$. Відповідно до виразу (1.25), азимутальний кут φ зменшується монотонно з часом, тобто реалізується динамічний режим номер один, коли $r_{x0} \geq l_1$, де

$$l_1 = \frac{\omega_\perp}{\omega_g} \cot \varphi_0. \quad (1.27)$$

Цей результат узгоджується з результатом для $H_\perp = 0$ ($l_1 \rightarrow 0$ при $H_\perp \rightarrow 0$) і вказує, що магнітне поле H_\perp здатне істотно змінити значення l_1 (умову $l_1 \gg 1$ можна легко досягти).

З огляду на те, що пророблений аналіз є наближеним, неможливо записати точний вираз для величини l_2 . Однак, з використанням (1.25) та (1.26), існує можливість оцінити дану величину у наближений спосіб. Справді, шляхом вибору $r_{x0} = -l_2$ і та у припущенні, що $\varphi(t_s) = \pi/2$ і $r_x(t_s) = 0$ (варто нагадати, t_s – час зупинки), з (1.25) - (1.27) можна отримати

$$l_2 = \frac{1}{2} l_1 \left[\left(1 + \frac{8(\pi - 2\varphi_0)}{3l_1^2 \tan \varphi_0} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (1.28)$$

Для $l_1 \ll 1$ ($H_\perp \ll ga \tan \varphi_0$) та $l_1 \gg 1$ ($H_\perp \gg ga \tan \varphi_0$) цей вираз дає

$$l_2|_{l_1 \ll 1} = \left(\frac{2(\pi - 2\varphi_0)}{3 \tan \varphi_0} \right)^{1/2} \quad (1.29)$$

і

$$l_2|_{l_1 \gg 1} = \frac{2}{3} (\pi - 2\varphi_0) \frac{ga}{H_\perp} \quad (1.30)$$

($l_2|_{l_1 \gg 1} \ll 1$). Варто наголосити на двох моментах відповідно отриманим результатам. По-перше, наближений вираз (1.29) повністю узгоджується з точним виразом (1.23) виключно у випадку $\pi/2 - \varphi_0 \ll 1$; різниця

між $l_2|_{l_1 \ll 1}$ і l зростає досить швидко зі зменшенням початкової кутової координати φ_0 . Дана ситуація стала наслідком того, що знайдені розв'язки (1.25) та (1.26) дійсні лише для $\omega_g t \ll 1$. По-друге, умову $l_1 \gg 1$ досить просто виконати, а, значить, магнітне поле H_\perp може також використовуватися в якості фактору управління транспортними властивостями наночастинок, зважених у рідині. Варто особливо зазначити, що H_\perp , на відміну від H_\parallel , неоднорідно зсуває області різних динамічних режимів.

За великих часів зручно ввести параметр σ , що для наночастинок, які рухаються праворуч або ліворуч, складає відповідно 1 або -1 . Якщо азимутальний кут намагніченості наночастинок φ прямує чи то до нуля, чи то до π , його можна подати як $\varphi = \pi(1 - \sigma)/2 + \sigma\varphi_1$ з $\varphi_1 \ll 1$. Якщо також взяти до уваги наступний результат лінійного наближення $\cos \varphi = \sigma$, $\sin \varphi = \varphi_1$ та, згідно з виразом (1.12), $r_x \sim \sigma(4/3)\omega_g t$ при $t \rightarrow \infty$, рівняння (1.8) на великих часових інтервалах

$$\dot{\varphi}_1 - \omega_\perp + \frac{4}{3}\omega_g^2 t \varphi_1 = 0. \quad (1.31)$$

Його асимптотичний розв'язок задається $\varphi_1 \sim 3\omega_\perp/(4\omega_g^2 t)$, тобто кутова координата φ обернено пропорційно до часу наближається до своїх граничних значень 0 і π . Якщо ж виконується умова $\omega_\perp = 0$, до даних граничних значень кутова координата φ прямує за експонентою: $\varphi_1 \sim \exp(-2\omega_g^2 t^2/3)$.

Чисельне вивчення динаміки наночастинок за умови $H_\perp \neq 0$ підтверджує як існування чотирьох динамічних режимів (подібних до режимів при $H_\perp = 0$), так і сильний вплив H_\perp на інтервалах r_{x0} , де реалізуються ці режими. На рисунку 1.4 ми показуємо залежність меж цих інтервалів, l_1 і l_2 , від співвідношення H_\perp/ga ($= \omega_\perp/\omega_g$). Оскільки, згідно (1.30), l_2 прямує до нуля зі збільшенням H_\perp , розмір $\Delta = l_1 + l_2$ інтервалу $(-l_2, l_1)$, де реалізується динамічний режим номер два, має порядок $l_1 (\gg 1)$ в тому числі для досить малих значень H_\perp (наприклад, $\Delta \approx l_1 = 731$ для $H_\perp = 1 \text{ Ое}$). У зв'язку з цим, варто нагадати, що $l_1|_{H_\perp=0} = 0$, $l_2|_{H_\perp=0} = l$ і тому $\Delta|_{H_\perp=0} = 1.235$. Як видно з відповідних залежностей, як чисельні, так і теоретичні результати для l_1 узгоджуються дуже добре. Окрім того, зауважимо, що, незважаючи на те, що теоретичний результат (1.28) був отриманий наближено, він також напрочуд добре співпадає з даними

числового моделювання для l_2 .

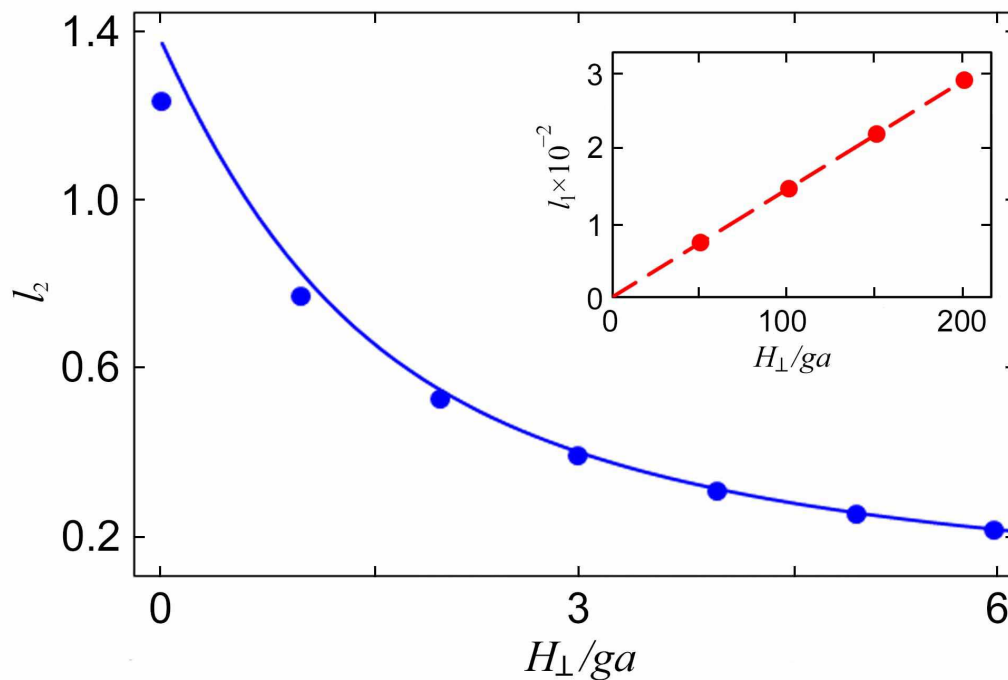


Рисунок 1.4 – Залежність l_2 і l_1 (на вставці) від безрозмірного магнітного поля H_{\perp}/ga для тих же параметрів, що й на рисунку 1.1. Чисельні дані для l_1 і l_2 , отримані розв'язанням рівняння (1.14), позначені круглими маркерами. Наближений вираз (1.28) і теоретичний результат (1.27) подані відповідно суцільною та пунктирною лініями.

Отже, на динаміку зважених у в'язкій рідині наночастинок ферромагнетика, що збуджується зовнішнім градієнтним магнітним полем значно впливають однорідні магнітні поля типу H_{\parallel} і H_{\perp} . Важливо зазначити, що хоч H_{\parallel} і зсуває лише початкове положення градієнтного поля, внесок величини H_{\perp} у динаміку наночастинок є комплексним. Є підстави стверджувати, що нетривіальні транспортні властивості даних наночастинок, що зумовлені спільною дією градієнтного та однорідного магнітних полів H_{\parallel} та H_{\perp} , можуть бути використані, наприклад, для прецезійної сепарації.

Щоб проілюструвати доцільність та ефективність процесу сепарації за допомогою градієнтним та однорідного магнітних полів, було оцінено час T повного розділення зважених наночастинок SmCo_5 (параметри яких було наведено вище) у прямокутному резервуарі, дивись рисунок 1.5. Для цього було зроблено припущення, що межі резервуара перпендикулярні вісьям координат, вісь x перетинає ліву та праву границі відповідно в точках $x = -L/2$ та $x = L/2$ (L – ширина резервуара вздовж вісі x), а кіль-

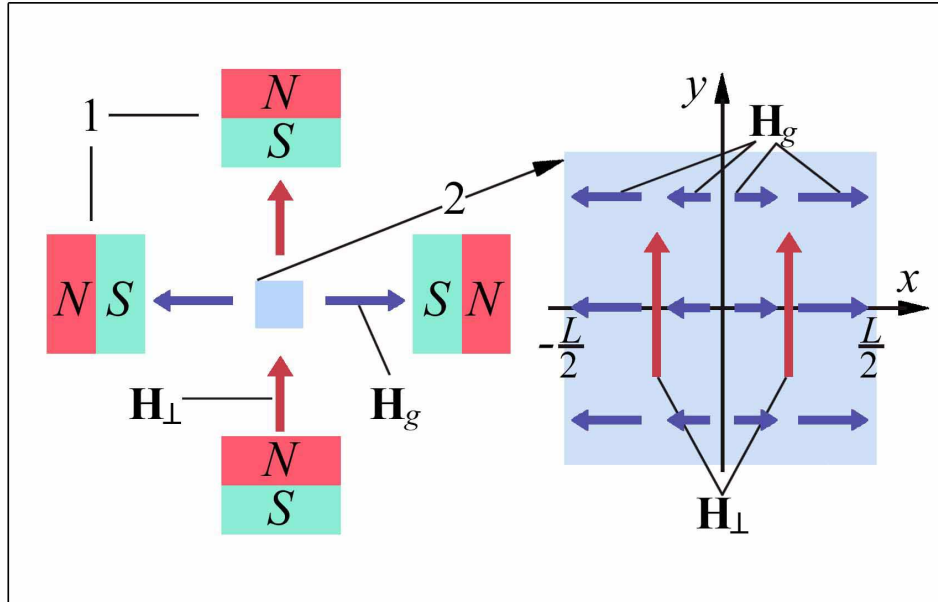


Рисунок 1.5 – Схематична діаграма системи та джерел для однорідного та градієнтного магнітних полів. Електромагніти, що генерують однорідне (\mathbf{H}_\perp) та градієнтне (\mathbf{H}_g) магнітні поля, та резервуар суспензії позначені відповідно цифрами 1 and 2.

кість зважених наночастинок у обмеженому резервуаром об'ємі дорівнює N . В межах визначеної топології в результаті ввімкнення градієнтного магнітного поля наночастинки починають концентруватися поблизу границь ліворуч та праворуч. Далі, зроблено припущення, що наночастинки розподілені у початковий момент часу $t = 0$ у однорідний спосіб і характерні швидкості v_0 і $-v_0$ будуть реалізовані у випадку $t \ll T$, можна зробити висновок, що якщо $H_\parallel = H_\perp = 0$, то повне розділення з $N_l \approx N/2$ і $N_r \approx N/2$ (N_l та N_r відповідно кількості наночастинок поблизу меж ліворуч та праворуч) реалізується за $T \approx L/2v_0$ (наприклад, $T \approx 6.6$ min при $L = 1$ cm). Однак, якщо $H_\parallel = gL/2$ і $H_\perp = 0$, тоді $N_l \approx 0$ і $N_r \approx N$ при $T \approx L/v_0 \approx 13.2$ min. Важливо підкреслити, що реальні суспензії містять наночастинок різного розміру. Оскільки характеристична швидкість v_0 залежить від розміру частинок, дивись (1.11), час розділення T є різним для різних наночастинок. Зокрема, для менших наночастинок SmCo_5 з $a = 10^{-5}$ cm маємо $v_0 = 3.15 \times 10^{-4}$ cm s $^{-1}$, і тому $T \approx 26.4$ min, якщо $H_\parallel = H_\perp = 0$, і $T \approx 52.8$ min, якщо $H_\parallel = gL/2$ і $H_\perp = 0$ відповідно, тоб-

то, чим менше розмір наночастинок, тим повільніше йде процес розділення. Також зауважимо, що профіль концентрації наночастинок при $t \in (0, T)$ та довільних H_{\parallel} та H_{\perp} можна легко розрахувати в рамках вищенаведеної теорії.

2 ЗМІННЕ У ЧАСІ ГРАДІЄНТНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

2.1 Особливості моделі

Припустимо тепер, що градієнтне магнітне поле \mathbf{H}_g змінюється у часі, тобто $\mathbf{H}_g = \mathbf{H}_g(t)$, і має лише компоненту x . У цьому випадку, на відміну від (1.2), градієнтне поле \mathbf{H}_g в центрі наночастинок $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{H}_g = \mathbf{e}_x g R_x \sin(\Omega t + \phi). \quad (2.1)$$

Тут $g(> 0)$ - градієнт магнітного поля, $R_x = R_x(t)$ - x компонента \mathbf{R} , а Ω і $\phi \in (0, 2\pi)$ - відповідно частота та початкова фаза \mathbf{H}_g . Це поле індукує як поступальний рух частинки вздовж осі x , так і її обертальний рух. Якщо початкова намагніченість $\mathbf{M}(0)$ лежить, наприклад, у площині xy , тоді намагніченість $\mathbf{M}(t)$ залишається в цій площині для всіх $t > 0$ (цей результат справедливий для "замороженої" намагніченості):

$$\mathbf{M}(t) = M(\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi), \quad (2.2)$$

де $\varphi = \varphi(t)$ - кут між віссю x і вектором \mathbf{M} . З (2.2) та (1.1) випливає, що $\omega = \mathbf{e}_z \omega_z$ (частинка обертається навколо вісі z) і $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_z$.

Для того, щоб отримати рівняння, які описують поступальний та обертальний рухи наночастинок під дією градієнтного магнітного поля (2.1), ми нехтуємо для простоти інерційними ефектами та використовуємо відповідні рівняння балансу. У нашому випадку, обчислюючи рушійну силу $\mathbf{f}_d = V(\mathbf{M} \cdot \partial / \partial \mathbf{R}) \mathbf{H}_g$ [V - об'єм наночастинок, символ \cdot позначає скалярний добуток] та рушійний момент $\mathbf{t}_d = V \mathbf{M} \times \mathbf{H}_g$, ми зводимо рівняння балансу сил $\mathbf{f}_d + \mathbf{f}_f = 0$ до

$$\mathbf{e}_x M V g \cos \varphi \sin(\Omega t + \phi) + \mathbf{f}_f = 0 \quad (2.3)$$

(\mathbf{f}_f - сила тертя) і рівняння балансу обертального момента $\mathbf{t}_d + \mathbf{t}_f = 0$ до

$$\mathbf{e}_z M V g R_x \sin \varphi \sin(\Omega t + \phi) + \mathbf{t}_f = 0 \quad (2.4)$$

(\mathbf{t}_f - обертальний момент тертя). Якщо динаміка частинок характе-

ризується малими поступальними та обертальними числами Рейнольдса, тоді (дивись, наприклад, посилання [4]) $\mathbf{f}_f = -\mathbf{e}_x 6\pi\eta a \frac{dR_x}{dt}$ (η - динамічна в'язкість рідини) і $\mathbf{t}_f = -\mathbf{e}_z 8\pi\eta a^3 \omega_z$. Нарешті, беручи до уваги, що $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$, і вводячи безрозмірний час $\tau = \Omega t$, безрозмірне положення частинок $r_x = R_x/a$ і безрозмірну характеристичну частоту коливань частинок

$$\nu = \frac{Mga}{6\eta\Omega}, \quad (2.5)$$

з рівнянь (2.3) та (2.4) отримуємо наступну систему зв'язаних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\dot{r}_x = (4/3)\nu \cos \varphi \sin(\tau + \phi), \quad (2.6)$$

$$\dot{\varphi} = -\nu r_x \sin \varphi \sin(\tau + \phi), \quad (2.7)$$

де крапка зверху позначає похідну за безрозмірним часом τ . Припускається, що розв'язок цих рівнянь, пара $\{r_x, \varphi\}$ функцій $r_x = r_x(\tau)$ та $\varphi = \varphi(\tau)$, задовольняє початковим умовам $r_{x0} = r_x(0)$ і $\varphi_0 = \varphi(0) \in (0, \pi)$.

2.2 Теоретичний аналіз

Незважаючи на їх зовнішню простоту, систему рівнянь (2.2.2) та (2.7) важко розв'язати аналітично. Тому тут ми представляємо лише деякі точні результати, що випливають з цієї системи рівнянь, а її наближений розв'язок отримаємо для $\nu \ll 1$, $|r_{x0}| \leq 1$ і $\nu \ll 1$, $\nu|r_{x0}| \geq 1$.

2.2.1 Точні результати

Нехай пара $\{r_x, \varphi\}$ є розв'язком рівнянь (2.2.2) та (2.7) для заданої множини $(r_{x0}, \varphi_0, \phi, \nu)$, r_{x0} початкових значень і параметрів φ_0 , ϕ and ν . Тоді можна безпосередньо перевірити, що пара $\{r_x, \pi - \varphi\}$ представляє розв'язок цих рівнянь для заданих параметрів $(r_{x0}, \pi - \varphi_0, \pi + \phi, \nu)$. Аналогічно можна перевірити, що розв'язки $\{-r_x, \pi - \varphi\}$ та $\{-r_x, \varphi\}$ відповідають наборам параметрів $(-r_{x0}, \pi - \varphi_0, \phi, \nu)$ та $(-r_{x0}, \varphi_0, \pi + \phi, \nu)$,

відповідно. Таким чином, якщо, наприклад, безрозмірне початкове положення частинки r_{x0} змінено на $-r_{x0}$, початкова фаза ϕ змінена на $\pi + \phi$, а інші параметри φ_0 і ν не змінюються, тоді розв'язок рівнянь (2.2.2) та (2.7) задається парою $\{-r_x, \varphi\}$.

Система рівнянь (2.2.2) та (2.7) також може бути представлена в іншому вигляді, зручному для теоретичного аналізу динаміки частинок. Щоб вивести це представлення ми множимо рівняння (2.2.2) на $\sin \varphi$, а рівняння (2.7) на $\cos \varphi$ і ділимо друге на перше. Після цього отримуємо

$$\frac{\dot{\varphi} \cos \varphi}{\sin \varphi} = -\frac{3}{4} r_x \dot{r}_x. \quad (2.8)$$

Оскільки за припущенням $\varphi_0 \in (0, \pi)$, очікується, що кут $\varphi = \varphi(\tau)$ також належить цьому інтервалу. Використовуючи цю умову та співвідношення $dr_x^2/d\tau = 2r_x \dot{r}_x$, рівняння (2.8) можна звести до

$$\frac{d}{d\tau} \ln \sin \varphi = -\frac{3}{8} \frac{d}{d\tau} r_x^2. \quad (2.9)$$

Нарешті, інтегруючи обидві сторони (2.9) за безрозмірним часом від 0 до τ , отримуємо рівняння

$$r_x^2 = r_{x0}^2 + \frac{8}{3} \ln \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi}, \quad (2.10)$$

яке зв'язує r_x та φ і може розглядатися як перше рівняння для визначення розв'язку $\{r_x, \varphi\}$. Його важливою особливістю є те, що воно є алгебраїчним, а не диференціальним (воно виконується також для незалежного від часу градієнтного магнітного поля [31]). Друге рівняння, яке необхідне для знаходження $\{r_x, \phi\}$, може бути записано, наприклад, у формі (2.2.2), (2.7) або

$$\left(\frac{3\dot{r}_x}{4 \sin(\tau + \phi)} \right)^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}}{r_x \sin(\tau + \phi)} \right)^2 = \nu^2. \quad (2.11)$$

Рівняння (2.10) дозволяє зробити деякі загальні висновки щодо характеру динаміки наночастинок. Дійсно, оскільки відповідно до (2.10) $r_x = r_x(\varphi)$, змінні φ і τ в (2.7) можна відокремити, отримуючи

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi(\tau)} \frac{d\varphi}{r_x(\varphi) \sin \varphi} = -\nu F(\tau), \quad (2.12)$$

де для зручності введено позначення

$$F(\tau) = \cos \phi - \cos(\tau + \phi). \quad (2.13)$$

Звідси випливає, що кут φ є періодичною функцією часу (у всякому разі при достатньо великих τ), тобто $\varphi(\tau) = \varphi(\tau + 2\pi n)$ з $n = 1, 2, \dots$. Аналогічним чином, переписавши (2.10) у вигляді

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \exp[-3(r_x^2 - r_{x0}^2)/8], \quad (2.14)$$

переконаємося, що $\varphi = \varphi(r_x)$. Тому, розділяючи змінні r_x та τ , із (2.2.2) знаходимо співвідношення

$$\int_{r_{x0}}^{r_x(\tau)} \frac{dr_x}{\cos \varphi(r_x)} = \frac{4}{3} \nu F(\tau), \quad (2.15)$$

яке показує, що може існувати періодичний розв'язок $r_x(\tau) = r_x(\tau + 2\pi n)$. Зазначимо також, що формальний стаціонарний розв'язок $\{0, \pi/2\}$ рівнянь (2.2.2) та (2.7) не може бути реалізований. Дійсно, при $r_x(\tau) = 0$ і $\varphi(\tau) = \pi/2$ точна умова (2.10) не може бути виконана для всіх початкових значень r_{x0} та φ_0 .

Використовуючи (2.10), також можна оцінити кутовий інтервал, в якому кут намагніченості φ коливається при $|r_{x0}| \leq r_{cr}$, де критичне значення початкового положення частинок визначається як

$$r_{cr} = 2 \left(\frac{2}{3} \ln \frac{1}{\sin \varphi_0} \right)^{1/2}. \quad (2.16)$$

З цим визначенням умова невід'ємності правої частини Eq. (2.10) може бути записана у наступному вигляді: $\sin \varphi \leq \exp[-3(r_{cr}^2 - r_{x0}^2)/8]$. Припускаючи, що $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, з цієї умови отримуємо $\varphi \in (0, \varphi_{cr})$, де критичний кут φ_{cr} задається як

$$\varphi_{cr} = \arcsin \exp[-3(r_{cr}^2 - r_{x0}^2)/8]. \quad (2.17)$$

(зазначимо, що $\varphi_{cr} \geq \varphi_0$ і $\varphi_{cr} = \varphi_0$ при $r_{x0} = 0$, $\varphi_{cr} = \pi/2$ при

$|r_{x0}| = r_{cr}$). Подібний аналіз показує, що якщо $\varphi_0 \in (\pi/2, \pi)$, тоді $\varphi \in (\pi - \varphi_{cr}, \pi)$.

Цікавою особливістю критичного кута φ_{cr} є те, що він залежить лише від початкового положення частинки r_{x0} та початкового кута намагніченості φ_0 , а не від початкової фази ϕ та безрозмірної характеристичної частоти ν градієнтного магнітного поля. Як наслідок, кут намагніченості φ коливається в межах того самого кутового інтервалу $(0, \varphi_{cr})$ [якщо $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$] або $(\pi - \varphi_{cr}, \pi)$ [якщо $\varphi_0 \in (\pi/2, \pi)$] при довільних значеннях ϕ і ν . Це досить несподіваний результат, оскільки якщо, наприклад, $r_{x0} \in (0, r_{cr})$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ та $\phi = \pi$, тоді рівняння (2.7), на перший погляд, дає $\dot{\varphi} > 0$ для всіх $\tau \in (0, \pi)$. Якщо так, тоді φ може прямувати до π при $\tau \rightarrow \pi$, якщо безрозмірна частота ν досить велика, тобто φ може перевищувати φ_{cr} . Однак це міркування є некоректним, оскільки, згідно з (2.2.2), положення частинки r_x спочатку зменшується з τ , а якщо r_x змінює знак, тоді $\dot{\varphi}$ теж змінює знак. Таким чином, обмеження інтервалів, де кут намагніченості φ коливається при $|r_{x0}| \leq r_{cr}$, є прямим наслідком складної зв'язаної динаміки r_x і φ . Також зауважимо, що при $|r_{x0}| > r_{cr}$ наведений вище аналіз стає непридатним (у цьому випадку права частина (2.10) є позитивною).

На жаль, ми не можемо точно розв'язати систему рівнянь (2.2.2) та (2.7). Тому, щоб проілюструвати деякі важливі особливості динаміки наночастинок у градієнтному магнітному полі, що змінюється в часі, нижче ми знаходимо її наближені розв'язки.

2.2.2 Динаміка наночастинок при $\nu \ll 1$

Якщо характерна частота коливань частинок невелика, тобто $\nu \ll 1$, то, згідно з (2.2.2), всі частинки виконують невеликі поступальні коливання поблизу своїх початкових положень. Що стосується обертальних коливань, то їх амплітуда залежить від параметра νr_x і, отже, від νr_{x0} , дивись рівняння (2.7). Тому ми розглянемо окремо два випадки, коли умови 1) $|r_{x0}| \leq 1$ та 2) $\nu |r_{x0}| \geq 1$ виконуються разом з умовою $\nu \ll 1$.

Перший випадок. Представимо розв'язок $\{r_x, \varphi\}$ рівнянь (2.2.2) та (2.7) у вигляді $r_x = r_{x0} + r_{x1}$ і $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, де невідомі функції $r_{x1} = r_{x1}(\tau)$ та $\varphi_1 = \varphi_1(\tau)$ задовольняють умовам $|r_{x1}| \sim \nu$, $|\varphi_1| \sim \nu$, $r_{x1}(0) = 0$ і

$\varphi_1(0) = 0$. Тоді, зберігаючи лише доданки порядку ν , ці рівняння можна звести до системи незв'язаних рівнянь

$$\dot{r}_{x1} = (4/3)\nu \cos \varphi_0 \sin(\tau + \phi). \quad (2.18)$$

$$\dot{\varphi}_1 = -\nu r_{x0} \sin \varphi_0 \sin(\tau + \phi). \quad (2.19)$$

Розв'язуючи їх з початковими умовами $r_{x1}(0) = 0$ та $\varphi_1(0) = 0$, переконуємось, що у довідковому випадку, коли $\nu \ll 1$ та $|r_{x0}| \leq 1$, часова залежність положення частинок описується формулою

$$r_x = r_{x0} + (4/3)\nu \cos \varphi_0 F(\tau), \quad (2.20)$$

а кут намагніченості формулою

$$\varphi = \varphi_0 - \nu r_{x0} \sin \varphi_0 F(\tau). \quad (2.21)$$

Неважко перевірити, що розв'язки (2.20) та (2.21) задовольняють рівнянням (2.10) та (2.11) відповідно у лінійному та квадратичному наближеннях за параметром ν .

У відповідності до загального результату попереднього розділу, обидві змінні r_x і φ коливаються з періодом 2π . Як видно з (2.20) та (2.21), ці коливання відбуваються поблизу середніх значень

$$\langle r_x \rangle = r_{x0} + (4/3)\nu \cos \varphi_0 \cos \phi, \quad (2.22)$$

$$\langle \varphi \rangle = \varphi_0 - \nu r_{x0} \sin \varphi_0 \cos \phi, \quad (2.23)$$

визначених як $\langle (\cdot) \rangle = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\cdot) d\tau$. Оскільки за припущенням $\nu \ll 1$, з (2.22) та (2.23) випливає, що середнє та початкове значення r_x та φ мало відрізняються.

Використовуючи (2.20), (2.21) та позначення (2.13), ми також можемо визначити максимальне, $\max r_x$, та мінімальне, $\min r_x$, значення положення частинки r_x

$$\left(\begin{array}{c} \max \\ \min \end{array}\right) r_x = r_{x0} + \frac{4}{3} \nu \cos \varphi_0 [\cos \phi + \left(\begin{array}{c} + \\ - \end{array}\right) \operatorname{sgn}(\cos \varphi_0)] \quad (2.24)$$

і максимальне, $\max \varphi$, та мінімальне, $\min \varphi$, значення кута намагніченості φ

$$\left(\begin{array}{c} \max \\ \min \end{array}\right) \varphi = \varphi_0 - \nu r_{x0} \sin \varphi_0 [\cos \phi - \left(\begin{array}{c} + \\ - \end{array}\right) \operatorname{sgn}(r_{x0})], \quad (2.25)$$

де знакова функція $\operatorname{sgn}(\cdot)$ позначає знак аргументу (\cdot) . У зв'язку з цим зазначимо, що кутові інтервали $(\min \varphi, \max \varphi)$, які відповідають $r_{x0} > 0$ і $r_{x0} < 0$, визначаються за формулою (2.25) набагато точніше, ніж ті, що використовували критичний кут φ_{cr} . Причина полягає в тому, що формула (2.17) (нагадаємо, що вона виконується при $|r_{x0}| \leq r_{cr}$) визначається для довільних значень параметрів ϕ та ν , і тому кутові інтервали $(0, \varphi_{cr})$ та $(\pi - \varphi_{cr}, \pi)$ не враховують специфічні особливості динаміки наночастинок при $\nu \ll 1$ та $|r_{x0}| \leq 1$. Підсумовуючи, можна зробити висновок, що в цьому випадку обертання та переміщення наночастинок відбуваються поблизу початкових значень φ_0 і r_{x0} .

Другий випадок. Якщо $\nu \ll 1$ і $\nu|r_{x0}| \geq 1$, тоді, як і раніше, ми можемо представити положення частинки у вигляді $r_x = r_{x0} + r_{x1}$, де, згідно з (2.2.2), $|r_{x1}| \sim \nu$. Остання умова показує, що доданок νr_x в (2.7) може бути приблизно замінений на νr_{x0} . Тому динаміку наночастинок у цьому випадку можна описати системою спрощених диференціальних рівнянь

$$\dot{r}_{x1} = (4/3)\nu \cos \varphi \sin(\tau + \phi), \quad (2.26)$$

$$\dot{\varphi} = -\nu r_{x0} \sin \varphi \sin(\tau + \phi). \quad (2.27)$$

На відміну від рівнянь (2.18) та (2.19) ці рівняння є зв'язаними, а оскільки $\nu|r_{x0}| \geq 1$, лише рівняння (2.2.2) містить малий параметр ν . Для того, щоб знайти розв'язок рівнянь (2.26) та (2.27) з початковими умовами $r_{x1}(0) = 0$ та $\varphi(0) = \varphi_0$, нам потрібно спочатку розв'язати рівняння (2.27), а потім, використовуючи отриманий розв'язок, розв'язати рівняння (2.26).

Рівняння (2.27) можна легко розв'язати методом відокремлення змінних. Дійсно, використовуючи табличний інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},$$

із (2.27) одразу отримуємо

$$\ln \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} - \ln \frac{1 - \cos \varphi_0}{1 + \cos \varphi_0} = -2\nu r_{x0} F(\tau). \quad (2.28)$$

Розв'язуючи рівняння (2.28) відносно $\cos \varphi$, після деяких простих обчислень можна отримати наступний вираз:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi_0 + \tanh[\nu r_{x0} F(\tau)]}{1 + \cos \varphi_0 \tanh[\nu r_{x0} F(\tau)]}. \quad (2.29)$$

Він показує, що оскільки $\nu |r_{x0}| \geq 1$, інтервал коливань φ , загалом, не малий.

Тепер підставляємо праву частину (2.29) у рівняння (2.28). Потім, інтегруючи обидві сторони цього рівняння по τ в інтервалі $(0, \tau)$ та враховуючи, що $r_{x1}(0) = 0$, ми можемо записати його розв'язок у вигляді

$$r_{x1} = \frac{4\nu F(\tau)}{3 \cos \varphi_0} - \frac{4 \sin^2 \varphi_0}{3 r_{x0} \cos \varphi_0} \int_0^{\nu r_{x0} F(\tau)} \frac{dx}{1 + \cos \varphi_0 \tanh x}. \quad (2.30)$$

Хоча інтеграл у (2.30) може бути обчислений аналітично для довільних значень φ_0 (дивись, наприклад, у посиланні [37] формулу 2.448), результат є досить громіздким. Тому тут ми аналізуємо лише три окремі випадки, коли $\varphi_0 = 0, \pi/2$ та π . Якщо $\varphi_0 = 0$ або π , то, згідно (2.29) та (2.30), отримуємо

$$\cos \varphi|_{\varphi_0=0,\pi} = \pm 1, \quad r_{x1}|_{\varphi_0=0,\pi} = \pm(4/3)\nu F(\tau), \quad (2.31)$$

де верхній та нижній знаки відповідають $\varphi_0 = 0$ та $\varphi_0 = \pi$. Ці умови показують, що наночастинки не обертаються ($\varphi = 0$ при $\varphi_0 = 0$ і $\varphi = \pi$ при $\varphi_0 = \pi$), а виконують лише малі поступальні коливання поблизу початкового положення r_{x0} ($r_x|_{\varphi_0=0,\pi} = r_{x0} + r_{x1}|_{\varphi_0=0,\pi}$). Якщо $\varphi_0 = \pi/2$, то формули (2.29) та (2.30) приводять до наступних умов:

$$\cos \varphi|_{\varphi_0=\pi/2} = \tanh[\nu r_{x0} F(\tau)], \quad r_{x1}|_{\varphi_0=\pi/2} = 0 \quad (2.32)$$

(щоб уникнути непорозуміння, ми вказуємо, що друга умова в (2.32) визначається як межа: $r_{x1}|_{\varphi_0=\pi/2} = \lim_{\varphi_0 \rightarrow \pi/2} r_{x1}$). Таким чином, на відміну від попереднього випадку, наночастинки виконують лише обертальні коливання, амплітуда яких, як це випливає з першої умови в (2.32), не є малою (оскільки $\nu|r_{x0}| \geq 1$).

ВИСНОВКИ

В ході виконання другого етапу даної НДР були отримані такі основні результати

Градiєнтне магнітне поле створює силу, яка діє на зважені в рідині феромагнітні наночастинки, викликає їх поступальний рух в напрямку градієнта поля. На противагу, зовнішнє однорідне магнітне поле не створює ніякої сили, і, тому, це поле не впливає безпосередньо на поступальний рух цих частинок. Однак якщо на частинки впливають як градієнтне, так і однорідне магнітні поля, останнє може впливати на їх транспортні властивості. Причина полягає в тому, що сила, викликана градієнтом магнітного поля, залежить від напрямку намагніченості частинки. Отже, хоч і не прямо, але змінюючи напрямок намагнічування, однорідне магнітне поле (разом з градієнтним магнітним полем) може впливати на рух зважених феромагнітних наночастинок.

Для детальнoго вивчення цього ефекту було застосовано мінімальний набір рівнянь, що описує пов'язану поступальну та обертальну динаміку зважених наночастинок під дією градієнтних та однорідних магнітних полів. Шляхом аналітичного та чисельного розв'язання цих рівнянь було виявлено що наночастинки виявляють складну динамічну поведінку. Зокрема, встановлено, що в залежності від початкового положення частинок існують чотири різні режими спрямованого транспорту таких наночастинок. А саме, швидкість частинок у цих режимах (I) з часом збільшується, а потім насичується, (II) зменшується, а потім збільшується до значення насиченого, (III) зменшується до нуля, а (IV) зменшується до нуля, змінює знак і знову насичується. Також було показано, що зовнішнє однорідне магнітне поле суттєво змінює інтервали значень початкових положень частинок, де реалізуються ці режими. Виходячи з цих властивостей, було запропоновано використовувати градієнтні та однорідні магнітні поля для керованого розділення зважених наночастинок. Є також підстави вважати, що спостережувані властивості спрямованого транспорту можуть бути корисними для таких біомедичних застосувань, зокрема для технології адресної доставки лікарських засобів та сепарації клітинних культур [38, 39].

Також аналітично було вивчено поступальну, так і обертальну динаміку зважених феромагнітних наночастинок у нещільній ферорідині, під

дією градієнтного магнітного поля, яке змінюється в часі. Запропонований підхід базується на основних припущеннях, що в основному рівняння руху (1.1) нехтують інерційними ефектами, у зовнішній дії (2.1) ігнорують теплові коливання, а в магнітній динаміці наночастинки вектор намагніченості (2.2) вважається "вмороженим" в кристалічну решітку частинки. У межах цих наближень, які мають місце для відносно великих наночастинок із сильною одновісною анізотропією, було також виведено зв'язаний набір диференціальних рівнянь першого порядку, що описують поступальний та обертальний рух таких частинок.

Використовуючи ці рівняння, положення частинки, яке описує поступальний рух частинки вздовж градієнтного магнітного поля було виражено через кут, що утворює вектор намагніченості у процесі обертального руху. Було продемонстровано, що цей вираз відіграє важливу роль для подальшого теоретичного аналізу динаміки наночастинок. Зокрема, використовуючи цей вираз, було показано, що розв'язок похідного набору рівнянь руху завжди є періодичним (з періодом градієнтного поля) оцінені інтервали для кута намагнічування. Крім того, щоб отримати глибше розуміння динаміки наночастинок, було розв'язано цей набір рівнянь для частинок, близьких до початку відліку координатної вісі та для частинок, що віддалені від нього значним чином. При цьому припускалося, що характерна частота коливань частинок мала. Виявилось, що коли поступальні коливання малі для всіх частинок, то обертальні коливання малі лише для частинок, близьких до початку координат.

Оскільки поступальна та обертальна динаміка ферромагнітних наночастинок відповідає за основні властивості їх ансамблів, є підстави вважати, що теоретичні результати, отримані в рамках НДР, будуть корисними для ряду сучасних застосувань. Зокрема, результуюча швидкість руху частинок, яка безпосередньо визначається наведеними вище результатами, може бути використана для розрахунку втрат потужності, що виникають внаслідок тертя між наночастинками та рідиною. Цей внесок у загальну втрату потужності може бути важливим, наприклад, для застосувань магнітної гіпертермії. Крім того, теоретичний аналіз, проведений тут, може представляти інтерес також для вже згаданих технологій адресної доставки ліків та магнітної сепарації. Головним чинником тут є той факт, що

змінне магнітне поле, яке застосовується перпендикулярно періодичному градієнтному магнітному полю, може спричинити спрямований транспорт феромагнітних наночастинок вздовж градієнтного поля.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Advances in magnetic nanoparticles for biomedical applications / Cardoso V F, Francesko A, Ribeiro C et al. // *Adv. Healthcare Mater.* — 2018. — Vol. 7. — P. 1700845.
2. Vallabani N V S, Singh S, Karakoti A S. Magnetic nanoparticles: Current trends and future aspects in diagnostics and nanomedicine // *Curr. Drug Metab.* — 2019. — Vol. 20. — P. 457–472.
3. Nanoparticles for Biomedical Applications: Fundamental Concepts, Biological Interactions and Clinical Applications / Ed. by E.J. Chung, L. Leon, C. Rinaldi. — Elsevier, 2020. — ISBN: 9780128166628. — Access mode: <https://doi.org/10.1016/C2017-0-04750-X>.
4. Nanoparticles and their Biomedical Applications / Ed. by A.K. Shukla. — Springer Singapore, 2020. — ISBN: 9789811503900. — Access mode: <https://doi.org/10.1007/978-981-15-0391-7>.
5. Magnetic Nanoparticles in Cancer Therapy and Diagnosis / Ali Farzin, Seyed Alireza Etesami, Jacob Quint et al. // *Advanced Healthcare Materials.* — 2020. — Vol. 9, no. 9. — P. 1901058. — <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/adhm.201901058>.
6. Anderson Simon D., Gwenin Vanessa V., Gwenin Christopher D. Magnetic Functionalized Nanoparticles for Biomedical, Drug Delivery and Imaging Applications // *Nanoscale Research Letters.* — 2019. — May. — Vol. 14, no. 1. — P. 188. — Access mode: <https://doi.org/10.1186/s11671-019-3019-6>.
7. Usov N.A., Liubimov B. Ya. Magnetic nanoparticle motion in external magnetic field // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* — 2015. — Vol. 385. — P. 339 – 346. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885315002565>.
8. Usadel K. D., Usadel C. Dynamics of magnetic single domain particles embedded in a viscous liquid // *Journal of Applied Physics.* — 2015. — Vol. 118, no. 23. — P. 234303. — <http://dx.doi.org/10.1063/1.4937919>.
9. Usadel Klaus D. Dynamics of magnetic nanoparticles in a viscous fluid driven by rotating magnetic fields // *Phys. Rev.*

- B. — 2017. — Mar. — Vol. 95. — P. 104430. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.104430>.
10. Lyutyy T.V., Hryshko O.M., Yakovenko M.Yu. Uniform and nonuniform precession of a nanoparticle with finite anisotropy in a liquid: Opportunities and limitations for magnetic fluid hyperthermia // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 2019. — Vol. 473. — P. 198 – 204. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885318322868>.
 11. Magnetomechanical coupling and ferromagnetic resonance in magnetic nanoparticles / Hedyeh Keshtgar, Simon Streib, Akashdeep Kamra et al. // *Phys. Rev. B*. — 2017. — Apr. — Vol. 95. — P. 134447. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.134447>.
 12. Lyutyy T. V., Hryshko O. M., Kovner A. A. Power loss for a periodically driven ferromagnetic nanoparticle in a viscous fluid: The finite anisotropy aspects // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 2018. — Vol. 446, no. Supplement C. — P. 87 – 94. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885317310740>.
 13. Lyutyy T. V., Denisov S. I., Hänggi P. Dissipation-induced rotation of suspended ferromagnetic nanoparticles // *Phys. Rev. B*. — 2019. — Oct. — Vol. 100. — P. 134403. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.134403>.
 14. Shliomis M I. Effective viscosity of magnetic suspensions // *Sov. Phys. JETP*. — 1972. — Vol. 34, no. 6. — P. 1291–1294. — <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/r/61/6/p2411?a=list>.
 15. W. T. Coffey Yu. P. Kalmykov, Waldron J. T. *The Langevin Equation: With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering*. — 2nd ed. edition. — 2004. — 09.
 16. Berkov D. V., Iskakova L. Yu., Zubarev A. Yu. Theoretical study of the magnetization dynamics of nondilute ferrofluids // *Phys. Rev. E*. — 2009. — Feb. — Vol. 79. — P. 021407. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.79.021407>.
 17. Yu. L. Raikher, Stepanov V. I. Power losses in a suspension of magnetic dipoles under a rotating field // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Feb. — Vol. 83. — P. 021401. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.021401>.

18. Lyutyy T. V., Reva V. V. Energy dissipation of rigid dipoles in a viscous fluid under the action of a time-periodic field: The influence of thermal bath and dipole interaction // *Phys. Rev. E.* — 2018. — May. — Vol. 97. — P. 052611. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.052611>.
19. Jäger S, Klapp S H L. Pattern formation of dipolar colloids in rotating fields: layering and synchronization // *Soft Matter.* — 2011. — Vol. 7. — P. 6606–6616.
20. Large-scale ferrofluid simulations on graphics processing units / A.Yu. Polyakov, T.V. Lyutyy, S. Denisov et al. // *Computer Physics Communications.* — 2013. — Vol. 184, no. 6. — P. 1483 – 1489. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465513000337>.
21. Domingos J L C, Peeters F M, Ferreira W P. Self-assembly of rigid magnetic rods consisting of single dipolar beads in two dimensions // *Phys. Rev. E.* — 2017. — Vol. 96. — P. 012603.
22. Raible Martin, Engel Andreas. Langevin equation for the rotation of a magnetic particle // *Applied Organometallic Chemistry.* — 2004. — Vol. 18, no. 10. — P. 536–541. — <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/aoc.757>.
23. Rotational properties of ferromagnetic nanoparticles driven by a precessing magnetic field in a viscous fluid / T. V. Lyutyy, S. I. Denisov, V. V. Reva, Yu. S. Bystrik // *Phys. Rev. E.* — 2015. — Oct. — Vol. 92. — P. 042312. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.042312>.
24. Ilg P, Evangelopoulos A E A S. Magnetic susceptibility, nanorheology, and magnetoviscosity of magnetic nanoparticles in viscoelastic environments // *Phys. Rev. E.* — 2018. — Vol. 97. — P. 032610.
25. Denisov S. I., Pedchenko B. O. Drift of suspended ferromagnetic particles due to the Magnus effect // *Journal of Applied Physics.* — 2017. — Vol. 121, no. 4. — P. 043912. — <https://doi.org/10.1063/1.4975031>.
26. Exactly solvable model for drift of suspended ferromagnetic particles induced by the Magnus force / S.I. Denisov, B.O. Pedchenko, O.V. Kvasnina, E.S. Denisova // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* — 2017. — Vol. 443. — P. 89 – 95. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885317316530>.

27. Temperature effects on drift of suspended single-domain particles induced by the Magnus force / S. I. Denisov, T. V. Lyutyty, V. V. Reva, A. S. Yermolenko // *Phys. Rev. E.* — 2018. — Mar. — Vol. 97. — P. 032608. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.032608>.
28. Svoboda J. *Magnetic Techniques for the Treatment of Materials.* — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.
29. *Scientific and Clinical Applications of Magnetic Carriers* / Ed. by Häfeli U, Schütt W, Teller J, Zborowski M. — Springer Science & Business Media, 2013. — ISBN: 9781475764826.
30. Denisov S. I., Lyutyty T. V., Liutyi A. T. Dynamics of Suspended Nanoparticles in a Time-varying Gradient Magnetic Field: Analytical Results // *J. Nano- Electron. Phys.* — 2020. — Vol. 12, no. 6. — P. 06028. — Access mode: [https://doi.org/10.21272/jnep.12\(6\).06028](https://doi.org/10.21272/jnep.12(6).06028).
31. Denisov S I, Lyutyty T V, Pavlyuk M O. Directed transport of suspended ferromagnetic nanoparticles under both gradient and uniform magnetic fields // *Journal of Physics D: Applied Physics.* — 2020. — jul. — Vol. 53, no. 40. — P. 405001. — Access mode: <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ab97da>.
32. Guimarães A. P. *Principles of Nanomagnetism.* — 2nd edition. — Springer, New York, 2017. — Access mode: <https://www.springer.com/gp/book/9783642261114>.
33. Rubinow S. I., Keller Joseph B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1961. — Vol. 11, no. 3. — P. 447–459.
34. Polyanin A D, Zaitsev V F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems.* — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
35. Goya G F, Grazu V, Ibarra M R. Magnetic nanoparticles for cancer therapy // *Curr. Nanosci.* — 2008. — Vol. 4. — P. 1–16.
36. Dennis S C R, Singh S N, Ingham D B. The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* — 1980. — Vol. 101. — P. 257–279.
37. *Table of Integrals, Series, and Products, 8th Edition* / Ed. by D. Zwillinger. — Elsevier, 2014. — P. 1184. — ISBN: 9780123849335. — Access

mode: <https://doi.org/10.1016/C2010-0-64839-5>.

38. Targeted Drug Delivery with Polymers and Magnetic Nanoparticles: Covalent and Noncovalent Approaches, Release Control, and Clinical Studies / Ulbrich K, Holá K, Šubr V et al. // *Chem. Rev.* — 2016. — Vol. 116, no. 9. — P. 5338–5431.
39. Dalili Arash, Samiei Ehsan, Hoorfar Mina. A review of sorting, separation and isolation of cells and microbeads for biomedical applications: microfluidic approaches // *Analyst.* — 2019. — Vol. 144. — P. 87–113. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1039/C8AN01061G>.