

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
Факультет технічних систем та енергоефективних технологій  
Кафедра комп'ютерної механіки імені Володимира Марцинковського

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**  
**бакалавра**  
**на тему: «Оцінювання параметрів математичних**  
**моделей вільних і вимушених коливань колінчастого вала»**

Спеціальність: 131 Прикладна механіка

ОПП: Комп'ютерний інжиніринг в механіці

Виконав: студент групи КМ-71

Хоменко В.А.

Керівник: проф. Павленко І.В.

Рецензент: зав. кафедри Загорулько А.В.

Суми 2021

## ЗМІСТ

РЕФЕРАТ.....	4
ВСТУП.....	5
1. АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.....	11
1.1 Крутильні коливання колінчастих валів .....	11
1.2 Поперечні (згинальні) коливання колінчастих валів.....	16
2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІЛЬНИХ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ВАЛА.....	19
2.1 Скінченноелементна модель.....	19
2.2 Дискретно-масова модель.....	22
2.3 Оцінювання параметрів двомасової моделі за власними частотами і формами коливань.....	24
3. УРАХУВАННЯ СИЛ РІЗНОЇ ПРИРОДИ, ЩО ДІЮТЬ НА ЕЛЕМЕНТИ ВАЛА.....	31
3.1 Сила гідродинамічної жорсткості .....	31
3.2 Демпфувальна сила .....	32
3.3 Сила нелінійного тертя.....	33
3.4 Сила внутрішнього в'язкого тертя.....	34
3.5 Сила можливої контактної взаємодії між ротором і статором.....	35

4. УТОЧНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ КОЛІНЧАСТОГО ВАЛА.....	36
4.1 Загальний випадок .....	36
4.2 Окремі випадки .....	41
ВИСНОВКИ.....	44
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ПОСИЛАНЬ.....	46

САНДІ

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 50 с., 2 таблиці, 10 рисунків,  
40 літературних джерел.

Мета роботи: підвищення вібраційної надійності колінчатих валів на прикладі валу 3LD-1005020 дизельного двигуна MM3-LD.

Відповідно до поставленої мети були вирішені такі завдання:

- аналіз сил різної природи, що діють на елементи колінчастого вала;
- уточнення математичної моделі вимушених коливань колінчастого вала;
- створення алгоритму інерційних характеристик дискретномасової моделі;
- чисельне моделювання вимушених коливань і визначення вібраційних характеристик колінчастого вала 3LD-1005020 дизельного двигуна MM3-LD.

Предметом дослідження є динамічні характеристики вібраційного стану ротора.

Об'єктом дослідження є вільні та вимушені коливання колінчастого вала.

Ключові слова: РОТОР, КОЛИВАННЯ, АНІЗОТРОПІЯ, РЕЗОНАНС, ВІБРОНАДІЙНІСТЬ.

## ВСТУП

На сьогоднішній день колінчастий вал займає невід'ємну частину в промисловості, він є у всіх двигунах внутрішнього згорання. Без нього не можуть працювати поршневі двигуни внутрішнього згорання, насоси, коливально-пресові машини та інші важливі механізми. Колінчастий вал дуже важливий для двигуна внутрішнього згорання та дуже дорогий конструктивний елемент. В машині всі деталі важливі і необхідні. Однак деякі фактори унеможливають уявлення про роботу автомобіля. Одним з таких компонентів є колінчастий вал двигуна. Він з'єднує двигун і ведучі колеса для приводу всього механізму. Колінвал доволі міцна деталь, її призначення полягає в витримуванні дуже великих навантажень і високих обертів. Виготовлення колінчастих валів робота дуже складна і точно, потребує чимало зусиль. Колінчасті вали автомобілів мають цікаву, але в деякій мірі складну будову. У них є шийки: корінні та шатунні. Але зазвичай шийки це частина підшипника ковзання. Варто згадати, що у колінчастому валі є масивні балансири. З неочевидного, то більшість колінчастих валів пустотілі, мають всередині масляну магістраль [1]. Шатуна шийка, яка розташована між двома щоками, має назву коліна. Коліна повинні бути розташовані залежно від числа, розташування і порядку роботи циліндрів, тактності двигуна. Положення колін має забезпечувати урівноваженість двигуна, рівномірність займання, мінімальні крутильні коливання і вигинні моменти. Шатуна шийка служить опорною поверхнею для конкретного шатуна. Колінчастий вал V-подібного двигуна виконується з подовженими шатунними шийками, на яких базується два шатуни правого і лівого рядів циліндрів. Деякі вали V-подібних двигунів мають спарені шатунні шийки, котрі зрушені один відносно одного на кут  $18^\circ$ , завдяки чому забезпечується рівномірність займання (технологія носить назву Split-pin). Найбільше навантаження в конструкції колінчастого валу є місце переходу від шийки (корінної, шатуної) до щоки. Для зниження концентрації

напруги перехід від шийки до щоки повинно виконуватися з радіусом закруглення. Галтелі в сукупності мають збільшувати довжину колінчастого валу, для зменшення довжини їх виконують з поглибленням в щоку або шийку. Обертання колінчастого валу в опорах, а шатунів в шатунних шийках забезпечується так званими підшипниками ковзання. В якості підшипників застосовуються роз'ємні тонкостінні вкладиші, які виготовляються із сталеві стрічки з нанесеним антифрикційним шаром. Провертанням вкладишів навколо шийки перешкоджає виступ, яким вони фіксуються в опорі. Для запобігання осьовим переміщенням колінчастого валу використовується упорний підшипник ковзання, який встановлюється на середній або крайній корінній шийці [2].

Колінчасті вали є найбільш навантаженими, отже, найбільш критичними частинами поршневих двигунів та компресорних агрегатів [3]. Спочатку крутильні коливання колінчатих валів вважалися найнебезпечнішими. Однак після впровадження загальних підходів до управління крутильними вібраціями шляхом відстроювання від резонансу, використання заслінок та антивібраторів, потім із постійним збільшенням характеристик двигунів (наприклад, швидкості та потужності) та полегшення їх конструкцій, проблеми динаміки міцності, пов'язана з вібраційними коливаннями [4], стала актуальною. В деяких конструкціях двигунів горіння в циліндрах відбувається нерівномірно. Цей факт призводить до пульсацій крутильного моменту [5]. В основному зворотно-поступальний рух поршнів призводить до виникнення додаткових сил інерції [6]. Оскільки шатун в двигуні рухається в площині, метод гармонійного балансу повинен лінеаризувати нелінійні компоненти [7]. У цьому випадку серед сил інерції є вищі гармоніки, кратні швидкості обертання колінчастого вала. Підвищені вібрації можуть також виникати через дефекти допоміжних агрегатів, що приводиться в дію ременем, маховиком та дисками зчеплення [8]. Примітно, що збільшення частот і амплітуд зовнішнього впливу на колінчастий вал і зменшення витрати матеріалу (що

супроводжується зменшенням жорсткості) викликають резонансні коливання. Отже, усунення цих коливань є актуальною проблемою динаміки ротора. У цьому випадку, незважаючи на вивчення крутильних вібрацій та їх впливу на продуктивність передачі можливо із використанням відносно простих моделей, надійність вібрацій колінчастого валу вимагає більш складних математичних моделей коливальних коливань. Завдяки згаданому вище та вивченню крутильних коливань, у дослідницьких роботах [9, 10] колінчастий вал вважається статично невизначеною космічною системою під впливом сил тиску газу, сил інерції дисбалансів та приєднаних деталей кривошипно-шатунних механізмів. Однак ці моделі є квазістатичними. Більше того, вони не враховують гідродинамічні та контактні сили, які впливають на втрату стійкості прецесії валу [11], виникнення биття та збільшений знос шахт вала і втулок корпусу[12]. Під час проектування та виготовлення колінчатих валів та їх деталей особлива увага приділяється їх балансуванню [13], головним чином через порушення технології складання/розбирання двигуна та неправильного його складання новими запасними частинами. Ця проблема є важливою для машин, в яких колінчастий вал збалансований як вузол з маховиком та зчепленням. Якщо неправильно встановити компоненти, замінивши деталь із збалансованого комплекту іншим, це також призведе до посилення вібрації двигуна. Це значно збільшує шум, динамічні навантаження на опори підшипників, що скорочує вали та термін служби підшипників.

У зв'язку з цим підвищення ефективності балансування колінчастого вала можливе у разі створення надійної математичної моделі його вільних та вимушених коливань. Примітно, що можна попередньо виконати процедуру балансування [14], щоб раціонально вибрати площини корекцій та значення пробних дисбалансів. Більше того, незважаючи на велику кількість наукових праць, присвячених торсионним коливанням колінчастого валу, проблеми згинальних коливань залишаються недостатньо вивченими з наступних істотних причин. По-перше, на відміну від ротора турбомашини, колінчастий

вал має природну анізотропію властивостей жорсткості [15]. По-друге, маса валу нерівномірно розподілена по своїй довжині, а лінія центрів маси являє собою ламану просторову криву. Ці факти унеможливають застосування аналітичних методів для вивчення неперервних моделей. Більш того, складна система нелінійних сил діє на шийки валів (наприклад, демпфування, нелінійне тертя та циркулююча сила). Розгляд цих сил є складною проблемою для сучасної наукової спільноти. Також важко розглянути сили внутрішнього тертя між волокнами матеріалу валу під час його деформацій. Робота колінчастого валу в нерозрахованих або перехідних режимах супроводжується тертям і биттям шийок гільзами корпусу, що призводить до інтенсивного зносу [16, 17]. Для запобігання цьому явищу необхідно вивчити вимушені коливання колінчастого вала, враховуючи сили, що їх викликають. Вартість цієї деталі досить висока через матеріал, з якого вона зроблена: легована хромом або молібденом. Вона має особливу міцність. А також ціна залежить від розташування волокон і методики виготовлення. Спосіб виробництва і матеріал, з якого виробляється колінвал, в більшості залежить від класу автомобіля і його типу. Литий чавунний колінвал використовується в серійних моделях, це дозволяє зменшити їх вартість і не виходити за межі розрахунку. У спортивних авто встановлюють колінчастий вал зі сталі, зроблений методом кування [1]. Колінчасті вали зазвичай виготовляють з вуглецевих і легованих сталей, хромомарганцевих, хромонікельмолібденових чи високо міцного чавуну, часто цілими, литими або кованими, та інших сплавів. З чавуну спеціальним методом лиття, та інших сталей методом лиття. Найчастіша проблема з колінчастими валами – природний знос. Найшвидше в колінвалі зношуються шатунні шийки – вони втрачають округлу форму та стають еліпсоподібними. Під час капітального ремонту двигуна ці шийки шліфують (зменшують в діаметрі) і встановлюють ремонтні вкладиші (підшипники ковзання). У більшості легкових авто зменшення в діаметрі відбувається на 0,25 мм з кожним ремонтом. Друга проблема набагато серйозніша – задири. Зазвичай вона виникає, коли є проблеми з подачею оливи. Частина



підшипника ковзання прилипає до шийки колінвалу та пошкоджує її. Такі несправності не завжди можна виправити шліфовкою – іноді застосовують метод наварки, але частіше доводиться міняти колінвал. При гідродажах (коли в камеру згорання потрапляє рідина і поршень не може її стиснути) колінвал може деформуватись або навіть тріснути. Такі несправності колінчастого валу зазвичай не виправляють, а просто міняють його на новий або вживаний але справний. Також іноді трапляються проблеми, пов'язані з некоректним обслуговуванням або ремонтом. У передній частині, як правило, кріпиться шків, через який приводяться ремені навісних агрегатів. Якщо центральний болт, що тримає шків, не закрутити з рекомендованим (досить високим) крутним моментом – колінвал може тріснути. У такому випадку колінвал також підлягає заміні. Оскільки найуразливішим елементом є шийки – перш за все треба піклуватись про гарні умови їх роботи. Для змащення шийок на них під тиском подається моторна олива. Отже, треба завжди слідкувати за рівнем оливи в моторі та вчасно її міняти. Заливати потрібно тільки ту оливу, яку рекомендує автовиробник (важливо, щоб олива мала відповідний допуск, вказаний у сервісній книзі). Не варто також ставити сумнівні фільтри для оливи, оскільки вони можуть погіршити подачу мастила [1]. Динаміка колінчастого вала з підключенням штоки та поршней є дуже важливою технологічною проблемою. Надійність двигуна безпосередньо пов'язана з роботою цієї системи. Тоді як колінчастий вал, що працює в умовах постійної швидкості обертання – це добре відома проблема, динаміка в перехідному русі є також проблемою, яка вимагає великих досліджень. З іншої точки зору, вібрації в кривошипно-шатунних системах дуже важливі. Внаслідок складна геометрія ротора і "складна" конструкція кривошипно-шатунного механізму є зчеплення між поперечним і крутильним переміщенням. Як результат кручення і згинання вібрації виникають одночасно в кривошипних системах. На жаль, через їх складний механізм часто треба опустити муфту. Такий підхід значно спрощує проблему, але вона є причиною змін спектральної будови моделі поршневого двигуна. У

багатьох ситуаціях бажано використовувати спрощене моделювання через легкі розрахунки, наприклад у випадку конструкції двигуна. Однак остаточні розрахунки слід взяти до уваги, врахувати явище зв'язку вібрацій в кривошипно-шатунних системах. Ця проблема важлива через той факт, що разом із муфтою крутильні коливання можуть виникнути нові критичні точки. Більше того, впливають крутильні вібрації, також поперечні вібрації. Тому може спостерігатиметься зсув певних частот природних вібрацій розчепленої системи. Більше того, там є додатковий ефект, що мають нелінійні або параметричні символи. У практичному застосуванні це явище може бути використовується для аналізу крутильних коливань двигуна, для основних його поперечних переміщень. Ця проблема настільки важлива, що багато несправностей можуть виникають у двигунах внутрішнього згоряння, суттєво можуть вплинути на кутові коливання системи приводу. Таким чином, можна використати вигин-кручення муфти вібрацій для аналізу та оцінки технологічного стану пристрою, оснащеного поршневого двигуна внутрішнього згоряння. Для цього необхідно зробити детальний аналіз рівняння, що регулюють динаміку кривошипної системи (рівняння руху), результати моделювання та експерименти. Дослідження, що були проведені до цих пір показують чіткий взаємозв'язок між конкретними спектрами. Це дає можливість використання згинально-крутильної муфти вібрації для діагностичних цілей. Кінематика такої системи досить складна, поршень здійснює зворотно-поступальний рух, шатун робить складний рух, а вал здійснює обертальні рухи. Щоб розрахувати крутний момент, що діє на вал, важливо знати сили, що діють, зокрема елементів залежно від кута його повороту. Знання миттєвих значень тиску в циліндрі та розмірах поршня можна обчислити силу, що діє на шатун. Припускаючи масу індивіда елементів і припускаючи швидкість обертання колінчастого вала можна розрахувати сили інерції в системі. На практиці сили інерції є частково збалансованими. Ці незбалансовані сили спричиняють додатковий змінний крутний момент, що діє на колінчастий вал.

# 1 АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ НАУОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

## 1.1 Крутильні коливання колінчастих валів

Щоб відповісти на питання про крутильну вібрацію, уявіть сталевий стрижень, один кінець якого міцно закріплений, а інший - маховик. Шатун біля маховика спирається на підшипник. Якщо до маховика прикласти крутний момент, маховик повернеться до певного кута  $f$  (рисунок 1.1, а) через пружну деформацію кручення стрижня. Якщо послабити маховик, це послабить еластичність. Маховик з певною масою та моментом інерції почне коливатися. Частота коливань маховика (кількість коливань в секунду) буде залежати від маси, від розподілу маси, від її видалення від центру обертання та від жорсткості штока під час кручення. Коливальна система-маховик-стержень з певною інерцією та моментом жорсткості матиме дуже специфічну частоту коливань (власну частоту коливань). Це коливання системи, спричинене одноразовим прикладанням крутного моменту, називається вільним або властивим крутильним коливанням. Якщо крутний момент не буде повторно застосовано до системи (до штока та маховика), коливання поступово зменшаться, і маховик врешті-решт зупиниться, змушуючи його стояти на місці. Ослаблення вібрації спричинене тертям штока в підшипнику, тертям маховика про повітря та внутрішньомолекулярним тертям стрижня. При коливанні маховик обертається на певний кут  $f$  відносно свого початкового положення в будь-якому напрямку, а при коливанні кут буде постійно зменшуватися. Відхилення маховика від початкового положення називається амплітудою коливань. Коли коливання згасає, частота коливань залишається постійною незалежно від зменшення амплітуди. Очевидно, що, щоб маховик коливався, потрібно періодично прикладати до нього зовнішній (тривожний) крутний момент. Торсійна вібрація, що виникає під впливом зовнішньої сили,

називається вимушеною вібрацією. Частота вимушеного коливання дорівнює частоті прикладеної аномальної сили. Якщо частота вимушеного крутильного коливання відповідає власній частоті, виникне резонанс. Амплітуда коливань збільшиться до максимального розміру, що може спричинити пошкодження системи. Розглянута вище система махових штоків має лише одну власну частоту і називається простою одномасовою системою. Якщо ви зафіксуєте деякі маховики з певним інтервалом на довгому валу і повернете їх під певним кутом, так що вал між маховиками буде скручений, а потім послаблений, ми отримаємо складні коливання крутного моменту. Можливо також, що колінчастий вал дизельного двигуна складається з еластичної частини, між якою знаходиться фіксована маса, еластичною частиною є кривошип з шатуном і поршнем [18].

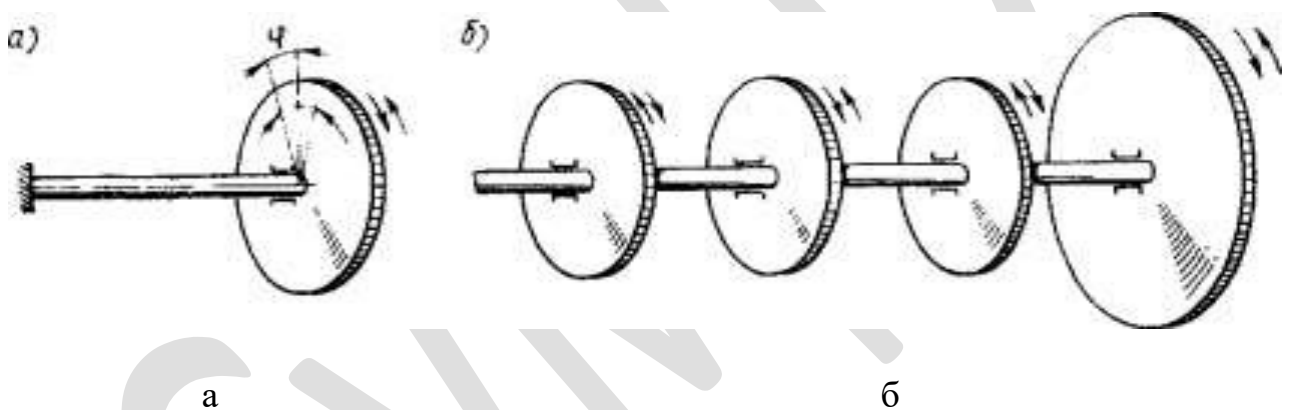


Рисунок 1.1- одномасової (а) і багатомасових (б) системи крутильних коливань

Обертається маса якоря генератора, підключеного до колінчастого вала через муфту дизельного генератора, також додається до системи. Під час роботи дизельного двигуна колінчастий вал отримує тиск від тиску газу на поршень та інерційну силу від рухомих частин. Ці ефекти будуть регулярно повторюватися в певному порядку і повторюватися з частотою, пропорційною швидкості колінчастого вала. Через мінливість крутного моменту маси, встановленої на валу, будуть генеруватися крутильні коливання, при яких пружна частина вала буде періодично скручуватися і скручуватися. Торсіонні

коливання накладаються на стійке обертання вала. Оскільки колінчастий вал дизеля має кілька обертових мас, він також має кілька власних частот крутильних вібрацій. Наприклад, колінчастий вал дизеля PD1M з шістьма циліндровими масами та масами генератора має шість власних частот, які становлять 5100, 13700, 22000 об / хв тощо. Під час роботи дизельного двигуна зміна частоти сили збурення - сили інерції та сили від тиску повітря - пропорційна частоті обертання вала. Частота вимушених коливань, рівна швидкості обертання вала дизельного двигуна, називається основною частотою, тобто першою гармонікою. Ті, хто стимулює потужність дизеля, зазвичай складаються з декількох гармонік. Якщо частота будь-якої гармонічної складової збігається з однією з власних частот вала, виникає резонанс. Частота обертання резонансного вала називається критичною частотою. Дизельним двигунам заборонено працювати на критичних частотах, оскільки вони також будуть тремтіти, швидко зношуватися і пошкоджувати підшипники, а іноді спостерігатимуться переломи колінчастого вала та інші деталі. Щоб запобігти цим явищам, будь ласка, змініть розмір валу, масу маховика та його положення, збільшіть жорсткість валу та зменште масу поршневого вузла, щоб видалити робочий діапазон вала з критична частота [18].

Однак цього зазвичай недостатньо, і тоді використовуйте демпфер (демпфер) або звичайний віброізолятор для гасіння резонансної крутильної вібрації. Зазвичай вони встановлюються в кінці вала. Заслінка створює здатність протистояти крутильним вібраціям, послаблює її енергію та зменшує амплітуду кута повороту маси на резонансній частоті. Антивібраційний пристрій змінює власну частоту вала так, що вона не відповідає гармонічним компонентам крутного моменту збудження. Перехід товару з одного крайнього положення в інше крайнє положення, а потім повертається у початкове крайнє положення, яке називається повним похибкою, і вказана відстань товару проходить через цикл коливання часу. Відповідно до цього

принципу також встановлюється антивібраційний пристрій для маятнікового локомотива. Додаткове навантаження підвішується на периферії диска вала з обмеженою рухливістю по периферії диска вала, і його положення визначає частоту і амплітуду вільного коливання вала при обертанні. У разі рівномірного обертання осі (прискорення  $e = 0$ ) вантаж 3 залишається в середньому положенні. Якщо з якихось причин швидкість обертання вала починає збільшуватися ( $e > 0$ ), наближаючись до критичного значення, навантаження внаслідок інерції буде підтримувати первинну швидкість, нахилитись назад і запобігати скручуванню вала. Це змінює частоту його власних коливань. Отже, коливальна система не буде резонувати через зміну власної частоти коливань [18].

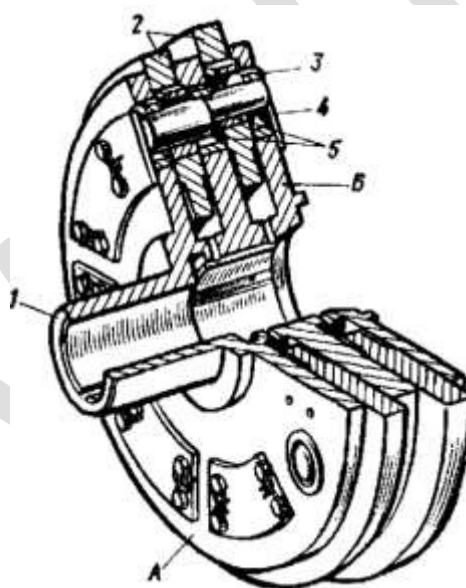


Рисунок 1.2- Антивібратор: 1- маточина; 2- груш; 3- втулка; 4- планка; 5- палець; А і Б крайні диски маточини.

Антивібратор. Для того, щоб протистояти крутильним вібраціям колінчастого вала, використовуйте динамічну інерційну заслінку коливань, заслінку в'язкого тертя або комбіновану заслінку вібрації, яка є комбінацією заслінки вібрації маятнікової та вузької заслінки тертя. На рисунку 1.2

представлений дизайн антивібраційного дизельного двигуна 10D100. Сталева втулка, натиснута на колінчастий вал дизельного двигуна, має втискні заглушки на всіх трьох дисках навколо отвору, і є зазор, коли вставляється палець. На двох рядах пальців також висять вісім проміжків того самого сегментованого навантаження. Пальцеві гільзи амортизатора складаються з чотирьох типів, тільки зовнішній діаметр відрізняється. Відносно власної частоти крутильних вібрацій колінчастого вала дизеля, діаметр пальця визначає параметри віброізолятора в певному порядку. Для того, щоб переконатися, що пальці правильно встановлені в отворах маточини на зовнішній циліндричній поверхні полюсних дисків маточин А і В, що відповідає рельєфному номеру на кожному отворі, що відповідає номеру пальця, який повинен стояти в отвір (типи). Відповідне число також плаває в кінці пальця. Торсионна вібрація колінчастого валу спричинить вібрацію навантаження в зазорі між пальцем і втулкою, що призведе до зміни власної частоти колінчастого вала і запобіжить перекиданню природної частоти з вимушеною частотою. Розглянемо випадок, коли колінчастий вал обертається зі швидкістю, меншою або вищою за критичну. Потім вантаж переміститься від центру до граничного положення в зазорі між пальцем і отвором під дією відцентрової сили. Однак, як тільки колінчастий вал почне працювати з критичною швидкістю (наприклад, 550 об / хв), буде створюватися пара навантажень. Підшипники, що придушують ці резонансні коливання, будуть ефективними, тобто: коли швидкість колінчастого вала збільшується, навантаження через інерцію буде прагнути підтримувати однакову швидкість, тому вона відстає під певним кутом і перешкоджає валу від скручування. І навпаки, коли швидкість вала зменшується, швидкість навантаження перевищує його швидкість обертання, тим самим запобігаючи скручуванню вала в іншому напрямку. Під час роботи через будь-які порушення можуть виникати крутильні коливання в робочому діапазоні швидкості. Виникнення крутильних вібрацій можна виявити, змінивши швидкість обертання вала дизельного двигуна. При наближенні до критичної частоти шум у дизельному

двигуні збільшується, помічаючи його нестабільну роботу. Торсійна вібрація проявиться лише з певною швидкістю. Коли ви збільшуєте або зменшуєте частоту, вони зупиняються. У міру збільшення подачі пального до одного або декількох циліндрів, крутильна вібрація значно зростає. Високий знос роликів антивібраційного пристрою може перешкоджати крутильній вібрації вала на працюючому дизельному двигуні 1 OD 100, що порушує збірку антивібраційного пристрою при заклинюванні навантаження. В'язкий амортизатор тертя (амортизатор) складається з оболонки, заповненої в'язким силіконовим маслом (рідкий каучук). Усередині корпусу є маховик, який направляється двома бічними кільцями. Функція заслінки заснована на поглинанні енергії вібрації, що створюється в результаті тертя між інерційною масою та в'язкою рідиною. Коли колінчастий вал дизельного двигуна обертається рівномірно, маховик також буде обертатися з рівномірною швидкістю через тертя між маховиком і рідиною. Якщо на валу дизельного двигуна виникає крутильна вібрація, енергія вібрації поглинеться через в'язке тертя. Комбінований віброізолятор складається з маятникового віброізолятора та в'язкого демпфера тертя, з'єднаних між собою. Порівняно із силіконовими демпферами, комбінований антивібраційний пристрій може зменшити крутильну напругу вібрації в 1,5 рази. Антивібраційні пристрої не використовуються на дизельних колінчатих валах, оскільки критична швидкість перевищує робочу швидкість колінчастого вала. Це досягається використанням алюмінієвих поршнів замість чавуну та збільшенням жорсткості колінчастого вала [18].

## **1.2 Поперечні (згинальні) коливання колінчастих валів**

Поперечними коливаннями називають коливання вигину, при яких основні компоненти переміщень (в даному випадку прогини) спрямовані



перпендикулярно до осі стержня. Напружений стан при поперечних коливаннях, очевидно, таке ж, як і при статичному вигині балок. Тому поперечні коливання інакше можна назвати згинальними коливаннями. До кінця 1930-х років із збільшенням крутного моменту колінчастий вал двигуна почав згинатися і поздовжньо вібрувати. На відміну від кручення, вони більш демпфовані, оскільки ці вібрації також зачіпають частини корпусу двигуна. Крім того, природна частота згинальних поздовжніх вібрацій вища за природну частоту крутильних вібрацій, оскільки опора вала може запобігти згинанню. У зв'язку з цим поздовжня вібрація коливань потрапляє в робочий діапазон двигуна, а отже, і в поле зору дослідників, пізніше крутильних. Якщо вивчення крутильних коливань і їх впливу на працездатність трансмісії було можливо за допомогою примітивної моделі, то оцінка міцності самого колінчастого вала вимагала більш складною. Тому на додаток до досліджень крутильних вібрацій було розроблено також другий метод дослідження згинання колінчастого вала [19]. Розглянемо коливання викликані розбіжністю осі обертання і центру мас при обертанні незбалансованих шестерень відбувається вигин обертається осі вала так звана прецесія вала. При збільшенні частоти обертання деформація збільшується досягаючи критичної величини при якій можливе руйнування, при подальшому збільшенні частоти обертання прецесія зменшується і при досить високій частоті обертання системи починає обертатися навколо своєї осі, таке явище називається – самоцентрування. Цей вид коливань виникає під дією тангенціальної і радіальної складових сил дії газів і сил інерції мас, що навантажують кривошипи колінчастого вала і викликають деформацію колін поперемінної розбіжності або зближення щік. Більше того, не зважаючи на велику кількість наукових праць, присвячених кутовим коливанням колінчастих валів, проблеми, пов'язані з дослідженнями саме поперечних коливань залишаються не до кінця вивченими з огляду на деякі суттєві причини. По-перше, колінчастий вал, на відміну від ротора турбомашини, має природну анізотропію своїх жорсткісних властивостей [15]. По-друге, маса

вала нерівномірно розподілена по його довжині, а лінія центрів мас є просоровою ламаною кривою, що унеможлиблює застосування аналітичних способів дослідження континуальних моделей. Крім того, на шийки колінчастого вала діє складна система нелінійних сил (демпфування, нелінійне тертя, циркуляційна сила), урахування яких становить надскладну проблему для сучасного наукового товариства. Також достатньо складним для вивчення є врахування сил внутрішнього тертя, що виникають між волокнами матеріалу вала при його прогинах. Більше того, робота вала на нерозрахункових або перехідних режимах супроводжується тертям та биттям шийок із втулками корпусу, що призводить до інтенсивного зношування останніх [16, 17]. Для запобігання цьому явищу варто проводити дослідження вимушених коливань колінчастого вала з урахуванням сил, що його спричиняють. Тому створення узагальненого підходу до розробки математичної моделі, що дозволяє уточнювати менш вивчені згинальні коливання колінчастого валу є актуальною проблемою сучасної динаміки ротора в галузях проектування поршневих двигунів внутрішнього згоряння [20] в автомобільній [21, 22], авіаційній [23], сільськогосподарській [24, 25], морській [26] та військовій промисловості [27] та поршневих компресорних установках високого тиску [28].

## 2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІЛЬНИХ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ВАЛА

### 2.1 Скінченноелементна модель

На основі статичного структурного аналізу моделі кінцевих елементів колінчастого вала визначаються переміщення валів  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$  [m] в площинах XZ та YZ для одиничних сил  $F_{ix}$  та  $F_{iy}$  [N]. Ці сили прикладені в  $j$ -й площині (рисунок 2.1), де  $i$  - номер площини корекції ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). В результаті квадратні матриці  $[\alpha]$ ,  $[\beta]$  відповідності розмірністю  $n \times n$  оцінюються за їх елементами [m / N]:

$$\alpha_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{F_{ix}}; \beta_{i,j} = \frac{y_{i,j}}{F_{iy}}. \quad (2.1)$$

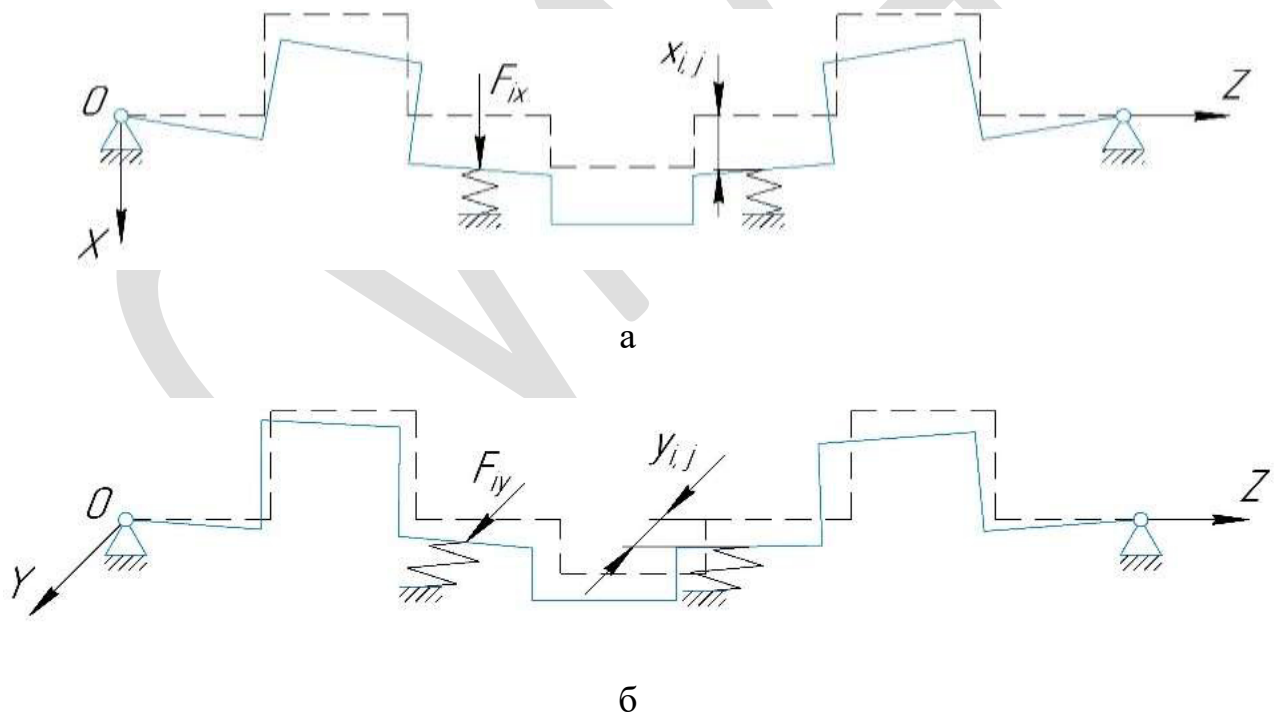


Рисунок 2.1- Схеми проектування статичного структурного аналізу для площин XZ (а) та YZ (б).

На відміну від існуючих методів параметричної ідентифікації динаміки ротора, формула (2.1) містить різні матриці відповідності для двох взаємно перпендикулярних напрямків  $X$  та  $Y$ . Цей факт обумовлений властивою природній анізотропією пружних сил колінчастого валу. На основі модального аналізу моделі кінцевих елементів колінчастого валу визначаються власні частоти вільних коливань  $\omega_k$  [рад / с] з відповідними формами режимів  $\{\zeta^{<k>}\}$  та  $\{\eta^{<k>}\}$ . Останні як вектори-стовпчики розмірності  $n \times 1$  включають безрозмірні переміщення  $\xi_i^{<k>}$  та  $\eta_i^{<k>}$  у напрямках двох взаємно перпендикулярних осей  $X$  та  $Y$  (рисунок 2.2).

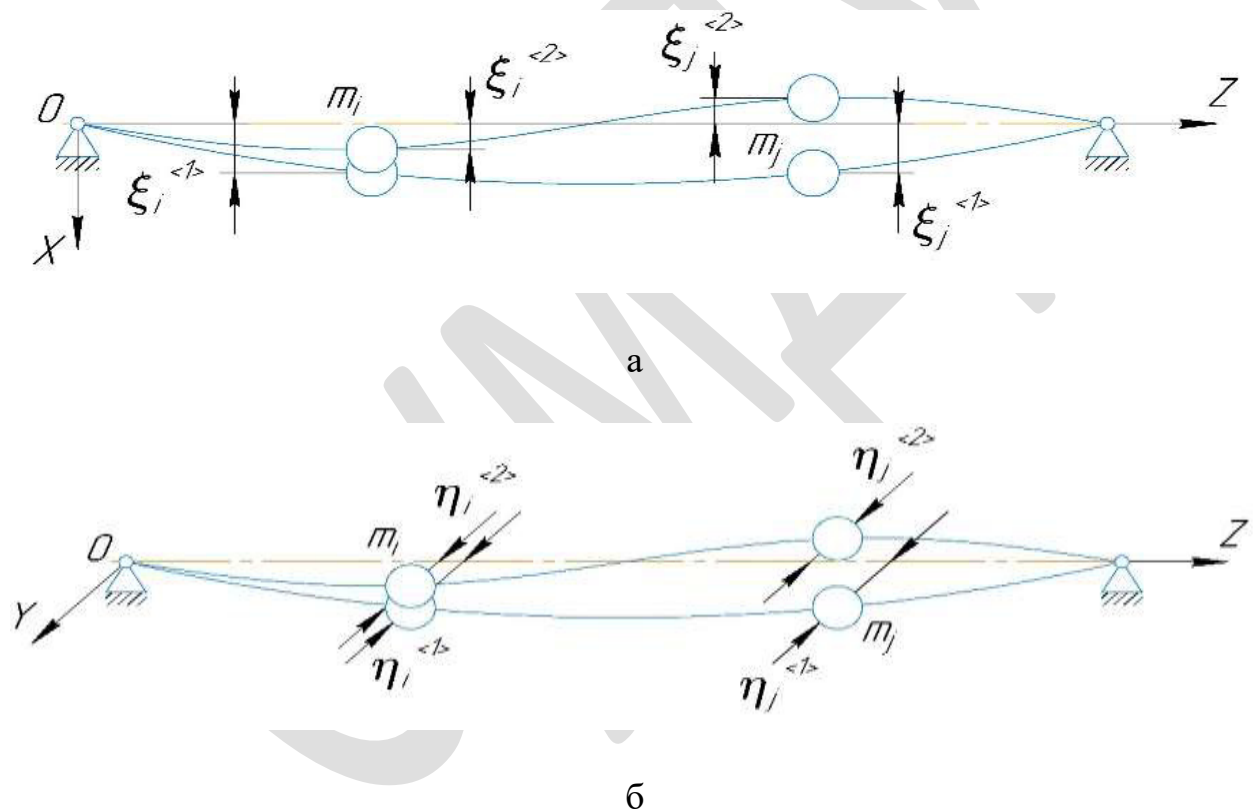


Рисунок 2.2- Розрахункові схеми модального аналізу для площин XZ (а) та YZ (б).

Слід зазначити, що необхідна кількість розглянутих частот повинна бути не менше  $2n$ . Цей факт також обумовлений анізотропією жорсткості колінчастого валу в площині XY.

Для зручності розрахунків необхідно провести нормування елементів стовпців-векторів за їх першими елементами:  $\xi_1^{<k>} = \eta_1^{<k>} = 1$ .

На основі отриманих раніше матриць та векторів стовпців для ідентифікації параметрів формуються локальні матриці  $[A^{<k>}]$ ,  $[B^{<k>}]$  та вектори стовпців  $\{X^{<k>}\}$ ,  $\{Y^{<k>}\}$  дискретної моделі n-маси. Числові значення елементів для цих матриць  $[m / N]$  та векторів стовпців  $[s^2]$  визначаються наступним чином:

$$A_{i,j}^{<k>} = \alpha_{i,j} \xi_i^{<k>}; B_{i,j}^{<k>} = \beta_{i,j} \eta_i^{<k>}; X_i^{<k>} = \frac{\xi_i^{<k>}}{\omega_i^2}; Y_i^{<k>} = \frac{\eta_i^{<k>}}{\omega_i^2}. \quad (2.2)$$

Фізичний зміст цих елементів полягає в наступному. Зокрема, кожен елемент матриць  $[A^{<k>}]$ ,  $[B^{<k>}]$  є множенням коефіцієнта відповідності та безрозмірного переміщення. Крім того, кожен коефіцієнт векторів стовпців  $X_i^{<k>}$  та  $Y_i^{<k>}$  є відношенням між розмірним переміщенням і власною частотою квадрата відповідної форми режиму.

Ці дані дозволяють формувати глобальні матриці та вектор-стовпці шляхом складання локальних:

$$[A_G] = stack([A^{<k>}]); [B_G] = stack(B^{<k>}); \{X_G\} = stack(X^{<k>}); \{Y_G\} = stack(Y^{<k>}). \quad (2.3)$$

Складання глобальних матриць  $[A_G]$ ,  $[B_G]$  та векторів стовпців  $\{X_G\}$ ,  $\{Y_G\}$  дозволяє отримати отриману всебічну матрицю  $[C]$  та вектор-стовпець  $\{Z\}$ :

$$[C] = stack([A_G], [B_G]); \{Z\} = stack(\{X\}, \{Y\}). \quad (2.4)$$

Фізичний зміст матриці  $[C]$  та стовпця-вектора  $\{Z\}$  такий. Кожен елемент матриці  $[C]$  як елемент матриць  $[A_G]$  або  $[B_G]$  є множенням коефіцієнта відповідності та безрозмірного переміщення. Кожен елемент стовпця-вектора  $\{Z\}$  як елемент векторів стовпців  $\{X_G\}$ , або  $\{Y_G\}$  є відношенням між розмірним переміщенням і власною частотою в квадраті. Їх розміри складають  $p \times n$  та  $p \times 1$  відповідно, де  $p$  - загальні номери рядків ( $p \geq 2n$ ).

## 2.2 Дискретно-масова модель

Модель дискретних мас коливань колінчастого вала може допомогти спроектувати поршневі компресорні установки високого тиску та двигуни внутрішнього згорання в автомобільній, повітряній, сільській, морській та військовій промисловості. Зокрема, дослідження буде застосовано до підприємств, що виробляють двигуни внутрішнього згорання, як дизельні, так і бензинові. Це може бути корисним при проектуванні та виготовленні колінчатих валів для двигунів та агрегатів різного призначення (наприклад, легкових та вантажних автомобілів, сільськогосподарської техніки, військової техніки, суднового дизеля, поршневих насосів та компресорів). Крім того, ці дослідження можуть бути корисними при ремонті колінчастих валів усіх відповідних вузлів, машин та обладнання.

Оцінювальні значення дискретних мас  $m_i$  [кг] є елементами стовпця-вектора  $n \times 1$ , який визначається наступним матричним рівнянням:

$$[C]\{m\} = \{Z\}. \quad (2.5)$$

часткових переміщень  $\alpha_{i,j}F_{xj}$  та  $\beta_i$ ,  $\beta_{i,j}F_{yj}$  для сил інерції Даламбера Примітно, що це матричне рівняння отримується за наступною послідовністю. Спочатку кожне зміщення  $x_i$  та  $y_i$  можна представити як суперпозицію  $F_{xj} = -m_j\ddot{x}_j$  та  $F_{yj} = -m_j\ddot{y}_j$ . На наступному етапі кожне зміщення подається відповідно до форми  $i$ -го режиму:  $x_i = |x_i|\sin\omega_i t$ ,  $y_i = |y_i|\sin\omega_i t$ . У цьому випадку, оскільки  $\frac{d^2}{dt^2}\sin\omega_i t = -\sin\omega_i t$ , амплітуди  $|x_i|$  та  $|y_i|$  можуть бути перезаписані як суперпозиції компонентів  $\alpha_{i,j}m_j|x_j|\omega_i^2$  та  $\alpha_{i,j}m_j|y_j|\omega_i^2$  відповідно. Нарешті, перетворення на безрозмірні переміщення  $\zeta_i$  та  $\eta_i$  дозволяє визначити дискретні маси  $m_i$  за рівнянням.

Оскільки  $p \geq n$ , це рівняння не може бути вирішене безпосередньо методом оберненої матриці. Його рішення слід отримати, використовуючи наступну формулу лінійної регресії:

$$\{m\} = ([C]^T [C])^{-1} [C]^T \{Z\}. \quad (2.6)$$

Через перерозподіл інерційних властивостей для початкової неперервної моделі дискретною математичною моделлю з  $n$ -масою це може бути невідповідністю алгебраїчної суми мас для моделі з дискретною масою порівняно із загальною масою  $m_0$  колінчастого вала. Відповідне відносне відхилення мас оцінюється наступним чином:

$$\varepsilon_m = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{m_0}. \quad (2.7)$$

В результаті ідентифікації параметрів дискретних мас будується математична модель дискретних мас вільних коливань ротора:

$$\begin{cases} x_i = -\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2}; \\ y_i = -\sum_{j=1}^n \beta_{i,j} m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2}. \end{cases} \quad (i, j = \overline{1, n}) \quad (2.8)$$

Це система  $2n$  диференціальних рівнянь динаміки ротора ( $t$  - час [с]), заснована на принципі Д'Аламбера [29]. Примітно, що права частина містить сили інерції для кожної  $j$ -ї дискретної маси.

Точність цієї дискретно-масової моделі оцінюється шляхом порівняння власних частот  $\Omega_k$  зі значеннями  $\omega_k$ , попередньо отриманими методом скінченних елементів. У цьому випадку вирішення системи (2.8) здійснюється наступним чином:

$$x_j = a_j \sin \Omega_x t; \quad y_j = b_j \sin \Omega_y t \quad (2.9)$$

Для ненульових значень амплітуд  $a_j$  та  $b_j$  дозволяє визначити власні частоти як  $2n$  корені наступних двох алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \det[\alpha_{i,j}m_j\Omega_x^2 - \delta_{i,j}] &= 0; \\ \det[\beta_{i,j}m_j\Omega_y^2 - \delta_{i,j}] &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

де  $\delta_{i,j}$  - символ Кронекера.

Власні частоти  $\Omega_x, \Omega_y$  утворюють результуючий вектор стовпця  $2n \times 1$  моделі дискретної маси:

$$\{\Omega\} = \text{stack}(\{\Omega_x\}, \{\Omega_y\}). \quad (2.11)$$

Як результат, відносна похибка параметричної ідентифікації для моделі дискретної маси кожною власною частотою така:

$$\varepsilon_{\omega}^{<k>} = \frac{\Omega_k - \omega_k}{\omega_k}. \quad (2.12)$$

### 2.3 Оцінювання параметрів двомасової моделі за власними частотами і формами коливань

Для окремого випадку вивчається динамічний стан колінчастого вала 3LD-1005020 для дизельного двигуна ММЗ-3LD (рисунок 2.3).

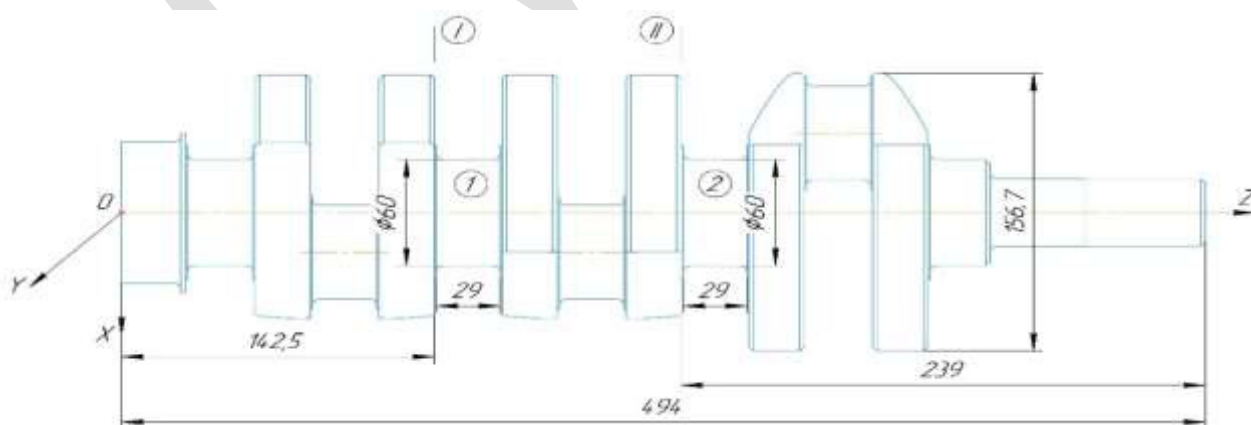


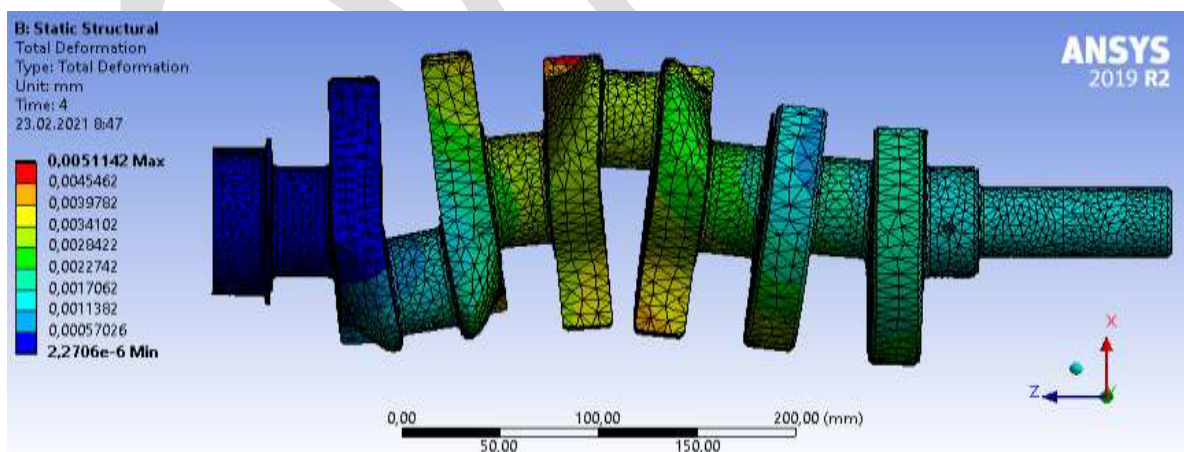
Рисунок 2.3- Схема конструкції колінчастого вала 3LD-1005020: 1, 2 - номери цапф; I, II - числа площин корекції.



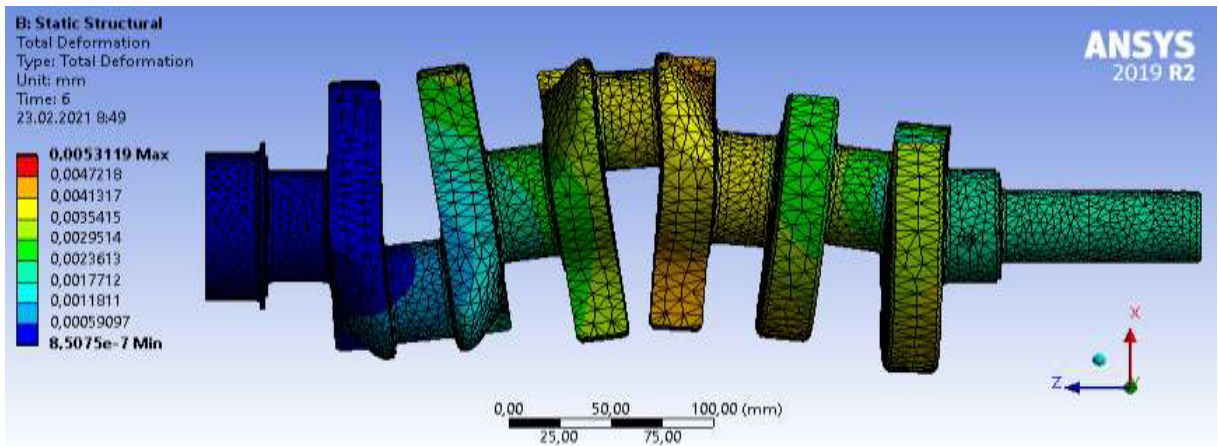
Для забезпечення чисельних розрахунків були розглянуті такі початкові параметри: матеріал колінчастого вала - сталь DIN 40NiCrMo; маса вала  $m_0 = 23,3$  [кг]; діапазон робочих частот - 800–4000 [об / хв]; кількість площин корекції  $n = 2$ .

Під час моделювання в якості опорних поверхонь були обрані зовнішні колодки головного підшипникового вала. Вони використовуються як технологічні основи для шліфування шатунних шатунів, коли можливі максимальні деформації та вібрації. У цьому випадку граничними умовами є фіксація опорних циліндричних поверхонь у напрямках X та Y та обмеження обертань навколо цих осей. Зчеплення колінчастого вала виконано з використанням  $6 \cdot 10^5$  кінцевих чотиригранних елементів з максимальним розміром 5 мм. Загальна кількість приміток -  $1 \cdot 10^6$ . Оскільки щільність сітки для геометричних звужень повинна бути ущільнена для отримання надійних результатів моделювання, розподіл сітки навмисно нерівномірний.

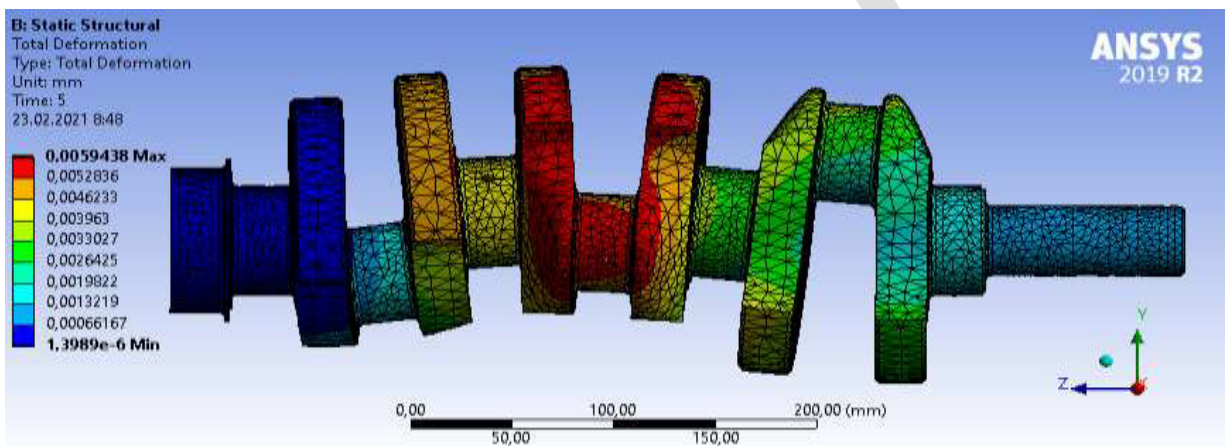
Результати статичного структурного аналізу представлені на рисунку 2.4.



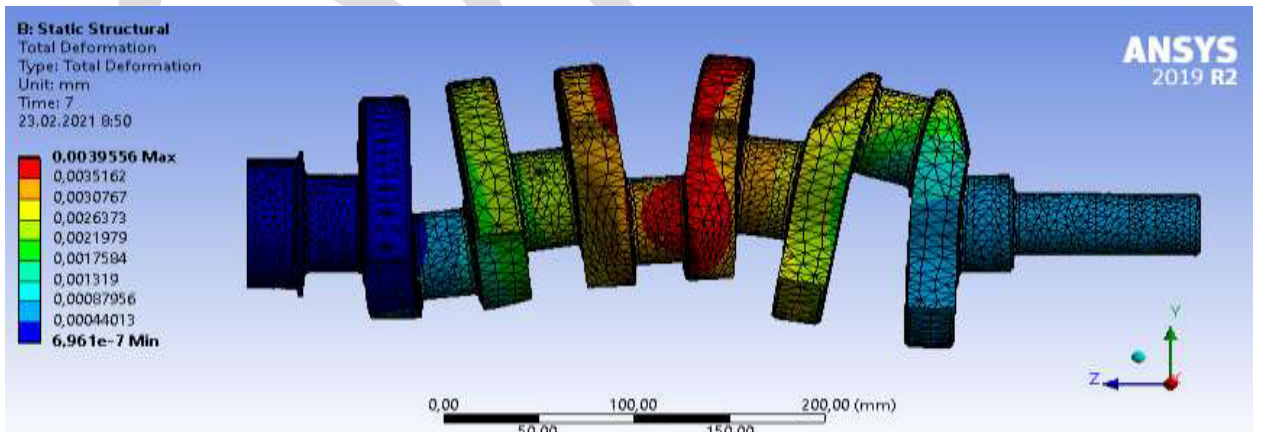
a



б



в



г

Рисунок 2.4- Результати статичного структурного аналізу для одиниці сил діючі на 1-й (а, б) та 2-й (в, г) цапфи в площинах XZ (а, б) та YZ (в, г).

Результати чисельного моделювання статичного структурного аналізу зведені в таблицю 2.1.

Таблиця 2.1- Результати статичного структурного аналізу для різних номерів цапф підшипників.

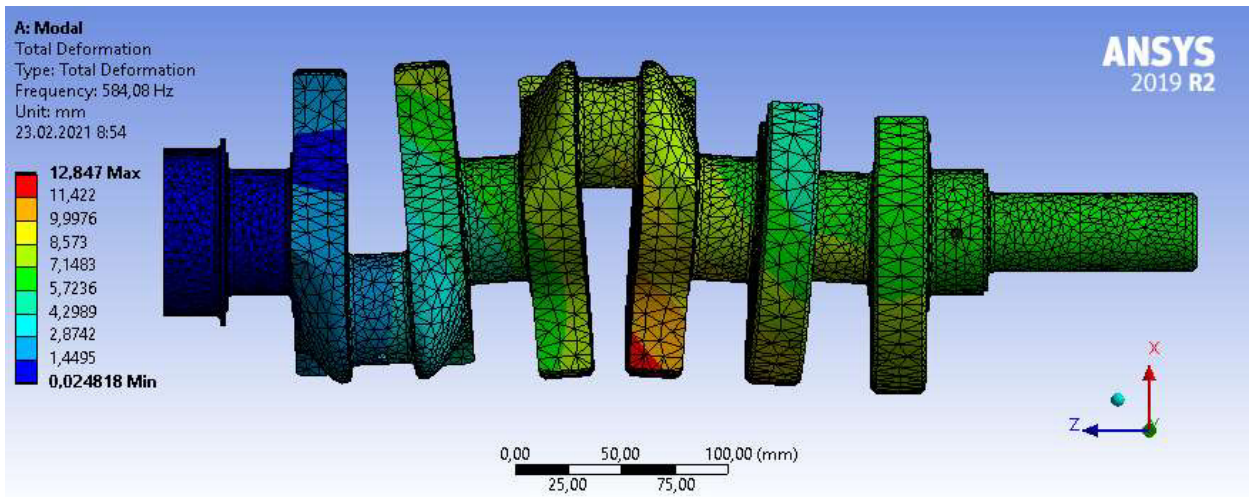
Площина	Прикладена сила, кН		Переміщення в площині, мкм			
			XZ		YZ	
	1	2	1	2	1	2
XZ	1	–	3.96	2.86	–	–
YZ	–	1	2.79	4.22	–	–
XZ	1	–	–	–	4.53	3.48
YZ	–	1	–	–	2.63	3.34

Ці дані дозволяють визначити матриці відповідності (1):

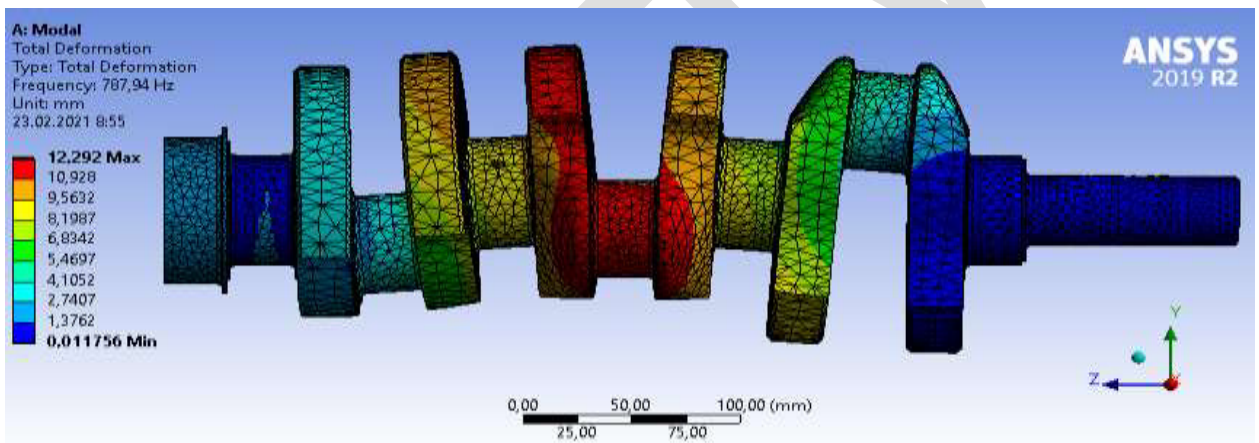
$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 3.96 & 2.86 \\ 2.79 & 4.22 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}; [\beta] = \begin{bmatrix} 4.53 & 3.48 \\ 2.63 & 3.34 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Як видно з елементів цих матриць, досліджуваний колінчастий вал має явні анізотропні властивості щодо його жорсткості на вигин.

Результати модального аналізу представлені на рисунку 2.5.



a



б

Рисунок 2.5- Результати модального аналізу власних частот 584 Гц (а) та 788 Гц (б).

Результати чисельного моделювання модального аналізу зведені в таблицю 2.2.

Таблиця 2.2- Результати модального аналізу для різних номерів цапф підшипників.

Власна частота, Гц	Переміщення в площині			
	XZ		YZ	
	1	2	1	2
584	1	1.42	–	–
788	–	–	1	0.96
1145	1	–1.01	1	–0.90
1477	1	–1.18	1	–1.04

Ідентифікація параметрів математичної моделі з дискретною масою

Ці дані дозволяють визначити нормовані вектори стовпців власних форм вільних коливань

$$\{\xi^{<1>}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.42 \end{Bmatrix}; \{\eta^{<2>}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.96 \end{Bmatrix}; \{\xi^{<3>}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.01 \end{Bmatrix}; \{\eta^{<3>}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.90 \end{Bmatrix};$$

$$\{\xi^{<4>}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.18 \end{Bmatrix}; \{\eta^{<4>}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.04 \end{Bmatrix}$$

та локальні матриці та вектори-стовпці (2):

$$[A^{<1>}] = \begin{bmatrix} 3.96 & 4.10 \\ 2.79 & 5.98 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}; \{X^{<1>}\} = \begin{Bmatrix} 7.43 \\ 1.05 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-8};$$

$$[B^{<2>}] = \begin{bmatrix} 4.53 & 3.33 \\ 2.63 & 3.19 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}; \{Y^{<2>}\} = \begin{Bmatrix} 4.08 \\ 3.90 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-8};$$

$$[A^{<3>}] = \begin{bmatrix} 3.96 & -2.90 \\ 2.79 & -4.22 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}; \{X^{<3>}\} = \begin{Bmatrix} 1.93 \\ -1.93 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-8};$$

$$[B^{<3>}] = \begin{bmatrix} 4.53 & -3.13 \\ 2.63 & -3.00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}; \{Y^{<3>}\} = \begin{Bmatrix} 1.93 \\ -1.74 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-8};$$

$$[A^{<4>}] = \begin{bmatrix} 3.96 & -3.42 \\ 2.79 & -4.99 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}; \{X^{<4>}\} = \begin{Bmatrix} 1.16 \\ -1.37 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-8};$$

$$[B^{<4>}] = \begin{bmatrix} 4.53 & -3.60 \\ 2.63 & -3.46 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}; \{Y^{<4>}\} = \begin{Bmatrix} 1.16 \\ -1.20 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-8}.$$

Цей набір даних дозволяє отримати глобальну матрицю жорсткості  $[C_G]$  і вектор стовпця  $[Z_G]$  (3), а також повну матрицю  $[C]$  і вектор стовпця  $\{Z\}$ . В результаті на основі формули (2.6). Можна оцінити такий стовпець-вектор дискретних мас:

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} 8.79 \\ 8.91 \end{Bmatrix}.$$

У цьому випадку загальна відносна похибка оцінки дискретних мас (2.7)  $\varepsilon_m = 0,24$ . Це значення можна зменшити за допомогою нелінійної ідентифікації параметрів [30–34] або штучних нейронних мереж [34, 35].

Застосування формул (2.10) та (2.11) дозволяє оцінити результуючий вектор стовпця власних частот для моделі з дискретною масою. Зокрема, перші дві власні частоти дорівнюють  $\Omega_1 = 620$  [Гц] і  $\Omega_2 = 640$  [Гц].

Оскільки робоча швидкість колінчастого вала не перевищує 1-ї власної частоти, існує необхідність оцінити відносну похибку ідентифікації параметрів моделі дискретної маси (2.12), яка дорівнює  $\varepsilon_{\omega}^{<1>} = 0,06$ . Таким чином, похибка оцінки 1-ї власної частоти становить близько 6%, що є прийнятним для двомасової динамічної моделі, оскільки вона менша за похибки в обчисленні параметрів  $c_0$ ,  $b_0$  тощо на основі існуючих методів. Також можна показати, що відносна похибка у визначенні 2-ї власної частоти дискретної двомасової моделі дорівнює 18%, оскільки ротор працює на частотах, менших за 1-у власну частоту. Отже, оскільки максимальна робоча частота менше 1-ї власної частоти, немає необхідності краще відповідати цим власним частотам.

## 3 УРАХУВАННЯ СИЛ РІЗНОЇ ПРИРОДИ, ЩО ДІЮТЬ НА ЕЛЕМЕНТИ ВАЛА

### 3.1 Сила гідродинамічної жорсткості

Дія гідродинамічної сили. Після відокремлення затвора від сідла клапана ( $h > 0$ ) з'явиться на місці дроселювання рідини гідродинамічна сила  $P$ , яка прагне закрити клапан, тобто напрямок дії такий же, як сила пружини. Цю силу можна розглядати як додаткову гідравлічну пружину зі змінною жорсткістю. Потужність рідини - це сила реакції рідини, що надходить до засувки клапана, і її величина може істотно змінити баланс сил, що діють на затвор клапана. У деяких випадках сила пружності в цьому рівноважному стані становить менше 50% від загальної сили, що діє на затвор. Дослідження показали, що коли кут конусності затвора становить  $140^\circ$ , загальний напрямок потоку майже такий самий, як у затвора. Отже, кут може дорівнювати половині кута верхньої частини конуса затвора. Оскільки  $P$  гідр. збільшується зі збільшенням витрати, а отже, збільшується з підйомом затвора клапана, в практиці часто вводять по аналогії з поняттям жорсткості пружини  $C$  поняття гідродинамічної жорсткості. Досліди показують, що  $C$  гідр. так само, як і жорсткість пружини  $C$ , змінюється в широкому діапазоні витрат пропорційно відкриттю затвора, і практично не залежить від перепаду тиску на затворі клапана [36].

Гідродинамічна сила жорсткості в масляному шарі в циліндричному зазорі між цапфою вала і втулкою корпусу:

$$F_{xj}^{<3>} = -c(x_j, y_j)x_j; F_{yj}^{<3>} = -c(x_j, y_j)y_j, \quad (3.1)$$

де  $c$  - коефіцієнт жорсткості [Н / м], визначений за такою формулою:

$$c(x_j, y_j) = c_0 \left( 1 + \frac{3}{4} \gamma^2 \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} \right); \quad (3.2)$$

$c_0$  - коефіцієнт жорсткості для випадку нульового ексцентриситету [Н / м];

$\gamma$  - безрозмірні характеристики поверхні зазору.

### 3.2 Сила демпфування

У будь-якій системі, яка вібрує через еластичність її компонентів, внаслідок внутрішнього тертя матеріалів цих компонентів або тертя, що штучно створюється спеціальними демпфуючими пристроями, механічна енергія буде розсіюватися. Отриманий ефект демпфування називається демпфуванням, а сила, що викликає цей ефект, називається демпфуючою силою. При відносно низькій швидкості деформації опір затухання  $R_r$  приблизно пропорційний відношій швидкості  $dx / dt$  точки в середовищі, яка чинить опір руху:

$$R_r = \beta_r \cdot dx/dt \quad (3.3)$$

де  $\beta_r$  - коефіцієнт демпфування, Нс/м.

Велике навантаження призведе до того, що гідравлічне масло (масло) в традиційній гідравлічній системі амортизаторів спіниться, а при високих температурах призведе до 35% втрати сили демпфування. Під час роботи може виникати піна. Частина демпфуючої сили амортизатора може бути втрачена.

Сила демпфування масляного шару ( $l = 2$ ):

$$F_{xj}^{<2>} = -b(x_j, y_j) \frac{dx_j}{dt}; \quad F_{yj}^{<2>} = -b(x_j, y_j) \frac{dy_j}{dt}, \quad (3.4)$$

де  $b$  - коефіцієнт демпфування [Н·с / м]:



$$b(x_j, y_j) = b_0 \left( 1 + \frac{3x_j^2 + y_j^2}{2h_0^2} \right); \quad (3.5)$$

$b_0$  - коефіцієнт демпфування для випадку нульового ексцентриситету

[Н • с / м];

$h_0$  - середній радіальний зазор між цапфою вала і втулкою корпусу [м].

### 3.3 Нелінійна сила тертя

Коли тверде тіло рухається в рідкому або газовому середовищі, виникає в'язке тертя. У ньютонівській (лінійній) моделі сила в'язкого тертя пропорційна відносній швидкості руху об'єкта  $F_B v = cv$ , де  $c$  - коефіцієнт в'язкості, залежно від рідини або газу. Коли дві тверді речовини стикаються без шару рідини або газу, виникає сухе тертя. Перше дослідження закону тертя було проведено Леонардо да Вінчі: він виявив, що коли один предмет контактує з поверхнею іншого, сила тертя, яка створюється, обернено пропорційна напрямку руху. Вона пропорційна натисканню сили. І це не залежить від площі контакту. На відміну від зв'язку ньютонівського в'язкого тертя, закон сухого тертя є нелінійним. Основною нелінійністю «сухого» тертя є зазор при  $v = 0$ , тобто коли відносна швидкість дорівнює нулю, коефіцієнт тертя приймає будь-яке значення від нуля до максимального значення. Відповідно до закону Кулона, коефіцієнт тертя "в спокою" (коли відносна швидкість дорівнює 0) більше коефіцієнта тертя "ковзання"  $\mu_d$ . Подальші дослідження показали, що при низьких відносних швидкостях коефіцієнт тертя зменшуватиметься відносно плавно із збільшенням швидкості, а потім може залишатися незмінним у межах певних діапазонів швидкості, тоді як при більш високих відносних швидкостях.

Нелінійна сила тертя:

$$F_{x_j}^{<4>} = -f(x_j^2 + y_j^2)x_j; F_{y_j}^{<4>} = -f(x_j^2 + y_j^2)y_j, \quad (3.6)$$

де  $f$  - коефіцієнт нелінійного тертя [Н /м<sup>3</sup> ].

### 3.4 Внутрішня сила в'язкого тертя

У цьому випадку існує опір руху, пропорційний швидкості руху. Прикладом системи, що працює під в'язким тертям, є гідравлічний амортизатор, який створює стійкість до руху поршня, що залежить не від руху (що є типовим представником пружного з'єднання), а від швидкості та його пропорція першого етапу. Такі пристрої використовуються, наприклад, при конструкції автомобільних підвісок. Гідравлічний амортизатор складається з одного або декількох циліндрів з поршнями або порожнини, в якій робоче колесо може обертатися. Циліндр і камера заповнені демпфуючою рідиною. Коли поршень або робоче колесо рухаються, рідина змушена текти через калібрований отвір. Це створює стійкість, яка близька до липкості в природі. Сила, що діє на амортизатор, протилежна напрямку в'язкої реакції амортизатора на вібруюче тіло.

Експеримент Ньютона виявив, що коли одна з двох паралельних площин заповнена рідиною, коли одна з двох паралельних площин ковзає відносно іншої, в'язке тертя запобігає ковзанню. Отже, коли верхня пластина площею  $S$  рухається зі швидкістю  $v$  щодо нижньої пластини, буде створюватися сила в'язкого тертя, яка дорівнює і дорівнює напрямку руху. Ця сила пропорційна площі  $S$  і зміні швидкості на одиницю довжини в поперечному напрямку (градієнт швидкості, перпендикулярний напрямку руху). Масштабний коефіцієнт  $\eta$  називається динамічною в'язкістю. Чисельно вона дорівнює силі в'язкого тертя між шарами в області  $S = 1$  з градієнтом швидкості  $= 1$  с<sup>-1</sup>.

Одиниця динамічного коефіцієнта в'язкості:  $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$ . Коефіцієнт в'язкості рідини  $\eta$  визначається експериментально, наприклад, шляхом її витрати з трубки певного розміру. Досвід показав, що в'язкість рідин зменшується при нагріванні, тоді як в'язкість газів зростає при нагріванні [37].

Внутрішня сила в'язкого тертя:

$$F_{x_j}^{<6>} = -\zeta \left( \frac{dx_j}{dt} + \omega_0 y_j \right); F_{y_j}^{<6>} = -\zeta \left( \frac{dy_j}{dt} - \omega_0 x_j \right), \quad (3.7)$$

де  $\zeta$  - коефіцієнт внутрішнього в'язкого тертя  $[\text{H} \cdot \text{с} / \text{м}]$ .

### 3.5 Сила можливої контактної взаємодії між ротором і статором

У перехідних режимах колінвал може контактувати зі статором. Це явище призводить до збільшення зносу як шахти вала, так і втулок корпусу. У цьому випадку слід враховувати силу контактної взаємодії:

$$F_{x_j}^{<7>} = -c_s \left( 1 - \frac{h_0}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} \right) (x_j - \mu y_j) \text{sign} \left( \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} - 1 \right);$$

$$F_{y_j}^{<7>} = -c_s \left( 1 - \frac{h_0}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} \right) (y_j + \mu x_j) \text{sign} \left( \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} - 1 \right), \quad (3.8)$$

де  $c_s$  - коефіцієнт жорсткості контакту  $[\text{H} / \text{м}]$ ;  $\mu$  - коефіцієнт тертя.

## 4 УТОЧНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ КОЛІНЧАСТОГО ВАЛА

### 4.1 Загальний випадок

Запропонований вище параметр ідентифікації дискретних мас дозволяє отримати математичну модель дискретних мас вимушених коливань колінчастого вала як таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \left( -m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{l=1}^s F_{xj}^{<l>} \right); \\ y_i = \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \left( -m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} + \sum_{l=1}^s F_{yj}^{<l>} \right); \end{cases} \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (4.1)$$

Ця модель спочатку містить зменшені сили пружності (ліва частина) та сили інерції (перші компоненти правої частини). Крім того, ця система включає s додаткові компоненти, що відповідають за лінійні та нелінійні сили різної природи [38], що виникають у зонах шахтних стволів (Рис. 4.1).

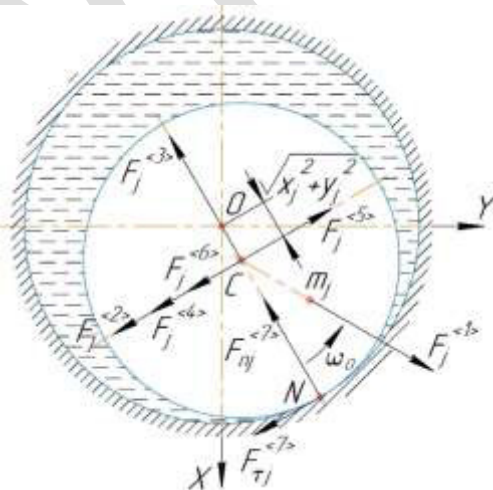


Рисунок 4.1- Сили, що діють на колінчастий вал: О, С - геометричні центри втулок та колодки.

Відцентрова сила інерції системи залишкових дисбалансів  $D_j$  [kg·m]:

$$F_{x_j}^{<1>} = D_j \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_j); F_{y_j}^{<1>} = D_j \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_j), \quad (4.2)$$

де  $\omega_0$  - робоча швидкість [рад / с];  $\varphi_i$  - початкова фаза [рад].

Сила демпфування масляного шару ( $l = 2$ ):

$$F_{x_j}^{<2>} = -b(x_j, y_j) \frac{dx_j}{dt}; F_{y_j}^{<2>} = -b(x_j, y_j) \frac{dy_j}{dt}, \quad (4.3)$$

де  $b$  - коефіцієнт демпфування [Н·с / м]:

$$b(x_j, y_j) = b_0 \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} \right); \quad (4.4)$$

$b_0$  - коефіцієнт демпфування для випадку нульового ексцентриситету [Н·с / м];  $h_0$  - середній радіальний зазор між цапфою вала і втулкою корпусу [м].

Гідродинамічна сила жорсткості в масляному шарі в циліндричному зазорі між цапфою вала і втулкою корпусу:

$$F_{x_j}^{<3>} = -c(x_j, y_j)x_j; F_{y_j}^{<3>} = -c(x_j, y_j)y_j, \quad (4.5)$$

де  $c$  - коефіцієнт жорсткості [Н / м]:

$$c(x_j, y_j) = c_0 \left( 1 + \frac{3}{4} \gamma^2 \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} \right); \quad (4.6)$$

$c_0$  - коефіцієнт жорсткості для випадку нульового ексцентриситету [Н / м];  $\gamma$  - безрозмірні характеристики поверхні зазору.

Нелінійна сила тертя:

$$F_{x_j}^{<4>} = -f(x_j^2 + y_j^2)x_j; \quad F_{y_j}^{<4>} = -f(x_j^2 + y_j^2)y_j, \quad (4.7)$$

де  $f$  - коефіцієнт нелінійного тертя [Н / м<sup>3</sup>].

Циркуляційна сила, що впливає на стабільність прецесії ротора:

$$F_{x_j}^{<5>} = -q(x_j, y_j)y_j; \quad F_{y_j}^{<5>} = q(x_j, y_j)x_j, \quad (4.8)$$

де  $q$  - коефіцієнт циркуляційної сили [Н / м]:

$$q(x_j, y_j) = \frac{1}{2} b(x_j, y_j) \omega_0. \quad (4.9)$$

Внутрішня сила в'язкого тертя:

$$F_{x_j}^{<6>} = -\zeta \left( \frac{dx_j}{dt} + \omega_0 y_j \right); \quad F_{y_j}^{<6>} = -\zeta \left( \frac{dy_j}{dt} - \omega_0 x_j \right), \quad (4.10)$$

де  $\zeta$  - коефіцієнт внутрішнього в'язкого тертя [Н • с / м].

У перехідних режимах колінвал може контактувати зі статором. Це явище призводить до збільшення зносу як шахти вала, так і втулок корпусу. У цьому випадку слід враховувати силу контактної взаємодії [39]:

$$\begin{aligned}
F_{x_j}^{<7>} &= -c_s \left( 1 - \frac{h_0}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} \right) (x_j - \mu y_j) \operatorname{sign} \left( \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} - 1 \right); \\
F_{y_j}^{<7>} &= -c_s \left( 1 - \frac{h_0}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} \right) (y_j + \mu x_j) \operatorname{sign} \left( \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} - 1 \right),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

де  $c_s$  - коефіцієнт жорсткості контакту [Н / м];  $\mu$  - коефіцієнт тертя.

Ця сила має нормальну складову  $F_{n_j}^{<7>}$  (нормальну силу реакції) і дотичну складову  $F_{\tau_j}^{<7>}$  (силу тертя).

Примітно, що до цього рівняння додана функція "знак" для можливості врахування або не врахування цієї сили в залежності від прогину вала у порівнянні із середнім радіальним зазором. Важливо зазначити, що поєднання вищезазначених сил, що виникають в масляному шарі між втулками корпусу та колодками вала, є нелінійними. Більше того, вони додають перехресні компоненти до системи рівнянь (4.1). В результаті врахування виразів (4.2) – (4.11) дозволяє отримати отриману систему нелінійних диференціальних рівнянь, що описують поперечні коливання колінчастого вала:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \left[ m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} + b_0 \left( 1 + \frac{3 x_j^2 + y_j^2}{2 h_0^2} \right) \left( \frac{dx_j}{dt} + \frac{1}{2} \omega_0 y_j \right) + c_0 \left( 1 + \frac{3}{4} \gamma^2 \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} \right) x_j + \right. \\
&+ \zeta \left( \frac{dx_j}{dt} + \omega_0 y_j \right) + f(x_j^2 + y_j^2) x_j + c_s \left( 1 - \frac{h_0}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} \right) (x_j - \mu y_j) \operatorname{sign} \left( \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} - 1 \right) \left. \right] + x_i = \\
&= \omega_0^2 \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} [D_j \sin(\omega_0 t + \varphi_j) + F_{x_j}^{<*>}]; \\
&\sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \left[ m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} + b_0 \left( 1 + \frac{3 x_j^2 + y_j^2}{2 h_0^2} \right) \left( \frac{dy_j}{dt} - \frac{1}{2} \omega_0 x_j \right) + c_0 \left( 1 + \frac{3}{4} \gamma^2 \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} \right) y_j - \right. \\
&- \zeta \left( \frac{dy_j}{dt} - \omega_0 x_j \right) - f(x_j^2 + y_j^2) y_j + c_s \left( 1 - \frac{h_0}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} \right) (y_j + \mu x_j) \operatorname{sign} \left( \frac{x_j^2 + y_j^2}{h_0^2} - 1 \right) \left. \right] + y_i = \\
&= \omega_0^2 \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} [D_j \cos(\omega_0 t + \varphi_j) + F_{y_j}^{<*>}],
\end{aligned} \tag{4.12}$$

де  $F_{x_j}^{<*>}$ ,  $F_{y_j}^{<*>}$  - X та Y компоненти інших сил не враховувались у рівняннях (14) - (23).

Надійність запропонованої моделі може бути підтверджена розглядом малих коливань колінчастого вала ( $x_j^2 + y_j^2 \ll h_0^2$ ). У цьому випадку нещодавне рівняння значно спрощується шляхом зведення до наступної лінеаризованої форми:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \left[ m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} + (b_0 + \zeta) \frac{dx_j}{dt} + \frac{1}{2} (b_0 + 2\zeta) \omega_0 y_j + c_0 x_j \right] + x_i = \\ \quad = \omega_0^2 \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} D_j \sin(\omega_0 t + \varphi_j); \\ \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \left[ m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} + (b_0 - \zeta) \frac{dy_j}{dt} - \frac{1}{2} (b_0 - 2\zeta) \omega_0 x_j + c_0 y_j \right] + y_i = \\ \quad = \omega_0^2 \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} D_j \cos(\omega_0 t + \varphi_j). \end{cases} \quad (4.13)$$

Примітно, що лінеаризацію можна здійснити за допомогою методу малих збурень для компонентів переміщень  $x_i$  та  $y_i$ . При цьому  $x_i = x_{i0} + \delta x_i$ ,  $y_i = y_{i0} + \delta y_i$ , де  $x_{i0}$ ,  $y_{i0}$  - початкові переміщення, а  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$  - їх пертурбації.

Зокрема, для одномасової моделі ( $n = 1$ ) та відсутності внутрішнього тертя ( $\zeta = 0$ ) ця система зводиться до одномасової моделі:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} + b_0 \frac{dx}{dt} + (c_x + c_0)x + q_0 y = D \omega_0^2 \sin \omega_0 t; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} + b_0 \frac{dy}{dt} + (c_y + c_0)y - q_0 x = D \omega_0^2 \cos \omega_0 t, \end{cases} \quad (4.14)$$

де  $c_x = 1/\alpha^2$ ,  $c_y = 1/\beta^2$  - осьові коефіцієнти жорсткості на вигин анізотропного колінчастого вала [Н / м]. У рівняннях (4.13) - (4.14) для спрощення позначень видалено знак варіації "δ".

Цей факт доводить надійність розробленої узагальненої моделі дискретних мас (4.12).



Таким чином, запропонована математична модель дозволяє розглядати як багатомасовий приклад, так і нелінійні компоненти сил, що виникають в шарі масла між шахтами вала і втулками корпусу.

## 4.2 Окремі випадки

Для окремого конкретного випадку було розглянуто такі значення параметрів:

максимальна робоча частота  $\omega_0 = 419$  рад / с (4000 об / хв);

довжина валу 0,496 м;

середній радіальний зазор  $h_0 = 0.25 \cdot 10^{-3}$  м;

коефіцієнт жорсткості  $h_0 = 0.25 \cdot 10^{-3}$  Н / м;

коефіцієнт демпфування  $b_0 = 0.25 \cdot 10^{-3}$  Н · с / м;

безрозмірні характеристики  $\gamma = 0,5$ ;

жорсткість контакту  $c_s = 1 \cdot 10^6$  Н / м;

коефіцієнт тертя  $\mu = 0,12$ .

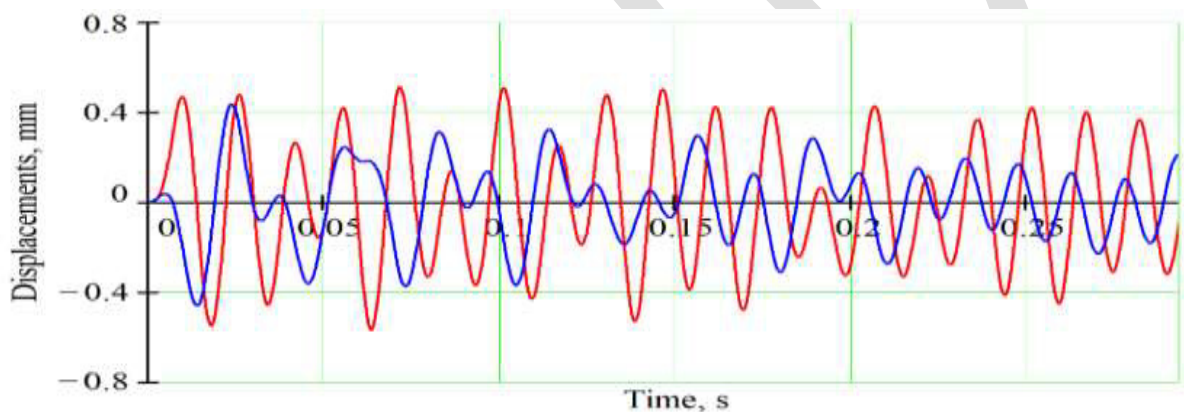
У разі контакту між ротором і статором нелінійним тертям можна знехтувати порівняно із силою контакту. Отже, коефіцієнт  $f = 0$ . Крім того, внутрішню в'язку силу не можна враховувати ( $\zeta = 0$ ), оскільки вона впливає на початкове статичне зміщення.

Використовуючи дані, згадані вище, дискретні маси  $m_1 = 8,79$  кг і  $m_2 = 8,91$  кг. Коефіцієнти анізотропної відповідності такі:  $\alpha_{11} = 3.96 \cdot 10^{-6}$  м / Н,  $\alpha_{12} = 2.86 \cdot 10^{-6}$  м / Н,  $\alpha_{21} = 2.79 \cdot 10^{-6}$  м / Н і  $\alpha_{22} = 4.22 \cdot 10^{-6}$  м / Н;  $\beta_{11} = 4.53 \cdot 10^{-6}$  м / Н,  $\beta_{12} = 3.48 \cdot 10^{-6}$  м / Н,  $\beta_{21} = 2.63 \cdot 10^{-6}$  м / Н та  $\beta_{22} = 3.34 \cdot 10^{-6}$  м / Н.

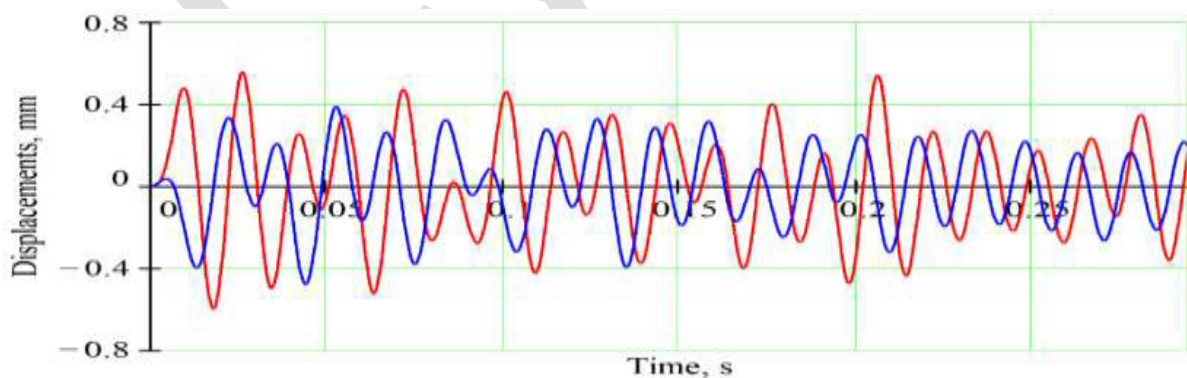
Відповідно до вимог до якості ваги, передбачених ISO 1940-1: 2003, клас якості балансування є “G100”, а допустимий залишковий дисбаланс дорівнює  $e_{per} = 2.25 \cdot 10^{-4}$  кг · м / кг. У цьому випадку допустимі залишкові дисбаланси такі:  $D_1 = e_{per} \cdot m_1 = 1.98 \cdot 10^{-4}$  (кг · м) і  $D_2 = e_{per} \cdot m_2 = 2.01 \cdot 10^{-4}$  (кг · м).

Чисельний розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь 16-го порядку реалізується за допомогою алгоритму Булірша-Стоера [40]. Для цього прикладу початкові значення переміщень і складових швидкості дорівнюють нулю:  $x_{1,2}(0) = y_{1,2}(0) = 0$ , і  $\dot{x}_{1,2}(0) = \dot{y}_{1,2}(0) = 0$ .

В результаті чисельного розрахунку були отримані часові характеристики (рисунок 4.2) та орбіти колінчастого вала (рисунок 4.3).



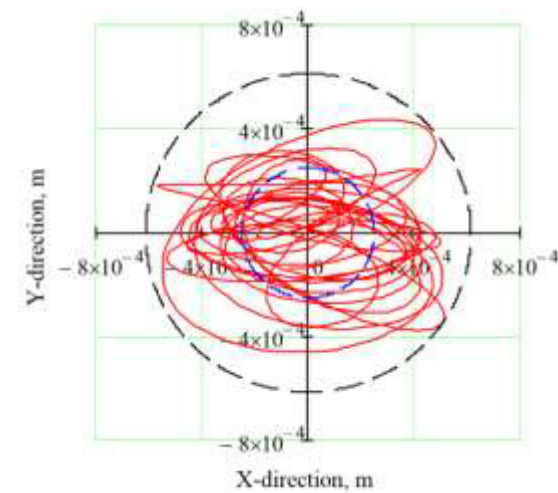
а



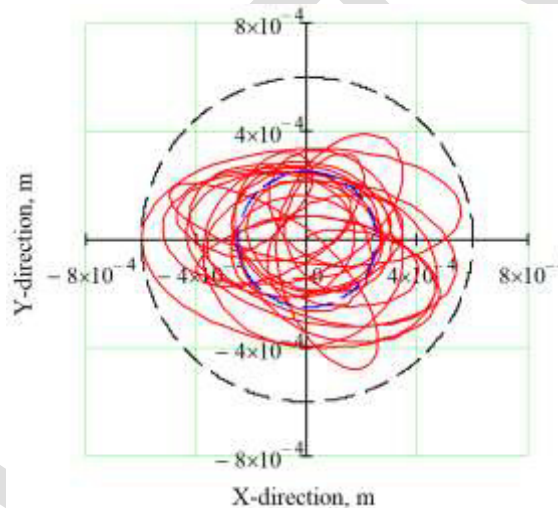
б

Рисунок 4.2- Характеристики часу для коливань 1-го (а) та 2-го (б) валів

у напрямках X (позначено червоним) та Y (позначено синім кольором).



а



б

Рисунок 4.3- Орбіти колінчастих валів 1-го (а) та 2-го (б)

На рисунках 4.2–4.3 видно, що максимальне значення обчисленої амплітуди перевищує радіальний зазор між ротором і статором. Це означає, що інтенсивне зношування відбувається при робочій швидкості 4000 об / хв. Примітно, що загальна величина зносу шахт валів і втулок корпусу дорівнює  $e_w = 0,37$  мм. Як результат, середній зазор між ротором і статором слід збільшити з  $h_0 = 0,25$  (мм) до  $h_0 + e_w = 0,62$  (мм).

## ВИСНОВКИ

Таким чином, запропонований підхід до параметричної ідентифікації дискретних мас дозволив створити узагальнену математичну модель дискретних мас вільних та вимушених коливань ротора. Ця модель ураховує нелінійні сили різної природи (сила інерції Даламбера, відцентрові сили інерції, демпфування та силу нелінійного тертя, циркуляційні та внутрішні сили тертя, а також силу можливої контактної взаємодії між ротором та статором). Ця модель розширює можливості вивчення вільних та вимушених коливань роторів через наступні причини. По-перше, модель дискретна, а її маси можуть бути зосереджені у площинах корекції. У цьому випадку дискретні маси оцінюються за умовою відповідності власних частот дискретномасової та скінченноелементна моделей. Більше того, розроблений підхід дозволяє вдосконалювати запропоновану математичну модель по мірі появи інших сил, що впливають на динаміку ротора. Крім того, запропонована модель дозволяє розглянути різні моделі внутрішніх сил тертя або дефекти різної природи (наприклад, знос втулок та дефекти форми).

Суттєвою перевагою запропонованого підходу є відсутність необхідності у чисельному моделюванні FEA/CFD, гідродинамічних процесів з динамікою ротора в гідродинамічному середовищі.

Розроблена модель дозволяє проводити її подальший аналіз (наприклад, перевірку відлаштування від резонансу та дослідження умов стійкості прецесії валу) без використання потужних систем чисельного моделювання, а лише з використанням систем комп'ютерної алгебри. Наведена редукована система лінеаризованих диференціальних рівнянь руху дозволяє перевірити умови стійкості руху за критерієм Рауса – Гурвіца.

Варто зазначити, що достовірність запропонованої моделі підтверджується її зведенням до лінеаризованої форми для випадку відносно малих коливань. У

цьому випадку запропонована система диференціальних рівнянь узгоджується з існуючим підходом при створенні спрощених лінійних моделей. Однак запропонована модель суттєво доповнює лінійні моделі завдяки врахуванню нелінійних складових сил та анізотропії пружних властивостей.

Відповідно до розробленого алгоритму, заснованого на чисельному розрахунку дискретних мас колінчастого вала 3LD-1005020 дизельного двигуна ММЗ-3LD, була оцінена точність розробленої математичної моделі. Зокрема, для діапазону робочих частот у діапазоні 800–4000 [об/хв] та двомасової моделі відносна похибка у визначенні 1-ї критичної частоти 584 [Гц] не перевищує 6%.

Таким чином, вищезазначений підхід дозволяє суттєво розширити існуючі моделі вільних та вимушених коливань до загального випадку розгляду сил інерції залишкових дисбалансів, нелінійних сил, сил демпфування, сил гідродинамічної жорсткості, циркуляційних сил та сил нелінійного тертя, а також сил можливої контактної взаємодії між валом і корпусом.

У цілому, запропонована модель може мати практичне застосування при розробленні поршневих, компресорних установок високого тиску та двигунів внутрішнього згоряння в автомобільній, повітряній, аграрній, суднобудівній та військовій промисловості.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. [Електронний ресурс]: [https://auto.24tv.ua/kolinchastyi\\_val\\_dvyhuna\\_budova\\_pryznachennia\\_forma\\_yak\\_zberehty\\_n27329](https://auto.24tv.ua/kolinchastyi_val_dvyhuna_budova_pryznachennia_forma_yak_zberehty_n27329);
2. [Електронний ресурс]: <https://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=869342>;
3. Вингра, А.; Авдєєв, Б. Розрахунок навантаження електроприводу поршневого компресора суднового холодильного агрегату. У 2018 році Міжнародна конференція з питань промислового машинобудування та сучасних технологій, FarEastCon 2018; Владивосток, 3-4 жовтня 2018;
4. Wei, L.; Wei, H.; Du, H.; Duan, S. Three-dimensional vibration of the crankshaft of a large marine diesel engine under a mixed thermo-elastic-hydro-dynamic lubrication coupling between flexible crankshaft and engine block. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 2018;
5. Brusa, E.; Delprete, C.; Genta, G. Torsional vibration of crankshafts: Effects of non-constant moments of inertia. *Journal of Sound and Vibration* 1997;
6. Nisarg, R.; Paygude, A.; Vijay, G.S. Influence of components with small inertia on the torsional vibrations of a crankshaft. *International Journal of Scientific and Technology Research* 2019;
7. Liang, M.-X.; Yuan, H.-Q.; Zhao, T.-Y.; Cai, Y.-Y. Response of nonlinear bending-torsional coupling vibration of the combustion engine crankshaft system. *Dongbei Daxue Xuebao/Journal of Northeastern University* 2014;
8. Centea, D.; Rahnejat, H.; Menday, M.T. Non-linear multi-body dynamic analysis for the study of clutch torsional vibrations (judder). *Applied Mathematical Modelling* 2001;
9. Vaz, A.; Sharma, P.; Atri, R. Modeling and simulation of the dynamics of crankshaft-connecting rod-piston-cylinder mechanism and a universal joint using

the bond graph approach. In *14th National Conference on Machines and Mechanisms*, NaCoMM 2009; Durgapur, 17-18 December 2009;

10. Fan, J.; Huo, L. Method of tolerance design and verification of parts based on follow-up crankshaft grinder with following double grinding wheel frame. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 2020;

11. Ященко, А. С.; Руденко, А.; Симоновський, В. І.; Козлов, О. М. Вплив корпусів підшипників на динаміку ротора відцентрового насоса. Серія конференцій IOP: Матеріалознавство та техніка 2017;

12. Марцинковський, В.; Тарельник, В.; Коноплянченко, І.; Гапонова, О.; Думанчук, М. Технологічна опора для захисту контактних поверхонь напівмуфти;

13. Singh, J.; Singh, B. Design of crankshaft for complete balancing of primary unbalanced force in reciprocating engine. *Journal of the Institution of Engineers (India): Mechanical Engineering Division*;

14. Гадяка, В.; Лейких, Д.; Симоновський, В. Феномени втрати стійкості обертання ротора на підшипниках нахилу колодки. *Procedia Engineering* 2012;

15. Mourelatos, Z.P. An analytical investigation of the crankshaft-flywheel bending vibrations for a v6 engine. In *SAE Noise and Vibration Conference and Exposition*; SAE Technical Papers; Traverse City, 15-18 May 1995;

16. Бабак, В.П.; Більчук, Є.Ю.; Щепетов, В.В. Збільшення зносу покриттів завдяки внутрішньоструктурній самокорекції. *Журнал інженерних наук* 2019;

17. Марцинковський, В.; Кірік, Г.; Тарельник, В.; Жарков, П.; Коноплянченко, І.; Довжик, М. Визначення критеріїв оцінки альтернативних технологій підвищення якості шийки валу ротора методами електроерозійного легування та поверхневої пластичної деформації. Серія конференцій IOP: Матеріалознавство та техніка 2017;

18. [Електронний ресурс]: <https://ua.waykun.com/articles/zagalni-ponjattja-prokrutilni-kolivannja.php>;
19. А. А. Ларін. Нариси історії розвитку теорії механічних коливань 2013;
20. Kumada, Y. Technological transition of crankshaft bearings in reciprocating engines. *Toraibarojisuto/Journal of Japanese Society of Tribologists* 2001;
21. Shu, G.Q.; Liang, X.Y.; Lu, X.C. Axial vibration of high-speed automotive engine crankshaft. *International Journal of Vehicle Design* 2007;
22. Belkhode, P.N. Optimum choice of the front suspension of an automobile. *Journal of Engineering Sciences* 2019;
23. Hauser, B.R.; Blockus, K.M.; Braly, G.W. An improved method of accelerated crankshaft fatigue testing for reciprocating aircraft engines. In *General Aviation Technology Conference and Exhibition*;
24. Duan, X.; Hao, Z. Simulation of torsional vibration for an automotive diesel engine crankshaft. *Nongye Jixie Xuebao/Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery* 2006;
25. Ребров, О.; Кожушко, А.; Кальченко, Б.; Мамонтов, А.; Заковоротний, А.; Калінін, Е.; Головіна, Є. Математична модель характеристик дизельного двигуна для визначення продуктивності тягової динаміки колісного трактора. EUREKA: Фізика і техніка 2020;
26. Girtler, J. A model of fuel combustion process in the marine reciprocating engine work space taking into account load and wear of crankshaft-piston assembly and the theory of semi-markov processes. *Polish Maritime Research* 2016;
27. Zhao, H.; Xia, C.; Xiao, Y.; Li, H.; Xia, T. Bispectrum analysis for vibration data of crankshaft bearing in diesel engine. *Zhendong Ceshi Yu Zhenduan/Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis* 2009;



28. Бусаров, І.С .; Юша, В.Л .; Бусаров, С.С .; Кобильський, Р.Е. Порівняльна оцінка методів розрахунку динаміки самодіючих клапанів у поршневих компресорних агрегатах. *Хімічне та нафтове машинобудування 2020*;
29. Izadi, M.; Sanyal, A.K.; Warier, R.R. (2019). Variational attitude and pose estimation using the Lagrange-d' Alembert principle;
- 30.Sokolov, V.; Porkuian, O.; Krol, O.; Baturin Y. Design calculation of electrohydraulic servo drive for technological equipment. In *Advances in Design, Simulation and Manufacturing III*, DSMIE 2020;
- 31.Pavlenko, I.; Saga, M.; Kuric, I.; Kotliar, A.; Basova, Y.; Trojanowska, J.; Ivanov, V. Parameter identification of cutting forces in crankshaft grinding using artificial neural networks. *Materials 2020*;
- 32.Krol, O.; Sokolov, V. Modeling of spindle node dynamics using the spectral analysis method. In *Advances in Design, Simulation and Manufacturing III*, DSMIE 2020; *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, Springer, Cham, 2020;
- 33.Zhang, Y.-F.; Wang, X.; Huang, Y.; Li, S.; Liu, C.; Lu, Y.-J. Analytical method of nonlinear oil film force of hydrodynamic crankshaft journal bearing. *Jiaotong Yunshu Gongcheng Xuebao/Journal of Traffic and Transportation Engineering 2018*;
- 34.Defdaf, M.; Berrabah, F.; Chebabhi, A.; Cherif, B.D.E. A new transform discrete wavelet technique based on artificial neural network for induction motor broken rotor bar faults diagnosis. *International Transactions on Electrical Energy Systems 2021*;
- 35.Khoualdia, T.; Lakehal, A.; Chelli, Z.; Khoualdia, K.; Nessaib, K. Optimized multi layer perceptron artificial neural network based fault diagnosis of induction motor using vibration signals. *Diagnostyka 2021*;
36. [Електронний ресурс]: <https://ukrdoc.com.ua/text/11689/index-9.html>;
37. [Електронний ресурс]: <https://studfile.net/preview/5028961/page:26/>;

38. Kundera, C.; Marcinkowski, W.A. The effect of annular seal parameters on the dynamics of a rotor system. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering* 2010;
39. Симоновський, В.І. Динаміка роторних машин. Суми, Видавництво Сумського державного університету, 2011;
40. Xia, P.; Dong, T.; Zhang, S.; Lei, N. The Bulirsch-Stoer algorithm for multivariate rational interpolation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 2018.