

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
Факультет технічних систем та енергоефективних технологій  
Кафедра комп'ютерної механіки імені Володимира Марцинковського

## **КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**

**бакалавра**

**на тему: «Оптимізація геометрії суцільно композитного  
водневого балона високого тиску»**

Спеціальність: 131 Прикладна механіка

ОПП: Комп'ютерний інжиніринг в  
механіці

Виконав: студент групи КМ-71

Олійник Є.О.

Керівник: доц. Жигилій Д.О.

Рецензент: зав. кафедри Загорулько А.В.

Суми 2021

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра: 64 с., 31 рис., 6 табл., 25 джерел.

БАЛОН ВИСОКОГО ТИСКУ, ШАРУВАТИЙ КОМПОЗИТ, ПРУЖНІ СТАЛІ, МЕТОД СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ, КРИТЕРІЙ МІЦНОСТІ, ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ.

Об'єкт дослідження – суцільно композитний балон високого тиску 4 типу.

Предмет дослідження – вплив геометрії на напружено-деформівний стан балону високого тиску на основі поліноміального критерію міцності.

Мета роботи – оптимізація геометрії балону високого тиску шляхом чисельного експерименту з використанням планування чисельного експерименту.

Методи досліджень – метод скінчених елементів, дискретно-структурна теорія шарувальних композитів, поліноміальний критерій міцності для шаруватих композитів, теорія планування експерименту другого порядку.

В роботі досліджено суцільно композитний водневий балон альтернативної геометрії серединної поверхні шаруватої вуглепластикової оболонки обертання постійної товщини. Пружні властивості вуглепластика знайдено за Фойгтом і Рейсом за принципом підсумовування повторюваних елементарних шарів. Напружено-деформований стан посудини під статичною дією внутрішнього високого тиску визначено методом скінчених елементів в осесиметричній постановці. Для оцінки несучої здатності вуглепластикової оболонки використано модифікований критерій міцності Верещаки С. М., що включає врахування поперечного міжшарового зсуву та трансверсальних напружень обтиснення. За теорією планування чисельного експерименту поліпшено значення формалізованих змінних геометрії посудини з умови максимізації її міцності.

## Зміст

ВСТУП .....	5
1 КОНСТРУЮВАННЯ БАЛОНІВ ВИСОКОГО ТИСКУ .....	7
1.1 Огляд конструкцій балонів високого тиску .....	7
1.2 Методи розробки балонів високого тиску .....	13
1.3 Матеріали, придатні для водневих посудин високого тиску .....	17
1.3.1 Армуючі елементи (волокна) .....	17
1.3.2 Скляні волокна .....	18
1.3.3 Вуглецеві волокна .....	19
1.3.4 Борні волокна .....	20
1.3.5 Матриці (заповнювачі) .....	20
2 ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ .....	21
2.1 Чисельне моделювання матеріалу посудини великого тиску .....	21
2.2 Односпрямований шар в циліндричній системі координат .....	23
2.3 Зведені характеристики механічних властивостей односпрямованого матеріалу (об'ємний напружений стан) .....	29
2.3.1 Перетворення пружних характеристик односпрямованого матеріалу при повороті осей системи координат .....	32
2.3.2 Перетворення пружних характеристик при повороті осей координат (плоский напружений стан) .....	33
2.3.3 Перетворення пружних характеристик при повороті осей координат (об'ємний напружений стан) .....	36
2.3.4 Пружні характеристики багатошарових композитів .....	38
3.1 Плаский скінчений елемент для осесиметричної задачі .....	40
3.2 Геометрія оболонки .....	42
3.3 Граничні умови .....	43
4 ЧИСЕЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ .....	45
4.1 Модифікований поліноміальний критерій міцності для шаруватих композитів за С.М. Верещакою. ....	45

4.2 План двофакторного чисельного експерименту з розрахунком коефіцієнтів взаємодій чинників. ....	47
4.3 Результати чисельних експериментів .....	54
ВИСНОВКИ.....	59
Перелік використаних джерел.....	62

С У М І Т

## ВСТУП

**Актуальність теми:** людство намагається перейти від джерел енергії, які вичерпуються до невичерпних серед таких є енергія вітру, енергія припливів енергія сонячного випромінювання. Цю електричну вироблену енергію потрібно складувати і одним серед способів накопичування є продукування водню з води.

Таким чином на цей час існує науково-практична проблема щодо зберігання водню у баллонах високого тиску нової форми та нових матеріалів. Серед таких є обраний для цього баллону шарувальний углепластик, а форма складається з еліптичних поверхонь.

**Мета дослідження.** Виходячи з актуальності й ступеня наукової розробки проблеми, метою дослідження є оптимізація геометрії баллону високого тиску шляхом чисельного експерименту з використанням плану експерименту.

Для досягнення поставленої мети були встановлені наступні **завдання дослідження.**

1. Визначити пружні характеристики шаруватого композита на основі вуглепластика з відомою схемою укладання шарів.
2. Побудувати скінченно елементу модель оболонки високого тиску у вісеметричній постановці.
3. Виконати дослідження міцності напружено-деформованого стану оболонки високого тиску за допомогою модифікованного поліноміального критерію міцності для тривимірного напруженого стану за С.М. Верещакою.
4. Методом планування експерименту визначити раціональні розміри оболонки високого тиску з вуглепластику на основі проведеного експерименту на основі скінченної моделі.

**Наукова новизна.** На основі повнофакторного експерименту для чисельного моделювання скінченними елементами оболонки з вуглепластика

складної форми з еліптичних елементів отримано поліпшені значення формалізованих змінних геометрії балона за максимальної міцності.

**Практичне значення.** Запропонована робота з поліпшення геометрії балону, підхід якої придатний до оптимізації геометрії балонів складної форми.

**Особистий внесок здобувача.** Основні наукові результати дослідження, що відносяться на захист, одержані автором самостійно або за його активної участі.

**Апробація роботи.** Основні положення наукової роботи відображені в тезах VIII Всеукраїнської міжвузівської науково-технічної конференції «Сучасні технології у промисловому виробництві» [26].

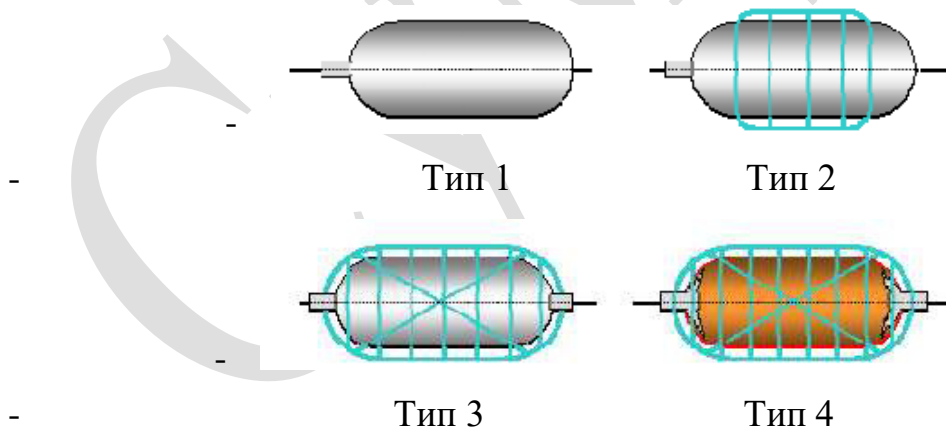
# 1 КОНСТРУЮВАННЯ БАЛОНІВ ВИСОКОГО ТИСКУ

## 1.1 Огляд конструкцій балонів високого тиску

Пошук потужних відновлюваних дружніх до природи джерел енергії повертає дослідників до проблем її зберігання. Так перспективним з огляду екологічності є водень як паливо. Тому проектування безпечних містких посудин зберігання високого тиску є актуальною задачею.

Класифіковано наступні 4 типи балонів:

- Балон, виготовлений з металу.
- Балон, виготовлений з товстого металевого циліндра, обмотаного волокнисто-смоляним композитом
- Балон, виготовлений з металевго вкладиша, повністю обмотаного композитом з волоконно-смоляних матеріалів.
- Балон, виготовлений з полімерного вкладиша, повністю обмотаний композитом з волоконно-смоляних матеріалів.



- Рисунок 1.1 – Схематичне зображення 4 типів посудин під тиском

Водень може зберігатися в чотирьох типах посудин під тиском. Вибір сховища базується на кінцевій меті, яка вимагає компромісу між технічними характеристиками та конкурентоспроможністю.  $H_2$  як промисловий газ

зберігається в резервуарах типу I, тиск яких становить від 150 до 300 бар (зазвичай 200 бар). Це найпоширеніші посудини високого тиску сьогодні і найдешевші. Коли потрібні лише більш високі тиски - переважно для стаціонарних застосувань - переважно резервуари типу II. Судини типу III та IV призначені для переносних застосувань, для яких істотна економія ваги. Однак ці посудини набагато дорожчі.

Найстаріший тип посудини тиску - це тип I, виготовлений із сталі. Він був запроваджений у 19 столітті між 1870 і 1880 рр. Він призвів до розвитку нової галузі на той час: промислового газового бізнесу. Більш конкретно, це, здається, спочатку пов'язано з великим споживанням вуглекислого газу для напою, з необхідністю безпечного зберігання його у рідкому стані та у великих кількостях. Зверніть увагу, що посудини низького тиску (<20 бар) вже використовувались в середині 19 століття: вони були виготовлені з міді, як правило, низької ємності, і використовувались для перших дихаючих апаратів; але вони не можуть бути кваліфіковані як посудини високого тиску.

Що стосується водню, то він в основному використовувався протягом останніх 19-х століть для аеростатів військових спостережень в Азії та Африці (близько 1880 р.). Він зберігався в посудинах під тиском 120 бар у кованих залізах у 1880 році; звичайно, ці балони були дуже важкими (500 кг сталі було потрібно для зберігання 25 Нм<sup>3</sup> водню), але, схоже, вони першими змогли безпечно транспортувати водень під високим тиском. Посудини, виготовлені з безшовної сталі, були представлені в 1885 році, виготовляється шляхом нанесення та формування пластин (британський патент Lane & Taunton) зі спеціальною розробкою для виготовлення горловини. Тим часом було розроблено виробництво балона високого тиску з безшовних трубок (німецький патент Маннесманна). Також вдосконалювались балони високого тиску, виготовлені із заготовок наприкінці 1880-х. До 60-х років робочий тиск цих сховищ становив 150 бар. З 1960 р. Робочий тиск був підвищений



до 200 бар. Сьогодні для промислових газів співіснують як балони на 200, так і на 300 бар.

Композитні посудини високого тиску були введені понад 70 років тому і були спеціально розроблені для космічного та військового застосування, для яких технічні характеристики - особливо вага - були дуже важливим критерієм. Експерименти над композитними суднами розпочалися в 50-х роках, але перші судини високого тиску, що використовувались для космічного та військового застосування, почалися фактично в 60-х роках у США (ракетні двигуни та інші посудини під тиском для космічних човників, гідроакустичне обладнання тощо ...). Ринок цих нових посудин високого тиску був дуже низьким у 60-х роках, і виробництво на той час не було регулярним: виготовлені партії могли нараховувати приблизно від десяти до декількох сотень суден (серійне виробництво не проводилось). Вони були виготовлені з металевого або полімерного вкладиша, обмотаного композитом зі скловолокна.

Громадянський ринок почав проникати в перші 70-ті роки і був пов'язаний з волею збільшити ринок цих високотехнологічних продуктів. У порівнянні зі звичайними посудинами типу I для промислових газів, вартість цих композитних посудин та відсутність регулювання для композитних посудин уповільнили це проникнення. Наприклад, наприкінці 70-х років код Американське товариство інженерів-механіків вимагав 100 000 циклів для посудин, що працюють під тиском - які резервуари для композитів не могли виконати. Як наслідок, для кожної моделі та кожного застосування композитні судини повинні були отримати спеціальний дозвіл, і термін їх служби був обмежений. Однак першим важливим цивільним ринком у 70-х був дихаючий апарат для пожежників. Починаючи з 80-х років, ці композитні посудини почали використовувати для дайвінгу шкіри, зберігання палива (головним чином природного газу) та для дозвілля (наприклад, фарби). Тиск зберігання був звичайним: від 100 до 300 бар.

З перших розробок було також здійснено багато поліпшень: наприклад, вага зменшилась, продуктивність їзди на велосипеді зростає завдяки використанню тонких підкладок з адекватними механічними властивостями та інших волокон, крім скла (кевлар, вуглець). Більше того, регулювання було встановлено як для промислових газів, так і для сховищ паливного газу.

Водень зазвичай зберігається і транспортується у двох формах: у вигляді стисненого газоподібного водню або у вигляді криогенної рідини. Найпоширеніший спосіб зберігання водню - у металевих або композитних балонах/резервуарах різного розміру та ємності. Іноді їх можна з'єднати в пучок або зібрати на кошик для транспортування.

Через невеликий розмір своїх молекул водень схильний легко просочуватися через деякі матеріали, тріщини або погані стики резервуарів, на відміну від інших загальних газів при еквівалентних тисках. Хоча водень, як правило, не є корозійним і не реагує з матеріалами, що використовуються для зберігання контейнерів, за певних умов температури і тиску він може дифундувати в металеву решітку, викликаючи явище, відоме як "воднева крихкість".

Крім того, у разі пожежі композиційні матеріали, що використовуються для зберігання посудин, можуть деградувати, і може відбутися втрата водневого вмісту. У найгіршому випадку це може призвести до катастрофічного розриву резервуару для зберігання водню, генеруючи вибухову хвилю, за якою слідує вогненна куля та літаючі снаряди / ракети. З цієї причини обладнання для зберігання водню повинно бути спроектоване та підтримуватися відповідно до високих стандартів безпеки, щоб забезпечити цілісність контейнера.

Завдяки цій роботі проводиться огляд варіантів зберігання водню, а також розглядаються основні пов'язані з ними питання безпеки та техніки. Він також охоплює теми взаємодії водню з різними типами

матеріалів та проникнення водню, які надзвичайно актуальні для технологій зберігання водню.

Зберігання водню є технологією, що сприяє усьому спектру застосувань паливних клітин та водню, від бортових транспортних засобів до стаціонарного та портативного виробництва енергії. Універсального рішення для зберігання водню не існує. Натомість рішення повинно бути ретельно підібрано для задоволення конкретних системних вимог.

Водень - це найлегший газ з низькою нормальною щільністю 0,09 г / л (при 288 К і 1 бар). А також він має дуже високий вміст енергії на масу будь-якого палива (приблизно втричі більше, ніж бензину). Однак через низьку щільність водень має дуже низький вміст енергії в одиниці об'єму (приблизно в чотири рази менше, ніж бензин).

Як результат, зберігання водню, особливо в межах розміру та ваги транспортного засобу, є проблемою. Проводяться дослідження з розробки безпечної, надійної, компактної, легкої та економічно вигідної технології зберігання водню. Об'ємна та гравіметрична ємності (щільності) - два терміни, які часто використовуються при описі підходів до зберігання газу. У випадку водню дослідницька діяльність спрямована на збільшення обох ємностей, тобто бажана більша як об'ємна, так і гравіметрична.

Через низьку унікальних властивостей водню він повинен бути сумісним із матеріалами, з яких виготовлені стінки резервуарів. Для транспортування та зберігання водню розроблено чотири типи судин:

- виготовлений з металевого безшовного металевого лейнера;
- безшовний металевий циліндр, обмотаний композитом з волоконних смол;
- металеві вкладиші, повністю обмотані композитом з волоконних смол;
- полімерний вкладиш, повністю обмотаний композитом з волоконних смол;

Тиск, при якому буде зберігатися водень, головним чином впливає на товщину стінок контейнера для зберігання, розмір / вагу контейнерів, вибір матеріалів та витрати. Зазвичай для проектування та виготовлення резервуарів для зберігання водню використовують три типи матеріалів:

- метали (алюміній або сталь);
- полімери (поліетилен високої щільності або поліамід);
- вуглецеві волокна.

Метали не повинні допускати проникнення водню і не піддаватись водневому крихченню, особливо якщо протягом свого життя вони повинні зазнати значного кругообігу тиску / температури.

Гідрогенні баки розраховані на максимальний робочий тиск з мінімальною товщиною стінки, що визначається міцністю металу на розрив. Незважаючи на те, що конструкція водневих резервуарів була вдосконалена в останні роки, особливо завдяки застосуванню легких матеріалів, таких як полімери та алюміній, питання великих обсягів та великої ваги все ще залишаються. Наприклад, маса водню, що зберігається в металевому циліндрі, становить лише близько 1% від загальної маси.

## 1.2 Методи розробки балонів високого тиску

Для всіх балонів, конструкція повинна враховувати робочий та випробувальний тиски, зовнішні напруження, які є специфічними для використання (наприклад, удари, агресивні середовища, вібрації, температура експлуатації, вага з'єднувачів тощо), реальні термін служби (їзда на велосипеді) та коефіцієнти безпеки, визначені як для статичних, так і для динамічних умов. Режимми руйнування, такі як пластична деформація, вигинання, повзучість, втома тощо для металів, розшарування, розриви волокна, тріщини, старіння тощо для композитів також враховуються при проектуванні. Всі ці параметри визначають механічну конструкцію та вибір матеріалів. Матеріали також повинні бути сумісними з газом при контакті. Важливо відзначити, що металеві та композитні посудини дуже різні:

- метал ізотропний, композит анізотропний: механічні властивості для композиту сконцентровані у напрямку волокна;
- режими відмов різні;
- зносостійкість різна;

Наприклад, на рисунку 1.2 наведені основні деформації, які зазвичай розглядаються для металевих посудин під тиском. Загалом, куполи перероблені. Ось чому судини типу 2 із посиленням обручем лише на циліндричній частині товстих вкладишів легко витримують більш високий тиск. Для композитного обгортання зазвичай проводять аналітичний та спрощений розрахунок (див. Рис. 4), щоб отримати першу оцінку конструкції укладання. Тоді для правильної та оптимізованої конструкції (яка повинна узгоджуватися з машинним кодом намотування ниток) необхідне повне дослідження з програмним забезпеченням з кінцевими елементами.

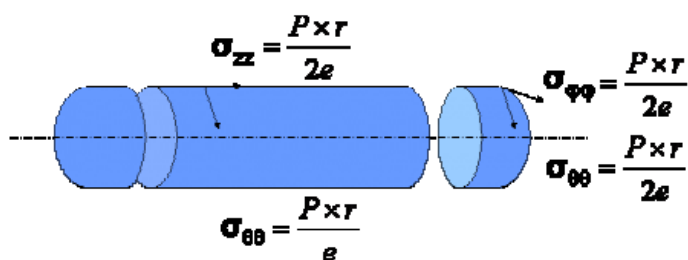


Рисунок 1.2 – Основні деформації, розглянуті для конструкції металевих посудин під тиском (тип I та металевий вкладиш)

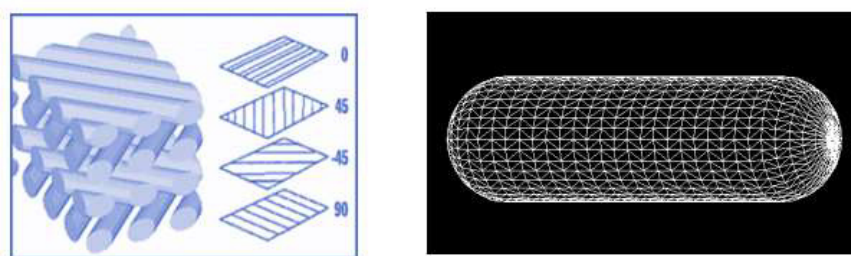


Рисунок 1.3 – Приклад багат шарового елемента та сітки посудини

Судини типу I можуть бути виготовлені з 3 різних процесів (принципи див. На рис. 1.4):

- З плит: процес полягає в глибокому витягуванні металевим покриттям для формування форми (цей етап можна виконати багато разів, щоб мати бажаний діаметр і товщину); шийка формується за допомогою гарячого прядіння, а отвір обробляється в надлишку металу, що надходить зі ступеня прядіння. Таким чином виходить циліндр з одним портом. Потім застосовуються термічні обробки для отримання бажаних механічних властивостей.

- З заготовок: заготовка спочатку нагрівається, щоб забезпечити можливість нанесення малюнка. Тоді процес схожий на попередній.

- З трубок: Трубки купуються і, як правило, для обруча зберігається вихідна товщина. Куполи формуються гарячим прядінням, і можна отримати циліндр з 1 або 2 портами. Тоді процес подібний до першого.

Для кожної технології здійснюється та відстежується контроль якості використовуваних матеріалів та кожного етапу виробництва. Вкладиші суден типу II та III можуть бути виготовлені однаковими способами.

Полімерні вкладиші можуть бути виготовлені:

- З полімеру або мономерів за допомогою процесу ротоформування: полімер (або мономери) вводять у форму, форма якої є кінцевою формою вкладиша. Вкладиш виготовляється нагріванням, а потім охолодженням форми під час обертання (повинна бути досягнута температура плавлення або температура полімеризації). Це може бути один або два портових лайнера. Металеві головки вводяться на етапі ротомолдингу або наклеюються на вкладиш перед загортанням.

- З труб: полімерні трубки (виготовлені методом екструзійного видувного формування) та куполи (обладнані металевою головкою) купуються з потрібним діаметром. Обидві форми зварені для формування вкладиша.

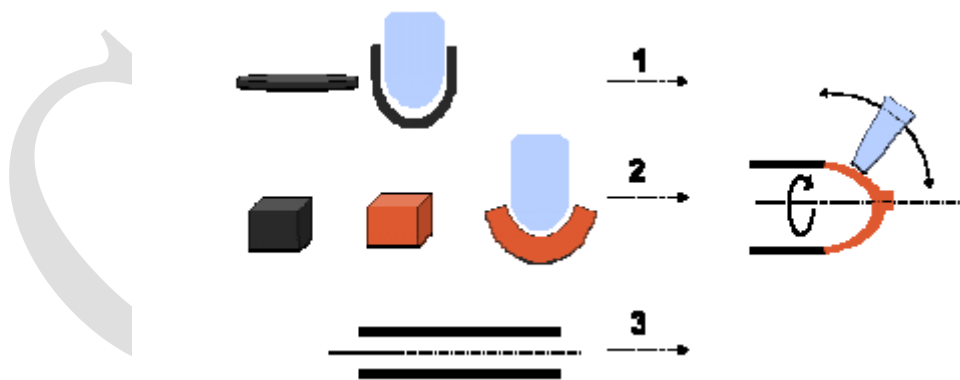


Рисунок 1.4 – Принцип процесів виготовлення металевих резервуарів  
(1: із пластин - 2: із заготовок - 3: із труб)

Потім для всіх композитних посудин металевий або полімерний вкладиш обмотується обручем або повністю обмотується композитом за допомогою машини для намотування ниток. Для циліндричних судин

можливі 3 обгортки: обруч, полярний та гвинтовий (див. рисунок 1.5). Типи 2 мають лише обручі. Судини типу 3 та 4, як правило, являють собою комбінацію окружного та полярного обгортання, але можна розглянути комбінацію з 3 обгортань. Багато посуден можна обгорнути в один і той же спосіб.

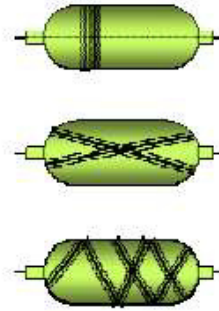


Рисунок 1.5 – Намотувальна машина та 3 можливості намотування



### 1.3 Матеріали, придатні для водневих посудин високого тиску

Вивчаючи напружений та деформований стан анізотропних тіл під час дії зовнішнього навантаження, необхідно знати узагальнені визначення конструктивних властивостей таких матеріалів.

*Композит* – це суцільний матеріал із двох або більше компонент, серед яких можна виділити *армуючі* елементи (волокна), що забезпечують необхідні механічні характеристики матеріалу і *матрицю* (в'язучий матеріал), що забезпечує спільну роботу волокон.

Механічні характеристики композита визначаються співвідношенням властивостей армуючих елементів і матриці, а також міцністю зв'язків між ними. Ефективність і працездатність такого матеріалу залежать від правильного вибору вихідних компонентів і технологій їх суміщення. Ці фактори повинні забезпечити міцний зв'язок між зазначеними компонентами зі збереженням їх початкових характеристик.

У результаті поєднання високоміцних волокон і матриці утворюється комплекс властивостей композита, який відображає не тільки початкові характеристики, а й додатково включає властивості, яких окремо взяті компоненти не мають.

Наявність поверхонь розділу між армуючими елементами істотно підвищує тріщиностійкість композиційних матеріалів. На відміну від металів, підвищення статичної міцності не призводить до зниження характеристик в'язкості руйнування композиційних матеріалів, а, як правило, підвищує їх.

У цьому розділі розглянуті основні властивості армуючих елементів, матеріалів матриць і композитів, створених на їх основі.

#### 1.3.1 Армуючі елементи (волокна)

У сучасних композитах використовуються тонкі  $(5 - 200) \cdot 10^{-6}$  м неперервні й короткі волокна, які є армуючими елементами і служать основою для виготовлення ниток, джгутів, стрічок і тканин із різними типами

плетіння. Волокна повинні задовольняти комплекс експлуатаційних і технологічних вимог. До перших належать умови міцності, жорсткості й стабільності під час експлуатації. Технологічність волокон визначається можливістю створення високопродуктивних процесів виготовлення виробів на їх основі. Розглянемо типи волокон.

### 1.3.2 Скляні волокна

Неперервні скляні волокна утворюються з розплавленої скломаси шляхом витягування струменя на виході із фільтр до діаметра  $(5 - 20) \cdot 10^{-6}$  м і швидкого охолодження. Границя міцності отриманих після витягування скляних волокон становить 2 – 6 ГПа і визначається насамперед складом скломаси, технологією їх витяжки і подальшої обробки. Модуль пружності волокна становить 50 – 130 ГПа (сталь – 200 ГПа), густина 2500 – 2600 кг/м<sup>3</sup>. Скляні волокна із непошкодженою поверхнею мають граничну міцність 5 – 6 ГПа. Температура істотно впливає на міцність скляних волокон. Наприклад, границя міцності промислових алюмоборосилікатних волокон при зниженні температури до  $-196^{\circ}\text{C}$  зростає у півтора-два рази, а з підвищенням температури знижується, причому найбільш інтенсивно після  $300^{\circ}\text{C}$ . Модуль пружності скляних волокон із підвищенням температури знижується неістотно.

Саме зі скляними волокнами англійський вчений А.Гріфітс у 1920 році провів експерименти, поклавши початок механіці крихкого руйнування. Ці експерименти теоретично й експериментально обґрунтували основну властивість тонких волокон, а саме – висока міцність у порівнянні із міцністю монолітного матеріалу.

Як відомо, теоретична міцність матеріалу, передбачувана фізикою твердого тіла, значно (на декілька порядків) перевищує міцність реальних матеріалів, що спостерігається експериментально.

Загалом теоретична границя міцності скла, за оцінкою Гріфітса, становить приблизно 14 ГПа, а для скляних стержнів діаметром  $10^{-3}$  м майже

у 100 разів менша – 0,14 ГПа. Така різниця викликана перш за все впливом поверхневих дефектів – тріщинами, які істотно знижують міцність реальних матеріалів.

При зменшенні діаметрів скляних волокон починаючи від  $3 \cdot 10^{-5}$ м границя міцності різко збільшується, наближаючись до теоретичного значення. Таким чином, використання тонких волокон як армуючих елементів характеристики в'язкості руйнування пов'язане з їх високою міцністю. У зв'язку з цим як характеристики волокон і взагалі матеріалів використовується так звана питома міцність  $k_{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\gamma}$ , де  $\bar{\sigma}$  – границя міцності матеріалу, а  $\gamma$  – його питома вага. Питома міцність вимірюється в одиницях довжини і має просте фізичне значення, вона дорівнює довжині волокна, що руйнується під дією власної ваги. Сталевий дріт, який має таку саму міцність, як і скляне волокно, за питомою міцністю поступається йому більше ніж утричі. За аналогією із питомою міцністю вводиться питомий модуль пружності  $k_E = \frac{E}{\gamma}$ .

### 1.3.3 Вуглецеві волокна

Процес виготовлення вуглецевих волокон полягає в послідовному температурному та механічному впливі на вихідні органічні волокна, що призводить до їх карбонізації, графітизації і вдосконалення структури.

На першому етапі нагрівання вихідних розтягнутих волокон відбувається до температури близько  $220^{\circ}\text{C}$ , що призводить до утворення поперечних хімічних зв'язків між макромолекулами полімеру.

Другий етап – нагрівання до  $1000^{\circ}\text{C}$  – дозволяє отримати карбонізовані волокна на 80 – 95 %, що складаються із елементарного вуглецю і мають достатньо високу міцність.

На третьому етапі обробки при температурі  $1500 - 2500^{\circ}\text{C}$  виходить кінцевий продукт – графітизоване вуглецеве волокно із кристалічною

структурою, близькою до структури графіту. Залежно від технологій отримання модуль пружності вуглецевих волокон знаходиться в межах 220 – 700 ГПа, границя міцності 2 – 3,5 ГПа. Високомодульні вуглецеві волокна отримують унаслідок розтягування такого волокна при температурі 2700°C.

#### **1.3.4 Борні волокна**

Ці волокна одержують осадженням бору на розігріту вольфрамову нитку діаметром  $(12 - 16) \cdot 10^{-6}$  м. При такому процесі навколо нитки формується борна оболонка, що частково прореагувала із матеріалом нитки. Промисловість випускає волокна діаметром  $(100 - 200) \cdot 10^{-6}$  м, що мають границю міцності при розтягуванні 2–4 ГПа, модуль пружності 370 – 430 ГПа і густину 2500 – 2700 кг/м<sup>3</sup>. Борні волокна добре поєднуються як і з полімерною, так і з кристалічною матрицею. Їх основною перевагою є висока жорсткість, міцність при стисканні. До недоліків можна віднести високу вартість, низький рівень технологічності, крихкість. Крім того, борні волокна мають високу чуттєвість до концентраторів напружень.

#### **1.3.5 Матриці (заповнювачі)**

За хімічною природою клеї поділяють на натуральні та синтетичні. До перших зараховують тваринні, рослинні й мінеральні (за ознакою походження); до других – неорганічні (керамічні, силікатні та цементні) і полімерні, тобто відповідно до термінологічних рекомендацій еластомірні (залежно від умов затвердіння – вулканізовні і самовулканізовні) і пластомірні (термопластичні й термореактивні), а також комбіновані (еластомерного-пластомірні) клейові матеріали. Товарний вигляд останніх – тверді, пастоподібні й рідкі (розчини і безрозчинні) клеї – визначають вибір як обладнання для застосування клею, так і основних технологічних параметрів процесу його використання.

## 2 ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

### 2.1 Чисельне моделювання матеріалу посудини великого тиску

Напруження пов'язано з деформацією наступним чином:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \quad (2.1)$$

де

$$\{\sigma\} = \text{вектор напружень} = \{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T;$$

[D] - матриця жорсткості;

$$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\} = \text{пружний вектор деформацій};$$

$$\{\varepsilon\} = \text{повний вектор деформацій} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz}];$$

$$\{\varepsilon^{th}\} = \text{вектор температурної деформації}.$$

Вектор напруження показаний на рисунку 2.1. Правила знаків для напружень і деформацій, що використовуються в програмі ANSYS, полягають у тому, що розтягання є позитивним, а стискання негативним. Для зсуву позитивне - це, коли дві застосовні позитивні осі обертаються одна до одної.

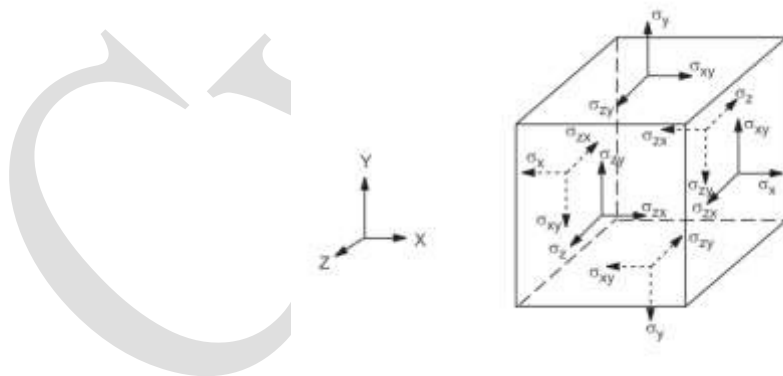


Рисунок 2.1 – Напружений стан нескінчено малого елемента твердого деформівного тіла

Він також може бути інвертованим:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{th}\} + [D]^{-1}\{\sigma\} \quad (2.2)$$

Для випадку 3-D моделі вектор теплової деформації може бути наступним:

$$\{\varepsilon^{th}\} = \Delta T [a_x^{se} a_y^{se} a_z^{se} 000]^T \quad (2.3)$$

де:

$a_x^{se}$  = секантний коефіцієнт теплового розширення в напрямку x.

$$\Delta T = T - T_{ref} \quad (2.4)$$

$T$  = поточна температура в даній точці.

$T_{ref}$  = еталонна температура.

Матриця гнучкості або відповідності,  $[D]^{-1}$  це

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} & -\frac{\nu_{zr}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} & \frac{1}{E_\theta} & -\frac{\nu_{z\theta}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{rz}}{E_r} & -\frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Тут  $E_r, E_\theta, E_z$  – модулі пружності відповідно в радіальному, коловому й поздовжньому напрямках;  $G_{\theta z}, G_{rz}, G_{r\theta}$  – модулі зсуву в площинах  $\theta\theta z, r\theta z, r\theta\theta$  відповідно;  $\nu_{ij}$  ( $i, j = r, \theta, z$ ) – коефіцієнти Пуассона. Для коефіцієнтів Пуассона виконуються співвідношення, аналогічні тотожностям Перетворення даних про матеріальні властивості з циліндричної системи R- $\theta$ -Z в систему xyz, яка використовується для введення, вимагає особливої обережності

## 2.2 Односпрямований шар в циліндричній системі координат

Перетворення модулів Юнга є простим, а коефіцієнтів Пуассона не є очевидним. Спочатку розглянемо, як модулі Юнга трансформуються із глобальної циліндричної системи в глобальну декартову систему, як використовується осісиметричними елементами для диска:

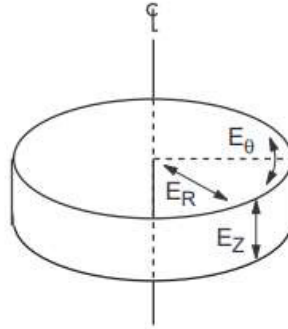


Рисунок 2.2 – 3-D елементи у полярній системі координат

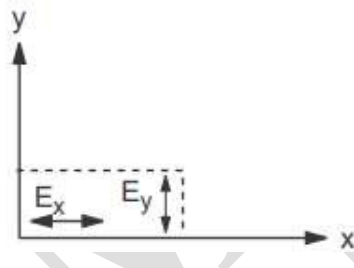


Рисунок 2.3 – Осісиметричні елементи

Тому  $E_R \rightarrow E_x, E_\theta \rightarrow E_z, E_z \rightarrow E_y$ . Починаючи з глобальної декартової системи, вхідні дані для координат  $x-y-z$  дають наступну матрицю деформацій напружень для не зсувних членів.

$$[D_{x-y-z}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_R & -v_{xy}/E_x & -v_{xz}/E_x \\ -v_{yx}/E_y & 1/E_y & -v_{yz}/E_y \\ -v_{zx}/E_z & -v_{zy}/E_z & 1/E_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Переставляючи так, щоб осі  $R-\theta-Z$  відповідали осям  $x-y-z$

$$[D_{R-\theta-z}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_R & -v_{RZ}/E_R & -v_{R\theta}/E_R \\ -v_{ZR}/E_Z & 1/E_Z & -v_{Z\theta}/E_Z \\ -v_{\theta R}/E_\theta & -v_{\theta Z}/E_\theta & 1/E_\theta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Якщо одна система координат використовує мажорний ретис Пуассона, а інша - малий коефіцієнт Пуассона, потрібно буде здійснити додаткове коригування.

Порівняння попередніх матриць дає нам наступний результат:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_R \\
 E_y &= E_Z \\
 E_z &= E_\theta \\
 \nu_{xy} &= \nu_{RZ} \\
 \nu_{yz} &= \nu_{Z\theta} \\
 \nu_{xz} &= \nu_{R\theta}
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Це передбачає, що:  $\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}$  та  $\nu_{RZ}, \nu_{R\theta}, \nu_{Z\theta}$  - це всі основні коефіцієнти Пуассона

Якщо це не випадок ( $E_\theta > E_Z$ ):

$$\nu_{\theta Z} = \nu_{Z\theta} \frac{E_\theta}{E_z} = \text{основне співвідношення Пуассона}
 \tag{2.9}$$

Розглянемо односпрямований шар, армований поздовжніми волокнами (рисунок 2.4).

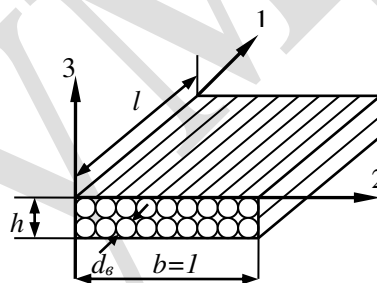


Рисунок 2.4 – Односпрямовано армована стрічка матеріалу

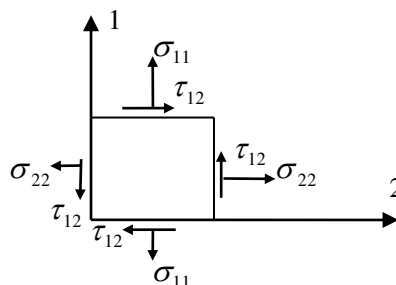


Рисунок 2.5 – Плоский напружений стан у точці односпрямованого матеріалу



На рисунку 2.4 прийняті позначення:  $b$  – одинична ширина елемента;  $l$  – довжина елемента;  $h$  – висота елемента;  $d_f$  – діаметр волокна;  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{12}$  – нормальні та дотичні напруження в точці та  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\gamma_{12}$  – деформації, що їм відповідають. Вважається, що односпрямований матеріал зазнає плоского напруженого стану і в точці виникають три компоненти напруженого стану (рисунок 2.5)

Якщо зв'язок між волокнами і матрицею ідеальний і волокна та матриця виконані з лінійно-пружного матеріалу, зрозумілими стають такі рівняння сумісності деформацій і умови рівноваги:

$$\varepsilon_{11f} = \varepsilon_{11m} = \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{22f} = \sigma_{22m} = \sigma_{22}, \quad \tau_{12f} = \tau_{12m} = \tau_{12}.$$

Індекси “в” та “м” вказують, що компонента напружено-деформованого стану належить до волокна або до матриці відповідно.

Установимо зв'язок між напруженнями та деформаціями у волокні та матриці з середніми напруженнями у композиті, а також зв'язок між пружними характеристиками волокна і матриці та зведеними або ефективними характеристиками композита.

При розгляді деформування односпрямованого матеріалу вздовж волокон, в ортогональному напрямку і зсуві у площині шару спостерігаються такі залежності:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11f}\psi + \sigma_{11m}(1-\psi); \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{22f}\psi + \varepsilon_{22m}(1-\psi); \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12f}\psi + \gamma_{12m}(1-\psi). \end{aligned} \tag{2.10}$$

які відображають так зване “правило сумішів”. Згідно із цим правилом внесок кожної компоненти розглянутого напружено-деформованого стану пропорційний її об'ємному вмісту в композиційному матеріалі. У формулах (2.10) позначено:  $\psi$  – об'ємна частка волокна;  $(1-\psi)$  – об'ємна частка матриці.

Запишемо закон Гука для волокна та матриці, вважаючи їх ізотропними матеріалами:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11g} &= \frac{1}{E_g} [\sigma_{11g} - \nu_g \sigma_{22g}], \\ \varepsilon_{22g} &= \frac{1}{E_g} [\sigma_{22g} - \nu_g \sigma_{11g}], \quad \gamma_{12g} = \frac{\tau_{12g}}{G_B},\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11m} &= \frac{1}{E_m} [\sigma_{11m} - \nu_m \sigma_{22m}], \\ \varepsilon_{22m} &= \frac{1}{E_m} [\sigma_{22m} - \nu_m \sigma_{11m}], \quad \gamma_{12m} = \frac{\tau_{12m}}{G_m}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Зі співвідношень (2.9) і (2.12) з'ясується, що напруження у волокні та матриці можна записати через середні напруження у композиті:

$$\sigma_{11g} = \frac{E_g \sigma_{11} + (1-\psi)(\nu_m E_g - \nu_g E_m) \sigma_{22}}{\psi E_g + (1-\psi) E_m}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{11m} = \frac{E_m \sigma_{11} + \psi(\nu_m E_g - \nu_g E_m) \sigma_{22}}{\psi E_g + (1-\psi) E_m}. \quad (2.14)$$

Для середніх деформацій можуть бути отримані такі співвідношення:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\psi E_g + (1-\psi) E_m} - \frac{\psi \nu_g + (1-\psi) \nu_m}{\psi E_g + (1-\psi) E_m} \sigma_{22}, \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{22} = \left\{ \frac{\psi E_m + (1-\psi) E_g}{E_g E_m} - \frac{\psi(1-\psi)(\nu_m E_g - \nu_g E_m)^2}{E_g E_m [\psi E_g + (1-\psi) E_m]} \right\} \sigma_{22} - \frac{\psi \nu_g + (1-\psi) \nu_m}{\psi E_g + (1-\psi) E_m} \sigma_{11}, \quad (2.16)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\psi G_m + (1-\psi) G_g}{G_g G_m} \tau_{12}. \quad (2.17)$$

Порівняємо співвідношення (2.15) – (2.17) із законом Гука (2.10), (2.17). Для ортотропного тіла при плоскому напруженому стані, коли  $\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ , цей закон збігається із законом Гука.

Для ортотропного тіла із площиною ізотропії 102 (рис. 2.2 а) він запишеться у такому вигляді:

$$\{\varepsilon\} = [B_0] \{\sigma\} \quad (2.18)$$

Або

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.19)$$

Тепер нескладно знайти вираз технічних сталих для односпрямованого композита:

$$E_1 = \psi E_6 + (1 - \psi) E_M \quad (2.20)$$

$$E_2 = \frac{E_6 E_M E_1}{E_1 [\psi E_6 + (1 - \psi) E_M] - \psi (1 - \psi) (\mu_M E_6 - \mu_6 E_M)^2} \quad (2.21)$$

Нехтуючи доданками, що мають порядок квадрата коефіцієнтів Пуассона порівняно із одиницею, з виразу (2.20) отримаємо

$$E_2 = \frac{E_6 E_M}{\psi E_M + (1 - \psi) E_6} \quad (2.23)$$

Для модуля зсуву маємо аналогічну за структурою формулу

$$G_{12} = \frac{G_6 G_M}{\psi G_M + (1 - \psi) G_6}, \quad (2.24)$$

$$\text{де } G_6 = \frac{E_6}{2(1 - \nu_6)}, \quad G_M = \frac{E_M}{2(1 - \nu_M)}. \quad (2.25)$$

Коефіцієнти Пуассона односпрямованого матеріалу мають вигляд

$$\nu_{12} = \psi \nu_6 + (1 - \psi) \nu_M, \quad \nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{E_1}. \quad (2.26)$$

Для плоского напруженого стану односпрямованого матеріалу закон Гука набирає вигляду

$$\{\sigma\} = [A_0] \{\varepsilon\}$$

або

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & 0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{66}^0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.27)$$

де

$$a_{11}^0 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad a_{22}^0 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}},$$

$$a_{12}^0 = \frac{E_1 \nu_{21}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{E_2 \nu_{12}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad a_{66}^0 = G_{12} - \quad (2.28)$$

коефіцієнти матриці жорсткості  $[A_0]$ .

Відомо, що коефіцієнти матриці жорсткості й матриці піддатливості пов'язані співвідношенням

$$[A_0] = [B_0]^{-1}, \quad (2.29)$$

$$b_{11}^0 = \frac{a_{22}^0}{a_{11}^0 a_{22}^0 - (a_{12}^0)^2} = \frac{1}{E_1}, \quad b_{22}^0 = \frac{a_{11}^0}{a_{11}^0 a_{22}^0 - (a_{12}^0)^2} = \frac{1}{E_2}, \quad (2.30)$$

$$b_{12}^0 = -\frac{a_{12}^0}{a_{11}^0 a_{22}^0 - (a_{12}^0)^2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2},$$

$$b_{66}^0 = \frac{1}{a_{66}^0} = \frac{1}{G_{12}}.$$

Технічні сталі легко знайти із (2.30):

$$E_1 = a_{11}^0 - \frac{(a_{12}^0)^2}{a_{22}^0} = \frac{1}{b_{11}^0}, \quad E_2 = a_{22}^0 - \frac{(a_{12}^0)^2}{a_{11}^0} = \frac{1}{b_{22}^0}, \quad G_{12} = a_{66}^0 = \frac{1}{b_{66}^0}. \quad (2.31)$$

$$\nu_{12} = \frac{a_{12}^0}{a_{22}^0} = -\frac{b_{12}^0}{b_{11}^0}, \quad \nu_{21} = \frac{a_{12}^0}{a_{11}^0} = -\frac{b_{12}^0}{b_{22}^0},$$

## 2.3 Зведені характеристики механічних властивостей односпрямованого матеріалу (об'ємний напружений стан).

Для ортотропного матеріалу розрахункові залежності пружних характеристик армованого високомодульними волокнами шару мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \psi_1 E_g + \frac{(1-\psi_1)(1+\psi_3)}{1-\psi_3} E_m, & E_2 &= \frac{\psi_1(1+\psi_1)(1+\psi_3)}{(1-\psi_1)(1-\psi_3)(1-\nu_g^2)} E_m, \\
 E_3 &= \psi_3 E_g + \frac{(1+\psi_1)(1+\psi_3)}{(1-\psi_1)(1-\nu_g^2)} E_m, & \nu_{12} &= \frac{\nu_g(1+\psi_3)(1+\psi_1)}{\psi_1(1-\psi_3)(1-\psi_1)(1-\nu_g^2)} \frac{E_m}{E_g}, \\
 \nu_{13} &= \nu_g \psi_3 + (1-\psi_3) \nu_m, & \nu_{23} &= \nu_B \psi_3 + (1-\psi_3) \nu_m, \\
 G_{12} &= \frac{1+\psi_1}{(1-\psi_1)(1+\psi_3)} G_m, & G_{23} &= \frac{1+\psi_3}{(1-\psi_3)(1-\psi_1)} G_m, & G_{13} &= \frac{(1+\psi_1)(1+\psi_3)}{(1-\psi_1)(1-\psi_3)} G_m, \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

де  $\psi_1$ ,  $\psi_3$  – відносний об'ємний вміст арматури шару в напрямку осей 1 і 3 (рисунок 2.4).

Коефіцієнт армування  $\psi_1$ , що характеризує відносний об'ємний вміст волокон, можна визначити за формулою

$$\psi_1 = \frac{\pi(d_g)^2}{4h} i_g, \quad (2.33)$$

де  $h$  – товщина армованого шару;  $d_g$  – діаметр волокон;  $i_g$  – частота армування. Величина  $\psi_3$  визначається за допомогою емпіричних залежностей і, як правило, змінюється в інтервалі  $\psi_3 = (0.05-0.15)\psi_1$ . Геометрія односпрямованого армованого шару показана на рисунку 2.4

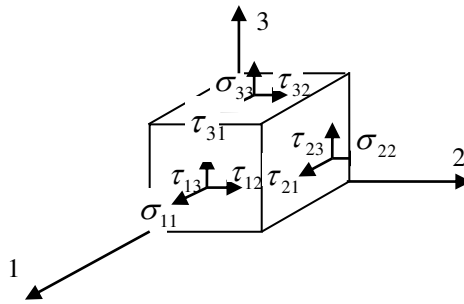


Рисунок 2.6 – Об’ємний напружений стан у точці односпрямованого матеріалу

Співвідношення пружності для ортотропного односпрямованого армованого шару в його осях симетрії 1, 2, 3 з урахуванням технічних сталей у матричній формі мають вигляд

$$\{\sigma\} = [A_0]\{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon\} = [B_0]\{\sigma\}, \quad (2.34)$$

де

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{— матриці — стовпці}$$

напружень і деформацій шару в напрямку осей симетрії 1, 2, 3 (рис. 2.3);

$$[A_0] = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22}^0 & a_{23}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & sym & & a_{44}^0 & 0 & 0 \\ & & & & a_{55}^0 & 0 \\ & & & & & a_{66}^0 \end{bmatrix},$$

$$[B_0] = \begin{bmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & b_{13}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22}^0 & b_{23}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & sym & & b_{44}^0 & 0 & 0 \\ & & & & b_{55}^0 & 0 \\ & & & & & b_{66}^0 \end{bmatrix} \quad \text{—}$$

матриці жорсткості та піддатливості ортотропного шару в напрямку осей симетрії 1, 2, 3 відповідно.

Розв'язуючи одночасно дві системи рівнянь (2.35) щодо коефіцієнтів жорсткості  $a_{ij}^0$ , можна знайти такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
 a_{11}^0 &= [b_{22}^0 b_{33}^0 - (b_{23}^0)^2] \Delta^{-1}, & a_{22}^0 &= [b_{11}^0 b_{33}^0 - (b_{13}^0)^2] \Delta^{-1}, \\
 a_{33}^0 &= [b_{11}^0 b_{22}^0 - (b_{12}^0)^2] \Delta^{-1}, & a_{12}^0 &= [b_{13}^0 b_{23}^0 - b_{12}^0 b_{33}^0] \Delta^{-1}, \\
 a_{13}^0 &= [b_{12}^0 b_{23}^0 - b_{22}^0 b_{13}^0] \Delta^{-1}, & a_{23}^0 &= [b_{12}^0 b_{13}^0 - b_{11}^0 b_{23}^0] \Delta^{-1}, \\
 \Delta &= b_{11}^0 b_{22}^0 b_{33}^0 + b_{12}^0 b_{23}^0 b_{31}^0 + b_{21}^0 b_{32}^0 b_{13}^0 - b_{13}^0 b_{22}^0 b_{31}^0 - b_{21}^0 b_{12}^0 b_{33}^0 - b_{11}^0 b_{32}^0 b_{23}^0, \\
 a_{44}^0 &= \frac{1}{b_{44}^0}, & a_{55}^0 &= \frac{1}{b_{55}^0}, & a_{66}^0 &= \frac{1}{\hat{a}_{66}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Коефіцієнти піддатливості  $b_{ij}^0$  можна записати за допомогою технічних сталей:

$$\begin{aligned}
 b_{11}^0 &= \frac{1}{E_1}, & b_{12}^0 &= -\frac{\nu_{21}}{E_2}, & b_{13}^0 &= -\frac{\nu_{31}}{E_3}, & b_{21}^0 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \\
 b_{22}^0 &= \frac{1}{E_2}, & b_{23}^0 &= -\frac{\nu_{32}}{E_3}, & b_{31}^0 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & b_{32}^0 &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \\
 b_{33}^0 &= \frac{1}{E_3}, & b_{44}^0 &= \frac{1}{G_{23}}, & b_{55}^0 &= \frac{1}{G_{13}}, & b_{66}^0 &= \frac{1}{G_{12}}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

### 2.3.1 Перетворення пружних характеристик односпрямованого матеріалу при повороті осей системи координат

Розглянемо перетворення пружних характеристик односпрямованого матеріалу при переході від власних для односпрямованого матеріалу осей системи координат 1, 2 до деякої довільно орієнтованої системи координат  $\alpha$ ,  $\beta$ , отриманої поворотом осей координат 1, 2 навколо осі z, перпендикулярній до площини 102, на деякий кут  $\varphi$  (рис. 2.3.3).

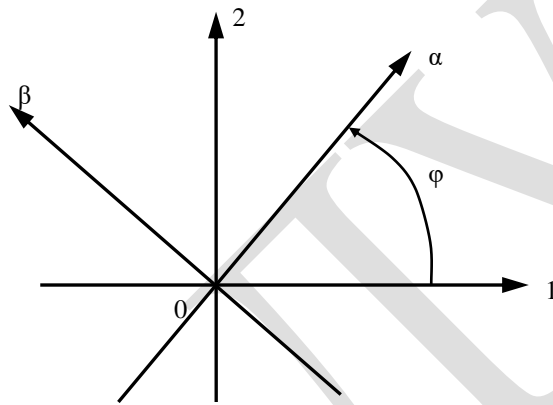


Рис. 2.7 – Поворот осей координат 1, 2 навколо осі z, перпендикулярній до площини 102, на деякий кут  $\varphi$



### 2.3.2 Перетворення пружних характеристик при повороті осей координат (плоский напряжений стан)

Як відомо, співвідношення між напруженнями і деформаціями в односпрямованому шарі при плоскому напруженому стані має вигляд (2.38).

Перетворення компонент тензорів напружень і деформацій до нових осей визначаються за відомими формулами тензорного аналізу:

$$\sigma_{i'j'} = \sigma_{ij} l_{i'i} l_{j'j}, \quad \varepsilon_{i'j'} = \varepsilon_{ij} l_{i'i} l_{j'j} \quad (i', j' = \alpha, \beta, z; i, j = 1, 2, 3). \quad (2.38)$$

При повороті осей 1, 2 на кут  $\varphi$  (рис. 2.4) матриця напрямних косинусів та синусів має вигляд

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{\alpha 1} & l_{\alpha 2} & l_{\alpha 3} \\ l_{\beta 1} & l_{\beta 2} & l_{\beta 3} \\ l_{z1} & l_{z2} & l_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Для плоского напруженого стану зазначені перетворення напружень запишуться таким чином:

$$\{\sigma_{\alpha\beta}\} = [T_1] \{\sigma\} \quad (2.40)$$

або

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha} \\ \sigma_{\beta} \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.41)$$

де  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$ .

Застосовуючи співвідношення (2.39) до компонент тензорів деформацій і використовуючи зв'язок матричних і тензорних позначень деформацій (2.4), маємо

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [\Omega] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.42)$$

де

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Звідси

$$[\Omega]^{-1}\{\varepsilon_\alpha\} = [T_1][\Omega]^{-1}\{\varepsilon\}. \quad (2.44)$$

Тут  $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = \{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \gamma_{\alpha\beta}\}^T$  – матриця-стовпець деформацій в осях  $\alpha, \beta$ . Тоді

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = [\Omega][T_1][\Omega]^{-1}\{\varepsilon\} \quad (2.45)$$

або

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = [T_2]\{\varepsilon\}, \quad (2.46)$$

де

$$[T_2] = [\Omega]^{-1}[T_1][\Omega] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Тепер можна знайти зв'язок напружень і деформації в шарі в осях  $\alpha, \beta$ :

$$[T_1]^{-1}\{\sigma_{\alpha\beta}\} = [A][T_2]^{-1}\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}. \quad (2.48)$$

Після нескладних перетворень останнього рівняння маємо

$$\{\sigma_{\alpha\beta}\} = [A_\varphi]\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}, \quad (2.49)$$

де  $[A_\varphi] = [T_1][A][T_2]^{-1}$ . Компоненти матриці жорсткості

$$[A_\varphi] = \begin{bmatrix} a_{11}^\varphi & a_{12}^\varphi & a_{16}^\varphi \\ a_{21}^\varphi & a_{22}^\varphi & a_{26}^\varphi \\ a_{16}^\varphi & a_{26}^\varphi & a_{66}^\varphi \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

односпрямованого шару в осях координат  $\alpha, \beta$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11}^\varphi &= c^4 a_{11}^0 + s^4 a_{22}^0 + 2(a_{12}^0 + 2a_{66}^0) s^2 c^2, \\ a_{12}^\varphi &= (a_{11}^0 + a_{22}^0 - 2a_{12}^0 - 4a_{66}^0) s^2 c^2 + a_{12}^0, \\ a_{16}^\varphi &= (s^2 a_{22}^0 - c^2 a_{11}^0 + (a_{12}^0 + 2a_{66}^0)(c^2 - s^2)) sc, \\ a_{22}^\varphi &= s^4 a_{11}^0 + c^4 a_{22}^0 + 2(a_{12}^0 + 2a_{66}^0) s^2 c^2, \\ a_{26}^\varphi &= (c^2 a_{22}^0 - s^2 a_{11}^0 - (a_{12}^0 + 2a_{66}^0)(c^2 - s^2)) sc, \\ a_{66}^\varphi &= (a_{11}^0 + a_{22}^0 - 2a_{12}^0 - 4a_{66}^0) s^2 c^2 + a_{66}^0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Запишемо вираз

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\sigma\}$$

у такому вигляді:

$$[T_2]^{-1}\{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = [B][T_1]^{-1}\{\sigma_{\alpha\beta}\}$$

або

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = [B_\varphi] \{\sigma_{\alpha\beta}\}, \quad (2.52)$$

де  $[B_\varphi] = [T_2][B][T_1]^{-1}$ . Компоненти матриці піддатливості

$$[B_\varphi] = \begin{bmatrix} b_{11}^\varphi & b_{12}^\varphi & b_{16}^\varphi \\ b_{21}^\varphi & b_{22}^\varphi & b_{26}^\varphi \\ b_{16}^\varphi & b_{26}^\varphi & b_{66}^\varphi \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

односпрямованого шару в осях координат  $\alpha, \beta$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} b_{11}^\phi &= c^4 b_{11}^0 + s^4 b_{22}^0 + (2b_{12}^0 + b_{66}^0) s^2 c^2, \\ b_{12}^\phi &= (b_{11}^0 + b_{22}^0 - 2b_{12}^0 - b_{66}^0) s^2 c^2 + b_{12}^0, \\ b_{22}^\phi &= s^4 b_{11}^0 + c^4 b_{22}^0 + (2b_{12}^0 + b_{66}^0) s^2 c^2, \\ b_{16}^\phi &= (2s^2 b_{22}^0 - 2c^2 b_{11}^0 + (2b_{12}^0 + b_{66}^0) (c^2 - s^2)) sc, \\ b_{26}^\phi &= (2c^2 b_{22}^0 - 2s^2 b_{11}^0 - (2b_{12}^0 + b_{66}^0) (c^2 - s^2)) sc, \\ b_{66}^\phi &= (b_{11}^0 + b_{22}^0 - 2b_{12}^0 - b_{66}^0) 4s^2 c^2 + b_{66}^0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

### 2.3.3 Перетворення пружних характеристик при повороті осей координат (об'ємний напружений стан)

Як приклад розглянемо перетворення пружних характеристик ортотропного тіла при переході до нової декартової системи координат  $\alpha, \beta, z$ , яка отримана із старої декартової системи 1,2,3 шляхом повороту останньої на деякий кут  $\phi$  навколо осі  $z$  (рис. 2.3). Необхідно зазначити, що вісь  $z$  збігається з віссю 3. Координатні лінії 1, 2 старої декартової системи координат збігаються з головними напрямками пружності ортотропного тіла. В цьому випадку основні співвідношення пружності мають вигляд (2.57) – (2.58). Після переходу до нової системи координат  $\alpha, \beta, z$  отримаємо тільки одну координатну площину  $z \equiv z = \text{const}$ , яка збігається з площиною пружної симетрії. Таким чином, співвідношення пружності вже наберуть вигляду (2.20), (2.26). У декартовій системі координат  $\alpha, \beta, z$  такі співвідношення запишуться так:

$$\{\sigma_{\alpha\beta}\} = [A_\phi] \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}, \quad \{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = [B_\phi] \{\sigma_{\alpha\beta}\}, \quad (2.55)$$

де  $\{\sigma_{\alpha\beta}\} = \{\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_z, \tau_{\beta z}, \tau_{\alpha z}, \tau_{\alpha\beta}\}^\phi$ ,  $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = \{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_z, \gamma_{\beta z}, \gamma_{\alpha z}, \gamma_{\alpha\beta}\}^\phi$  – матриці-стовпці напружень і деформацій шару в напрямку осей симетрії  $\alpha, \beta, z$ ;

$$[A_\phi] = \begin{bmatrix} a_{11}^\phi & a_{12}^\phi & a_{13}^\phi & 0 & 0 & a_{16}^\phi \\ & a_{22}^\phi & a_{23}^\phi & 0 & 0 & a_{26}^\phi \\ & & a_{33}^\phi & 0 & 0 & a_{36}^\phi \\ & \text{sym.} & & a_{44}^\phi & a_{45}^\phi & 0 \\ & & & & a_{55}^\phi & 0 \\ & & & & & a_{66}^\phi \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

$$[B_\phi] = \begin{bmatrix} b_{11}^\phi & b_{12}^\phi & b_{13}^\phi & 0 & 0 & b_{16}^\phi \\ & b_{22}^\phi & b_{23}^\phi & 0 & 0 & b_{26}^\phi \\ & & b_{33}^\phi & 0 & 0 & b_{36}^\phi \\ & \text{sym} & & b_{44}^\phi & b_{45}^\phi & 0 \\ & & & & b_{55}^\phi & 0 \\ & & & & & b_{66}^\phi \end{bmatrix} - \quad (2.57)$$

матриці жорсткості та піддатливості пружного тіла з однією площиною пружної симетрії. Опускаючи проміжні викладки, які наведені у підрозділі 2.3.1, вирази коефіцієнтів матриці (2.65) можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
a_{11}^\phi &= c^4 a_{11}^0 + s^4 a_{22}^0 + 2(a_{12}^0 + 2a_{66}^0) s^2 c^2 + s^4 a_{44}^0, \\
a_{22}^\phi &= s^4 a_{11}^0 + c^4 a_{22}^0 + 2(a_{12}^0 + 2a_{66}^0) s^2 c^2 + c^4 a_{44}^0, \\
a_{12}^\phi &= (a_{11}^0 + a_{22}^0 - 2a_{12}^0 - 4a_{66}^0) s^2 c^2 + a_{12}^0, \\
a_{16}^\phi &= (s^2 a_{22}^0 - c^2 a_{11}^0 + (a_{12}^0 + 2a_{66}^0) (c^2 - s^2)) sc, \\
a_{26}^\phi &= (c^2 a_{22}^0 - s^2 a_{11}^0 - (a_{12}^0 + 2a_{66}^0) (c^2 - s^2)) sc, \\
a_{33}^\phi &= a_{33}^0, \quad a_{13}^\phi = c^2 a_{13}^0 + s^2 a_{23}^0, \quad a_{23}^\phi = s^2 a_{13}^0 + c^2 a_{23}^0, \\
a_{44}^\phi &= c^2 a_{44}^0 + s^2 a_{55}^0, \quad a_{55}^\phi = s^2 a_{44}^0 + c^2 a_{55}^0, \\
a_{45}^\phi &= (a_{44}^0 - a_{55}^0) sc, \quad a_{36}^\phi = (a_{23}^0 - a_{13}^0) sc, \\
a_{66}^\phi &= (a_{11}^0 + a_{22}^0 - 2a_{12}^0 - 4a_{66}^0) s^2 c^2 + a_{66}^0.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Необхідно зазначити, що коефіцієнти (2.68) визначаються за допомогою співвідношень (2.56) – (2.57).

Аналогічно коефіцієнти матриці (2.65) запишуться так:

$$\begin{aligned}
b_{11}^\phi &= c^4 b_{11}^0 + s^4 b_{22}^0 + (2b_{12}^0 + b_{66}^0) s^2 c^2, \\
b_{12}^\phi &= (b_{11}^0 + b_{22}^0 - 2b_{12}^0 - b_{66}^0) s^2 c^2 + b_{12}^0, \\
b_{22}^\phi &= s^4 b_{11}^0 + c^4 b_{22}^0 + (2b_{12}^0 + b_{66}^0) s^2 c^2, \\
b_{16}^\phi &= (2s^2 b_{22}^0 - 2c^2 b_{11}^0 + (2b_{12}^0 + b_{66}^0) (c^2 - s^2)) sc, \\
b_{26}^\phi &= (2c^2 b_{22}^0 - 2s^2 b_{11}^0 - (2b_{12}^0 + b_{66}^0) (c^2 - s^2)) sc, \\
b_{33}^\phi &= b_{33}^0, \quad b_{13}^\phi = c^2 b_{13}^0 + s^2 b_{23}^0, \quad b_{23}^\phi = s^2 b_{13}^0 + c^2 b_{23}^0, \\
b_{44}^\phi &= c^2 b_{44}^0 + s^2 b_{55}^0, \quad b_{55}^\phi = s^2 b_{44}^0 + c^2 b_{55}^0, \\
b_{45}^\phi &= (b_{44}^0 - b_{55}^0) sc, \quad b_{36}^\phi = 2(b_{23}^0 - b_{13}^0) sc, \\
b_{66}^\phi &= (b_{11}^0 + b_{22}^0 - 2b_{12}^0 - b_{66}^0) 4s^2 c^2 + b_{66}^0.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Слід зазначити, що перетворення співвідношень пружності ортотропного тіла у вигляді (2.05), (2.06) у співвідношення (2.53) – (2.55) за допомогою рівнянь (2.56), (2.57) залишаються дійсними і для криволінійних систем координат і тіл із криволінійною ортотропією.

### 2.3.4 Пружні характеристики багатошарових композитів

Нехай композит складається із кількох різно-орієнтованих шарів односпрямованого матеріалу. Введемо такі системи координат (рисунок 2.7): загальна  $\alpha, \beta, z$  та локальні  $1^{(k)}, 2^{(k)}, z$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Тут  $k$  – номер односпрямованого шару в пакеті багатошарового матеріалу,  $n$  – кількість шарів.

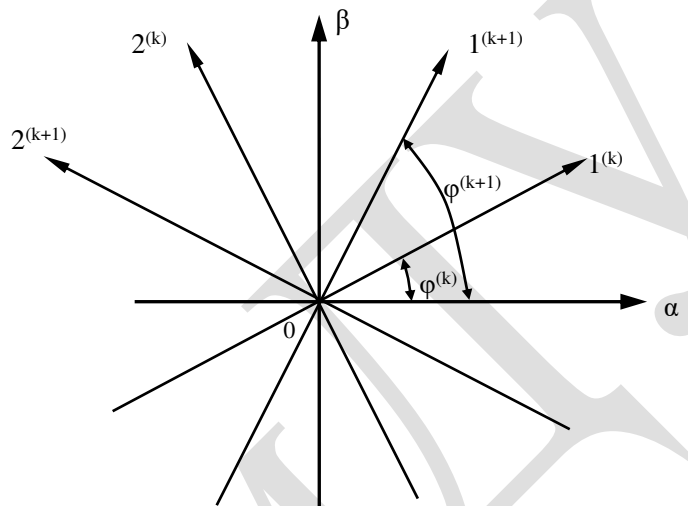


Рисунок 2.7 – Багатошаровий композит

Властивості складових композиції вуглепластику.

Згідно з паспортними даними модулі пружності  $E_b$ , зсуву  $G_b$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu_b$  вуглецевого волокна ЛУ-03 відповідно дорівнюють 235000МПа, 90400МПа й 0,3. Механічні характеристики в'язучого вуглепластику (блок співполімер епокситрифенольної та анілінформальдегідної смол):  $E_M=3500$  МПа,  $G_M=1320$  МПа,  $\nu_M=0,32$ . У кожному моношарі товщиною 0,171 мм об'єм волокон становить 55% загального об'єму. Прийmemo схему укладання шарів  $[\pm 55^\circ; (0^\circ; 90^\circ_2)_3; \pm 55^\circ]$  на основі технології виготовлення намоткою ниткою уздовж геодезичних ліній.

Таблиця 2.1 - Коефіцієнти матриці піддатливості для орієнтованих моношарів, МПа

номер орієнтированого шару, k	$\beta_k, ^\circ$	hk, мм	hk/Zhk	a11( $\beta$ )		a11( $\beta$ )*h		a22( $\beta$ )		a22( $\beta$ )*h		a12( $\beta$ )		a12( $\beta$ )*h		a16( $\beta$ )		a16( $\beta$ )*h		a26( $\beta$ )		a26( $\beta$ )*h		a33( $\beta$ )		a33( $\beta$ )*h	
				a11( $\beta$ )	k/Zhk	a22( $\beta$ )	k/Zhk	a12( $\beta$ )	k/Zhk	a16( $\beta$ )	k/Zhk	a26( $\beta$ )	k/Zhk	a33( $\beta$ )	k/Zhk												
1	55	0,171	0,0625	29120,91	1820,057	71121,68	4445,105	33488,96	2093,06	-19927,22975	-1245,45	-39316,20934	-2457,26	29735,43	1858,464												
2	-55	0,171	0,0625	29120,91	1820,057	71121,68	4445,105	33488,96	2093,06	19927,22975	1245,452	39316,20934	2457,263	29735,43	1858,464												
3	0	0,171	0,0625	138883,8	8680,237	16081,75	1005,109	6853,572	428,3483	0	0	0	0	29735,43	1858,464												
4	90	0,171	0,0625	16081,75	1005,109	138883,8	8680,237	6853,572	428,3483	-1,66483E-13	-1E-14	-7,55753E-12	-4,7E-13	29735,43	1858,464												
5	90	0,171	0,0625	16081,75	1005,109	138883,8	8680,237	6853,572	428,3483	-1,66483E-13	-1E-14	-7,55753E-12	-4,7E-13	29735,43	1858,464												
6	0	0,171	0,0625	138883,8	8680,237	16081,75	1005,109	6853,572	428,3483	0	0	0	0	29735,43	1858,464												
7	90	0,171	0,0625	16081,75	1005,109	138883,8	8680,237	6853,572	428,3483	-1,66483E-13	-1E-14	-7,55753E-12	-4,7E-13	29735,43	1858,464												
8	90	0,171	0,0625	16081,75	1005,109	138883,8	8680,237	6853,572	428,3483	-1,66483E-13	-1E-14	-7,55753E-12	-4,7E-13	29735,43	1858,464												
9	0	0,171	0,0625	138883,8	8680,237	16081,75	1005,109	6853,572	428,3483	0	0	0	0	29735,43	1858,464												
10	90	0,171	0,0625	16081,75	1005,109	138883,8	8680,237	6853,572	428,3483	-1,66483E-13	-1E-14	-7,55753E-12	-4,7E-13	29735,43	1858,464												
11	90	0,171	0,0625	16081,75	1005,109	138883,8	8680,237	6853,572	428,3483	-1,66483E-13	-1E-14	-7,55753E-12	-4,7E-13	29735,43	1858,464												
12	0	0,171	0,0625	138883,8	8680,237	16081,75	1005,109	6853,572	428,3483	0	0	0	0	29735,43	1858,464												
13	90	0,171	0,0625	16081,75	1005,109	138883,8	8680,237	6853,572	428,3483	-1,66483E-13	-1E-14	-7,55753E-12	-4,7E-13	29735,43	1858,464												
14	90	0,171	0,0625	16081,75	1005,109	138883,8	8680,237	6853,572	428,3483	-1,66483E-13	-1E-14	-7,55753E-12	-4,7E-13	29735,43	1858,464												
15	55	0,171	0,0625	29120,91	1820,057	71121,68	4445,105	33488,96	2093,06	-19927,22975	-1245,45	-39316,20934	-2457,26	29735,43	1858,464												
16	-55	0,171	0,0625	29120,91	1820,057	71121,68	4445,105	33488,96	2093,06	19927,22975	1245,452	39316,20934	2457,263	29735,43	1858,464												

номер орієнтированого шару, k	$\beta_k, ^\circ$	hk, мм	hk/Zhk	a13( $\beta$ )		a13( $\beta$ )*h		a23( $\beta$ )*hk/Zhk		a44( $\beta$ )*hk/Zhk		a55( $\beta$ )*hk/Zhk		a45( $\beta$ )		a45( $\beta$ )*h		a36( $\beta$ )*hk/Zhk		a66( $\beta$ )*hk/Zhk	
				a13( $\beta$ )	k/Zhk	a23( $\beta$ )	Zhk	a44( $\beta$ )	Zhk	a55( $\beta$ )	Zhk	a45( $\beta$ )	k/Zhk	a36( $\beta$ )	k	a66( $\beta$ )	k				
1	55	0,171	0,0625	10595,36	662,2099	11482,56	717,659969	2541,195596	158,824725	2922,390886	182,6494304	523,6627259	32,72892	-1218,782846	-76,17392788	30963,82623	1935,239139				
2	-55	0,171	0,0625	10595,36	662,2099	11482,56	717,659969	2541,195596	158,824725	2922,390886	182,6494304	523,6627259	32,72892	1218,782846	76,17392788	30963,82623	1935,239139				
3	0	0,171	0,0625	12335,96	770,9975	9741,957	608,872325	3289,063474	205,566467	2174,523008	135,907688	0	0	0	0	4328,434423	270,5271515				
4	90	0,171	0,0625	9741,957	608,8723	12335,96	770,997527	2174,523008	135,907688	3289,063474	205,5664671	6,82739E-14	4,27E-15	-1,58902E-13	-9,93137E-15	4328,434423	270,5271515				
5	90	0,171	0,0625	9741,957	608,8723	12335,96	770,997527	2174,523008	135,907688	3289,063474	205,5664671	6,82739E-14	4,27E-15	-1,58902E-13	-9,93137E-15	4328,434423	270,5271515				
6	0	0,171	0,0625	12335,96	770,9975	9741,957	608,872325	3289,063474	205,566467	2174,523008	135,907688	0	0	0	0	4328,434423	270,5271515				
7	90	0,171	0,0625	9741,957	608,8723	12335,96	770,997527	2174,523008	135,907688	3289,063474	205,5664671	6,82739E-14	4,27E-15	-1,58902E-13	-9,93137E-15	4328,434423	270,5271515				
8	90	0,171	0,0625	9741,957	608,8723	12335,96	770,997527	2174,523008	135,907688	3289,063474	205,5664671	6,82739E-14	4,27E-15	-1,58902E-13	-9,93137E-15	4328,434423	270,5271515				
9	0	0,171	0,0625	12335,96	770,9975	9741,957	608,872325	3289,063474	205,566467	2174,523008	135,907688	0	0	0	0	4328,434423	270,5271515				
10	90	0,171	0,0625	9741,957	608,8723	12335,96	770,997527	2174,523008	135,907688	3289,063474	205,5664671	6,82739E-14	4,27E-15	-1,58902E-13	-9,93137E-15	4328,434423	270,5271515				
11	90	0,171	0,0625	9741,957	608,8723	12335,96	770,997527	2174,523008	135,907688	3289,063474	205,5664671	6,82739E-14	4,27E-15	-1,58902E-13	-9,93137E-15	4328,434423	270,5271515				
12	0	0,171	0,0625	12335,96	770,9975	9741,957	608,872325	3289,063474	205,566467	2174,523008	135,907688	0	0	0	0	4328,434423	270,5271515				
13	90	0,171	0,0625	9741,957	608,8723	12335,96	770,997527	2174,523008	135,907688	3289,063474	205,5664671	6,82739E-14	4,27E-15	-1,58902E-13	-9,93137E-15	4328,434423	270,5271515				
14	90	0,171	0,0625	9741,957	608,8723	12335,96	770,997527	2174,523008	135,907688	3289,063474	205,5664671	6,82739E-14	4,27E-15	-1,58902E-13	-9,93137E-15	4328,434423	270,5271515				
15	55	0,171	0,0625	10595,36	662,2099	11482,56	717,659969	2541,195596	158,824725	2922,390886	182,6494304	523,6627259	32,72892	-1218,782846	-76,17392788	30963,82623	1935,239139				
16	-55	0,171	0,0625	10595,36	662,2099	11482,56	717,659969	2541,195596	158,824725	2922,390886	182,6494304	523,6627259	32,72892	1218,782846	76,17392788	30963,82623	1935,239139				

Таблиця 2.2 - Розрахункові технічні коефіцієнти пружності (E, G, МПа)

Технические упругие константы для расчета			$v_{xy}, v_{yz}$ and $v_{xz}$ (input as PRXY, PRYZ, and PRXZ)					
E1=Em=Ey	E2=E0=Ez	E3=Er=Ex	v12=vm=vyz	v13=vmr=vxy	v23=v0r=vxz	G32=Gr0=Gxz	G12=Gm0=Gyz	G31=Grm=Gxy
45238	84897	26642	0,109	0,315	0,313	2545	10987	2919

## 3 СКІНЧЕНО-ЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОСУДИНИ ВЕЛИКОГО ТИСКУ

### 3.1 Плаский скінчений елемент для осесиметричної задачі

Ці елементи доступні в ряді конфігурацій, включаючи певні комбінації таких функцій:

- Чотирикутник або вироджена форма трикутника для імітації неправильної площі на головній площині
- Елементарні координати - це внутрішні координати, а переміщення визначаються та інтерполюються в цій системі координат, як показано на рисунку 3.1.

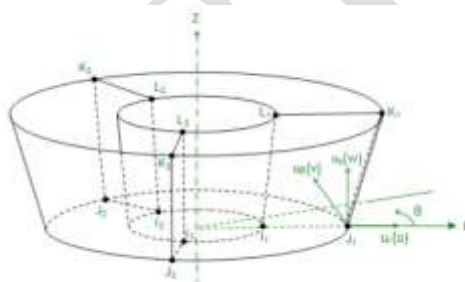


Рисунок 3.1 – Плаский скінчений елемент для осесиметричної задачі

$$u_i = h_i(s, t) \left( c_i + \sum_{m=1}^{\frac{NP-1}{2}} a_i^m \cos m\theta + b_i^m \sin m\theta \right)$$

де:

$I = r, \theta, z$ .

$h_i(s, t)$  = регулярні лагранжеві поліномінальні функції інтерполяції

$c_i, a_i^m, b_i^m$  = коефіцієнти для членів Фур'є

Коли ПУ - парне число, функція інтерполяції дорівнює:

$$u_i = h_i(s, t) \left( c_i + \sum_{m=1}^{\frac{NP-1}{2}} a_i^m \cos m\theta + b_i^m \sin m\theta \right) + a_i^{\frac{NP}{2}} \left( \cos \frac{NP}{2} \theta + \sin \frac{NP}{2} \theta \right)$$



Температури інтерполюються лагранжевою поліноміальною інтерполяцією  $s, t$  площиною та лінійними, інтерпольованими з  $\Theta$  в окружних ( $\Theta$ ) напрямках як:

$$T = T_n(s, t) + \left( \frac{\theta - \theta_n}{\theta_{n+1} - \theta_n} \right) (T_{n+1}(s, t) - T_n(s, t))$$

де:

$$\theta_n \leq \theta \leq \theta_{n+1}$$

номер площини вузла в окружному напрямку.

*Форм-функції для плаского вісесиметричного елемента*

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{4} (u_i (1-s)(1-t) + u_{j_1} (1+s)(1-t) + u_{k_1} (1+s)(1+t) + u_{l_1} (1-s)(1+t)) \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \theta \right) + \\
 & \frac{1}{4} (u_{i_2} (1-s)(1-t) + u_{j_2} (1+s)(1-t) + u_{k_2} (1+s)(1+t) + u_{l_2} (1-s)(1+t)) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) + \\
 & \frac{1}{4} (u_{i_3} (1-s)(1-t) + u_{j_3} (1+s)(1-t) + u_{k_3} (1+s)(1+t) + u_{l_3} (1-s)(1+t)) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

### 3.2 Геометрія оболонки

Геометрія оболонки складається з еліптичних елементів з центрами ( $x_c$ ;  $y_c$ ), що описується рівнянням (рис. 3.1)

$$\left(\frac{x-x_c}{a_e}\right)^2 + \left(\frac{y-y_c}{b_e}\right)^2 = 1$$

За умовою  $a_e = 0,7$  м, товщина оболонки  $t = 0,08$  м. Приймаємо параметри змінної геометрії для оптимізації  $k$  (рис. 3.2) та  $l = b_e/a_e$ , з природними обмеженнями ( $k$  з конструктивних міркувань;  $l$  – див.

рисунок 3.2):  $\begin{cases} \frac{t}{2} + 2 \cdot k \cdot a_e \leq a_e; \\ t \leq k \cdot a_e. \end{cases} \Rightarrow 0,115 \leq k \leq 0,471;$   
 $0,2 \leq l \leq 1.$

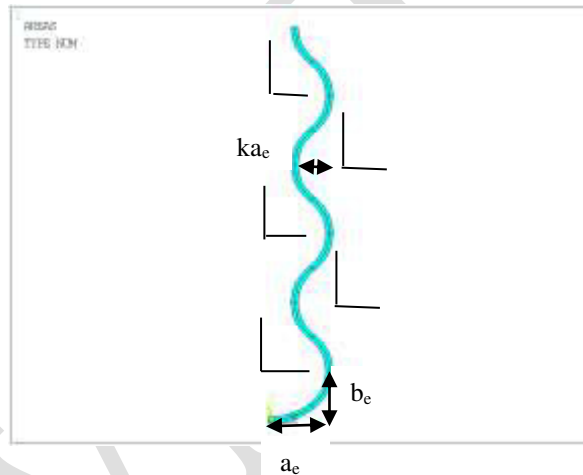


Рисунок 3.2 – Геометрія посудини високого тиску та її елементів

### 3.3 Граничні умови

Граничні умови для розбитої на скінчені елементи оболонки задані наступним. На лініях, що відповідають лініям симетрії оболонки покладено симетричні граничні умови за переміщенням уздовж лінії за лініями внутрішньої поверхні оболонки осесиметричній останці покладений внутрішній тиск, що дорівнює 20 МПа. Утворені граничні умови та скінчену елементну модель показано на рисунках

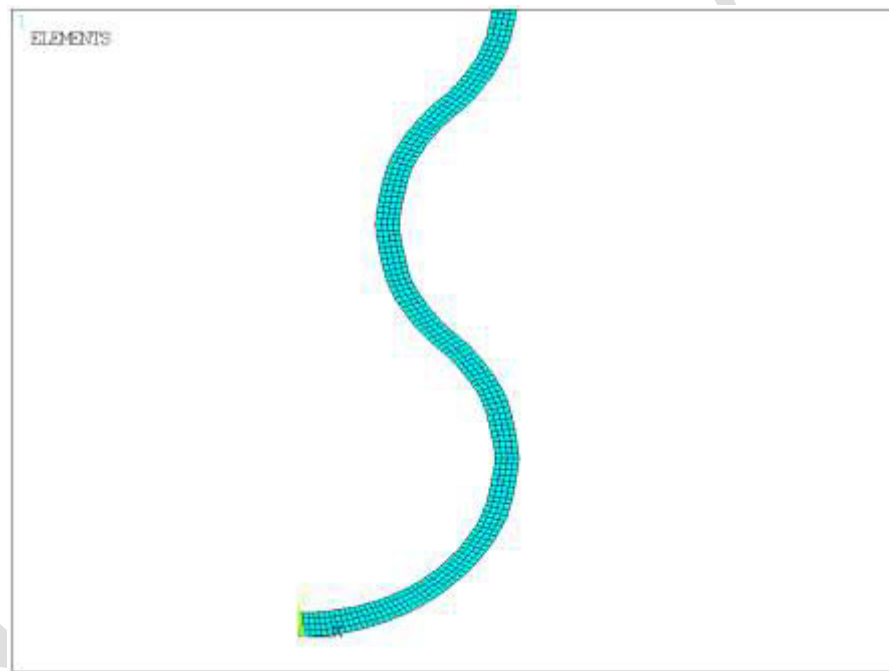


Рисунок 3.3 - Скінченно елементна модель геометрії оболонки високого тиску

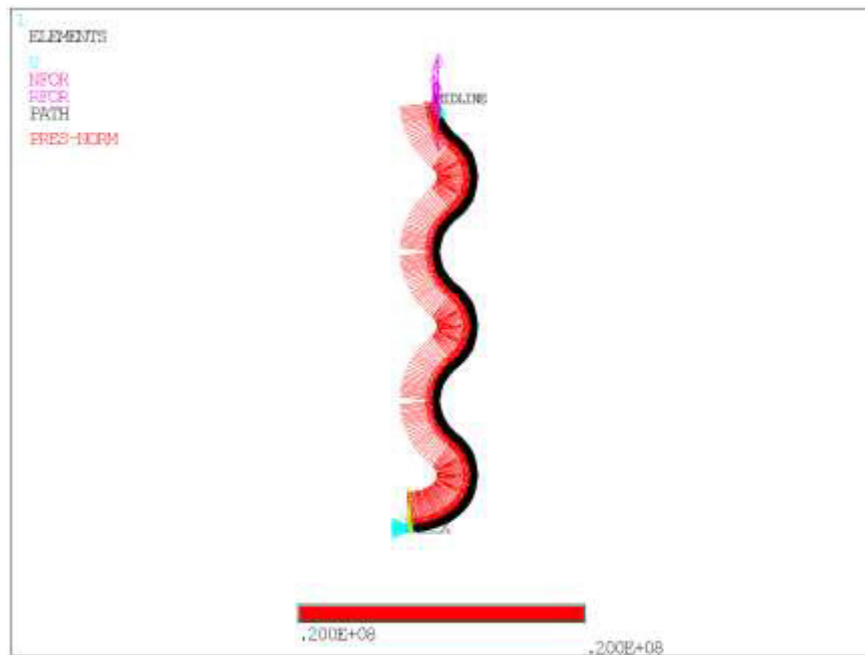


Рисунок 3.4 – Скінченно елементна модель з прикладеними граничними умовами та реакціями

Розв'язуємо скінченно-елементну модель у геометрично нелінійній постановці за допомогою прямого розв'язувача Direct solver.

## 4 ЧИСЕЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

### 4.1 Модифікований поліноміальний критерій міцності для шаруватих композитів за С.М. Верещакою.

Обираємо серед доступних критеріїв міцності модифікований поліноміальний критерій міцності за С.М. Верещакою.

Таблиця 4.1 – Технічні константи для модифікованого поліноміального критерію міцності за С.М. Верещакою.

CFRP	$\sigma_{33}^+$ , Па	$\sigma_{33}^-$ , Па	$\sigma_{11}^+$ , Па	$\sigma_{11}^-$ , Па	$\sigma_{22}^+$ , Па	$\sigma_{22}^-$ , Па	$\tau_{13}^+$ , Па	$\tau_{13}^-$ , Па	$\tau_{12}^+$ , Па	$\tau_{12}^-$ , Па	$\tau_{23}^+$ , Па	$\tau_{23}^-$ , Па
вуглепластик	1,20E+08	6,00E+08	1,24E+09	5,40E+08	1,24E+09	5,40E+08	1,80E+08	1,80E+08	3,00E+08	3,00E+08	1,80E+08	1,80E+08
	R11	R22	R33	R1111	R2222	R3333	R1212	R1313	R2323	R1122	R1133	R2233
	1,043E-09	1,043E-09	6,667E-09	1,498E-18	1,498E-18	1,389E-17	2,778E-18	7,716E-18	7,716E-18	7,054E-18	7,504E-18	7,504E-18

Значна відмінність граничних характеристик несучих шарів і властивостей проміжних міжфазних шарів обумовлює вибір тієї або іншої моделі дискретно-структурної теорії пластин і оболонки. Таким чином, для оцінки ступеня впливу послабленого міжфазного контакту шарів критерій слід записувати у модифікованому вигляді:

$$\begin{aligned}
 & R_{11}\sigma_{11} + R_{22}\sigma_{22} + R_{33}\sigma_{33} + R_{1111}\sigma_{11}^2 + R_{2222}\sigma_{22}^2 + \\
 & + R_{3333}\sigma_{33}^2 + 4R_{1212}\sigma_{12}^2 + 4R_{1313}\sigma_{13}^2 + 4R_{2323}\sigma_{23}^2 + \\
 & + 2R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2R_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2R_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} \leq 1,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

де до тензорів поверхні міцності (4.1) потрібно додати компоненти:

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{\sigma_{11}^- - \sigma_{11}^+}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+}, \quad R_{22} = \frac{\sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}, \quad R_{33} = \frac{\sigma_{33}^- - \sigma_{33}^+}{\sigma_{33}^- \sigma_{33}^+}, \quad R_{12} = \frac{\sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+}, \quad R_{1111} = \frac{1}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+}, \quad R_{3333} = \frac{1}{\sigma_{33}^- \sigma_{33}^+}, \\
 R_{2222} &= \frac{1}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}, \quad 4R_{1212} = \frac{1}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+}, \quad 4R_{2323} = \frac{1}{\sigma_{23}^- \sigma_{23}^+}, \quad 4R_{1313} = \frac{1}{\sigma_{13}^- \sigma_{13}^+}, \\
 2R_{1133} &= \frac{R_{11} - R_{33}}{\sigma_{13}^-} + R_{1111} + R_{3333} - \frac{1}{(\sigma_{13}^-)^2}, \\
 2R_{1122} &= \frac{R_{11} - R_{22}}{\sigma_{12}^-} + R_{1111} + R_{2222} + \frac{1}{(\sigma_{12}^-)^2}, \quad 2R_{2233} = \frac{R_{22} - R_{33}}{\sigma_{23}^-} + R_{2222} + R_{3333} - \frac{1}{(\sigma_{23}^-)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

При цьому вважається, що міжшарова міцність матеріалу на зсув не залежить від знака поперечних дотичних напружень, тобто  $\sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^-$ ,  $\sigma_{23}^+ = \sigma_{23}^-$ .

Сумма

## 4.2 План двофакторного чисельного експерименту з розрахунком коефіцієнтів взаємодій чинників.

Раніше вже згадувалося, що мета плану чисельного експерименту (ПЧЕ) - отримання адекватної лінійної моделі, яку передбачається використовувати для оптимізації об'єкта дослідження. У завданнях інтерполяції ж математична модель повинна адекватно описувати об'єкт в області експерименту і тому може бути нелінійною. Плани ПЧЕ, з одного боку, дозволяють досить просто розрахувати коефіцієнти при взаємодіях факторів і, якщо вони значущі, використовувати отриману модель для інтерполяційних цілей. З іншого боку, значимість коефіцієнтів при взаємодіях факторів відразу ж дозволяє зробити висновок про неадекватність лінійної моделі. Вихідні дані поповнюються умовою необхідності розрахунку коефіцієнтів при взаємодіях чинників, тобто шукається модель модифікованого поліноміального критерію міцності для шаруватих композитів за С.М. Верещакою у вигляді.

$$\hat{y} = b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{ij}x_ix_j + \dots = \sum_{u=0}^n b_u x_u + \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j \quad (4.1)$$

$$KL := \begin{pmatrix} 0.167 & 0.317 \\ 0.419 & 0.317 \\ 0.167 & 0.883 \\ 0.419 & 0.883 \\ 0.471 & 0.6 \\ 0.115 & 0.6 \\ 0.293 & 1 \\ 0.293 & 0.2 \\ 0.293 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Таблиця 4.2 - План експерименту

Номер досліду	$x_0$	План						Вихідна змінна
		Запланований			Розрахований			
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_1$
2	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	$y_2$
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	$y_3$
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	$y_4$
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	$y_5$
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	$y_6$
7	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	$y_7$
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	$y_8$

Розрахунок коефіцієнтів проводиться за рівнянням:

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} y_u, i=1,2,\dots,n, i \neq j \quad (4.2)$$

У завданнях оптимізації необхідно, щоб всі  $b_{ij}$  були незначущі, а в задачах інтерполяції навпаки – значимі. Тому для задач оптимізації завжди проводять розрахунок  $b_{ij}$  і використовують їх для перевірки адекватності моделі.

Існує ще одна перевірка нелінійності моделі оцінкою гіпотези про рівність нулю суми коефіцієнтів при квадратичних членах. З цією метою в центрі плану ставлять кілька дослідів,  $\bar{y}_0$  і обчислюють різницю  $(b_0 - \bar{y}_0)$ , яка і є оцінкою суми коефіцієнтів при квадратичних членах. Дійсно, вільний член  $b_0$ , який розраховують по рівняння:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{0u} y_u = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N y_u = \bar{y} \quad (4.3)$$

є спільною оцінкою  $\beta_0$  та  $\sum_{i=1}^n \beta_{ij}$

$$b_0 \rightarrow \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_{ij} \quad (4.4)$$

де  $\beta_0$  – вільний член рівняння регресії за генеральним сукупності експериментальних даних;  $\beta_{ij}$  – коефіцієнти при  $x_2$  і також по генеральній сукупності. Це положення впливає з ідентичності стовпців матриці планування при  $x_{0i} x_{2i}$  (вони всі рівні +1).



Тоді різниця  $(\bar{y} - \bar{y}_0) \rightarrow \sum \beta_{ij}$  може в якійсь мірі служити оцінкою кривизни поверхні відгуку вихідної змінної. Значимість цієї різниці перевіряють за умовою:

$$t_p = \frac{(b_0 - \bar{y}_0)\sqrt{N}}{S_0} > t_T \quad (4.5)$$

де  $s_0$  - середньоквадратичне відхилення помилок досвіду;  $N$  - число дослідів;  $t_T$  - табличне значення критерію Стьюдента для числа ступенів свободи дисперсії  $s=20$  і рівня значущості  $q$ . Виконання умови свідчить про значущість квадратичних членів, і потрібно їх введення в інтерполяційне рівняння або зменшення інтервалів варіювання факторів для отримання адекватної лінійної моделі.

#### Факторний експеримент другого порядку

Завданням факторного експерименту другого порядку є проведення оптимального плану досліджень, отримання нелінійної моделі та її статистичний аналіз. модель застосовується для пошуку координати оптимуму і може використовуватися для цілей інтерполяції і екстраполяції. Зазвичай факторний експеримент другого порядку використовується для опису істотно нелінійних об'єктів полиномом

$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i^2 \quad (4.6)$$

Пояснення. Побудувати плани, за якими можна отримати модель в вигляді за допомогою раніше розглянутих алгоритмів не вдається хоча б тому, що умова ортогональності в шпальтах матриці не виконується (сума елементів стовпців не дорівнює нулю). Також потрібно поставити велику кількість дослідів. Очевидно, що планування на трьох рівнях 3 п неекономічно і тому запропоновано доповнити план ПФЕ 2 п певними точками факторного простору так, щоб виконувалася умова ортогональності або ротатабельності, але при цьому число дослідів таких планів було меншим:

$$N = 2^n + 2n + N_0 < 3^n \quad (4.7)$$

де кожний доданок визначає число дослідів ПФЕ 2 п, число «Зіркових» і число нульових дослідів (в центрі плану). з формули випливає, що пропонувані плани (при  $n > 2$ ) економічніше планів на трьох рівнях (зазвичай  $N_0 = 1$ ). Великою перевагою таких планів є те, що їх можна отримувати з планів 2 п. Для побудови використовується план 2 п, лінійна модель за яким при пошуку області оптимуму виявилася неадекватною. Всі проведені експерименти залишаються, а план поповнюється певною кількістю спеціально підібраних «Зіркових» точок.

Організовані таким чином плани називаються центральними і композиційними. Загальний вигляд плану наведено в таблиці.

Таблиця 4.3 - План експеременту

Номер дослідження	$x_0$	План					Вихідна змінна
		$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	$y_3$
4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	$y_4$
5	+1	+ $\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_5$
6	+1	- $\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_6$
7	+1	0	+ $\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_7$
8	+1	0	- $\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_8$
9	+1	0	0	0	0	0	$y_9$

Вибір плеча «зіркових» точок і числа нульових точок залежить від критерію оптимальності плану. На практиці широко застосовуються ортогональні і ротатабельні плани другого порядку.

Таблиця 4.4 – Значення  $\alpha$  для різної кількості факторів

Найменування елементів плану	Число незалежних факторів			
	2	3	4	5
Ядро плану	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^{5-1}$
$\alpha$	1,00	1,215	1,414	1,547

Де формалізовані централізовані змінні геометрії – компоненти вектора  $X$ :  $X_1$  та  $X_2$  є точками варіантів чисельних експериментів плану.

$$X := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Результатом є вектор  $Y$  значень модифікованого поліноміального критерію міцності для шаруватих композитів за С.М. Верещакою у вигляді

$$Y := \begin{pmatrix} 2.21175593450133 \\ 2.86043937800452 \\ 0.425959849238334 \\ 0.3433684850021 \\ 0.683549592769272 \\ 0.719440476569911 \\ 0.334263320017118 \\ 5.0151101650216 \\ 0.662375573124671 \end{pmatrix}$$

Зворотнє перетворення вектору  $X$  на вектор пар  $k$  та  $l$ .

$$\text{KL} := \begin{pmatrix} \frac{X_{0,0} + 2.328}{7.945} & \frac{X_{0,1} + 2.121}{3.536} \\ \frac{X_{1,0} + 2.328}{7.945} & \frac{X_{1,1} + 2.121}{3.536} \\ \frac{X_{2,0} + 2.328}{7.945} & \frac{X_{2,1} + 2.121}{3.536} \\ \frac{X_{3,0} + 2.328}{7.945} & \frac{X_{3,1} + 2.121}{3.536} \\ \frac{X_{4,0} + 2.328}{7.945} & \frac{X_{4,1} + 2.121}{3.536} \\ \frac{X_{5,0} + 2.328}{7.945} & \frac{X_{5,1} + 2.121}{3.536} \\ \frac{X_{6,0} + 2.328}{7.945} & \frac{X_{6,1} + 2.121}{3.536} \\ \frac{X_{7,0} + 2.328}{7.945} & \frac{X_{7,1} + 2.121}{3.536} \\ \frac{X_{8,0} + 2.328}{7.945} & \frac{X_{8,1} + 2.121}{3.536} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.167 & 0.317 \\ 0.419 & 0.317 \\ 0.167 & 0.883 \\ 0.419 & 0.883 \\ 0.471 & 0.6 \\ 0.115 & 0.6 \\ 0.293 & 1 \\ 0.293 & 0.2 \\ 0.293 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = b_0 x_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{ij} x_i x_j + \dots = \sum_{u=0}^n b_u x_u + \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j \quad (4.6)$$

Коефіцієнти функції  $\hat{y}$  складуть

$$\begin{aligned}
 b_{0f} &:= \frac{\sum_{j=0}^{N-1} Y_j}{N} & b_{0f} &= 1.473 & b_2 &:= \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{j,1} \cdot Y_j)}{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{j,1})^2} & b_2 &= -1.365 \\
 b_1 &:= \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{j,0} \cdot Y_j)}{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{j,0})^2} & b_1 &= 0.064 & b_{12} &:= \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{j,0} \cdot X_{j,1} \cdot Y_j)}{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{j,0} \cdot X_{j,1})^2} & b_{12} &= -0.183 \\
 b_{11} &:= \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{f,j,0} \cdot Y_j)}{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{f,j,0})^2} & & & b_{11} &= -0.641 \\
 b_{22} &:= \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{f,j,1} \cdot Y_j)}{\sum_{j=0}^{N-1} (X_{f,j,1})^2} & & & b_{22} &= 0.973 \\
 b_0 &:= b_{0f} - \frac{b_{11}}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} (X_{j,0})^2 - \frac{b_{22}}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} (X_{j,1})^2 & & & b_0 &= 1.178
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Мінімізувавши функцію  $\hat{y}$  визначимо значення для шуканого варіанту №10 оптимізованою геометрією відповідає  $k = 0,287$  та  $l = 0,797$  ( $X_1 = -0,049$ ;  $X_2 = 0,697$ ).

САНДІ

### 4.3 Результати чисельних експериментів

Результати чисельних моделювань за варіантами плану чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки подано на рисунках 4.1 – 15.

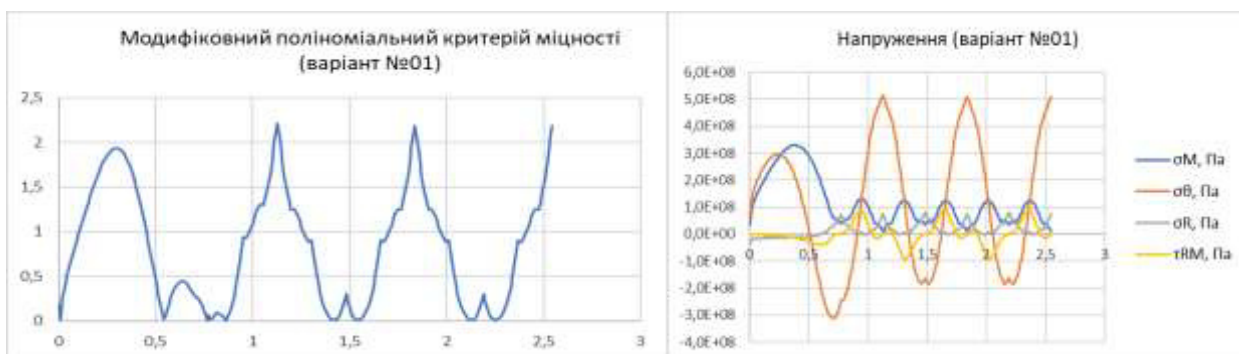


Рисунок 4.1 – Результати чисельного моделювання варіанту №1 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.

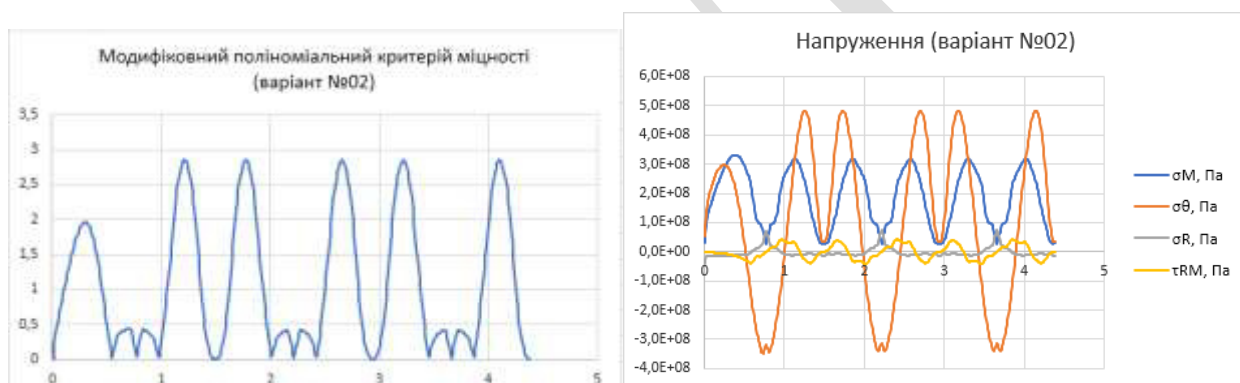


Рисунок 4.2 – Результати чисельного моделювання варіанту №2 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.

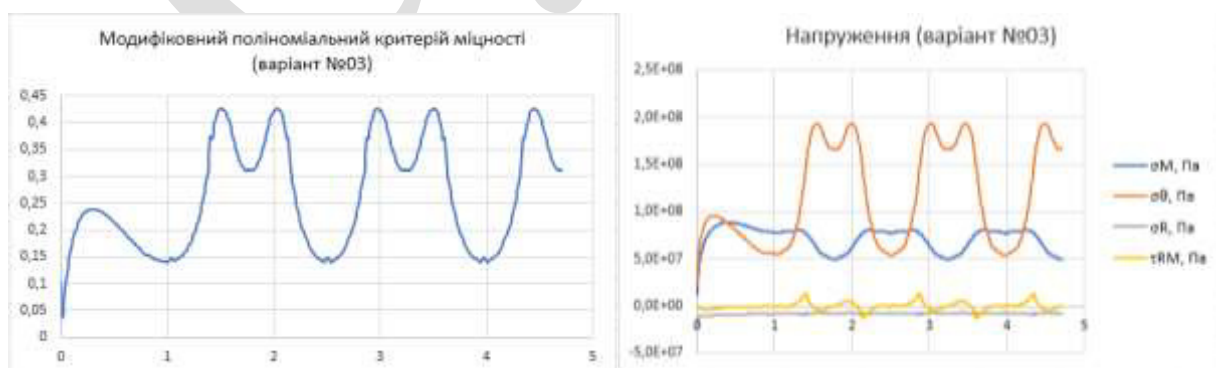


Рисунок 4.3 – Результати чисельного моделювання варіанту №3 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.

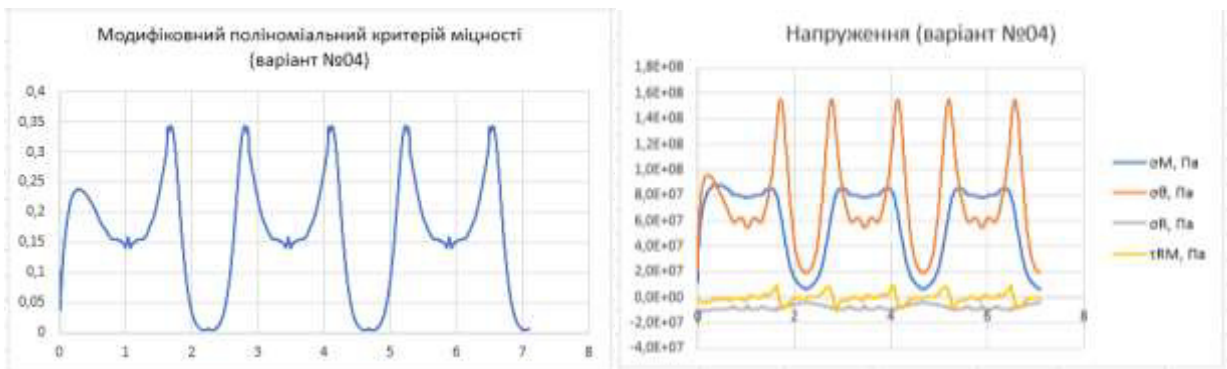


Рисунок 4.4 – Результати чисельного моделювання варіанту №4 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.

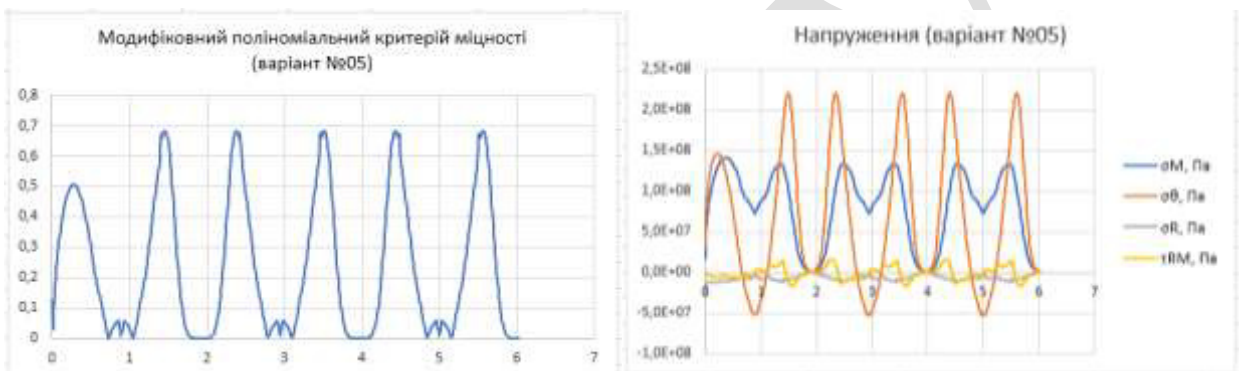


Рисунок 4.5 – Результати чисельного моделювання варіанту №5 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.

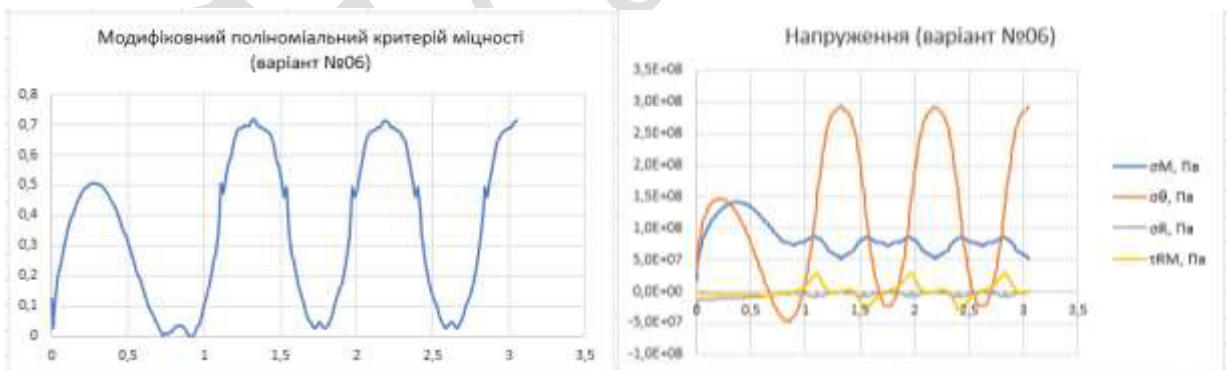


Рисунок 4.6 – Результати чисельного моделювання варіанту №6 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.

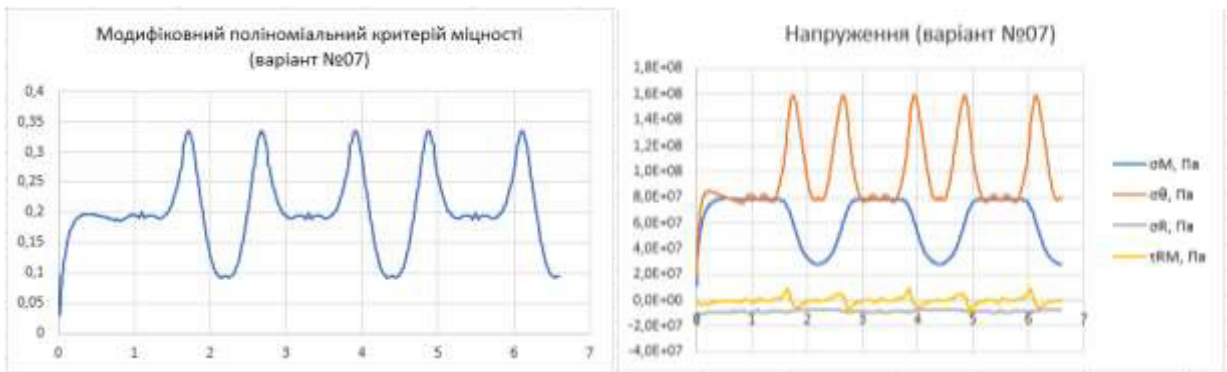


Рисунок 4.7 – Результати чисельного моделювання варіанту №7 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.

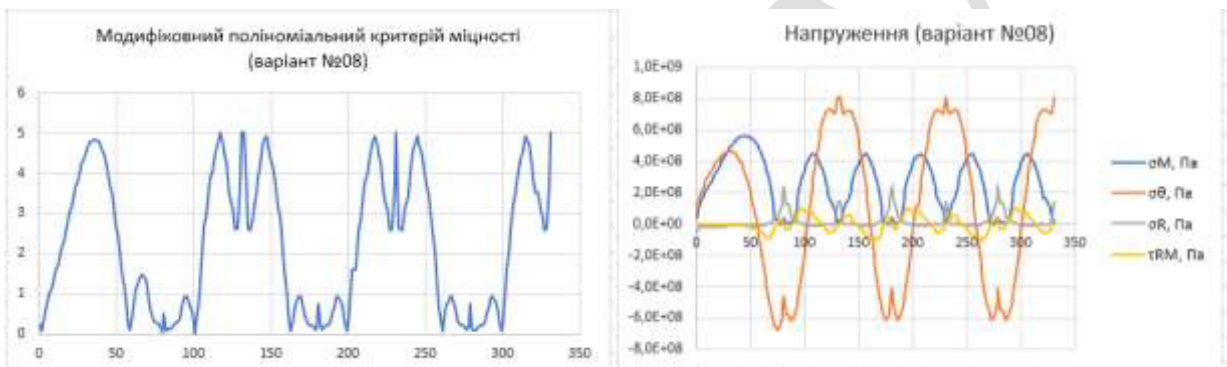


Рисунок 4.8 – Результати чисельного моделювання варіанту №8 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.

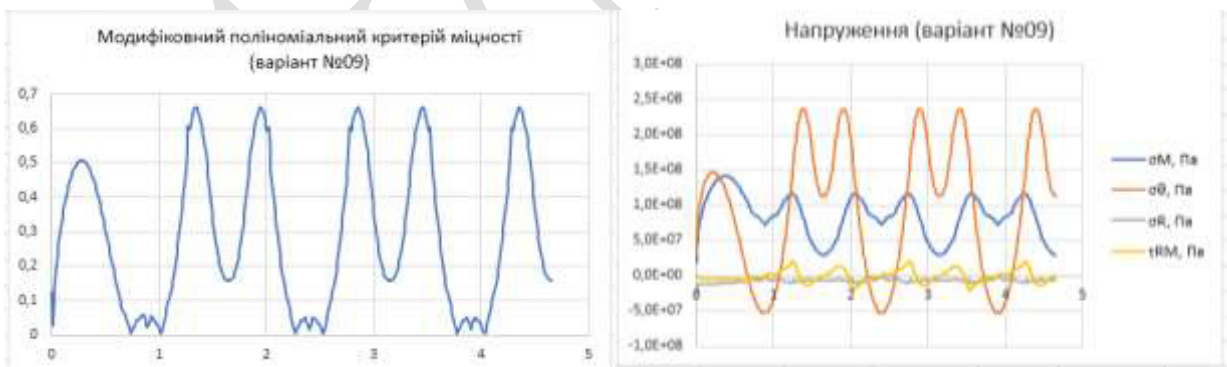


Рисунок 4.9 – Результати чисельного моделювання варіанту №9 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.



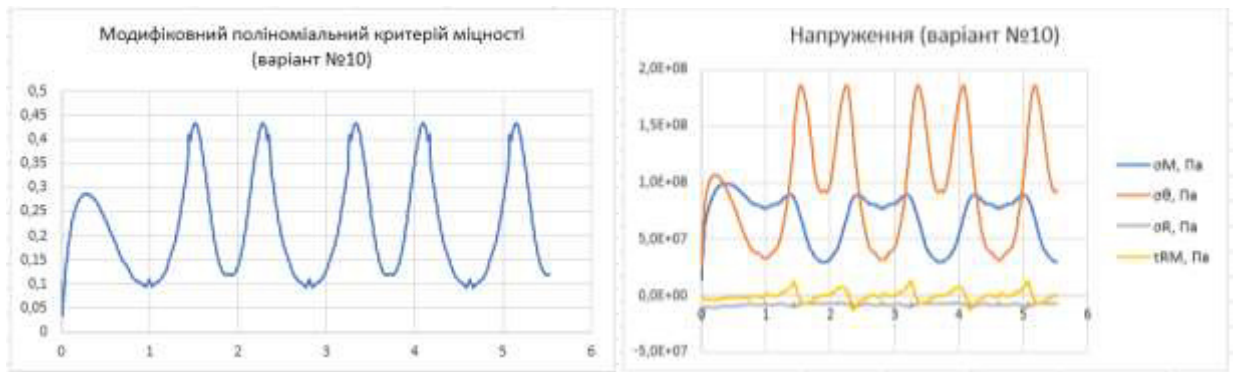


Рисунок 4.10 – Результати чисельного моделювання варіанту №10 за планом чисельного експерименту уздовж нейтральної лінії оболонки.

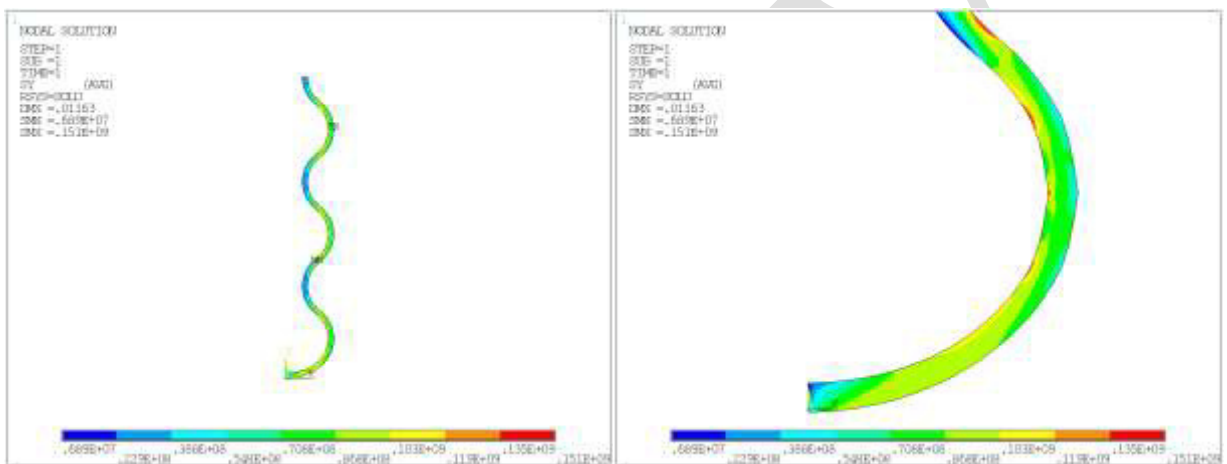


Рисунок 4.11 – Меридіональні нормальні напруження варіанту № 10 напруженого стану балону високого тиску оптимізованої геометрії  $\sigma_m$ , Па.

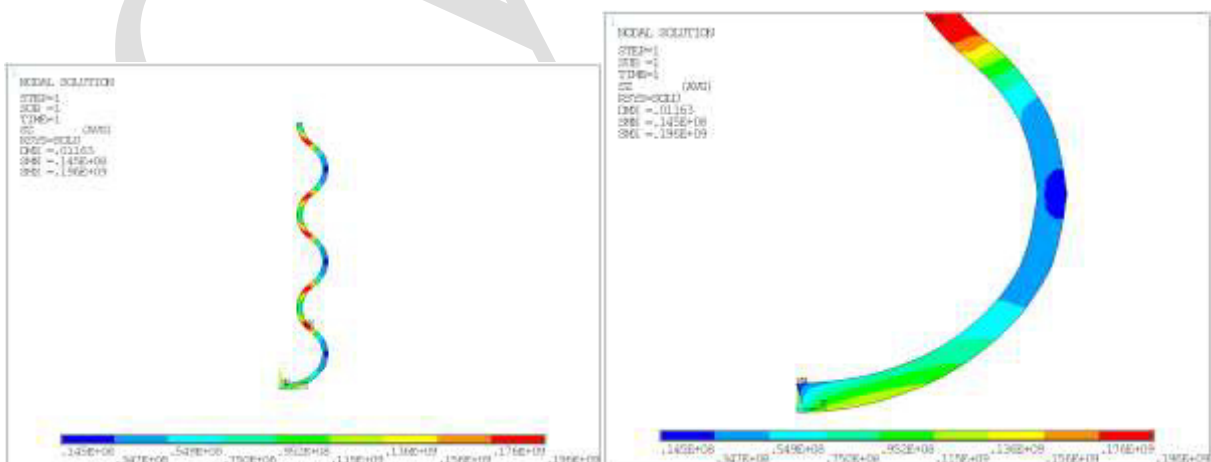


Рисунок 4.12 – Колові нормальні напруження варіанту № 10 напруженого стану балону високого тиску оптимізованої геометрії  $\sigma_\theta$ , Па.

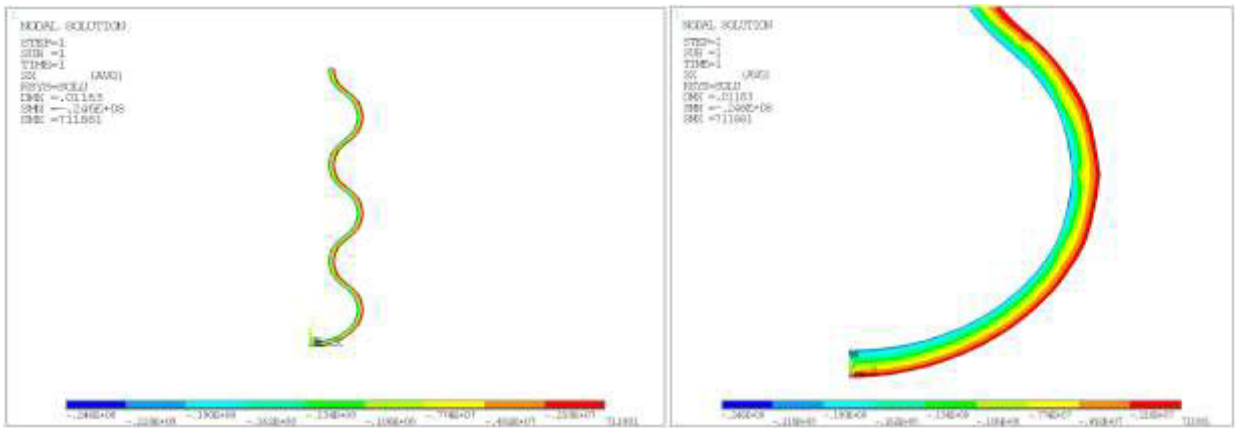
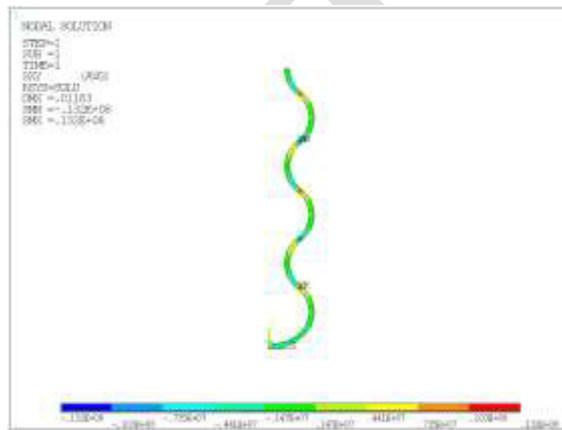


Рисунок 4.13 – Нормальні напруження трансверсального обтиснення варіанту № 10 напруженого стану балону високого тиску оптимізованої геометрії  $\sigma_R$ , Па.



Малюнок 4.14 – Дотичні напруження міжшарового зсуву варіанту № 10 напруженого стану балону високого тиску оптимізованої геометрії  $\tau_{mR}$ , Па.

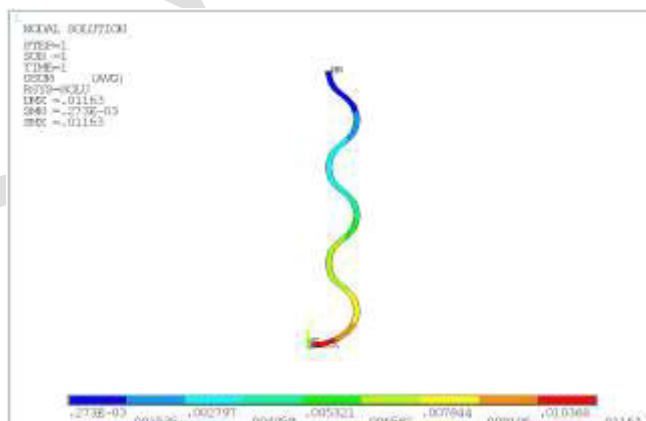


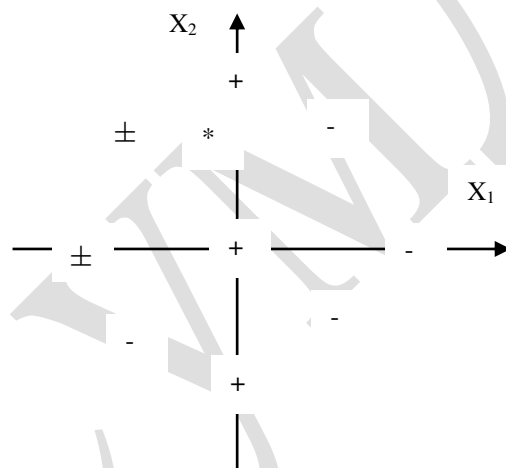
Рисунок 4.15 – Загальна абсолютна деформативна здатність варіанту № 10 напруженого стану балону високого тиску оптимізованої геометрії  $U_{sum}$ , М.

## ВИСНОВКИ

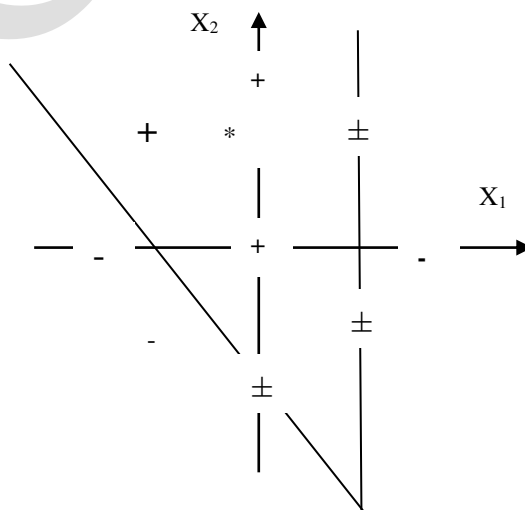
В роботі визначені пружні характеристики шаруватого композита на основі вуглепластика з відомою схемою укладання шарів; побудовано скінченно елементу модель оболонки високого тиску у вісаметричній постановці. Виконано дослідження міцності напружено-деформованого стану оболонки високого тиску за допомогою модифікованого поліноміального критерію міцності для тривимірного напруженого стану за С.М. Верещакою, і методом планування експерименту визначити раціональні розміри оболонки високого тиску з вуглепластику  $k = 0,287$  та  $l = 0,797$ .

Аналіз отриманих результатів з рисунків 4.1-4.10 дає змогу дати такі рекомендації («+» - кращі показники, «-» - гірші, а «±» - посередні; «\*» - оптимізований варіант геометрії):

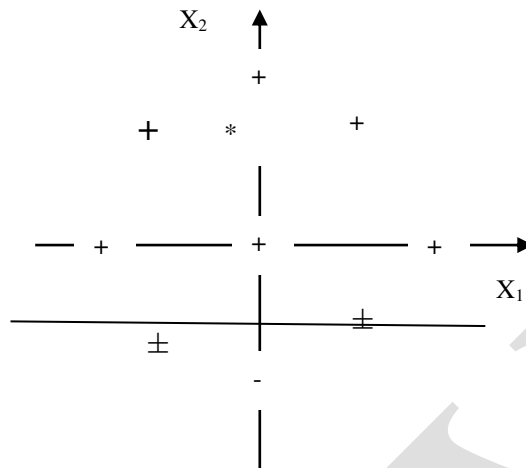
- за нормальними меридіональними напруженнями  $\sigma_m$ , Па.



- за нормальними коловими напруженнями  $\sigma_\theta$ , Па.



- за нормальним напруженням трансверсального обтиснення  $\sigma_R$ , Па та дотичним напруженням міжшарового зсуву  $\tau_{RM}$ , МПа

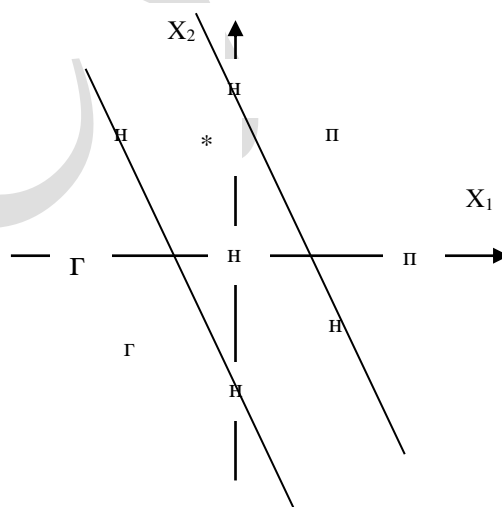


Загальні висновки, отримані протягом проведення чисельного експерименту:

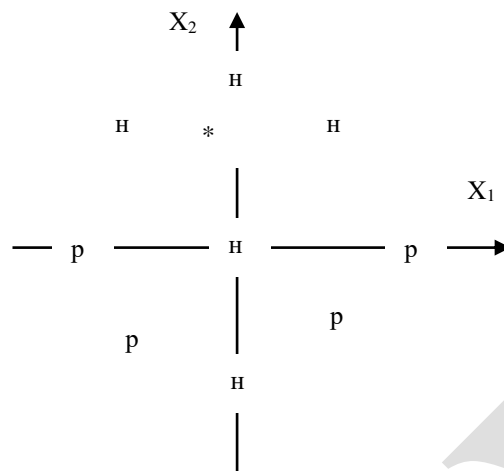
1. Область що відповідає кришці менш небезпечна для всіх варіантів.
2. Область еліптичних гофрів містить проблемні з точки зору міцності ділянки, що вимагають аналізу.

Аналіз графіків поліноміального критерію міцності:

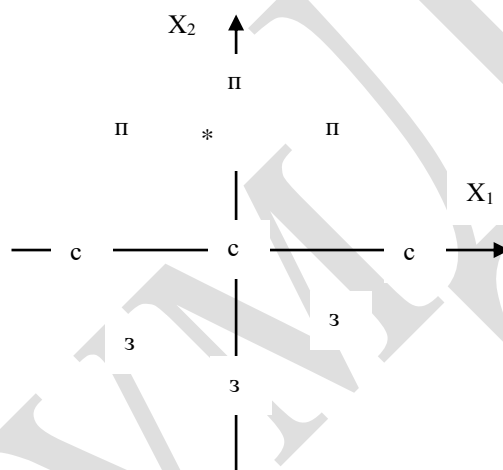
- за гостротою вершин графіків («Г» - гострі, «П» - підгострі, «Н» - негострі);



- за рівномірністю розподілення значень критерію міцності («р» - рівномірні, «н» - нерівномірні);



- за абсолютною величиною («п» - помірні, «с» - середні, «з» - значні).



Рівномірність розподілу значень модифікованого критерію міцності вздовж меридіана є сутово нелінійним і вимагає додаткового дослідження, але на даному етапі маємо зазначити, що чим більше у дослідах буде  $l$  – тим буде більш оптимізована структура.

## Перелік використаних джерел

1. Алфутов Н. А. Розрахунок багатошарових пластин і оболонок з композиційних матеріалів / Н. А. Алфутов, П. А. Зінов'єв, Б. Г. Попов. - М.: Машинобудування, 1984. - 264 с.
2. Амбарцумян С. А. Загальна теорія анізотропних оболонок / С. А. Амбарцумян. - М.: Наука, 1974. - 448 с.
3. Амбарцумян С. А. Теорія анізотропних пластин / С. А. Амбарцумян. - М.: Наука, 1987. - 360 с.
4. Андреев Л. В. Стійкість оболонок при неосесиметричних деформації / Л. В. Андреев, Н. І. Ободан, А. Г. Лебедєв. - М.: Наука, 1988. - 208 с.
5. Баженов В. А. Розрахунок композитних конструкцій з урахуванням розшарування / В. А. Баженов, М. А. Гоцуляк, А. Л. Оглобля, Ю. Л. Дінкевич, О. В. Геращенко. - К.: Будівельник, 1992. - 136 с.
6. Баженов В. А. Нелінійні задачі механіки багатошарових оболонок / В. А. Баженов, А. С. Сахаров, А. В. Гондла, С. Л. Мельников. - К.: НДІ Будмеханіка, 1994. - 264 с.
7. Болотін В. В. Механіка багатошарових конструкцій / В. В. Болотін, Ю. Н. Новачків. - М.: Машинобудування, 1980. - 375 с.
8. Ванін Г. А. Мікромеханіка композиційних матеріалів / Г. А. Ванін. - К.: Наук. думка, 1971. - 304 с.
9. Васильєв В. В. Механіка конструкцій з композиційних-них матеріалів / В. В. Васильєв. - М.: Машинобудування, 1988. - 272 с.
10. Верещака С. М. Нелінійне деформування і стійкість багатошарових елементів конструкцій з дефектами структури: монографія / С. М. Верещака. - Суми: Вид-во СумДУ, 2009. - 286 с.
11. Галімов Ш. К. Уточнені теорії пластин і оболонок / Ш. К. Галімов. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-ту, 1990. - 134 с.

12. Гріголюк Е. І. Багатошарові армовані оболонки: розрахунок пневматичних шин / Е. І. Гріголюк, Г. М. Куликов. - М.: Машинобудування, 1988. - 280 с.
13. Григоренко Я. М. Ізотропні і анізотропні шаруваті оболонки обертання змінної жорсткості / Я. М. Григоренко. - Київ: Наук. думка, 1973. - 228 с.
14. Григоренко Я. М. Завдання статички анізотропних не-однорідних оболонок / Я.М. Григоренко, А.Т.Васіленко. - М.: Наука, 1992. - 336 с.
15. Григоренко Я. М. Статика анізотропних товсто-стінних оболонок / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д. Панкратова. - К.: Вища шк., 1985. - 190 с.
16. Григоренко Я. М. Задачі теорії пружності неоднорідних тіл / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д. Панкратова. - К.: Наук. думка, 1991. - 216 с.
17. Гузь А. Н. Механіка руйнування при стискуванні композитних матеріалів / А. Н. Гузь. - К.: Наук. думка, 1990. - 630 с.
18. Гуляєв В. І. Некласична теорія оболонок і її додаток до рішення інженерних задач / В. І. Гуляєв, В. А. Баженов, П. П. Лізунов. - Львів: Вид-во при Львів. ун-ті, 1978. - 192 с.
19. Ісаханов Г. В. Міцність армованих пластиків і сіталов / Г. В. Ісаханов, А. Е. Журавель. - М.: Машино-будування, 1981. - 234 с.
20. Кантор Б.Я. Нелінійні задачі теорії неоднорідних пологих оболонок / Б. Я. Кантор. - К.: Наук. думка, 1971. - 136 с.
21. Кантор Б.Я. Контактні задачі нелінійної теорії оболонок обертання / Б. Я. Кантор // АН УРСР. Ін-т проблем машинобудування. - Київ: Наук. думка, 1990. - 135 с.
22. Кільчевський Н. А. Основи аналітичної механіки оболонок / Н. А. Кільчевський. - К.: Вид-во АН УРСР, 1972. - 354 с.

23. Композиційні матеріали: довідник / під ред. В. В. Васильєва та Ю. М. Тарнопольського. - М.: Машинобудування, 1990. - 512 с.
24. Корольов В. І. Шаруваті анізотропні пластинки і оболонки з армованих пластмас / В. І. Корольов. - М.: Машинобудування, 1965. - 272 с.
25. Крістенсен Р. Введення в механіку композитів / Р. Крістенсен - М.: Мир, 1982. - 334 с.
26. Олійник Є. О. Оптимізація геометрії суцільно композитного водневого балона високого тиску / Олійник Є. О., Жигилій Д. О. // Сучасні технології у промисловому виробництві: матеріали та програма VIII Всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Суми, 20–23 квітня 2021р.) / редкол.: О. Г. Гусак, І. В. Павленко. – Суми: Сумський державний університет, 2021. – С. 98.