

УДК 531+531.19
УКПП
№ держреєстрації 0118U004130
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
40007, м.Суми, вул. Римського-Корсакова, 2
тел/факс: (0542)33-40-49; e-mail: achornous@sci.sumdu.edu.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи,
д-р фіз.-мат. наук, проф.

_____ А. М. Черноус

М. П.

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ
ФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ В НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ РІЗНОЇ ПРИРОДИ
(остаточний)

Начальник НДЧ
канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. _____ Д. І. Курбатов

Науковий керівник НДР
канд. фіз.-мат. наук, старший викладач _____ А. М. Вітренко

2020

Рукопис закінчено _____ 2020 р.

Результати роботи розглянуто науковою радою СумДУ,
протокол від _____ 2020 р. № _____

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР,
канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач

А. М. Вітренко
(реферат; вступ; розділи
1, 2, 3, 4; висновки, реко-
ментації)

Виконавці:
Студент гр. ЕП.м-82

М. В. Кругляк
(розділ 2)

Студент гр. ЕП.м-92

К. В. Макаренко
(розділ 3)

Студент гр. ЕП.м-91н

Є. М. Миронов
(розділ 4)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 76 с., 45 рис., 65 джерел

ДИНАМІЧНА СИСТЕМА, БІЛИЙ ШУМ, КОРЕЛЯЦІЯ, ЩІЛЬНІСТЬ ЙМОВІРНОСТІ, ІНДУКОВАНІ ШУМОМ ПЕРЕХОДИ, БІФУРКАЦІЯ, ДИНАМІЧНИЙ ХАОС, СПЕКТР КОЛИВАНЬ, ВІРТУАЛЬНИЙ СТЕНД, LABVIEW

Об'єкт дослідження – процеси в динамічних системах з регулярною, хаотичною, стохастичною поведінкою.

Ціль роботи: а) дослідити переходи, індуковані взаємно корельованими гаусівськими білими шумами, методами теорії катастроф; б) розробити віртуальні стенди для демонстрації різних типів поведінки динамічних систем методом комп'ютерного моделювання.

Із загальних міркувань показано, що індуковані шумами переходи від одно-модального (з одним максимумом) ймовірнісного розподілу стану системи до дво-модального (з двома максимумами) можуть якісно описуватися нормальною формою біфуркації типу вил, що збурюється єдиним адитивним гаусівським білим шумом. Розглянуто конкретний приклад динамічної системи, приведені ілюстрації. Для моделі, яка в свій час вводилась із математичних міркувань, на сьогодні не виявлено застережень щодо опису нею процесів в природі.

В середовищі LabVIEW розроблено віртуальні стенди для демонстрації: хаотичної поведінки для одновимірного відображення з нелінійністю типу функції Гауса, помноженої на її аргумент, що описує сигнали електронного автогенератора з запізненням; випадкової – для процесів Вінера й Орнштейна-Уленбека та генетичної моделі; регулярної – для послідовного коливального контуру. Віртуальні стенди є науково-обґрунтованими і можуть бути впровадженні в якості електронних засобів навчального призначення, в особливості в змішаному та дистанційному навчанні.

ЗМІСТ

ВСТУП	6
1 МЕТОД ЕФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ДОСЛІДЖЕННІ ПЕРЕХОДІВ, ІНДУКОВАНИХ ВЗАЄМНО КОРЕЛЬОВАНИМИ ГАУСІВСЬКИМИ БІЛИМИ ШУМАМИ	11
1.1 Математична модель динамічної системи з двома шумами.....	11
1.2 Метод ефективного потенціалу	12
1.3 Приклад системи з лінійною відновлювальною силою та нелінійним мультиплікативним фактором.....	16
1.4 Висновки до розділу 1.....	20
2 ВІРТУАЛЬНИЙ СТЕНД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ШУМОПОДІБНИХ СИГНАЛІВ АВТОГЕНЕРАТОРА З ЗАПІЗНЕННЯМ ...	21
2.1 Математична модель хаотичних коливань	21
2.2 Опис віртуального стенда	22
2.3 Результати досліджень сигналів генератора.....	28
2.4 Висновки до розділу 2.....	37
3 ВІРТУАЛЬНИЙ СТЕНД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ІНДУКОВАНИХ ШУМОМ ПЕРЕХОДІВ	38
3.1 Класична модель індукованих шумом переходів.....	38
3.2 Методика проведення комп'ютерного експерименту	39
3.3 Опис віртуального стенда	41
3.4 Результати дослідження випадкових процесів	44
3.5 Висновки до розділу 3.....	50
4 ВІРТУАЛЬНИЙ СТЕНД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАЛЬНИХ КОНТУРІВ	52
4.1 Математична модель вимушених коливань.....	52
4.2 Опис віртуальних стендів	54
4.3 Результати досліджень осцилограм	58
4.4 Кількісна перевірка результатів досліджень	62

4.4.1 Вільні коливання заряду та сили струму	62
4.4.2 Затухаючі коливання заряду та сили струму	63
4.4.3 Вимушені коливання заряду та сили струму	64
4.5 Висновки до розділу 4.....	65
ВИСНОВКИ	67
РЕКОМЕНДАЦІЇ	69
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ	70

ВСТУП

Сучасна динаміка є міждисциплінарною наукою, в якій вивчається зміна стану систем з часом та його причини [1]. Вона бере початок в законах Ньютона, спирається на теорію диференціальних рівнянь, охоплює не тільки класичну механіку з іншими розділами фізики, а також електроніку, хімію, біологію, економіку. Центральним поняттям динаміки слугує динамічна система. Розрізняють три типи її поведінки: регулярна, хаотична та стохастична [2-4].

Стохастична динаміка властива системам, які знаходять під впливом одного або декількох джерел шуму. Причому останні всюдишчі і породжуються дискретною будовою матерії [5], її тепловим або турбулентним рухом. У теоретичних дослідженнях широко застосовується так званий білий шум [4-6], для якого автокореляція задається дельта-функцією, а спектр коливань, відповідно, набуває вигляду плато в нескінченному інтервалі частот. Він має нескінченну потужність і не може бути на практиці реалізований. Однак будь-який фізичний шум з плоским спектром в обмеженому діапазоні частот може бути добре апроксимований білим шумом, якщо характерні частоти динамічної системи набагато нижче максимальної шумової частоти. Приклади: випадкова сила, що діє на броунівську частинку з боку оточуючих її молекул рідини (сила Ланжевена); флуктуації електричної напруги на опорі (шум Джонсона-Найквіста) та інше. Обмежений за частотою білий шум знаходить і практичне використання, наприклад, в електроніці для обчислення частотної характеристики лінійних динамічних систем – електронних фільтрів, підсилювачів і т.п. [7-8]. Він як зондувальний сигнал подається на вхід такої системи. А пропускаючи вихідний сигнал через аналізатор спектра, отримують шукану залежність.

Прикладом нелінійної системи служить лампа біжної хвилі (ЛБХ) – вакуумний електронний прилад, робота якого ґрунтується на взаємодії біжної електромагнітної хвилі та електронного потоку, що рухаються в одному напрямку [9]. Призначена для генерування та (або) підсилення коливань надвисоких частот (НВЧ) в діапазоні від 300 МГц до 300 ГГц. На відміну від твердотільної електроніки, ЛБХ є

потужним і високонадійним приладом, стійким до впливу інтенсивного електромагнітного випромінювання і радіації. Тому вона і на сьогодні залишається затребуваною [10-15]. Сфери застосування: супутниковий зв'язок, радіолокація, системи запуску ракет тощо. Основні недоліки ЛБХ – значні маса і розміри. Один із способів їх зниження полягає у використанні холодних катодів на основі вуглецевих нанотрубок [16]. Також розроблена концепція вуглецевої нанотрубки як мономолекулярної ЛБХ [17,18].

Дві ЛБХ, замкнуті в кільце, утворюють електронний пристрій – генератор хаотичних (шумоподібних) коливань. Подібно тому, як оптичні квантові генератори (лазери) є джерелами вузькосмугового світла, генератори хаотичних коливань є джерелами широкосмугових аналогових шумоподібних коливань [19,20]. Останні пристрої застосовуються в системах радіоелектронної боротьби. Виникнення шумоподібних коливань в ЛБХ-генераторах із запізнілим зворотним зв'язком пов'язане з фундаментальним явищем – динамічним хаосом [1-3,21], при якому нелінійна, виключно детермінована система, будучи чутливою до малих збурень початкових умов, поводить себе непередбачувано, як і випадкова (стохастична) система. Тому шумоподібні коливання, як і шуми, характеризуються суцільними спектрами і швидко спадаючими до нуля автокореляційними функціями.

Інтерес до вивчення електронних генераторів хаосу, як і до самих шумоподібних коливань, також пояснюється тим, що останні можуть бути використані в комунікаційних електронних системах в якості несущих або модульованих інформаційними сигналами коливань [22-27]. Традиційно як носії інформації використовуються гармонічні коливання (радіо, телебачення, мобільний і супутниковий зв'язок, Wi-Fi тощо). Але хаотичні коливання мають більшу інформаційну ємність, ніж гармонічні. Тому це надає можливість збільшити або швидкість передачі інформації, або кількість каналів зв'язку.

При дослідженнях у галузі нелінійної динаміки, в тому числі стохастичних явищ, широке застосування знаходять аналогові електронні схеми [28-30]. Їх проектувати, збирати та використовувати в лабораторному експерименті значно простіше та економніше, ніж звичайні натурні установки. Для моделювання за

допомогою аналогової електронної схеми того чи іншого процесу використовується його диференціальне рівняння. При цьому дослідницький стенд містить відповідні електронні пристрої – суматори, помножувачі, інтегратори тощо. На вхід аналогової електронної схеми подається сигнал відомої форми з генератора, вихідний сигнал вивчається за допомогою осцилографа, аналізатора спектра тощо.

Комп'ютерне моделювання, в свою чергу, простіше за аналогове. Все, що необхідно мати, – персональний комп'ютер і відповідне програмне забезпечення. На роль останнього добре підходить середовище LabVIEW з візуальною мовою програмування, створене не для програмістів, а для інженерів (в тому числі і в сфері електроніки), яке дозволяє зосереджуватися на віртуальних приладах і зв'язках між ними, а не написанні програмного коду [31-33]. Воно має високий функціонал, зручне графічне меню. Величезна бібліотека функцій та віртуальних інструментів дозволяє виконувати як прості алгебраїчні операції над числами, так і чисельно розв'язувати диференціальні рівняння, візуалізувати дані тощо.

Віртуальні стенди, розроблені в LabVIEW, використовуються не тільки в наукових дослідженнях, а і в навчальних [34-40]. Електронні засоби навчального призначення призводять до підвищення ефективності навчання, спонукають студентів, учнів до активної навчальної діяльності, самонавчання [41,42]. Особливу роль такі засоби відіграють в дистанційному та змішаному навчанні [43].

Одним з видів електронних засобів навчання є інтерактивні демонстрації або віртуальні лабораторні роботи. Знамениті безкоштовні інтерактивні демонстрації для природничих наук і математики можна знайти на сайті PhET University of Colorado Boulder. Проект заснований у 2002 році лауреатом Нобелівської премії з фізики Карлом Віманом. PhET-симуляції є науково-обґрунтованими і спонукають учнів до навчальних досліджень з використанням інтуїції в середовищі, подібному до гри. Вони написані на Java, Flash або HTML5 і можуть бути виконані прямо в Інтернеті або завантажені на комп'ютер. Перекладені на 93 мови світу, в тому числі українську. Постійно оновлюються і доповнюються новими зразками [44].

Коливальний контур – електрична схема, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора C , котушки індуктивності L та резистора R . На основі нього

побудовано багато електронних пристроїв: фільтри, генератори [28]. Деякі пристрої, наприклад, кварцовий генератор, репрезентуються еквівалентним коливальним контуром [29]. Щоб розуміти принцип їх роботи, треба знатися на роботі коливального контуру і процесах, що в ньому відбуваються.

Актуальність теми. Зазвичай шум є завадою, він дезорганізує поведінку системи, приводячи до розмазування її стану поблизу середнього значення. Однак в нелінійних динамічних системах шум може відігравати конструктивну роль, як і в явищі індукованих шумом переходів [6,45-48], при яких щільність ймовірності стану системи не тільки розпливається, а й якісно трансформується, наприклад, з одномодальної у двомодальну. Можна відзначити, що важливу роль при експериментальному дослідженні даного явища грають електронні аналогові схеми [6,48,49], що містять генератори широкосмугового гаусівського шуму з постійною спектральною щільністю.

Вплив мультиплікативного й адитивного шумів, їх взаємної кореляції на форму ймовірнісного розподілу стану деяких абстрактних динамічних систем вивчається в [50-52]. (Про абстрактні моделі написано, наприклад, в [52,53]). Мета даної роботи – записати ефективний (ймовірнісний) потенціал і розкласти його в степеневий ряд в околі критичної точки. Це дозволить переходах, індукованих взаємно корельованими шумами, надати не тільки наочності, а й дослідити їх за допомогою теорії катастроф [6,48,54]. Згідно неї існує всього декілька форм розкладів потенційних функцій в ряд Тейлора. Однією з них є катастрофа типу збірки, з якою пов'язана біфуркація типу вил. Приклади розкладань в ряд Тейлора ефективних потенціалів для класичних моделей теорії індукованих шумом переходів – генетичної моделі [55] та моделі Хонглера [56] – можна знайти в роботі [57].

В роботі [58] описується моделювання в середовищі LabVIEW логістичного відображення – однієї з найпростіших систем, що уможливають генерування хаотичних сигналів. В даній роботі ми розглядаємо одновимірне відображення з нелінійністю типу функції Гауса, помноженої на її аргумент, що описує хаотичні коливання в ЛБХ-генераторі.

Вивчення коливального контуру і процесів в ньому передбачено навчальними програмами з дисципліни «Фізика» як для студентів, так і школярів. Але в підручниках ми можемо спостерігати лише статичні графіки для заданих значень параметрів системи. Можливість спостерігати осцилограми коливального контуру в динаміці має призвести до більшого розуміння коливальних процесів в ньому. Метою роботи є розробка віртуального стенда в LabVIEW для дослідження коливального контуру, який можна було б використовувати як інтерактивну демонстрацію для навчання студентів і школярів.

1 МЕТОД ЕФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ДОСЛІДЖЕННІ ПЕРЕХОДІВ, ІНДУКОВАНИХ ВЗАЄМНО КОРЕЛЬОВАНИМИ ГАУСІВСЬКИМИ БІЛИМИ ШУМАМИ

1.1 Математична модель динамічної системи з двома шумами

Стохастичне диференціальне рівняння динамічної системи в загальній формі має вигляд [50,51]

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sigma_1 g(x(t)) \xi_1(t) + \sigma_2 \xi_2(t), \quad (1.1)$$

де $x(t)$ – параметр стану системи, є випадковим процесом;

крапка – похідна за часом t ;

$f(x)$ – детермінована сила, $f(x) = -V'(x)$;

$V(x)$ – детермінований потенціал;

штрих – похідна за x ;

$\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$ – мультиплікативний та адитивний гаусівські білі шуми з амплітудами σ_1 і σ_2 ($\sigma_1 \geq 0$ і $\sigma_2 \geq 0$, ми говоримо «амплітуди» в тому сенсі, що їх квадрати визначають інтенсивності шумів);

$g(x)$ – просторова складова амплітуди мультиплікативного шуму (мультиплікативний фактор).

Середні значення шумів дорівнюють нулю, кореляційні функції задаються виразом:

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta(t - t') \begin{cases} 1, & i = j \\ r & i \neq j \end{cases}, \quad (1.2)$$

де кутові дужки означають статистичне усереднення;

$\delta(t)$ – дельта-функція Дірака;

r – коефіцієнт кореляції між шумами, $|r| \leq 1$.

Всі величини в рівнянні (1.1) безрозмірні. Для параметра стану системи приймаються природні граничні умови, тобто $x(t) \in (-\infty, \infty)$. Для мультиплікативного

шуму вводиться параметр λ , $\lambda \in [0, 1]$, який визначає числення стохастичного диференціального рівняння. Зокрема, значення $\lambda = 0$ відповідає численню Іто, значення $\lambda = 1/2$ – численню Стратоновича.

Рівняння (1.1) має перший порядок. Якщо $x(t)$ – координата частинки, наприклад броунівської, тоді її швидкість пропорційна силі. Це випадок так званого сильного загасання. Він відповідає одновимірному руху в досить в'язкому середовищі, при якому інерційними властивостями частинки можна знехтувати. Якщо $x(t)$ трактується як швидкість частинки, тоді вже її прискорення пропорційне силі, що узгоджується з добре відомим другим законом динаміки Ньютона. В електронних генераторах $x(t)$ – це сила струму, в хімічній кінетиці – концентрація реагенту, в динаміці біологічної популяції – її чисельність, приклади можна наводити і далі.

Рівноважна щільність ймовірності того, що $x(t) = x$ при $t \rightarrow \infty$ для системи (1.1)–(1.2), має вигляд

$$P(x) = NB^{\lambda-1}(x) \exp \left[\int_0^x \frac{f(y)dy}{B(y)} \right], \quad (1.3)$$

де N – константа нормування, яка визначається з умови $\int_{-\infty}^{\infty} P(x) = 1$;

$2B(x)$ – коефіцієнт дифузії, рівний

$$B(x) = \frac{\sigma_1^2}{2} g^2(x) + r\sigma_1\sigma_2 g(x) + \frac{\sigma_2^2}{2}; \quad (1.4)$$

$\sigma_1^2/2$ і $\sigma_2^2/2$ – інтенсивності мультиплікативного і адитивного шумів.

1.2 Метод ефективного потенціалу

Для знаходження ефективного потенціалу перейдемо від рівняння (1.1) з двома шумами, враховуючи їх характеристики (1.2), до статистично еквівалентного стохастичного диференціального рівняння з одним адитивним шумом:

$$\dot{x}(t) = -U'(x(t)) + \zeta(t), \quad (1.5)$$

де $U(x)$ – ефективний потенціал, є детермінованою функцією;

$\zeta(t)$ – гаусівський білий шум з нульовим середнім значенням і кореляційної функцією $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \delta(t - t')$.

При цьому амплітуда ефективного шуму $\zeta(t)$ приймається рівною одиниці: всі параметри системи (1.1)–(1.2) входять в ефективний потенціал $U(x)$. Рівняння (1.5) описує одновимірний рух уявної броунівської частинки в зовнішньому силовому полі з потенціалом $U(x)$ в наближенні сильного загасання. Рівноважна щільність ймовірності для її координати x задовольняє експоненціальному розподілу Больцмана:

$$P(x) = Ne^{-2U(x)}. \quad (1.6)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (1.3) і (1.6), виразимо ефективний потенціал:

$$U(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{f(y)dy}{B(y)} + \frac{1}{2}(1 - \lambda) \ln B(x). \quad (1.7)$$

Він визначається з точністю до довільної константи. Якщо амплітуда мультиплікативного шуму дорівнює нулю ($\sigma_1 = 0$), тоді вирази (1.7) і (1.6), відповідно, набудуть вигляду

$$U(x) = \frac{V(x)}{\sigma_2^2} \text{ і } P(x) = N \exp \left[-\frac{2V(x)}{\sigma_2^2} \right].$$

В цьому випадку потенціали, ефективний $U(x)$ і детермінований $V(x)$, якісно однакові. Для адитивного теплового шуму його інтенсивність $\sigma_2^2/2$ пропорційна абсолютній температурі.

Розкладемо ефективний потенціал (1.7) в ряд за ступенями x в околі точки $x = 0$ за формулою Маклорена:

$$U(x) = \sum_{k=0}^n u_k x^k, \quad (1.8)$$

де $u_k = U^{(k)}(0)/k!$ (верхній індекс у круглих дужках позначає порядок похідної). Ми вважаємо, що при індукованих шумами переходах якісні зміни рівноважної щільності ймовірності системи, а значить й ефективного потенціалу, відбуваються локально в околі точки $x = 0$ (якщо ж це не так, то можна виконати відповідне перетворення координати). Запишемо першу похідну ефективного потенціалу (1.7):

$$U'(x) = \frac{F(x)}{2B(x)}, \quad (1.9)$$

де $F(x) \equiv -f(x) + (1 - \lambda)B'(x)$.

Для подальшого обчислення похідних вищих порядків від $U(x)$ можна або послідовно диференціювати вираз (1.9), або використовувати формулу Лейбніца для k -ої похідної від добутку двох функцій [59]:

$$U^{(k+1)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^k C_k^m F^{(k-m)}(x) \left[\frac{1}{B(x)} \right]^{(m)}, \quad (1.10)$$

де C_k^m – біноміальний коефіцієнт.

У даній роботі розглядаються такі індуковані шумами переходи, при яких рівноважна щільність ймовірності системи з одномодалної (з одним максимумом) перетворюється в двомодальну (з двома максимумами), а ефективний потенціал, відповідно, з одноямного – в двох'ямний. Тому ми очікуємо, що в розвиненні (1.8) для якісного описання можна обмежитися членом четвертого порядку. З виразу (1.10) випливає

$$\begin{aligned} U''(x) &= \frac{F'}{2B} - \frac{FB'}{2B^2}, \\ U'''(x) &= \frac{F''}{2B} - \frac{FB'' + 2F'B'}{2B^2} + \frac{FB'^2}{B^3}, \\ U^{(4)}(x) &= \frac{F'''}{2B} - \frac{FB''' + 3F'B'' + 3F''B'}{2B^2} + \frac{3FB'B'' + 3F'B'^2}{B^3} - \frac{3FB'^3}{B^4}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

де $F \equiv F(x)$ і $B \equiv B(x)$.

Беручи до уваги вирази (1.9) і (1.11), обмежимося першими чотирма похідними коефіцієнта дифузії (1.4):

$$\begin{aligned} B' &= \sigma_1^2 g g' + r \sigma_1 \sigma_2 g', \\ B'' &= \sigma_1^2 (g'^2 + g g'') + r \sigma_1 \sigma_2 g'', \\ B''' &= \sigma_1^2 (3g'g'' + g g''') + r \sigma_1 \sigma_2 g''', \\ B^{(4)} &= \sigma_1^2 (3g''^2 + 4g'g''' + g g^{(4)}) + r \sigma_1 \sigma_2 g^{(4)}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

де $g \equiv g(x)$.

Вирази (1.4), (1.9), (1.11) і (1.12) дозволяють виразити коефіцієнти u_k степеневого ряду (1.8) при $n = 4$ безпосередньо через детерміновану силу $f(x)$ і мультиплікативний фактор $g(x)$, що входять в рівняння (1.1). Перш ніж конкретизувати їх вид, зробимо припущення про симетрію рівноважної щільності ймовірності системи: $P(-x) = P(x)$. Її графік симетричний відносно осі ординат. У цьому випадку значення в точці $x = 0$ непарних похідних ефективного потенціалу $U(x)$ дорівнюють нулю. Тому

$$U(x) \sim u_2 x^2 + u_4 x^4, \quad x \ll 1 \quad (1.13)$$

(тут покладається, що $U(0) = 0$). Коефіцієнт u_2 приймає як позитивні, так і негативні значення. При $u_2 > 0$ ефективний потенціал $U(x)$ є одноямним з мінімумом в точці $x = 0$, при $u_2 < 0$ – двох'ямним з локальним максимумом в нулі. Типовим прикладом потенціалу виду (1.13) служить потенціал Ландау-Гінзбурга, що застосовується в теорії рівноважних фазових переходів.

Таким чином, коефіцієнт u_2 визначає форму ефективного потенціалу і грає роль біфуркаційного параметра з критичним значенням $u_{2cr} = 0$. При цьому нерівноважні переходи, індуковані взаємно корельованими шумами, можуть бути якісно описані нормальною формою біфуркації типу вил, що збуджується адитивним гаусівським білим шумом.

1.3 Приклад системи з лінійною відновлювальною силою та нелінійним мультиплікативним фактором

Розглянемо конкретний приклад системи (1.1)–(1.2):

$$f(x) = -x, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}. \quad (1.14)$$

Детермінована сила $f(x)$ приймається лінійною відновлювальною. Відповідний детермінований потенціал $V(x)$ є параболічним (однотямним). Функції в (1.14) не містять будь-яких параметрів. Тим самим система (1.1)–(1.2) в даному прикладі характеризується чотирма параметрами: σ_1 , σ_2 , r , λ . Можна показати, що будь-які додаткові параметри будуть надлишкові: виконавши відповідні перетворення координати і часу, задача зведеться до зазначеної кількості.

Коефіцієнти u_2 і u_4 в (1.13) є функціями чотирьох аргументів. Для знаходження їх явного вигляду запишемо перші три похідні для сили $f(x)$ і перші чотири – для мультиплікативного фактора $g(x)$:

$$\begin{aligned} f' &= -1, \quad f'' = f''' = 0, \quad g' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad g'' = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}, \\ g''' &= -\frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}, \quad g^{(4)} = -\frac{24(1-10x^2+5x^4)}{(1+x^2)^5}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Обчислюючи значення виразів (1.14) і (1.15), (1.4) і (1.12), (1.9) і (1.11) при $x = 0$, отримаємо

$$u_2 = \frac{1 + 2(1-\lambda)r\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_2^2}, \quad (1.16)$$

$$u_4 = \frac{(1-\lambda)(\sigma_1^2 - 2r\sigma_1\sigma_2)}{2\sigma_2^2} - \frac{r\sigma_1[1 + 2(1-\lambda)r\sigma_1\sigma_2]}{2\sigma_2^3}. \quad (1.17)$$

З (1.16) випливає, що при $1 + 2(1-\lambda)r\sigma_1\sigma_2 > 0$ ефективний потенціал однотямний, інакше – двох'ямний. Дана умова повністю узгоджується з отриманими раніше

[50,52] з інших міркувань. Графіки ефективного потенціалу даної системи представлені на рис. 1.1, біфуркаційного параметра u_2 – на рис. 1.2.

Залежність біфуркаційного параметра u_2 від коефіцієнта взаємної кореляції r при постійних амплітудах шумів σ_1 і $\sigma_2 \in$ лінійної неспадною (див. рис. 1.2а). Чим більше амплітуда мультиплікативного шуму σ_1 (при фіксованій амплітуді σ_2), тим більше кут нахилу прямої $u_2(r)$. При цьому існує таке порогове значення $\sigma_{1cr} = 1/[2(1 - \lambda)\sigma_2]$ (йому відповідає пряма 2), що при $\sigma_1 < \sigma_{1cr}$ ні при якому значенні r біфуркаційний параметр u_2 не буде негативним, тобто в цьому випадку зміна коефіцієнта взаємної кореляції шумів не призводить до якісної зміни одномодального розподілу стану системи. При $\sigma_1 > \sigma_{1cr}$ існує таке негативне порогове значення $r_{cr} = -\sigma_{1cr} / \sigma_1$ (точка B на прямій 3), що при $r > r_{cr}$ біфуркаційний параметр u_2 позитивний, а при $r < r_{cr}$ – негативний, тобто при $r = r_{cr}$ відбувається перехід від одномодального розподілу стану системи до двомодального (ефективний потенціал трансформується, відповідно, з одноямного в двоямний як на рис. 1.1). При цьому чим більше σ_1 , тим більше (за модулем менше) r_{cr} , причому $r_{cr} \rightarrow 0^-$ при $\sigma_1 \rightarrow \infty$.

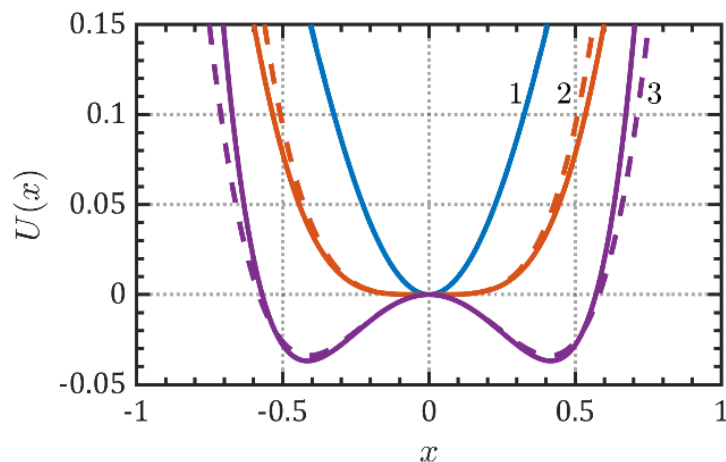


Рисунок 1.1 – Графіки ефективного потенціалу для точного виразу (1.7) (суцільна лінія) і розкладання в ряд Маклорена (1.13) з коефіцієнтами (1.16) і (1.17) (пунктирна лінія) в численні Стратоновича ($\lambda = 1/2$) при постійних амплітудах шумів ($\sigma_1 = 2$ і $\sigma_2 = 1$) і змінюваному коефіцієнті взаємної кореляції: (1) $r = 0.5$ ($u_2 > 0$);
(2) $r = -0.5$ ($u_2 = 0$); (3) $r = -0.9$ ($u_2 < 0$)

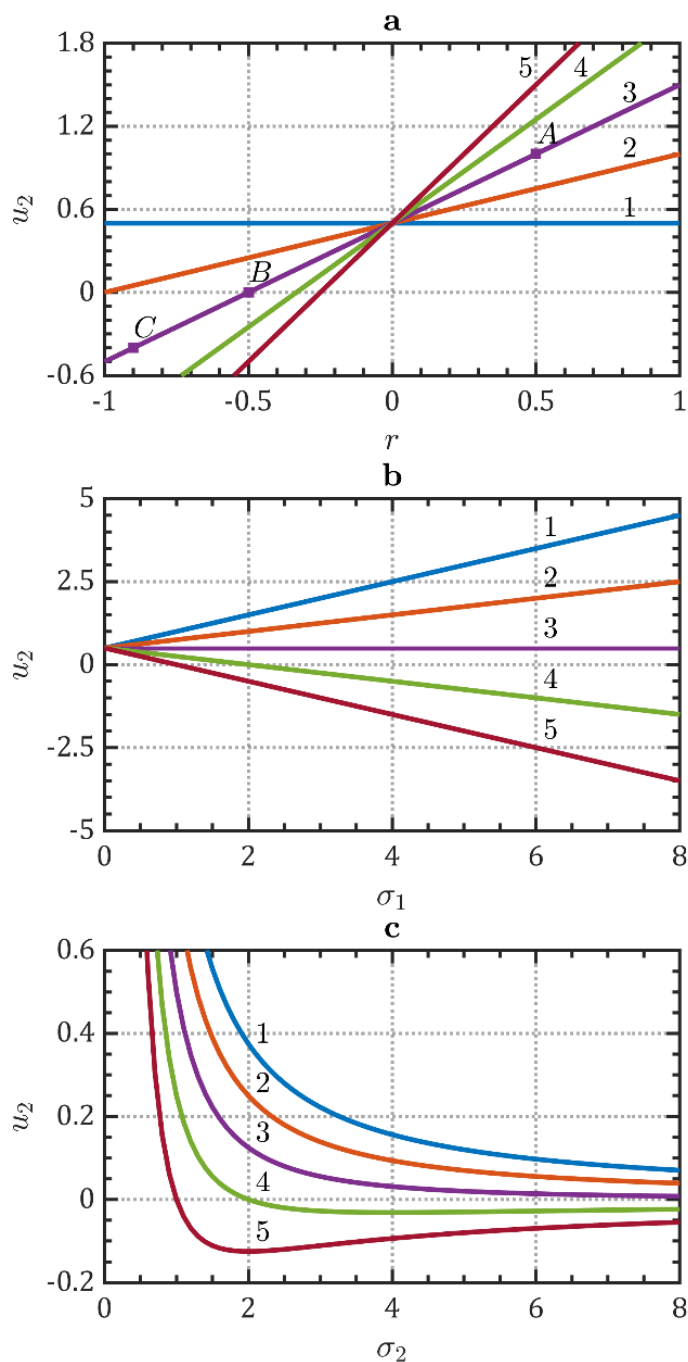


Рисунок 1.2 – Графіки біфуркаційного параметра u_2 для числення Стратоновича ($\lambda = 1/2$) в залежності від: (а) коефіцієнта взаємної кореляції при $\sigma_2 = 1$ і $\sigma_1 = 0$ (пряма 1), $\sigma_1 = 1$ (пряма 2), $\sigma_1 = 2$ (пряма 3), $\sigma_1 = 3$ (пряма 4), $\sigma_1 = 4$ (пряма 5); (б) амплітуди мультиплікативного шуму при $\sigma_2 = 1$ і $r = 1$ (пряма 1), $r = 0.5$ (пряма 2), $r = 0$ (пряма 3), $r = -0.5$ (пряма 4), $r = -1$ (пряма 5); (с) амплітуди адитивного шуму при $\sigma_1 = 1$ і $r = 1$ (крива 1), $r = 0.5$ (крива 2), $r = 0$ (крива 3), $r = -0.5$ (крива 4), $r = -1$ (крива 5). Для значень u_2 з верхньої півплощини ($u_2 > 0$) ефективний потенціал одноямний, з нижньої – двох'ямний. Точки A , B , C відповідають кривим 1, 2, 3 на рис. 1.1.

Відзначимо, що при збільшенні амплітуди адитивного шуму σ_2 при фіксованій амплітуді мультиплікативного шуму σ_1 кут нахилу прямої $u_2(r)$, навпаки, зменшується, але при цьому також зменшується висота її точки перетину з вертикальною віссю ординат [див. вираз (1.16)].

Залежність біфуркаційного параметра u_2 від параметра σ_1 при постійних параметрах r і σ_2 є також лінійною (див. рис. 1.2b). Причому її характер визначається коефіцієнтом взаємної кореляції: при $r > 0$ – зростальний, при $r < 0$ – спадний, при $r = 0$ – ні зростальний, ні спадний (пряма 3). Таким чином, існує таке порогове значення $r_{cr} = 0$, що при $r > r_{cr}$ (позитивна взаємна кореляція) ні при якому значенні амплітуди мультиплікативного шуму σ_1 біфуркаційний параметр u_2 не змінює свій позитивний знак на негативний. При $r < r_{cr}$ (негативна взаємна кореляція) існує таке порогове значення $\sigma_{1cr} = -1/[2(1 - \lambda)r\sigma_2]$, що при $\sigma_1 < \sigma_{1cr}$ параметр u_2 позитивний, а при $\sigma_1 > \sigma_{1cr}$ – негативний. Отже, при $\sigma_1 = \sigma_{1cr}$ відбувається одноmodalний-дво-modalний перехід. Причому $\sigma_{1cr} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0-$.

Нарешті, залежність біфуркаційного параметра u_2 від амплітуди адитивного шуму σ_2 при постійних параметрах r і σ_1 , на відміну від розглянутих раніше, нелінійна (див. рис. 1.2c). Її асимптотика при $\sigma_2 \rightarrow \infty$ має вигляд

$$u_2 \sim \begin{cases} (1 - \lambda)r\sigma_1/\sigma_2, & r \neq 0 \\ 1/(2\sigma_2^2), & r = 0 \end{cases},$$

тобто для великих значень σ_2 параметр u_2 прагне до нуля: зверху, якщо взаємна кореляція невід'ємна, і знизу, якщо вона від'ємна. Таким чином, існує таке порогове значення $r_{cr} = 0$, що при $r > r_{cr}$ для будь-яких значень амплітуди адитивного шуму σ_2 біфуркаційний параметр u_2 позитивний. У цьому випадку залежність $u_2(\sigma_2)$ монотонно спадна. Якщо ж $r < r_{cr}$, існує таке порогове значення $\sigma_{2cr} = -1/[2(1 - \lambda)r\sigma_1]$, що $u_2 > 0$ при $\sigma_2 < \sigma_{2cr}$ і $u_2 < 0$ при $\sigma_2 > \sigma_{2cr}$, тобто при $\sigma_2 = \sigma_{2cr}$ в системі відбувається одноmodalний-дво-modalний перехід. Для випадку негативної взаємної кореляції залежність $u_2(\sigma_2)$ немонотонна з мінімумом в точці

$\sigma_{2m} = -1/[(1-\lambda)r\sigma_1]$ і $u_{2m} = -(1-\lambda)^2 r^2 \sigma_1^2 / 2$. Зі збільшенням σ_1 він зміщується в область малих значень σ_2 і стає більш глибоким.

На завершення кілька слів про коефіцієнт u_4 (1.17). В ідеалі він має залишатися позитивним, як, наприклад, при $r = 0$. Але у випадку $r \neq 0$ знайдуться такі значення для σ_1 і σ_2 , при яких u_4 змінить свій знак, тобто наближений ефективний потенціал (1.13) перекинеться, що насправді не відбувається згідно його точного виразу (1.7). Але якщо дана особливість в розвиненні $U(x)$ і спостерігається, то за межами малого околу критичної точки $x = 0$. Відзначимо, що зміна знаку доданка четвертої степені в розкладанні ефективного потенціалу можлива і для генетичної моделі [57].

1.4 Висновки до розділу 1

В рамках методу ефективного потенціалу із загальних міркувань показано, що одномодальні-двомодальні переходи, індуковані взаємно корельованими гаусівськими білими шумами, один з яких адитивний, інший – мультиплікативний, можуть якісно описуватися нормальною формою біфуркації типу вил, що збурюється адитивним гаусівським білим шумом. Її явний вигляд для системи з лінійною відновлювальною силою і мультиплікативним фактором, квадратичним при малих за абсолютною величиною значеннях динамічної змінної і постійним – при великих, отриманий вперше. Встановлено, що при варіюванні коефіцієнта взаємної кореляції шумів або амплітуди мультиплікативного шуму біфуркаційний параметр змінюється за лінійним законом, а при варіюванні амплітуди адитивного шуму – за нелінійним.

2 ВІРТУАЛЬНИЙ СТЕНД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ШУМОПОДІБНИХ СИГНАЛІВ АВТОГЕНЕРАТОРА З ЗАПІЗНЕННЯМ

2.1 Математична модель хаотичних коливань

Для аналізу хаотичних коливань ЛБХ-генератора використовується елементарна феноменологічна модель [60], яка включає в себе послідовно з'єднані і замкнуті ланцюгом зворотного зв'язку безінерційний підсилювач з функцією перетворення сигналу, лінійний фільтр, лінію затримки. Для вузькосмугового фільтра, у випадку швидкого встановлення коливань в генераторі, задача зводиться до простого дискретно-різницевого рівняння (одновимірного відображення):

$$x_n = F(x_{n-1}), \quad (2.1)$$

де x_n – значення амплітуди сигналу в момент часу $t_n = nT$;

$F(x)$ – функція перетворення сигналу;

T – тривалість запізнення в лінії затримки.

Функція перетворення сигналу $F(x)$ у загальному випадку може містити амплітудну або фазову нелінійність (змінну затримку). Топологічно, найбільш близька до амплітудної характеристики ЛБХ нелінійна апроксимація типу функції Гауса, помноженої на її аргумент:

$$F(x) = kxe^{-x^2}, \quad (2.2)$$

де k – коефіцієнт підсилення.

Існує два підходи для опису хаотичних сигналів [61]. Якщо взяти до уваги перший підхід, то процеси, які вивчаються, вважаються досить складними, але детермінованими, що реалізуються за допомогою певного алгоритму. В цьому разі досліджується динамічна система, поведінка якої в часі визначена наперед, тобто описується системою диференціальних або різницевих рівнянь з заданими початковими умовами, і вичислюються такі характеристики, як показник Ляпунова, фрактальна розмірність атратора тощо.

При другому підході виходять з того, що сигнал, який потрібно дослідити, є випадковим, алгоритмічно зовсім непередбачуваним процесом. Вивчаючи безліч реалізацій такого процесу виявляються певні статистичні закономірності у часовій структурі сигналу, у ймовірностях появи різних значень величин сигналу і так далі. Такий підхід ґрунтується на добре розвиненому математичному апараті, який поєднує теорію ймовірностей та математичну статистику.

Під час розробки віртуального стенда будемо дотримуватися другого підходу і визначати кореляційну функцію та спектр коливань.

2.2 Опис віртуального стенда

В середовищі LabVIEW створено віртуальний стенд для дослідження характеристик шумоподібних сигналів автогенератора з запізненням. Його лицьова панель представлена на рис. 2.1.

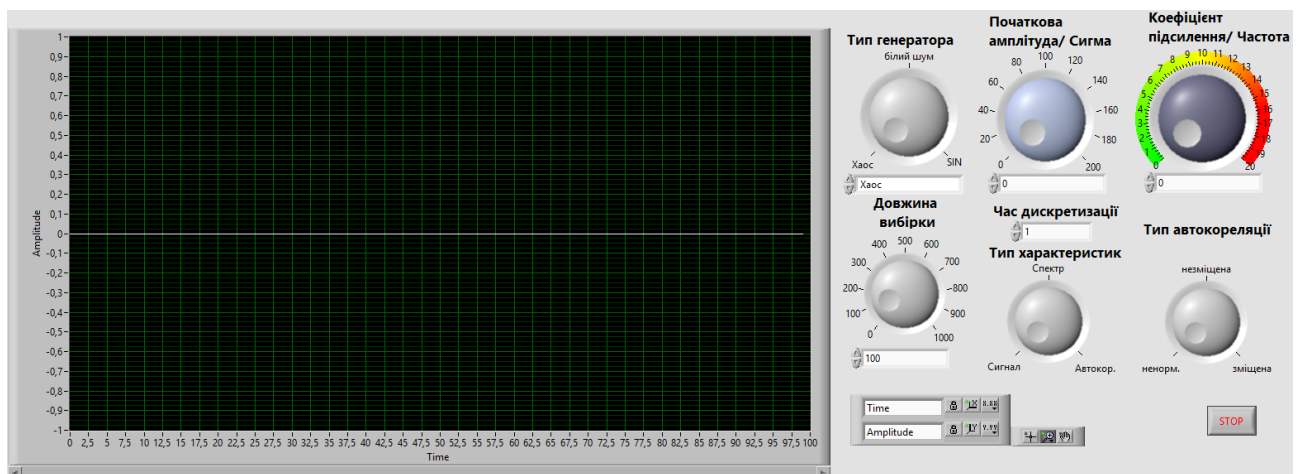


Рисунок 2.1 – Лицьова панель віртуального стенда для дослідження характеристик шумоподібних сигналів автогенератора з запізненням

Лабораторний стенд складається з наступних віртуальних пристроїв (рис. 2.2): 1) генератора хаотичних коливань; 2) генератора білого шуму; 3) генератора синусоїдального сигналу; 4) графічного індикатора сигналу; 5) обчислювача автокореляційної функції; 6) аналізатора спектра коливань.

Розглянемо ручки керування генераторів: Для генератора хаосу: 1) початкова амплітуда; 2) коефіцієнт підсилення. Для генератора білого шуму: 1) середнє

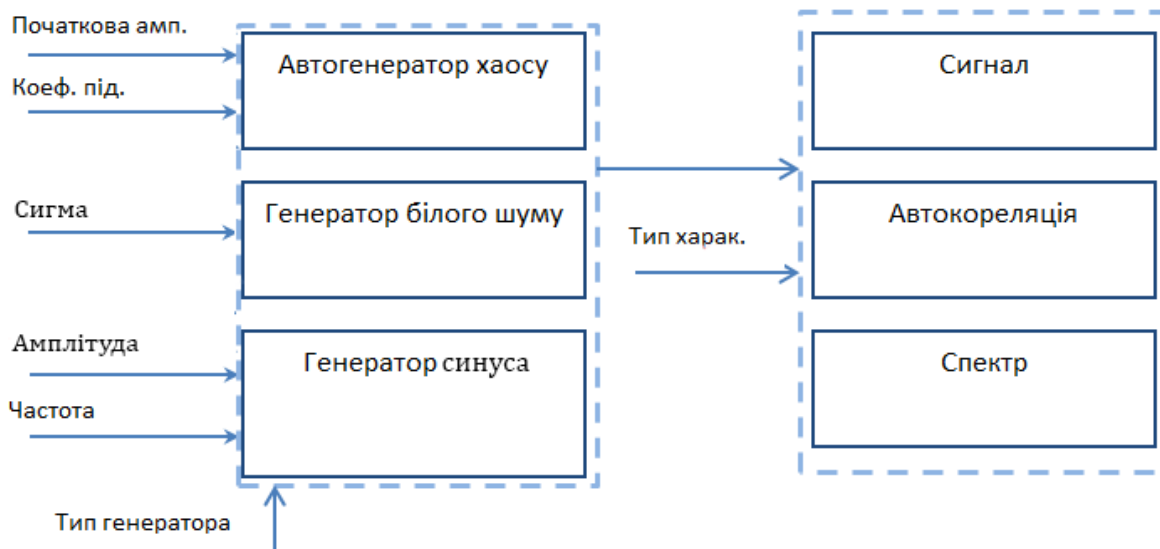


Рисунок 2.2 – Блок-схема віртуального стенда

квадратичне відхилення («сигма»). Для генератора синусоїдального сигналу: 1) амплітуда; 2) частота. Для перемикання генераторів використовується куляста ручка під назвою «Тип генератора».

Генератор хаосу створює сигнал у відповідності до одновимірного відображення (2.1) з нелінійним перетворенням (2.2) у вигляді функції Гауса, помноженої на її аргумент. Початкову амплітуду сигналу та коефіцієнт підсилення можна виставити приблизно за допомогою відповідних кулястих ручок управління на лицьовій панелі. Для точного задавання значень вказаних параметрів використовуються цифрові поля введення під ручками. Блок-діаграма генератора хаосу представлена на рис. 2.3, приклад його роботи – на рис. 2.4.

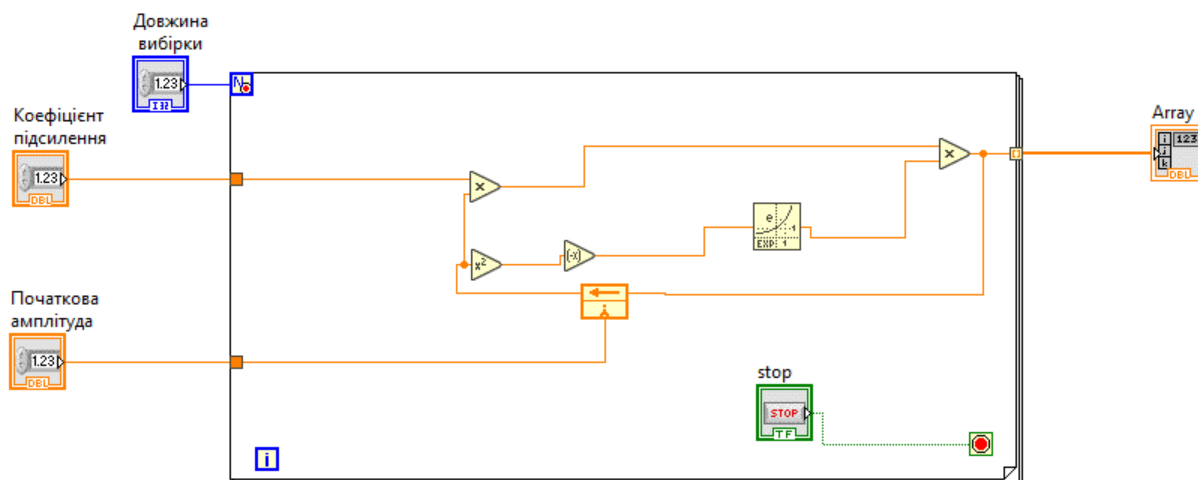


Рисунок 2.3 – Блок-діаграма генератора хаосу

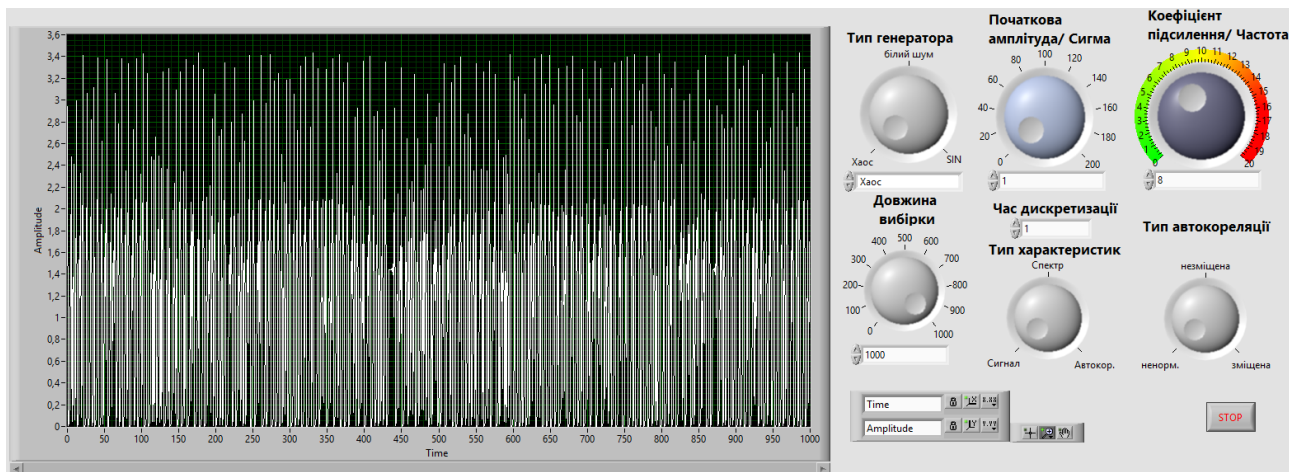


Рисунок 2.4 – Генератор хаосу в роботі

Генератор (гаусівського) білого шуму реалізується з двох циклів For Loop. У внутрішньому циклі знаходиться сума дванадцяти випадкових величин γ_j , рівномірно розподілених на відрізку $[0,1]$. Після цього від суми віднімається шість та результат множиться на «сигму», яку ми задаємо за допомогою відповідної ручки. Отже, підпрограма реалізовує відому формулу:

$$x_i = \sigma \left(\sum_{j=1}^{12} \gamma_j - 6 \right).$$

Блок-діаграма генератора білого шуму представлена на рис. 2.5, приклад його роботи – на рис. 2.6.

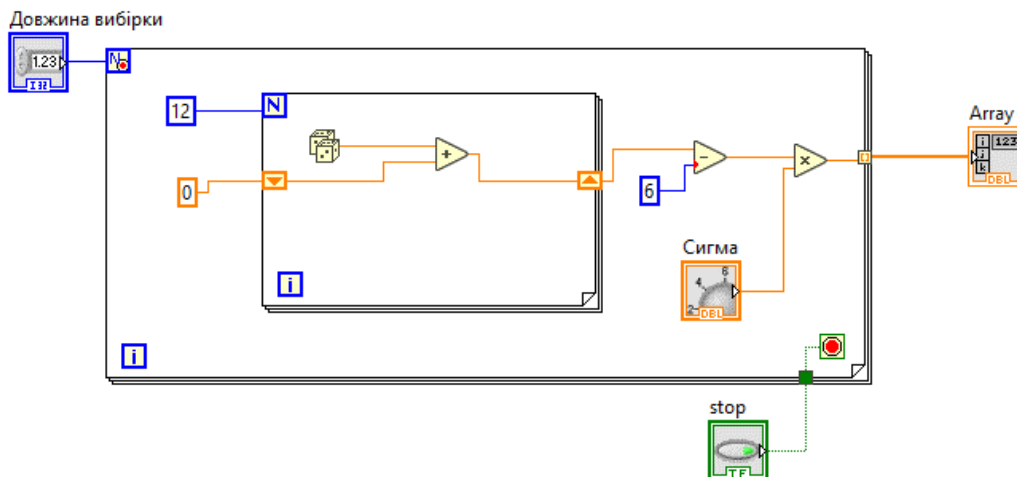


Рисунок 2.5 – Блок-діаграма генератора білого шуму

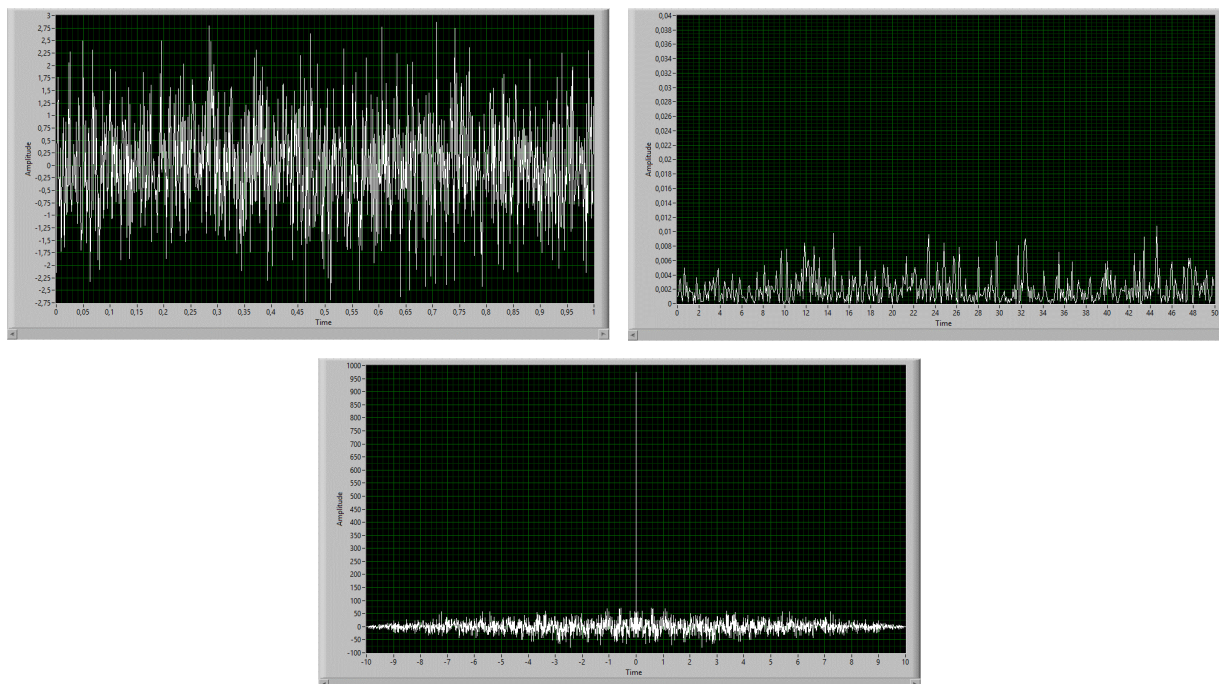


Рисунок 2.6 – Генератор білого шуму в роботі (сигнал, спектр та автокореляція)

Віртуальний генератор синусоїдального сигналу містить цикл For Loop, в якому за допомогою компонентів LabVIEW реалізована наступна формула:

$$x = A \sin 2\pi vt.$$

Керування представлено чотирма компонентами Numeric, за допомогою яких задаються: довжина вибірки (кількість ітерацій циклу For Loop), амплітуда, час дискретизації T та частота ν . Блок-діаграма генератора представлена на рис. 2.7, приклад його роботи – на рис. 2.8.

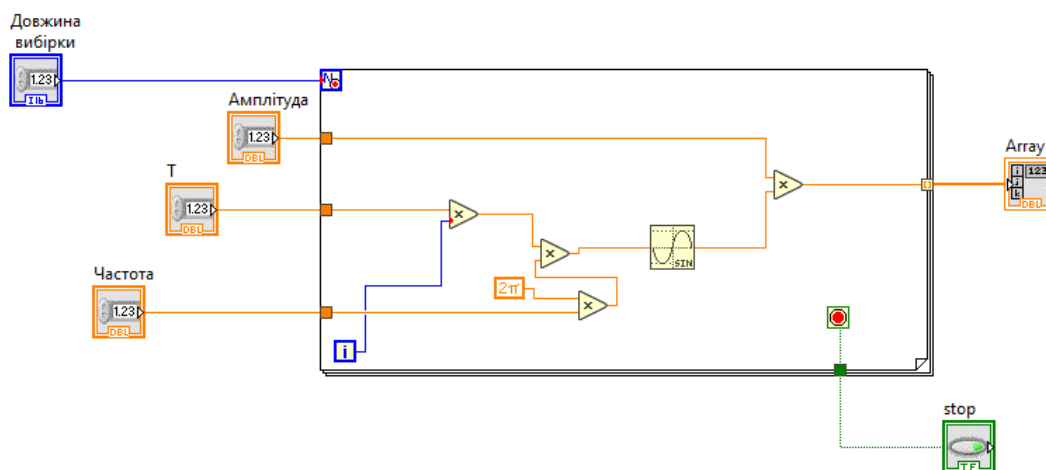


Рисунок 2.7 – Блок-діаграма генератора синусоїдального сигналу

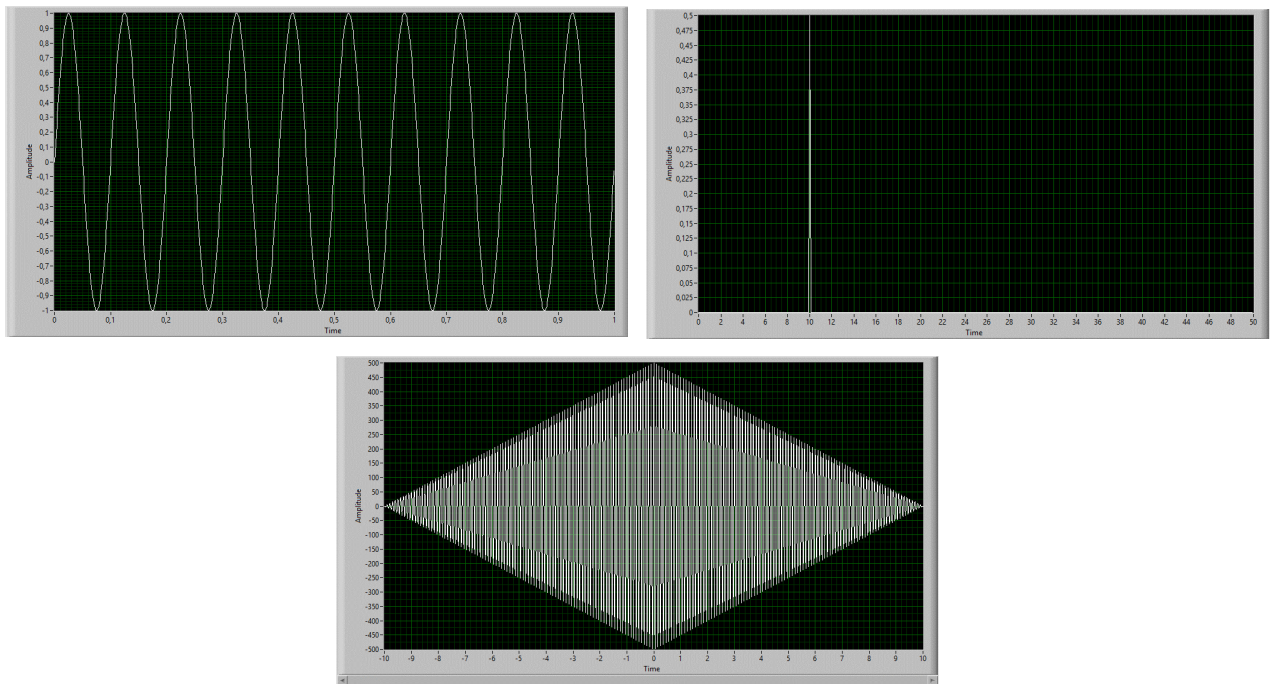


Рисунок 2.8 – Синус-генератор в роботі (сигнал, спектр та автокореляція)

Графічний індикатор сигналу будує його графік. По осі абсцис відкладається безрозмірний час $t_i = i \cdot T$, де $i = \overline{0, N - 1}$, T – час дискретизації, N – довжина вибірки (виставляється відповідною ручкою); по осі ординат – значення безрозмірної амплітуди сигналу. Обчислювач автокореляційної функції дозволяє знаходити автокореляційну функцію сигналу трьох типів: ненормовану, нормовану незміщену, нормовану зміщену. Тип виставляється за допомогою трьохпозиційного перемикача на лицьовій панелі стенда. Для зміни режиму відтворення на екрані (сигнал, спектр, автокореляція) використовується ручка «Тип характеристик». Підписи «Time» і «Amplitude» відповідають тільки для сигналу.

Блок-діаграма віртуального стенда представлена на рис. 2.9. На ній зображені елементи, які були використані: шість елементів керування Кноб для встановлення початкової амплітуди або «сигми», типу автокореляційної функції, коефіцієнта підсилення або частоти, довжини вибірки, типу генератора, типу характеристик. Один компонент Numeric, щоб задати час дискретизації.

Віртуальний інструмент Auto Power Spectrum розраховує спектр коливань. Обчислення автокореляції відбувається за допомогою інструменту AutoCorrelation. Кнопка Stop слугує для вимкнення віртуального стенду.

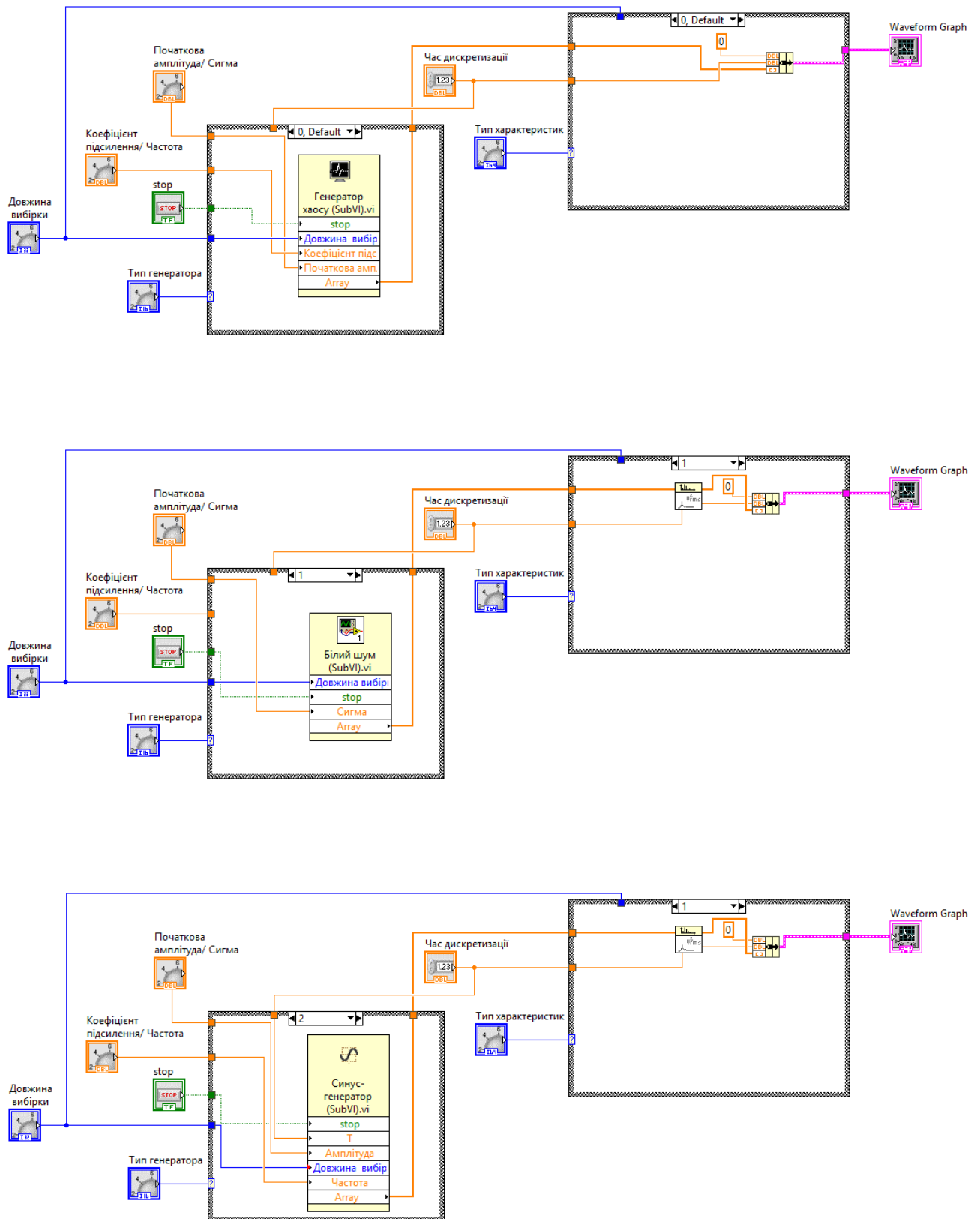


Рисунок 2.9 – Блок-діаграма віртуального стенда

2.3 Результати досліджень сигналів генератора

На початку експерименту з дослідження характеристик шумоподібних сигналів автогенератора з запізненням коефіцієнт підсилення та початкова амплітуда дорівнюють нулю (тут і в подальшому всі величини безрозмірні). При цьому на графічному індикаторі спостерігається пряма лінія $x = 0$ (див. рис. 2.1). На графічних індикаторах «Автокореляційна функція» та «Спектр коливань» також скрізь нульові значення.

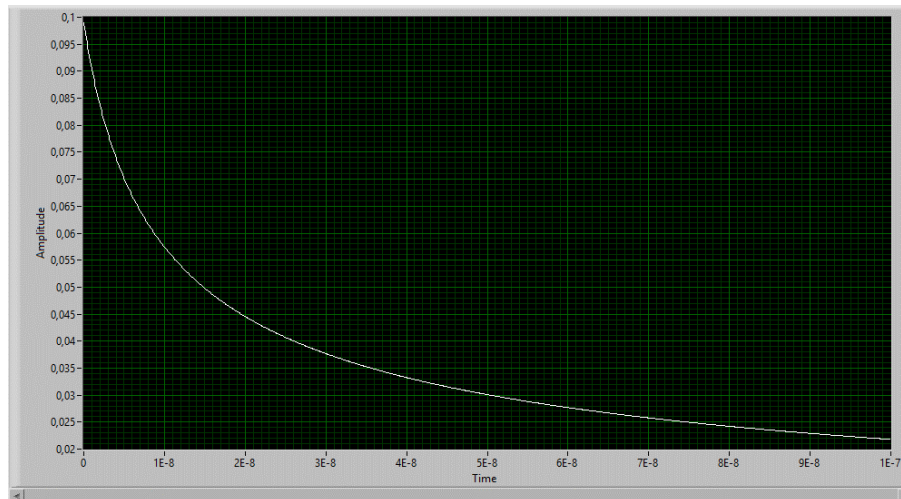
Довжину вибірки виставляємо на 1000; час дискретизації обираємо $1\text{E-}10$, щоб частоти сигналу знаходились в гігагерцовому діапазоні, в якому працює лампа біжної хвилі.

Виставляємо за допомогою ручки керування значення 0,1 початкової амплітуди; обираємо автокореляційну функцію ненормованого типу (відповідна ручка управління на лицевій панелі залишається на позначці «ненорм.»), починаємо збільшувати коефіцієнт підсилення k .

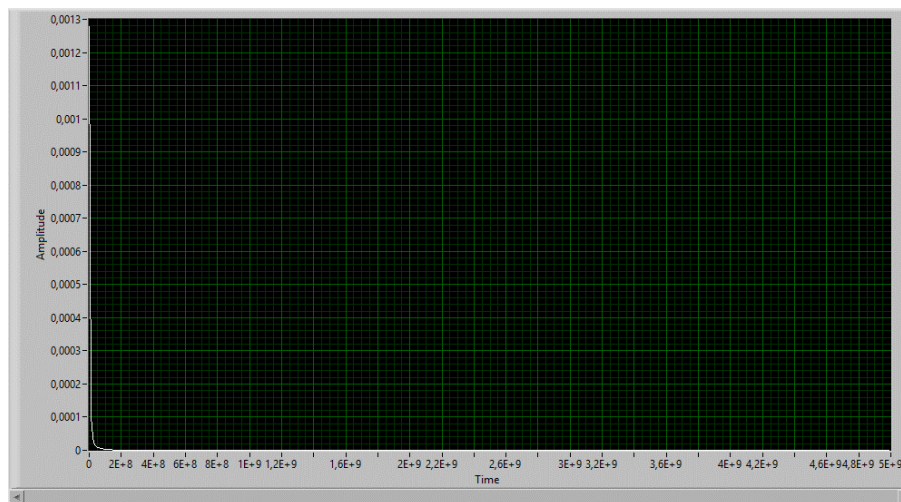
При $k = 1$ сигнал набуває форми монотонно спадаючої до нуля кривої, при цьому початкова амплітуда $x_0 = 0,1$ є його максимальним значенням (рис. 2.10). Автокореляційна функція набуває форму, схожу на трикутник. Екран зі спектром коливань поки що порожній.

При коефіцієнті підсилення $k = 1,1$ (див. рис. 2.11), на відміну від попереднього випадку $k = 1$, сигнал монотонно зростає від початкового значення амплітуди 0,1 до значення 0,31, при якому подальше його збільшення припиняється (крива виходить на насичення). Автокореляційна функція такого сигналу стає трикутною, при чому її значення в центральній нульовій точці помітно зростає. Це можна пояснити тим, що збільшується розкид значень сигналу. Екран аналізатора спектра такий же, як в попередньому випадку. Тому ми його не приводимо.

а



б



в

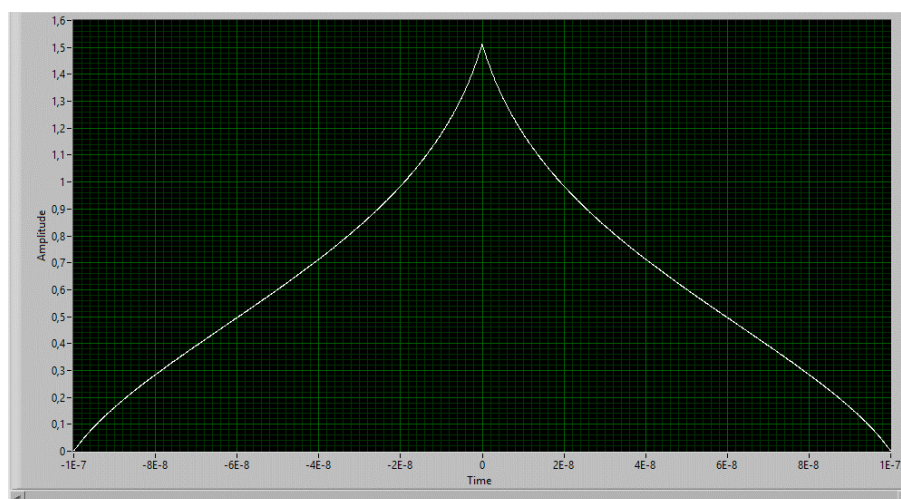
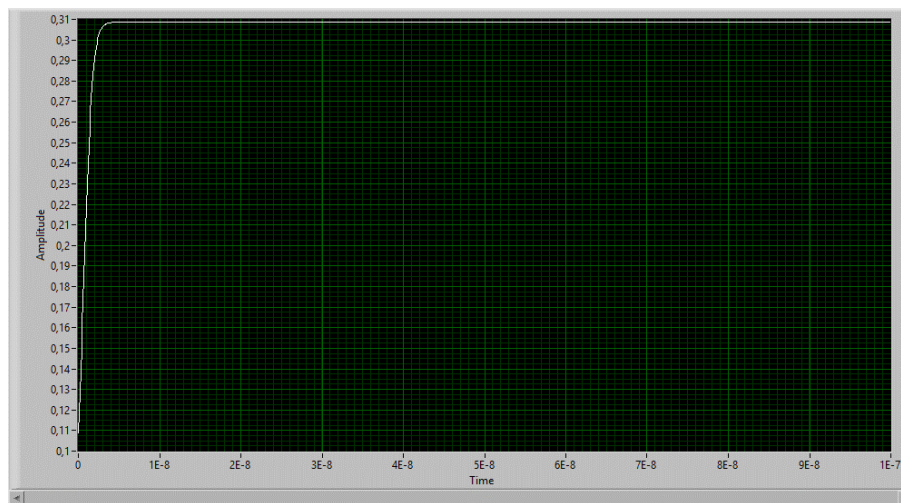


Рисунок 2.10 – Сигнал (а), спектр (б), автокореляційна функція (в) при $k = 1$

а



б

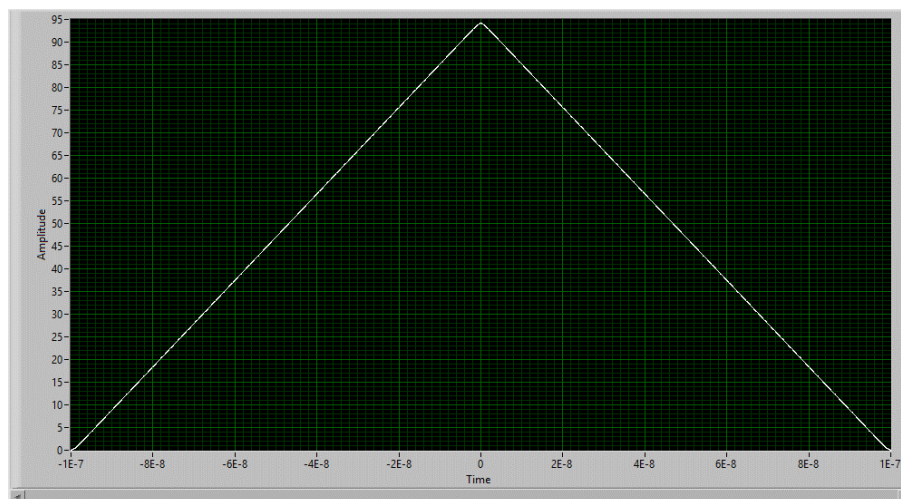
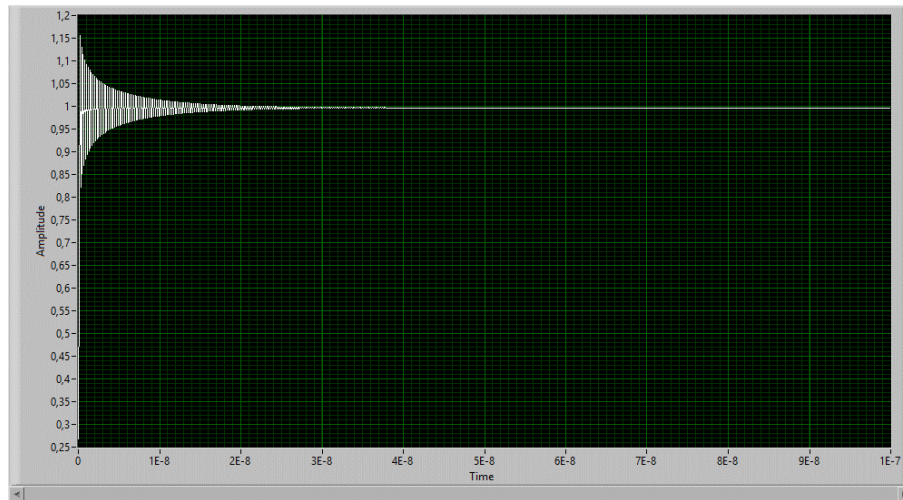


Рисунок 2.11 – Сигнал (а) та автокореляційна функція (б) при $k = 1,1$

При коефіцієнті підсилення $k = 2,7$ сигнал спочатку швидко монотонно зростає від початкового значення, потім, як добре видно з рис. 2.12, починає осцилювати в діапазоні приблизно від 0,8 до 1,2, але згодом ці коливання затухають, і сигнал перетворюється на горизонтальну пряму лінію. Автокореляційна функція якісно схожа на попередній результат, але відбулися кількісні зміни: її значення в центральній точці суттєво виростало.

а



б

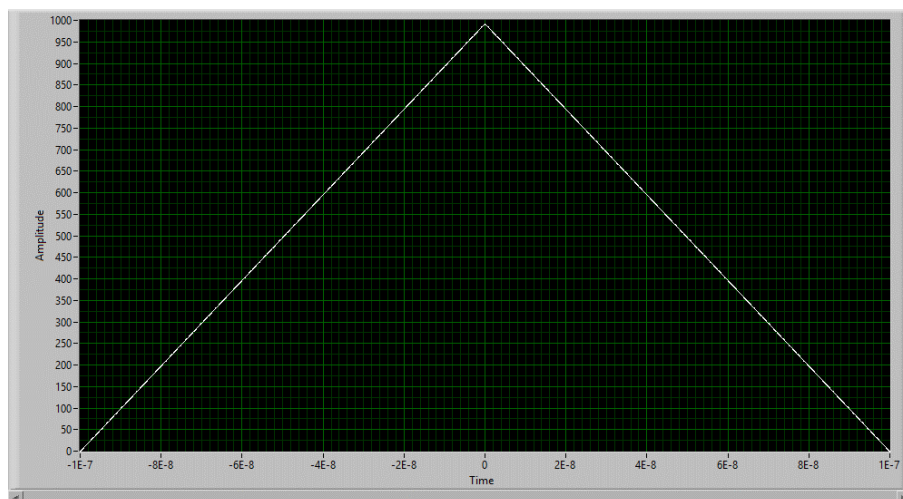
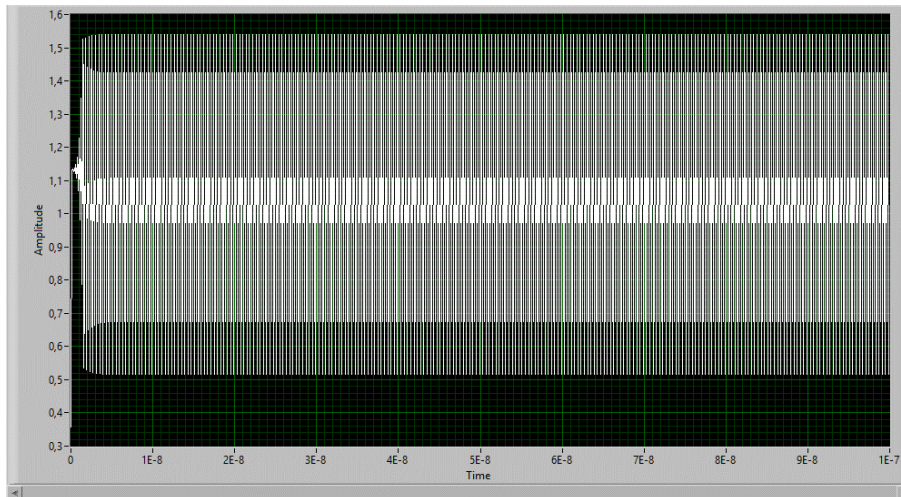


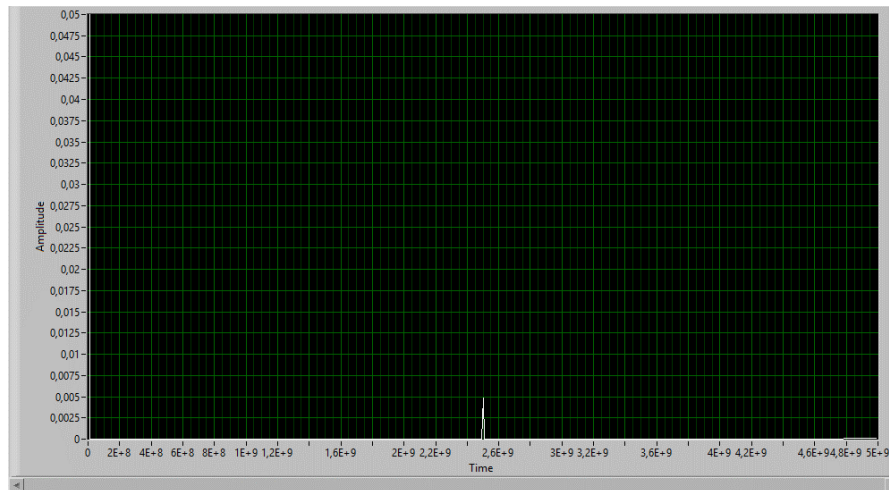
Рисунок 2.12 – Сигнал (а) та автокореляційна функція (б) при $k = 2,7$

При збільшенні коефіцієнта підсилення до $k = 3,6$ (рис. 2.13) замість затухаючих коливань, як в попередньому випадку, спостерігаються незатухаючі автоколивання. При цьому сигнал набуває пилкоподібну форму (рис. 2.13а). В центрі екрана аналізатора спектра з'являється окремий ледь помітний пік. Автокореляційна функція є осцилюючою вздовж сторін трикутника.

а



б



в

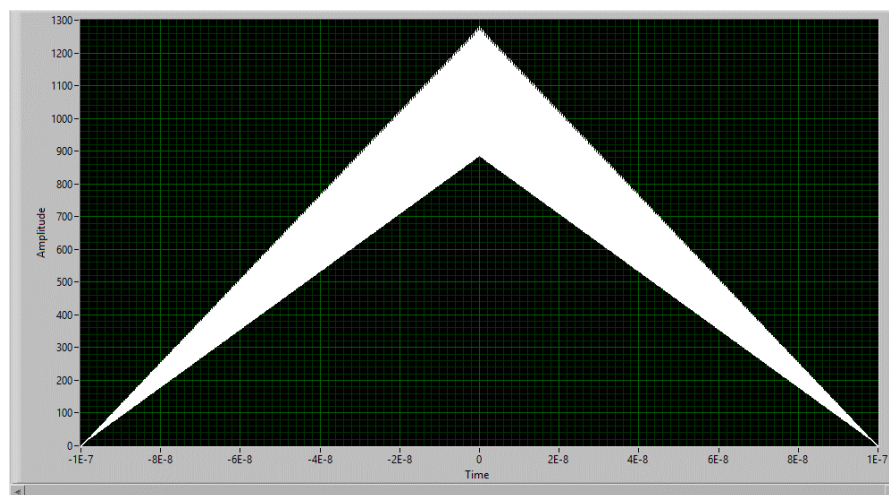


Рисунок 2.13 – Сигнал (а), спектр (б), автокореляційна функція (в) при $k = 3,6$

При збільшенні коефіцієнта підсилення до $k = 4,3$ (рис. 2.14) динаміка коливань ускладнюється. В спектрі коливань спостерігається два піки.

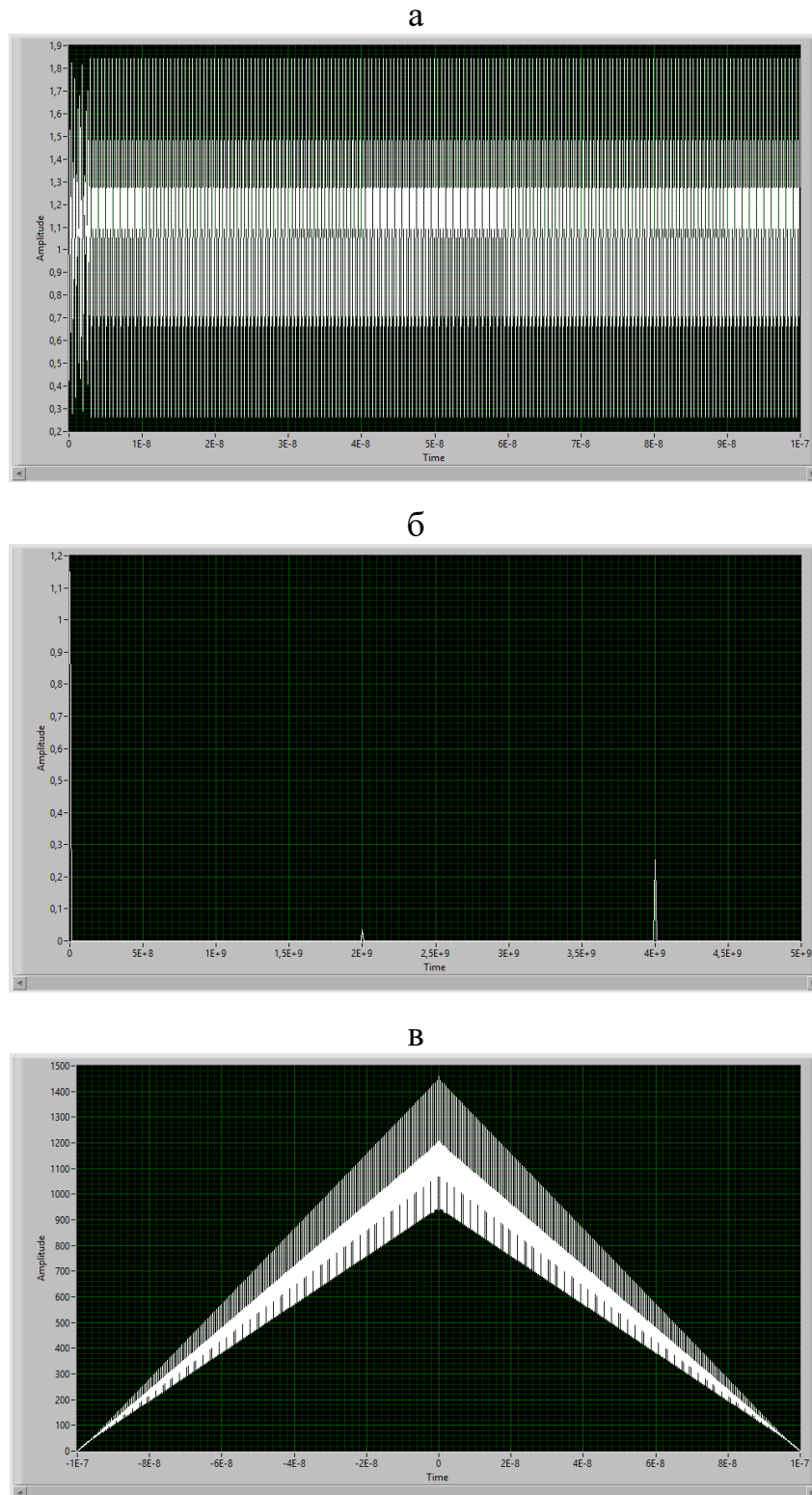


Рисунок 2.14 – Сигнал (а), спектр (б), автокореляційна функція (в) при $k = 4,3$

При коефіцієнті підсилення $k = 5$ (рис. 2.15) розкид значень періодичної автокореляційної функції збільшується. В спектрі коливань наявний один пік: коливання відбуваються на одній частоті.

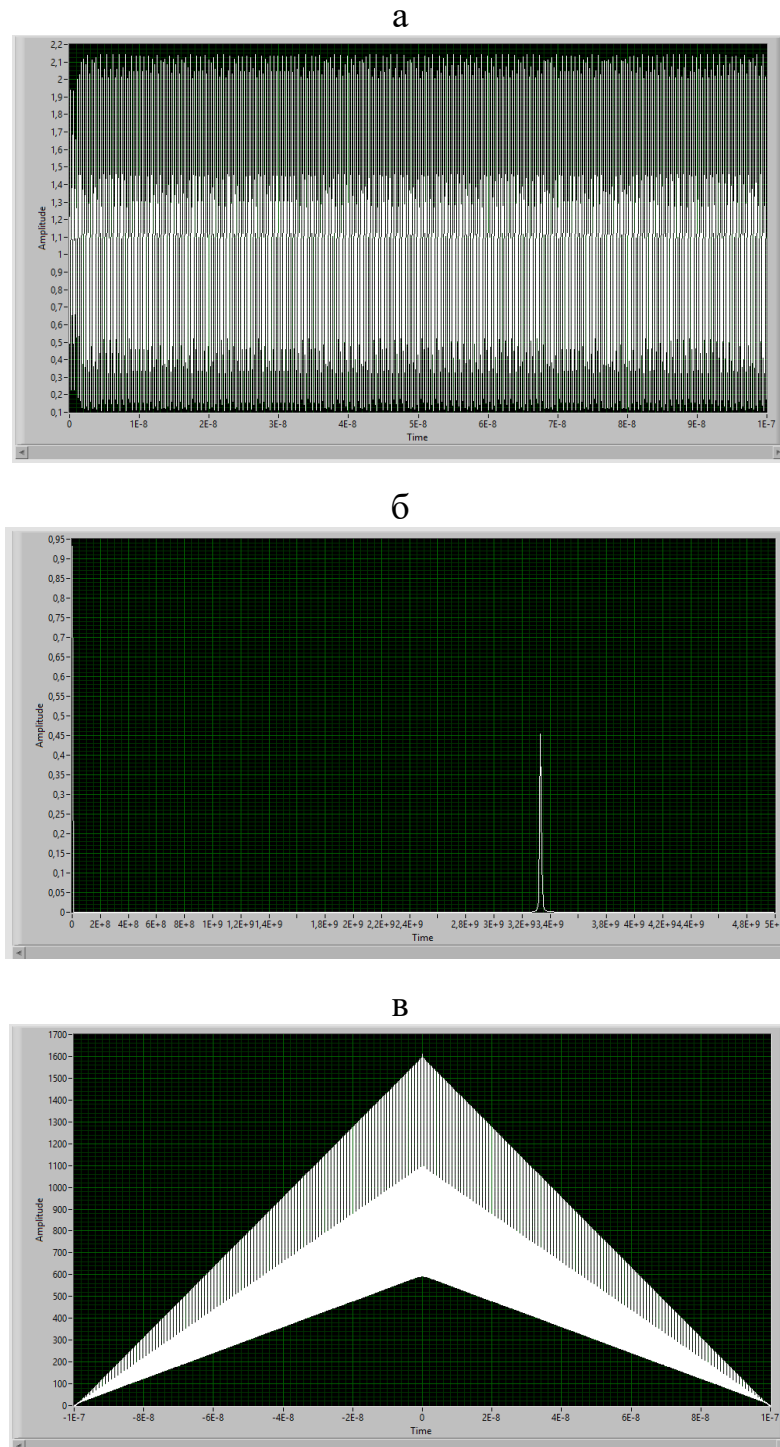


Рисунок 2.15 – Сигнал (а), спектр (б), автокореляційна функція (в) при $k = 5$

При коефіцієнті підсилення $k = 9$ автокореляційна функція сигналу ще залишається періодичною (рис. 2.16), але для деяких значень аргументу вона вже приймає нульові або принаймні близькі до нуля значення. В спектрі коливань спостерігаються три еквідистантних піка різної висоти.

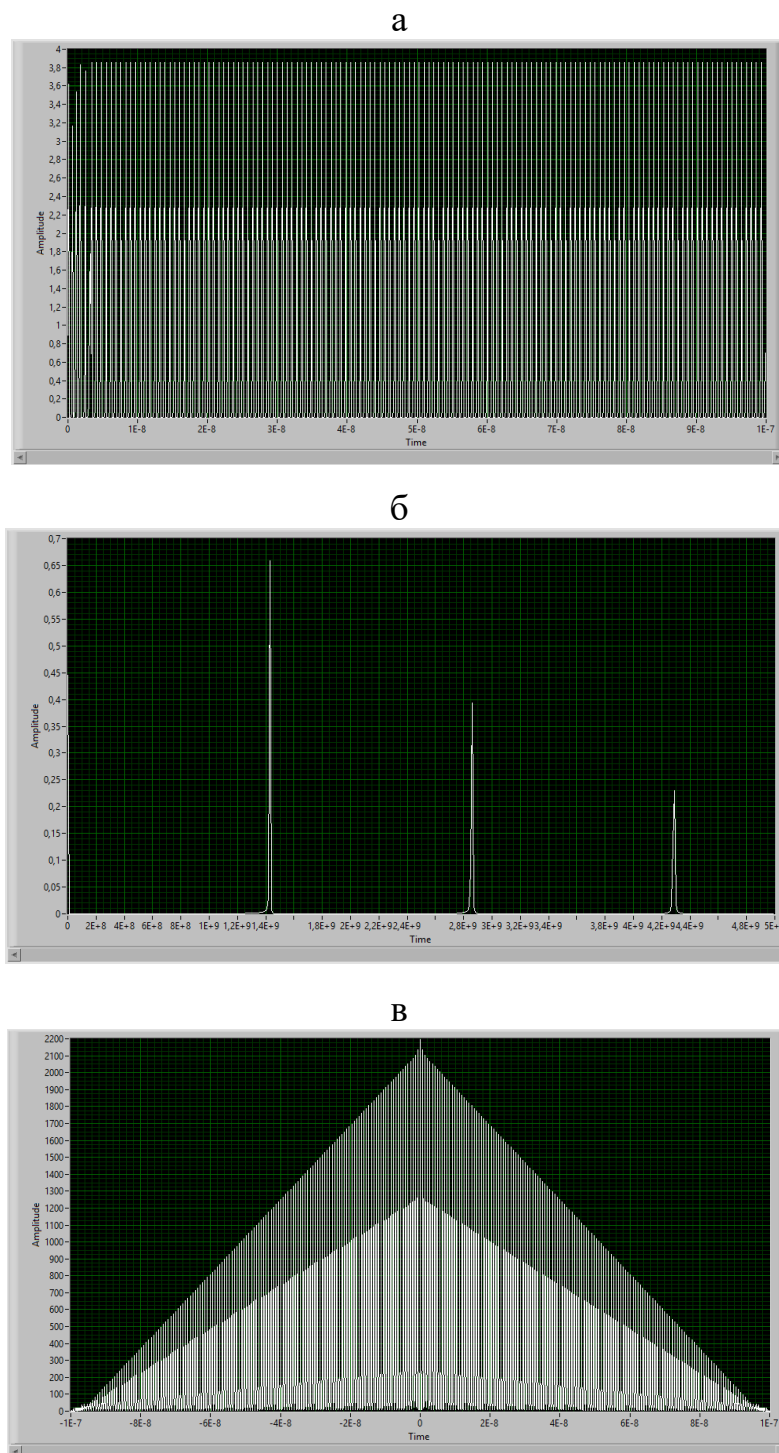


Рисунок 2.16 – Сигнал (а), спектр (б), автокореляційна функція (в) при $k = 9$

При коефіцієнті підсилення $k = 20$ (рис. 2.17) автокореляційна функція в нулі має високий пік, а у всіх інших точках приймає значення значно меншої висоти (схожа на автокореляційну функцію білого шуму). Спектр коливань стає суцільним, в ньому вже не можна виділити окремі гармоніки. Все це свідчить про те, що в останньому випадку сигнали автогенератора з запізненням демонструють хаотичну поведінку.

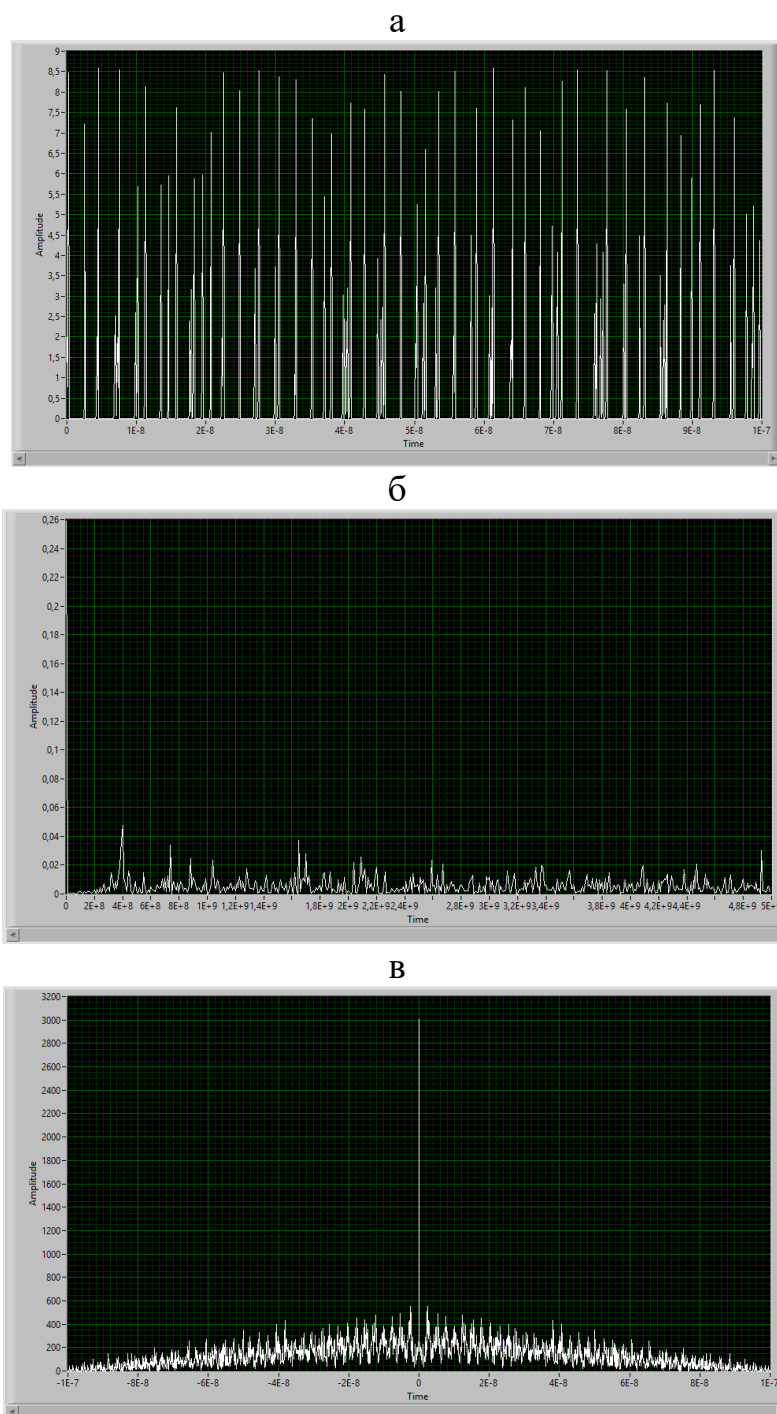


Рисунок 2.17 – Сигнал (а), спектр (б), автокореляційна функція (в) при $k = 20$

2.4 Висновки до розділу 2

Розглянуто математичну модель – одновимірне відображення з нелінійністю типу функції Гауса, помноженої на її аргумент, що описує сигнали автогенератора з запізненням, який складається з двох ламп біжної хвилі, замкнених у кільце. В середовищі LabVIEW розроблено віртуальний стенд для визначення характеристик сигналів – автокореляційної функції та спектра коливань. Коректність роботи стенда підтверджено додатково реалізованими для тестування генераторами білого шуму та синусоїдального сигналу.

Показано, що при збільшенні коефіцієнта підсилення автогенератора:

- сигнали набувають все більш складної форми – від аперіодичної ($k = 1-1,1$) до періодичної ($k = 2,7-9$) та нерегулярної, шумоподібної ($k \geq 20$);
- спектр змінюється від одночастотного ($k = 5$) до багаточастотного ($k = 9$) і хаотичного ($k = 20$) (від дискретного з одним піком до суцільного);
- автокореляційна функція з трикутної ($k = 1-2,7$) переходить у осцилюючу вздовж сторін трикутника ($k = 3,6-9$), потім приймає форму високого піка в нулі ($k = 20$) (як для білого шуму).

При збільшенні коефіцієнта підсилення до $k = 20$ автогенератор починає працювати в хаотичному режимі.

3 ВІРТУАЛЬНИЙ СТЕНД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ІНДУКОВАНИХ ШУМОМ ПЕРЕХОДІВ

3.1 Класична модель індукованих шумом переходів

Розглядаємо генетичну модель для індукованих шумом переходів [6,62]. Стохастичне диференціальне рівняння має вигляд:

$$\dot{x} = -x + \sigma(1 - x^2)\xi(t). \quad (3.1)$$

Рівняння (3.1) випливає з рівняння (1.1) у випадку $f(x) = -x$, $g(x) = 1 - x^2$, $\sigma_1 \equiv \sigma$ і $\xi_1(t) \equiv \xi(t)$. Тут випадковий процес $x(t)$ приймає значення в межах інтервалу від -1 до 1 . Якщо в (3.1) мультиплікативний фактор $g(x)$ дорівнює нулю, $x(t)$ – процес Орнштейна-Уленбека, якщо при цьому і сила $f(x)$ дорівнює нулю, $x(t)$ – вінерівський процес. Зазвичай генетична модель подається у формі, при якій випадковий процес змінюється в інтервалі від 0 до 1 і має центр розсіювання в точці $x = 1/2$. В даній роботі ми обрали стохастичне диференціальне рівняння у формі (3.1) тому, що центр розсіювання ймовірнісного розподілу знаходиться в точці $x = 0$, як і у випадку процесу Орнштейна-Уленбека. Це зручно для порівняння щільності ймовірності в подальшому.

Стационарна щільність ймовірності $p(x)$ для процесу, що задовольняє рівнянню (3.1) в численні Іто, дається виразом:

$$p(x) = \frac{C}{(1 - x^2)^2} e^{-\frac{1}{\sigma^2(1-x^2)}}, \quad (3.2)$$

де C – константа нормування.

Щільність ймовірності $p(x)$ випадкової величини x така, що в інтервалі від -1 до 1 ймовірність події $-1 < x < 1$ дорівнює $\int_{-1}^1 p(x) dx = 1$. Отже, константа нормування знаходиться із виразу:

$$C \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - x^2)^2} e^{-\frac{1}{\sigma^2(1-x^2)}} dx = 1. \quad (3.3)$$

Щільність ймовірності (3.2) не є гаусівською. Але при малій амплітуді шуму вона на неї якісно схожа (має єдиний максимум). Для великої амплітуди шуму $p(x)$ має вже два максимуми. Тобто, при збільшенні шуму відбувається перехід від ймовірнісного розподілу з одним максимумом до розподілу з двома максимумами.

3.2 Методика проведення комп'ютерного експерименту

Індуковані шумом переходи проявляються у якісній зміні стаціонарної щільності ймовірності системи. Тому необхідно експериментально будувати гістограми – її наближення. А для цього спершу потрібно знайти траєкторії (реалізації) випадкового процесу. Від диференціального рівняння перейдемо до різницевого. Для цього неперервну вісь часу t розіб'ємо на N точок (вузлів). Відстань між сусідніми вузлами однакова і дорівнює Δt . Отже, різницеве рівняння для знаходження моментів часу набуде вигляду:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t, \quad (3.4)$$

де i – параметр, що пробігає натуральні значення від 1 до N ;

Δt – крок дискретизації за часом.

Якщо початковий момент часу дорівнює 0, тоді рівняння (3.4) можна записати так:

$$t_i = (i - 1)\Delta t. \quad (3.5)$$

Рівняння (3.5) зручно використовувати для визначення загальної тривалості t_N реалізації випадкового процесу, підставивши N замість i .

Для визначення значень x_i випадкового процесу для моментів часу t_i у відповідності до стохастичного диференціального рівняння (3.1) запишемо похідну за часом:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}. \quad (3.6)$$

Підставимо (3.6) в (3.1). Помножимо ліву та праву частину рівняння на Δt . Отримаємо в правій частині прирости ΔW_i вінерівського процесу (в численні Іто значення

величин правої частини стохастичного диференціального рівняння визначається на лівій межі інтервалу). Для знаходження величин ΔW_i використовується відома формула (див., наприклад, [51]):

$$\Delta W_i = \xi_i \sqrt{\Delta t}, \quad (3.7)$$

де ξ_i – незалежні гаусівські випадкові величини з нульовими середніми значеннями та одиничними дисперсіями.

Враховуючи (3.7), запишемо різницеве рівняння, відповідне стохастичному диференціальному рівнянню (3.1):

$$x_{i+1} = x_i - x_i \Delta t + \sigma(1 - x_i^2) \xi_i \sqrt{\Delta t} \quad (3.8)$$

Різницеві рівняння для процесів Вінера та Орнштейна-Уленбека, відповідно, мають вигляд

$$x_{i+1} = x_i + \sigma \xi_i \sqrt{\Delta t}, \quad (3.9)$$

$$x_{i+1} = x_i - x_i \Delta t + \sigma \xi_i \sqrt{\Delta t}. \quad (3.10)$$

Для отримання (3.8)–(3.10) ми фактично застосували метод Ейлера [63] – найпростіший чисельний метод розв’язку звичайних диференціальних рівнянь.

Для побудови гістограми ймовірнісного розподілу знаходимо M реалізації випадкового процесу (див. рис. 3.1). Чим їх більше, тим точніше гістограма буде відображати щільність ймовірності. Множину значень випадкового процесу розбиваємо на однакові інтервали і для заданого часу визначаємо кількість реалізацій, що потрапили до кожного інтервалу. На рис. 3.1 представлено 6 інтервалів розбиття, три реалізації. Так як нас цікавить стаціонарна щільність ймовірності, яка не залежить від часу, необхідно знаходити реалізації достатньо великої тривалості. По горизонтальній осі відкладаються координати центрів інтервалів, по вертикальній – кількість або відносна кількість потрапивших в них реалізацій.

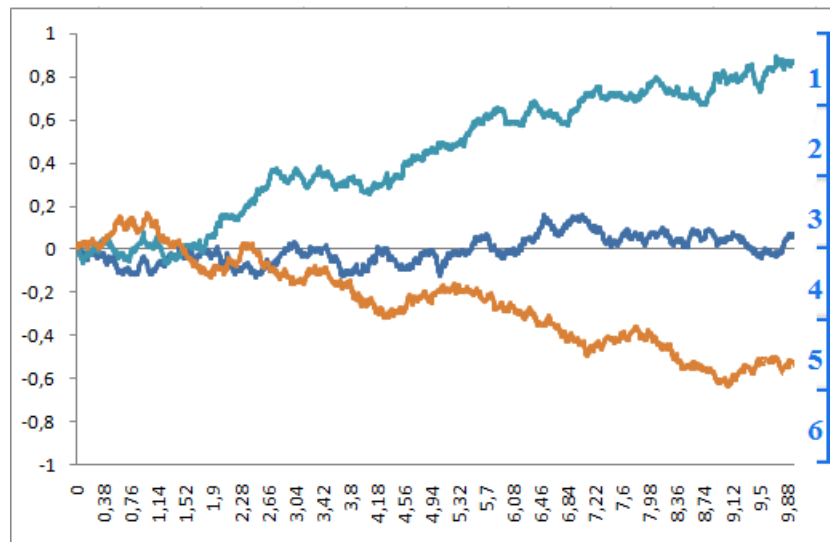


Рисунок 3.1 – До побудови гістограми

3.3 Опис віртуального стенда

Лицьова панель віртуального стенда для дослідження процесів Вінера, Орнштейна-Уленбека та індукованих шумом переходів в генетичній моделі зображена на рис. 3.2. Вона має графічний індикатор під назвою «Реалізація / Гістограма»; кулясту ручку вибору процесу: В – вінерівський процес, ОУ – процес Орнштейна-Уленбека, ХЛ – генетична модель (Хорстхемке-Лефевр); кулясті ручки управління амплітудою шуму σ , кількістю вузлів N , кількістю реалізацій M ; цифрові поля індикації процесу, введення амплітуди шуму σ , кількості вузлів N , кількості реалізацій M ; цифрові поля введення початкового часу t_0 , початкового зміщення X_0 , кроку дискретизації за часом Δt ; а також кнопку "Start".

Цифрові поля під ручками дозволяють вручну вводити значення відповідних величин, кулясті ручки – без набору цифр. Графічний індикатор відображає графік реалізації обраного випадкового процесу, якщо ручка «Кількість реалізацій» вказує на 1. Тоді по осі абсцис відкладається час t , а по осі ординат – зміщення X . Якщо за допомогою ручки «Кількість реалізацій» виставляється значення більше за 1, тоді графічний індикатор відтворює гістограму. При цьому по осі абсцис відкладається зміщення X (центри інтервалів розбиття), по осі ординат – виражена у відсотках відносна кількість потраплянь реалізацій до інтервалів.

На віртуальному стенді за допомогою кулястої ручки управління кількістю вузлів N можна встановити максимальну кількість $N = 1000$; за допомогою кулястої ручки управління амплітудою шуму σ – максимальне значення амплітуди шуму $\sigma = 5$; за допомогою кулястої ручки управління кількістю реалізацій M – максимальну кількість $M = 100000$.

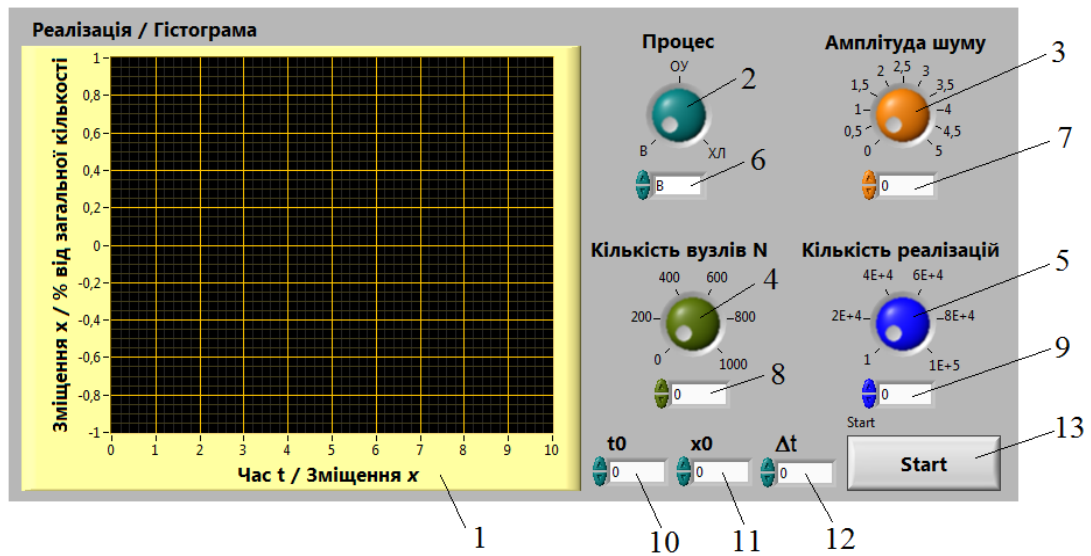


Рисунок 3.2 – Лицьова панель віртуального стенда: 1 – графічний індикатор «Реалізація / Гістограма»; 2 – ручка вибору процесу: В – вінерівський процес, ОУ – процес Орнштейна-Уленбека, ХЛ – генетична модель (Хорстхемке-Лефевр); 3 – ручка управління амплітудою шуму σ ; 4 – ручка управління кількістю вузлів N ; 5 – ручка управління кількістю реалізацій M ; 6 – поле індикації обраного процесу; 7 – поле введення амплітуди шуму σ ; 8 – поле введення кількості вузлів N ; 9 – поле введення кількості реалізацій M ; 10 – поле введення початкового часу t_0 ; 11 – поле введення початкового зміщення X_0 ; 12 – поле введення кроку дискретизації Δt ; 13 – кнопка "Start"

Блок-діаграма віртуального стенда зображена на рис. 3.3. В циклі For Loop міститься підпрограма (SubVI) «Генератор процесів», яка дозволяє знаходити реалізації трьох випадкових процесів. Цикл виконується M разів (задається кількістю реалізацій). Якщо $M = 1$, тоді на селектор структури Case поступає значення логічного типу False, і виконується піддіаграма як на рис. 3.4а. Відповідні дані з генератора процесів відразу поступають на графічний індикатор XY Graphs,

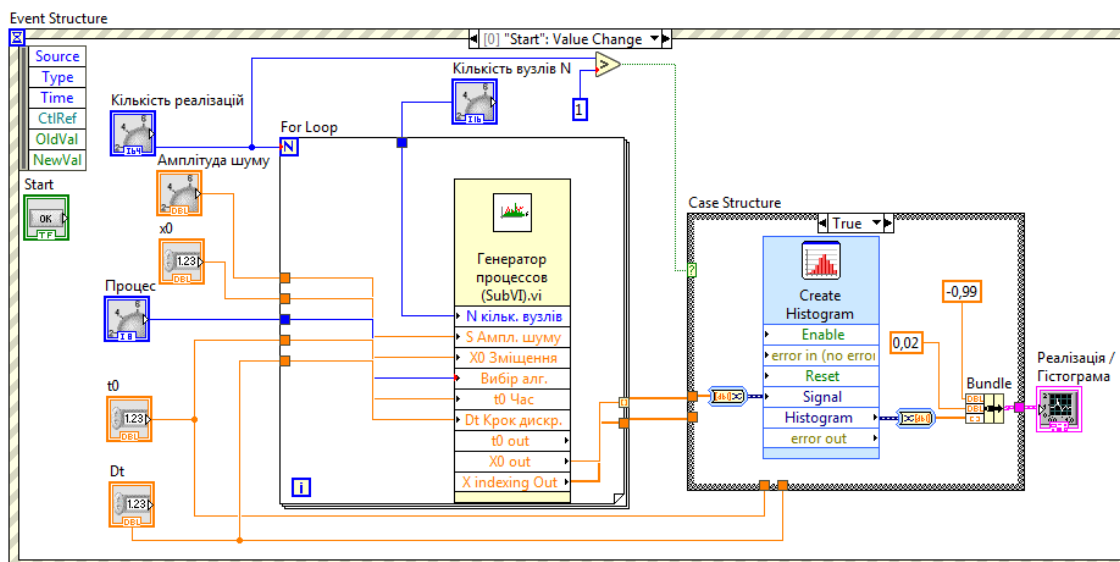


Рисунок 3.3 – Блок-діаграма віртуального стенда

на якому відтворюється реалізація випадкового процесу. Якщо $M > 1$, тоді на селектор поступає значення логічного типу True, виконується піддіаграма як на рис. 3.4б (вона також представлена на загальному рис. 3.3). Відповідні дані з генератора процесів спочатку поступають на вхід віртуального приладу Create Histogram Express, за допомогою якого знаходяться гістограми. Він має власне меню, в якому виставляється кількість інтервалів розбиття (100), а також мінімальне (-1) та максимальне (1) значення. Ширина інтервалів при цьому дорівнює 0,02. З його виходу дані поступають на графічний індикатор, на якому вже відтворюється гістограма.

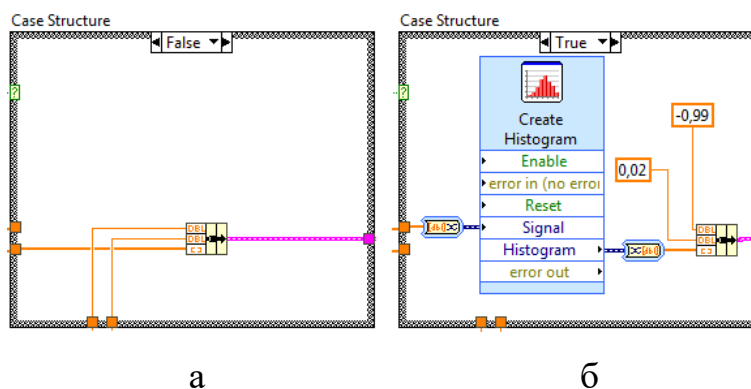


Рисунок 3.4 – Піддіаграми структури Case, що входять до складу блок-діаграми віртуального стенда: а – на селекторі False; б – на селекторі True

Блок-діаграма підпрограми генератора процесів представлена на рис. 3.5. Гаусівська випадкова величина генерується віртуальним приладом Continuous Random, який підтримує також багато інших випадкових розподілів. На його входи подаються величини 1, 0, 1, які задають відповідно кількість значень на виході, середнє значення, середньоквадратичне відхилення. Використовуються структури: цикл з фіксованим числом ітерацій For Loop, вузол зворотного зв'язку Feedback Node. Числові функції Add, Multiply, Square Root, Square і Subtract виконують відповідно арифметичні операції додавання, множення, взяття квадратного кореня, возведення у квадрат і віднімання.

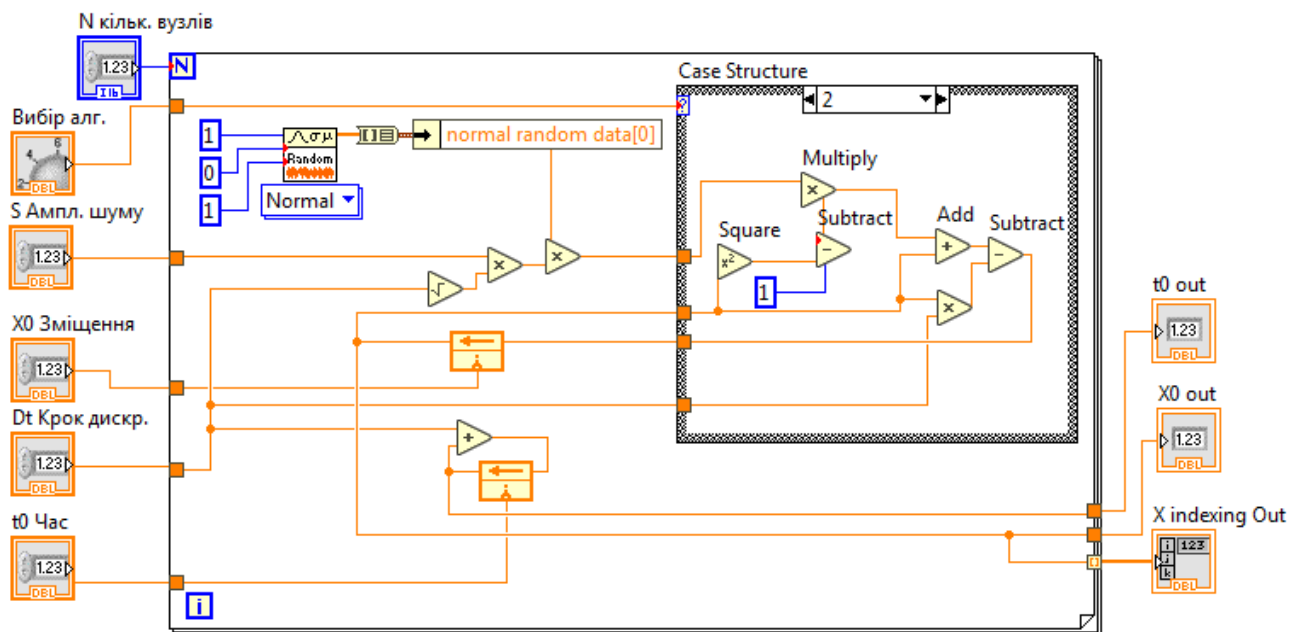


Рисунок 3.5 – Блок-діаграма підпрограми «Генератор процесів»

Структура Case містить три піддіаграми (див. рис. 3.6), які дозволяють знаходити траєкторії випадкових процесів у відповідності з різницеvими рівняннями (3.8) – (3.10).

3.4 Результати дослідження випадкових процесів

Проведемо з використанням віртуального стенда як на рисунках 3.2 і 3.3 експериментальні дослідження випадкових процесів Вінера, Орнштейна-Уленбека та генетичної моделі.

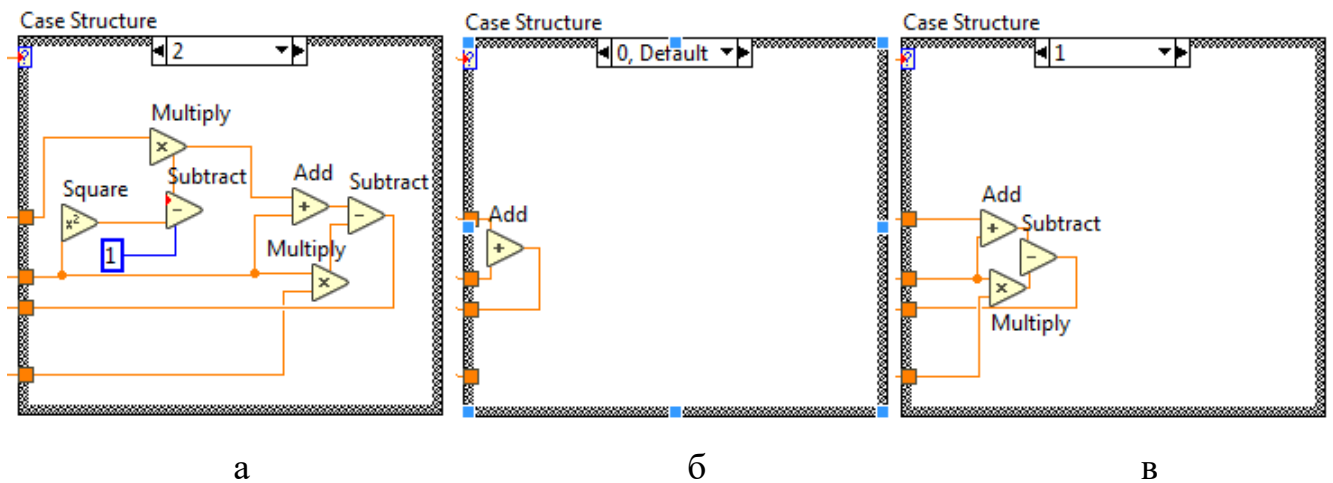


Рисунок 3.6 – Піддіаграми структури Case, що входить до складу підпрограми «Генератор процесів». Вони реалізують: а – випадковий процес генетичної моделі; б – вінерівський процес; в – процес Орнштейна-Уленбека

На рисунку 3.7 представлена реалізація вінерівського процесу, яка моделює рух броунівської частинки в рідині. По горизонтальній осі відкладається час t . Безрозмірний крок дискретизації Δt за часом приймається рівним 0,01. По вертикальній осі відкладається безрозмірна координата частинки X . Приймається кількість вузлів $N = 1000$, що відповідає безрозмірному інтервалу часу приблизно 10. На ньому спостерігається випадкова зміна координати частинки з часом. Амплітуда шуму σ дорівнює 1. Для вінерівського процесу не існує стаціонарної щільності ймовірності та граничних умов.



Рисунок 3.7 – Реалізація вінерівського процесу при $\sigma = 1$

На рис. 3.8 представлені реалізації процесу Орнштейна-Уленбека. По горизонтальній осі відкладається безрозмірний час, во вертикальній – безрозмірне зміщення X . Якщо безрозмірна амплітуда гаусівського білого шуму мала (σ дорівнює 0,5 як на рис. 3.8а), спостерігаються випадкові коливання з малим розмахом в околі нуля. Безрозмірне зміщення X на графіку не виходить за межі від -1 до 1 .

Якщо безрозмірна амплітуда гаусівського білого шуму збільшується (σ дорівнює 1 як на рис. 3.8б), розмах випадкових коливань відносно нуля збільшується. Безрозмірне зміщення X на графіку не виходить за межі від -2 до 2 . Більші значення можливі, але ймовірність їх менше.

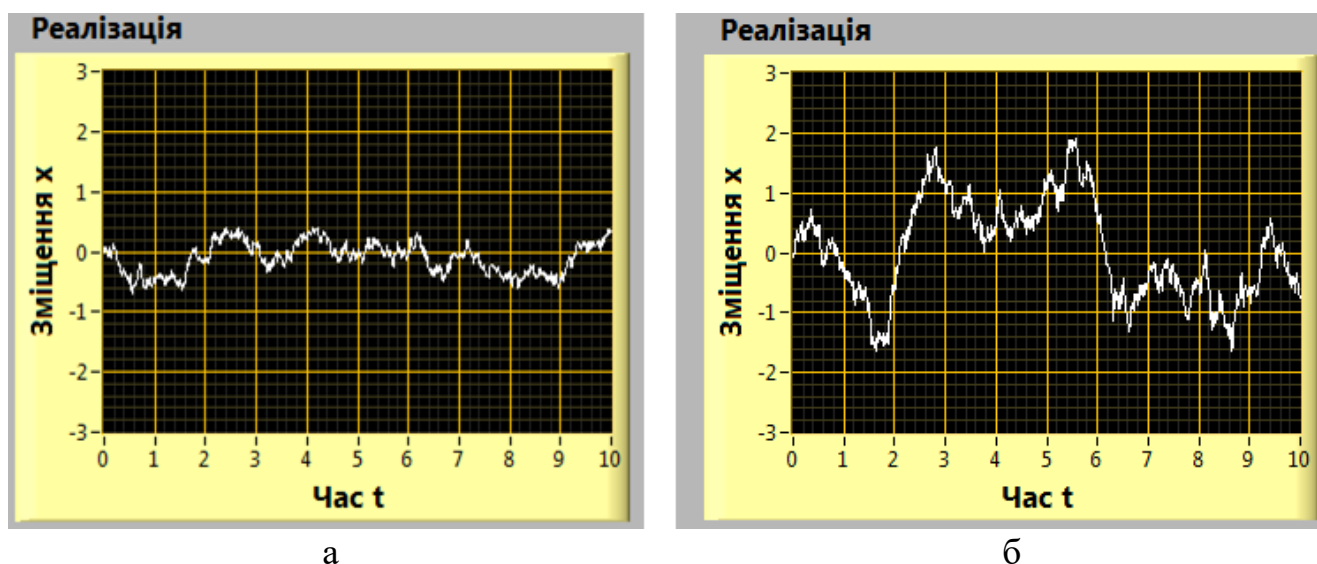


Рисунок 3.8 – Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека: (а) $\sigma = 0,5$; (б) $\sigma = 1$

На рис. 3.9 представлені реалізації випадкового процесу для генетичної моделі. По горизонтальній осі відкладається безрозмірний час. По вертикальній осі відкладається безрозмірна координата частинки X . Якщо безрозмірна амплітуда гаусівського білого шуму мала (σ дорівнює 0,5 як на рис. 3.9а), спостерігаються випадкові коливання з розмахом в околі нуля. Безрозмірне зміщення X на конкретному графіку не виходить за межі від $-0,6$ до $0,6$. Якщо безрозмірна амплітуда гаусівського білого шуму порівняно велика (σ дорівнює 2 як на рис. 3.9б), спостерігаються вже два найбільш ймовірних стани: в околі точки -1 і в околі точки 1 . Тобто, випадкові коливання з малим розмахом спочатку відбуваються біля, наприклад, значення $X = -1$, потім через деякий випадковий час в системі відбувається

перемикання, і випадкові коливання вже здійснюються в околі іншого найбільш ймовірного стану біля $X = 1$. Такі перемикання повторюються знову і знову. При цьому зміщення X на графіку не виходить за природні межі від -1 до 1 . Отже, при малому шумі система має один найбільш ймовірний стан, а при великому – два. Таким чином, при збільшенні амплітуди шуму індукує перехід від одномодального ймовірнісного розподілу стану системи до двомодального розподілу.

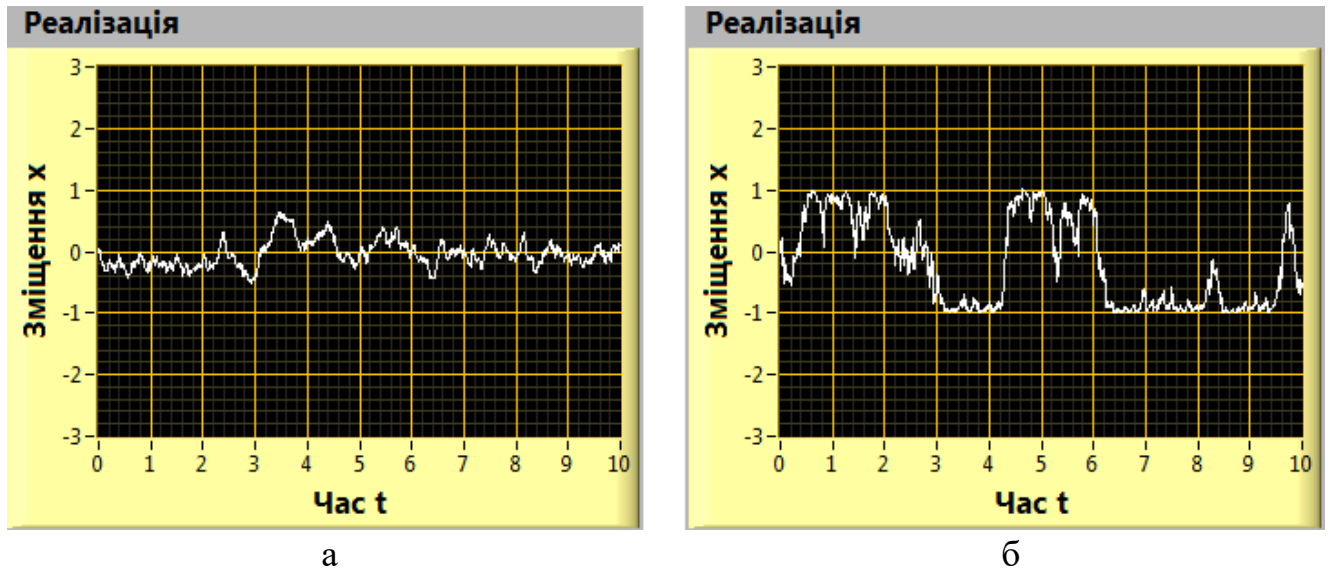


Рисунок 3.9 – Реалізації процесу генетичної моделі: (а) $\sigma = 0,5$; (б) $\sigma = 2$

Для більшого розуміння розглядуваного явища побудуємо гістограми. Спочатку – для процесу Орнштейна-Уленбека (рис. 3.10), потім – для процесу генетичної моделі (рис. 3.11).

Для побудови гістограм для процесу Орнштейна-Уленбека знаходяться реалізації ($M = 10^5$). Кількість вузлів на осі часу $N = 1000$ при $\Delta t = 0,01$. По горизонтальній осі відкладаються інтервали значень безрозмірного зміщення X в межах від -1 до 1 , по вертикальній – відсоток реалізацій від загальної кількості, що потрапили в кожен інтервал. Якщо безрозмірна амплітуда гаусівського білого шуму мала (σ дорівнює $0,5$ як на рис. 3.10а), спостерігається єдиний максимум в околі значення $X = 0$. Безрозмірне зміщення X на гістограмі практично не виходить

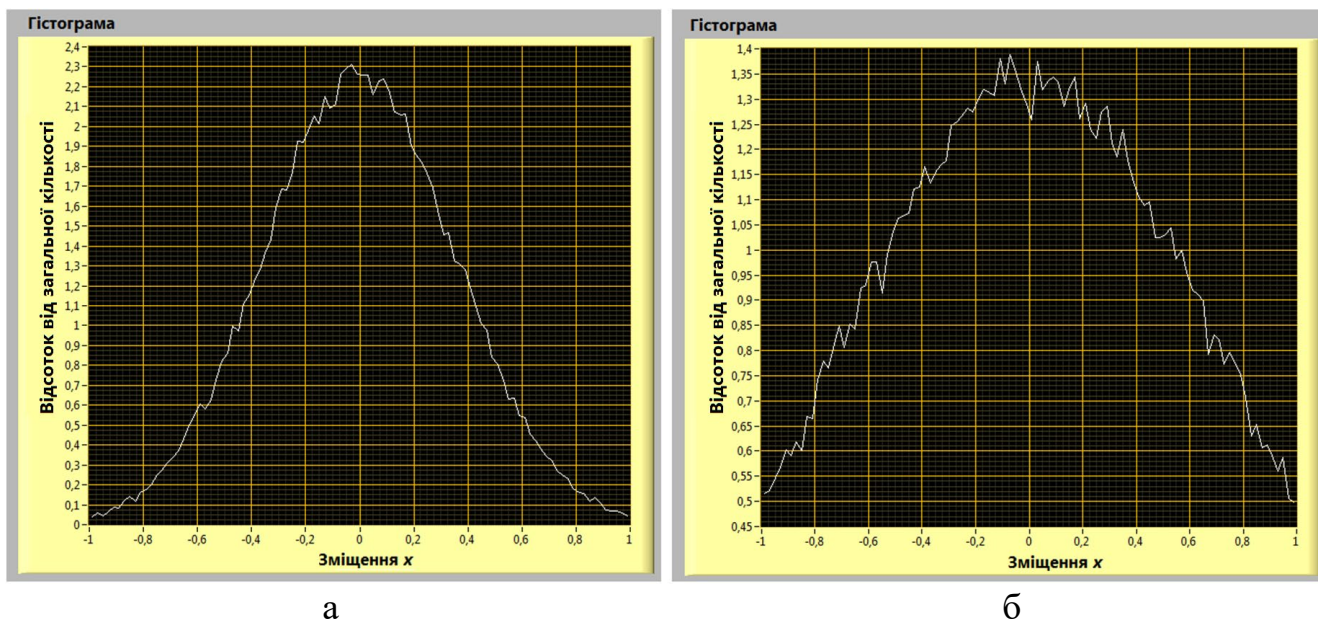


Рисунок 3.10 – Гістограми для процесу Орнштейна-Уленбека: (а) $\sigma = 0,5$; (б) $\sigma = 1$

за межі від -1 до 1 . Якщо амплітуда шуму збільшується (σ дорівнює 1 як на рис. 3.10б), гістограма розпливатися. Вона більш полого при великій амплітуді, ніж при малій.

На рис. 3.11 представлені гістограми для генетичної моделі. Гістограми надають уявлення про стаціонарну (незалежну від часу) щільність імовірності розподілу. Знаходяться реалізації процесу в загальній кількості $M = 10^5$. Тривалість кожної реалізації дорівнює безрозмірному часу $t = 9,99$ (кількість вузлів на осі часу $N = 1000$ при кроці дискретизації $\Delta t = 0,01$). По горизонтальній осі відкладаються інтервали значень безрозмірного зміщення X в межах від -1 до 1 . По вертикальній осі відкладається відсоток реалізацій від загальної кількості, що потрапили в кожен інтервал. Якщо безрозмірна амплітуда гаусівського білого шуму мала ($\sigma = 0,5$, як на рис. 3.11а), спостерігається єдиний максимум в околі $X = 0$. При збільшенні амплітуди до значення $\sigma = 0,7071$ (рис. 3.11б), спостерігається розпливання єдиного максимуму до форми плато. Якщо амплітуду ще збільшити до значення $\sigma = 2$, то гістограма матиме два максимуми біля значень $X = -1$ та $X = 1$ (рис. 3.11в). Зміщення X на графіках не виходять за межі від -1 до 1 . Отже, для генетичної моделі при збільшенні амплітуди шуму гістограми не тільки розпливаються, а і якісно змінюються: замість одного максимуму з'являються два.

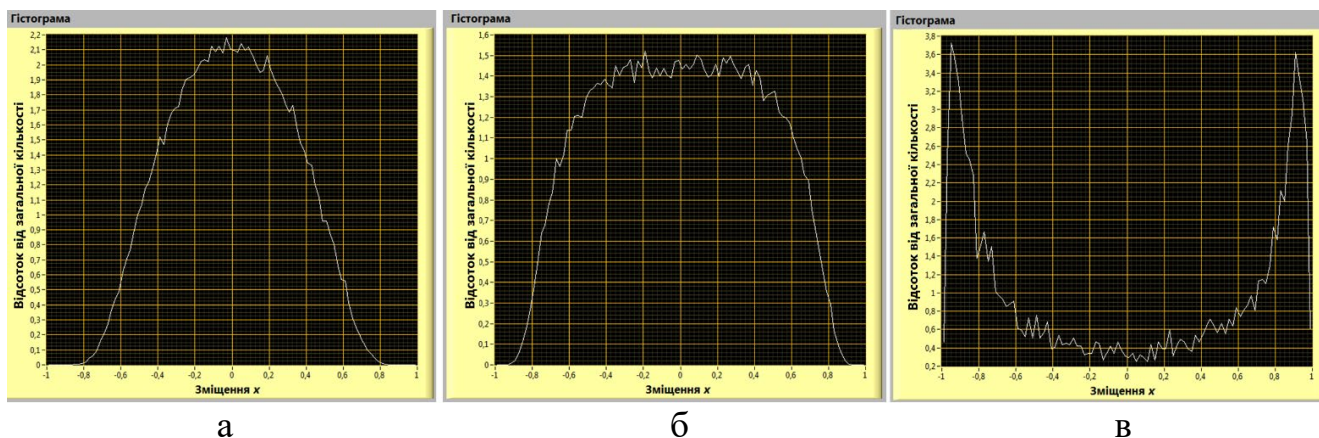


Рисунок 3.11 – Гістограми для процесу генетичної моделі:

(а) $\sigma = 0,5$; (б) $\sigma = 0,7071$; (в) $\sigma = 2$

Виконаємо перевірку експериментальних даних з теоретичними, які розраховуються у відповідності з виразами щільності ймовірності для процесу Орнштейна-Уленбека і генетичної моделі (3.2) в Microsoft Excel (рисунки 3.12 і 3.13).

На рис. 3.12 представлені перевірочні діаграми для процесу Орнштейна-Уленбека, на рис. 3.13 – для генетичної моделі. Вони порівнюються з гістограмами на рисунках 3.10 і 3.11, відповідно.

Перевірка показує, що гістограми, отримані за допомогою віртуального стеґна LabVIEW і програми Excel, співпадають не тільки якісно, а і кількісно.

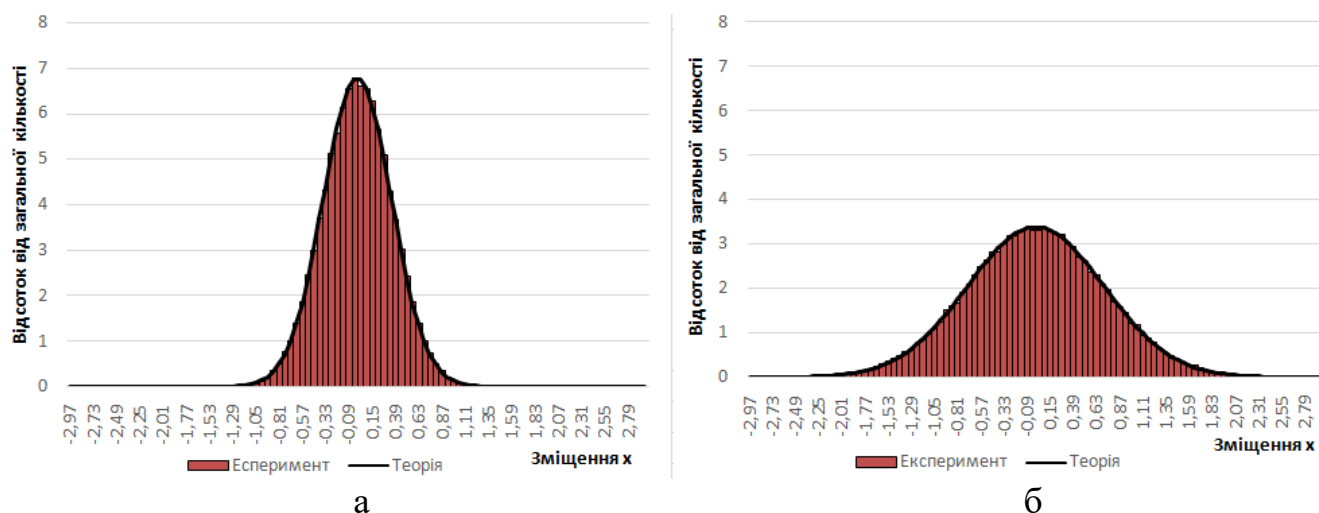


Рисунок 3.12 – Перевірочні діаграми для процесу Орнштейна-Уленбека:

(а) $\sigma = 0,5$; (б) $\sigma = 1$

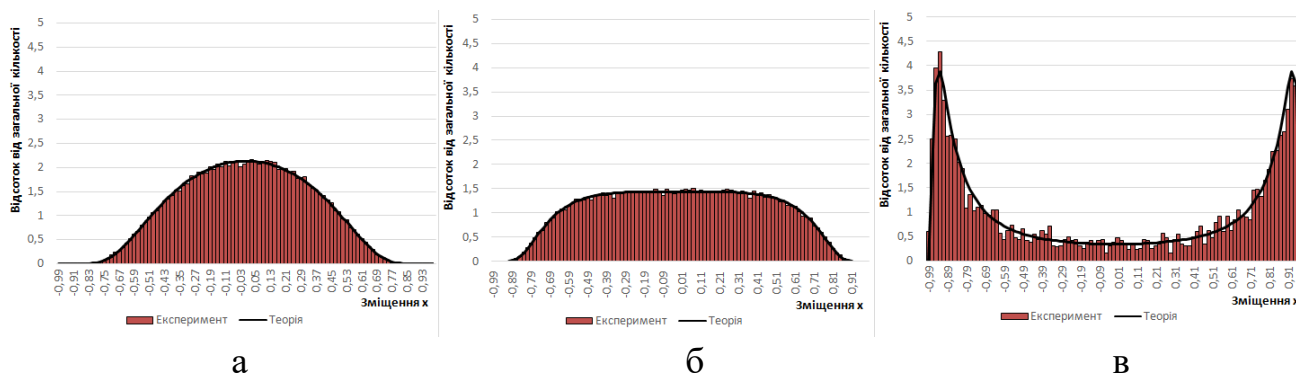


Рисунок 3.13 – Перевірочні діаграми для генетичної моделі:

(а) $\sigma = 0,5$; (б) $\sigma = 0,7071$; (в) $\sigma = 2$

Важливо відмітити, що в детермінованій динаміці (в цьому випадку $\sigma = 0$), згідно рівняння (3.1), система має стаціонарний стан в точці $X = 0$. Відповідна стаціонарна щільність імовірності має форму дельта-піка. Під впливом шуму вона розпливається і набуває форми як на рисунку 3.11а. Такий ефект є інтуїтивно очікуваним. Але при подальшому збільшенні амплітуди шуму стаціонарна щільність імовірності трансформується і набуває форми з двома максимумами як на рисунку 3.11в, що протирічить інтуїтивним уявленням про вплив шуму.

Таким чином, білий шум відіграє конструктивну роль в явищі індукованих шумом переходів у розглянутій нелінійній динамічній системі. Він створює в ній нові стани, поява яких неможлива при детермінованому описанні.

3.5 Висновки до розділу 3

1. В середовищі LabVIEW розроблено віртуальний стенд для дослідження реалізацій процесів Вінера й Орнштейна-Уленбека та генетичної моделі. Стохастичні диференціальні рівняння зводилися до різницевих. Гаусівська випадкова послідовність генерувалася віртуальним приладом Continuous Random, а гістограми знаходилися за допомогою віртуального приладу Create Histogram Express.

2. Отримано реалізації процесу Орнштейна-Уленбека. Показано, якщо гаусівський білий шум малий (безрозмірна амплітуда дорівнює 0,5), спостерігаються випадкові коливання з малим розмахом в околі нуля. Якщо шум збільшується (безрозмірна амплітуда дорівнює 1), розмах випадкових коливань відносно нуля

збільшується. Побудовані відповідні гістограми мають один максимум в першому і другому випадках. При збільшенні амплітуди шуми вони лише розпливаються.

3. Отримано реалізації випадкового процесу для генетичної моделі. Показано, що його значення для малого шуму (безрозмірна амплітуда дорівнює 0,5) випадково змінюються з малим розмахом біля нуля. Для великого шуму (безрозмірна амплітуда дорівнює 2) спостерігаються вже два найбільш ймовірних стани, поблизу значень -1 і 1 . Побудовані відповідні гістограми мають один максимум в першому випадку і два – в другому. Отже, при збільшенні амплітуди гаусівського білого шуму відбуваються індуковані шумом переходи.

4. При порівнянні гістограм, побудованих експериментально в LabVIEW, з гістограмами, отриманими в Microsoft Excel із теоретичних міркувань, встановлено, що вони співпадають і якісно, і кількісно.

4 ВІРТУАЛЬНИЙ СТЕНД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАЛЬНИХ КОНТУРІВ

4.1 Математична модель вимушених коливань

Диференціальне рівняння вимушених коливань в коливальному контурі має вигляд [64]

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = (U_m/L)\cos \omega t, \quad (4.1)$$

де q – заряд на обкладинках конденсатора;

β – коефіцієнт згасання, $\beta = R/(2L)$;

ω_0 – власна частота коливань, $\omega_0^2 = 1/(LC)$;

R – опір резистора;

L – індуктивність котушки;

C – електроємність конденсатора;

U_m – амплітуда зовнішньої напруги;

ω – циклічна частота зовнішньої напруги.

Від диференціального рівняння другого порядку (4.1) для вимушених коливань перейдемо до системи двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{q} = I \\ \dot{I} = -2\beta I - \omega_0^2 q + \frac{U_m}{L}\cos \omega t \end{cases}, \quad (4.2)$$

де I – миттєве значення сили струму.

Система (4.2) зручна для чисельно розв'язку.

Використаємо спочатку різницевий метод Ейлера [63] для найпростішого випадку вільних коливань ($\beta = 0, U_m = 0$):

$$\begin{cases} q_{i+1} = q_i + I_i \Delta t \\ I_{i+1} = I_i - \omega_0^2 q_i \Delta t, \\ t_{i+1} = t_i + \Delta t \end{cases} \quad (4.3)$$

де Δt – крок дискретизації за часом.

Система (4.3) дозволяє знаходити наступні значення заряду, миттєвої сили струму, моменту часу через попередні. Віртуальний стенд, розроблений на основі методу Ейлера, для дослідження вільних коливань представлений в підрозділі 4.2, результати, отримані за його допомогою, – в підрозділі 4.3. На основі останніх можна зробити висновок, що метод Ейлера недостатньо точний для даної задачі.

Розглянемо метод Рунге-Кутта 4-го порядку [63], який є удосконаленням методу Ейлера. В середовищі LabVIEW для даного методу є відповідний віртуальний інструмент «ODE Runge Kutta 4th Order», який представлений на рис. 4.1.

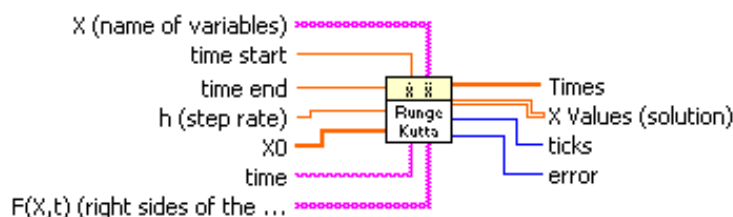


Рисунок 4.1 – Графічне представлення віртуального інструмента «ODE Runge Kutta 4th Order» [65]

Значення входів та виходів розглядуваного віртуального інструменту:

- X – масив рядків змінних;
- час початку – це початкова точка звичайних диференціальних рівнянь, стандартним значенням є 0;
- час завершення – це кінцева точка досліджуваного інтервалу часу, за замовчуванням дорівнює 1.0;
- h – фіксований крок, типовим значенням є 0.1;
- X_0 – вектор початкової умови $x[10], \dots, x[n0]$;
- час – рядок, що позначає змінну часу, типова змінна – t ;

- $F(X, t)$ – це 1D-масив рядків, що представляє праву сторону диференціальних рівнянь, формули можуть містити будь-яку кількість дійсних змінних;
- значення часів – це масив, що представляє значення часу; метод Рунге-Кутта дає рівновіддалені часові кроки між часом початку і часом завершення;
- X значення – це 2D масив вектора розв’язку $x [10], \dots, x [n]$;
- помилка попереджає про наявність будь-якої помилки. Помилки виникають з використанням неправильних входів X , X_0 і $F(X, t)$.

Віртуальний стенд, розроблений на основі методу Рунге-Кутта 4-го порядку, для дослідження вимушених коливань (4.2) приводиться в підрозділі 4.2, результати, отримані за його допомогою, – в підрозділі 4.3.

4.2 Опис віртуальних стендів

Лицева панель віртуального стенда, розробленого на основі методу Ейлера, для дослідження вільних коливань представлена на рис. 4.2.

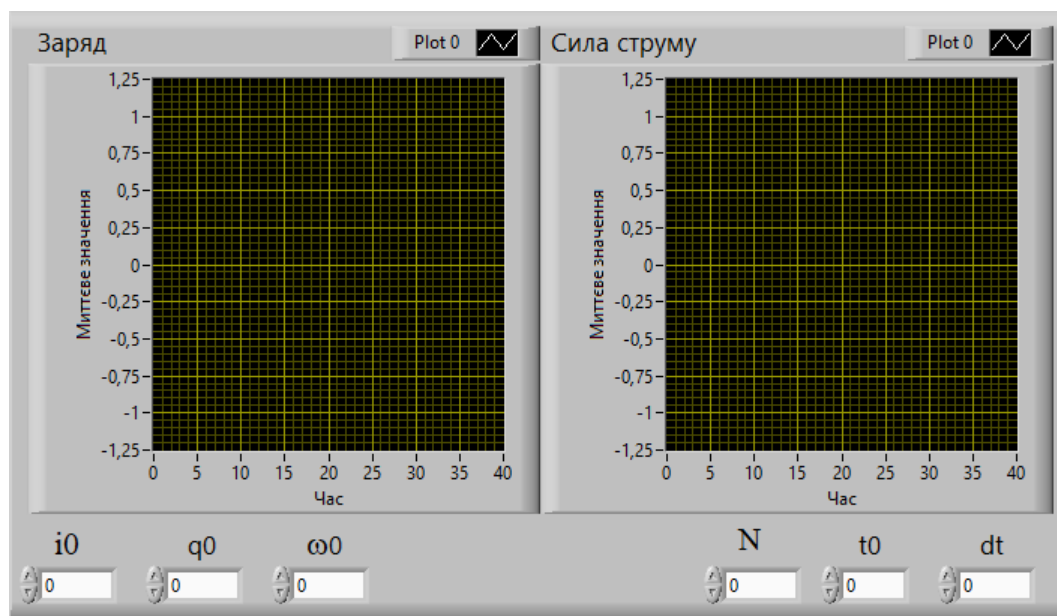


Рисунок 4.2 – Лицева панель віртуального стенда, розробленої на основі методу Ейлера, для дослідження вільних коливань

На даній панелі знаходиться так звана «панель керування», яка має поля для вводу параметрів системи, два екрани для графічного відображення зміни заряду та сили струму.

Блок-діаграма віртуального стенда зображена на рис. 4.3. Використовується цикл For Loop (виконує підпрограму n разів, де n – це значення, підключене до терміналу підрахунку N). Термінал ітерації (i) забезпечує поточну кількість ітерацій циклу, яка знаходиться в діапазоні від 0 до $n-1$.) Також застосовується структура Feedback Node і математичні функції: додавання, віднімання, множення і піднесення в квадрат. Для введення параметрів використовується Numeric Control, для графічного відображення – Waveform Graph.

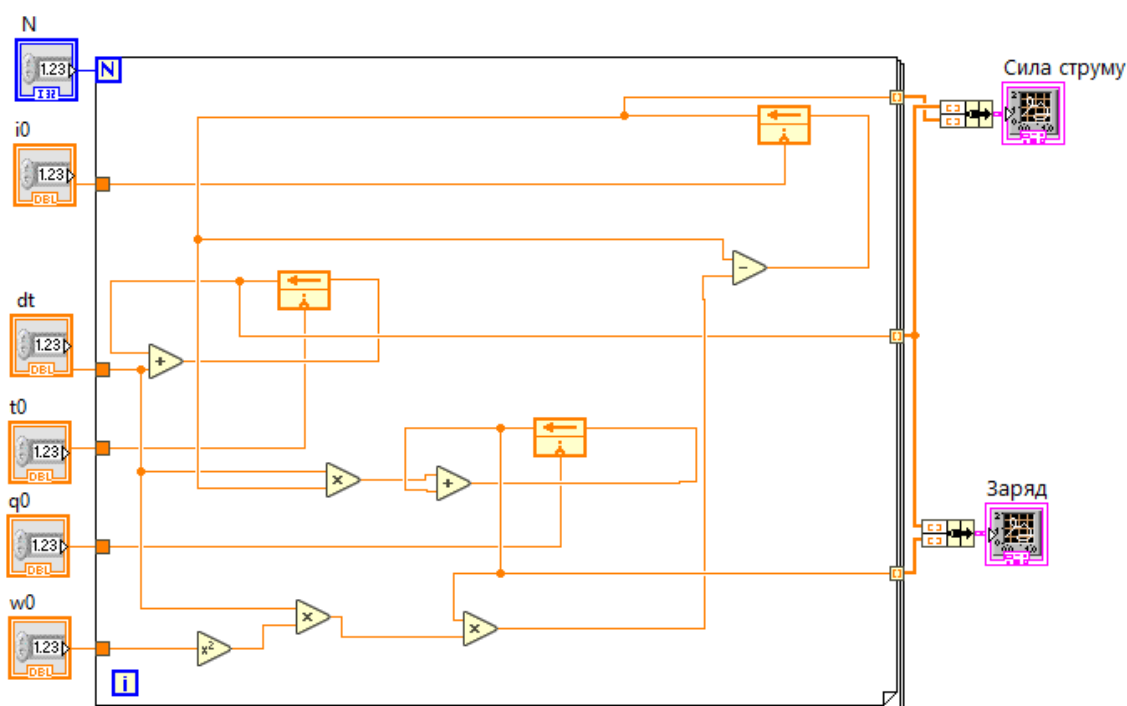
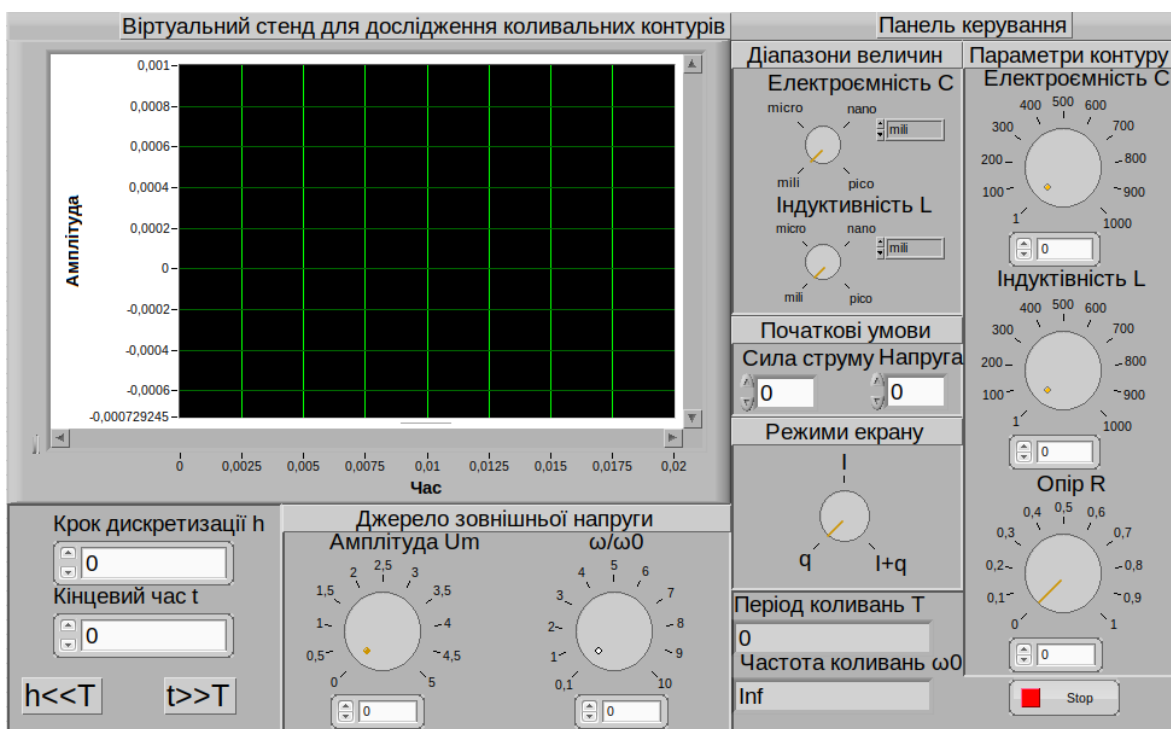


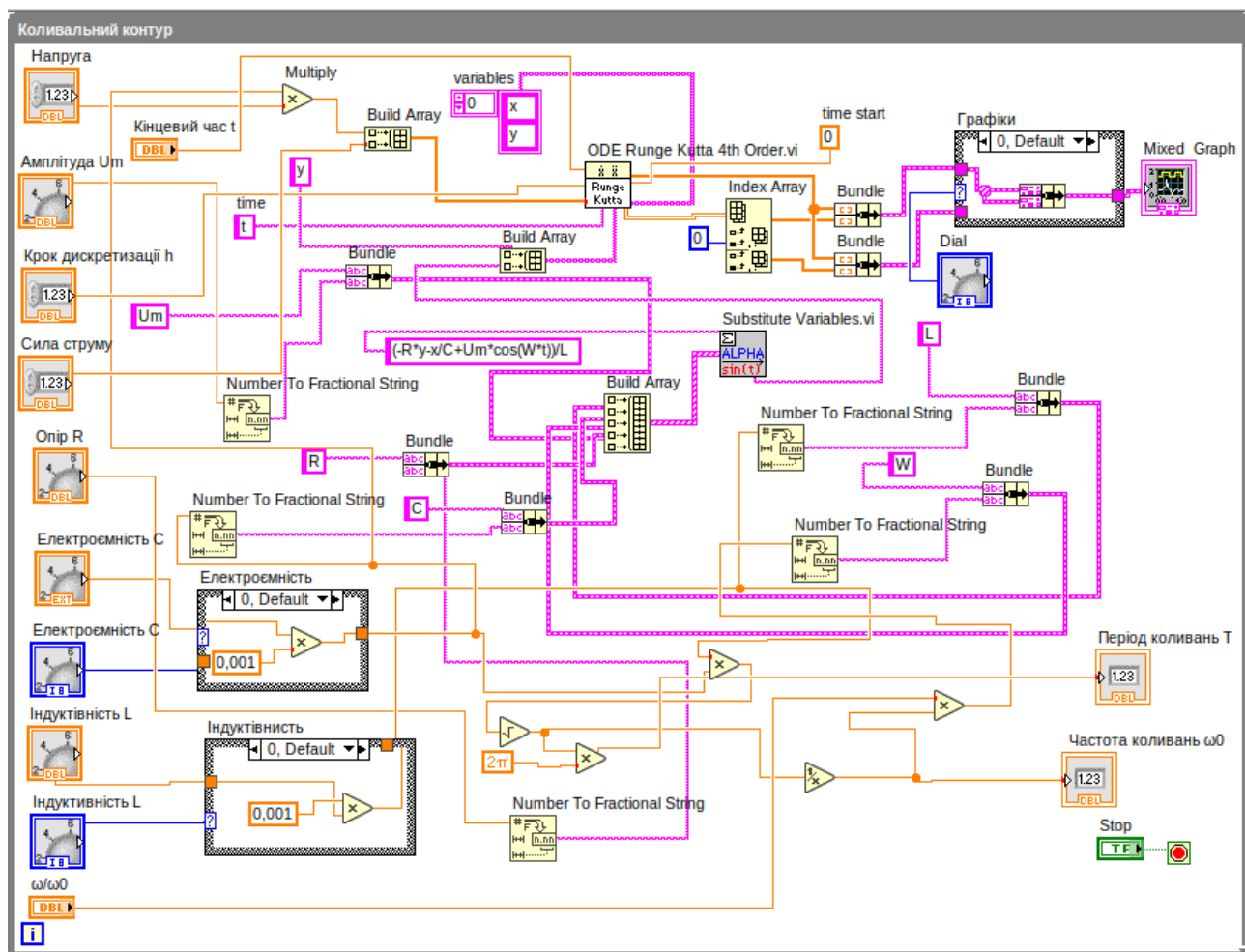
Рисунок 4.3 – Блок-діаграма інтерактивної демонстрації, розробленої на основі методу Ейлера, для дослідження вільних коливань

На рисунку 4.4а показана лицева панель віртуального стенда, розробленого на основі методу Рунге-Кутта 4-го порядку. Вона має в своєму складі панель для графічного відображення інформації (для побудови осцилограм) і панель керування. На рисунку 4.4б представлена блок-діаграма віртуального стенда.

Панель керування складається з багатьох блоків, які мають функціональне призначення. Блок «Параметри контуру» складається з 3 ручок, які задають електроємність, індуктивність і опір. Блок «Діапазони величин» має дві ручки: для перемикання діапазону електроємності від міліфарад до пікофарад, для



а



б

Рисунок 4.4 – Лицева панель (а) та блок-діаграма (б) віртуального стенда, розробленого на основі методу Рунге-Кутта 4-го порядку

перемикання діапазону індуктивності від мілігенрі до пікогенрі. В блоці «Початкові умови» є два поля, в яких ми вказуємо початкову силу струму і напругу, яка впливає на величину заряду. Є блок «Режими екрану», який дозволяє спостерігати коливання: тільки заряду, тільки сили струму, заряду і сили струму одночасно на одному екрані. Для цього треба переключити ручку у відповідне положення. Для спостереження вимушених коливань є блок «Джерело зовнішньої напруги». В ньому є дві ручки: одна змінює амплітуду, а друга встановлює співвідношення зовнішньої частоти коливання до власної. Також важливими параметрами є крок дискретизації h і кінцевий час t . Якщо неправильно виставити ці параметри, то не побачимо осцилограм, тому на панелі написані допоміжні формули. Крок дискретизації має бути набагато менший за період коливань, а кінцевий час – набагато більший за період. Щоб не розраховувати період і власну частоту самому, було зроблено так, щоб ці дві величини розраховувалися автоматично і виводились на панель. Також є кнопка «Stop», яка зупиняє роботу демонстрації.

На блок-діаграмі є «Number To Fractional String Function». Вона перетворює число в рядок символів. Віртуальний прилад «Substitute Variables» підставляє значення у формулу за заданими правилами. Також є «Bundle Function» (збирає кластер з окремих елементів), «Index Array Function» (повертає елемент або підмасив n -вимірного масиву). Не раз використовуємо «Build Array Function» (об'єднує декілька масивів або додає елементи до n -мірного масиву). Для перемикання діапазонів і переключення режиму екрана використовуємо «Case Structure» (містить одну або більше піддіаграм, або випадків, одна з яких виконується, коли структура виконується. Значення, підключене до селектора випадків, визначає, який випадок буде виконано.

Для вводу інформації використовуємо «DBL Numeric Control», для відображення осцилограм – «Mixed Graph».

Використаємо віртуальні стенди для отримання експериментальних результатів – осцилограм коливального контуру.

4.3 Результати досліджень осцилограм

Спочатку розглянемо результати експериментів з віртуальним стендом, розробленим на основі методу Ейлера для вільних коливань. Для того, щоб отримати графіки вільних коливань, ми задаємо початкові значення заряду q_0 і сили струму i_0 та власну частоту коливань ω_0 . Також ми задаємо кількість ітерацій N і час дискретизації Δt . Встановлюємо початковий час $t_0 = 0$. Ми маємо спостерігати осцилограми заряду та сили струму зі сталими амплітудами. Натомість ми отримуємо коливання, для яких амплітуди заряду та сили струму з часом збільшуються (рис. 4.5). А це є суттєвим недоліком. Тому метод Ейлера є незастосовним для моделювання фізичних процесів в коливальному контурі, і ми переходимо до експериментів з віртуальним стендом, розробленим на основі методу Рунге-Кутта четвертого порядку.

Створена інтерактивна демонстрація (віртуальний стенд) дозволяє використовувати діапазон величин від мілі- до піко- як для індуктивності, так і для електроємності. Отримаємо результати експериментів в реалістичному діапазоні мікрофарад і мікрогенрі. Початковий заряд визначається через початкову напругу та електроємність за формулою $q = CU$. На екрані можна спостерігати коливання заряду, сили струму, а також заряду і сили струму одночасно.

Для отримання вільних коливань задаємо параметри коливального контуру: електроємність конденсатора $C = 1$ мкФ, індуктивність котушки $L = 1$ мкГн, опір резистора залишаємо на нулі ($R = 0$). В початкових умовах напруга $U = 1$ В, сила струму $I = 0$ А. Крок дискретизації $1 \cdot 10^{-8}$ с, кінцевий час 20 мкс. Блок «Джерело зовнішньої напруги» не використовуємо, тобто амплітуда зовнішньої періодичної напруги $U_m = 0$. В блоці «Режими екрану» переключаємо режими і спостерігаємо осцилограми для заряду та сили струму, які приведені на рис. 4.6. Важливо відмітити, що амплітуди заряду та сили струму, на відміну від попередніх результатів на рис. 4.5, з часом залишаються сталими.

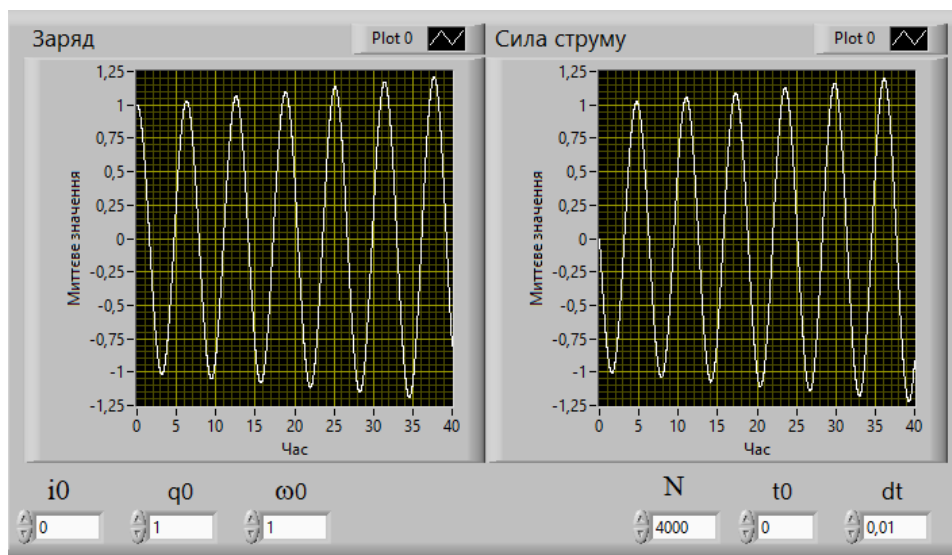


Рисунок 4.5 – Вільні коливання заряду та сили струму (метод Ейлера)

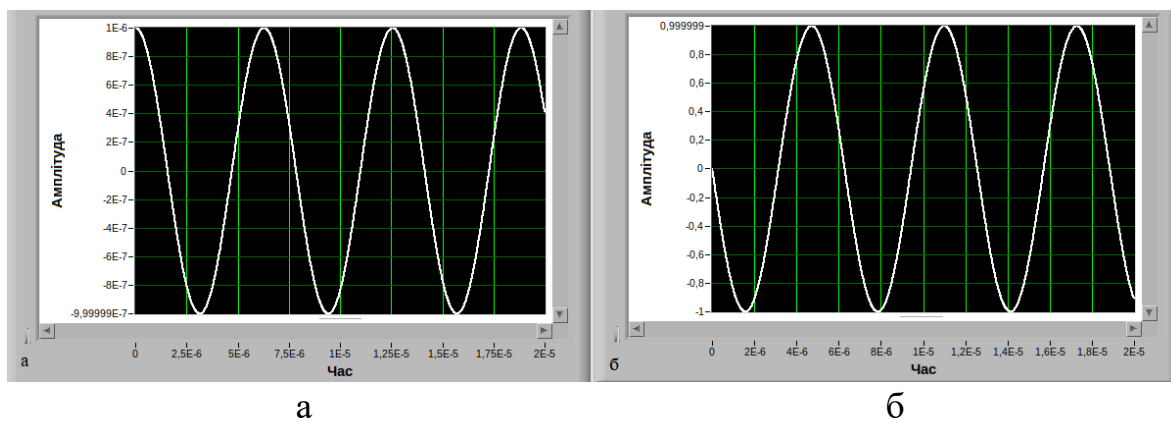


Рисунок 4.6 – Вільні коливання заряду (а), сили струму (б)
(метод Рунге-Кутта 4-го порядку)

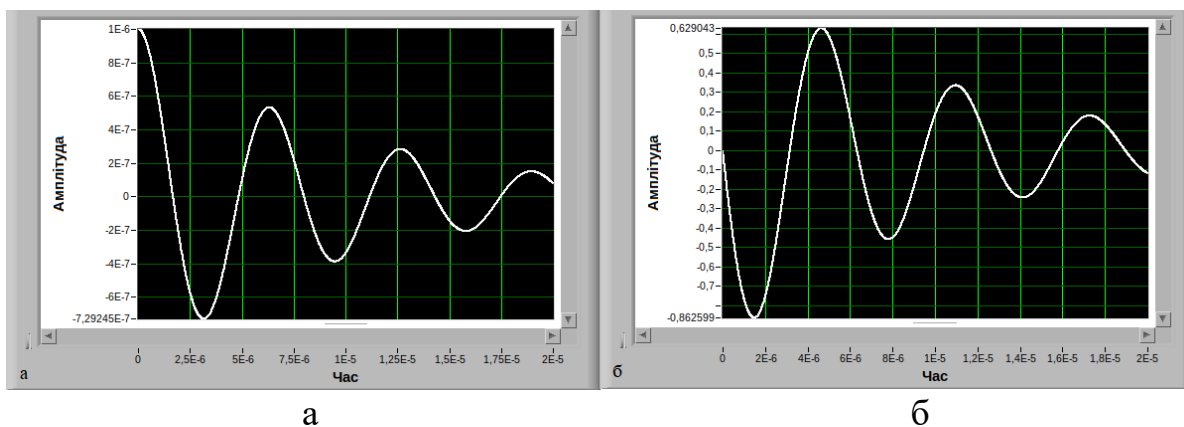


Рисунок 4.7 – Загасальні періодичні коливання заряду (а), сили струму (б)

Досліджуємо загасальні коливання (див. рис. 4.7). Задаємо параметри контуру: електроємність $C = 1$ мкФ, індуктивність $L = 1$ мкГн, опір робимо не дуже великим ($R = 0,2$ Ом). В початкових умовах напруга $U = 1$ В і сила струму $I = 0$ А. Крок дискретизації $1 \cdot 10^{-8}$ с, кінцевий час 20 мкс. Блок «Джерело зовнішньої напруги» не використовуємо, тобто амплітуда зовнішньої напруги дорівнює нулю ($U_m = 0$). В блоці «Режими екрану» переключаємо режими і спостерігаємо осцилограми. З них видно, що амплітуди коливань заряду і сили струму з часом поступово зменшуються. Потім коливання зовсім зникають.

Отримуємо результати для вимушених коливань. Перший випадок – коефіцієнт ω / ω_0 дорівнює 0,5, тобто зовнішня циклічна частота менша за власну. Опір $R = 0,3$ Ом, електроємність $C = 1$ мкФ, індуктивність $L = 1$ мкГн. В початкових умовах напруга на конденсаторі $U = 1$ В, сила струму дорівнює нулю ($I = 0$ А). Крок дискретизації $1 \cdot 10^{-8}$ с, кінцевий час 50 мкс. Амплітуда зовнішньої напруги U_m дорівнює 1 В. Осцилограми можемо побачити на рис. 4.8. На них з часом встановлюються гармонічні коливання сили струму і заряду. Також можемо спостерігати перехідні процеси.

У другому випадку коефіцієнт ω / ω_0 дорівнює 1. Параметри коливального контуру не змінюємо. В початкових умовах напруга $U = 1$ В, сила струму $I = 0$ А. Крок дискретизації $1 \cdot 10^{-8}$ с, кінцевий час 50 мкс. Амплітуда зовнішньої напруги $U_m = 1$ В. Як видно з осцилограм на рис. 4.9, амплітуди заряду та сили струму протягом перехідного процесу поступово зростають і приймають сталі значення, більші за попередній випадок на рис. 4.8. Це є проявом нелінійного явища резонансу.

Розглядаємо останній випадок вимушених коливань, коли коефіцієнт ω / ω_0 дорівнює 1,5 (див. рис. 4.10). Параметри коливального контуру залишаємо без змін. В початкових умовах напруга $U = 1$ В, сила струму $I = 0$ А. Крок дискретизації $1 \cdot 10^{-8}$ с, кінцевий час 50 мкс. Як видно з осцилограм, амплітуди значно менші порівняно з попереднім випадком. З початку відбуваються перехідні процеси, а потім в системі йдуть періодичні гармонічні коливання.

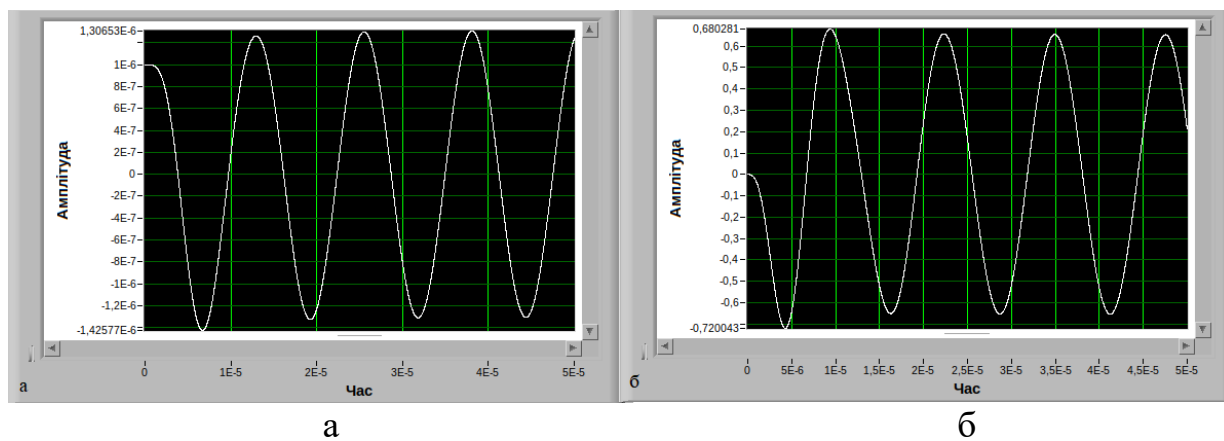


Рисунок 4.8 – Вимушені коливання ($\omega / \omega_0 = 0,5$) заряду (а), сили струму (б)

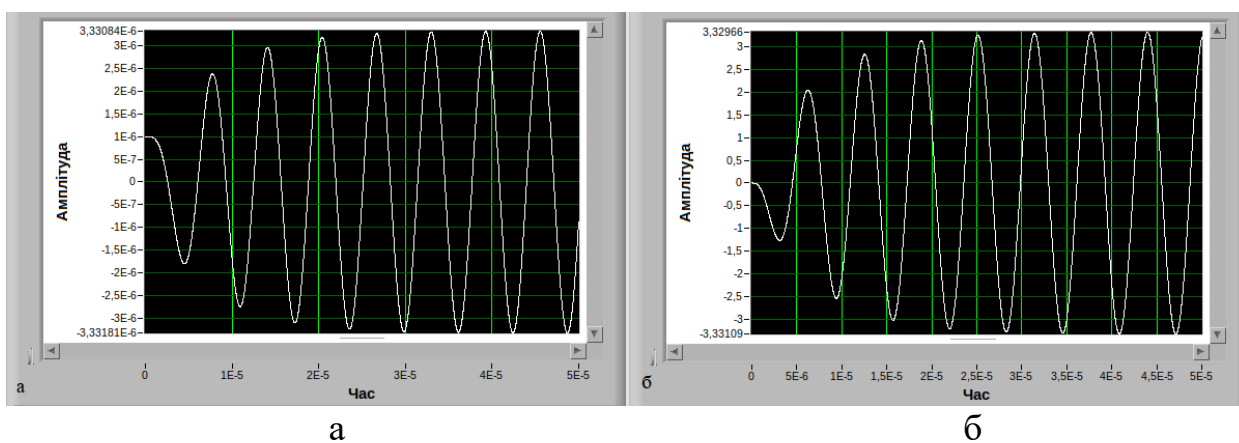


Рисунок 4.9 – Вимушені коливання ($\omega / \omega_0 = 1$) заряду (а), сили струму (б)

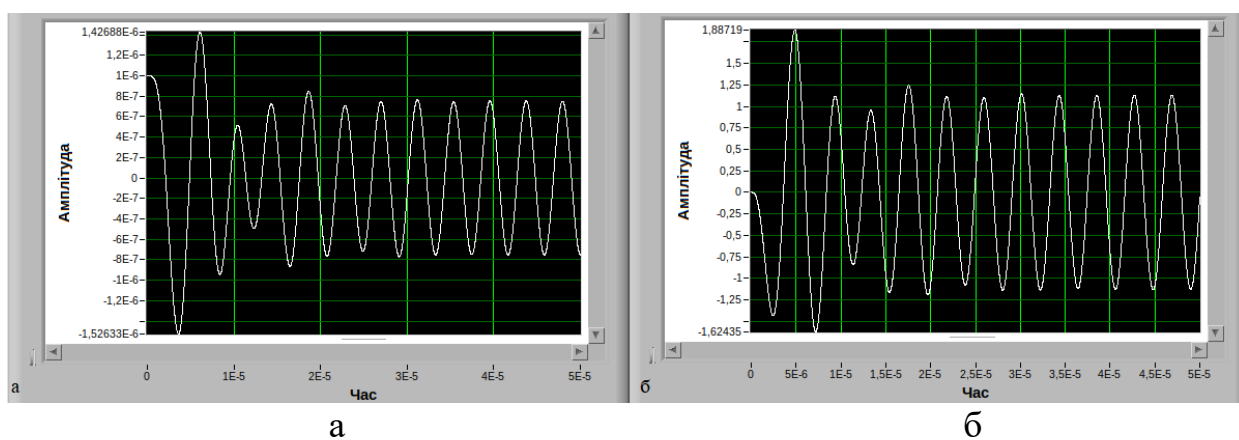


Рисунок 4.10 – Вимушені коливання ($\omega / \omega_0 = 1,5$) заряду (а), сили струму (б)

4.4 Кількісна перевірка результатів досліджень

За допомогою інтерактивної демонстрації були отримані графіки коливань заряду та сили струму кожного типу (вільні, загасальні, вимушені). Щоб перевірити, чи коректно вона працює, розрахуємо відповідні теоретичні значення для кожного типу коливань і перевіримо їх з експериментальними даними. Побудуємо в Microsoft Excel графіки для візуального порівняння.

4.4.1 Вільні коливання заряду та сили струму

Коливання заряду можемо розрахувати по формулі [64]:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де q_m – амплітудне значення заряду, ω_0 – власна частота коливань, t – час, α – початкова фаза (в нашому випадку дорівнює 0).

Власна частота коливань ω_0 :

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

В нашому випадку індуктивність $L = 1$ мкГн, електроємність $C = 1$ мкФ, кінцевий час 20 мкс. Знаходимо власну частоту коливань по формулі. Потім будуємо графіки по теоретичним і експериментальним значенням (рис. 4.11а).

Для теоретичного розрахунку сили струму маємо формулу

$$I = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Знаходимо значення сили струму, будуємо графіки (рис. 4.11б).

Після порівняння можемо відзначити, що експериментальні значення заряду і сили струму для вільних коливань ідеально збігаються з теоретичними.

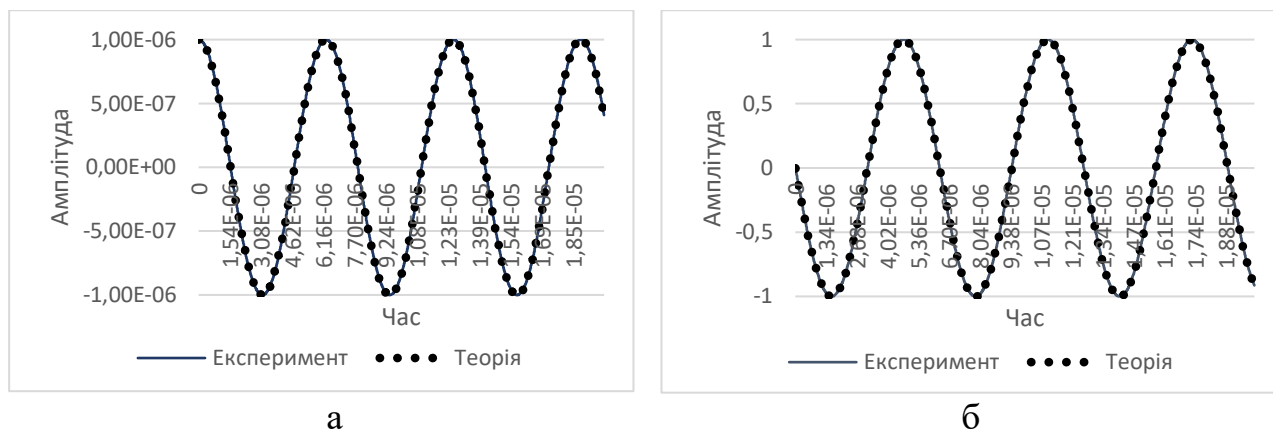


Рисунок 4.11 – Вільні коливання заряду (а), сили струму (б)

4.4.2 Затухаючі коливання заряду та сили струму

Обираємо параметри системи: індуктивність $L = 1$ мкГн, електроємність $C = 1$ мкФ, кінцевий час 20 мкс і опір $R = 0,2$ Ом. Спочатку розглядаємо затухаючі коливання заряду. Теоретичний розв'язок має вигляд [64]

$$q = q_m \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \alpha),$$

де β – коефіцієнт загасання, ω – частота згасаючих коливань.

Дані величини визначаються по формулам:

$$\beta = R/2L, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Знаходимо значення заряду, будуємо графіки (рис. 4.12а).

Розглядаємо затухаючі коливання сили струму. Формула для теоретичного розрахунку має вигляд

$$I = \omega_0 q_m \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \alpha + \psi),$$

де ψ знаходиться по формулі

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}.$$

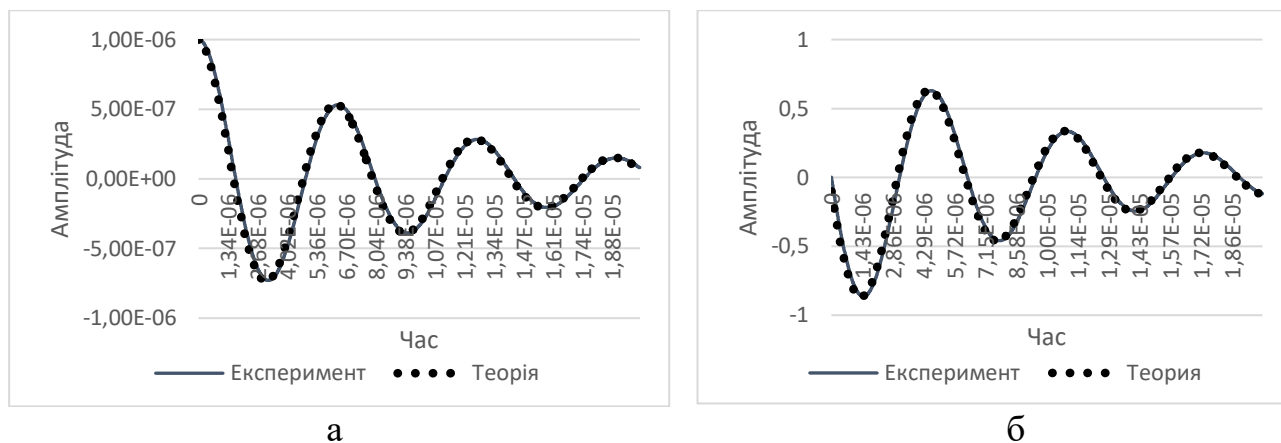


Рисунок 4.12 – Згасальні коливання заряду (а), сили струму (б)

Графіки для сили струму представлені на рисунку 4.12б.

Порівнюючи, можемо зазначити, що експериментальні значення заряду і сили струму для затухаючих коливань добре збігаються з теоретичними.

4.4.3 Вимушені коливання заряду та сили струму

Задаємо параметри системи: електроємність $C = 1$ мкФ, індуктивність $L = 1$ мкГн, опір $R = 0,3$ Ом. Кінцевий час 50 мкс. Виставляємо амплітуду $U_m = 1$ В, коефіцієнт ω / ω_0 дорівнює 1,5.

Спочатку розглядаємо коливання заряду (рис. 4.13а). Для розрахунку теоретичних значень використаємо формулу [64]:

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (4.4)$$

де

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Розглядаємо коливання сили струму. Формула для теоретичного розрахунку має вигляд

$$I = I_m \cos(\omega t - \psi + \pi / 2), \quad (4.5)$$

де $I_m = \omega q_m$ – максимальне значення сили струму.

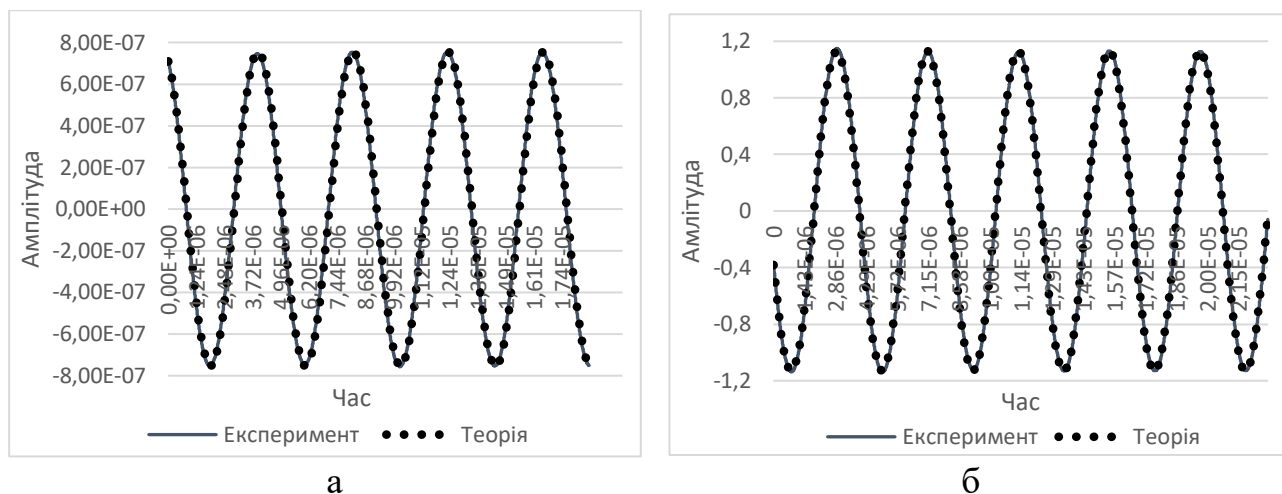


Рисунок 4.13 – Вимушені коливання заряду (а), сили струму (б)

Графіки вимушених коливань сили струму представлені на рисунку 4.13б.

Експериментальні значення заряду і сили струму при вимушених коливаннях ідеально збігаються з теоретичними.

Таким чином, перевірка показала, що розроблена нами інтерактивна демонстрація показує достовірні результати для кожного типу коливань, причому з майже непомітною візуально похибкою. Для вимушених коливань ми підбирали час, з якого починали порівнювати теоретичні та експериментальні результати. Це тому, що формули (4.4) та (4.5) описують коливання, які вже встановилися. В той час як інтерактивна демонстрація дозволяє досліджувати і перехідні процеси. Приймалися реалістичні значення параметрів коливального контуру (відповідають середнім хвилям радіодіапазону).

4.5 Висновки до розділу 4

1. Розглянуто послідовний коливальний контур – електричну схему, що входить до складу електронних фільтрів та генераторів, і яка є базовою коливальною системою в курсі «Фізика» як в середній, так і вищій школі. В середовищі LabVIEW «із перших принципів» розробили інтерактивну демонстрацію для його дослідження. Тобто для моделювання фізичних процесів використовувалися чисельні розв'язки відповідного диференціального рівняння, а не його аналітичні розв'язки в окремих випадках.

2. Інтерактивна демонстрація дозволяє досліджувати вільні, загасаючі періодичні й аперіодичні, вимушені коливання заряду та сили струму в коливальному контурі.

3. Отримані конкретні осцилограми заряду та сили струму:

- для вільних коливань (електроємність $C = 1$ мкФ, індуктивність $L = 1$ мкГн, опір $R = 0$ Ом, початкова напруга на конденсаторі $U = 1$ В та початкова сила струму $I = 0$ А, тривалість 20 мкс);
- для загасаючих періодичних коливань (електроємність $C = 1$ мкФ, індуктивність $L = 1$ мкГн, опір $R = 0,2$ Ом, початкова напруга на конденсаторі $U = 1$ В та початкова сила струму $I = 0$ А, тривалість 20 мкс);
- для вимушених коливань (електроємність $C = 1$ мкФ, індуктивність $L = 1$ мкГн, опір $R = 0,3$ Ом, початкова напруга на конденсаторі $U = 1$ В та початкова сила струму $I = 0$ А, амплітуда зовнішньої напруги $U_m = 1$ В, співвідношення $\omega / \omega_0 = 0,5$, $\omega / \omega_0 = 1$, $\omega / \omega_0 = 1,5$, тривалість 50 мкс).

3. Перевірка експериментальних результатів з теоретичними показала, що розроблена інтерактивна демонстрація показує достовірні результати для кожного типу коливань.

4. Важливо відмітити, що інтерактивна демонстрація також дозволяє спостерігати перехідні процеси в контурі при вимушених коливаннях.

ВИСНОВКИ

1. Розглянуто нелінійну стохастичну систему першого порядку з однією динамічною змінною, детермінованою силою та двома взаємно корельованими гаусівськими білими шумами, один з яких адитивний, інший – мультиплікативний. Для довільного числення, яке, зокрема, включає числення Іто та Стратоновича, у вигляді квадратури отримано точний вираз ефективного потенціалу системи. Запропоновано методикау запису його розвинення в ряд Маклорена.

2. Із загальних міркувань показано, що індуковані взаємно корельованими гаусівськими білими шумами переходи від одноmodalного (з одним максимумом – модою) ймовірнісного розподілу стану системи до двоmodalного (з двома максимумами) можуть якісно описуватися нормальною формою біфуркації типу вил, що збурюється єдиним адитивним гаусівським білим шумом.

3. Розглянуто конкретний приклад системи з лінійною відновлювальною силою та мультиплікативним шумом, просторова складова амплітуди якого є квадратичною при малих за абсолютною величиною значеннях динамічної змінної й постійною – при великих. Отримано явний вид нормальної форми біфуркації. Досліджено залежності біфуркаційного параметра від параметрів шумів. Встановлено, що при варіюванні коефіцієнта взаємної кореляції шумів або амплітуди мультиплікативного шуму біфуркаційний параметр змінюється за лінійним законом, а при варіюванні амплітуди адитивного шуму – за нелінійним.

4. В середовищі LabVIEW розроблено віртуальний стенд для демонстрації хаотичної поведінки. Використане одновимірне відображення з нелінійністю типу функції Гауса, помноженої на її аргумент, що описує сигнали електронного автогенератора з запізненням, який складається з двох ламп біжної хвилі, замкнених у кільце. Знайдено характеристики сигналів – автокореляційну функцію та спектр коливань. Показано: при збільшенні коефіцієнта підсилення автогенератора сигнали набувають все більш складної форми (від аперіодичної до періодичної та нерегулярної, шумоподібної); спектр змінюється від одночастотного до багаточастотного і хаотичного (від дискретного з одним піком до суцільного); автокореляційна

функція з трикутної переходить у осцилюючу вздовж сторін трикутника, потім приймає форму високого піка в нулі як для білого шуму.

5. В середовищі LabVIEW розроблено віртуальний стенд для демонстрації випадкової поведінки. Використовуються чисельні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь для процесів Вінера й Орнштейна-Уленбека та генетичної моделі. Для візуалізації стаціонарної щільності ймовірності випадкових процесів побудовані гістограми. Показано, що при збільшенні амплітуди гаусівського білого шуму щільність ймовірності для процесу Орнштейна-Уленбека, яка має єдиний максимум, розпливається, а для генетичної моделі і розпливається, і трансформується від одномодальної до двомодальної, тобто в останній відбувається індукований шумом перехід. Результати комп'ютерних експериментів співпадають з аналітичними розрахунками.

6. В середовищі LabVIEW розроблено віртуальний стенд для демонстрації коливальних процесів в послідовному коливальному контурі. Використовуються чисельні розв'язки звичайного диференціального рівняння вимушених коливань. Отримано типові осцилограми вільних, загасаючих періодичних й аперіодичних, вимушених коливань заряду та сили струму. Результати комп'ютерних експериментів співпадають з аналітичними розрахунками. Віртуальний стенд також дозволяє демонструвати перехідні процеси в контурі при вимушених коливаннях.

РЕКОМЕНДАЦІЇ

1. Математична модель, розглянута в розділі 1, в свій час вводилась із математичних міркувань, а не законів фізики. Результати нових досліджень, приведені в цьому розділі, узгоджуються з положеннями математичної теорії катастроф. Отже, на сьогодні немає застережень щодо опису розглянутою стохастичною моделлю процесів в природі. Тому необхідно продовжити дослідження в цьому напрямку як аналітичними, так і чисельними методами. В нагоді при цьому має стати віртуальним стенд, представлений в розділі 3 і апробований на генетичній моделі. Величезний інструментарій LabVIEW, зручна візуалізація та керування фактично дозволить використовувати методологію експериментальних досліджень.

2. Віртуальні стенди, представлені в розділах 2-4, можуть бути впровадженні в навчальний процес в якості електронних засобів навчального призначення (інтерактивних демонстрацій, віртуальних лабораторних робіт), в особливості в змішаному та дистанційному навчанні.

3. Результати розділів 2-4 можуть бути використані при написанні навчального посібника з моделювання фізичних процесів (в електронних приладах і пристроях та матеріалах електроніки) засобами LabVIEW для студентів спеціальності «Фізика» («Електроніка»).

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Strogatz S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. – Boca Raton, FL : CRC Press, 2018. – 532 p.
2. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. *Стохастические и хаотические колебания*. – 2-е изд., доп. – Москва : Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. – 424 с. [Neimark Y. I., Landa P. S. *Stochastic and Chaotic Oscillations*. – Dordrecht : Springer, 1992. – 512 p.]
3. Anishchenko V. S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems : Tutorial and Modern Developments*. – 2nd ed. – Berlin : Springer, 2007. – 459 p.
4. Гардинер К. В., *Стохастические методы в естественных науках*. – Москва : Мир, 1986. [Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods: For the Natural and Social Sciences*. – 4th ed. – Berlin, London : Springer, 2009].
5. Коган Ш. М. *Электронный шум и флуктуации в твердых телах*. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. [Kogan Sh. *Electronic Noise and Fluctuations in Solids*. – Cambridge : Cambridge University Press, 2010].
6. Хорстхемке В., Лефевр Р. *Индукцированные шумом переходы : Теория и применение в физике, химии и биологии*. – Москва : Мир, 1987. [Horsthemke W., Lefever R. *Noise-Induced Transitions : Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*. – 2nd print. – Berlin : Springer, 2006].
7. Бендат Дж., Пирсол А. *Применения корреляционного и спектрального анализа*. – Москва : Мир, 1983. [Bendat J. S., Piersol A. G. *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. – 2nd ed. – New York : Wiley, 2013].
8. Milton J., Ohira T. *Mathematics as a Laboratory Tool : Dynamics, Delays and Noise*. – New York : Springer, 2014.
9. Гилмор-мл. А. С. *Лампы с бегущей волной / А. С. Гилмор-мл.* – Москва : Техносфера, 2013. – 616 с.
10. Ghione G. *Microwave Electronics / G. Ghione, M. Pirola*. – Cambridge : Cambridge University Press, 2017. – 596 p.

11. Підвищення надійності потужної широкопasmової лампи рухомої хвилі / Н. М. Довженко, М. Г. Твердохліб, Н. С. Чумак // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2015. – Т. 4(36). – С. 134-136.
12. Absolute Instability near the Band Edge of Traveling-Wave Amplifiers / D. M. H. Hung, I. M. Rittersdorf, P. Zhang et al. // Phys. Rev. Lett. – 2015. – V. 115, No 12. – P. 124801.
13. Study of a high power sine waveguide traveling wave tube amplifier centered at 8 GHz / B. W. Hoff, D. S. Simon, D. M. French et al. // Physics of Plasmas. – 2016. – V. 23, No 10. – P. 103102.
14. Microwave tubes and applications / B. N. Basu, S. K. Datta // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2017. – V. 31, No 17. – P. 1771–1774.
15. Improvement of nonlinear effects and increasing the power gain in traveling wave tube by changing the helix pitch and injection process / H. Bayati, S. Saviz // Results in Physics. – 2018. – V. 9. – P. 1635–1642.
16. Холодные полевые эмиттеры на основе углеродных нанотрубок / А. В. Елецкий // УФН. – 2010. – Т. 180, № 9. – С. 897-930.
17. Carbon nanotube as a Cherenkov-type light emitter and free electron laser / K. G. Batrakov, S. A. Maksimenko, P. P. Kuzhir et al. // Phys. Rev. B. – 2009. – V. 79, No 12. – P. 125408.
18. Нанoeлектромагнетизм – перспективное направление научных исследований / Максименко С. // Наука и инновации. – 2012. – № 11 (117). – С.12-14.
19. Генерация хаоса / А. С. Дмитриев, Е. В. Ефремова, Н. А. Максимов, А. И. Панас; под общей редакцией д.ф.-м.н. А. С. Дмитриева. – Москва : Техносфера, 2012. – 424 с.
20. Сложная динамика, хаос и образование структур в распределенных системах сверхвысокочастотной электроники / А. А. Кураев, Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов // Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. – Москва : Физматлит, 2009. – Том 2. Нестационарные и хаотические процессы. – С. 11-62.

21. Кузнецов С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. – Москва : Физматлит, 2006. – 356 с.
22. Дмитриев А. С. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / А. С. Дмитриев, А. И. Панас. – Москва: Физматлит, 2002. – 252 с.
23. Chaos Applications in Telecommunications / P. Stavroulakis, ed. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2006. – 427 p.
24. Chaotic Signals in Digital Communications / M. Eisenkraft et al. (eds.). – Boca Raton, FL: CRC Press, 2013. – 458 p.
25. Wireless communication with chaos / H.-P. Ren, M. S. Baptista, C. Grebogi // Phys. Rev. Lett. – 2013. – V. 110, No 18. – P. 184101.
26. Synchronization and chaotic communication in nonlinear circuits with nonlinear coupling / A. Chithra, I. Raja Mohamed // Journal of Computational Electronics. – 2017. – V. 16, No 3. – P. 833–844.
27. Метод синтеза шумового сигнала гауссова типа на основе систем с динамическим хаосом / Н. В. Захарченко, В. В. Корчинский, Б. К. Радзимовский // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – Т. 2, № 10 (56). – С. 25–27.
28. Alexander C. K. Fundamentals of electric circuits / C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku. – New York, NY : McGraw-Hill Education, 2017. – 903 p.
29. Kang J. S. Electric circuits / J. S. Kang. – Mason, OH : Cengage South Western, 2016. – 1566 p.
30. Boylestad R. L. Electronic devices and circuit theory / R. L. Boylestad, L. Nashelsky. – Harlow, Essex : Pearson, 2014. – 922 p.
31. Суранов А. Я. LabVIEW 8.20: Справочник по функциям / А. Я. Суранов. – Москва : ДМК Пресс, 2007. – 536 с.
32. Васильев А. С. Основы программирования в среде LabVIEW / А. С. Васильев, О. Ю. Лашманов. – Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2015. – 82 с.
33. Магда Ю. С. LabVIEW: практический курс для инженеров и разработчиков / Ю. С. Магда. – Москва : ДМКПресс, 2012. – 208 с.

34. Бодненко Т. В. Використання комп'ютерної програми LabVIEW для розв'язування та побудови графічних задач // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна. – 2011. – № 17. – С. 195-199.
35. Смолянінов В. Г., Капелюшний В. Д., Сухопара О. М. Особливості застосування технології віртуальних приладів для побудови та управління радіоелектронними засобами // Вісник Національного технічного університету України Київський політехнічний інститут. Серія: Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2013. – № 53. – С. 151-157.
36. Bogdan M., Panu M. LabVIEW modeling and simulation, of the low-pass and high-pass analog filters / 13th International Conference on Engineering of Modern Electric Systems (EMES). – Oradea, Romania : IEEE, 2015.
37. Bondarevskyi S., Danileiko O. Complex Stand-imitator for Operating Characteristics Research of Solar Panels // Electromechanical and Energy Saving Systems. – 2018. – No 4 (44). – P. 69-77.
38. Чорний О. П., Сергієнко С. А., Кравець О. М., Юдіна А. Л. Оцінка ефективності відпрацювання студентами завдань на комп'ютерних тренажерних системах з електромеханіки // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія «Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика». – 2019. – № 16 (1341). – С. 8- 12.
39. Гавриш О. С., Костюк С. І., Обруч Ю. Ю., Багрій М. О. Віртуальний інструментарій для дослідження хвилеводу прямокутного перетину // Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки. – 2019. – № 2. – С. 48-54.
40. Евдокимов Ю. К., Линдваль В. Р., Щербаков Г. И. LabVIEW для радиоинженера: от виртуальной модели до реального прибора. – Москва : Издательство ДМК Пресс, 2007. – 400 с.
41. Неговський І. В. Використання електронних засобів навчання при викладанні фахових дисциплін у ВНЗ // Науковий часопис Національного педагогічного

- університету імені М. П. Драгоманова. Серія 13 : Проблеми трудової та професійної підготовки. – 2017. – Вип. 8. – С. 61-65.
42. Fatmaryanti S. D., Suparmi A., Sarwanto, Ashadi. Interactive Demonstration with Multiple Representation in Learning of Magnetic Field Concepts // *Physical and Mathematical Education : scientific journal*. – 2017. – Issue 4 (14). – P. 138–142.
 43. Кухаренко В. М., Березенська С. М., Бугайчук К. Л., Олійник Н. Ю., Олійник Т. О., Рибалко О. В., Сиротенко Н. Г., Столяревська А. Л.; за ред. Кухаренка В. М. Теорія та практика змішаного навчання : монографія. – Харків : «Міськдрук», НТУ «ХП», 2016. – 284 с.
 44. PhET: безкоштовні інтерактивні демонстрації для природничих наук і математики [Електронний ресурс] // University of Colorado Boulder. – URL : <https://phet.colorado.edu/uk/> (Дата звернення 13.01.2020).
 45. Ridolfi L., D’Odorico P., Laio F. *Noise-Induced Phenomena in the Environmental Sciences*. – Cambridge : Cambridge University Press, 2011.
 46. Biancalani T. *The Influence of Demographic Stochasticity on Population Dynamics: A Mathematical Study of Noise-Induced Bistable States and Stochastic Patterns*. – Cham : Springer, 2014.
 47. Biancalani T., Dyson L., McKane A. J. Noise-induced bistable states and their mean switching time in foraging colonies // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – Vol. 112, No 3. – P. 38101.
 48. Semenov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Noise-induced transitions in a double-well oscillator with nonlinear dissipation // *Phys. Rev. E*. – 2016. – Vol. 93, No 5. – P. 52210.
 49. Smythe J., Moss F., McClintock P. V. E. Observation of a Noise-Induced Phase Transition with an Analog Simulator // *Phys. Rev. Lett.* – 1983. – Vol. 51, No 12. – P. 1062–1065.
 50. Denisov S. I., Vitrenko A. N., Horsthemke W. Nonequilibrium transitions induced by the cross-correlation of white noises // *Phys. Rev. E*. – 2003. – Vol. 68, No 4. – P. 46132.

51. Vitrenko A. N., Knyaz' I.A., Budeniy V. S., Lytvynenko D. O. The Dynamics of Nonequilibrium Transitions Induced by the Cross-Correlated Noises : Numerical Results // *J. Nano-Electron. Phys.* – 2010. – Vol. 2, No 3. – P. 63.
52. Vitrenko A. N. Bistability induced by two cross-correlated Gaussian white noises. // arXiv:1612.03442 [cond-mat.stat-mech] (электронный препринт).
53. Pelesko J. A. *Self Assembly : The Science of Things That Put Themselves Together.* – Boca Raton : Taylor & Francis, 2007. – 328 p.
54. Арнольд В. И. Теория катастроф. – изд. 7-е. – Москва : URSS, 2016. [Arnol'd V.I. *Catastrophe theory.* – 3rd ed., 2nd print. – Berlin : Springer, 2004].
55. Arnold L., Horsthemke W., Lefever R. White and coloured external noise and transition phenomena in nonlinear systems // *Z. Phys. B.* – 1978. – Vol. 29, No 4.– P. 367–373.
56. Hongler M.-O. Exact time dependent probability density for a nonlinear non-Markovian stochastic process // *Helv. Phys. Acta.* – 1979. – Vol. 52, No 2. – P. 280–287.
57. Toral R. Noise-induced transitions vs. noise-induced phase transitions // *AIP Conf. Proc.* – 2011. – Vol. 1332, No 1. – P. 145–154.
58. Апаратна реалізація генератора хаотичних сигналів на основі дискретних відображень / О. В. Гресь, Г. М. Розоріно, М. М. Іванчук та ін. // *Зв'язок.* – 2015. – № 3. – С. 35-40.
59. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.* – изд. 13-е, испр. – Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. [Bronshtein I.N., Semendyaev K.A., Musiol G., Mühlig H. *Handbook of Mathematics.* – 6th ed. – Springer: Berlin, 2015.]
60. Трубецков Д. И. *Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков.* – Том 2 / Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов / Москва : Физматлит, 2003. – 648 с.
61. Генераторы хаотических колебаний / Б. И. Шахтарин, П. И. Кобылкина, Ю. А. Сидоркина и др. / Москва : Гелиос АРВ, 2007. – 248 с.
62. Mahnke R. *Physics of stochastic processes: how randomness acts in time* / R. Mahnke, J. Kaupužs, I. Lubashevsky. – Weinheim : Wiley, 2009. – 430 p.

63. Engineering mathematics: a foundation for electronic, electrical, communications and systems engineers / A. Croft, R. Davison, M. Hargreaves, J. Flint. – Harlow, England : Pearson, 2017. – 1004 p.
64. Савельев И. В. Курс общей физики. В 5 тт., Т. 2. Электричество и магнетизм: Учебное пособие. 5-е изд., испр. – Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2011. – 352 с.
65. ODE Runge Kutta 4th Order VI – LabVIEW 2018 Help [Электронный ресурс] // National Instruments. – URL: https://zone.ni.com/reference/en-XX/help/371361R-01/gmath/ode_runge_kutta_4th_order/ (дата звернения : 13.01.2020).