

УДК 62-83-52: 621.3

КП

№ госрегистрации 0105U009179

Инв. №

Министерство образования и науки Украины  
Сумский государственный университет  
(СумГУ)  
40007, г.Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2; тел. (0542) 33 34 58;  
факс 60 44 78

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе  
д-р физ.-мат. наук, проф.

А.Н.Черноус

2008.03.25

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
Объектно-ориентированные системы управления процессами  
движения технологических машин  
РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО  
УПРАВЛЕНИЯ ПРИВОДАМИ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН ЦИКЛИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ  
(промежуточный)

Начальник НИЧ

канд. техн. наук, доцент

В.А.Осипов

Руководитель НИР

зав. кафедрой Компьютеризованных  
систем управления

канд. техн. наук, доцент

В.Д.Червяков

2008

Этот отчет подготовлен как часть работы, представленной на соискание  
ученой степени кандидата технических наук

## СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР  
зав. кафедрой Компьютеризованных  
систем управления  
канд. техн. наук, доцент

В.Д.Червяков  
(реферат, введение,  
выводы, рекомендации,  
разд. 1, разд. 3)

Ответственный исполнитель  
ст. преподаватель

А.А.Паныч  
(разд. 1, разд. 2,  
приложение А)

Студент

М.А.Петренко  
(разд. 2)

Студент

А.М.Щекотов  
(разд. 3)

## РЕФЕРАТ

Отчет о НИР (промежуточный): 75 с., 4 рис., 1 приложение, 28 источников.

Объект исследования – методология концептуального проектирования и методы синтеза систем управления процессами движения рабочих органов технологических машин широкого применения

Цель работы – повышение экономической эффективности систем управления несущими органами летучих пил возвратно-поступательного движения на этапах их разработки и эксплуатации.

Методы исследования – численные методы решения задач оптимизации, метод множителей Лагранжа, математическое моделирование, методы теории автоматизированного электропривода, методы классического вариационного исчисления и принцип максимума Понтрягина.

Летучие механизмы имеют циклический режим работы, причем их рабочий цикл характеризуется большой ресурсоемкостью. Наибольшей ее составляющей является энергопотребление приводов несущих органов, с помощью которых формируются законы движения последних. В работе рассмотрены принципы двухрежимного управления электроприводом, реализующего режимы управления скоростью или моментом и переходы от одного режима к другому, и определены принципы структурной организации двухрежимного управления приводом. Поставлена задача ресурсосберегающего управления электроприводом несущего органа летучей пилы в виде задачи оптимизации. Произведена декомпозиция задачи ресурсосберегающего управления электроприводом на задачу минимизации энергозатрат и задачу отработки энергоэффективных законов управления. Задача минимизации энергозатрат, в свою очередь, разделена на задачу определения оптимальных законов движения привода несущего органа, в качестве которых выбраны технически оптимальные равноускоренные законы движения, и задачу определения параметров тахограммы, минимизирующих потери энергии. Произведено приближенное решение задачи оптимизации без ограничения рывка. Получены выражения для расчета продолжительности переходных процессов электропривода несущего органа и пути перемещения с учетом ограничения рывка. Рассмотрены условия изменения математической модели электромеханической системы и теоретически обоснован закон оптимального по энергозатратам управления электромеханической системой при потере управляемости по скорости движения инерционной массы электропривода.

Полученные результаты в их совокупности позволяют снизить ресурсоемкость систем управления несущих органов летучих пил на этапе их эксплуатации, а также могут применяться в системах автоматического управления электроприводами механизмов передвижения технологических машин и многих других для снижения энергоемкости технологических процессов.

**СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ, РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ, ЛЕТУЧАЯ ПИЛА, ОПТИМИЗАЦИЯ, ЭЛЕКТРОПРИВОД, ДВУХРЕЖИМНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ МОМЕНТ.**

## СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ, ЕДИНИЦ, СОКРАЩЕНИЙ И ТЕРМИНОВ .....	6
ВВЕДЕНИЕ .....	8
1 РЕСУРСΟΣБЕРЕГАЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ НЕСУЩЕГО ОРГАНА ЛЕТУЧЕЙ ПИЛЫ.....	10
1.1 Двухрежимное управление электроприводом несущего органа .....	10
1.2 Постановка задачи оптимального управления электроприводом несущего органа.....	13
1.3 Декомпозиция задачи управления электроприводом несущего органа .....	15
1.4 Приближенное решение задачи оптимизации.....	22
1.5 Прогнозирование процессов движения несущего органа летучей пилы .....	23
1.6 Выводы .....	28
2 СХЕМОТЕХНИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХРЕЖИМНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ НЕСУЩЕГО ОРГАНА .....	31
3 ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ЭНЕРГОЗАТРАТАМ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ.....	35
3.1 Постановка задач оптимального управления .....	35
3.2 Решение задач оптимального управления .....	40
3.3 Выводы .....	45
ВЫВОДЫ .....	46
ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК.....	48
Приложение А Аналитическое решение задачи оптимизации энергосиловых параметров рабочего цикла летучей пилы .....	51
А.1. Общая задача нелинейного программирования .....	51
А.2. Упрощенная задача нелинейного программирования.....	54
А.3. Упрощенная задача нелинейного программирования с исключенным ограничением .....	58

A.4. Задача оптимизации участка тахограммы при движении "назад" .....	60
A.5. Задача оптимизации участка тахограммы при движении "вперед" .....	62
A.6. Упрощенная задача нелинейного программирования с ограничениями по максимальному ускорению .....	64
A.7. Решение задачи нелинейного программирования .....	66
A.8. Выводы .....	73

## ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ, ЕДИНИЦ, СОКРАЩЕНИЙ И ТЕРМИНОВ

### Основные сокращения:

ЛП	– летучая пила
НО	– несущий орган
ОИ	– обрабатываемое изделие
СУ	– система управления
СУЛП	– система управления летучей пилой
ЭМС	– электромеханическая система

### Основные обозначения:

$\tau$	– время в относительных единицах
$\alpha$	– путь перемещения несущего органа в относительных единицах
$\dot{\nu}$	– ускорение несущего органа в относительных единицах
$\dot{\mu}_{\text{зад}}$	– заданное значение рывка в приводе несущего органа в относительных единицах
$\mu_0$	– момент сопротивления в относительных единицах
$\Delta L_{\text{м}}$	– допустимое отклонение мерной длины отрезков профиля, м
$F_2$	– сила, действующая на несущий орган летучей пилы со стороны привода, Н
$F_{2\delta}$	– значение силы, соответствующее выборке зазоров (окончание первого этапа рабочего цикла летучей пилы), Н
$F_{2\text{нат}}$	– усилие взаимодействия несущего органа летучей пилы с обрабатываемым изделием (четвертый этап рабочего цикла), Н
$i$ и $\nu$	– ток якоря и скорость вращения вала двигателя привода несущего органа в относительных единицах

$I$ и $\Phi$	– ток якоря, А и магнитный поток, Вб двигателя привода несущего органа
$i_p$	– ток двигателя при разгоне несущего органа в относительных единицах
$l_0$	– значение координаты начального положения несущего органа летучей пилы (по окончании пятого этапа рабочего цикла), м
$l_1$	– координата положения опорной точки (плоскости) обрабатываемого изделия (текущая координата положения сечения реза), м
$l_2$	– координата положения опорной точки (плоскости) несущего органа, м
$L_m$	– заданная длина отрезков, на которые необходимо порезать профиль (мерная длина), м
$Q$	– суммарный расход электроэнергии в приводе несущего органа за время рабочего цикла (количество тепла, выделившееся в цепи якоря электродвигателя), Дж
$Q_i$	– расход электроэнергии в приводе несущего органа на $i$ -м этапе рабочего цикла, Дж
$t_1, t_2, t_3, t_4$ и $t_5$	– момент времени, соответствующий началу первого, второго, третьего, четвертого и пятого этапов рабочего цикла соответственно, с
$V_1$	– скорость движения обрабатываемого изделия (скорость движения профиля), м/с
$V_2$	– скорость движения несущего органа, м/с
$M_2$	– момент, развиваемый приводом несущего органа летучей пилы, Н·м

## ВВЕДЕНИЕ

В условиях рыночной экономики конкурентная борьба за потребителей требует от производителей постоянного повышения качества продукции, максимального удовлетворения требований заказчиков. Объективная реальность, характеризуемая этими обстоятельствами, обуславливает актуальность научно-технической проблемы ресурсосбережения на всех этапах жизненного цикла технологических объектов [1, 2]. Системы управления технологических объектов в значительной мере определяют ресурсоемкость последних и качество выпускаемой продукции, поэтому непреходяще актуальными являются задачи совершенствования методологии разработки систем управления и методов синтеза последних, обеспечивающих минимизацию ресурсозатрат на таких этапах их жизненного цикла, как проектирование и эксплуатация. На первом из указанных этапов задача ресурсосбережения решается путем сокращения временных и финансовых затрат на разработку (проектирование) изделия, в нашем случае – систем управления технологическими объектами. На этапе эксплуатации ресурсосбережение рассматривается в аспектах минимизации энергозатрат в процессе функционирования автоматизированного технологического объекта, минимизации потерь от выпуска некондиционной продукции и возникновения аварийных ситуаций. Особую актуальность проблема ресурсосбережения имеет по отношению к технологическим объектам широкого применения, образующим классы с большим количеством экземпляров).

В [3] выбран **объект исследования** "Методология концептуального проектирования и методы синтеза систем управления процессами движения рабочих органов технологических машин широкого применения", рассмотрен один из видов технологических объектов широкого применения – несущие органы летучих пил, относящихся к классу летучих механизмов [4], и определены **цели** работы, заключающиеся в повышении экономической эффективности систем управления несущими органами летучих пил возвратно-поступательного движения на этапах их разработки и эксплуатации.

Летучие механизмы имеют циклический режим работы, причем их рабочий цикл характеризуется большой ресурсоемкостью. Наибольшей ее составляющей является энергопотребление приводов несущих органов, с помощью которых формируются законы движения последних. Снижение энергоемкости приводов технологических машин циклического действия является актуальной задачей. Второй составляющей ресурсоемкости являются потери от выпуска некондиционной продукции и возникновения аварийных ситуаций (например, при поломках конструктивных элементов технологической машины). Перечисленные составляющие ресурсоемкости летучих механизмов имеют место на одном из этапов их жизненного цикла, а именно – во время эксплуатации. В свете сказанного закономерно актуальной является научно-техническая проблема снижения ресурсоемкости приводов несущих органов летучих механизмов на данном этапе. Указанная проблема решается путем совершенствования процессов управления рабочими органами летучих механизмов и улучшения за счет этого экономических показателей их функционирования.

В соответствии с выбранным предметом исследования общей **задачей работы** определена разработка метода синтеза объектно-ориентированной системы управления несущим органом летучей пилы, методов и алгоритмов ресурсосберегающего управления процессами его движения [3].

Одной из частных задач исследования является разработка алгоритма ресурсосберегающего управления приводом несущего органа летучей пилы, отвечающего принципам объектно-ориентированной технологии создания объектов новой техники. Результатом решения этой задачи должны быть алгоритм, предусматривающий минимизацию энергозатрат в приводе несущего органа летучей пилы при соблюдении требуемой точности мерного пореза длинномерного материала и ограничения по силовому взаимодействию несущего органа летучей пилы с обрабатываемым изделием. Решению этой задачи посвящен данный этап работы.

## 1 РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ НЕСУЩЕГО ОРГАНА ЛЕТУЧЕЙ ПИЛЫ

Рассмотренные в [3] конструктивно-технологические признаки и особенности функционирования летучих пил определяют высокие требования к приводу НО по точности и быстродействию. В качестве исполнительного устройства, с помощью которого формируются желаемые законы движения несущего органа ЛП, будем рассматривать электрический привод как наиболее широко распространенный, в силу своих достоинств, в рассматриваемой предметной области.

Анализ рабочего цикла эталонной ЛП [3] показывает, что для его этапов характерна постановка различных задач управления приводом НО [5]. Данное обстоятельство учтено при построении объектных моделей [3] в наборе атрибутов и методов соответствующих классов предметной области ЛП, а также отражено в наборе сигналов функциональной схемы СУЛП [6, 7].

Отмеченные в [3] различия в технологических функциях, выполняемых приводом НО, приводят к необходимости попеременного управления силомоментными и скоростными координатами движения НО.

В данном разделе рассматриваются вопросы ресурсосберегающего управления приводом НО ЛП. Определяются задачи управления приводом НО на этапах рабочего цикла ЛП и разрабатываются методы алгоритмической реализации этих задач.

### 1.1 Двухрежимное управление электроприводом несущего органа

Рассмотрим организацию двухрежимного управления электроприводом НО, реализующего режимы управления скоростью или моментом и переходы от одного режима к другому. Потребность в управлении моментом возникает на 1-м, 2-м и 4-м этапах рабочего цикла ЛП. Рассмотрим каждый из перечисленных этапов с позиции управления приводом НО.

При наступлении первого этапа неподвижный НО находится в установленном начальном положении. Состояние зазоров в приводе НО в общем случае не определено. К окончанию данного этапа привод НО должен прийти в состояние, обеспечивающее наилучшее исполнение им задачи преследования несущим органом сечения реза, решаемой на третьем этапе. Необходимо повысить уровень предсказуемости поведения привода НО при выполнении упомянутой задачи для повышения точности расчета момента запуска НО. Для решения указанных задач производится выборка зазоров путем перевода электропривода НО в режим управления моментом. Потери на трение в двигателе обуславливают момент  $M_{тр.д}$ , в редукторе и шестеренно-реечной передаче – соответственно  $M_{тр.р}$  и  $M_{тр.п}$ , в опорах качения НО –  $M_{тр.но}$ . Величина момента  $M_{2\delta}$ , развиваемого приводом, должна быть такой, чтобы обеспечить выборку зазоров в кинематической цепи с сохранением неподвижности НО. Под действием момента  $M_{2\delta}$  поочередно выбираются зазоры в кинематической цепи от двигателя до НО. Данное обстоятельство может привести к возможности сдвига НО под действием удара в него разогнанной части кинематической цепи. С другой стороны, момент  $M_{2\delta}$  должен быть достаточным, чтобы замкнуть все зазоры, т.е. привести в движение все элементы кинематической цепи, за исключением НО. Можно указать границы, внутри которых должно находиться значение  $M_{2\delta}$ :

$$M_{тр.д} + M_{тр.р} + M_{тр.п} < M_{2\delta} < M_{тр.д} + M_{тр.р} + M_{тр.п} + M_{тр.но}. \quad (1.1)$$

В правой части (1.1) наибольшим слагаемым является  $M_{тр.но}$ . Следует сказать, что в связи с большой массой НО величина  $M_{тр.но}$  позволяет выбрать величину  $M_{2\delta}$  в безопасном диапазоне. Значение  $M_{2\delta}$  устанавливается оператором при настройке системы управления.

Описанный процесс выборки зазоров наблюдается по вращению вала двигателя с помощью датчиков скорости и положения. При нормальном завершении процесса двигатель останавливается, что и является признаком перехода ко второму этапу рабочего цикла. На втором этапе электропривод должен сохранить

достигнутое им состояние готовности к запуску до поступления соответствующей команды. Для этого сохраняется режим регулирования момента, а задание поддерживается на уровне  $M_{2\delta}$ .

При поступлении команды на запуск начинается третий этап и привод переходит в режим регулирования скорости и (или) положения с целью выполнения задачи преследования несущим органом сечения реза на изделии. Четвертый этап наступает при достижении синхронизации НО с сечением реза по скорости и положению.

В начале четвертого этапа с помощью механизма сцепления НО жестко связывается с ОИ. После этого привод НО переводится в режим регулирования момента на уровне  $M_{2\text{нат}}$ . В данном случае режим управления моментом применяется для исключения подпора или чрезмерного натяжения, которые могут иметь место при движении НО, жестко связанного с изделием. Значение  $M_{2\text{нат}}$  выбирается таким, чтобы создать незначительное натяжение ОИ. Оно рассчитывается по формуле

$$M_{2\text{нат}}=M_c+M_{\text{нат}}, \quad (1.2)$$

где  $M_c$  – момент сопротивления движению НО на соответствующей скорости;  $M_{\text{нат}}$  – момент, соответствующий силе натяжения ОИ. Значение  $M_c$  можно определить экспериментально, а  $M_{\text{нат}}$  может быть рассчитано исходя из требований технологии.

По окончании обработки (распиловки) ОИ механизм сцепления переводится в исходное состояние, жесткая механическая связь НО с ОИ устраняется. Далее наступает пятый этап рабочего цикла и привод НО переводится в режим регулирования скорости и (или) положения. НО возвращается в начальное положение.

Описанные принципы двухрежимного управления должны быть реализованы в алгоритме управления приводом НО.

## 1.2 Постановка задачи оптимального управления электроприводом несущего органа

Сформулируем задачи ресурсосберегающего управления электроприводом НО ЛП. Реализацию управления последним следует производить с учетом разделения рабочего цикла ЛП на пять последовательно исполняемых этапов, в связи с различием задач, возлагаемых на привод НО в течение этих этапов.

С учетом принятых в [3] обозначений, общая технологическая задача ЛП заключается в порезе ОИ, движущегося со скоростью  $V_1$ , на отрезки мерной длины  $L_m$  с допуском  $\pm \Delta L_m$ . Прочностные характеристики ОИ налагают ограничение на усилие  $F_{2\text{нат}}$  взаимодействия НО с ОИ, которое должно быть в пределах  $0 \leq F_{2\text{нат}} \leq F_{\text{нат.мах}}$ , где  $F_{\text{нат.мах}}$  – максимально возможное значение усилия  $F_{2\text{нат}}$ , соответствующее натяжению ОИ без его повреждения (определяется экспериментально).

Для корректности постановки задач управления приводом НО сделаем некоторые важные замечания и допущения. Прежде всего отметим, что практически в любой технологической линии, в составе которой работает ЛП, скорость  $V_1$  может иметь значения в некотором диапазоне от  $V_{1\text{мин}}$  до  $V_{1\text{мах}}$ . Причем, определенное условиями технологии значение скорости  $V_1$  изменяется в течение серии рабочих циклов ЛП лишь в пределах флуктуационных отклонений. В связи с этим, при исследовании рабочих циклов мы будем рассматривать процесс мерного пореза ОИ при установленном постоянном значении скорости  $V_1$  в диапазоне от  $V_{1\text{мин}}$  до  $V_{1\text{мах}}$ . Изменение скорости ОИ в течение рабочего цикла ЛП является переходным режимом, осуществляемым, например, при запуске технологических линий. Такие режимы возникают редко, в связи с чем их следует рассматривать отдельно. Аналогично величине  $V_1$  может изменяться и задание  $L_m$  мерной длины, устанавливаемое в пределах от  $L_{m.\text{мин}}$  до  $L_{m.\text{мах}}$ . Длительность рабочего цикла ЛП  $t_{\text{рц}} = L_m / V_1$ . Минимально возможное время цикла  $t_{\text{рц}\text{мин}} = L_{m.\text{мин}} / V_{1\text{мах}}$ . С другой стороны, время исполнения рабочего цикла равно сумме времен исполнения отдельных этапов, т.е.  $t_{\text{рц}} = t_{\text{э1}} + t_{\text{э2}} + t_{\text{э3}} + t_{\text{э4}} + t_{\text{э5}}$ . Таким образом, величины  $V_1$  и  $L_m$  определяют

требования к быстродействию, а значения  $L_{м.мин}$  и  $V_{1max}$  – наиболее напряженный тепловой режим привода НО.

Для привода НО ЛП правомерно допущение неизменности величины  $M_c$  статического момента в течение всего рабочего цикла, соответственно при  $F_{2нат}=0$  будет сохраняться равенство  $M_2=M_c$ , где  $M_2$  – момент, развиваемый приводом НО. На четвертом этапе цикла, если  $F_{2нат}>0$ , то  $M_2=M_{2нат}$  или, с учетом (1.2),  $M_2=M_c+M_{нат}$ .

Аспекты ресурсосбережения в процессе эксплуатации ЛП учитываются в постановке задачи управления электроприводом НО следующим образом. Энергозатраты в электроприводе НО минимизируются заданием целевой функции  $Q \rightarrow \min$ . Критерий эффективности  $Q$  представляет собой суммарный расход электроэнергии за время цикла,  $Q=Q_1+\dots+Q_i+\dots+Q_5$ , где  $Q_i$  – расход электроэнергии на  $i$ -м этапе. Аспект соблюдения требуемого качества продукции учитывается ограничениями  $l_1(t_4)-\Delta L_m \leq l_2(t_4) \leq l_1(t_4)+\Delta L_m$  и  $0 \leq F_{2нат} \leq F_{нат.мах}$ , где  $t_4$  – момент времени, соответствующий началу четвертого этапа (сцеплению НО с ОИ). Аспект безаварийности и соблюдения технологического регламента учитывается последним из указанных ограничений, а также ограничениями по условию производства операций обработки ОИ в пределах зоны обработки, которые имеют вид  $l_{нзо} \leq l_2(t_4)$  и  $t_{ОИ} \cdot V_2 \leq l_{кзо} - l_2(t_4)$ , где  $V_2$  – скорость движения НО,  $t_{ОИ}$  – совокупное время обработки от зажима до разжима ОИ,  $l_{нзо}$  и  $l_{кзо}$  – координаты начала и конца зоны обработки. Однако, учитывая возможный сортамент ОИ и значение  $V_{1max}$  для конкретной технологической линии, координаты  $l_{нзо}$  и  $l_{кзо}$  всегда таковы, что последнее ограничение выполняется даже при  $V_2=V_{1max}$ , если его представить в виде  $l_2(t_4) \leq l_{кзо} - t_{ОИ} \cdot V_2$ . Кроме того, аспект безаварийности предусматривает наложение ограничения на допустимые крайние положения НО вида  $l_2(t_6) \leq l_{мах}$  и  $l_2(t_1) \geq l_{мин}$ , где  $t_6$  и  $t_1$  – моменты времени, соответствующие неподвижному состоянию НО ( $V_2=0$ ) в процессе его реверсирования на пятом этапе цикла. Скорость НО в течение всего второго этапа должна быть равна нулю, что означает неподвижное состояние НО в период выстоя (этапа 2). Продолжительность второго этапа  $t_{э2} \geq t_{во.мин}$  ограничена временем  $t_{во.мин}$  осуществления вычислительных операций, связанных с решением задачи оптимизации. Аспект сохранения работоспособности двигателя требует

наложения ограничений  $|M_2| \leq M_{\max}$  по максимально допустимому моменту двигателя и  $|\omega_2| \leq \omega_{\max}$  по допустимой скорости вращения двигателя.

Задача ресурсосберегающего управления приводом НО ЛП формулируется в виде задачи оптимизации с целевой функцией (1.4)

$$Q = Q_1 + \dots + Q_i + \dots + Q_5 \rightarrow \min \quad (1.4)$$

и системой десяти ограничений (1.5-1.14):

$$t_{\text{Э}1} + \dots + t_{\text{Э}i} + \dots + t_{\text{Э}5} = L_M / V_1; \quad (1.5)$$

$$l_1(t_4) - \Delta L_M \leq l_2(t_4) \leq l_1(t_4) + \Delta L_M; \quad (1.6)$$

$$0 \leq F_{2\text{нат}} \leq F_{\text{нат.макс}}; \quad (1.7)$$

$$l_{\text{нзо}} \leq l_2(t_4); \quad (1.8)$$

$$t_{\text{ОИ}} \cdot V_2 \leq l_{\text{кзо}} - l_2(t_4); \quad (1.9)$$

$$l_2(t_6) \leq l_{\text{макс}}; \quad (1.10)$$

$$l_2(t_1) \geq l_{\text{мин}}; \quad (1.11)$$

$$t_{\text{Э}2} \geq t_{\text{во.мин}}; \quad (1.12)$$

$$|M_2| \leq M_{\text{макс}}; \quad (1.13)$$

$$|\omega_2| \leq \omega_{\text{макс}}. \quad (1.14)$$

### 1.3 Декомпозиция задачи управления электроприводом несущего органа

Задача (1.4-1.14) является сложной для непосредственного решения, в связи с чем произведем ее декомпозицию на две подзадачи. Первая заключается в минимизации энергозатрат в приводе НО в течение рабочего цикла ЛП и учитывает выражения (1.4), (1.5), (1.7), (1.10-1.14). Вторая заключается в отработке энергоэффективных законов управления приводом НО, полученных как решение первой задачи, с учетом точностных и ресурсосберегающих ограничений (1.6-1.9). Рассмотрим первую задачу.

Предварительный анализ действующих ЛП позволяет принять, что привод НО оборудован двигателем постоянного тока с независимым возбуждением, магнитный поток двигателя не изменяется и равен номинальному ( $\Phi = \Phi_n$ ), момент сопротивления постоянный. В исследовании электроприводов удобно пользоваться системой относительных единиц [8-9], выражая ток якоря  $I$ , магнитный поток  $\Phi$ , моменты и скорость вращения в долях от их значений в номинальном режиме электродвигателя (соответственно,  $I_n$ ,  $\Phi_n$ ,  $M_n$  и  $\omega_n$ ). Основное уравнение движения электропривода в относительных единицах имеет вид:

$$i = dv/d\tau + \mu_0, \quad (1.15)$$

где  $i = I/I_n$  – ток якоря двигателя;

$v = \omega_2/\omega_n$  – скорость вращения вала двигателя;

$\mu_0 = M_c/M_n$  – момент сопротивления,  $\mu_0 = \text{const}$ ;

$\tau = t/T_m$  – время,  $T_m = J\omega_n/M_n$  – механическая постоянная времени,  $J$  – момент инерции механической части, приведенный к валу двигателя.

Количество тепла, выделившееся в цепи якоря за время  $T$

$$Q = \int_0^T i^2 d\tau. \quad (1.16)$$

За единицу пути НО (в относительных единицах равного углу поворота вала двигателя привода НО) примем путь, пройденный НО за время  $t = T_m$  при номинальной скорости вращения двигателя  $\omega_2 = \omega_n$ . Тогда в относительных единицах путь перемещения, пройденный НО за время  $T$ ,

$$\alpha = \int_0^T v d\tau.$$

Сразу заметим, что первый, второй и четвертый этапы цикла в отношении энергопотребления не представляют особого интереса. Длительность первого этапа

относительно мала, чтобы иметь заметное влияние. Меры по уменьшению затрат энергии на втором и четвертом этапах сводятся к допустимому снижению уровня момента (усилия  $F_{2\text{нат}}$ ). Также, при прочих равных условиях, предпочтительно уменьшение длительности  $t_{\text{Э}2}$  и  $t_{\text{Э}4}$  данных этапов. Время  $t_{\text{Э}4}$  определяется требованиями технологии пореза ОИ, оптимизации не подлежит. Таким образом, оптимизации по энергозатратам в приводе НО подлежат третий и пятый этапы рабочего цикла ЛП. Совокупная длительность  $t_{\text{Э}3}+t_{\text{Э}5}$  третьего и пятого этапов ограничена значением  $t_{\text{Э}35\text{max}}=t_{\text{РЦ}}-t_{\text{Э}1}-t_{\text{Э}2\text{min}}-t_{\text{Э}4}$ , где  $t_{\text{Э}2\text{min}}$  – время, необходимое для производства вычислительных процессов, или в относительных единицах  $\tau_{\text{Э}35\text{max}}=\tau_{\text{РЦ}}-\tau_{\text{Э}1}-\tau_{\text{Э}2\text{min}}-\tau_{\text{Э}4}$ .

Задачу минимизации энергозатрат на указанных этапах можно разделить на две. Первая заключается в определении оптимальных законов движения НО ЛП (т.е. формы тахограммы). Анализ литературы по оптимальному управлению показывает, что первая задача исследована достаточно подробно с применением методов классического вариационного исчисления, принципа максимума и динамического программирования. Заметим, что постоянство величины  $\mu_0$  упрощает задачу. Кроме того, в данном случае законы движения, оптимальные по критериям минимума нагрева якоря и минимума потребления энергии, совпадают [8]. Таким образом, в (1.4) для вычисления  $Q$  следует воспользоваться выражением (1.16). На третьем этапе цикла привод НО можно назвать разгонным, т.к. одной из его задач является изменение скорости НО  $V_2$  от 0 до  $V_1$ . Для таких приводов оптимальным законом движения является поддержание  $i=i_p=\text{const}$ , чему соответствует линейный закон изменения скорости [8]:

$$v=v_{\text{нач}}+(i_p-\mu_0)\tau, \quad (1.17)$$

где  $v_{\text{нач}}$  – значение скорости в момент времени  $\tau=0$ , в нашем случае  $v_{\text{нач}}=0$ ;  $i_p$  – ток двигателя при разгоне. Время разгона  $\tau_{\text{Э}3}=V_1/(i_p-\mu_0)$ .

Задача привода НО на пятом этапе заключается в торможении и возврате НО в начальное положение, где  $V_2=0$ . Для такого случая оптимальным является

изменение тока по линейному закону и, соответственно, скорости по параболическому [8]. Однако, при практической реализации такой закон является весьма сложным, в связи с чем для управления приводом НО на пятом этапе рабочего цикла ЛП мы остановимся на рекомендуемом в [9] так называемом технически оптимальном законе управления двигателем с линейными законами изменения скорости и соответствующими законами изменения тока двигателя во времени, совпадающими с законом, выбранным для третьего этапа рабочего цикла.

После выбора законов движения привода НО необходимо решить вторую задачу, которая заключается в определении оптимальных (с заданными значениями  $V_1$  и  $L_m$  из технологических диапазонов  $V_{1min} \leq V_1 \leq V_{1max}$  и  $L_{m.min} \leq L_m \leq L_{m.max}$ ) параметров диаграмм тока и скорости, минимизирующих потери в двигателе.

Для последующего рассмотрения воспользуемся упрощенной тахограммой рабочего цикла ЛП, показанной на рис.1.1. Здесь  $t_n$  – время паузы, соответствующее неподвижному состоянию НО в течение первого и второго этапов рабочего цикла;  $t_{вр}$  и  $t_{вт}$  – соответственно время разгона и торможения при движении "вперед";  $t_{нр}$  и  $t_{нт}$  – соответственно время разгона и торможения при движении "назад";  $t_{ОИ}$  – время обработки ОИ;  $t_{обр}$  – время движения в обратном направлении с постоянной скоростью  $V_{обр}$ . Соответствующие величины, выраженные в относительных единицах, обозначим:  $\tau_n$ ,  $\tau_{вр}$ ,  $\tau_{вт}$ ,  $\tau_{нр}$ ,  $\tau_{нт}$ ,  $\tau_{ОИ}$ ,  $\tau_{обр}$ ,  $V_{обр}$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ . Аналогично формуле (1.17) можем получить выражение для скорости в случае торможения двигателя:

$$v = v_{нач} - (i_T - \mu_0) \tau. \quad (1.18)$$

Заметим, что в (1.17)  $v > v_{нач}$ , а в (1.18)  $v < v_{нач}$ . Следовательно, величина  $\Delta v = v - v_{нач}$  при разгоне будет положительной, а при торможении – отрицательной. Из (1.17) и (1.18) получим выражения для токов двигателя при разгоне и торможении:  $i_p = \Delta v / \tau_p + \mu_0$  и  $i_T = \Delta v / \tau_T - \mu_0$ , где  $\tau_p$  и  $\tau_T$  – времена разгона и торможения. Подставляя в данные выражения параметры тахограммы, получаем:  $i_{вр} = V_1 / \tau_{вр} + \mu_0$ ;  $i_{вт} = V_1 / \tau_{вт} - \mu_0$ ;  $i_{нр} = V_{обр} / \tau_{нр} + \mu_0$ ;  $i_{нт} = V_{обр} / \tau_{нт} - \mu_0$ . Строго говоря, при движении НО "назад"  $i_{нр}$  и  $i_{нт}$  должны иметь отрицательные значения, для чего следует умножить правую часть

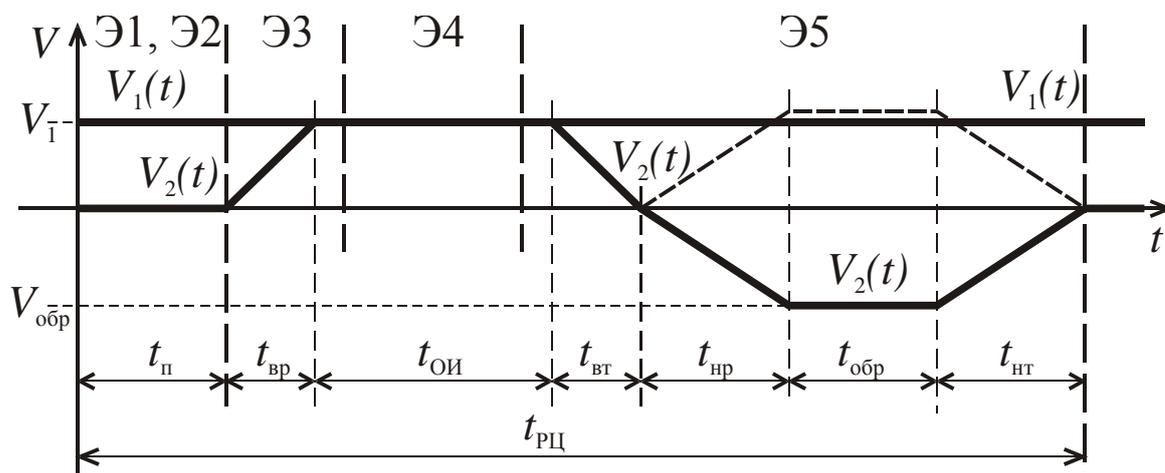


Рисунок 1.1 – Упрощенная тахограмма рабочего цикла ЛП

соответствующих выражений на -1. Представленные выражения для  $i_{нр}$  и  $i_{нт}$  соответствуют тахограмме, показанной на рис.1.1 штриховой линией. Однако в отношении энергопотребления данные тахограммы идентичны, т.к. в (1.16) входит квадрат тока, что снимает зависимость  $Q$  от знака тока. С учетом  $i_p = \text{const}$  и  $i_t = \text{const}$  из (1.16) получим выражения для потерь энергии при разгоне и торможении:  $Q_p = i_p^2 \tau_p$  и  $Q_t = i_t^2 \tau_t$ . Для четвертого этапа рабочего цикла примем задание тока  $i_{ои} = \mu_0$  (с целью упрощения рассматриваемой задачи примем, что  $F_{2наг} = 0$ , т.е. на четвертом этапе цикла  $M_2 = M_c$ ). Соответственно, получим  $Q_{ои} = \mu_0^2 \tau_{ои}$ . Для первого и второго этапов примем задание тока  $i_p = 0$ , следовательно  $Q_p = 0$ . Для участка тахограммы рис.1.1, соответствующего  $\tau_{обр}$ , ток  $i_{обр} = \mu_0$ , следовательно  $Q_{обр} = \mu_0^2 \tau_{обр}$ .

Потери  $Q$  в приводе НО за рабочий цикл ЛП в соответствии с (1.16) равны сумме потерь по рассмотренным участкам тахограммы рис.1.1:

$$Q = \left( \frac{V_1}{\tau_{вр}} + \mu_0 \right)^2 \tau_{вр} + \mu_0^2 \tau_{ои} + \left( \frac{V_1}{\tau_{вт}} - \mu_0 \right)^2 \tau_{вт} + \\ + \left( \frac{V_{обр}}{\tau_{нр}} + \mu_0 \right)^2 \tau_{нр} + \mu_0^2 \tau_{обр} + \left( \frac{V_{обр}}{\tau_{нт}} - \mu_0 \right)^2 \tau_{нт}.$$

После раскрытия скобок получаем упрощенное выражение

$$Q = \left( \frac{v_1^2}{\tau_{вр}} + \mu_0^2 \tau_{вр} \right) + \mu_0^2 \tau_{ои} + \left( \frac{v_1^2}{\tau_{вт}} + \mu_0^2 \tau_{вт} \right) + \left( \frac{v_{обр}^2}{\tau_{нр}} + \mu_0^2 \tau_{нр} \right) + \mu_0^2 \tau_{обр} + \left( \frac{v_{обр}^2}{\tau_{нт}} + \mu_0^2 \tau_{нт} \right). \quad (1.19)$$

Укажем ограничения, накладываемые на переменные. Прежде всего, так как в начале каждого цикла НО находится в одном и том же начальном положении, то путь  $l_{в}$ , пройденный НО при движении "вперед", в рамках данной задачи всегда будет равен пути  $l_{н}$ , пройденному НО при движении "назад", т.е.  $l_{в}=l_{н}$ . Так как путь, проходимый НО, равен площади под тахограммой рис.1.1, то в относительных единицах получим  $\alpha_{в}=v_1(\tau_{вр}/2+\tau_{ои}+\tau_{вт}/2)$  и  $\alpha_{н}=v_{обр}(\tau_{нр}/2+\tau_{обр}+\tau_{нт}/2)$ . В результате получим ограничение в виде равенства

$$v_1(\tau_{вр}/2+\tau_{ои}+\tau_{вт}/2)-v_{обр}(\tau_{нр}/2+\tau_{обр}+\tau_{нт}/2)=0. \quad (1.20)$$

Из (1.5), согласно введенным обозначениям, имеем:

$$\tau_{рц}-\tau_{п}-(\tau_{вр}+\tau_{ои}+\tau_{вт}+\tau_{нр}+\tau_{обр}+\tau_{нт})\geq 0, \quad (1.21)$$

где  $\tau_{рц}=t_{рц}/T_M=L_M/(V_1 T_M)$ .

Если выражение в левой части (1.21) больше 0, то это значит, что пауза для оптимального решения больше  $t_{п}$ .

Длину допустимой зоны движения ЛП  $L_{лп}=l_{max}-l_{min}$  (см. (1.10) и (1.11)) можно учесть неравенством  $L_{лп}/V_1-(t_{вр}/2+t_{ои}+t_{вт}/2)\geq 0$  или  $L_{лп}/V_{обр}-(t_{нр}/2+t_{обр}+t_{нт}/2)\geq 0$ . Выберем первое из неравенств, т.к. в нем меньше неизвестных переменных и, переведя его в относительные единицы, получим

$$\tau_{лп}-(\tau_{вр}/2+\tau_{ои}+\tau_{вт}/2)\geq 0, \quad (1.22)$$

где  $\tau_{\text{ЛП}} = L_{\text{ЛП}} / (V_1 T_M)$ .

Из (1.14) получим в относительных единицах

$$v_{\text{max}} - v_{\text{обр}} \geq 0. \quad (1.23)$$

На значение  $v_1$  ограничение не накладывается, т.к. при проектировании привода НО учтено, что  $V_{1\text{max}} \leq V_{\text{max}}$ , где  $V_{\text{max}}$  соответствует  $\omega_{\text{max}}$ . Ограничение (1.13), влияющее на максимально возможное ускорение НО  $\dot{v}_{\text{max}}$ , с целью упрощения задачи пока учитывать не будем. Такое упрощение можно считать приемлемым в связи с тем, что возможное в процессе решения задачи увеличение  $\dot{v}$  до  $\dot{v}_{\text{max}}$  приводит к увеличению тока якоря  $i$ , что с учетом (1.16) приводит к росту потерь  $Q$ , т.е. удалению от оптимального решения. Данное обстоятельство позволяет предположить, что ограничение (1.13) может нарушиться при исчерпании других ресурсов, учтенных в соответствующих ограничениях. В любом случае, проверка полученных решений на соблюдение (1.13) не представляет сложности.

Таким образом, мы произвели декомпозицию задачи ресурсосберегающего управления приводом НО ЛП (1.4-1.14) на задачу минимизации энергозатрат (1.4), (1.5), (1.7), (1.10-1.14) и задачу отработки энергоэффективных законов управления с учетом ограничений (1.6-1.9). Задача минимизации энергозатрат, в свою очередь, разделена на задачу определения оптимальных законов движения привода НО, в качестве которых выбраны технически оптимальные равноускоренные законы движения, и задачу определения параметров тахограммы, минимизирующих потери энергии. Последняя задача сформулирована как задача нелинейного программирования [10-11], состоящая в определении точки  $(\tau_{\text{вр}}^*; \tau_{\text{вт}}^*; \tau_{\text{нр}}^*; \tau_{\text{обр}}^*; \tau_{\text{нт}}^*; v_{\text{обр}}^*)$ , координаты которой соответствуют минимальному значению  $Q_{\text{min}}$  целевой функции (1.19), положительны и удовлетворяют ограничениям (1.20-1.23). Искомые координаты точки  $(\tau_{\text{вр}}^*; \tau_{\text{вт}}^*; \tau_{\text{нр}}^*; \tau_{\text{обр}}^*; \tau_{\text{нт}}^*; v_{\text{обр}}^*)$  представляют собой время и установившаяся скорость движения "назад". Они должны быть неотрицательными.

## 1.4 Приближенное решение задачи оптимизации

Полученная в п.1.3 задача нелинейного программирования (1.19-1.23), которая заключается в оптимизации энергосиловых параметров рабочего цикла летучей пилы, предполагает скачкообразное изменение ускорения НО (момента привода). Это соответствует бесконечному значению второй производной скорости – рывка. Хотя в реальных приводах рывок не может быть бесконечно большим, тем не менее эти процессы занимают многократно меньшее время, чем процессы движения с постоянным ускорением, и на уровень тепловых потерь не оказывают заметного влияния. Таким образом, мы можем с достаточной для практики степенью точности произвести оптимизацию энергосиловых параметров рабочего цикла ЛП по минимуму энергозатрат в приводе НО без учета ограничения рывка.

Решение задачи оптимизации в аналитическом виде (методом множителей Лагранжа), ввиду громоздкости, вынесено в приложение А. При решении использовался пакет MapleVR4 [15]. При аналитическом решении задачи оптимизации получены (см. прил. А, п.А.8) равенства  $\tau_{вр} = \tau_{вт}$  и  $\tau_{нр} = \tau_{нт}$ , что свидетельствует об оптимальности тахограмм с симметричными участками для движения "вперед" и "назад" и позволяет упростить исходную задачу и представить ее в виде (А.10-А.14), сократив количество переменных. Кроме того, получены аналитические выражения для ряда частных случаев и произведено упрощение задачи (А.10-А.14) путем исключения ограничения (А.11) и переменной  $\tau_{обр}$ . Получена задача (А.22-А.25), состоящая в определении точки  $(\tau_{в}^*; \tau_{н}^*; \nu_{обр}^*)$ , которая минимизирует целевую функцию (А.22). Задача (А.22-А.25) дополнена ограничениями (А.37) и (А.38) на  $\tau_{в}$  и  $\tau_{н}$  по максимально допустимому ускорению НО (см. п.А.6). В качестве решения задачи нелинейного программирования получены решения для восьми задач с различными сочетаниями трех ограничений-равенств, построенных на основе задачи (А.22-А.25). При нахождении решений задачи оптимизации целевой функции (А.22) без ограничений (А.23-А.25), а также задачи оптимизации целевой функции (А.22) с ограничением (А.23) в виде

равенства возникает необходимость в применении численных методов. В остальных случаях получены формулы для расчета координат оптимальной точки, соответствующей  $Q_{\min}$ . Описанные задачи рассмотрены также с учетом ограничения по ускорению при движении "вперед", для корректных частных задач получены соответствующие формулы.

Кроме метода множителей Лагранжа, для решения задачи оптимизации с ограничениями по максимально допустимому ускорению НО (см. п.В.6) применялись численные методы. В качестве исходных данных для расчетов использовались величины, полученные из параметров и технических характеристик реальных летучих пил. Результаты, полученные с помощью различных численных методов и метода множителей Лагранжа, совпадают.

С учетом преимущественно предварительного планирования технологических процессов линии, в том числе и параметров серий рабочих циклов ЛП (величины  $V_1$ ,  $L_m$  и  $L_{ЛП}$ ), оптимизацию тахограммы привода НО целесообразно производить заранее, в связи с достаточной сложностью, а значит и длительностью расчетов (особенно численных). При этом приближенные расчеты могут производиться с помощью численных методов и затем уточняться (с учетом определенных действующих ограничений).

Очевидно, чем больше диапазоны изменения  $V_1$  и  $L_m$ , чем больше  $L_{ЛП}$ , тем больший эффект энергосбережения может быть достигнут. Заметим, что полученные результаты могут быть перенесены на асинхронный привод с частотным управлением [8]. Кроме того, их можно распространить на другие машины с аналогичной тахограммой и характеристиками привода.

### 1.5 Прогнозирование процессов движения несущего органа летучей пилы

Для соблюдения ограничения (1.6) по точности мерного пореза ОИ система управления ЛП должна выполнять вычислительную процедуру прогнозирования длительности всех участков рабочего цикла и определения момента времени, в

который привод НО переводится из режима ожидания в режим преследования. Технически оптимальный (равноускоренный) закон движения, параметры которого рассчитываются по методам, предложенным в п.1.4, определяет оптимальные по энергозатратам уставки ускорений на участках разгона, реверса и торможения привода НО. Однако реальные процессы движения привода НО на участках изменения скорости не могут быть равноускоренными на всей протяженности этих участков из-за ограничения рывка (производной ускорения по времени). Ограничение рывка, объективно обусловленное невозможностью скачкообразного изменения момента, развиваемого двигателем, может существенно повлиять на точность прогнозирования процессов движения НО, что может привести к несоблюдению требований по точности пореза ОИ. В то же время не представляет технической сложности формирование процессов движения НО с регламентированным значением рывка [16], благодаря чему повышается степень управляемости процесса движения НО и точность прогнозирования временных интервалов. На основе расчета продолжительности переходных процессов при регламентации рывка может быть построена процедура рационального выбора уставки задания рывка и более точного прогнозирования временных характеристик рабочего цикла ЛП, что необходимо для конструктивного решения задачи оптимизации (1.4-1.14). Рассмотрим задачу уточненного прогнозирования процессов движения НО ЛП.

Наиболее ответственным с точки зрения точности мерного пореза является третий этап рабочего цикла, на котором осуществляется запуск привода НО в направлении движения ОИ, завершающийся синхронизацией скоростей линейного перемещения соответственно ОИ и НО и совпадением координат соответственно сечения реза на ОИ и плоскости пильного диска.

В соответствии с (1.15), рассматривая механическую часть привода НО как одномассовую жесткую систему (см. п.1.3), мы можем записать

$$\mu - \mu_0 = \dot{v}, \quad (1.24)$$

где  $\mu=M/M_H$  – момент, развиваемый двигателем привода НО, в относительных единицах, с учетом  $\Phi=\Phi_H$  момент  $\mu=i$ ;

$M$  – текущее значение момента двигателя в абсолютных единицах;

$\dot{v}=dv/d\tau$  – производная скорости (ускорение),  $(\dot{\phantom{x}})$  – символ дифференцирования по относительному времени.

Решение уравнения (1.24) на любом участке движения имеет вид

$$v_i(\tau) = v_{\text{нач.}i} + \int_0^{\tau} (\mu(\tau) - \mu_0(\tau)) d\tau; \quad (1.25)$$

$$v_{\text{кон.}i} = v_{\text{нач.}i} + \int_0^{\tau_i} (\mu(\tau) - \mu_0(\tau)) d\tau; \quad (1.26)$$

$$\alpha_i(\tau) = \int_0^{\tau} v_i(\tau) d\tau, \quad (1.27)$$

где  $v_{\text{нач.}i}$  и  $v_{\text{кон.}i}$  – начальное и конечное значения скорости;

$\tau_i$  – продолжительность  $i$ -го участка движения;

$i$  – условный индекс (номер) участка рабочего цикла;

$\alpha=s_2/(\omega_H\rho T_M)=\varphi_2/(\omega_H T_M)$  – путь перемещения НО (угол поворота вала двигателя) в относительных единицах;

$s_2$  и  $\varphi_2$  – соответственно, путь перемещения НО и угол поворота вала двигателя в абсолютных единицах;

$\rho=V_2/\omega_2$  – радиус приведения;

$V_2$  – линейная скорость движения НО в абсолютных единицах.

Для привода НО ЛП можно считать  $\mu_0=\text{const}$  в любых переходных процессах.

На участках движения с регламентированным значением  $\dot{\mu}_{\text{зад}}$  рывка при  $\mu_0=\text{const}$  имеем:

$$\dot{v}_i(\tau) = \dot{v}_{\text{нач.}i} + \dot{\mu}_{\text{зад}} \tau;$$

$$v_i(\tau) = v_{\text{нач.}i} + \dot{v}_{\text{нач.}i} \tau + \dot{\mu}_{\text{зад}} \tau^2 / 2;$$

$$\begin{aligned}\tau_i &= (\dot{v}_{\text{кон.}i} - \dot{v}_{\text{нач.}i}) / \dot{\mu}_{\text{зад}}; \\ \Delta v_i &= \dot{v}_{\text{нач.}i} \tau_i + \dot{\mu}_{\text{зад}} \tau_i^2 / 2; \\ \alpha_i(\tau) &= \alpha_{\text{нач.}i} + v_{\text{нач.}i} \tau_i + \dot{v}_{\text{нач.}i} \tau_i^2 / 2 + \dot{\mu}_{\text{зад}} \tau_i^3 / 6; \\ \Delta \alpha_i &= v_{\text{нач.}i} \tau_i + \dot{v}_{\text{нач.}i} \tau_i^2 / 2 + \dot{\mu}_{\text{зад}} \tau_i^3 / 6,\end{aligned}$$

где  $\dot{v}_{\text{нач.}i}$  и  $\dot{v}_{\text{кон.}i}$  – начальное и конечное значения ускорения;

$\alpha_{\text{нач.}i}$  – начальное значение пути перемещения НО;

$\Delta v_i$  – приращение скорости;

$\Delta \alpha_i$  – приращение пути НО.

Для участков равноускоренного движения с заданным ускорением  $\dot{v}_i = \dot{v}_{\text{зад.}i}$  имеем:

$$\begin{aligned}\tau_i &= (v_{\text{кон.}i} - v_{\text{нач.}i}) / \dot{v}_{\text{зад.}i}; \\ v_i(\tau) &= v_{\text{нач.}i} + \dot{v}_{\text{зад.}i} \tau; \\ \Delta v_i &= v_{\text{кон.}i} - v_{\text{нач.}i}; \\ \alpha_i(\tau) &= \alpha_{\text{нач.}i} + v_{\text{нач.}i} \tau_i + \dot{v}_{\text{зад.}i} \tau_i^2 / 2; \\ \Delta \alpha_i &= v_{\text{нач.}i} \tau_i + \dot{v}_{\text{зад.}i} \tau_i^2 / 2.\end{aligned}$$

Разгон НО в прямом направлении (на рез) завершается при достижении скорости  $v = v_{\text{ОИ}}$ , где  $v_{\text{ОИ}}$  – линейная скорость движения ОИ в относительных единицах (с целью исключения совпадения индексов, имеющих разный смысл, вместо  $v_1$  будем писать  $v_{\text{ОИ}}$ ). После завершения технологической процедуры пореза ОИ осуществляется процесс реверса с выходом на максимальную скорость  $v_{\text{max}}$  движения НО в обратном направлении. Позиционирование НО в исходном положении осуществляется торможением привода с изменением скорости в диапазоне от  $v = -v_{\text{max}}$  до  $v = 0$ . Значение  $v_{\text{max}}$  (т.е.  $v_{\text{обр}}$ ) определяется при расчете

параметров технически оптимального закона движения НО (см. п.1.4). Статический момент  $\mu_0$  представляет собой момент сухого трения,  $\mu_0 = |\mu_0| \text{sign}(v)$ .

Выражения для расчета продолжительности переходных процессов привода НО и пути перемещения НО с учетом ограничения рывка приведены в [17].

В процессе движения вперед НО проходит путь, равный сумме путей  $\Delta\alpha_{\text{в}}$ ,  $\Delta\alpha_{\text{ОИ}}$ ,  $\Delta\alpha_{\text{тр}}$ . В процессах разгона и торможения при движении назад НО проходит путь, равный сумме  $\Delta\alpha_{\text{рп}} + \Delta\alpha_{\text{т}}$ . В начальный момент разгона в обратном направлении положение НО характеризуется значением  $\alpha_{\text{к}}$  контролируемой координаты  $\alpha$  положения НО относительно начала отсчета линейных размеров по направлению движения НО. Прогнозируемое значение  $\alpha_{\text{к}}$  равно:

$$\alpha_{\text{к}} = \alpha_{\text{н}} + \Delta\alpha_{\text{в}} + \Delta\alpha_{\text{ОИ}} + \Delta\alpha_{\text{тр}}, \quad (1.28)$$

где  $\alpha_{\text{н}}$  – значение координаты начального положения НО (см. п.1.2), которое может отличаться от исходного.

Путь перемещения НО в обратном направлении равен  $\alpha_{\text{к}}$ . Следовательно, время движения НО в обратном направлении при  $v = -v_{\text{max}}$  равно:

$$\Delta\tau_{\text{рм}} = (\alpha_{\text{к}} - \Delta\alpha_{\text{рп}} - \Delta\alpha_{\text{т}}) / v_{\text{max}}.$$

Общее прогнозируемое время движения НО равно:

$$\tau_{\text{д}} = \Delta\tau_{\text{в}} + \Delta\tau_{\text{ОИ}} + \Delta\tau_{\text{тр}} + \Delta\tau_{\text{рп}} + \Delta\tau_{\text{рм}} + \Delta\tau_{\text{т}}. \quad (1.29)$$

Проведенные рассуждения с результатами в виде расчетных формул позволяют построить алгоритм вычислительной процедуры прогнозирования времени движения НО в рабочем цикле. Увеличив значение  $\tau_{\text{д}}$  на минимально допустимую величину времени ожидания (двух первых участков рабочего цикла), можно спрогнозировать общую длительность рабочего цикла ЛП для проверки осуществимости мерного пореза с заданной частотой, определяемой значениями мерной длины и скорости  $v_{\text{ОИ}}$  движения ОИ. Значение  $\Delta\alpha_{\text{в}}$  пути перемещения НО в

режиме преследования дает возможность прогнозировать значение  $\alpha_c = \alpha_n + \Delta\alpha_v$  координаты технологической линии, в которой будет достигнута синхронизация НО и ОИ по скорости. Основываясь на значении  $\alpha_c$ , можно определить значение  $\alpha_{ОИ}^*$  координаты положения сечения реза на ОИ, при достижении которого осуществляется запуск на рез привода НО:

$$\alpha_{ОИ}^* = \alpha_c - v_{ОИ} \Delta\tau_v. \quad (1.30)$$

## 1.6 Выводы

В данном разделе нами рассмотрены вопросы ресурсосберегающего управления приводом НО ЛП. По итогам проведенного исследования можем сделать следующие **выводы**.

1.6.1. Рассмотрены принципы двухрежимного управления электроприводом НО, реализующего режимы управления скоростью или моментом и переходы от одного режима к другому. Управление электроприводом НО необходимо производить в соответствии с данными принципами.

1.6.2. Поставлена задача ресурсосберегающего управления электроприводом НО ЛП в виде задачи оптимизации с целевой функцией (1.4) и системой десяти ограничений (1.5-1.14). В целевой функции и системе ограничений учтены энергозатраты в электроприводе НО, аспекты соблюдения требуемого качества продукции, безаварийности и соблюдения технологического регламента, сохранения работоспособности двигателя.

1.6.3. Произведена декомпозиция задачи ресурсосберегающего управления электроприводом НО ЛП (1.4-1.14) на задачу минимизации энергозатрат (1.4), (1.5), (1.7), (1.10-1.14) и задачу отработки энергоэффективных законов управления с учетом ограничений (1.6-1.9). Задача минимизации энергозатрат, в свою очередь, разделена на задачу определения оптимальных законов движения привода НО, в

качестве которых выбраны технически оптимальные равноускоренные законы движения, и задачу определения параметров тахограммы, минимизирующих потери энергии. Последняя задача сформулирована как задача нелинейного программирования, состоящая в определении точки  $(\tau_{вр}^*; \tau_{вт}^*; \tau_{нр}^*; \tau_{обр}^*; \tau_{нт}^*; v_{обр}^*)$ , координаты которой соответствуют минимальному значению  $Q_{\min}$  целевой функции (1.19), положительны и удовлетворяют ограничениям (1.20-1.23). Искомые координаты точки  $(\tau_{вр}^*; \tau_{вт}^*; \tau_{нр}^*; \tau_{обр}^*; \tau_{нт}^*; v_{обр}^*)$  представляют собой время и установившаяся скорость движения "назад". Они должны быть неотрицательными.

1.6.4. Произведено приближенное решение задачи оптимизации без ограничения рывка. При аналитическом решении задачи оптимизации (методом множителей Лагранжа) получены (см. прил. А, п.А.8) равенства  $\tau_{вр} = \tau_{вт}$  и  $\tau_{нр} = \tau_{нт}$ , что свидетельствует об оптимальности тахограмм с симметричными участками для движения "вперед" и "назад" и позволяет упростить исходную задачу и представить ее в виде (А.10-А.14), сократив количество переменных. Кроме того, получены аналитические выражения для ряда частных случаев и произведено упрощение задачи (А.10-А.14) путем исключения ограничения (А.11) и переменной  $\tau_{обр}$ . Получена задача (А.22-А.25), состоящая в определении точки  $(\tau_{в}^*; \tau_{н}^*; v_{обр}^*)$ , которая минимизирует целевую функцию (А.22). Задача (А.22-А.25) дополнена ограничениями (А.37) и (А.38) на  $\tau_{в}$  и  $\tau_{н}$  по максимально допустимому ускорению НО (см. п.А.6). В качестве решения задачи нелинейного программирования получены решения для восьми задач с различными сочетаниями трех ограничений-равенств, построенных на основе задачи (А.22-А.25). При нахождении решений задачи оптимизации целевой функции (А.22) без ограничений (А.23-А.25), а также задачи оптимизации целевой функции (А.22) с ограничением (А.23) в виде равенства возникает необходимость в применении численных методов. В остальных случаях получены формулы для расчета координат оптимальной точки, соответствующей  $Q_{\min}$ . Описанные задачи рассмотрены также с учетом ограничения по ускорению при движении "вперед", для корректных частных задач получены соответствующие формулы. Кроме метода множителей Лагранжа, для решения

задачи оптимизации с ограничениями по максимально допустимому ускорению НО (см. п.А.6) применялись численные методы. Результаты, полученные с помощью различных численных методов и метода множителей Лагранжа, совпадают. Полученные результаты могут быть перенесены на асинхронный привод с частотным управлением. Кроме того, их можно распространить на другие машины с аналогичной тахограммой и характеристиками привода.

1.6.5. Получены выражения для расчета продолжительности переходных процессов электропривода НО и пути перемещения НО с учетом ограничения рывка. Они позволяют построить алгоритм вычислительной процедуры прогнозирования времени движения НО в рабочем цикле.

1.6.6. Поставленная задача исследования выполнена с соблюдением требований к результатам ее решения. Перечисленные в пп.1.6.1-1.6.5 результаты характеризуют научную новизну и практическую ценность проведенных в данном разделе исследований. Они опубликованы в научных статьях [17-20].

## 2 СХЕМОТЕХНИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХРЕЖИМНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ НЕСУЩЕГО ОРГАНА

Простейший способ реализации описанного в п.1.1 принципа двухрежимного управления состоит в том, что в стандартную двухконтурную систему регулирования скорости двигателя вводится дополнительный контур технологического регулирования, являющийся внешним контуром регулирования момента, на время исполнения 1-го, 2-го и 4-го этапов рабочего цикла. При этом система управления электроприводом содержит два контура регулирования одной и той же координаты (момента), что снижает динамические характеристики системы. Другой известный вариант заключается в том, что на время исполнения указанных этапов рабочего цикла задающий вход внутреннего контура регулирования момента отключается от выхода регулятора скорости и подключается к задатчику момента. Однако, учитывая высокие требования к управляемости электропривода НО, следует признать недопустимой даже кратковременную потерю управляемости при указанных переключениях. Предлагается система управления электроприводом НО, содержащая в качестве "ядра" двухконтурную систему регулирования скорости, лишенная недостатков описанных выше систем. Фрагмент структурной схемы предложенной системы показан на рис.3.1.

В данной системе регулятор РМ момента двигателя имеет обычные соединения двух входов с выходами регулятора РС скорости и датчика ДМ момента, а третий вход РМ соединен с выходом датчика ЗМ момента через управляемый ключ К. Управление ключом К осуществляется блоком ИР идентификации режима. Блок ИР представляет собой комбинационную логическую схему, выполняющую логическую функцию



управления с использованием датчиков интенсивности [22, 23]. Соответствующая структурная схема двухрежимной системы управления электроприводом НО ЛП представлена на рис.3.2 [24]. В данной системе применены два датчика интенсивности – скорости ЗИс (второго порядка) и момента ЗИм (первого порядка). Применение ЗИс второго порядка позволяет сохранить линейные свойства контура скорости и ограничить ускорение и рывок в режиме регулирования скорости. При этом, ЗИс и ЗИм согласованы между собой по значению ограничения рывка, благодаря чему в режиме регулирования скорости сигнал на входе ЗИм имеет такие параметры (с уже ограниченной второй производной скорости – рывком), которые позволяют ему проходить через ЗИм без изменений, как будто его (ЗИм) не существует. Таким образом, ЗИм влияет на сигнал только при работе системы в режиме регулирования момента. Установка ЗИм сразу перед контуром момента, благодаря влиянию на результирующий сигнал задания момента, обеспечивает сохранение управляемости по моменту при переключении между режимами задания скорости и момента.

Таким образом, мы определили принципы структурной организации двухрежимного управления приводом НО ЛП (рис.2.1) и построили соответствующую структурную схему двухрежимной системы управления

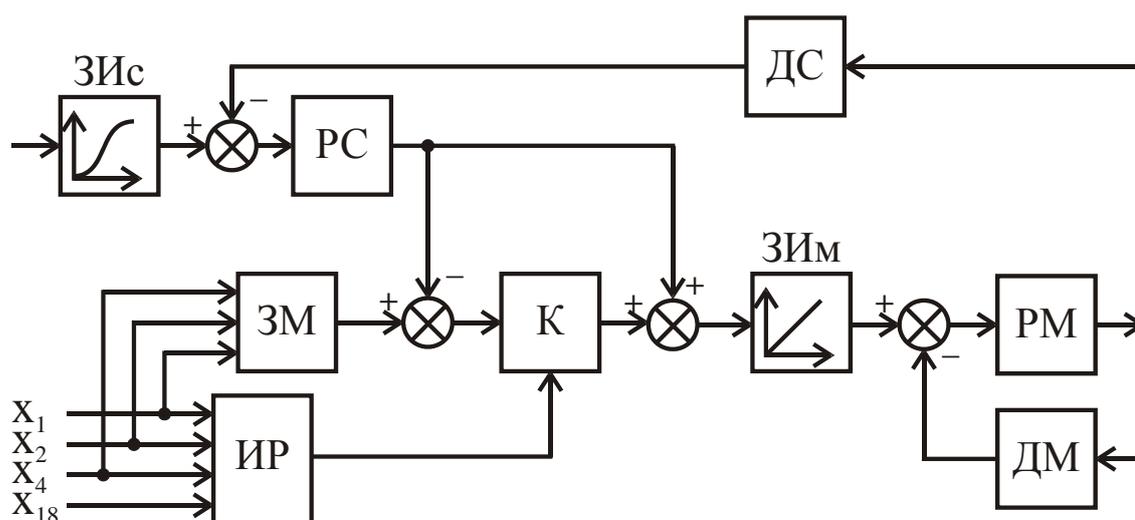


Рисунок 2.2 – Структурная схема двухрежимной системы управления

электроприводом НО ЛП (рис.2.2), обеспечивающую формирование тахограмм с заданными значениями ускорения и рывка, которая основана на принципах программного управления с использованием задатчиков интенсивности. Получив структурную схему рис.2.2 мы можем переходить к детальной разработке СУЛП и ее экспериментальному исследованию.

### 3 ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ЭНЕРГОЗАТРАТАМ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

Статическая нагрузка электроприводов рабочих органов технологических машин часто имеет реактивный характер и может считаться нагрузкой типа "сухое трение" [25, с. 42-45]. Для таких электроприводов модель динамической системы представляется одним дифференциальным уравнением первого порядка в пространстве состояний, когда текущее значение электромагнитного момента (единственной переменной состояния) по величине не превышает значения момента сухого трения, а скорость вращения двигателя равняется нулю. Например, для электропривода перемещения рабочего органа технологической машины любого назначения такая ситуация имеет место при трогании из неподвижного состояния. Вывод электромеханической системы (ЭМС) из этого подпространства состояний (зоны "неподвижности") требует затрат энергии и времени. Это обстоятельство необходимо учитывать, особенно когда время вывода системы из зоны неподвижности составляет существенную часть времени рабочего цикла технологической машины. Задача формирования закона изменения электромагнитного момента, оптимального по энергозатратам, относится также при реализации пускотормозных режимов электроприводов, когда скорость вращения двигателя отличается от нуля. Поэтому поставим целью построение математической модели ЭМС в режимах управления электромагнитным моментом двигателя и определение оптимального по энергозатратам закона формирования электромагнитного момента.

#### 3.1 Постановка задач оптимального управления

Для достижения поставленной цели рассмотрим физические аспекты работы ЭМС в режимах, когда изменяется электромагнитный момент двигателя, на основании чего сформулируем задачи оптимального по энергозатратам управления.

Расчетная кинематическая схема одномассовой механической части электропривода электропривода и механическая характеристика статической нагрузки представлена на рис. 3.1.

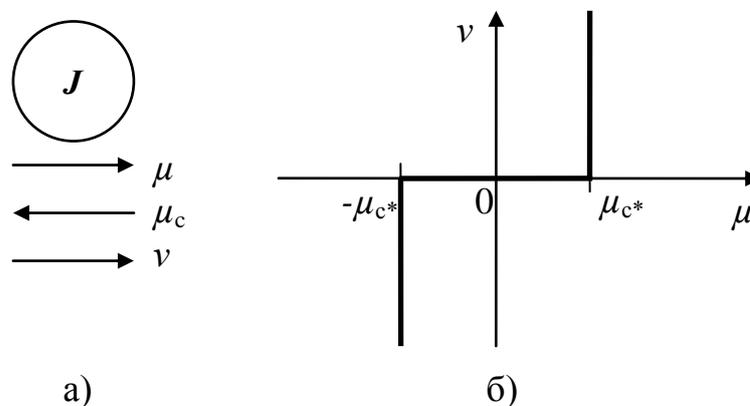


Рисунок 3.1 – а) расчетная кинематическая схема одномассовой механической системы электропривода;  
б) механическая характеристика  $\mu_c(v)$  статической нагрузки типа "сухое трение"

Уравнение движения электропривода в абсолютных единицах имеет вид

$$M - M_c = J\dot{\omega}, \quad (3.1)$$

где  $M$  и  $M_c$  – соответственно электромагнитный и статический моменты на валу двигателя;

$\omega$  – угловая скорость вращения ротора двигателя;

$\dot{\omega} = d\omega/dt$  – производная скорости по времени;

$J$  – момент инерции механической части электропривода, приведенный к скорости  $\omega$ .

В относительных единицах уравнение движения (3.1) принимает вид

$$\mu - \mu_c = \dot{v}, \quad (3.2)$$

где  $\mu$  и  $\mu_c$  – электромагнитный и статический моменты в относительных единицах;

$\dot{v} = v/d\tau$  – угловое ускорение в относительных единицах;

$v = \omega / \omega_H$  – угловая скорость двигателя в относительных единицах;

$\tau = t / T_M$  – время в относительных единицах.

Уравнение (3.1) получено при выборе базовых единиц  $M_6 = M_H$ ,  $\omega_6 = \omega_H$ ,  $T_6 = T_M = J \omega_H / M_H$ , где  $M_H$  и  $\omega_H$  – номинальные значения соответственно электромагнитного момента и угловой скорости двигателя;  $T_M$  – механическая постоянная времени.

Вектор состояния электромеханической системы (ЭМС) имеет координаты:  $x_1 = v$ ,  $x_2 = \dot{v} = \mu - \mu_c$ . Математическая модель динамической системы "одномассовая ЭМС" вращательного движения представляется в виде системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(\tau) &= x_2(\tau); \\ \dot{x}_2(\tau) &= u(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где  $u(\tau)$  – управление, т.е. сигнал, формирование которого определяет закон движения системы.

Модель ЭМС в виде (3.3) предусматривает известной функцию  $\mu_c(\tau)$ . Однако, реактивный статический момент (см. рис. 3.1) при  $|v| > 0$ , если пренебречь составляющими вязкого трения, является функцией скорости в виде

$$\mu_c = \mu_{c*} \cdot \text{sign}(v). \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что при  $|v| > 0$   $\mu_c(\tau) = \pm \mu_{c*}$ , т.е.  $\mu_c$  не является функцией времени. Поэтому появляются особые случаи, когда модель ЭМС в математическом представлении изменяется. Для понимания этого обстоятельства примем к сведению, что левая часть уравнения (3.2) и правая часть первого уравнения системы (3.3) равны динамическому моменту

$$\mu_{\text{дин}} = \mu - \mu_c. \quad (3.5)$$

При  $\nu = 0$  имеем две возможных ситуации:  $|\mu| > \mu_{c*}$  и  $|\mu| \leq \mu_{c*}$ . В первой из этих ситуаций механическая система сохраняет свои свойства и закон ее движения

$$\vec{x}(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau)) \quad (3.6)$$

описывается системой (3.3), а при возникновении второй ситуации имеют место равенства  $\mu_c = \mu$ ,  $\mu_{\text{дин}} = 0$ ,  $\dot{\nu} = 0$  ( $x_2 = 0, \dot{x}_1 = 0$ ), поскольку реактивный момент сопротивления в таком случае является реакцией на движущий момент  $\mu$ , который действует на механическую систему.

Таким образом, при возникновении ситуации  $|\mu(\tau)| \leq \mu_{c*}$ ,  $\nu = 0$ , что имеет место, например, в начальный момент пуска электропривода, возникает задача вывода одномерной системы

$$\dot{x}_1(\tau) = u(\tau), \quad (3.7)$$

где  $x_1 = \mu$ , из "зоны неподвижности", т.е. целью управления является изменение координаты  $x_1$  от начального значения  $x_{10} = \mu_{c0}$ ,  $|\mu_{c0}| \leq \mu_{c*}$  к конечному  $x_{1\theta} = \pm \mu_{c*}$ , при неподвижном состоянии ( $\nu = 0$ ) инерционной массы ЭМС (здесь мы ввели обозначение  $\mu = x_1$ , чтобы указать на одномерность ( $n=1$ ) системы (3.7), задача управления которой будет рассматриваться дальше). Эта задача относится к классу задач управления с закрепленными концами фазовой траектории  $x_1(\tau)$ , с краевыми условиями  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_1(\theta) = x_{1\theta}$ ,  $0 \leq \tau \leq \theta$ , где  $\theta$  – неопределенное время движения.

На управление  $u(\tau)$  накладывается ограничение

$$|u(\tau)| \leq u_{\text{доп}}, \quad (3.8)$$

где  $u_{\text{доп}} = \dot{\mu}_{\text{доп}}$  – допустимая скорость изменения электромагнитного момента двигателя. Такое ограничение обусловлено требованиями к эксплуатационной надежности как двигателя, так и технологической системы в целом.

При постановке задачи оптимального по энергозатратам управления системой (3.7) цель управления формулируется как минимизация функционала

$$I = \int_0^{\theta} x_1^2(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

при ограничении (3.8), поскольку в режиме работы электропривода, который рассматривается, потери энергии определяются интегралом вида (3.9). Заметим, что для электроприводов постоянного тока функционал (3.9) отображает потери энергии довольно точно, а для электроприводов переменного тока – приблизительно [8].

В практическом аспекте не менее часто ставится задача изменения ускорения от начального значения  $\dot{v}(0)$  к конечному  $\dot{v}(\theta)$  при "подвижном" состоянии ЭМС, когда  $|\mu_c| \geq \mu_{c*}$  на всем интервале времени  $\tau \in [0, \theta]$  движения системы (3.3). Однако, эта задача сводится к задаче изменения электромагнитного момента двигателя от начального значения  $\mu(0) = \mu_0 = \dot{v}(0) + \mu_c$  к конечному  $\mu(\theta) = \mu_0 = \dot{v}(\theta) + \mu_c$  при "неподвижном" состоянии ЭМС. Это означает, что в обеих рассмотренных практических задачах управления электромеханической системой математическая постановка задачи будет единой: перевести одномерную систему (3.7) из начального состояния  $x_1(0) = x_{10}$  в конечное  $x_1(\theta) = x_{1\theta}$ , за неопределенное время  $\theta$ , при ограничении (3.8) и целевом функционале (3.9). Однако при постановке второй практической задачи необходимо быть уверенным, что на всем интервале времени  $\tau \in [0, \theta]$  движения системы (3.3) исключается попадание ЭМС в "неподвижное" состояние, т.е. невозможно возникновение условия  $|\mu(\tau)| \leq \mu_{c*}, v = 0$ .

Третий вид задач управления системой (3.3), которые также предусматривают оптимальное по энергозатратам формирование закона изменения электромагнитного момента двигателя, относится к реализации режимов разгона [8], когда необходимо изменение скорости от начального значения  $v(0)$  к конечному  $v(\theta)$  при "подвижном" состоянии ЭМС, когда  $|\mu_c| \geq \mu_{c*}$  на всем (неопределенном) интервале времени  $\tau \in [0, \theta]$  движения системы (3.3). Это также задачи управления системой

первого порядка с математическим описанием в виде первого уравнения системы (3.3), где  $x_2(\tau) = \mu(\tau) - \mu_c$ , а функцией управления является  $\mu(\tau)$ . Задачи такого вида (разгона электропривода) в математической постановке не приводятся к предыдущим. Решением этих задач, как это показано в [8], есть функция  $\mu(\tau) = \text{const}$ , причем глобальный минимум достигается при  $\mu = 2\mu_c$ ,  $\theta = |v(\theta) - v(0)| / 2\mu_{c*}$ .

### 3.2 Решение задач оптимального управления

Решим поставленные задачи. На основании обсуждения динамических свойств ЭМС формально ставится задача оптимального управления системой (3.7), которое приводит к минимизации функционала (3.9). Попытка решить эту задачу без учета ограничений дает решение, которое вытекает из уравнения Эйлера [26, с. 47], которое для функционала (3.9) имеет вид

$$\frac{\partial \left( x_1^2 \right)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0,$$

которое выполняется при  $u(\tau) = 0$  на интервале времени  $\tau \in [0, \theta]$ , а с учетом граничных условий  $x_1(0) = x_{10}$  и  $x_1(\theta) = x_{10}$  необходимо формировать функцию  $\mu(\tau) = x_1(\tau)$  в виде бросков при  $\tau = 0$  и  $\tau = \theta$ . Такое управление является технически нереализуемым вследствие ограничения (3.8). Этот факт подтверждается и в [27, с.709], где объясняется, что вследствие отсутствия управления  $u$  в интегранте функционала (3.9) система (3.7) не "штрафуется" за затрату "управляющей" энергии и поэтому оптимальное управление оказывается импульсным. Итак, в нашем случае следует воспользоваться одним из методов решения задач оптимального управления при наличии ограничения (3.8) на управление  $u(\tau)$ . Одним из таких является метод, основанный на использовании принципа максимума Понтрягина. Воспользуемся этим методом, достаточно корректно изложенным в [28, с.199-270].

Для удобства рассуждений на основании литературных источников [27, 28] функцию управления  $u(\tau)$  представим в виде

$$u(\tau) = u_{\text{доп}} u^*(\tau), \quad (3.10)$$

где функция управления  $u^*(\tau)$  по величине представляет собой долю  $u_{\text{доп}}$ . Это дает возможность представления ограничения (3.8) в эквивалентной форме

$$|u^*(\tau)| \leq 1. \quad (3.11)$$

Интегрант функционала (3.9) и правая часть уравнения системы (3.7) с учетом (3.10) и (3.11) образуют систему уравнений

$$f_0 = x_1^2; \quad (3.12)$$

$$f_1 = u_{\text{доп}} u^*(\tau). \quad (3.13)$$

Добавим координату  $x_0$  с начальным значением  $x_0(0) = 0$ , производная которой по времени  $\dot{x}_0 = f_0 = x_1^2$ , в результате чего порядок управляемой системы повышается до 2-го, а ее закон движения в общем виде представляется системой

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= f_0; \\ \dot{x}_1 &= f_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Сопряженная к (3.14) система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_0}{d\tau} &= - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_0} \psi_{\alpha} = - \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \psi_1 = 0; \\ \frac{d\psi_1}{d\tau} &= - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_1} \psi_{\alpha} = - \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 = -2x_1 \psi_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

где  $\psi_0(\tau)$  и  $\psi_1(\tau)$  – сопряженные переменные. Из первого уравнения системы (3.15) получаем  $\psi_0 = C_0 = \text{const}$ .

Системы (3.14) и (3.15) в совокупности могут быть записаны как гамильтонова (каноническая) система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, & i = \overline{0,1}; \\ \frac{d\psi_i}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & i = \overline{0,1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

где  $H$  – функция Понтрягина, которая имеет вид

$$H = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \psi_{\alpha} f_{\alpha} = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1. \quad (3.17)$$

Укажем, что любое решение системы (3.16) отвечает допустимому управлению  $u^*(\tau)$  и соответствующей ему траектории  $x_1(\tau)$ . По-другому говоря,  $(\psi_0, \psi_1)$  отвечает  $u^*(\tau)$ , если  $(\psi_0, \psi_1)$  и  $x_1(\tau)$  – решение системы (3.16) [27, с.264].

При поиске оптимального управления  $u^*(\tau)$  с использованием принципа максимума необходимо выбирать любое значение  $\psi_0$ , которое отвечает условию  $\psi_0 = C_0 \leq 0$ . Укажем, что сопряженные переменные  $\psi_0$  и  $\psi_1$  определяются лишь с точностью до общего множителя, а значение  $\psi_0 = 0$  отвечает вырожденной задаче, в которой поиск экстремума теряет смысл, поскольку построение решения не зависит от целевого функционала [28, с.210]. Поэтому можем принять, например,  $\psi_0 = -u_{\text{доп}}$ . Тогда из второго уравнения системы (3.16) получаем

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = 2u_{\text{доп}} x_1. \quad (3.18)$$

Вид правой части (3.18) приводит к выводу, что траектория  $x_1(\tau)$  движения системы (3.7) представляется функцией

$$x_1(\tau) = x_{10} + u_{\text{доп}} \tau, \quad (3.19)$$

а функция  $\psi_1(\tau)$  имеет вид

$$\psi_1(\tau) = C_1 + x_{12}(\tau), \quad C_1 = \text{const}. \quad (3.20)$$

Действительно, в таком случае

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{d\psi_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\tau} = 2u_{\text{доп}} x_1.$$

Из (3.19) следует, что  $x_1(\tau)$  является линейной функцией времени. Положительный знак производной  $\dot{x}_1$  свидетельствует о том, что мы определили оптимальное управление  $u^*(\tau)=1$  для случая, когда  $x_{1\theta} > x_{10}$ . Факт нахождения оптимального управления подтверждается тем, что функция Понтрягина

$$H = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 = -u_{\text{доп}} x_1^2(\tau) + \left( C_1 + x_1^2(\tau) \right) u_{\text{доп}} u^*(\tau) = 0$$

на всем интервале времени  $\tau \in [0, \theta]$  при  $u^*(\tau)=1$  и  $C_1=0$ .

Пользуясь принципом минимума Понтрягина [27, с.263-282] и приняв  $\psi_0 = u_{\text{доп}}$ , по изложенной выше методике можем доказать, что при  $x_{1\theta} < x_{10}$  оптимальные управления и траектория движения системы (3.7) имеют вид

$$u^*(\tau) = -1, \quad x_1(\tau) = x_{10} - u_{\text{доп}} \tau. \quad (3.21)$$

Укажем, что такой же результат можно было бы получить, сменив на противоположное положительное направление движения механической системы рис. 3.1.

Таким образом, приходим к выводу, что функция Понтрягина (3.17) на всем интервале времени  $\tau \in [0, \theta]$  будет равной нулю при управлении

$$u^*(\tau) = \text{sign}(x_{1\theta} - x_{10}), \quad (3.22)$$

или

$$u(\tau) = u_{\text{доп}} \text{sign}(x_{1\theta} - x_{10}). \quad (3.23)$$

Действительно, при таком управлении

$$H = \mp u_{\text{доп}} x_1^2(\tau) + x_1^2(\tau) u_{\text{доп}} \text{sign}(x_{1\theta} - x_{10})_{\tau \in [0, \theta]} = 0, \quad (3.24)$$

где знаки "-" и "+" относятся к случаям  $x_{1\theta} > x_{10}$  и  $x_{1\theta} < x_{10}$  соответственно. Итак, управление (3.22), или в другом представлении (3.23), является оптимальным при неопределенном времени  $\theta$  движения системы (3.7) от начального состояния  $x_1(0) = x_{10}$  к конечному  $x_1(\theta) = x_{1\theta}$ .

Время  $\theta$  движения системы (3.7) определяется формулой

$$\theta = |x_{1\theta} - x_{10}| / u_{\text{доп}} = \left( (x_{1\theta} - x_{10}) / u_{\text{доп}} \right) \text{sign}(x_{1\theta} - x_{10}). \quad (3.25)$$

Следующей задачей является определение величины  $u_{\text{доп}}$ , которая придает интегралу (3.9) минимальное значение. Для этого определим значение целевого функционала (3.9) с учетом оптимального закона движения системы (3.7), который обобщим путем объединения функций (3.19) и (3.21):

$$x_1(\tau) = x_{10} + (u_{\text{доп}} \text{sign}(x_{1\theta} - x_{10})) \tau. \quad (3.26)$$

С учетом (3.25) и (3.26) функционал (3.9) принимает значение

$$I = \int_0^{\theta} x_1^2(\tau) d\tau = \frac{(x_{10} + \text{sign}(x_{1\theta} - x_{10}) (x_{1\theta} - x_{10}))^3 - x_{10}^3}{3 \text{sign}(x_{1\theta} - x_{10}) u_{\text{доп}}}.$$

Принимая во внимание, что  $\text{sign}(x_{1\theta} - x_{10})^2 = 1$ , можем окончательно записать

$$I = \int_0^{\theta} x_1^2(\tau) d\tau = \frac{x_{1\theta}^3 - x_{10}^3}{3 \text{sign}(x_{1\theta} - x_{10}) u_{\text{доп}}} \quad (3.27)$$

Из (3.27) следует, что минимизация функционала (3.9) достигается при максимально допустимом значении  $u_{\text{доп}}$ , т.е. при  $u_{\text{доп}} = \dot{\mu}_{\text{доп}}$ . Это означает, что

оптимальное по энергозатратам управление в поставленной задаче совпадает с оптимальным по быстродействию.

### 3.3 Выводы

Рассмотрены условия изменения математической модели электромеханической системы и теоретически обоснован закон оптимального по энергозатратам управления электромеханической системой при потере управляемости по скорости движения инерционной массы электропривода. Доказано, что закон оптимального по энергозатратам управления электромеханической системой при существовании такого режима совпадает с управлением, оптимальным по быстродействию. Результат в виде закона оптимального формирования электромагнитного момента электродвигателя во времени может применяться в системах автоматического управления электроприводами механизмов передвижения технологических машин и многих других для снижения энергоемкости технологических процессов.

## ВЫВОДЫ

В ходе решения поставленных задач рассмотрены принципы двухрежимного управления электроприводом НО, реализующего режимы управления скоростью или моментом и переходы от одного режима к другому. Управление электроприводом НО необходимо производить в соответствии с данными принципами. Поставлена задача ресурсосберегающего управления электроприводом НО ЛП в виде задачи оптимизации. В целевой функции и системе ограничений учтены энергозатраты в электроприводе НО, аспекты соблюдения требуемого качества продукции, безаварийности и соблюдения технологического регламента, сохранения работоспособности двигателя. Произведена декомпозиция задачи ресурсосберегающего управления электроприводом НО ЛП на задачу минимизации энергозатрат и задачу отработки энергоэффективных законов управления. Задача минимизации энергозатрат, в свою очередь, разделена на задачу определения оптимальных законов движения привода НО, в качестве которых выбраны технически оптимальные равноускоренные законы движения, и задачу определения параметров тахограммы, минимизирующих потери энергии. Последняя задача сформулирована как задача нелинейного программирования.

Произведено приближенное решение задачи оптимизации без ограничения рывка. При аналитическом решении задачи оптимизации (методом множителей Лагранжа) получены равенства, свидетельствующие об оптимальности тахограмм с симметричными участками для движения "вперед" и "назад" и позволяющие упростить исходную задачу, сократив количество переменных. Кроме метода множителей Лагранжа, для решения задачи оптимизации с ограничениями по максимально допустимому ускорению НО применялись численные методы. Результаты, полученные с помощью различных численных методов и метода множителей Лагранжа, совпадают. Полученные результаты могут быть перенесены на асинхронный привод с частотным управлением. Кроме того, их можно распространить на другие машины с аналогичной тахограммой и характеристиками привода.

Получены выражения для расчета продолжительности переходных процессов электропривода НО и пути перемещения НО с учетом ограничения рывка. Они позволяют построить алгоритм вычислительной процедуры прогнозирования времени движения НО в рабочем цикле.

Определены принципы структурной организации двухрежимного управления приводом НО ЛП и предложена соответствующая структура двухрежимной системы управления электроприводом НО ЛП, обеспечивающая формирование тахограмм с заданными значениями ускорения и рывка, которая основана на принципах программного управления с использованием задатчиков интенсивности. Полученная структурная схема позволяет перейти к детальной разработке СУЛП и ее экспериментальному исследованию.

Рассмотрены условия изменения математической модели электромеханической системы и теоретически обоснован закон оптимального по энергозатратам управления электромеханической системой при потере управляемости по скорости движения инерционной массы электропривода. Доказано, что закон оптимального по энергозатратам управления электромеханической системой при существовании такого режима совпадает с управлением, оптимальным по быстродействию. Результат в виде закона оптимального формирования электромагнитного момента электродвигателя во времени может применяться в системах автоматического управления электроприводами механизмов передвижения технологических машин и многих других для снижения энергоемкости технологических процессов.

Результаты научно-исследовательской работы используются в учебном процессе Сумского государственного университета. Это дало возможность повысить уровень подготовки специалистов с высшим образованием в области ресурсосбережения.

## ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Евгеньев Г.Б. Системология инженерных знаний: Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2001. – 376 с.
2. Тимченко А.А. Основы системного проектирования та системного аналізу складних об'єктів: Основы САПР та системного проектирования складних об'єктів: Підручник/ За ред. В.І. Бикова. – 2-ге вид. – К.: Либідь, 2003. – 272 с.
3. Разработка объектно-ориентированных моделей систем управления исполнительными органами технологических машин: Отчет о НИР (промежуточный)/ СумГУ. – № ГР 0105U009179; Инв. №0206U007616. – К., 2006. – 142 с.
4. Червяков В.Д., Паньч А.А. Летучие механизмы как класс рабочих машин в аспекте задач управления// Электротехнические системы и комплексы: Межвузовский сборник научных трудов. – Магнитогорск: МГТУ. – 1998. – Вып. 3. – С.176-182.
5. Костенко С.Н., Червяков В.Д., Паньч А.А. О задачах управления электроприводом несущего органа летучей пилы// Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика: Вестник ХГПУ. Специальный выпуск. – Харьков: ХГПУ. – 1998. – С.266-267.
6. Паньч А.А., Червяков В.Д. Структурно-алгоритмический базис объектно-ориентированной системы управления летучими пилами// Контроль і управління в складних системах (КУСС-99). Книга за матеріалами п'ятої міжнародної науково-технічної конференції. м. Вінниця, 3-5 лютого 1999 року. У 3-х томах. Том 2. – Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця". – 1999. – С.66-72.
7. Червяков В.Д., Паньч А.А. Функциональная схема объектно-ориентированной системы управления летучими пилами// Проблемы создания новых машин и технологий. Научные труды КГПИ. Вып. 1 – Кременчуг: КГПИ. – 1999. – С.60-64.
8. Петров Ю.П. Оптимальное управление электрическим приводом с учетом ограничений по нагреву. – Л.: Энергия, 1971. – 144 с.

9. Архангельский В.И. Системы реверсивных электроприводов. – К.: Техніка, 1972. – 328 с.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
11. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
12. Карманов В.Г. Математическое программирование. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 256 с.
13. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: Учеб. пособие для вузов. – М.: Сов. радио, 1980. – 272 с.
14. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 720 с.
15. Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.
16. Червяков В.Д. Вентильный привод с ударной нагрузкой и зависимым ограничением тока: Автореф. дис... канд. техн. наук.: 05.232/ Уральский политехнический институт. – Свердловск, 1971. – 21 с.
17. Паньч А.А., Червяков В.Д. Повышение управляемости и точности прогнозирования процесса движения несущего органа летучей пилы// Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Наукові праці КДПУ. – Кременчук: КДПУ, 2004. – Вип. 2/2004(25). – С.62-67.
18. Червяков В.Д., Паньч А.А. Двухрежимное управление электроприводом несущего органа летучей пилы// Вісник Харківського державного політехнічного університету. Збірка наукових праць. Тематичний випуск 61. – Харків, ХДПУ, 1999. – С.233-234.
19. Червяков В.Д., Паньч А.А. Задачи ресурсосберегающего управления электроприводом несущего органа летучей пилы// Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". Збірка наукових праць. Тематичний випуск 10. – Харків, НТУ ХПІ, 2001. – С.370-371.

20. Паныч А.А. Энергетический аспект ресурсосбережения в процессах управления приводом несущего органа летучей пилы// Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Наукові праці КДПУ. – Кременчук: КДПУ, 2002. – Вип. 1(12). – С.200-204.
21. Пат. 2011210 С1 Российской Федерации, МКИ 5 G05 B11/01. Устройство для управления исполнительным механизмом технологического агрегата/ Червяков В.Д. (Украина); Сумский физико-технологический институт. – №4769083/24; Заявл. 11.12.89; Опубл. 15.04.94, Бюл. №7.
22. Ключев В.И., Терехов В.М. Электропривод и автоматизация общепромышленных механизмов: Учебник для вузов. – М.: Энергия, 1980. – 360 с.
23. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергия, 1979. – 616 с.
24. Панич А.О., Петренко М.О. Обмеження ривка в двохранімній системі управління електропривода несучого органа летучої пили// Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КДПУ, 2007. – Вип. 3/2007 (44). – С.35-39.
25. Теорія електропривода: Підручник/ М.Г. Попович, М.Г. Борисюк, В.А. Гаврилук та ін.; За ред. М.Г. Поповича. – Вища шк., 1993. – 494 с.
26. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1973. – 192 с.
27. Атанс М., Фалб П.Л. Оптимальное управление. Пер. с англ./ Под ред. Ю.И. Топчиева.- М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
28. Ванько В.И., Ермошина О.Е., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учебн. для вузов. 2-е изд./ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 488 с.

## Приложение А

### Аналитическое решение задачи оптимизации энергосиловых параметров рабочего цикла летучей пилы

#### А.1. Общая задача нелинейного программирования

Общая задача нелинейного программирования состоит в определении точки  $(\tau_{вр}^*; \tau_{вт}^*; \tau_{нр}^*; \tau_{обр}^*; \tau_{нт}^*; v_{обр}^*)$ , координаты которой соответствуют минимальному значению  $Q_{\min}$  целевой функции (1.19), положительны и удовлетворяют ограничениям (1.20-1.23):

$$Q = \left( \frac{v_1^2}{\tau_{вр}} + \mu_0^2 \tau_{вр} \right) + \mu_0^2 \tau_{ои} + \left( \frac{v_1^2}{\tau_{вт}} + \mu_0^2 \tau_{вт} \right) + \left( \frac{v_{обр}^2}{\tau_{нр}} + \mu_0^2 \tau_{нр} \right) + \mu_0^2 \tau_{обр} + \left( \frac{v_{обр}^2}{\tau_{нт}} + \mu_0^2 \tau_{нт} \right); \quad (A.1)$$

$$v_1(\tau_{вр}/2 + \tau_{ои} + \tau_{вт}/2) - v_{обр}(\tau_{нр}/2 + \tau_{обр} + \tau_{нт}/2) = 0; \quad (A.2)$$

$$\tau_{рц} - \tau_{п} - (\tau_{вр} + \tau_{ои} + \tau_{вт} + \tau_{нр} + \tau_{обр} + \tau_{нт}) \geq 0; \quad (A.3)$$

$$\tau_{лп} - (\tau_{вр}/2 + \tau_{ои} + \tau_{вт}/2) \geq 0; \quad (A.4)$$

$$v_{\max} - v_{обр} \geq 0. \quad (A.5)$$

Известно, что в настоящее время не существует единого универсального метода решения задач нелинейного программирования, а имеется множество различных методов [10-13]. Учитывая вероятную необходимость расчета искомых параметров в реальном времени для оперативного планирования тахограммы ЛП, а также с целью анализа влияния различных параметров ЛП на оптимальные законы управления приводом НО, желательно получить соответствующие зависимости в аналитическом виде. Такую возможность может дать метод множителей Лагранжа, который мы применим для решения нашей задачи (А.1-А.5).

Преобразуем ограничения в виде неравенств (А.3-А.5) к стандартному виду, поменяв их знаки путем умножения обеих частей на -1. Таким образом, ограничения (А.3-А.5) переписутся как

$$\tau_{вр} + \tau_{ОИ} + \tau_{вт} + \tau_{нр} + \tau_{обр} + \tau_{нт} - (\tau_{рц} - \tau_{п}) \leq 0; \quad (A.6)$$

$$\tau_{вр}/2 + \tau_{ОИ} + \tau_{вт}/2 - \tau_{пп} \leq 0; \quad (A.7)$$

$$V_{обр} - V_{max} \leq 0. \quad (A.8)$$

Обозначим функции в ограничениях (А.2) и (А.6-А.8) как  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  и  $g_4$  соответственно. Ограничения (А.2) и (А.6-А.8), таким образом, переписутся как  $g_1=0$ ,  $g_2 \leq 0$ ,  $g_3 \leq 0$  и  $g_4 \leq 0$ .

Заменим ограничения-неравенства  $g_2 \leq 0$ ,  $g_3 \leq 0$  и  $g_4 \leq 0$  на равенства путем добавления к каждому из них вспомогательной переменной  $u_1 \geq 0$ ,  $u_2 \geq 0$  и  $u_3 \geq 0$ . Получим

$$g_2 + u_1 = 0;$$

$$g_3 + u_2 = 0;$$

$$g_4 + u_3 = 0.$$

Запишем функцию Лагранжа в виде

$$L = Q + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 (g_2 + u_1) + \lambda_3 (g_3 + u_2) + \lambda_4 (g_4 + u_3),$$

где  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_3 \geq 0$ ,  $\lambda_4 \geq 0$  – множители Лагранжа.

Определим частные производные  $\frac{\partial L}{\partial \tau_{вр}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \tau_{вт}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \tau_{нр}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \tau_{обр}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \tau_{нт}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial V_{обр}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}$ ,

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_3}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_4}$  и приравняем их нулю. В результате получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\frac{v_1^2}{\tau_{вр}^2} + \mu_0^2 + \frac{1}{2} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_3 = 0; \\
-\frac{v_1^2}{\tau_{вт}^2} + \mu_0^2 + \frac{1}{2} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_3 = 0; \\
-\frac{v_{обр}^2}{\tau_{нр}^2} + \mu_0^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 v_{обр} + \lambda_2 = 0; \\
\mu_0^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 v_{обр} + \lambda_2 = 0; \\
-\frac{v_{обр}^2}{\tau_{нт}^2} + \mu_0^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 v_{обр} + \lambda_2 = 0; \\
2 \frac{v_{обр}}{\tau_{нр}} + 2 \frac{v_{обр}}{\tau_{нт}} + \lambda_1 \left( -\frac{1}{2} \tau_{нр} - \tau_{обр} - \frac{1}{2} \tau_{нт} \right) + \lambda_4 = 0; \\
v_1 \left( \frac{1}{2} \tau_{вр} + \tau_{ои} + \frac{1}{2} \tau_{вт} \right) - v_{обр} \left( \frac{1}{2} \tau_{нр} + \tau_{обр} + \frac{1}{2} \tau_{нт} \right) = 0; \\
\tau_{вр} + \tau_{ои} + \tau_{вт} + \tau_{нр} + \tau_{обр} + \tau_{нт} - \tau_{рц} + \tau_{п} + u_1 = 0; \\
\frac{1}{2} \tau_{вр} + \tau_{ои} + \frac{1}{2} \tau_{вт} - \tau_{лп} + u_2 = 0; \\
v_{обр} - v_{max} + u_3 = 0.
\end{array} \right. \quad (A.9)$$

Вычтя в (A.9) из первого уравнения второе, получим  $\tau_{вр}^2 = \tau_{вт}^2$ , откуда, с учетом неотрицательности  $\tau_{вр}$  и  $\tau_{вт}$  следует, что  $\tau_{вр} = \tau_{вт}$ . Аналогично, вычтя из третьего уравнения пятое, получим  $\tau_{нр} = \tau_{нт}$ . В указанные уравнения входят слагаемые, зависящие от множителей  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ , которые связывают их с условиями (A.2-A.4). Однако, так как в первом и втором, а также в третьем и в пятом уравнениях соответствующие пары слагаемых одинаковые, что приводит к их взаимному вычитанию, равенства  $\tau_{вр} = \tau_{вт}$  и  $\tau_{нр} = \tau_{нт}$  сохраняются и при отсутствии всех или нескольких ограничений (A.2-A.4). Из отсутствия в указанных уравнениях слагаемых с множителем  $\lambda_4$  следует независимость равенств  $\tau_{вр} = \tau_{вт}$  и  $\tau_{нр} = \tau_{нт}$  от существования ограничения (A.5). В связи с этим, обозначим время ускоренного и замедленного движения НО "вперед" как  $\tau_в$  ( $\tau_в = \tau_{вр} = \tau_{вт}$ ) и время ускоренного и замедленного движения НО "назад" как  $\tau_н$  ( $\tau_н = \tau_{нр} = \tau_{нт}$ ). Таким образом,

оптимальными являются тахограммы с симметричными участками для движения "вперед" и "назад". При этом выполняются равенства соответствующих ускорений  $\dot{v}_B = \dot{v}_{BP} = \dot{v}_{BT}$  и  $\dot{v}_H = \dot{v}_{HP} = \dot{v}_{HT}$ , а токи  $i_{BP} \neq i_{BT}$  и  $i_{HP} \neq i_{HT}$  отличаются между собой на величину  $\mu_0$ .

Независимость равенств  $\tau_{BP} = \tau_{BT}$  и  $\tau_{HP} = \tau_{HT}$  от ограничения (А.2) свидетельствует об оптимальности симметричных тахограмм для движения "вперед" и "назад" при рассмотрении их по отдельности, т.к. ограничение (А.2) связывает указанные тахограммы по проходимому пути. Независимость равенств  $\tau_{BP} = \tau_{BT}$  и  $\tau_{HP} = \tau_{HT}$  от ограничений (А.3-А.5) означает, что симметричные тахограммы будут являться оптимальными как внутри области, ограниченной (А.3-А.5), так и на ее границах.

## А.2. Упрощенная задача нелинейного программирования

С учетом равенств  $\tau_B = \tau_{BP} = \tau_{BT}$  и  $\tau_H = \tau_{HP} = \tau_{HT}$  упростим исходную задачу (А.1-А.5), сократив количество переменных. Получим задачу нелинейного программирования, состоящую в определении точки  $(\tau_B^*; \tau_H^*; \tau_{обp}^*; v_{обp}^*)$

$$Q = 2 \left( \frac{v_1^2}{\tau_B} + \mu_0^2 \tau_B \right) + \mu_0^2 \tau_{OI} + 2 \left( \frac{v_{обp}^2}{\tau_H} + \mu_0^2 \tau_H \right) + \mu_0^2 \tau_{обp}; \quad (A.10)$$

$$v_1(\tau_B + \tau_{OI}) - v_{обp}(\tau_H + \tau_{обp}) = 0; \quad (A.11)$$

$$2\tau_B + \tau_{OI} + 2\tau_H + \tau_{обp} - (\tau_{PI} - \tau_{II}) \leq 0; \quad (A.12)$$

$$\tau_B + \tau_{OI} - \tau_{III} \leq 0; \quad (A.13)$$

$$v_{обp} - v_{max} \leq 0. \quad (A.14)$$

В новой задаче ограничение (А.14) осталось прежним, т.к. оно не связано со временем  $\tau$ . Аналогично задаче (А.1-А.5), обозначим функции в ограничениях (А.11-А.14) как  $g_1, g_2, g_3$  и  $g_4$ , которые, таким образом, переписутся как  $g_1 = 0, g_2 \leq 0, g_3 \leq 0$  и  $g_4 \leq 0$ . Ограничения-неравенства  $g_2 \leq 0, g_3 \leq 0$  и  $g_4 \leq 0$  путем добавления к

каждому из них вспомогательной переменной  $u_1 \geq 0$ ,  $u_2 \geq 0$  и  $u_3 \geq 0$  преобразуем в равенства  $g_2 + u_1 = 0$ ,  $g_3 + u_2 = 0$  и  $g_4 + u_3 = 0$ . Запишем функцию Лагранжа в виде

$$L = Q + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 (g_2 + u_1) + \lambda_3 (g_3 + u_2) + \lambda_4 (g_4 + u_3).$$

Определим частные производные  $\frac{\partial L}{\partial \tau_B}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \tau_H}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \tau_{\text{обр}}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial v_{\text{обр}}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_3}$ ,

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4}$  и приравняем их нулю. В результате получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \frac{v_1^2}{\tau_B^2} + 2\mu_0^2 + \lambda_1 v_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0; \\ -2 \frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_H^2} + 2\mu_0^2 - \lambda_1 v_{\text{обр}} + 2\lambda_2 = 0; \\ \mu_0^2 - \lambda_1 v_{\text{обр}} + \lambda_2 = 0; \\ 4 \frac{v_{\text{обр}}}{\tau_H} + \lambda_1 (-\tau_H - \tau_{\text{обр}}) + \lambda_4 = 0; \\ v_1 (\tau_B + \tau_{\text{ОИ}}) - v_{\text{обр}} (\tau_H + \tau_{\text{обр}}) = 0; \\ 2\tau_B + \tau_{\text{ОИ}} + 2\tau_H + \tau_{\text{обр}} - \tau_{\text{РЦ}} + \tau_{\text{П}} + u_1 = 0; \\ \tau_B + \tau_{\text{ОИ}} - \tau_{\text{ЛП}} + u_2 = 0; \\ v_{\text{обр}} - v_{\text{max}} + u_3 = 0. \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

Умножим в (A.15) обе части третьего уравнения на 2 и вычтем получившееся уравнение из второго. Получим

$$\begin{aligned} -2 v_{\text{обр}}^2 / \tau_H^2 + \lambda_1 v_{\text{обр}} &= 0, \\ \lambda_1 &= 2 v_{\text{обр}} / \tau_H^2. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Предположим, что в решаемой задаче ограничение (A.14)  $v_{\text{обр}} - v_{\text{max}} \leq 0$  отсутствует, что соответствует нахождению оптимальной координаты  $v_{\text{обр}}^*$  внутри области  $v_{\text{обр}} - v_{\text{max}} < 0$ . Соответственно, получим, что  $\lambda_4 = 0$ . Примем, что  $\lambda_4 = 0$  и

рассмотрим четвертое уравнение. Перенесем слагаемое с множителем  $\lambda_1$  в правую часть и возведем обе части в квадрат. В правую часть вместо  $\lambda_1^2$  подставим соответствующее выражение, полученное из (A.16). Получим

$$\begin{aligned}
 4 \frac{V_{\text{обр}}}{\tau_{\text{H}}} + \lambda_1 (-\tau_{\text{H}} - \tau_{\text{обр}}) &= 0, \\
 4 V_{\text{обр}} / \tau_{\text{H}} &= \lambda_1 (\tau_{\text{H}} + \tau_{\text{обр}}), \\
 4^2 V_{\text{обр}}^2 / \tau_{\text{H}}^2 &= \lambda_1^2 (\tau_{\text{H}} + \tau_{\text{обр}})^2, \\
 4^2 V_{\text{обр}}^2 / \tau_{\text{H}}^2 &= (4 V_{\text{обр}}^2 / \tau_{\text{H}}^4) (\tau_{\text{H}} + \tau_{\text{обр}})^2, \\
 4 \tau_{\text{H}}^2 &= (\tau_{\text{H}} + \tau_{\text{обр}})^2, \\
 2 \tau_{\text{H}} &= \tau_{\text{H}} + \tau_{\text{обр}}, \\
 \tau_{\text{H}} &= \tau_{\text{обр}}.
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Таким образом, с учетом предыдущих результатов, мы получили, что для задачи (A.10-A.13) оптимальной является тахограмма, у которой, кроме симметричных по разгонам и торможениям участков при движении "вперед" и "назад", участок движения "назад" состоит из трех равных по времени отрезков – разгона ( $\tau_{\text{нр}} = \tau_{\text{H}}$ ), движения с постоянной скоростью ( $\tau_{\text{обр}} = \tau_{\text{H}}$ ) и торможения ( $\tau_{\text{нт}} = \tau_{\text{H}}$ ). Однако, данное утверждение справедливо только при нахождении оптимальной координаты  $v_{\text{зад}}^*$  внутри области  $v_{\text{обр}} - v_{\text{max}} < 0$ .

В третье и второе уравнения системы (A.15) входит слагаемое, зависящее от множителя  $\lambda_2$ , который связывает их с условием (A.12). Однако, с учетом умножения обеих частей третьего уравнения на 2, соответствующие слагаемые взаимно вычитаются. С учетом сказанного, а также из отсутствия в четвертом уравнении слагаемого с множителем  $\lambda_2$ , а также во всех рассмотренных уравнениях слагаемых с множителями  $\lambda_3$ , справедливо утверждение о независимости равенства (A.17)  $\tau_{\text{H}} = \tau_{\text{обр}}$  от существования ограничений (A.12) и (A.13).

Определим, как соотносятся между собой ускорения  $\dot{v}_{\text{в}}$  и  $\dot{v}_{\text{H}}$ . Вычтем из второго уравнения третье. Получим

$$-2v_{обр}^2/\tau_H^2 + \mu_0^2 + \lambda_2 = 0.$$

С учетом  $\dot{v}_H = dv/d\tau = v_{обр}/\tau_H$ , получим

$$\dot{v}_H^2 = (\mu_0^2 + \lambda_2)/2. \quad (A.18)$$

Вычтем из первого уравнения третье. Получим

$$-2v_1^2/\tau_B^2 + \mu_0^2 + \lambda_1(v_1 + v_{обр}) + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

С учетом  $\dot{v}_B = dv/d\tau = v_1/\tau_B$  и (A.18), получим

$$\begin{aligned} \dot{v}_B^2 &= (\mu_0^2 + \lambda_2)/2 + \lambda_1(v_1 + v_{обр})/2 + \lambda_3/2, \\ \dot{v}_B^2 &= \dot{v}_H^2 + \lambda_1(v_1 + v_{обр})/2 + \lambda_3/2. \end{aligned} \quad (A.19)$$

Как видно из (A.19), в общем случае  $\dot{v}_B \neq \dot{v}_H$  ( $\dot{v}_B^2 \neq \dot{v}_H^2$ ), что приводит к усложненной процедуре реверсирования привода НО на пятом этапе рабочего цикла ЛП (см. рис.1.2). Причем, с учетом  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_3 \geq 0$  из (A.18) и (A.19) следует

$$\dot{v}_H \geq \frac{\mu_0}{\sqrt{2}}; \quad (A.20)$$

$$\dot{v}_B \geq \dot{v}_H. \quad (A.21)$$

Неравенства (A.20) и (A.21) имеют силу не зависимо от существования ограничений (A.12-A.14).

### А.3. Упрощенная задача нелинейного программирования с исключенным ограничением

Рассмотренная задача (А.10-А.14) нахождения точки  $(\tau_B^*; \tau_H^*; \tau_{обр}^*; \nu_{обр}^*)$  может быть упрощена путем исключения ограничения (А.11) и переменной  $\tau_{обр}$ . Из (А.11) выразим  $\tau_{обр} = (\tau_B + \tau_{ОИ}) \nu_1 / \nu_{обр} - \tau_H$  и подставим его в (А.10) и (А.12). Получим

$$Q = 2 \left( \frac{\nu_1^2}{\tau_B} + \mu_0^2 \tau_B \right) + \mu_0^2 \tau_{ОИ} + 2 \left( \frac{\nu_{обр}^2}{\tau_H} + \mu_0^2 \tau_H \right) + \mu_0^2 \left( \frac{(\tau_B + \tau_{ОИ}) \nu_1}{\nu_{обр}} - \tau_H \right); \quad (A.22)$$

$$2 \tau_B + \tau_{ОИ} + \tau_H + (\tau_B + \tau_{ОИ}) \nu_1 / \nu_{обр} - (\tau_{ПЦ} - \tau_H) \leq 0; \quad (A.23)$$

$$\tau_B + \tau_{ОИ} - \tau_{ПП} \leq 0; \quad (A.24)$$

$$\nu_{обр} - \nu_{max} \leq 0. \quad (A.25)$$

Полученная задача (А.22-А.25) состоит в определении точки  $(\tau_B^*; \tau_H^*; \nu_{обр}^*)$ , которая минимизирует целевую функцию. Время  $\tau_{обр}^*$  рассчитывается по формуле

$$\tau_{обр}^* = (\tau_B^* + \tau_{ОИ}) \nu_1 / \nu_{обр}^* - \tau_H^*. \quad (A.26)$$

Аналогично задаче (А.1-А.5), обозначим функции в ограничениях как  $g_1, g_2$  и  $g_3$ , которые, таким образом, переписутся как  $g_1 \leq 0, g_2 \leq 0$  и  $g_3 \leq 0$ . Путем добавления к каждому из ограничений вспомогательной переменной  $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$  и  $u_3 \geq 0$  преобразуем их в равенства  $g_1 + u_1 = 0, g_2 + u_2 = 0$  и  $g_3 + u_3 = 0$ . Запишем функцию Лагранжа в виде

$$L = Q + \lambda_1(g_1 + u_1) + \lambda_2(g_2 + u_2) + \lambda_3(g_3 + u_3).$$

Определим частные производные  $\frac{\partial L}{\partial \tau_B}, \frac{\partial L}{\partial \tau_H}, \frac{\partial L}{\partial \nu_{обр}}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_3}$  и

приравняем их нулю. В результате получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \frac{v_1^2}{\tau_B^2} + 2\mu_0^2 + \frac{\mu_0^2 v_1}{v_{\text{обр}}} + \lambda_1 \left( 2 + \frac{v_1}{v_{\text{обр}}} \right) + \lambda_2 = 0; \\ -2 \frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_H^2} + \mu_0^2 + \lambda_1 = 0; \\ 4 \frac{v_{\text{обр}}}{\tau_H} - \frac{v_1(\tau_B + \tau_{\text{ОИ}})(\mu_0^2 + \lambda_1)}{v_{\text{обр}}^2} + \lambda_3 = 0; \\ 2\tau_B + \tau_{\text{ОИ}} + \tau_H + \frac{v_1(\tau_B + \tau_{\text{ОИ}})}{v_{\text{обр}}} - \tau_{\text{РЦ}} + \tau_{\text{П}} + u_1 = 0; \\ \tau_B + \tau_{\text{ОИ}} - \tau_{\text{ЛП}} + u_2 = 0; \\ v_{\text{обр}} - v_{\text{max}} + u_3 = 0. \end{array} \right. \quad (\text{A.27})$$

Предположим, что в решаемой задаче ограничения (A.23) и (A.25) отсутствуют, что соответствует нахождению оптимальных координат  $(\tau_B^*; \tau_H^*; v_{\text{обр}}^*)$  внутри областей  $2\tau_B + \tau_{\text{ОИ}} + \tau_H + (\tau_B + \tau_{\text{ОИ}})v_1/v_{\text{обр}} - (\tau_{\text{РЦ}} - \tau_{\text{П}}) \leq 0$  и  $v_{\text{обр}} - v_{\text{max}} \leq 0$ . Соответственно, получим, что  $\lambda_1=0$  и  $\lambda_3=0$ . Тогда из второго уравнения получим

$$\frac{v_{\text{обр}}}{\tau_H} = \frac{\mu_0}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.28})$$

Аналогично (A.20)

$$\dot{v}_H = \frac{\mu_0}{\sqrt{2}}.$$

С учетом предыдущего выражения из третьего уравнения получаем

$$v_{\text{обр}}^2 = \frac{\mu_0 v_1 (\tau_B + \tau_{\text{ОИ}})}{2\sqrt{2}}.$$

Так как с учетом (1.20) и (A.11)  $v_1(\tau_B + \tau_{\text{ОИ}}) = \alpha_B = \alpha_H$ , то

$$v_{\text{обр}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \alpha_H}{2\sqrt{2}}}. \quad (\text{A.29})$$

Из (A.28) с учетом (A.29) получим

$$\tau_H = \sqrt{\frac{\alpha_H}{\mu_0 \sqrt{2}}}. \quad (\text{A.30})$$

С учетом полученных результатов найдем  $\tau_{\text{обр}}$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{обр}} &= (\tau_B + \tau_{\text{ОИ}}) v_1 / v_{\text{обр}} - \tau_H = \alpha_H / v_{\text{обр}} - \tau_H, \\ \tau_{\text{обр}} &= \frac{\alpha_H \sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\mu_0 \alpha_H}} - \sqrt{\frac{\alpha_H}{\mu_0 \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\alpha_H}{\mu_0}} \left( \sqrt{2\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \sqrt{\frac{\alpha_H}{\mu_0}} \left( \sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\alpha_H}{\mu_0 \sqrt{2}}} (2 - 1) = \sqrt{\frac{\alpha_H}{\mu_0 \sqrt{2}}} = \tau_H. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что, аналогично (A.17),  $\tau_H = \tau_{\text{обр}}$ . При этом количество неизвестных переменных сокращается до двух, что дает возможность построения наглядных трехмерных графиков.

#### А.4. Задача оптимизации участка тахограммы при движении "назад"

Для анализа результатов решения задач нелинейного программирования по пп.А.1-А.2 полезно рассмотреть задачу минимизации потерь энергии отдельно для участка тахограммы рис.1.2, соответствующего движению "назад" при заданном перемещении  $\alpha_H$ . Интересующая нас задача состоит в определении точки  $(\tau_{\text{нр}}^*; \tau_{\text{обр}}^*; \tau_{\text{нт}}^*; v_{\text{обр}}^*)$ , координаты которой доставляют минимум целевой функции

$$Q = \left( \frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_{\text{нр}}} + \mu_0^2 \tau_{\text{нр}} \right) + \mu_0^2 \tau_{\text{обр}} + \left( \frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_{\text{нт}}} + \mu_0^2 \tau_{\text{нт}} \right) \quad (\text{A.31})$$

и удовлетворяют ограничению

$$v_{\text{обр}}(\tau_{\text{нр}}/2 + \tau_{\text{обр}} + \tau_{\text{нт}}/2) = \alpha_{\text{н}}. \quad (\text{A.32})$$

Из (A.32) выразим  $\tau_{\text{обр}} = \alpha_{\text{н}}/v_{\text{обр}} - (\tau_{\text{нр}} + \tau_{\text{нт}})/2$  и подставим его в (A.31). Получим задачу безусловной оптимизации

$$Q = \left( \frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_{\text{нр}}} + \mu_0^2 \tau_{\text{нр}} \right) + \mu_0^2 \left( \frac{\alpha_{\text{н}}}{v_{\text{обр}}} - \frac{(\tau_{\text{нр}} + \tau_{\text{нт}})}{2} \right) + \left( \frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_{\text{нт}}} + \mu_0^2 \tau_{\text{нт}} \right).$$

Определив частные производные  $\frac{\partial Q}{\partial \tau_{\text{нр}}}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial v_{\text{обр}}}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \tau_{\text{нт}}}$  и приравняв их нулю,

получим систему уравнений

$$\begin{cases} -\frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_{\text{нр}}^2} + \frac{1}{2} \mu_0^2 = 0; \\ 2 \frac{v_{\text{обр}}}{\tau_{\text{нр}}} - \frac{\mu_0^2 \alpha_{\text{н}}}{v_{\text{обр}}^2} + 2 \frac{v_{\text{обр}}}{\tau_{\text{нт}}} = 0; \\ -\frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_{\text{нт}}^2} + \frac{1}{2} \mu_0^2 = 0. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений, аналогично п.А.1, получим  $\tau_{\text{нр}} = \tau_{\text{нт}} = \tau_{\text{н}}$ . С учетом данного равенства перепишем систему уравнений

$$\begin{cases} -2 \frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_{\text{н}}^2} + \mu_0^2 = 0; \\ 4 \frac{v_{\text{обр}}}{\tau_{\text{н}}} - \frac{\mu_0^2 \alpha_{\text{н}}}{v_{\text{обр}}^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получим

$$\frac{v_{\text{обр}}}{\tau_{\text{н}}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.33})$$

Аналогично (А.20)

$$\dot{v}_H = \frac{\mu_0}{\sqrt{2}}.$$

Из второго уравнения с учетом (А.33) получаем

$$v_{\text{обр}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \alpha_H}{2\sqrt{2}}}. \quad (\text{А.34})$$

Из (А.33) с учетом (А.34) получим

$$\tau_H = \sqrt{\frac{\alpha_H}{\mu_0 \sqrt{2}}}. \quad (\text{А.35})$$

С учетом полученных результатов найдем  $\tau_{\text{обр}}$

$$\tau_{\text{обр}} = \alpha_H / v_{\text{обр}} - (\tau_{\text{пр}} + \tau_{\text{нт}}) / 2 = \alpha_H / v_{\text{обр}} - \tau_H.$$

Таким образом, аналогично п.А.3,  $\tau_H = \tau_{\text{обр}}$ .

Сравнение выражений (А.33-А.35) и (А.28-А.30), соответственно, показывает, что результаты решения задачи минимизации потерь энергии отдельно для участка тахограммы, соответствующего движению "назад" при заданном перемещении  $\alpha_H$  совпадают с результатами п.А.3, полученными в предположении отсутствия ограничений (А.23) и (А.25).

#### А.5. Задача оптимизации участка тахограммы при движении "вперед"

Рассмотрим задачу минимизации потерь энергии отдельно для участка тахограммы рис.1.2, соответствующего движению "вперед" при заданной скорости  $v_1$  движения НО и времени  $\tau_{\text{ОИ}}$  обработки ОИ (движения НО с постоянной

скоростью). Интересующая нас задача состоит в определении точки  $(\tau_{вр}^*; \tau_{вт}^*)$ , координаты которой доставляют минимум целевой функции

$$Q = \left( \frac{v_1^2}{\tau_{вр}} + \mu_0^2 \tau_{вр} \right) + \mu_0^2 \tau_{ои} + \left( \frac{v_1^2}{\tau_{вт}} + \mu_0^2 \tau_{вт} \right).$$

С целью определения нижней границы возможных оптимальных диаграмм, соответствующих абсолютному минимуму  $Q$  (режим "минимум-минимум" [8]), ограничения на координаты точки  $(\tau_{вр}^*; \tau_{вт}^*)$  накладывать не будем.

Определив частные производные  $\frac{\partial Q}{\partial \tau_{вр}}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \tau_{вт}}$  и приравняв их нулю, получим

систему уравнений

$$\begin{cases} -\frac{v_1^2}{\tau_{вр}^2} + \mu_0^2 = 0; \\ -\frac{v_1^2}{\tau_{вт}^2} + \mu_0^2 = 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что, аналогично п.А.1,  $\tau_{вр} = \tau_{вт} = \tau_v$ . Кроме того, из данной системы следует, что

$$\begin{aligned} \tau_{вр} &= v_1 / \mu_0, \\ \dot{v}_v &= \mu_0. \end{aligned} \tag{A.36}$$

Последнее соотношение совпадает с аналогичными результатами, полученными в [8]. С учетом (1.15), (1.17) и (1.18) это означает, что при разгоне НО минимум потерь в приводе достигается при токе  $i_{вр} = 2\mu_0$ , а при торможении НО – при токе  $i_{вт} = 0$  (торможение происходит только за счет момента сопротивления  $\mu_0$ ).

## А.6. Упрощенная задача нелинейного программирования с ограничениями по максимальному ускорению

Задача, описанная в п.А.1 и упрощенная в пп.А.2-А.3, может быть дополнена ограничениями на  $\tau_b$  и  $\tau_n$  по максимально допустимому ускорению НО, учитывающему ограничение (1.13)  $|M_2| \leq M_{\max}$  по максимально допустимому моменту двигателя (см. п.1.3). Указанные ограничения записываются в виде

$$v_1 / \dot{v}_{\max} - \tau_b \leq 0; \quad (\text{A.37})$$

$$v_{\text{обр}} / \dot{v}_{\max} - \tau_n \leq 0, \quad (\text{A.38})$$

где  $\dot{v}_{\max} = i_{\max} - \mu_0$ ,  $i_{\max}$  – предельно допустимый ток якоря.

Строго говоря, приведенное выражение для  $\dot{v}_{\max}$  соответствует разгону привода. Тому же значению тока  $i_{\max}$  при торможении будет соответствовать значение ускорения, большее на  $2\mu_0$ , и, следовательно, меньшее время торможения, что приведет к нарушению равенств  $\tau_{\text{вр}} = \tau_{\text{вт}}$  и  $\tau_{\text{нр}} = \tau_{\text{нт}}$ . Таким образом, неравенства (А.37) и (А.38) приводят к недоиспользованию возможностей двигателя. Однако, необходимость в применении торможения с ускорением, большим  $\dot{v}_{\max}$ , возникает только при исчерпании всех возможностей оптимальных симметричных тахограмм, ограниченных условиями (А.23-А.25) и (А.37), (А.38). Причем, такая ситуация наступит тем позже, чем меньше  $\mu_0$ . Так как, что при создании ЛП значение  $\mu_0$  стремятся сделать как можно меньшим (как правило,  $\mu_0 \leq 0,1$ ), рассмотренную ситуацию будем считать особым случаем, подлежащим отдельному исследованию. Заметим, что в связи с выполнением большинства ограничений (равенств), соответствующая задача не должна отличаться большой сложностью.

Задача п.А.3 с учетом ограничений (А.37) и (А.38) примет вид

$$Q = 2 \left( \frac{v_1^2}{\tau_B} + \mu_0^2 \tau_B \right) + \mu_0^2 \tau_{\text{ОИ}} + 2 \left( \frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_H} + \mu_0^2 \tau_H \right) + \mu_0^2 \left( \frac{(\tau_B + \tau_{\text{ОИ}}) v_1}{v_{\text{обр}}} - \tau_H \right);$$

$$2 \tau_B + \tau_{\text{ОИ}} + \tau_H + (\tau_B + \tau_{\text{ОИ}}) v_1 / v_{\text{обр}} - (\tau_{\text{ПЦ}} - \tau_H) \leq 0;$$

$$\tau_B + \tau_{\text{ОИ}} - \tau_{\text{ПП}} \leq 0;$$

$$v_{\text{обр}} - v_{\text{max}} \leq 0;$$

$$v_1 / \dot{v}_{\text{max}} - \tau_B \leq 0;$$

$$v_{\text{обр}} / \dot{v}_{\text{max}} - \tau_H \leq 0.$$

Необходимо найти координаты точки  $(\tau_B^*; \tau_H^*; v_{\text{обр}}^*)$ , соответствующие минимуму целевой функции  $Q$ , время  $\tau_{\text{обр}}^*$  рассчитывается по формуле (А.26).

Обозначим функции в ограничениях как  $g_1, g_2, g_3, g_4$  и  $g_5$ , которые, таким образом, переписутся как  $g_1 \leq 0, g_2 \leq 0, g_3 \leq 0, g_4 \leq 0$ , и  $g_5 \leq 0$ . Путем добавления к каждому из ограничений вспомогательной переменной  $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0$  и  $u_5 \geq 0$  преобразуем их в равенства  $g_1 + u_1 = 0, g_2 + u_2 = 0, g_3 + u_3 = 0, g_4 + u_4 = 0$  и  $g_5 + u_5 = 0$ . Запишем функцию Лагранжа в виде

$$L = Q + \lambda_1(g_1 + u_1) + \lambda_2(g_2 + u_2) + \lambda_3(g_3 + u_3) + \lambda_4(g_4 + u_4) + \lambda_5(g_5 + u_5).$$

Определим частные производные  $\frac{\partial L}{\partial \tau_B}, \frac{\partial L}{\partial \tau_H}, \frac{\partial L}{\partial v_{\text{обр}}}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_3}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_4},$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_5}$  и приравняем их нулю. В результате получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l}
-2 \frac{v_1^2}{\tau_B^2} + 2\mu_0^2 + \frac{\mu_0^2 v_1}{v_{\text{обр}}} + \lambda_1 \left( 2 + \frac{v_1}{v_{\text{обр}}} \right) + \lambda_2 - \lambda_4 = 0; \\
-2 \frac{v_{\text{обр}}^2}{\tau_H^2} + \mu_0^2 + \lambda_1 - \lambda_5 = 0; \\
4 \frac{v_{\text{обр}}}{\tau_H} - \frac{v_1 (\tau_B + \tau_{\text{ОИ}}) (\mu_0^2 + \lambda_1)}{v_{\text{обр}}^2} + \lambda_3 + \frac{\lambda_5}{\dot{v}_{\text{max}}} = 0; \\
2\tau_B + \tau_{\text{ОИ}} + \tau_H + \frac{v_1 (\tau_B + \tau_{\text{ОИ}})}{v_{\text{обр}}} - \tau_{\text{РЦ}} + \tau_{\text{П}} + u_1 = 0; \\
\tau_B + \tau_{\text{ОИ}} - \tau_{\text{ЛП}} + u_2 = 0; \\
v_{\text{обр}} - v_{\text{max}} + u_3 = 0; \\
\frac{v_1}{\dot{v}_{\text{max}}} - \tau_B + u_4 = 0; \\
\frac{v_{\text{обр}}}{\dot{v}_{\text{max}}} - \tau_H + u_5 = 0.
\end{array} \right. \quad (\text{A.39})$$

Обращение одного из или обоих ограничений (А.37) и (А.38) в равенства означает движение НО с ускорением  $\dot{v}_{\text{max}}$  и упрощает решение задачи, т.к. непосредственно определяется величина  $\tau_B$  и/или  $\tau_H$ .

#### А.7. Решение задачи нелинейного программирования

Решим задачу нелинейного программирования, описанную в пп.А.2-А.3. В общем случае, для различных наборов задаваемых конструктивных и технологических параметров ЛП, точка  $(\tau_B^*; \tau_H^*; v_{\text{обр}}^*)$ , доставляющая минимум целевой функции  $Q$ , может попасть как внутрь, так и на границу области, ограниченной всеми или несколькими/одним из ограничений (А.23-А.25). При попадании точки внутрь области соответствующие ограничения могут не рассматриваться, а при попадании на границу они обращаются в равенства. Таким образом, для нахождения точки  $(\tau_B^*; \tau_H^*; v_{\text{обр}}^*)$  необходимо рассмотреть несколько задач, отличающихся различными сочетаниями трех ограничений-равенств  $g_1=0$ ,

$g_2=0, g_3=0$ . Количество таких сочетаний (ни одного равенства, одно из равенств, два каких-либо равенства, три равенства) [14]:

$$C = 1 + C_3^1 + C_3^2 + 1 = 1 + \frac{3!}{1!(3-1)!} + \frac{3!}{2!(3-2)!} + 1 = 8.$$

Результаты решения каждой из указанных задач приведены ниже. При их решении использован пакет MapleVR4, содержание соответствующего рабочего листа приведено в приложении Г. В дополнение к данным задачам необходимо рассмотреть задачи с учетом ограничения по ускорению  $\dot{v}_{\max}$  (A.37), из которого, обращенного в равенство, получим  $\tau_b = v_1 / \dot{v}_{\max}$ . Ограничение (A.38) рассматривать не будем, т.к. в соответствии с (A.21) равенство  $\tau_n = v_{\text{обр}} / \dot{v}_{\max}$  наступит после выполнения равенства  $\tau_b = v_1 / \dot{v}_{\max}$ , т.е. в последнюю очередь.

A.7.1. Задача без ограничений. При решении задачи (A.22) без ограничений (A.23-A.25) строится система из трех уравнений (приравненные нулю частные производные целевой функции по  $\tau_b$ ,  $\tau_n$  и  $v_{\text{обр}}$ ). В результате преобразований (см. прил. Г) получено уравнение пятой степени относительно  $\tau_b$ , которое может быть решено численными методами. Аналогичные уравнения можно получить и относительно переменных  $\tau_n$  или  $v_{\text{обр}}$ . При численном расчете из всех решений указанного уравнения выбираются положительные и действительные значения  $\tau_b$ , по которым вычисляются  $\tau_n$  и  $v_{\text{обр}}$  по формулам

$$\tau_n = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2} v_1 \mu_0 (\tau_b + \tau_{\text{ои}})}}{\mu_0};$$

$$v_{\text{обр}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2} v_1 \mu_0 (\tau_b + \tau_{\text{ои}})}.$$

Искомое решение  $(\tau_{\text{в}}^*; \tau_{\text{н}}^*; \nu_{\text{обр}}^*)$  отбирается по глобальному минимуму целевой функции  $Q$ . Напомним, что для данной задачи справедливо равенство (А.17)  $\tau_{\text{н}} = \tau_{\text{обр}}$ .

А.7.2. Задача с одним ограничением  $g_1=0$ . При решении задачи (А.22) с ограничением (А.23) в виде равенства строится система из двух уравнений (приравненные нулю частные производные целевой функции по  $\tau_{\text{в}}$  и  $\tau_{\text{н}}$ ). В результате преобразований (см. прил. Г) получено уравнение четвертой степени относительно  $\tau_{\text{н}}$ , которое может быть решено численными методами. При численном расчете из всех решений указанного уравнения выбираются положительные и действительные значения  $\tau_{\text{н}}$ , по которым вычисляются  $\tau_{\text{в}}$  и  $\nu_{\text{обр}}$  по формулам

$$\begin{aligned}\tau_{\text{в}} &= (\tau_{\text{рц}} - \tau_{\text{п}} - \tau_{\text{ои}} - 3\tau_{\text{н}})/2; \\ \nu_{\text{обр}} &= \nu_1 (\tau_{\text{рц}} - \tau_{\text{п}} + \tau_{\text{ои}} - 3\tau_{\text{н}})/(4\tau_{\text{н}}).\end{aligned}$$

Искомое решение  $(\tau_{\text{в}}^*; \tau_{\text{н}}^*; \nu_{\text{обр}}^*)$  отбирается по глобальному минимуму целевой функции  $Q$ . Напомним, что для данной задачи справедливо равенство (А.17)  $\tau_{\text{н}} = \tau_{\text{обр}}$ . Как видно из приведенных выражений, координаты  $(\tau_{\text{в}}^*; \tau_{\text{н}}^*; \nu_{\text{обр}}^*)$  не зависят от  $\mu_0$ .

А.7.3. Задача с одним ограничением  $g_2=0$ . Из ограничения (А.24) в виде равенства следует выражение для вычисления значения  $\tau_{\text{в}} = \tau_{\text{лп}} - \tau_{\text{ои}}$ . Фактически, в данной задаче оптимизируется участок движения "назад" при заданном пути  $\alpha_{\text{н}} = \tau_{\text{лп}} \nu_1$  и неограниченной скорости  $\nu_{\text{обр}}$  (см. п.А.4). Построена система из двух уравнений (приравненные нулю частные производные целевой функции по  $\tau_{\text{н}}$  и  $\nu_{\text{обр}}$ ). В результате преобразований (см. прил. Г) получены формулы для расчета значений  $\tau_{\text{н}}$  и  $\nu_{\text{обр}}$

$$\tau_{\text{H}} = \sqrt{\frac{\tau_{\text{ЛП}} \nu_1}{\mu_0 \sqrt{2}}};$$

$$\nu_{\text{обр}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \tau_{\text{ЛП}} \nu_1}{2\sqrt{2}}}.$$

Полученные выражения аналогичны формулам (А.34) и (А.35). Решение  $(\tau_{\text{В}}^*; \tau_{\text{H}}^*; \nu_{\text{обр}}^*)$ , вычисленное указанным образом, доставляет минимум целевой функции  $Q$ . Напомним, что для данной задачи справедливо равенство (А.17)  $\tau_{\text{H}} = \tau_{\text{обр}}$ .

А.7.4. Задача с одним ограничением  $g_3=0$ . Из ограничения (А.25) в виде равенства следует значение  $\nu_{\text{обр}} = \nu_{\text{max}}$ . Построена система из двух уравнений (приравненные нулю частные производные целевой функции по  $\tau_{\text{В}}$  и  $\tau_{\text{H}}$ ). В результате преобразований (см. прил. Г) получены формулы для расчета значений  $\tau_{\text{В}}$  и  $\tau_{\text{H}}$

$$\tau_{\text{В}} = \frac{\sqrt{2}\nu_1}{\mu_0 \sqrt{2 + \frac{\nu_1}{\nu_{\text{max}}}}};$$

$$\tau_{\text{H}} = \frac{\sqrt{2}\nu_{\text{max}}}{\mu_0}.$$

Решение  $(\tau_{\text{В}}^*; \tau_{\text{H}}^*; \nu_{\text{обр}}^*)$ , вычисленное указанным образом, доставляет минимум целевой функции  $Q$ . Заметим, что для данной задачи справедливо неравенство  $\tau_{\text{H}} \neq \tau_{\text{обр}}$ , т.е. не выполняется равенство (А.17)  $\tau_{\text{H}} = \tau_{\text{обр}}$ . Значение  $\tau_{\text{обр}}^*$  рассчитывается по формуле (А.26)  $\tau_{\text{обр}}^* = (\tau_{\text{В}}^* + \tau_{\text{ОИ}}) \nu_1 / \nu_{\text{обр}}^* - \tau_{\text{H}}^*$ .

А.7.5. Задача с двумя ограничениями  $g_1=0$  и  $g_2=0$ . Из ограничения (А.24) в виде равенства следует выражение для вычисления значения  $\tau_b = \tau_{лп} - \tau_{ои}$ . Фактически, в данной задаче оптимизируется участок движения "назад" при заданном пути  $\alpha_n = \tau_{лп} v_1$ , неограниченной скорости  $v_{обр}$  и заданном времени рабочего цикла  $\tau_{рц}$ . Последнее ограничение отличает данную задачу от задачи п.А.4. В результате преобразований (см. прил. Г) получено уравнение (приравненная нулю частная производная целевой функции по  $v_{обр}$ ), найдены формулы для расчета значений  $v_{обр}$  и  $\tau_n$

$$v_{обр} = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_1 \tau_{лп}}{\tau_{ои} + \tau_{рц} - 2\tau_{лп} - \tau_{п}};$$

$$\tau_n = (\tau_{рц} - \tau_{п} - \tau_{ои} - 2\tau_b) - (\tau_b + \tau_{ои}) v_1 / v_{обр}.$$

Решение  $(\tau_b^*; \tau_n^*; v_{обр}^*)$ , вычисленное указанным образом, доставляет минимум целевой функции  $Q$ . Напомним, что для данной задачи справедливо равенство (А.17)  $\tau_n = \tau_{обр}$ . Как видно из приведенных выражений, координаты  $(\tau_b^*; \tau_n^*; v_{обр}^*)$  не зависят от  $\mu_0$ .

А.7.6. Задача с двумя ограничениями  $g_1=0$  и  $g_3=0$ . Из ограничения (А.25) в виде равенства следует значение  $v_{обр} = v_{max}$ . В результате преобразований (см. прил. Г) получено уравнение (приравненная нулю частная производная целевой функции по  $\tau_b$ ), найдены формулы для расчета значений  $\tau_b$  и  $\tau_n$

$$\tau_b = \frac{1}{2} \frac{v_1 (v_1 \tau_{ои} + v_{max} (\tau_{ои} + \tau_{п} - \tau_{рц})) (2v_{max} \sqrt{2v_{max}^2 + v_{max} v_1} - 2v_1 (v_1 + 2v_{max}))}{v_{max} (v_1^3 (v_1 + 4) + v_{max} (4v_1^2 - v_{max} - 2v_{max}^2))};$$

$$\tau_n = (\tau_{рц} - \tau_{п} - \tau_{ои} - 2\tau_b) - (\tau_b + \tau_{ои}) v_1 / v_{обр}.$$

Решение  $(\tau_{\hat{a}}^*; \tau_{\text{н}}^*; \nu_{\text{обр}}^*)$ , вычисленное указанным образом, доставляет минимум целевой функции  $Q$ . Заметим, что для данной задачи справедливо неравенство  $\tau_{\text{н}} \neq \tau_{\text{обр}}$ , т.е. не выполняется равенство (А.17)  $\tau_{\text{н}} = \tau_{\text{обр}}$ . Значение  $\tau_{\text{обр}}^*$  рассчитывается по формуле (А.26)  $\tau_{\text{обр}}^* = (\tau_{\text{в}}^* + \tau_{\text{ОИ}}) \nu_1 / \nu_{\text{обр}}^* - \tau_{\text{н}}^*$ . Как видно из приведенных выражений, координаты  $(\tau_{\text{в}}^*; \tau_{\text{н}}^*; \nu_{\text{обр}}^*)$  не зависят от  $\mu_0$ .

А.7.7. Задача с двумя ограничениями  $g_2=0$  и  $g_3=0$ . Из ограничения (А.24) в виде равенства следует выражение для вычисления значения  $\tau_{\text{в}} = \tau_{\text{ЛП}} - \tau_{\text{ОИ}}$ . Из ограничения (А.25) в виде равенства следует значение  $\nu_{\text{обр}} = \nu_{\text{max}}$ . Фактически, в данной задаче оптимизируется участок движения "назад" при заданном пути  $\alpha_{\text{н}} = \tau_{\text{ЛП}} \nu_1$  и скорости  $\nu_{\text{обр}} = \nu_{\text{max}}$ . Последнее обстоятельство упрощает данную задачу по сравнению с задачей п.А.4. В результате преобразований (см. прил. Г) получено уравнение (приравненная нулю частная производная целевой функции по  $\tau_{\text{н}}$ ), найдена формула для расчета значения  $\tau_{\text{н}}$

$$\tau_{\text{н}} = \frac{\sqrt{2} \nu_{\text{max}}}{\mu_0}.$$

Решение  $(\tau_{\text{в}}^*; \tau_{\text{н}}^*; \nu_{\text{обр}}^*)$ , вычисленное указанным образом, доставляет минимум целевой функции  $Q$ . Заметим, что для данной задачи справедливо неравенство  $\tau_{\text{н}} \neq \tau_{\text{обр}}$ , т.е. не выполняется равенство (А.17)  $\tau_{\text{н}} = \tau_{\text{обр}}$ . Значение  $\tau_{\text{обр}}^*$  рассчитывается по формуле (А.26)  $\tau_{\text{обр}}^* = (\tau_{\text{в}}^* + \tau_{\text{ОИ}}) \nu_1 / \nu_{\text{обр}}^* - \tau_{\text{н}}^*$ . Приведенное выражение для расчета  $\tau_{\text{н}}$  повторяет такую же формулу для расчета  $\tau_{\text{н}}$  в задаче с одним ограничением  $g_3=0$  (п.А.7.4).

А.7.8. Задача с тремя ограничениями  $g_1=0$ ,  $g_2=0$  и  $g_3=0$ . Из ограничения (А.24) в виде равенства следует выражение для вычисления значения  $\tau_{\text{в}} = \tau_{\text{ЛП}} - \tau_{\text{ОИ}}$ . Из ограничения (А.25) в виде равенства следует значение  $\nu_{\text{обр}} = \nu_{\text{max}}$ .

Выразив из (А.11) и (А.12)  $\tau_{обр}$ , получим

$$\begin{aligned}\tau_{обр} &= (\tau_{в} + \tau_{ОИ}) v_1 / v_{обр} - \tau_{н}, \\ \tau_{обр} &= \tau_{ПЦ} - \tau_{н} - (2\tau_{в} + \tau_{ОИ} + 2\tau_{н}).\end{aligned}$$

Приравняв правые части, получим выражение для  $\tau_{н}$

$$\tau_{н} = (2\tau_{в} + \tau_{ОИ} + \tau_{н} - \tau_{ПЦ}) - (\tau_{в} + \tau_{ОИ}) v_1 / v_{обр}.$$

Фактически, в данной задаче не производится оптимизация как таковая – координаты  $(\tau_{в}^*; \tau_{н}^*; v_{обр}^*)$  находятся из ограничений-равенств. Для данной задачи справедливо неравенство  $\tau_{н} \neq \tau_{обр}$ , т.е. не выполняется равенство (А.17)  $\tau_{н} = \tau_{обр}$ . Значение  $\tau_{н}^*$  рассчитывается по формуле (А.26)  $\tau_{обр}^* = (\tau_{в}^* + \tau_{ОИ}) v_1 / v_{обр}^* - \tau_{н}^*$ .

А.7.9. Задачи с учетом ограничения по ускорению при движении "вперед". Рассмотрим задачи А.7.1-А.7.8 с учетом ограничения по ускорению  $\dot{v}_{max}$  (А.37). Обратив его в равенство, получим  $\tau_{в} = v_1 / \dot{v}_{max}$ , что предопределяет детерминированными все параметры участка тахограммы при движении "вперед" и сводит всю задачу к задаче оптимизации участка движения "назад" при разных сочетаниях ограничений.

Задача А.7.1 с учетом  $\tau_{в} = v_1 / \dot{v}_{max}$  становится аналогичной задаче А.7.3. В ней оптимизируется участок движения "назад" при заданном пути  $\alpha_{н} = v_1(\tau_{в} + \tau_{ОИ})$  и неограниченной скорости  $v_{обр}$ . Значения  $\tau_{н}$  и  $v_{обр}$  рассчитываются по формулам  $\tau_{н} = \sqrt{\frac{v_1(\tau_{в} + \tau_{ОИ})}{\mu_0 \sqrt{2}}}$  и  $v_{обр} = \sqrt{\frac{\mu_0 v_1(\tau_{в} + \tau_{ОИ})}{2\sqrt{2}}}$ . Заметим, что на практике очень мала вероятность выполнения условий, соответствующих данной задаче.

Задача А.7.2 с учетом  $\tau_{в} = v_1 / \dot{v}_{max}$  становится аналогичной задаче А.7.5. В ней оптимизируется участок движения "назад" при заданном пути  $\alpha_{н} = v_1(\tau_{в} + \tau_{ОИ})$ ,

неограниченной скорости  $v_{обр}$  и заданном времени рабочего цикла  $\tau_{рц}$ . Значения  $\tau_n$  и  $v_{обр}$  рассчитываются по формулам  $v_{обр} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(\tau_b + \tau_{ои})v_1}{\tau_{рц} - 2\tau_b - \tau_{ои} - \tau_{п}}$  и  $\tau_n = (\tau_{рц} - \tau_{п} - \tau_{ои} - 2\tau_b) - (\tau_b + \tau_{ои})v_1/v_{обр}$ .

Задача А.7.3 с учетом  $\tau_b = v_1/\dot{v}_{max}$  не является корректной и поэтому не подлежит рассмотрению, т.к. в ней одна и та же величина вычисляется по двум разным формулам (в общем случае с разными результатами). По сути, значения  $(\tau_{лп} - \tau_{ои})$  и  $(v_1/\dot{v}_{max})$  ограничивают величину  $\tau_b$  сверху и снизу соответственно, т.е. мы можем записать  $v_1/\dot{v}_{max} \leq \tau_b \leq \tau_{лп} - \tau_{ои}$ . Таким образом, одно из ограничений должно являться неравенством (кроме случая  $\tau_b = \tau_{лп} - \tau_{ои} = v_1/\dot{v}_{max}$ ). По той же причине не подлежат рассмотрению задачи А.7.5, А.7.7 и, тем более, А.7.8.

Задача А.7.4 с учетом  $\tau_b = v_1/\dot{v}_{max}$  становится аналогичной задаче А.7.7. В ней оптимизируется участок движения "назад" при заданном пути  $\alpha_n = v_1(\tau_b + \tau_{ои})$  и скорости  $v_{обр} = v_{max}$ . Значение  $\tau_n$  рассчитывается по той же формуле  $\tau_n = \frac{\sqrt{2}v_{max}}{\mu_0}$ .

Задача А.7.6 с учетом  $\tau_b = v_1/\dot{v}_{max}$  становится аналогичной задаче А.7.8. В ней координаты  $(\tau_b^*; \tau_n^*; v_{обр}^*)$  находятся из ограничений-равенств. Значение  $\tau_n$  рассчитывается по той же формуле  $\tau_n = (2\tau_b + \tau_{ои} + \tau_{п} - \tau_{рц}) - (\tau_b + \tau_{ои})v_1/v_{обр}$ .

## А.8. Выводы

Рассмотрение общей задачи нелинейного программирования (А.1-А.5), состоящей в определении точки  $(\tau_{вр}^*; \tau_{вт}^*; \tau_{нр}^*; \tau_{обр}^*; \tau_{нт}^*; v_{обр}^*)$ , координаты которой соответствуют минимальному значению  $Q_{min}$  целевой функции, положительны и удовлетворяют ограничениям, с применением метода множителей Лагранжа позволило выявить следующие закономерности.

А.8.1. Получены равенства  $\tau_{вр} = \tau_{вт}$  и  $\tau_{нр} = \tau_{нт}$ , которые не зависят от существования ограничений (А.2-А.5) в любых сочетаниях. В связи с этим приняты

обозначения времени ускоренного и замедленного движения НО "вперед" как  $\tau_v$  ( $\tau_v = \tau_{vp} = \tau_{vt}$ ) и времени ускоренного и замедленного движения НО "назад" как  $\tau_n$  ( $\tau_n = \tau_{np} = \tau_{nt}$ ). Таким образом, оптимальными являются тахограммы с симметричными участками для движения "вперед" и "назад". При этом выполняются равенства соответствующих ускорений  $\dot{v}_v = \dot{v}_{vp} = \dot{v}_{vt}$  и  $\dot{v}_n = \dot{v}_{np} = \dot{v}_{nt}$ , а токи  $i_{vp} \neq i_{vt}$  и  $i_{np} \neq i_{nt}$  отличаются между собой на величину  $\mu_0$ . Независимость равенств  $\tau_{vp} = \tau_{vt}$  и  $\tau_{np} = \tau_{nt}$  от ограничения (А.2) свидетельствует об оптимальности симметричных тахограмм для движения "вперед" и "назад" при рассмотрении их по отдельности, т.к. ограничение (А.2) связывает указанные тахограммы по проходимому пути. Независимость равенств  $\tau_{vp} = \tau_{vt}$  и  $\tau_{np} = \tau_{nt}$  от ограничений (А.3-А.5) означает, что симметричные тахограммы будут являться оптимальными как внутри области, ограниченной (А.3-А.5), так и на ее границах. Равенства  $\tau_v = \tau_{vp} = \tau_{vt}$  и  $\tau_n = \tau_{np} = \tau_{nt}$  позволили упростить исходную задачу (А.1-А.5) к задаче (А.10-А.14), сократив количество переменных. Задача (А.10-А.14) состоит в определении точки  $(\tau_v^*; \tau_n^*; \tau_{обр}^*; v_{обр}^*)$ .

А.8.2. При рассмотрении задачи (А.10-А.14) получено, что в случае соблюдения ограничения  $v_{обр} - v_{max} < 0$  и независимо от существования ограничений (А.12) и (А.13) в любых сочетаниях, справедливо равенство (А.17)  $\tau_n = \tau_{обр}$ . Соблюдение ограничения  $v_{обр} - v_{max} < 0$  означает отсутствие ограничения (А.14) в задаче (А.10-А.14). Из равенства (А.17) следует, что оптимальным является участок движения "назад", который состоит из трех равных по времени отрезков – разгона ( $\tau_{np} = \tau_n$ ), движения с постоянной скоростью ( $\tau_{обр} = \tau_n$ ) и торможения ( $\tau_{nt} = \tau_n$ ). Из выражений (А.18) и (А.19) следует, что в общем случае  $\dot{v}_v \neq \dot{v}_n$ , что приводит к усложненной процедуре реверсирования привода НО на пятом этапе рабочего цикла ЛП. Кроме того, независимо от существования ограничений (А.12-А.14) в любых сочетаниях, справедливы неравенства (А.20)  $\dot{v}_n \geq \frac{\mu_0}{\sqrt{2}}$  и (А.21)  $\dot{v}_v \geq \dot{v}_n$ .

А.8.3. Произведено упрощение задачи (А.10-А.14) путем исключения ограничения (А.11) и переменной  $\tau_{обр}$ . Получена задача (А.22-А.25), состоящая в

определении точки  $(\tau_{\text{в}}^*; \tau_{\text{н}}^*; \nu_{\text{обр}}^*)$ , которая минимизирует целевую функцию. Время  $\tau_{\text{обр}}^*$  рассчитывается по формуле (А.26).

А.8.4. Рассмотрена задача (А.31-А.32) минимизации потерь энергии отдельно для участка тахограммы, соответствующего движению "назад" при заданном перемещении  $\alpha_{\text{н}}$ . Получены равенства  $\tau_{\text{нр}} = \tau_{\text{нт}} = \tau_{\text{н}}$  и  $\tau_{\text{н}} = \tau_{\text{обр}}$ , которые повторяют равенства, полученные при рассмотрении полной задачи.

А.8.5. Рассмотрена задача минимизации потерь энергии отдельно для участка тахограммы, соответствующего движению "вперед" при заданной скорости  $\nu_1$  движения НО и времени  $\tau_{\text{ОИ}}$  обработки ОИ без ограничений (режим "минимум-минимум") на координаты точки  $(\tau_{\text{ао}}^*; \tau_{\text{вт}}^*)$ . Получено, что  $\tau_{\text{вр}} = \tau_{\text{вт}} = \tau_{\text{в}}$  и  $\dot{\nu}_{\text{в}} = \mu_0$ , то есть при разгоне НО минимум потерь в приводе достигается при токе  $i_{\text{вр}} = 2\mu_0$ , а при торможении НО – при токе  $i_{\text{вт}} = 0$  (торможение происходит только за счет момента сопротивления  $\mu_0$ ), что совпадает с аналогичными результатами, полученными в [8].

А.8.6. Задача (А.22-А.25) дополнена ограничениями (А.37) и (А.38) на  $\tau_{\text{в}}$  и  $\tau_{\text{н}}$  по максимально допустимому ускорению НО, учитывающему ограничение по максимально допустимому моменту двигателя.

А.8.7. В качестве решения задачи нелинейного программирования, описанной в пп.А.2-А.3, получены решения для восьми задач с различными сочетаниями трех ограничений-равенств ( $g_1=0, g_2=0, g_3=0$ ), построенных на основе задачи (А.22-А.25). При нахождении решений задачи оптимизации целевой функции (А.22) без ограничений (А.23-А.25), а также задачи оптимизации целевой функции (А.22) с ограничением (А.23) в виде равенства возникает необходимость в применении численных методов. В остальных случаях получены формулы для расчета координат оптимальной точки, соответствующей  $Q_{\text{min}}$ . Описанные задачи рассмотрены также с учетом ограничения по ускорению при движении "вперед", для корректных случаев получены соответствующие формулы.