УДК 539.3

ІНТЕНСИВНІСТЬ ДИНАМІЧНОЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У ЗАДАЧАХ СТАЛИХ КОЛИВАНЬ КУСКОВО-НЕОДНОРІДНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ОБЛАСТЕЙ

Л.П. Вовк, *д-р техн. наук;*
К.С. Кисіль, *асистент,*
Автомобільно-дорожній інститут Донецького національного технічного університету, м. Горлівка

Розглядається задача динамічної термопружної деформації складених тіл, переріз яких має сингулярні точки, що зумовлює концентрацію напружень, яка і визначає міцність деталі в цілому. Проведено аналіз особливостей напружено-деформованого стану в околі нерегулярних точок границі області з урахуванням впливу температурних напружень на локальну концентрацію напружень. Аналітичний розв'язок задачі будується за допомогою модифікації методу суперпозиції, що зводить задачу до системи сингулярних інтегральних рівнянь з відомою асимптотикою невідомих.

Ключові слова: *концентрація напружень, напружено-деформований стан, метод суперпозиції.*

Рассматривается задача динамической термоупругой деформации составных тел, сечение которых имеет сингулярные точки, что обуславливает концентрацию напряжений, которая и определяет прочность детали в целом. Проведен анализ особенностей напряженно-деформированного состояния в окрестности нерегулярных точек границы области с учетом влияния температурных напряжений на локальную концентрацию напряжений. Аналитическое решение задачи строится с помощью модификации метода суперпозиции, которая сводит задачу к системе сингулярных интегральных уравнений с известной асимптотикой неизвестных.

Ключевые слова*: концентрация напряжений, напряженно-деформированное состояние, метод суперпозиции.*

ВСТУП

Визначення характеру поведінки напружено-деформованого стану в околі нерегулярних точок зовнішніх і внутрішніх границь кусково-неоднорідних тіл дозволяє при чисельному аналізі найкращим чином апроксимувати розв'язки і побудувати інтегральний алгоритм його знаходження. Питанням дослідження розв'язків задач теорії пружності в околі кутових точок, які належать лініям поділу двох різнорідних середовищ присвячено досить багато наукових публікацій, серед яких відзначимо роботи [1-4]. Характер локальної особливості за напруженнями у сингулярних точках сполучення трьох і чотирьох середовищ, розглядалися у [5-6], отримані у цих роботах результати дають змогу, по-перше, поширити відомий метод суперпозиції [7] на кусково-неоднорідні і термопружні області і, по-друге, дослідити вплив термічних параметрів на локальну концентрацію напружень у нерегулярних зонах області.

МЕТА РОБОТИ

За методом суперпозиції розв'язок задачі подається у вигляді суми декількох послідовних частинних розв'язків, які мають конкретні властивості симетрії. При цьому передбачається, що поверхня пружного тіла утворена частинами координатних поверхонь різних родин в ортогональних системах координат.

Метою даної роботи є поширення алгоритму методу суперпозиції для розрахунку термопружних кусково-неоднорідних тіл з визначенням характеру динамічного НДС в околі сингулярних кутових точок областей, застосування розробленої схеми для чисельно-аналітичного розрахунку параметрів локальної особливості (ПЛО) за напруженнями і аналіз впливу температурних ефектів на ПЛО. При цьому якщо враховувати локальний характер концентрації напружень та ПЛО, можна поширити отримані нижче результати на відмінні від розглянутих у даній роботі геометричні конфігурації областей.

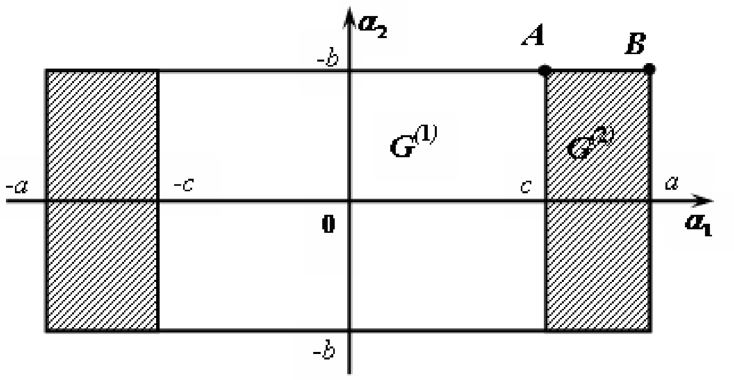

Рисунок 1 - Геометрія перетину тіла

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай переріз деталі – деяка прямокутна область, яка займає в системі координат $\alpha_1 O \alpha_2$ область $D = G^{(1)} \cup G^{(2)}$ (рис.1). Області $G^{(m)}$ $(m = 1,2)$ з'єднано одна з одною. Вони є ізотропними, в загальному випадку мають різні пружні константи та визначаються нерівностями

$$G^{(1)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1| \le c; |\alpha_2| \le b\},\ G^{(2)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a]; |\alpha_2| \le b\},$$

де α_1, α_2 – декартові координати.

Нехай на границі області $\alpha_1 = \pm a$, $\alpha_2 = \pm b$ задано нормальне навантаження інтенсивності $q_1(\alpha_1)$ та $q_2(\alpha_2)$ відповідно, що гармонійно змінюється в часі із частотою ω. Передбачається, що дана область має вільний теплообмін з навколишнім середовищем. Безрозмірні амплітудні характеристики переміщень $U_i(x, y), i = 1,2$ і приріст температури $\Theta(x, y)$ визначаються системою рівнянь зв'язаної термопружності в безрозмірних координатах для областей $G^{(1)}$ та $G^{(2)}$ відповідно [8]:

$$\frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right)\left(\frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial x} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_1^{(m)}$$

$$\frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right)\left(\frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial y} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_2^{(m)}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega i}{\chi^{(m)}} \cdot \Theta^{(m)} - \frac{\delta^{(m)} a^2 i \omega}{T_0} \cdot \left(\frac{\partial U_1^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial U_2^{(m)}}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1)$$

Тут були використані такі позначення:

$$x = \frac{\alpha_{(1)}}{a};\ y = \frac{\alpha_2}{a};\ U_1^{(m)} = \frac{\tilde{U}_1^{(m)}}{a};\ U_2^{(m)} = \frac{\tilde{U}_2^{(m)}}{a};\ \Theta^{(m)} = \frac{\tilde{\Theta}^{(m)}}{T_0};\ \sigma_{ij}^{(m)} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}^{(m)}}{\mu^{(m)}};$$

$$\tilde{\Theta}^{(m)} = T^{(m)} - T_0$$

$\tilde{U}_i^{(m)}(i,m = 1,2)$ – компоненти вектора переміщень; $\tilde{\Theta}^{(m)}$ – приріст температури; $T^{(m)}$ – абсолютна температура точок тіла; T_0 – температура тіла у недеформованому і ненапруженому стані; $\rho^{(m)}$ – щільність; $\lambda^{(m)}, \mu^{(m)}$ – параметри Ляме:

$$\gamma^{(m)} = \left(3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}\right) \cdot \alpha_t^{(m)};\ \delta^{(m)} = \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\lambda_0^{(m)}};\ \chi^{(m)} = \frac{\lambda_0^{(m)}}{c_\varepsilon^{(m)}},$$

де $\alpha_t^{(m)}$ – коефіцієнт лінійного термічного розширення; $\lambda_0^{(m)}$ – коефіцієнт теплопровідності; $c_\varepsilon^{(m)}$ – питома теплоємність при постійній деформації.

При формулюванні граничних умов, враховуючи симетрію області, розглянемо напружений стан частини області, розташованої у першій чверті. Вводимо локальну безрозмірну координату

$$\hat{x} = \frac{(\alpha_1 - c)}{a},\quad \hat{x} \in [0, \delta_2];\quad \delta_2 = 1 - \delta,\quad \delta = \frac{c}{a}$$

та безрозмірні амплітудні компоненти тензора напруги $\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$, пов'язані з переміщеннями законом Гука

$$\sigma_{11}^{(m)} = C_{11}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + C_{12}^{(m)} U_{2,2}^{(m)},\ \sigma_{22}^{(m)} = C_{12}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + C_{11}^{(m)} U_{2,2}^{(m)},\ \sigma_{12}^{(m)} = U_{1,2}^{(m)} + U_{2,1}^{(m)},$$

де $C_{11}^{(1)} = 2 + \dfrac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}}$, $C_{12}^{(m)} = C_{11}^{(m)} - 2$.

Таким чином, граничні умови задачі запишуться так в безрозмірному вигляді:

в області $\bar{G}^{(1)} = \{(x,y) : |x| \le \delta; |y| \le \eta\}$

$$\sigma_{1\beta}^{(1)}(\delta, y) = r_{21}\sigma_{1\beta}^{(2)}(0,y),\ U_\beta^{(1)}(\delta,y) = U_\beta^{(2)}(0,y);\ \sigma_{22}^{(1)}(x,\eta) = q_2^{(1)}(x),\ \sigma_{12}^{(1)}(x,\eta) = 0$$

$$\frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial x},\ \Theta^{(1)} = \Theta^{(2)},\ \frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial y} + a\frac{\alpha^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}}\Theta^{(1)} = 0$$

в області $\bar{G}^{(2)} = \{(\hat{x}, y) : 0 \le \hat{x} \le \delta_2; |y| \le \eta\}$ **(2)**

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q_1^{(2)}(y),\ \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0;\ \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x},\eta) = q_2^{(2)}(\hat{x}),\ \sigma_{12}^{(2)}(x,\eta) = 0$$

$$\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial y} + a\frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}}\Theta^{(2)} = 0,\ \frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial x} + a\frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}}\Theta^{(2)} = 0,\ \text{де}\ q_\beta^{(m)} = \frac{q_\beta}{\mu^{(m)}},\ \eta = \frac{b}{a},\ r_{12} = \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}},$$

$\beta = 1,2$; $\lambda_1^{(m)}$ - заведений коефіцієнт теплопровідності; $\alpha^{(m)}$ - коефіцієнт тепловіддачі.

РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СУПЕРПОЗИЦІЇ

Маємо такі вирази для загального розв'язку в областях $\bar{G}^{(m)}\left(m=1,2\right)$ [4]:

$$U_1^{(1)} = \bar{H}^{(1)} sh\left(t^{(1)}x\right)\cos\alpha^{(1)}\left(y-\eta\right) + \bar{R}^{(1)} ch\left(r^{(1)}y\right)\sin\chi^{(1)}\left(x-\delta\right)$$

$$U_2^{(1)} = H^{(1)} ch\left(t^{(1)}x\right)\sin\alpha^{(1)}\left(y-\eta\right) + R^{(1)} sh\left(r^{(1)}y\right)\cos\chi^{(1)}\left(x-\delta\right)$$

$$\Theta^{(1)} = K^{(1)} ch\left(t^{(1)}x\right)\cos\alpha^{(1)}\left(y-\eta\right) + L^{(1)} ch\left(r^{(1)}y\right)\cos\chi^{(1)}\left(x-\delta\right)$$

$$U_1^{(2)} = \left(\bar{H}^{(2)} sh\left(t^{(2)}\hat{x}\right) + \bar{Q}^{(2)} ch\left(t^{(2)}\hat{x}\right)\right)\cos\alpha^{(1)}\left(y-\eta\right) + \bar{R}^{(2)} ch\left(r^{(2)}y\right)\sin\chi^{(2)}\left(\hat{x}-\delta\right) \quad \mathbf{(3)}$$

$$U_2^{(2)} = \left(H^{(2)} ch\left(t^{(2)}\hat{x}\right) + Q^{(2)} sh\left(t^{(2)}\hat{x}\right)\right)\sin\alpha^{(1)}\left(y-\eta\right) + R^{(2)} sh\left(r^{(2)}y\right)\cos\chi^{(2)}\left(\hat{x}-\delta\right)$$

$$\Theta^{(2)} = \left(K^{(2)} ch\left(t^{(2)}\hat{x}\right) + M^{(2)} sh\left(t^{(2)}\hat{x}\right)\right)\cos\alpha^{(1)}\left(y-\eta\right) + L^{(2)} ch\left(r^{(2)}y\right)\cos\chi^{(2)}\left(\hat{x}-\delta\right)$$

Як значення параметрів $\alpha^{(1)}$, $\chi^{(m)}$ обираємо послідовності чисел [7]:

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{\eta},\ \chi_j^{(1)} = \frac{j\pi}{\delta},\ \chi_j^{(2)} = \frac{j\pi}{\delta_2},\ k=1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots$$

Підставляємо вирази **(3)** в системи рівнянь руху і теплопровідності **(1)** та **(2)**. Отримаємо дві системи однорідних рівнянь стосовно довільних сталих $\bar{H}^{(m)}$, $H^{(m)}$, $\bar{R}^{(m)}$, $R^{(m)}$, $\bar{Q}^{(m)}$, $Q^{(m)}$, $K^{(m)}$, $L^{(m)}$, $M^{(m)}$.

Позначимо через $t_{\alpha k}^{(m)}$ та $r_{\alpha j}^{(m)}$ – корені характеристичних рівнянь $\left(\alpha=1,2,3\right)$, отримані за умови існування нетривіального розв'язку двох отриманих однорідних систем рівнянь:

$$t_1^{(m)2} = \frac{\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\alpha^{(1)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + 2\alpha^{(1)2}\left(C_{11}^{(m)}-1\right) + S^{(m)}\right)}{2C_{11}^{(m)}}$$

$$t_2^{(m)2} = \alpha^{(1)2} - \Omega^{(m)2}$$

$$t_3^{(m)2} = \frac{\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\alpha^{(1)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + 2\alpha^{(1)2}\left(C_{11}^{(m)}-1\right) - S^{(m)}\right)}{2C_{11}^{(m)}}$$

$$r_1^{(m)2} = \frac{\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\chi^{(m)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + 2\chi^{(m)2}\left(C_{11}^{(m)}-1\right) + S^{(m)}\right)}{2C_{11}^{(m)}}$$

$$r_2^{(m)2} = \chi^{(m)2} - \Omega^{(m)2}$$

$$r_3^{(m)2} = \frac{\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\chi^{(m)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + 2\chi^{(m)2}\left(C_{11}^{(m)}-1\right) - S^{(m)}\right)}{2C_{11}^{(m)}},$$

де $S^{(m)2}=\Omega^{(m)4}+\Omega^{(m)2}\left(2\Omega_2^{(m)}+2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}-2\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)+\Theta_1^{(m)2}\Omega_1^{(m)2}+$

$+2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}+2\Omega_2^{(m)}\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)^2\Omega_2^{(m)2}+2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)2}+\Omega_2^{(m)2},$

де $\Theta_1^{(1)}=\dfrac{\gamma^{(1)}T_0}{\mu^{(1)}}$, $\Omega_1^{(1)}=\dfrac{\eta^{(1)}a^2 i\omega}{T_0}$, $\Omega_2^{(1)}=\dfrac{a^2 i\omega}{\chi^{(1)}}$, $i^2=-1$.

З аналізу систем однорідних рівнянь випливає, що сталі

$\bar{H}^{(m)}$, $H^{(m)}$, $\bar{R}^{(m)}$, $R^{(m)}$, $\bar{Q}^{(m)}$, $Q^{(m)}$, $K^{(m)}$, $L^{(m)}$, $M^{(m)}$

пов'язані співвідношеннями:

$\bar{H}_{k\alpha}^{(m)}=H_{k\alpha}^{(m)}P_{1\alpha k}^{(m)}$, $K_{k\alpha}^{(m)}=H_{k\alpha}^{(m)}P_{2\alpha k}^{(m)}$, $\bar{Q}_{k\alpha}^{(m)}=Q_{k\alpha}^{(m)}P_{1\alpha k}^{(m)}$, $M_{k\alpha}^{(m)}=Q_{k\alpha}^{(m)}P_{2\alpha k}^{(m)}$,
$\bar{R}_{j\alpha}^{(m)}=R_{j\alpha}^{(m)}B_{1\alpha j}^{(m)}$, $L_{j\alpha}^{(m)}=R_{j\alpha}^{(m)}B_{2\alpha j}^{(m)}$,

де $\alpha=1,2,3$.

$$P_{1\alpha k}^{(m)}=\frac{\alpha^{(1)}t_{\alpha k}\left(-t_{\alpha k}^2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)+\alpha^{(1)2}\left(C_{11}^{(m)}-1\right)+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}{\left(\begin{array}{l}t_{\alpha k}^4\left(C_{11}^{(m)}-1\right)+\left(\begin{array}{l}-\alpha^{(1)2}\left(C_{11}^{(m)}-1\right)+\Omega^{(m)2}-\\-t_{\alpha k}^2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}-\Omega_2^{(m)}-2\alpha^{(1)2}-\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\end{array}\right)+\\+\alpha^{(1)4}-\alpha^{(1)2}\Omega^{(m)2}+\Omega_2^{(m)}\alpha^{(1)2}-\Omega_2^{(m)}\Omega^{(m)2}\end{array}\right)}$$

$$P_{2\alpha k}^{(m)}=\frac{\Omega_1^{(m)}\left(-t_{\alpha k}^2+\alpha^{(1)2}-\Omega^{(m)2}\right)}{\alpha^{(1)}\left(-t_{\alpha k}^2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}$$

$$B_{1\alpha j}^{(m)}=\frac{\left(\begin{array}{l}2r_{\alpha j}^2\chi^{(m)2}-r_{\alpha j}^4+r_{\alpha j}^2\Omega_2^{(m)}+r_{\alpha j}^2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\chi^{(m)2}-r_{\alpha j}^4\left(C_{11}^{(m)}-1\right)+\\+r_{\alpha j}^2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}-\chi^{(m)4}-\\-\chi^{(m)2}\Omega_2^{(m)}+\Omega^{(m)2}\chi^{(m)2}-\Omega^{(m)2}r_{\alpha j}^2+\Omega^{(m)2}\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}r_{\alpha j}^2\end{array}\right)}{-r_{\alpha j}\chi^{(m)}\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\chi^{(m)2}-r_{\alpha j}^2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}$$

$$B_{2\alpha j}^{(m)}=\frac{\Omega_1^{(m)}\left(r_{\alpha j}^2-\chi^{(m)2}+\Omega^{(m)2}\right)}{r_{\alpha j}\left(\chi^{(m)2}\left(C_{11}^{(m)}-1\right)-r_{\alpha j}^2\left(C_{11}^{(m)}-1\right)+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}$$

Загальний розв'язок крайової задачі конструюємо окремо для кожної області $\bar{G}^{(m)}$:

– для області $\bar{G}^{(1)}$

$$U_1^{(1)}(x,y)=\sum_k\sum_{\beta=1}^{3}P_{1\beta k}^{(1)}H_{\beta k}^{(1)}sh\left(t_{\beta k}^{(1)}x\right)\cos\alpha_k^{(1)}(y-\eta)+$$
$$+\sum_j\sum_{\beta=1}^{3}B_{1\beta j}^{(1)}R_{\beta j}^{(1)}ch\left(r_{\beta j}^{(1)}y\right)\sin\chi_j^{(1)}(x-\delta)+H_0^{(1)}\sin l_1^{(1)}x;$$

$$U_2^{(1)}(x,y)=\sum_k\sum_{\beta=1}^{3}H_{\beta k}^{(1)}ch\left(t_{\beta k}^{(1)}x\right)\sin\alpha_k^{(1)}(y-\eta)+$$
$$+\sum_j\sum_{\beta=1}^{3}R_{\beta j}^{(1)}sh\left(r_{\beta j}^{(1)}y\right)\cos\chi_j^{(1)}(x-\delta)+R_0^{(1)}\sin l_1^{(1)}y;$$
$$\Theta^{(1)}(x,y)=\sum_k\sum_{\beta=1}^{3}P_{2\beta k}^{(1)}H_{\beta k}^{(1)}ch\left(t_{\beta k}^{(1)}x\right)\cos\alpha_k^{(1)}(y-\eta)+$$
$$+\sum_j\sum_{\beta=1}^{3}B_{2\beta j}^{(1)}R_{\beta j}^{(1)}ch\left(r_{\beta j}^{(1)}y\right)\cos\chi_j^{(1)}(x-\delta)+B_0^{(1)}\cos l_1^{(1)}x+C_0^{(1)}\cos l_1^{(1)}y;$$

– для області $\overline{G}^{(2)}$

$$U_1^{(2)}\left(\hat{x},y\right)=\sum_k\sum_{\beta=1}^{3}P_{1\beta k}^{(2)}\left(H_{\beta k}^{(2)}sh\left(t_{\beta k}^{(2)}\hat{x}\right)+Q_{\beta k}^{(2)}ch\left(t_{\beta k}^{(2)}\hat{x}\right)\right)\cos\alpha_k^{(1)}(y-\eta)+$$
$$+\sum_j\sum_{\beta=1}^{3}B_{1\beta j}^{(2)}R_{\beta j}^{(2)}ch\left(r_{\beta j}^{(2)}y\right)\sin\chi_j^{(2)}\left(\hat{x}-\delta\right)+H_0^{(2)}\sin l_2^{(2)}\hat{x}+Q_0^{(2)}\cos l_2^{(2)}\hat{x};$$
$$U_2^{(2)}\left(\hat{x},y\right)=\sum_k\sum_{\beta=1}^{3}\left(H_{\beta k}^{(2)}ch\left(t_{\beta k}^{(2)}\hat{x}\right)+Q_{\beta k}^{(2)}sh\left(t_{\beta k}^{(2)}\hat{x}\right)\right)\sin\alpha_k^{(1)}(y-\eta)+$$
$$+\sum_j\sum_{\beta=1}^{3}R_{\beta j}^{(2)}sh\left(r_{\beta j}^{(2)}y\right)\cos\chi_j^{(2)}\left(\hat{x}-\delta_2\right)+R_0^{(2)}\sin l_2^{(2)}y;$$
$$\Theta^{(2)}(x,y)=\sum_k\sum_{\beta=1}^{3}P_{2\beta k}^{(2)}\left(H_{\beta k}^{(2)}ch\left(t_{\beta k}^{(2)}\hat{x}\right)+Q_{\beta k}^{(2)}sh\left(t_{\beta k}^{(2)}\hat{x}\right)\right)\cos\alpha_k^{(1)}(y-\eta)+$$
$$+\sum_j\sum_{\beta=1}^{3}B_{2\beta j}^{(2)}R_{\beta j}^{(2)}ch\left(r_{\beta j}^{(2)}y\right)\cos\chi_j^{(2)}(x-\delta_2)+B_0^{(2)}\sin l_2^{(2)}\hat{x}+C_0^{(2)}\cos l_2^{(2)}\hat{x},$$

де $H_{\beta k}^{(m)}$, $R_{\beta k}^{(m)}$, $H_0^{(m)}$, $R_0^{(m)}$, $B_0^{(m)}$, $C_0^{(m)}$, $Q_0^{(m)}$ - довільні сталі, такі, що підлягають визначенню з граничних умов.

ФОРМУЛЮВАННЯ І РОЗВ'ЯЗАННЯ ДОПОМІЖНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Реалізуючи основний алгоритм модифікованого для випадку термопружної області методу суперпозиції [3-5] для отримання визначальної системи інтегральних рівнянь (СІР), розглянемо допоміжну крайову задачу, що характеризується такими умовами в околі границь прямокутного перерізу деталі:

– для області $\overline{G}^{(1)}$

$$U_1^{(1)}(\delta,y)=f_1(y),\ \sigma_{12}^{(1)}(\delta,y)=\phi_1(y),\ \left.\frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=\delta}=f_5(y),$$
$$U_2^{(1)}(x,\eta)=f_2(x),\ \sigma_{12}^{(1)}(x,\eta)=0,\ \left.\frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial y}\right|_{y=\eta}=f_8(x); \qquad \textbf{(4)}$$

– для області $\overline{G}^{(2)}$

$$U_1^{(2)}(0,y)=f_1(y),\ \sigma_{12}^{(2)}(0,y)=r_{12}\phi_1(y),\ \left.\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial\hat{x}}\right|_{\hat{x}=0}=f_5(y);$$

$$U_2^{(2)}\left(\hat{x},\eta\right)=f_4\left(\hat{x}\right),\ \sigma_{12}^{(2)}\left(\hat{x},\eta\right)=\mathbf{0},\ \left.\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial y}\right|_{y=\eta}=f_7\left(\hat{x}\right); \qquad \mathbf{(5)}$$

$$U_1^{(2)}\left(\delta_2,y\right)=f_3\left(y\right),\ \sigma_{12}^{(2)}\left(\delta_2,y\right)=\mathbf{0},\ \left.\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial\hat{x}}\right|_{\hat{x}=\delta_2}=f_6\left(y\right);$$

$f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4\left(\hat{x}\right)$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7\left(\hat{x}\right)$, $f_8(x)$, $\phi_1(y)$ – невідомі допоміжні функції.

Допоміжна крайова задача **(4)**, **(5)** не відповідає, як правило, початковій граничній задачі, але припускає аналітичне рішення і дозволяє, по-перше, задовольнити частину початкових граничних умов і, по-друге, виразити усі характеристики початкової задачі через коефіцієнти Фур'є невідомих функцій $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4\left(\hat{x}\right)$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7\left(\hat{x}\right)$, $f_8(x)$, $\phi_1(y)$.

Після визначення констант $H_{\beta k}^{(m)}$ та $R_{\beta k}^{(m)}$ через коефіцієнти Фур'є f_{1k}, f_{2j}, f_{3k}, f_{4j}, f_{5k}, f_{6k}, f_{7j}, f_{8j}, φ_{1k} введених функцій $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4\left(\hat{x}\right)$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7\left(\hat{x}\right)$, $f_8(x)$, $\phi_1(y)$ отримуємо компоненти вектора переміщень U_1,U_2 і температуру Θ. Наприклад, в області $\bar{G}^{(1)}$ вони мають вигляд

$$U_1^{(1)}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_{1k}\left(\left(-\Delta_1^{(1)}\right)\frac{sh\left(t_1^{(1)}x\right)}{sh\left(t_1^{(1)}\delta\right)}+2\Delta_2^{(1)}\frac{sh\left(t_2^{(1)}x\right)}{sh\left(t_2^{(1)}\delta\right)}+\Delta_3^{(1)}\frac{sh\left(t_3^{(1)}x\right)}{sh\left(t_3^{(1)}\delta\right)}\right)+\right.$$

$$+f_{5k}\left(\Delta_4^{(1)}\left(-\frac{sh\left(t_1^{(1)}x\right)}{sh\left(t_1^{(1)}\delta\right)}+\frac{sh\left(t_3^{(1)}x\right)}{sh\left(t_3^{(1)}\delta\right)}\right)\right)+$$

$$\left.+\phi_{1k}\left(\Delta_6^{(1)}\frac{sh\left(t_1^{(1)}x\right)}{sh\left(t_1^{(1)}\delta\right)}+\Delta_2^{(1)}\frac{sh\left(t_2^{(1)}x\right)}{sh\left(t_2^{(1)}\delta\right)}-\Delta_7^{(1)}\frac{sh\left(t_3^{(1)}x\right)}{sh\left(t_3^{(1)}\delta\right)}\right)\right]\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left[f_{2j}\left(\left(-\Delta_8^{(1)}\right)\frac{ch\left(r_1^{(1)}y\right)}{sh\left(r_1^{(1)}\eta\right)}-2\Delta_9^{(1)}\frac{ch\left(r_2^{(1)}y\right)}{sh\left(r_2^{(1)}\mu\right)}+\Delta_{10}^{(1)}\frac{ch\left(r_3^{(1)}y\right)}{sh\left(r_3^{(1)}\eta\right)}\right)+\right.$$

$$\left.+f_{8j}\left(\left(-\Delta_{11}^{(1)}\right)\frac{ch\left(r_1^{(1)}y\right)}{sh\left(r_1^{(1)}\eta\right)}+\Delta_{12}^{(1)}\frac{ch\left(r_3^{(1)}y\right)}{sh\left(r_3^{(1)}\eta\right)}\right)\right]\times\sin\chi_j^{(1)}\left(x-\delta\right)+f_{10}\frac{\sin k_1^{(1)}x}{\sin k_1^{(1)}\delta};$$

$$U_2^{(1)}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_{1k}\left(\left(\Delta_{13}^{(1)}\right)\frac{ch\left(t_1^{(1)}x\right)}{sh\left(t_1^{(1)}\delta\right)}-\Delta_{14}^{(1)}\frac{ch\left(t_2^{(1)}x\right)}{sh\left(t_2^{(1)}\delta\right)}-\Delta_{15}^{(1)}\frac{ch\left(t_3^{(1)}x\right)}{sh\left(t_3^{(1)}\delta\right)}\right)+\right.$$

$$+f_{5k}\left(-\Delta_{16}^{(1)}\frac{ch\left(t_1^{(1)}x\right)}{sh\left(t_1^{(1)}\delta\right)}+\Delta_{17}^{(1)}\frac{ch\left(t_3^{(1)}x\right)}{sh\left(t_3^{(1)}\delta\right)}\right)+$$

$$+\phi_{1k}\left(-\Delta_{18}^{(1)}\frac{ch\left(t_1^{(1)}x\right)}{sh\left(t_1^{(1)}\delta\right)}-\Delta_{19}^{(1)}\frac{ch\left(t_2^{(1)}x\right)}{sh\left(t_2^{(1)}\delta\right)}+\Delta_{20}^{(1)}\frac{ch\left(t_3^{(1)}x\right)}{sh\left(t_3^{(1)}\delta\right)}\right)\Bigg]\sin\alpha_k\left(y-\eta\right)+ \tag{6}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left[f_{2j}\left(\Delta_{21}^{(1)}\frac{sh\left(r_1^{(1)}y\right)}{sh\left(r_1^{(1)}\eta\right)}+\Delta_{22}^{(1)}\frac{sh\left(r_2^{(1)}y\right)}{sh\left(r_2^{(1)}\mu\right)}-\Delta_{23}^{(1)}\frac{sh\left(r_3^{(1)}y\right)}{sh\left(r_3^{(1)}\eta\right)}\right)+f_{8j}\left(\Delta_{24}^{(1)}\left(\frac{sh\left(r_1^{(1)}y\right)}{sh\left(r_1^{(1)}\eta\right)}-\frac{sh\left(r_3^{(1)}y\right)}{sh\left(r_3^{(1)}\eta\right)}\right)\right)\right]\times$$

$$\times\cos\chi_j^{(1)}\left(x-\delta\right)+f_{20}\frac{\sin k_1^{(1)}y}{\sin k_1^{(1)}\eta};$$

$$\Theta^{(1)}\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_{1k}\left(\left(\Delta_{25}^{(1)}\right)\frac{ch\left(t_1^{(1)}x\right)}{sh\left(t_1^{(1)}\delta\right)}-\Delta_{26}^{(1)}\frac{ch\left(t_3^{(1)}x\right)}{sh\left(t_3^{(1)}\delta\right)}\right)+f_{5k}\left(-\Delta_{27}^{(1)}\frac{ch\left(t_1^{(1)}x\right)}{sh\left(t_1^{(1)}\delta\right)}+\Delta_{28}^{(1)}\frac{ch\left(t_3^{(1)}x\right)}{sh\left(t_3^{(1)}\delta\right)}\right)+\right.$$

$$\left.+\phi_{1k}\left(-\Delta_{33}^{(1)}\frac{ch\left(t_1^{(1)}x\right)}{sh\left(t_1^{(1)}\delta\right)}+\Delta_{34}^{(1)}\frac{ch\left(t_3^{(1)}x\right)}{sh\left(t_3^{(1)}\delta\right)}\right)\right]\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left[f_{2j}\left(\Delta_{29}^{(1)}\frac{ch\left(r_1^{(1)}y\right)}{sh\left(r_1^{(1)}\eta\right)}-\Delta_{30}^{(1)}\frac{ch\left(r_3^{(1)}y\right)}{sh\left(r_3^{(1)}\eta\right)}\right)+f_{8j}\left(\Delta_{31}^{(1)}\frac{ch\left(r_1^{(1)}y\right)}{sh\left(r_1^{(1)}\eta\right)}-\Delta_{32}^{(1)}\frac{ch\left(r_3^{(1)}y\right)}{sh\left(r_3^{(1)}\eta\right)}\right)\right]\times$$

$$\times\cos\chi_j^{(1)}\left(x-\delta\right)-f_{30}\frac{\cos k_1^{(1)}x}{k_1^{(1)}\sin k_1^{(1)}\delta}-f_{40}\frac{\cos k_1^{(1)}y}{k_1^{(1)}\sin k_1^{(1)}\eta},$$

де, наприклад,

$$\Delta_{13}^{(m)}=\frac{\begin{array}{c}\alpha_k\left(\Omega^{(m)2}-2\alpha_k^2\right)\left(\Omega^{(m)2}-\alpha_k^2+t_{3k}^{(2)2}\right)\times\\ \times\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\alpha_k^2-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)t_{1k}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\end{array}}{\Omega^{(m)2}t_{1k}^{(2)}\left(t_{1k}^{(2)2}-t_{3k}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega^{(m)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)},$$

$$\Delta_{14}^{(m)}=\frac{2\alpha_k t_{2k}}{\Omega^{(m)2}},$$

$$\Delta_{15}^{(m)}=\frac{\begin{array}{c}\alpha_k\left(\Omega^{(m)2}-2\alpha_k^2\right)\left(\Omega^{(m)2}-\alpha_k^2+t_{1k}^{(2)2}\right)\times\\ \times\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\alpha_k^2-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)t_{3k}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\end{array}}{\Omega^{(m)2}t_{3k}^{(2)}\left(t_{1k}^{(2)2}-t_{3k}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega^{(m)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)},$$

$$\Delta_{16}^{(m)}=\frac{\begin{array}{c}\alpha_k\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\alpha_k^2-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)t_{1k}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\times\\ \times\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\alpha_k^2-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)t_{3k}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\end{array}}{\Omega_1^{(m)}t_{1k}^{(2)}\left(t_{1k}^{(2)2}-t_{3k}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega^{(m)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)},$$

$$\Delta_{17}^{(m)} = \frac{\begin{gathered}\alpha_k\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\alpha_k^2-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)t_{1k}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\times\\ \times\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\alpha_k^2-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)t_{3k}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\end{gathered}}{\Omega_1^{(m)}t_{3k}^{(2)}\left(t_{1k}^{(2)2}-t_{3k}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega^{(m)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)},$$

$$\Delta_{18}^{(m)} = \frac{\alpha_k^2\left(\Omega^{(m)2}-\alpha_k^2+t_{3k}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\alpha_k^2-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)t_{1k}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}{\Omega^{(m)2}t_{1k}^{(2)}\left(t_{1k}^{(2)2}-t_{3k}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega^{(m)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)},$$

$$\Delta_{19}^{(m)} = \frac{t_{2k}}{\Omega^{(m)2}},$$

$$\Delta_{20}^{(m)} = \frac{\alpha_k^2\left(\Omega^{(m)2}-\alpha_k^2+t_{1k}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\alpha_k^2-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)t_{3k}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)}{\Omega^{(m)2}t_{3k}^{(2)}\left(t_{1k}^{(2)2}-t_{3k}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega^{(m)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)},$$

$$\Delta_{21}^{(m)} = \frac{\begin{gathered}\left(\chi_j^{(m)2}+r_{2j}^{(2)2}\right)\left(-\chi_j^{(m)2}+\Omega^{(m)2}+r_{3j}^{(2)2}\right)\times\\ \times\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\chi_j^{(m)2}-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)r_{1j}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\end{gathered}}{\left(\chi_j^{(m)2}-r_{2j}^{(2)2}\right)\left(r_{1j}^{(2)2}-r_{3j}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega^{(m)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)},$$

$$\Delta_{22}^{(m)} = \frac{2\chi_j^{(m)2}}{\Omega^{(m)2}},$$

$$\Delta_{23}^{(m)} = \frac{\begin{gathered}\left(\chi_j^{(m)2}+r_{2j}^{(2)2}\right)\left(-\chi_j^{(m)2}+\Omega^{(m)2}+r_{1j}^{(2)2}\right)\times\\ \times\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\chi_j^{(m)2}-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)r_{3j}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\end{gathered}}{\left(\chi_j^{(m)2}-r_{2j}^{(2)2}\right)\left(r_{1j}^{(2)2}-r_{3j}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega^{(m)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)},$$

$$\Delta_{24}^{(m)} = \frac{\begin{gathered}\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\chi_j^{(m)2}-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)r_{1j}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\times\\ \times\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\chi_j^{(m)2}-\left(C_{11}^{(m)}-1\right)r_{3j}^{(2)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)\end{gathered}}{\Omega_1^{(m)}\left(r_{1j}^{(2)2}-r_{3j}^{(2)2}\right)\left(\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega^{(m)2}+\left(C_{11}^{(m)}-1\right)\Omega_2^{(m)}+\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}\right)},$$

$f_{10}, f_{1k}, f_{20}, f_{2j}, f_{30}, f_{3k}, f_{40}, f_{4j}, f_{50}, f_{5j}, f_{60}, f_{6k}, f_{7j}, f_{8j}, \varphi_{1k}$ – коефіцієнти Фур'є відповідних функцій.

ВИВЕДЕННЯ ВИЗНАЧАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ (СІР)

Використовуючи невраховані граничні умови з (2), а саме:

$$U_2^{(1)}(\delta, y) = U_2^{(2)}(0, y), \quad \Theta^{(1)}\Big|_{x=\delta} = \Theta^{(2)}\Big|_{\hat{x}=0}, \quad \sigma_{11}^{(1)}(\delta, y) = \sigma_{11}^{(2)}(0, y),$$

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q\,,\ \frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial y} + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0\,,\ \sigma_{22}^{(1)}(x,\eta) = q\,,\ \frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial x} + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0\,,$$

$$\sigma_{22}^{(2)}\left(\hat{x},\eta\right) = q\,,\ \frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial x} + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0\,,\ \sigma_{22}^{(2)}\left(\hat{x},\eta\right) = q\,,$$

зведемо досліджувану задачу до розв'язку такої системи інтегральних рівнянь відносно функцій $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4\left(\hat{x}\right)$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7\left(\hat{x}\right)$, $f_8(x)$, $\phi_1(y)$:

$$M_{k1}\phi_1 + \sum_{r=1}^{8} L_{kr} f_r = Q_k\,,\ \text{де}\ Q_k = q_k\,,\ k = 1,2,\ldots,6\,,\ r = 1,2,\ldots,8\,;$$

$$f_6 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0\,,\ f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0\,,\ f_8 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0\,,\ \text{де}\ T^{(m)} = \frac{\alpha^{(m)}}{\lambda_1^{(m)}}a\,,\ m = 1,2\,.$$

Наприклад, для першого рівняння маємо:

$$L_{11}f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k}(\Delta_{13}^{(1)} cth\left(t_{1k}^{(1)}\delta\right) + \Delta_{13}^{(2)} cth\left(t_{1k}^{(2)}\delta_2\right) - \Delta_{14}^{(1)} cth\left(t_{2k}^{(1)}\delta\right) - \Delta_{14}^{(2)} cth\left(t_{2k}^{(2)}\delta_2\right) -$$

$$-\Delta_{15}^{(1)} cth\left(t_{3k}^{(1)}\delta\right) - \Delta_{15}^{(2)} cth\left(t_{3k}^{(2)}\delta_2\right)\Big)\sin\alpha_k\,(y-\eta),$$

$$L_{12}f_2 = \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j}\left(\Delta_{21}^{(1)}\frac{sh\left(r_{1j}^{(1)}y\right)}{sh\left(r_{1j}^{(1)}\eta\right)} + \Delta_{22}^{(1)}\frac{sh\left(r_{2j}^{(1)}y\right)}{sh\left(r_{2j}^{(1)}\eta\right)} - \Delta_{23}^{(1)}\frac{sh\left(r_{3j}^{(1)}y\right)}{sh\left(r_{3j}^{(1)}\eta\right)}\right) + f_{20}\frac{\sin k_1^{(1)}y}{\sin k_1^{(1)}\eta}\,, \tag{7}$$

$$L_{14}f_4 = \sum_{j=1}^{\infty} f_{4j}\left(-\Delta_{21}^{(2)}\frac{sh\left(r_{1j}^{(2)}y\right)}{sh\left(r_{1j}^{(2)}\eta\right)} - \Delta_{22}^{(2)}\frac{sh\left(r_{2j}^{(2)}y\right)}{sh\left(r_{2j}^{(2)}\eta\right)} + \Delta_{23}^{(2)}\frac{sh\left(r_{3j}^{(2)}y\right)}{sh\left(r_{3j}^{(2)}\eta\right)}\right)\cos\chi_j^{(2)}\delta_2 - \quad f_{40}\frac{\sin k_1^{(2)}y}{\sin k_1^{(2)}\eta}\,,$$

$$L_{15}f_5 = \sum_{k=1}^{\infty} f_5\left(-\Delta_{16}^{(1)} cth\left(t_{1k}^{(1)}\delta\right) - \Delta_{16}^{(2)} cth\left(t_{1k}^{(2)}\delta\right) + \Delta_{17}^{(1)} cth\left(t_{3k}^{(1)}\delta\right) + \Delta_{17}^{(2)} cth\left(t_{3k}^{(2)}\delta\right)\right)\sin\alpha_k\,(y-\eta)\,,$$

$$L_{17}f_7 = \sum_{j=1}^{\infty} f_{7j}\left(-\Delta_{24}^{(2)}\frac{sh\left(r_{1j}^{(2)}y\right)}{sh\left(r_{1j}^{(2)}\eta\right)} + \Delta_{24}^{(2)}\frac{sh\left(r_{3j}^{(2)}y\right)}{sh\left(r_{3j}^{(2)}\eta\right)}\right)\cos\chi_j^{(2)}\delta_2\,,$$

$$L_{18}f_8 = \sum_{j=1}^{\infty} f_{7j}\left(\Delta_{24}^{(1)}\frac{sh\left(r_{1j}^{(1)}y\right)}{sh\left(r_{1j}^{(1)}\eta\right)} - \Delta_{24}^{(1)}\frac{sh\left(r_{3j}^{(1)}y\right)}{sh\left(r_{3j}^{(1)}\eta\right)}\right),$$

$$M_{11}\Phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{1k}(-\Delta_{18}^{(1)} cth\left(t_{1k}^{(1)}\delta\right) - \Delta_{18}^{(2)} cth\left(t_{1k}^{(2)}\delta_2\right) - \Delta_{19}^{(1)} cth\left(t_{2k}^{(1)}\delta\right) - \Delta_{19}^{(2)} cth\left(t_{2k}^{(2)}\delta_2\right) +$$

$$+\Delta_{20}^{(1)} cth\left(t_{3k}^{(1)}\delta\right) + \Delta_{20}^{(2)} cth\left(t_{3k}^{(2)}\delta_2\right)\Big)\sin\alpha_k\,(y-\eta).$$

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ НДС У КУТОВИХ ТОЧКАХ ПЕРЕРІЗУ

Проведемо дослідження розв'язку СІР у кутових точках областей $\overline{G}^{(m)}$. Це дозволить визначити асимптотику коефіцієнтів Фур'є невідомих функцій у випадку, коли $k \to \infty$ та $j \to \infty$. Відповідно до алгоритму, наведеного у [4], припустимо, що функції $\varphi_1(\xi)$, $f_{5k}(y)$, $f_{7j}(x)$, $f_{8j}(x)$ мають особливість у кутовій точці стику областей $A(\delta,\eta)$;

$$\phi_1(\xi) = \Phi_1^A (\eta - \xi)^{\alpha - 1}, \ \xi \to \eta; \ f_5(\xi) = F_5^A (\eta - \xi)^{\beta - 1}, \ \xi \to \eta,$$
$$f_7(\xi) = F_7^A \xi^{\beta - 1}, \ \xi \to 0; \ f_8(\xi) = F_8^A (\delta - \xi)^{\beta - 1}, \ \xi \to \delta, \tag{8}$$

а функції $f_i(\xi)$ неперервні у своїх областях визначення, але їх похідні мають розрив у кутових точках. В околі точки $A(\delta, \eta)$

$$f_1'(\xi) = F_1^A (\eta - \xi)^{\alpha - 1}, \text{ якщо } \xi \to \eta; \ f_2'(\xi) = F_2^A (\delta - \xi)^{\alpha - 1}, \text{ якщо } \xi \to \delta;$$
$$f_4'(\xi) = F_4^A \xi^{\alpha - 1}, \text{ якщо } \xi \to 0 \quad . \tag{9}$$

В околі точки $B(\delta_2, \eta)$ області $\overline{G}^{(2)}$

$$f_3'(\xi) = F_3^B (\eta - \xi)^{\lambda - 1}, \ \xi \to \eta; \ f_4'(\xi) = F_4^B (\delta_2 - \xi)^{\lambda - 1}, \ \xi \to \delta_2;$$
$$f_6(\xi) = F_6^B (\eta - \xi)^{\gamma - 1}, \ \xi \to \eta; \ f_7(\xi) = F_7^B (\delta_2 - \xi)^{\gamma - 1}, \ \xi \to \delta_2. \tag{10}$$

Через $\alpha, \lambda, \beta, \gamma$ позначено параметри локальної особливості (ПЛО) за напруженнями і температурою відповідно, що характеризують особливості функцій $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\phi_1(y)$, а через $F_1^A, F_2^A, \ldots, F_7^B, F_8^A$ - довільні сталі.

Визначаємо асимптотику коефіцієнтів Фур'є функцій в околі точок A та B.

Можна показати, що коли $k \to \infty, j \to \infty$

$$\phi_{1k} \cong \Phi_1 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)}\right)^{-\alpha}, \ f_{1k} \cong F_1 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)}\right)^{-\alpha - 1}, \ f_{2j} \cong F_2 \delta^{-1} \left(\chi_j^{(1)}\right)^{-\alpha - 1},$$

$$f_{3k} \cong F_3 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)}\right)^{-\lambda - 1}, \ f_{4j} \cong F_4 \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)}\right)^{-\lambda - 1}, \quad \text{якщо} \quad \xi \to \delta_2,$$

$$f_{4j} \cong \overline{F}_4 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)}\right)^{-\alpha - 1}, \quad \text{якщо} \quad \xi \to 0, \ f_{5k} \cong F_5 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)}\right)^{-\beta},$$

$$f_{6k} \cong F_6 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(2)}\right)^{-\gamma}, \ f_{7j} \cong F_7 \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)}\right)^{-\gamma}, \quad \text{якщо} \quad \xi \to \delta_2,$$

$$f_{7j} \cong \overline{F}_7 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)}\right)^{-\beta}, \text{ якщо } \xi \to 0, \ f_{8j} \cong F_8 \delta^{-1} \left(\chi_j^{(1)}\right)^{-\beta}; \tag{11}$$

$\Phi_1 = -2\Phi_1^A \Gamma_1(\alpha)$, $F_1 = 2F_1^A \Gamma_1(\alpha)$, $F_2 = 2F_2^A \Gamma_1(\chi)$, $F_3 = 2F_3^B \Gamma_1(\alpha)$, $\overline{F}_4 = 2F_4^A \Gamma_1(\chi)$, $F_4 = 2F_4^B \Gamma_1(\chi)$, $F_5 = 2F_5^A \Gamma_1(\alpha)$, $F_6 = 2F_6^B \Gamma_1(\alpha)$, $\overline{F}_7 = 2F_7^A \Gamma_1(\chi)$, $F_7 = 2F_7^B \Gamma_1(\chi)$, $F_8 = 2F_8^A \Gamma_1(\chi)$, де $\Gamma(x)$ - гамма-функція, $\Gamma_1(\alpha) = \Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)$.

Якщо підставити формули (8)-(11) у вирази для лінійних операторів (7) системи інтегральних рівнянь, отримаємо можливість дослідити асимптотичну поведінку її лівих частин. Таким чином, для визначення характеру особливості допоміжних функцій в околі точки A маємо такі рівняння:

$$U_2^{(1)}(\delta, y) = U_2^{(2)}(0, y),\ \Theta^{(1)}\Big|_{x=\delta} = \Theta^{(2)}\Big|_{\hat{x}=0},\ \sigma_{11}^{(1)}(\delta, y) = \sigma_{11}^{(2)}(0, y),\ (\text{якщо }\ y \to \eta),$$

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) = q,\ f_8 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0,\ (\text{якщо }\ x \to \delta), \tag{12}$$

$$\sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q,\ f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0,\ (\text{якщо }\ \hat{x} \to 0).$$

В околі точки B маємо такі рівняння:

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q,\ f_6 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0\ \ (\text{якщо }\ y \to \eta), \tag{13}$$
$$\sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q,\ f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0,\ (\text{якщо }\ \hat{x} \to \delta_2).$$

Підставляємо асимптотичні вирази для коефіцієнтів Фур'є допоміжних функцій (11) до рівнянь (12) та (13). Після підсумовування рядів та враховуючи асимптотичну значущість невідомих функцій отримаємо таку однорідну систему алгебраїчних рівнянь для визначення ПЛО за напруженнями та температурою:

$$-m_{12}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Phi_1 + 2\left(n^{(1)} + r_{21}n^{(2)}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}F_1 + 2n^{(1)}\alpha F_2 + 2n^{(2)}r_{21}\alpha\bar{F}_4 = 0,$$

$$\left(n_{11}^{(1)} + r_{12}n_{11}^{(2)}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Phi_1 + 2m_{12}\sin\frac{\pi\alpha}{2}F_1 + 2\left(1 - n^{(1)}\alpha\right)F_2 + 2\left(1 - n^{(2)}\alpha\right)\bar{F}_4 = 0, \tag{14}$$

$$\left(\left(n^{(1)}\right)^{-1} + \alpha\right)\Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2\sin\frac{\pi\alpha}{2}F_2 = 0,$$

$$\left(\left(n^{(2)}\right)^{-1} + \alpha\right)r_{12}\Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2\sin\frac{\pi\alpha}{2}\bar{F}_4 = 0,$$

$$4F_5\cos\frac{\pi\beta}{2} + 2F_8 + 2\bar{F}_7 = 0,\ \bar{F}_7(-\beta)\sin\frac{\pi\beta}{2} = 0,\ F_8(-\beta)\sin\frac{\pi\beta}{2} = 0, \tag{15}$$

$$\sin\frac{\pi\lambda}{2}F_3 + \lambda F_4 = 0,\ \lambda F_3 + \sin\frac{\pi\lambda}{2}F_4 = 0, \tag{16}$$

$$F_6(-\gamma)\sin\frac{\pi\gamma}{2} = 0,\ F_7(-\gamma)\sin\frac{\pi\gamma}{2} = 0. \tag{17}$$

Тут використані позначення

$$m_{12} = \left(C_{11}^{(1)-1} + C_{11}^{(2)-1}\right),\ n^{(m)} = \frac{C_{11}^{(m)} - 1}{C_{11}^{(m)}},\ n_{11}^{(m)} = \frac{C_{11}^{(m)} + 1}{C_{11}^{(m)}}.$$

Особливість цієї системи полягає у тому, що вона розпадається на чотири частини. Перші чотири рівняння, об'єднані формулами (14), містять невідомі Φ_1, F_1, F_2, $\bar{F}_4$. Вони визначають значення α - ПЛО за напруженнями у точці A. П'яте, шосте та сьоме рівняння об'єднують формули (15). Вони містять невідомі F_5, $\bar{F}_7$, F_8 та визначають значення β - ПЛО за температурою у точці A. Рівняння (16) та (17) містять невідомі F_3, F_4 та F_6, F_7 відповідно й визначають особливість у зовнішній кутовій точці B - ПЛО за напруженнями та температурою λ та γ.

За умови існування нетривіального розв'язку рівнянь (14) та (16) даної системи отримаємо два характеристичні рівняння для визначення параметра λ:

$$\lambda^2 - \sin^2\frac{\pi\lambda}{2} = 0. \tag{18}$$

Характеристичне рівняння (18) має один дійсний корінь $\lambda_0 = 1$, та безліч комплексних коренів, $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [3, 4]. Звичайно, треба врахувати лише ті комплексні корені, для яких $\operatorname{Re}\lambda_k > 1$.

Рівняння (15) та (17) системи дають підставу зазначити, що температура не має особливості у кутових та внутрішніх точках області, оскільки з цих рівнянь випливає, що невідомі F_5, $\overline{F}_7$, F_8 та F_6, F_7 дорівнюють нулю.

ПЛО α за напруженням у точці A визначається за умови існування нетривіального розв'язку системи (14).

$$\Delta\left(\alpha, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, r_{21}\right) = 0$$

Це рівняння є симетричним стосовно пружних параметрів областей $G^{(m)}$.

Визначення ПЛО у кутових точках перерізу областей дає можливість прогнозувати інтенсивність ЛКН у цих проблемних зонах і застосувати критерії міцності, беручи максимальні напруження саме в цих областях з урахуванням ПЛО.

Важливим напрямком подальшої роботи буде дослідження ПЛО для анізотропних складених перебінів деталей, що, безумовно, підвищить рівень практичного застосування запропонованої методики розрахунку. Перспективним має бути і аналіз розподілу внутрішньої енергії по області перерізу з урахуванням ЛКН у околі нерегулярних точок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора // Тр. амер. об-ва инженеров - механиков. Прикл. механика. - 1971. - Т. 38, №2. - С. 87-96.
2. Гетман И.П. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос / И.П. Гетман, О.Н. Лисицкий // Прикл. математика и механика. -1988. - Т. 52, Вып.6. - С.1044-1048.
3. Вовк Л.П. О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк, Б.В. Соболь // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, Вып. 2. – С. 269-278.
4. Вовк Л.П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267с.
5. Вовк Л.П. Особенности динамических напряжений в окрестности точки стыка трех упругих сред / Л.П. Вовк, Б.В. Соболь // Прикладная математика и механика. – 2005.– Т. 69, Вып. 2. – С. 279-289.
6. Вовк Л.П. Анализ локальных особенностей волнового поля в сингулярных точках составной области / Л.П. Вовк // Вісник Сумського держ. університету. Сер. Фізика, математика, механіка. – 2003. – №10(56). – С. 144-156.
7. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах/ В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. - Киев: Наук. думка, 1981. – 283с.
8. Новацкий В.Н. Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1970. – 256с.

Надійшла до редакції 12 жовтня 2010 р.