

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Факультет технічних систем та енергоефективних технологій
Кафедра комп'ютерної механіки імені Володимира Марцинковського

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
бакалавра
на тему
«Дослідження динаміки ротора турбокомпресора СОГ-4КС»

Виконав: студент 4 курсу групи КМ–81-0

Афанасьєв С.В.

Рівень підготовки: бакалавр

Спеціальність: 131 Прикладна механіка

ОПП: Комп'ютерний інжиніринг в механіці

Керівник: професор Симоновський В.І.

Рецензент: завідувач кафедри Загорулько А.В.

Суми – 2022

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра: с-33, рис-4, табл-4, джер.-13

Об'єктом для дослідження є ротор відцентрового холодильного турбокомпресора Д203ГЦ1-710/2,4-10М2 ДКС СОГ-4 «Ямбургская». Метою роботи є створення дискретної трьох масової моделі динаміки ротора турбокомпресора для аналізу стійкості і нелінійних коливань.

Методи дослідження – чисельний: застосування програмного комплексу MathCAD для розрахунку особистих частот та форм ротора компресора; спосіб розрахунку еквівалентних мас трьох масової дискретної моделі; метод розрахунку власних частот і форм дискретних лінійних динамічних систем.

В роботі була побудована трьох масова модель коливань ротора відцентрового компресора, складена система диференціальних рівнянь, характеристичний поліном в якій має дванадцятий порядок; модель дає змогу врахувати вплив підшипників.

На основі розрахунків, що було отримано, побудовано трьох масову дискретну динамічну модель ротора, яку в майбутньому можна використати для аналізу нелінійних коливань та стійкості ротора.

**НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ РОТОРА, СТІЙКІСТЬ,
ДИСКРЕТНА ТРЬОХ МАСОВА МОДЕЛЬ РОТОРА, ВЛАСНІ ЧАСТОТИ ТА
ФОРМИ КОЛИВАНЬ РОТОРА.**

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень	6
Вступ	7
1. Розрахунок власних частот і форм роторної системи турбокомпресора	9
1.1 Об'єкт досліджень.....	9
1.2 Розрахунок власних частот і форм СЕ-моделі ротора	13
1.3 Висновки.....	15
2. Побудова неконсервативної дискретної моделі роторної системи	16
2.1 Методика розрахунку еквівалентних мас 3-масової моделі ротора.	16
2.2 Розрахунок еквівалентних мас.	18
2.3. Побудова дискретних моделей динаміки ротора турбокомпресора.	21
2.2 Висновки.....	24
Додаток 1.....	25
Додаток 2.....	29
Перелік посилань.....	32

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- ω – частота обертання ротора;
- $\bar{\omega}$ – відносна частота обертання;
- ω_i – власна частота дискретної трьох масової моделі;
- F_j – сили , що діють на систему;
- q – циркуляційна сила;
- d_{Π} – коефіцієнт демпфування;
- x, y – координати центра мас ротора;
- L_i – довжина ділянки вала;
- D_i – зовнішній діаметр вала;
- d_i – внутрішній діаметр вала;
- m_i – дискретна маса;
- E – модуль пружності;
- ρ – щільність рідини;
- δ – безрозмірний коефіцієнт циркуляційних сил
- МСЕ – метод скінченних елементів

ВСТУП

Машини, в яких основним вузлом є ротор – вал із закріпленими на ньому робочими органами які обертаються, себто роторні машини, складають найбільш широкий клас машин. Ротор являє собою основний елемент в енергетичних машинах (турбінах, відцентрових насосах, турбокомпресорах), електро машинах (синхронних генераторах, синхронних і асинхронних двигунах), транспортувальних машинах, машинах текстильної та хімічної промисловості, різних приладах (гіроскопах, відцентрових регуляторах). Ротор виконує роль інструмента перетворення енергії який використовується у різних галузях техніки, в більшості у компресорах та газоконпресорних станцій.

За для збільшення потужностей, швидкості обертання в роторах постійно підвищують. Тривалий час перша критична частота вважалась граничною але на разі сучасні роторні машини працюють на швидкостях, що перевищують дві або навіть три критичні частоти.

В той самий час ротори являються джерелом шкідливих (в першу чергу для самої ж машини) вібрацій. Дане поняття - вібрація, охоплює поняття в повсякденні, стукіт, тремтіння, тряска, дзеленчання, гудіння та ін. До таких, здебільшого акустичних, ефектів, які просто відмітити, призводить вібрація або ж механічне колювання. Являючись причиною підвищеного зносу (в деяких випадках навіть до аж руйнування), вібрації є визначними причинами зменшення надійності та довговічності у механізмів, машин, промислових споруд і будівель.

Тому в основній кількості випадків у роторних машин технічний рівень зумовлюється в зокрема їх віброакустичними характеристиками, які визначаються в переважності вібраційним станом ротора. А при роботі ротор спричинює і зазнає колювань широкого спектру, як у відношенні частот, так і типу колювань: радіальні, кутові, крутні(або торсіонні), осьові.

Машинобудування сучасності на сам перед пов'язане з постійним зростанням потужностей і швидкості функціональних систем машини. І як в наслідок, зростають навантаження в їх елементах і для покривання необхідного

рівня надійності є необхідністю застосування сучасних дослідницьких та розрахункових методів дослідження машин.

Відцентрові машини, через гідродинамічні процеси які протікають в проточній частині, створюють коливання часто більш широкі та потужні за спектральним складом, а ніж ротори в машинах інших класів. Внаслідок розвиненої системи ущільнень в проточній частині характерна втрата стійкості та виникнення невластивих для нелінійних систем коливань.

Нові модифікації у відцентрових агрегатах як правило працюють поблизу другої та третьої критичних частот, що накладає до віброннадійності жорсткі вимоги, що в більшості залежить від достовірних динамічних розрахунків ще на проектувальній стадії.

Крім процесів проточної частини, великим внеском в динамічний стан ротору є внесок опор, в яких обертається вал. Широкого поширення у відцентрових машинах набули саме підшипники ковзання, для яких характерні як явища демпфування, що сприяє збільшенню стійкості, так і створення циркуляційних сил, що ведуть до втрати стійкості. Зокрема, їхня жорсткість та демпферні властивості здебільшого залежать від температури.

Для ефективного дослідження подібних складних явищ таких як втрата стійкості багатомасового ротора виявляється задачею занадто складною навіть для сучасних методів досліджень з використанням ЕОМ. Існуючі методи та програми розрахунку динаміки роторів, що засновані на СЕ-моделях, дають можливість визначати критичні частоти та власні форми, а також вимушені коливання синхронної прецесії. Ці програми не можуть бути використаними для розрахунку та прогнозу таких непростих явищ, як втрата стійкості та поява несинхронних субгармонійних складових. Ці явища можуть досліджуватись тільки безпосереднім чисельним інтегруванням нелінійних диференціальних рівнянь дискретної багатомасової моделі ротора. Тому щоб проводити такі дослідження динаміки ротора потрібно розглянути відповідну дискретну модель.

1. Розрахунок власних частот і форм роторної системи турбокомпресора

1.1 Об'єкт досліджень

Дослідницьким об'єктом є холодильний відцентровий ротор турбокомпресора Д203ГЦ1-710/2,4-10М2 ДКС СОГ-4 «Ямбургская» (рис. 1.1). Даний компресор використовують в більшості для перекачки природного газу. На рис 1.2. наведена схема ротору. Компресорний ротор опирається на сегментні підшипники. В таблиці наведені 1.1. наведені основні технічні характеристики.

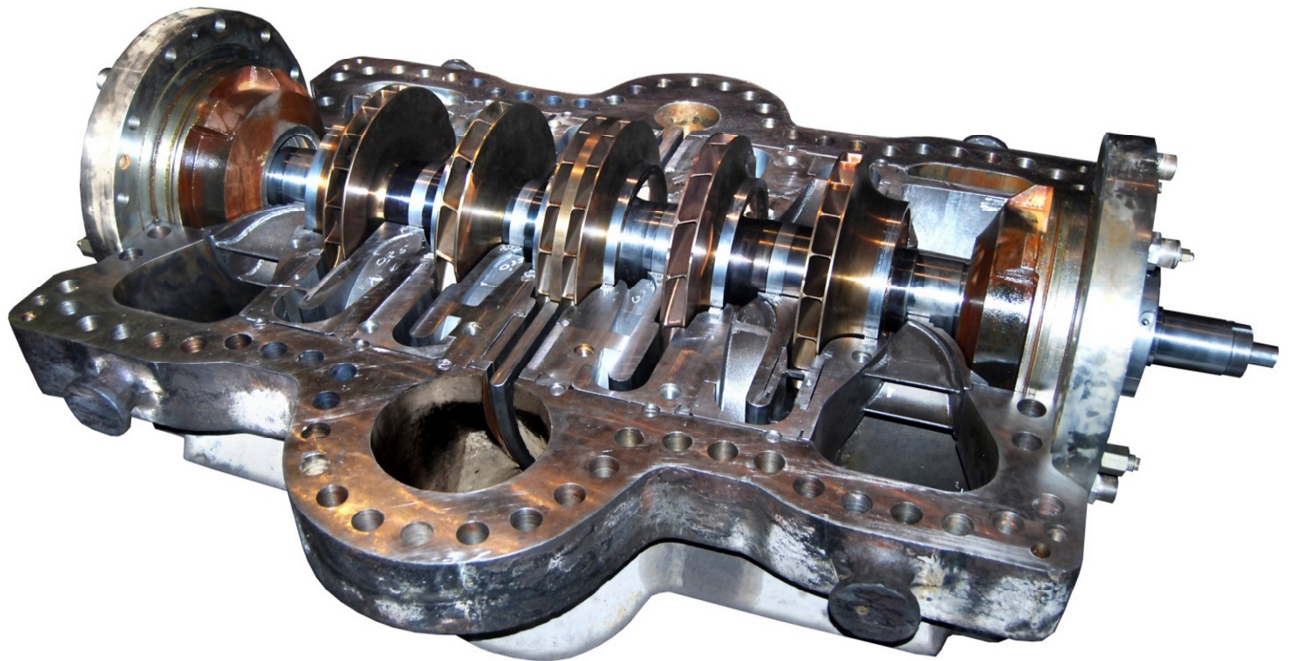
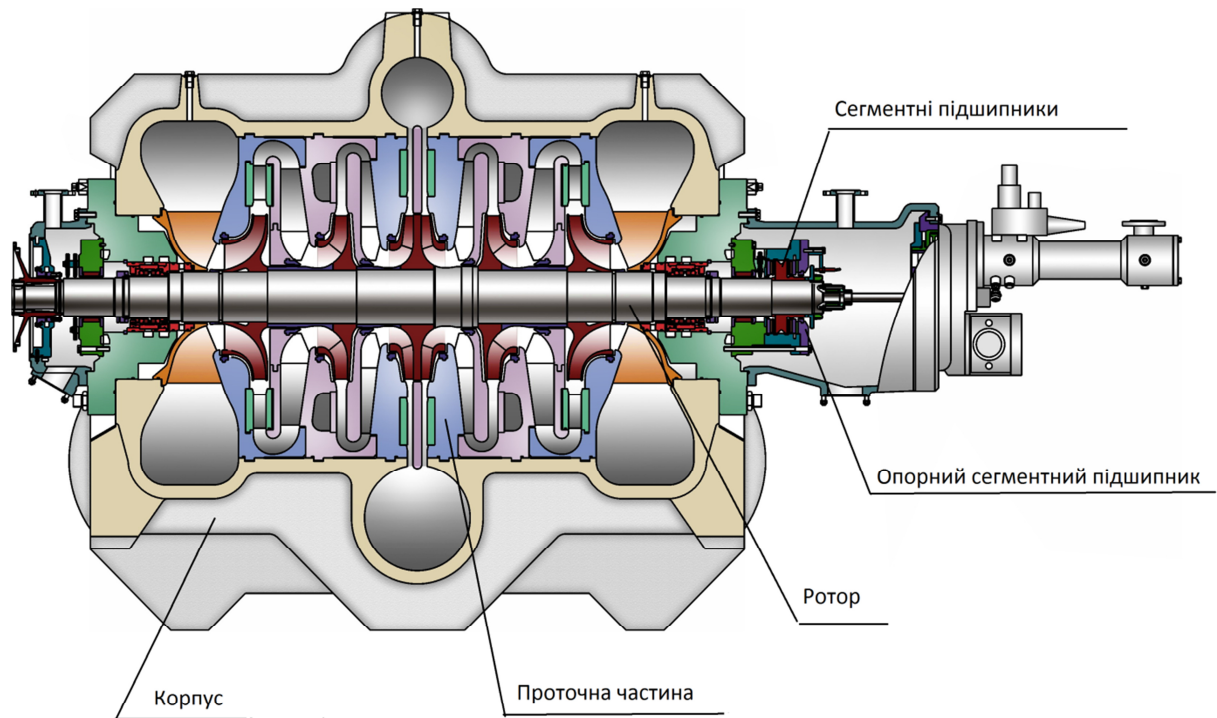


Рисунок 1.1 - Ротор відцентрового холодильного турбокомпресора
Д203ГЦ1-710/2,4-10М2 ДКС СОГ-4 «Ямбургская»

Рисунок 1.2 – Схема відцентрового компресору Д203ГЦ1-710/2,4-10М2
ДКС СОГ-4



Таблиця **Ошибка! Текст указанного стиля в документе отсутствует..1**
– Технічні характеристики відцентрового турбокомпресора Д203ГЦ1-710/2,4-10М2 ДКС СОГ-4

Параметр	Чисельне значення
Результативність, наведена до температури 273 К (0°C) та тиску 0,101 МПа (1,033кг/см ²), м ³ /с (млн.м ³ /добу), не менше	28,7 (2.48)
Об'ємна продуктивність, приведена до початкових умов, м ³ /с (м ³ /хв), не менш	12,1 (725.98)
Початковий абсолютний тиск, МПа (кгс/см ²) номінальний	0,233 (2,38)
Кінцевий абсолютний тиск, МПа (кгс/см ²) номінальний	0,965 (9,84)
Відношення тисків (розрах.)	4.14
Політропний ККД компресора, %, не менше	78
Частота обертання ротора компресора, розрахунк.,	130 (1241)

с^{-1} (об/хв)	
Діапазон зміни частоти обертання ротора компресора, с^{-1} (об/хв)	95,7-143,5 (913-1370)
Номінальна (розрахункова) потужність, що споживається компресором, МВт	5,538
Температура газу на вході до компресора, розрахункова, К ($^{\circ}\text{C}$)	293 (+20)
Підвищення температури газу в компресорі в номінальному режимі, (розрахункове), $^{\circ}\text{C}$	60
коефіцієнт стисливості за умовами входу в компресор	0.941



Рисунок 1.3 –Проточна частина компресора Д203ГЦ1-710/2,4-10М2 ДКС СОГ-4



Рисунок 1.4 – Загальний вид компресора Д203ГЦ1-710/2,4-10М2 ДКС СОГ-4

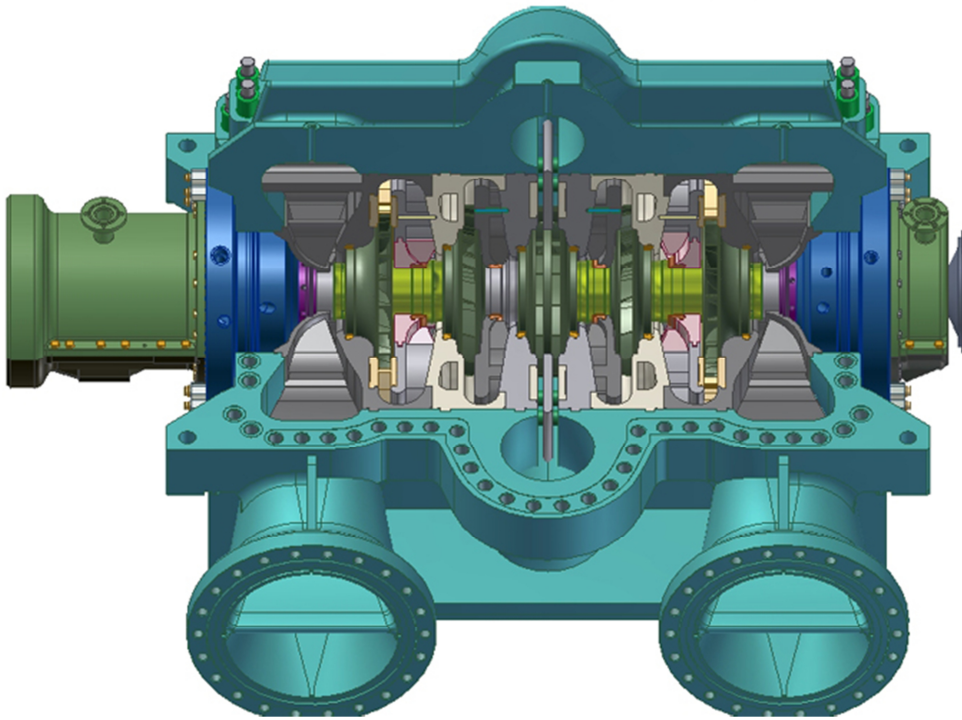


Рисунок 1.5 - Розріз компресора СОГ-4 КС «Ямбургская»

1.2 Розрахунок власних частот і форм СЕ-моделі ротора

Для розрахунку форм та власних частот було використано метод кінцевих елементів (СЕ-модель) і відповідна програма [3]. Модель ротора була побудована за параметрами ділянок, що наведені у додатку 1. Кожна з ділянок описується довжиною, та як внутрішнім так і зовнішнім діаметрами, величиною зосередженої точкової маси і коефіцієнтом жорсткості на початку ділянки. Відповідна схема розрахунку наведена на рисунку 1.6. Густина матеріалу $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$; модуль пружності $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Три перші критичні частоти, що були знайдені з допомогою МПП складають вектор-стовбець $\omega = [344 \ 1260 \ 1750]^T \text{ рад/с}$. Власні відповідні форми були приведені на рисунку 1.7. Значення форм функції наведені в таблиці 1.2.

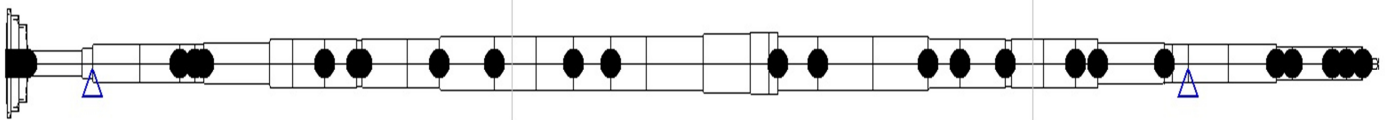


Рисунок 1.6– Розрахункова схема ротора; • – місця розташування зосереджених мас; Δ – місця розташування пружних опор.

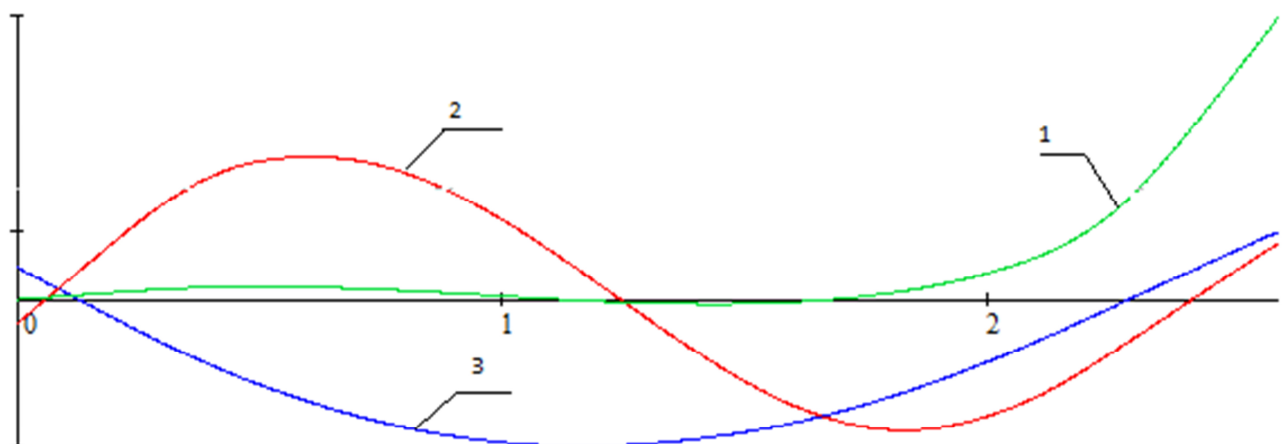


Рисунок 1.7 – Власні форми на перших трьох критичних частотах

Таблиця 1.2 – Значення функцій власних форм коливань ротора, розраховані з використанням МСЕ.

$z, \text{ м}$	Y_1	Y_2	Y_3
0	0,0531605	-0,037832	0,00084180392
0,0033	0,0517734	-0,0356015	0,0010254091
0,0093	0,0492516	-0,0214068	0,001359238
0,0243	0,0429469	-0,0105914	0,0021938385
0,0403	0,0362218	0,0592421	0,0030841826
0,1433	-0,0070563976	0,0721308	0,008942747
0,1623	-0,0150319	0,1303348	0,0100573
0,2503	-0,0516369	0,1733198	0,0150986
0,3253	-0,081393	0,187241	0,0186252
0,3543	-0,0923064	0,1942114	0,019666
0,3703	-0,0981696	0,2299771	0,0201556
0,4943	-0,1393209	0,2348228	0,0218615
0,5363	-0,1514672	0,2378284	0,021644
0,5963	-0,1677852	0,2361104	0,0209333
0,6563	-0,1827106	0,2352348	0,0197731
0,6673	-0,1852975	0,2226446	0,0195086
0,7513	-0,2033013	0,2074714	0,0169864
0,8113	-0,2140522	0,1711381	0,0147202
0,9143	-0,2286594	0,1241672	0,01002007
1,0173	-0,2354058	0,0838428	0,0053083577
1,0943	-0,2423045	0,0448582	0,001759066
1,1643	-0,2433883	0,0063930849	-0,0011524711
1,2323	-0,2423202	-0,0531566	-0,0035131767
1,3383	-0,2364495	-0,0994351	-0,0059571335
1,4263	-0,2282649	-0,01169319	-0,006664129
1,4613	-0,2243262	-0,1251917	-0,0066261563
1,4783	-0,2222898	-0,1582103	-0,0065407569
1,5533	-0,2118007	-0,1925052	-0,0052717228

1,6563	-0,1933148	-0,2124623	-0,00078872029
1,7593	-0,1705781	-0,216398	0,0071421955
1,8193	-0,1554352	-0,2115392	0,013654
1,9033	-0,1318149	-0,2100537	0,0257863
1,9143	-0,1285487	-0,1988537	0,0276535
1,9743	-0,1101695	-0,1830356	0,0390259
2,0343	-0,0907805	-0,16958	0,0526077
2,0763	-0,0767489	-0,1153189	0,063578
2,2003	-0,0326575	-0,1071751	0,1119533
2,2163	-0,0267663	-0,092151	0,1204881
2,2453	-0,0160471	-0,0523496	0,1376818
2,3213	0,0120699	-0,0052648879	0,1942481
2,4103	0,0449516	0,0106922	0,2756546
2,4403	0,0560104	0,050684	0,3053179
2,5153	0,0835571	0,0645426	0,3825812
2,5413	0,093069	0,080511	0,409827
2,5713	0,1040174	0,094726	0,441322
2,6013	0,1131896	0,094936	0,4726439

1.3 Висновки

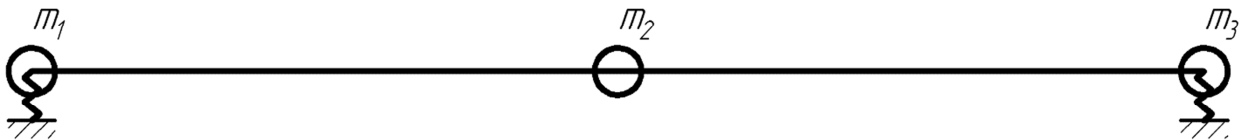
У даному розділі було розглянуто СЕ-модель ротора, на основі якої розраховано власні частоти та власні форми коливань ротора заданого турбокомпресора. Отримано перші три критичні частоти $\omega = [344 \ 1260 \ 1750]^T \text{ рад/с}$.

2. Побудова неконсервативної дискретної моделі роторної системи

2.1. Розрахунковий метод еквівалентних мас 3-масової моделі ротора.

Схема 3-масової роторної моделі є зображеною на рисунку 2.1. З розрахунку СЕ-моделі одержані коефіцієнти дії α_{ij} сил F_j які прикладені в j -й точці на переміщення x_i i -ї точки, власні частоти і форми із точністю до множника. Цих даних досить за для розрахунку (оцінювання) мас що еквівалентні відповідній трьох масової моделі ротора [1,4,10,12,13]. Ця модель має мати власні частоти та форми коливань, що наближені до відповідних частот і форм заданого ротора, які розраховуються за програмами, що дають реалізацію методу скінченних елементів (МСЕ).

Рисунок 2.1 – Схема 3-масової моделі ротора



Система диференціальних рівнянь вільних коливань ротора для трьох масової моделі:

$$x_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \cdot F_j \quad (2.1)$$

де $i = \overline{1,3}$;

$$\bar{\alpha} = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 2,548 \cdot 10^{-9} & 1,239 \cdot 10^{-9} & 3,724 \cdot 10^{-16} \\ 1,239 \cdot 10^{-9} & 2,284 \cdot 10^{-8} & 1,309 \cdot 10^{-9} \\ 3,724 \cdot 10^{-16} & 1,309 \cdot 10^{-9} & 2,548 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix} (м/Н);$$

F_j - сили, що діють на j -ту масу.

Коефіцієнт α_{ij} знаходиться за допомогою програми розрахунку вимушених коливань ротора [2], що реалізує МСЕ, як прогин в точці i , якщо покласти дисбаланс в точці j $D=1$ при частоті обертання ротора $\omega=1$.

Згідно з принципом Д'Аламбера, можна допустити, що

$$F_j = -m_j \cdot \ddot{x}_j. \quad (2.2)$$

Якщо підставити в рівнянні останні співвідношення (2.1), То отримаємо систему коливальних диференціальних рівнянь:

$$x_i = -\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \cdot m_j \cdot \ddot{x}_j \quad (2.3)$$

Для розв'язку переміщення дискретних мас x_i подамо у вигляді:

$$x_i = A_i \cdot \sin \omega t \quad (2.4)$$

де A_i – відповідна амплітуда коливань;

ω – частота обертання ротора.

Підставляючи (2.4) в (2.3), скоротивши на $\sin \omega t$, та зробивши заміну

$\omega^2 = \frac{1}{\lambda}$ прийдемо до вигляду:

$$\lambda \cdot A_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \cdot m_j \cdot A_j \quad (2.5)$$

Оскільки із розрахунку СЕ-моделі нам зараз відомі власні частоти ω_k (а отже, відомі і відповідні λ_k) і відносні амплітуди коливань на власних частотах

$A_i^{(k)}$ (i – номер маси; k – номер власної частоти), то дозволено розглядати завдання оцінювання, за параметри якого вибравши маси дискретної моделі [1, 6,10, 12,13].

2.2 Розрахунок еквівалентних мас.

Перепишемо ((2.5) у вигляді

$$\bar{D} = \bar{B} \cdot \bar{m} \quad (2.6)$$

де \bar{B} - матриця розмірністю (9×3):

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \cdot U_1^{(1)} & \alpha_{12} \cdot U_2^{(1)} & \alpha_{13} \cdot U_3^{(1)} \\ \alpha_{21} \cdot U_1^{(1)} & \alpha_{22} \cdot U_2^{(1)} & \alpha_{23} \cdot U_3^{(1)} \\ \alpha_{31} \cdot U_1^{(1)} & \alpha_{32} \cdot U_2^{(1)} & \alpha_{33} \cdot U_3^{(1)} \\ \alpha_{11} \cdot U_1^{(2)} & \alpha_{12} \cdot U_2^{(2)} & \alpha_{13} \cdot U_3^{(2)} \\ \alpha_{21} \cdot U_1^{(2)} & \alpha_{22} \cdot U_2^{(2)} & \alpha_{23} \cdot U_3^{(2)} \\ \alpha_{31} \cdot U_1^{(2)} & \alpha_{32} \cdot U_2^{(2)} & \alpha_{33} \cdot U_3^{(2)} \\ \alpha_{11} \cdot U_1^{(3)} & \alpha_{12} \cdot U_2^{(3)} & \alpha_{13} \cdot U_3^{(3)} \\ \alpha_{21} \cdot U_1^{(3)} & \alpha_{22} \cdot U_2^{(3)} & \alpha_{23} \cdot U_3^{(3)} \\ \alpha_{31} \cdot U_1^{(3)} & \alpha_{32} \cdot U_2^{(3)} & \alpha_{33} \cdot U_3^{(3)} \end{bmatrix}, U_i^{(k)} = \frac{A_i^{(k)}}{A_1^{(k)}}$$

\bar{D} - вектор-стовпець (9×1):

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 U_1^{(1)} \\ \lambda_1 U_2^{(1)} \\ \lambda_1 U_3^{(1)} \\ \lambda_2 U_1^{(2)} \\ \lambda_2 U_2^{(2)} \\ \lambda_2 U_3^{(2)} \\ \lambda_3 U_1^{(3)} \\ \lambda_3 U_2^{(3)} \\ \lambda_3 U_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

\bar{D} - вектор-стовпець еквівалентних мас (3×1):

$$\hat{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

За допомогою формули лінійної регресії знаходимо шукані величини:

$$\hat{m} = [\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T \bar{D} \quad (2.7)$$

В результаті оцінки отримані наступні значення еквівалентних мас:

$$\hat{m} = \begin{bmatrix} 273,349 \\ 428,995 \\ 143,739 \end{bmatrix}_{кг} \quad (2.8)$$

Адекватність складеної трьох масової моделі було перевірено на основі порівняння значень критичних (власних) частот коливань. Похибка в значеннях частот визначалася за формулою:

$$\varepsilon_i = \frac{\omega_i - \omega_i^*}{\omega_i^*} \quad (2.9)$$

де ω_i^* - відповідна власна частота МПП-моделі;

ω_i - власна частота дискретної трьохмасової моделі.

Власні частоти дискретної трьох масової моделі знаходимо з умови нетривіального розв'язку системи (2.5) відносно амплітуд A_i :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdot m_1 - \lambda & \alpha_{12} \cdot m_2 & \alpha_{13} \cdot m_3 \\ \alpha_{21} \cdot m_1 & \alpha_{22} \cdot m_2 - \lambda & \alpha_{23} \cdot m_3 \\ \alpha_{31} \cdot m_1 & \alpha_{32} \cdot m_2 & \alpha_{33} \cdot m_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

В результаті отримано наступні значення власних частот трьохмасової системи:

$$\omega = \begin{bmatrix} 318,965 \\ 1215 \\ 1680 \end{bmatrix} \text{ рад/с} \quad (2.11)$$

Похибки в значеннях частот становлять:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0,01097 \\ -1,2 \\ -4,1 \end{bmatrix} \% \quad (2.12)$$

Це є досить гарним результатом для оцінювання.

Всі розрахунки, які проведені в даному підрозділі, були приведені в Додатку 2.

2.3. Побудова дискретних моделей динаміки ротора турбокомпресора.

Базуючись на отриманих характеристиках трьох масової моделі ротора, можемо створити дискретну лінійну модель вільних коливань в роторі (рис. 2.2), доточнити систему, що описує трьох масову модель (2.1) компонентами, які враховують демпферну дію та дію циркуляційних сил в декількох напрямках:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} (-m_j \cdot \ddot{x}_j - d_j \cdot \dot{x}_j - q_j \cdot y_j) \\ y_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} (-m_j \cdot \ddot{y}_j - d_j \cdot \dot{y}_j - q_j \cdot x_j) \end{cases}, \quad (2.13)$$

де d_j – коефіцієнт демпфування на j -й масі
 q_j – коефіцієнт циркуляційних сил в j -й точці.

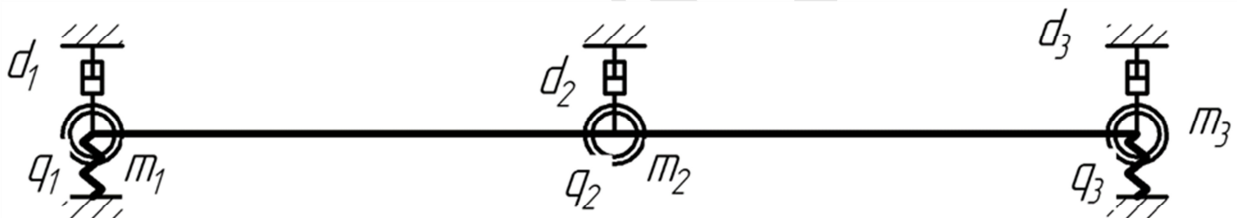


Рисунок 2.2 – Дискретна лінійна трьох масова модель ротора

Точкам 1 та 3 (відповідно коефіцієнти d_1, q_1, d_3, q_3) відповідають коефіцієнти для підшипників, а точці 2 (d_2, q_2) – робочої частини.

$q = 0,5b\omega = \alpha_{ij}\delta\omega d_{\Pi}$ – циркуляційна сила, δ – безрозмірний коефіцієнт циркуляційної сили.

На основі принципу Даламбера в рівняннях загального вигляду (2.3) необхідно покласти систему рівнянь (2.14):

$$F_{1x} = -d_{\pi}\dot{x}_1 - \delta\omega d_{\pi}y_1 - m_1\ddot{x}_1;$$

$$F_{1y} = -d_{\pi}y_1 + \delta\omega d_{\pi}x_1 - m_1\ddot{y}_1;$$

$$F_{2x} = -m_2\ddot{x}_2;$$

$$F_{2y} = -m_2\ddot{y}_2;$$

$$F_{3x} = -d_{\pi}\dot{x}_3 - \delta\omega d_{\pi}y_3 - m_3\ddot{x}_3;$$

$$F_{3y} = -d_{\pi}y_3 + \delta\omega d_{\pi}x_3 - m_3\ddot{y}_3;$$

Базуючись на системах рівнянь (2.13) та(2.14) складемо систему рівнянь (2.15) :

$$X_1 = \alpha_{1,1}(-d_{\pi}\dot{x}_1 - \delta\omega d_{\pi}y_1 - m_1\ddot{x}_1) + \alpha_{1,2}(-m_2\ddot{x}_2) + \alpha_{1,3}(-d_{\pi}\dot{x}_3 - \delta\omega d_{\pi}y_3 - m_3\ddot{x}_3)$$

$$Y_1 = \alpha_{1,1}(-d_{\pi}y_1 + \delta\omega d_{\pi}x_1 - m_1\ddot{y}_1) + \alpha_{1,2}(-m_2\ddot{y}_2) + \alpha_{1,3}(-d_{\pi}y_3 + \delta\omega d_{\pi}x_3 - m_3\ddot{y}_3)$$

$$X_2 = \alpha_{2,1}(-d_{\pi}\dot{x}_1 - \delta\omega d_{\pi}y_1 - m_1\ddot{x}_1) + \alpha_{2,2}(-m_2\ddot{x}_2) + \alpha_{2,3}(-d_{\pi}\dot{x}_3 - \delta\omega d_{\pi}y_3 - m_3\ddot{x}_3)$$

$$Y_2 = \alpha_{2,1}(-d_{\pi}y_1 + \delta\omega d_{\pi}x_1 - m_1\ddot{y}_1) + \alpha_{2,2}(-m_2\ddot{y}_2) + \alpha_{2,3}(-d_{\pi}y_3 + \delta\omega d_{\pi}x_3 - m_3\ddot{y}_3)$$

$$X_3 = \alpha_{3,1}(-d_{\pi}\dot{x}_1 - \delta\omega d_{\pi}y_1 - m_1\ddot{x}_1) + \alpha_{3,2}(-m_2\ddot{x}_2) + \alpha_{3,3}(-d_{\pi}\dot{x}_3 - \delta\omega d_{\pi}y_3 - m_3\ddot{x}_3)$$

$$Y_3 = \alpha_{3,1}(-d_{\pi}y_1 + \delta\omega d_{\pi}x_1 - m_1\ddot{y}_1) + \alpha_{3,2}(-m_2\ddot{y}_2) + \alpha_{3,3}(-d_{\pi}y_3 + \delta\omega d_{\pi}x_3 - m_3\ddot{y}_3)$$

Розв`язок даної системи знаходимо з умови , що:

$$x_i = A_i \sin pt \quad (2.16)$$

Тоді, вводячи заміну (2.16) та скорочуючи на $\sin pt$, приходимо до характеристичного визначника (2.17):

$$\begin{bmatrix} (\alpha_{1,1} \cdot m_1 \cdot p^2 + \alpha_{1,1} \cdot d \cdot p + 1) & (\alpha_{1,1} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) & (\alpha_{1,2} \cdot m_2 \cdot p^2) & 0 & (\alpha_{1,3} \cdot m_3 \cdot p^2 + \alpha_{1,3} \cdot d \cdot p) & (\alpha_{1,3} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) \\ -(\alpha_{1,1} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) & (\alpha_{1,1} \cdot m_1 \cdot p^2 + \alpha_{1,1} \cdot d \cdot p + 1) & 0 & (\alpha_{1,2} \cdot m_2 \cdot p^2) & -(\alpha_{1,3} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) & (\alpha_{1,3} \cdot m_3 \cdot p^2 + \alpha_{1,3} \cdot d \cdot p) \\ (\alpha_{2,1} \cdot m_1 \cdot p^2 + \alpha_{2,1} \cdot d \cdot p) & (\alpha_{2,1} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) & (\alpha_{2,2} \cdot m_2 \cdot p^2 + 1) & 0 & (\alpha_{2,3} \cdot m_3 \cdot p^2 + \alpha_{2,3} \cdot d \cdot p) & (\alpha_{2,3} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) \\ -(\alpha_{2,1} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) & (\alpha_{2,1} \cdot m_1 \cdot p^2 + \alpha_{2,1} \cdot d \cdot p) & 0 & (\alpha_{2,2} \cdot m_2 \cdot p^2 + 1) & -(\alpha_{2,3} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) & (\alpha_{2,3} \cdot m_3 \cdot p^2 + \alpha_{2,3} \cdot d \cdot p) \\ (\alpha_{3,1} \cdot m_1 \cdot p^2 + \alpha_{3,1} \cdot d \cdot p) & (\alpha_{3,1} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) & (\alpha_{3,2} \cdot m_2 \cdot p^2) & 0 & (\alpha_{3,3} \cdot m_3 \cdot p^2 + \alpha_{3,3} \cdot d \cdot p + 1) & (\alpha_{3,3} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) \\ -(\alpha_{3,1} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) & (\alpha_{3,1} \cdot m_1 \cdot p^2 + \alpha_{3,1} \cdot d \cdot p) & 0 & (\alpha_{3,2} \cdot m_2 \cdot p^2) & -(\alpha_{3,3} \cdot d \cdot \delta \cdot \omega) & (\alpha_{3,3} \cdot m_3 \cdot p^2 + \alpha_{3,3} \cdot d \cdot p + 1) \end{bmatrix}$$

-де $d=d_{\text{п}}$ -коефіцієнт демпфування, δ -безрозмірний коефіцієнт циркуляційної сили, $\omega = \omega_1 \bar{\omega}$ – робоча частота обертання, де ω_1 – перша власна частота обертання ротора. Визначник (2.17) далі використовуються для дослідження областей стійкості обертання ротора [11].

Якщо в системі (2.1) покласти

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= -m_1 \omega_{\text{н}} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} - d_{\text{п}} \omega_{\text{н}} \frac{dx_1}{d\tau} - f \cdot (x_1^2 + y_1^2) \cdot x_1 - q_{\text{п}} y_1, \\
 F_{2x} &= -m_2 \omega_{\text{н}} \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + m_2 e \omega_{\text{отн}}^2 \omega_{\text{н}}^2 \cos \omega_{\text{отн}} \tau - q_{\text{пч}} y_2, \\
 F_{3x} &= -m_3 \omega_{\text{б}} \frac{d^2 x_3}{d\tau^2} - d_{\text{п}} \omega_{\text{н}} \frac{dx_3}{d\tau} - f \cdot (x_3^2 + y_3^2) \cdot x_3 - q_{\text{п}} y_3, \\
 F_{1y} &= -m_1 \omega_{\text{н}} \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} - d_{\text{п}} \omega_{\text{н}} \frac{dy_1}{d\tau} - f \cdot (y_1^2 + x_1^2) \cdot y_1 + q_{\text{п}} x_1, \\
 F_{2y} &= -m_2 \omega_{\text{н}} \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + m_2 e \omega_{\text{отн}}^2 \omega_{\text{н}}^2 \sin \omega_{\text{отн}} \tau + q_{\text{пч}} x_2, \\
 F_{3y} &= -m_3 \omega_{\text{н}} \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} - d_{\text{п}} \omega_{\text{н}} \frac{dy_{\text{н}}}{d\tau} - f \cdot (y_5^2 + x_5^2) \cdot y_5 + q_{\text{п}} x_5,
 \end{aligned}$$

То ж отримаємо дискретну-нелінійну модель вимушених роторних коливань, де порушення рівноваги знаходиться в точці другої маси, а нелінійність є врахованою у квазіпружних реакціях у підшипниках. Дана модель може бути застосована в подальшому у дослідженні роторних вимушених-нелінійних коливань шляхом інтегрування спектрального і чисельного аналізу отриманих результатів, так як це було зроблено, для прикладу в роботах [9,10,11].

2.2 Висновки

У цьому розділі є описаною методика яка створена для побудови дискретних багато масових моделей ротора відцентрової машини. Виконаний розрахунок конкретних еквівалентних мас розглянутого турбокомпресорного ротора.

Також були отримані системи рівнянь та належний характеристичний визначник для дискретної трьохмасової лінійної моделі та неконсервативної нелінійної моделі турбокомпресорного ротора.

ДОДАТОК 1

Розрахунки СЕ-моделі ротора в програмному комплексі [3].

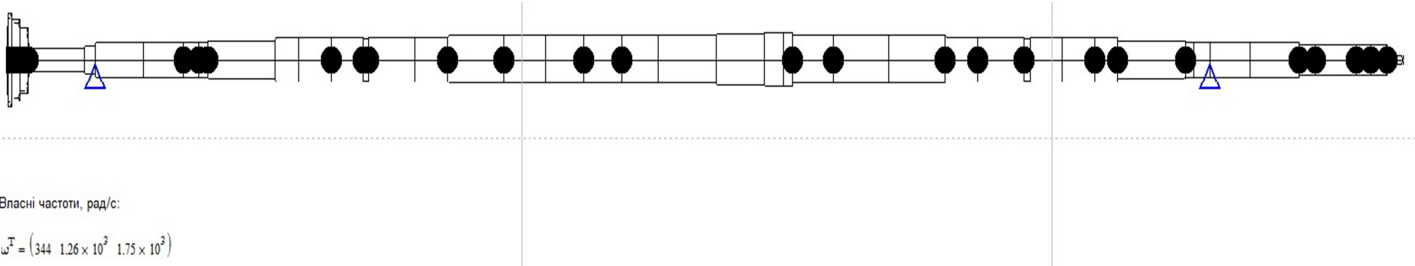
Модуль пружності, Па: $E := 2.1 \cdot 10^{11}$ Густина, кг/м³: $\rho := 7850$

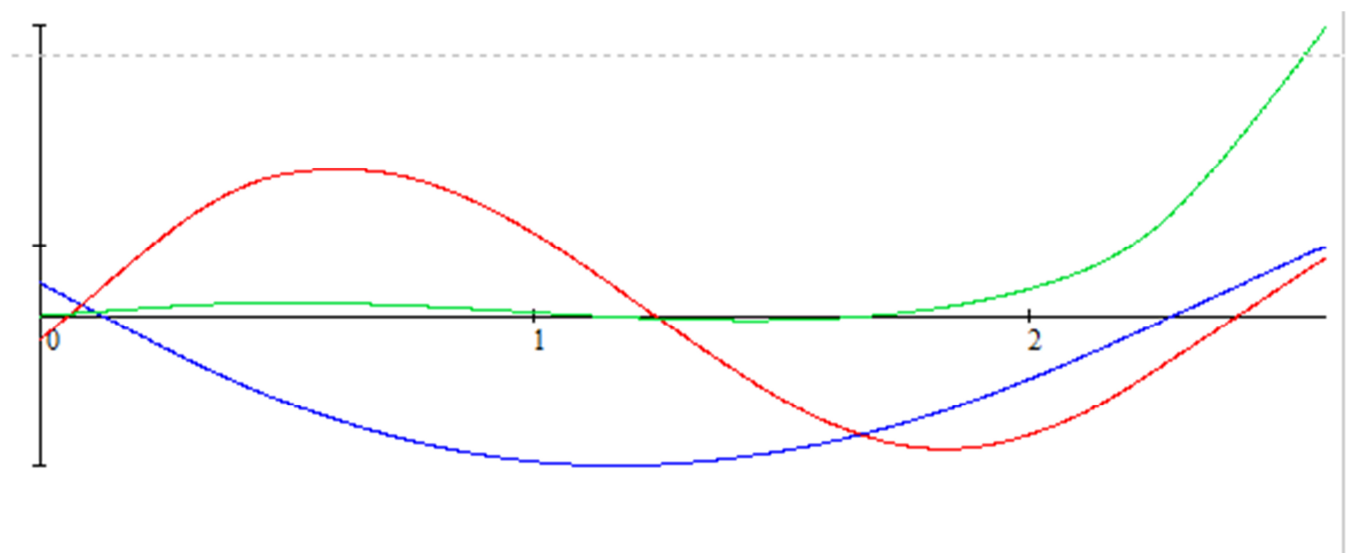
	L, м	D, м	d, м	m, кг	I, кг·м ²	k, Н/м	α , Н·с/м	β , Н·с ² /м
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.058	0.346	0.316	0	0	0	0	0
2	0.019	0.346	0.316	3	0	0	0	0
3	0.015	0.301	0.279	3	0	0	0	0
4	$3.3 \cdot 10^{-3}$	0.025	0.23	2	0	0	0	0
5	$6 \cdot 10^{-3}$	0.086	0	2	0	0	0	0
6	0.019	0.099	0	0	0	0	0	0
7	0.039	0.12	0	0	0	$3.9 \cdot 10^8$	0	0
8	0.075	0.12	0	0	0	0	0	0
9	0.029	0.125	0	4.2	0	0	0	0
10	0.016	0.126	0	6.5	0	0	0	0
11	0.124	0.13	0	6.5	0	0	0	0
12	0.042	0.156	0	0	0	0	0	0
13	0.06	0.16	0	0	0	0	0	0
14	0.06	0.16	0	0.92	0	0	0	0
15	0.011	0.15	0	0.32	0	0	0	0
16	0.084	0.16	0	0.579	0	0	0	0
17	0.06	0.16	0	0	0	0	0	0
18	0.103	0.17	0	10.3	0	0	0	0
19	0.103	0.17	0	50.5	0	0	0	0
20	0.077	0.17	0	0	0	0	0	0
21	0.07	0.176	0	5.1	0	0	0	0
22	0.068	0.176	0	45.85	0	0	0	0
23	0.106	0.176	0	45.85	0	0	0	0

24	0.088	0.19	0	0	0	0	0	0
25	0.035	0.196	0	0	0	0	0	0
26	0.017	0.194	0	0	0	0	0	0
27	0.075	0.17	0	50	0	0	0	0
28	0.103	0.17	0	10.3	0	0	0	0
29	0.103	0.17	0	0	0	0	0	0
30	0.06	0.16	0	57.9	0	0	0	0
31	0.084	0.16	0	0.32	0	0	0	0
32	0.011	0.15	0	0.92	0	0	0	0
33	0.06	0.16	0	0	0	0	0	0
34	0.06	0.16	0	0	0	0	0	0
35	0.042	0.156	0	6.5	0	0	0	0
36	0.124	0.13	0	6.5	0	0	0	0
37	0.016	0.126	0	4.2	0	0	0	0
38	0.029	0.125	0	0	0	0	0	0
39	0.076	0.12	0	0	0	$3.9 \cdot 10^8$	0	0
40	0.089	0.12	0	0	0	0	0	0
41	0.03	0.107	0	9.3	0	0	0	0
42	0.075	0.107	0	1.67	0	0	0	0
43	0.026	0.107	0	2.28	0	0	0	0
44	0.03	0.105	0	1.37	0	0	0	0
45	0.03	0.032	0	1	0	0	0	0

Кількість власних або критичних частот для пошуку: $N_{\max} := 3$

Граничне значення власної або критичної частоти для пошуку, рад/с: $\omega_{\max} := 1 \cdot 10^5$





	1	2	3
1	0.0531605	-0.037832	$8.4180392 \cdot 10^{-4}$
2	0.0517734	-0.0356015	$1.0254091 \cdot 10^{-3}$
3	0.0492516	-0.0315459	$1.359238 \cdot 10^{-3}$
4	0.0429469	-0.0214068	$2.1938385 \cdot 10^{-3}$
5	0.0362218	-0.0105914	$3.0841826 \cdot 10^{-3}$
6	$-7.0563976 \cdot 10^{-3}$	0.0592421	$8.942747 \cdot 10^{-3}$
7	-0.0150319	0.0721308	0.0100573
8	-0.0516369	0.1303348	0.0150986
9	-0.081393	0.1733198	0.0186252
10	-0.0923064	0.187241	0.019666
11	-0.0981696	0.1942114	0.0201556
12	-0.1393209	0.2299771	0.0218615
13	-0.1514672	0.2348228	0.021644
14	-0.1677852	0.2378284	0.0209333
15	-0.1827106	0.2361104	0.0197731
16	-0.1852975	0.2352348	0.0195086
17	-0.2033013	0.2226446	0.0169864
18	-0.2140522	0.2074714	0.0147202
19	-0.2286594	0.1711381	0.0102007
20	-0.2384058	0.1241672	$5.3083577 \cdot 10^{-3}$
21	-0.2423045	0.0838428	$1.759066 \cdot 10^{-3}$
22	-0.2433883	0.0448582	$-1.1524711 \cdot 10^{-3}$
Y = 23	-0.2423202	$6.3930849 \cdot 10^{-3}$	$-3.5131767 \cdot 10^{-3}$

24	-0.2364495	-0.0531566	$-5.9571335 \cdot 10^{-3}$
25	-0.2282649	-0.0994351	$-6.6647129 \cdot 10^{-3}$
26	-0.2243262	-0.1169319	$-6.6261563 \cdot 10^{-3}$
27	-0.2222898	-0.1251917	$-6.5407569 \cdot 10^{-3}$
28	-0.2118007	-0.1582103	$-5.2717228 \cdot 10^{-3}$
29	-0.1933148	-0.1925052	$-7.8872029 \cdot 10^{-4}$
30	-0.1705781	-0.2124623	$7.1421955 \cdot 10^{-3}$
31	-0.1554352	-0.216398	0.013654
32	-0.1318149	-0.2115392	0.0257863
33	-0.1285487	-0.2100537	0.0276535
34	-0.1101695	-0.1988537	0.0390259
35	-0.0907805	-0.1830356	0.0526077
36	-0.0767489	-0.16958	0.063578
37	-0.0326575	-0.1153189	0.1119533
38	-0.0267663	-0.1071751	0.1204881
39	-0.0160471	-0.092151	0.1376818
40	0.0120699	-0.0523496	0.1942481
41	0.0449516	$-5.2648879 \cdot 10^{-3}$	0.2756546
42	0.0560104	0.0106922	0.3053179
43	0.0835571	0.050684	0.3825812
44	0.093069	0.0645426	0.409827
45	0.1040174	0.0805111	0.441322
46	0.1131896	0.094726	0.4726439

ДОДАТОК 2

ORIGIN := 1

$$\begin{array}{lll} \alpha_{1,1} := 2.548 \times 10^{-9} & \alpha_{2,1} := 1.239 \times 10^{-9} & \alpha_{3,1} := 3.724 \times 10^{-16} \\ \alpha_{1,2} := 1.239 \times 10^{-9} & \alpha_{2,2} := 2.284 \times 10^{-8} & \alpha_{3,2} := 1.309 \times 10^{-9} \\ \alpha_{1,3} := 3.724 \times 10^{-16} & \alpha_{2,3} := 1.309 \times 10^{-9} & \alpha_{3,3} := 2.548 \times 10^{-9} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} U_{1,1} := 1 & U_{1,2} := 1 & U_{1,3} := 1 \\ U_{2,1} := \frac{(-0.242)}{(-0.015)} & U_{2,2} := \frac{(6.393 \times 10^{-3})}{(0.072)} & U_{2,3} := \frac{(-3.513 \times 10^{-3})}{(0.01)} \\ U_{3,1} := \frac{(-0.016)}{(-0.015)} & U_{3,2} := \frac{(-0.092)}{(0.072)} & U_{3,3} := \frac{(0.138)}{(0.01)} \end{array}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16.133 & 0.089 & -0.351 \\ 1.067 & -1.278 & 13.8 \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 2.548 \times 10^{-9} & 1.239 \times 10^{-9} & 3.724 \times 10^{-16} \\ 1.239 \times 10^{-9} & 2.284 \times 10^{-8} & 1.309 \times 10^{-9} \\ 3.724 \times 10^{-16} & 1.309 \times 10^{-9} & 2.548 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$\omega := (319 \quad 1.23 \times 10^3 \quad 1.752 \times 10^3)^T$$

$$\lambda_1 := \frac{1}{(\omega_1)^2} \quad \lambda_2 := \frac{1}{(\omega_2)^2} \quad \lambda_3 := \frac{1}{(\omega_3)^2}$$

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \cdot U_{2,1} & \alpha_{1,3} \cdot U_{3,1} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \cdot U_{2,1} & \alpha_{2,3} \cdot U_{3,1} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} \cdot U_{2,1} & \alpha_{3,3} \cdot U_{3,1} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \cdot U_{2,2} & \alpha_{1,3} \cdot U_{3,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \cdot U_{2,2} & \alpha_{2,3} \cdot U_{3,2} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} \cdot U_{2,2} & \alpha_{3,3} \cdot U_{3,2} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \cdot U_{2,3} & \alpha_{1,3} \cdot U_{3,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \cdot U_{2,3} & \alpha_{2,3} \cdot U_{3,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} \cdot U_{2,3} & \alpha_{3,3} \cdot U_{3,3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \cdot U_{2,1} \\ \lambda_1 \cdot U_{3,1} \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \cdot U_{2,2} \\ \lambda_2 \cdot U_{3,2} \\ \lambda_3 \\ \lambda_3 \cdot U_{2,3} \\ \lambda_3 \cdot U_{3,3} \end{pmatrix} +$$

$$\underline{\underline{m}} := (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 273.349 \\ 428.995 \\ 143.739 \end{pmatrix}$$

CSM

$$\omega := \sqrt{\frac{1}{z}} = \begin{pmatrix} 318.965 \\ 1.215 \times 10^3 \\ 1.68 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} := \omega \cdot \frac{1}{2\pi} = \begin{pmatrix} 50.765 \\ 193.365 \\ 267.346 \end{pmatrix} \quad \underline{fl} := \begin{pmatrix} 50.7704 \\ 195.7606 \\ 278.8395 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.77 \\ 195.761 \\ 278.839 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e} := \frac{f_i - fl_i}{fl_i}$$

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} -1.097 \times 10^{-4} \\ -0.012 \\ -0.041 \end{pmatrix} +$$

$$\underline{K}(z) := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} m_1 - z & \alpha_{1,2} m_2 & \alpha_{1,3} m_3 \\ \alpha_{2,1} m_1 & \alpha_{2,2} m_2 - z & \alpha_{2,3} m_3 \\ \alpha_{3,1} m_1 & \alpha_{3,2} m_2 & \alpha_{3,3} m_3 - z \end{pmatrix} \quad \underline{K}(z) := 0$$

$$i := 1..3 \quad j := 1..3$$

$$f(z) := |K(z)|$$

$$z := f(z) \text{ solve, } z \rightarrow \begin{pmatrix} 0.0000098291152000712453972 \\ 6.7746419781716482042e-7 \\ 3.5439866810877940182e-7 \end{pmatrix}$$

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Симоновський В. І. Оцінювання коефіцієнтів математичних моделей за експериментальними даними. Теорія і практика. / В.І. Симоновський. – Суми, 2015. – 120 с.
2. Комп'ютерна програма “Force doscillation of the rotor ” : авторське свідоцтво № 61788, Україна / І. В. Павленко, В. І. Симоновський. – Дата реєстрації 23.09.2015 р.
3. Комп'ютерна програма “Critical frequencies of the rotor” : авторське свідоцтво № 59855, Україна / І. В. Павленко, В. І. Симоновський. – Дата реєстрації 27.05.2015 р.
4. Симоновський В.І. Оцінювання параметрів динамічних моделей роторів / Симоновський В.І., Хворост В. А.. – Суми: СумДУ, 2002. – 144 с.
5. Симоновский В. И. Динамика роторов центробежных машин /В.И. Симоновський. – Сумы: СумГУ, 2006. – 126 с.
6. Симоновський В. І. Уточнення математичних моделей коливальних систем за експериментальними даними / Віталій Іович Симоновський. – Суми: СумДУ, 2010. – 91 с.
7. Симоновский В.И. Устойчивость и нелинейные колебания роторов центробежных машин / В.И. Симоновский. – М. : Изд-во «Вища школа», 1986. – 128 с.
8. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
9. Равлюк, Л.Ю. Разработка нелинейной математической модели ротора турбокомпрессора, вращающегося в сегментных подшипниках / Л.Ю. Равлюк, В.И. Симоновский // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки. — 2012. — № 2. — С. 84-89.

10. Гадяка В.Г., Лейких В.Д., Симоновский В.І. Математична модель ротора турбокомпресора для дослідження несинхронних складових вібрацій// Компресорне та енергетичне машинобудування. – 2010-№2(20). – с.48-50.

11. Гадяка В.Г., Лейких Д.В. Симоновский В.І. Явище втрати стійкості обертання ротора на сегментних підшипниках/ Вібронадійність та герметичність відцентрових машин: монографія/под ред.: Марцинковського В.А. , Загорулько А.В. – Суми: Сумський державний університет , 2011. – С.283-293.

12. Pavlenko I. Dynamic Analysis of Centrifugal Machines Rotors with Combined Using 3D and 2D Finite Element Models. **The monograf.** / I. Pavlenko, V. Simonovskiy, J. Pitel', M. Demianenko // Luedenscheid, Germany, RAM-VERLAG, 2018. - 146 p.

13. Павленко І.В. Методи ідентифікації параметрів математичних моделей коливальних процесів: монографія/ І.В. Павленко, В.І. Симоновський. – Суми: Сумський державний університет, 2020.—145с.