

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет



Гусак О. Г., Шарапов С. О., Ратушний О. В.

## ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

Навчальний посібник

*Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету*



Суми  
Сумський державний університет  
2022

УДК 532:533(075.8)

Г 96

Рецензенти:

*М. Г. Хмельнюк* – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри холодильних установок і кондиціонування повітря Одеського національного технологічного університету;

*О. О. Ляпощенко* – доктор технічних наук, професор, професор кафедри хімічної інженерії Сумського державного університету

*Рекомендовано до видання  
вченою радою Сумського державного університету  
як навчальний посібник  
(протокол № 13 від 23.06.2022 року)*

**Гусак О. Г.**

Г 96 Гідрогазодинаміка : навчальний посібник / О. Г. Гусак, С. О. Шарапов, О. В. Ратушний. – Суми : Сумський державний університет, 2022. – 296 с.  
ISBN 978-966-657-905-1

У навчальному посібнику розглянуто рівновагу і рух нестисливої й стисливої рідини, гідравлічні опори, рух рідини в трубах. Наведено основні методи розрахунку напірних трубопроводів, розрахунки витікання через отвори та насадки, викладено основи гідравлічного моделювання, описане явище гідравлічного удару.

Рекомендований для здобувачів вищої освіти навчальних закладів III–IV рівнів акредитації спеціальностей «Теплоенергетика» (освітня програма «Енергетичний менеджмент») й «Енергетичне машинобудування» (освітні програми «Компресори, пневмоагрегати та вакуумна техніка» та «Опалення, вентиляція, кондиціонування повітря і штучний холод»).

**УДК 532:533(075.8)**

ISBN 978-966-657-905-1

© Сумський державний університет, 2022

© Гусак О. Г., Шарапов С. О., Ратушний О. В., 2022

## ЗМІСТ

	С.
ВСТУП .....	9
Предмет гідрогазодинаміки .....	9
Деякі відомості з історії розвитку гідрогазодинаміки .....	11
Основні фізичні властивості рідини .....	15
Текучість.....	15
Густина і питома вага .....	16
Стисливість рідини .....	18
Температурне розширення .....	19
Поверхневий натяг .....	20
В'язкість .....	22
Моделі рідинного середовища і методи гідрогазодинаміки .....	26
Сили, що діють на рідину .....	29
Запитання і завдання для самоконтролю .....	31
Розділ 1 ГІДРОСТАТИКА.....	32
1.1 Гідростатичний тиск та його властивості .....	32
1.2 Повний (абсолютний), манометричний (надлишковий) тиск. Вакуум .....	35
1.3 Диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера) .....	36
1.4 Окремі випадки інтегрування диференціального рівняння рівноваги рідини .....	40
1.4.1 Основне рівняння гідростатики .....	40
1.4.2 Відносний спокій рідини під час обертання посудини навколо вертикальної осі .....	43
1.4.3 Відносний спокій рідини в посудині, що рухається прямолінійно з прискоренням .....	46
1.5 Епюри гідростатичного тиску .....	48
1.6 Прилади для вимірювання тиску .....	50
1.7 Умови рівноваги рідини в з'єднаних посудинах .....	58

1.8 Закон Паскаля та його практичне застосування.....	60
1.9 Рівновага вагомому газу. Барометрична формула .....	63
1.10 Сила тиску рідини на плоскі поверхні .....	66
1.11 Графоаналітичний метод визначення сили тиску рідини на плоскі стінки прямокутної форми .....	70
1.12 Сила тиску рідини на криволінійній поверхні .....	74
1.13 Закон Архімеда та основи теорії плавання тіл .....	79
Запитання і завдання для самоконтролю .....	82
Розділ 2 КІНЕМАТИКА РІДИНИ .....	83
2.1 Основні методи вивчення руху рідини.....	83
2.2 Види руху рідини .....	84
2.3 Прискорення частинки рідини .....	85
2.4 Лінія течії рідини.....	87
2.5 Елементарна струминка рідини.....	89
2.6 Витрата потоку рідини.....	90
2.7 Середня швидкість потоку .....	93
2.8 Рух нескінченно малої частинки рідини (теорема Коші - Гельмгольца).....	95
2.9 Вихрові лінії й трубки. Теорема Гельмгольца. Утворення вихорів .....	99
2.10 Циркуляція швидкості й теорема Стокса.....	103
2.11 Безвихровий або потенціальний рух.....	105
2.12 Плоскі потоки нестисливої рідини. Функція течії та гідродинамічна сітка .....	109
2.13 Поняття про рівномірний і нерівномірний рух рідини .....	114
2.14 Рівняння нерозривності для елементарної струминки .....	114
2.15 Рівняння нерозривності для елементарної струминки у диференціальній формі.....	116
Запитання і завдання для самоконтролю .....	118
Розділ 3 ДИНАМІКА РІДИНИ .....	119
3.1 Диференціальні рівняння руху нев'язкої рідини Ейлера.....	119
3.2 Рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини.....	123

3.3 Геометрична та фізична інтерпретація рівняння Бернуллі.....	125
3.3.1 Геометрична інтерпретація.....	125
3.3.2 Фізична інтерпретація .....	127
3.4 Рівняння Бернуллі для елементарної струминки реальної (в'язкої) рідини .....	129
3.5 Диференціальні рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є – Стокса) .	131
3.6 Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини .....	132
3.7 Приклади застосування рівняння Бернуллі.....	136
3.7.1 Трубка Піто.....	136
3.7.2 Водомір Вентурі (труба Вентурі) .....	137
3.7.3 Водоструминний насос .....	139
3.7.4 Обтікання споруд вітровим потоком.....	140
3.8 Рівняння Бернуллі для стисливої рідини.....	141
Запитання і завдання для самоконтролю .....	144
Розділ 4 ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ ТА ВТРАТИ НАПОРУ ПІД ЧАС РУХУ РІДИНИ .....	145
4.1 Загальні відомості про гідравлічні втрати енергії .....	145
4.2 Режими руху рідини й гідравлічні опори .....	148
4.3 Ламінарний рух рідини в трубі .....	150
4.4 Початкова ділянка ламінарного руху .....	155
4.5 Турбулентний рух рідини .....	157
4.6 Структура турбулентного потоку в трубі.....	162
4.6.1 Розподіл осереднених швидкостей по перерізу труби .....	163
4.6.2 Гідравлічно гладкі та гідравлічно шорсткі труби.....	164
4.6.3 Гідравлічний коефіцієнт тертя (коефіцієнт Дарсі) .....	166
4.6.4 Узагальнена формула Л. С. Лейбензона для визначення втрат напору .....	170
4.6.5 Визначення втрат напору у водопровідних трубах.....	171
Запитання і завдання для самоконтролю .....	173
Розділ 5 МІСЦЕВІ ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ ТА ВТРАТИ НАПОРУ. ОПІРЗА ВІДНОСНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА Й РІДИНИ .....	174

5.1 Класифікація місцевих опорів .....	174
5.2 Раптове розширення потоку .....	178
5.3 Коефіцієнт місцевого опору за поступового розширення .....	182
5.4 Коефіцієнт місцевого опору за поступового звуження.....	184
5.5 Стабілізація потоку за місцевими опорами та їх взаємний вплив .....	185
5.6 Опір за відносного руху твердого тіла та рідини .....	188
5.6.1 Опір тертя.....	189
5.6.2 Опір тиску.....	191
5.6.3 Падіння твердих частинок у рідині .....	193
Запитання і завдання для самоконтролю .....	195
<b>Розділ 6 ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПРОВОДІВ .....</b>	<b>196</b>
6.1 Призначення та класифікація трубопроводів .....	196
6.2 Розрахунок коротких трубопроводів .....	198
6.2.1 Всмоктувальна лінія насоса .....	198
6.2.2 Напірний резервуар із трубопроводом, що складається з двох ділянок різного перерізу.....	200
6.2.3 Сифонний трубопровід.....	203
6.3 Основні задачі розрахунку трубопроводів .....	204
6.3.1 Визначення необхідного напору (тиску) на початку трубопроводу....	205
6.3.2 Трубопровід з насосною подачею рідини.....	208
6.4 Розрахунок складних трубопроводів .....	211
6.4.1 Послідовне з'єднання простих трубопроводів .....	211
6.4.2 Паралельне з'єднання простих трубопроводів .....	213
6.4.3 Розгалужене з'єднання простих трубопроводів .....	214
6.5 Розрахунок довгих трубопроводів.....	216
6.6 Особливості розрахунку трубопроводів під час руху стисливої рідини ...	221
6.7 Усталений рух газорідинних сумішей у трубопроводах .....	224
6.7.1 Властивості газорідинних сумішей .....	225
6.7.2 Структура потоків у газорідинних сумішах.....	229

6.7.3 Гідравлічний розрахунок трубопроводів для газорідних сумішей .....	232
6.7.4 Місцеві опори .....	233
Запитання і завдання для самоконтролю .....	234
Розділ 7 ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ ТА НАСАДКІВ .....	235
7.1 Загальна характеристика процесу витікання рідини .....	235
7.2 Витікання рідини з отворів .....	235
7.2.1 Витікання рідини з малого отвору в тонкій стінці за сталого напору .	235
7.2.2 Витікання рідини з відкритого резервуара .....	238
7.2.3 Траєкторія струменя. Визначення коефіцієнтів швидкості, витрати і стиснення струменів.....	239
7.2.4 Повне досконале, недосконале та неповне стиснення .....	240
7.2.5 Вплив числа Рейнольдса на витікання рідини з отворів .....	242
7.2.6 Витікання рідини через затоплені отвори (під рівень) .....	242
7.3 Витікання рідини з насадків .....	244
7.3.1 Зовнішній циліндричний насадок .....	245
7.3.1 Вакуум у насадку .....	247
7.4 Витікання рідини з отворів і насадків за змінного напору .....	249
7.5 Сила тиску струмини на плоскі й криволінійні поверхні .....	251
7.6 Витікання стисливої рідини з отворів .....	254
Запитання і завдання для самоконтролю .....	258
Розділ 8 ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР У ТРУБОПРОВОДАХ .....	259
8.1 Прямий гідравлічний удар .....	263
8.2 Непрямий гідравлічний удар .....	267
8.3 Гідравлічний удар у тупиковому трубопроводі .....	270
8.4 Порівняння ударного та інерційного тисків .....	271
8.5 Гідравлічний таран .....	273
Запитання і завдання для самоконтролю .....	275
Розділ 9 ОСНОВИ ГІДРАВЛІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.....	276
9.1 Геометрична, кінематична та динамічна подібності .....	276

9.1.1 Подібність гідравлічних явищ .....	276
9.1.2 Закон подібності Ньютона .....	277
9.2 Критерії гідравлічної подібності .....	280
9.3 Моделювання напірних трубопроводів .....	285
9.4 Метод аналізу розмірностей .....	288
9.4.1 Пі-теорема .....	288
9.4.2 Визначення критичного числа Рейнольдса .....	290
9.4.3 Дотичні напруження на стінках труби і гідравлічний коефіцієнт тертя .....	292
Запитання і завдання для самоконтролю .....	295
Список літератури .....	296



## ВСТУП

### Предмет гідрогазодинаміки

Гідрогазодинаміка вивчає закони руху краплинних рідин, що є практично нестисливими, стисливих рідин (газів та парів), а також неоднорідних рідин – наприклад, із завислими частинками твердих речовин.

Оскільки гідрогазодинаміка є розділом класичної механіки, тобто науки про рух будь-яких матеріальних тіл (за винятком елементарних частинок) із швидкостями, що є значно меншими, ніж швидкість світла, її часто називають гідромеханікою, або гідрогазомеханікою. Існує думка (професор В. І. Дежко) про доцільність щодо збереження за цим курсом саме назви «Гідрогазодинаміка» з двох зазначених ним причин. Як і будь-який розділ механіки, його поділяють на статику – вчення про рівновагу тіл під дією сил, кінематику – вчення про геометричні властивості руху тіл у часі, не цікавлячись причинами, що зумовили цей рух, та динаміку – вчення про рух тіл під дією сил. Зрозуміло, що перші два розділи є допоміжними під час вивчення останнього.

Разом із дисциплінами «Технічна термодинаміка» та «Тепломасообмін» гідрогазодинаміка утворює теоретичні основи теплотехніки – науку, яку в прикладному відношенні поділяють на теплоенергетику (використання та перетворення теплової енергії) і теплотехнологію (використання теплової енергії). Таким чином, гідрогазодинаміка є базовою дисципліною в підготовці енергоменеджерів.

На відміну від дисципліни «Тепломасообмін» у гідрогазодинаміці розглядають лише механічну взаємодію потоків між собою та зі стінками каналів, іншими словами, ці потоки вважають ізотермічними. Насправді, різку межу між цими дисциплінами провести складно, оскільки має місце дисипація механічної енергії. Потоки рідини та газу належать до дисипативних систем, у яких енергія впорядкованого процесу переходить в енергію невпорядкованого процесу, а в кінцевому підсумку – в енергію теплового (хаотичного, невпорядкованого) руху молекул.

У цьому разі частина повної механічної енергії потоку, витрачаного на подолання опору тертя, переходить у внутрішню енергію речовини, а це спричиняє зміну її температури.

Рідини й гази, що є об'єктом вивчення гідрогазодинаміки, мають дві основні властивості: суцільність і легку рухомість, або текучість.

Відомо, що всі тіла складаються з рухомих молекул та молекул, що взаємодіють між собою. Гідрогазодинаміка не вивчає руху окремих молекул, а виходить із припущення, що весь простір безперервно (суцільно) заповнений речовиною.

Умова суцільності для рідин та газів виконується, якщо характерні лінійні розміри області течії (діаметр труби, розмах крила і т. ін.) великі порівняно з параметрами, що характеризують рух молекул. Для газів, у яких довжина вільного пробігу молекул істотно залежить від температури й тиску, умова суцільності виконується, якщо лінійні характерні розміри області течії великі порівняно з довжиною вільного пробігу молекул. Для виконання умови суцільності в рідинах необхідно, щоб характерні лінійні розміри області течії були достатньо великими стосовно амплітуди коливань молекул.

Критерієм прийнятності будь-якої фізичної гіпотези є ступінь збігу результатів, одержаних на її основі, з результатами спостережень і вимірювань. Для рідин та газів правомірність використання гіпотези суцільного середовища в широкому діапазоні параметрів повністю підтверджується.

Теоретичні результати, одержані для гіпотетичного суцільного середовища, більш наближаються до результатів спостережень, якщо повніше й точніше в гіпотезі враховані властивості реальних рідин і газів. На жаль, ідеалізацію середовища в багатьох випадках не вдається обмежити лише допущенням її суцільності. Через складності явищ, які вивчають, вимушені не враховувати й деякі інші властивості реальних середовищ.

Залежно від тих властивостей, які приписують гіпотетичному суцільному середовищу, отримують різні його моделі. У разі використання результатів, одержаних для ідеалізованого середовища, важливо визначити межі їх застосування і точність у цих межах. Для встановлення меж застосування необхідно знати сутність явищ і хоча б інтуїтивно правильно їх розуміти.

У гідрогазодинаміці широко використовують поняття «частинка рідини». Цим терміном позначають малий об'єм суцільного середовища, який під час руху деформується, але не переміщується з оточуючим середовищем. Дещо спрощено частинку рідини можна уявити як краплю фарби, що запущена в

рідину (рідина має такі самі властивості, як і крапля фарби) йперемішується разом із нею. Під час вивчення рівноваги і руху рідин та газів частинку рідини уявляють як матеріальний об'єкт, до якого застосовують усі закони механіки. Масу рідини або газу, яку вивчають, розглядають як сукупність безперервно розподілених по об'єму частинок рідини.

Широко використовують у гідрогазодинаміці термін «рідинний об'єм», під яким розуміють малий або кінцевий об'єм рідини, що складається під час руху з одних і тих самих частинок. Аналогічне тлумачення мають терміни «рідинна поверхня» і «рідинна лінія».

Для вибору ефективних моделей під час розв'язування різноманітних задач гідрогазодинаміки необхідно знати дійсні властивості рідин і газів. Від повноти врахування цих властивостей залежать правильність теоретичних результатів та обґрунтоване визначення меж їх застосування.

Легка рухомість, або текучість, дозволяє ввести поняття в'язкості як властивості рідин і газів чинити опір під час їх переміщення. Текучість є величиною, оберненою в'язкості. Порівняно з рідинами газу мають достатньо велику текучість і відповідно, малу в'язкість.

Гідрогазодинаміка вивчає закони руху так званих ньютонівських рідин, у яких напруження, зумовлені наявністю в'язкості, лінійно залежать від швидкості деформації. Для неньютонівських рідин ця залежність має більш складний характер. Закони руху неньютонівських рідин вивчає реологія.

### **Деякі відомості з історії розвитку гідрогазодинаміки**

Гідрогазодинаміка пройшла великий і важкий шлях розвитку, підтверджуючи наявність взаємного зв'язку між наукою й потребами практики, між науковою теорією та буттям суспільства, умовами його матеріального життя.

Якщо антична механіка твердого тіла зародилася у зв'язку з грандіозними будівельними роботами стародавніх часів і необхідними для цих робіт механізмами, то до створення перших ідей гідрогазодинаміки насамперед спонукало питання будівництва водопроводів, плавання суден, політ металевих снарядів. Основною гідродинамічною проблемою того часу було з'ясування суті взаємодії між рухомим твердим тілом і навколишнім середовищем— водою або повітрям – під час плавання або польоту.

Поступово в процесі людської праці накопичувались окремі спостереження, відкривалися нові закономірності руху рідин і газів, що згодом узагальнювались і перетворювались на систему знань – науку. Окремі результати таких спостережень було викладено в працях великого античного філософа Аристотеля (384–322 рр. до н. е.). Загальновідомі заслуги великого математика і механіка Стародавньої Греції Архімеда (287–212 рр. до н. е.) у формулюванні основних принципів гідростатики. Праці Архімеда стали поштовхом до появи чудових гідравлічних апаратів, найбільш відомими з яких є поршневий насос Ктезибія, сифон Герона.

Ідеї Архімеда були відроджені й продовжені Сімоном Стевіном (1548–1620), Галілео Галілеєм (1564–1642) і Блезом Паскалем (1623–1662). Стевін уперше строго сформулював відомий у механіці принцип затвердіння, що дозволяє застосувати в гідростатиці звичні прийоми твердого тіла. Користуючись цим принципом, закон Архімеда довести дуже просто. Галілей і Паскаль використовували для задач гідростатики принципи можливих переміщень.

Велике принципове значення для подальшого розвитку всієї гідрогазодинаміки відіграв закон Паскаля про незалежність тиску на розміщену всередині неї площадку від орієнтації цієї площадки в даній точці нерухомої рідини. Цей закон у подальшому був узагальнений і щодо рухомої рідини.

Під сильним впливом Аристотеля довгий час перебував Леонардо да Вінчі (1452–1519), який у 1506 р. перший установив поняття опору рідких і газоподібних середовищ рухомим у них тілам.

Питання про сутність опору середовища і з'ясування кількісних законів опору тривалий час не були вирішені. Основоположник експериментальної механіки Галілей, провівши досліди з коливанням маятників, дійшов висновку про пропорційність опору першій степені швидкості руху тіла відносно середовища.

Християн Гюйгенс (1629–1695) на основі більш точних дослідів установив близький до дійсності й широко використовуваний і сьогодні закон пропорційності опору квадрату швидкості.

Усі три закони Ісаака Ньютона (1642–1727) застосовують у гідрогазодинаміці. Він дослідив різні аспекти опору рідини – інерційний, в'язкісний та хвильовий.

Розвиток гідрогазодинаміки як науки відбувся у XVIII столітті, починаючи з праць академіків Російської академії наук – Леонарда Ейлера (1707–1783), Даніеля Бернуллі (1706–1782) і М. В. Ломоносова (1711–1765).

Леонард Ейлер вивів рівняння рівноваги й руху рідин та газів, зазначив деякі інтеграли цих рівнянь і сформулював закон збереження маси стосовно рідини. Ейлер дослідив також деякі питання руху до практичних задач суднобудівництва і конструювання гідравлічних машин.

Даніель Бернуллі вперше ввів термін «гідромеханіка». Він установив залежність між питомими енергіями під час руху рідини, яку й сьогодні називають його ім'ям. Крім того, досліджував тиск струмини рідини на пластину.

Подією в історії розвитку гідрогазодинаміки було опублікування в 1783 р. книги Д. Бернуллі «Гідродинаміка», або «Записки про сили і рух рідин».

Праці М. В. Ломоносова з металургії, гірничої справи, водяних двигунів і метеорології зробили великий внесок у гідрогазодинаміку. Він розробив та побудував прилад для вимірювання швидкості й напрямку вітру.

Істотний внесок у теорію зробив Жан Леран Д'Аламбер (1717–1783), який установив таке: якщо до активних сил, що діють на якусь точку рухомого середовища, та сил опору додати сили інерції, утворюється рівноважна система сил (принцип Д'Аламбера), і розробив математичний апарат гідрогазодинаміки.

Праці Ейлера, Бернуллі та Д'Аламбера завершили великий етап розвитку гідродинаміки ідеальної рідини і привели до майже закінченого формулювання основного розділу гідрогазодинаміки. Лагранж (1736–1813) у своїх працях удосконалив методи Ейлера та Д'Аламбера і дав подальший розвиток аналітичним методам гідрогазодинаміки.

Основи теорії руху в'язкої рідини були закладені французьким ученим Клода-Луї Нав'є (1785–1836) й англійським фізиком і математиком Габріелем Стоксом (1819–1903). Тому рівняння руху в'язкої рідини називають рівняннями Нав'є - Стокса.

У 1881 році професор І. С. Громеко (1851–1889) опублікував наукову працю «Деякі випадки руху нестисливої рідини», в якій подав нову форму рівнянь руху рідини, зручну для одержання енергетичних залежностей. Він також уперше провів теоретичне дослідження нестационарного руху рідини в капілярах.

Із численних експериментальних досліджень руху рідини в трубах назвемо досліди з трубками малого діаметра французького лікаря та дослідника Жана Марі Луї Пуазейля (1799–1869), який вивчав рух крові в судинах, і досліди англійського фізика Осборна Рейнольдса (1842–1912), який у 1883 р. установив закон подібності течій у трубах.

Майже епоху в історії розвитку гідрогазодинаміки складають дослідження з повітроплавання щодо розроблення теорії літання ракет і літаків. Результати цих досліджень були викладені в працях видатних російських учених Д. І. Менделєєва (1834–1907), М. Є. Жуковського (1849–1921) і С. Д. Чаплигіна (1869–1942).

У 1880 році Д. І. Менделєєв опублікував працю «Про опір рідин і повітроплавання», в якій були наведені важливі положення про механізм опору руху тіл у рідині й надані основні уявлення про примежовий шар.

Створенню теорії крила і повітряного гвинта були присвячені дослідження М. Є. Жуковського. У 1906 році він розробив теорію підйимальної сили крила, що має велике значення не лише для авіації, а й для сучасного турбомашинобудування. М. Є. Жуковський, як і Александр Гюстав Ейфель (1832–1923) у Франції та Людвіг Прандтль (1875–1950) у Німеччині, був творцем експериментальної аеромеханіки в Росії.

С. Д. Чаплигін присвятив свої дослідження подальшому розвитку теорії крила і ґраток профілів.

Прандтль увів поняття та розробив теорію примежового шару рідини. Він удосконалив трубку Піто з метою одночасного вимірювання одним приладом повного й статичного тиску в потоці, надав сучасного вигляду теорії та практиці гідрогазодинаміки.

Г. Ф. Проскура (1876–1958) створив у 1934 році першу гідродинамічну трубу в Харкові, займався динамікою гідравлічних машин та методами розрахунку турбін. Президія АН України заснувала премію імені Г. Ф. Проскури за наукові праці у галузі гідрогазодинаміки й турбінобудування. У системі АН України успішно функціонує Інститут гідромеханіки.

Піонерські праці Теодора фон Кармана (1881–1963) з аеродинаміки та астронавтики мають важливе значення для механіки, теорії турбулентності, надзвукових польотів, прикладної математики та конструювання літальних апаратів.

Поль Річард Генріх Блазіус (1883–1970) одержав аналітичний розв'язок рівнянь примежового шару, встановив залежність гідравлічного опору труби від числа Рейнольдса.

Яскравим взірцем використання та розвитку досягнень гідрогазодинаміки є праці двох вихованців Київського політехнічного інституту – І. І. Сікорського (1889–1972) та С. П. Корольова (1907–1966).

Після закінчення КПІ І. І. Сікорський відкрив у Києві майстерню для виготовлення вертольота. У 1912–1913 рр. він спроектував і виготовив двомоторний літак «Русский Витязь» («Гранд») та чотиримоторний літак С-22 «Илья Муромець». У 1931 році вже в США, у власній компанії «Вейланд-Сікорський» він створив літак-амфібію, на основі якого подібні літаки випускають у США і до цього часу. Врешті, в 1939 році І. І. Сікорський почав випускати вертольоти власної конструкції.

У 1933 році С. П. Корольов разом із Ф. А. Цандером запустили першу ракету на рідкому паливі. Після Другої світової війни вдосконалив німецьку ракету «Фау-2» (Vergeltungswaffe-2), створив першу у світі міжконтинентальну балістичну ракету. С. П. Корольов керував роботами щодо створення, випробувань, конструювання та запускання безпілотних і пілотованих апаратів.

## **Основні фізичні властивості рідини**

Рідиною називають фізичне тіло, в якому зв'язки між окремими частинками надзвичайно слабкі внаслідок малих сил зчеплення, що діють між ними. Цим пояснюється те, що рідини надзвичайно рухомі і, не маючи власної форми, завжди набирають форми того посуду, в якому вони перебувають.

### *Текучість*

Текучість – це найхарактерніша властивість рідини, легкорухомість її частинок, зумовлена неспроможністю рідини сприймати дотичні напруження в стані спокою. Рідина не може зберігати свою форму, вона набирає форми того резервуара, в якому міститься.

Рідини бувають стисливі й нестисливі. До нестисливих рідин належать вода, нафта, олія та інші (це краплинні рідини). Стисливими рідинами є повітря та інші гази. Краплинні рідини мають власний об'єм, що займає частину об'єму

резервуара. Стисливі рідини такої властивості не мають і заповнюють весь об'єм закритого резервуара.

Краплинні рідини (на відміну від газів) мають граничну поверхню між ними та оточуючим їх газом, яку називають вільною поверхнею. У полі сили ваги рідина в стані спокою має вільну поверхню у вигляді горизонтальної площини. В умовах невагомості вільна поверхня рідини в стані спокою в результаті дії сили поверхневого натягу є сферою. Ця властивість краплинної рідини, як і її незначна стисливість, зумовлена постійною взаємодією сусідніх молекул. У газі молекули взаємодіють лише на момент взаємного зіткнення. Більшу частину часу вони вільно рухаються в просторі. Тому внаслідок хаотичного характеру теплового руху молекул газу він прагне рівномірно розподілитися по всій замкненій частині простору, в якій перебуває. Якщо частина простору необмежена, то об'єм газу може необмежено збільшуватися. У газі (на відміну від рідини) можна необмежено зменшувати тиск або підвищувати температуру і в цьому разі властивості газу змінюються безперервно. У рідині тиск може зменшуватися до деякого визначеного значення, нижче від якого починається утворення всередині неї пароповітряних пухирців – виникають фазові переходи, що якісно змінює загальні властивості текучого середовища і відповідно загальну картину течії. Аналогічні явища можуть мати місце й у разі підвищення температури рідини.

### *Густина і питома вага*

Густиною середовища називають границю відношення маси нескінченно малої частинки  $\Delta m$  навколо певної точки до її об'єму  $\Delta W$ , коли останній наближається до нуля:

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W} \quad (1)$$

або для безперервного середовища

$$\rho = \frac{m}{W}. \quad (2)$$



Значення густини  $\rho$  деяких рідин,  $\text{кг}/\text{м}^3$ :

Вода:

- за  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  999,9
- за  $t = 4 \text{ }^\circ\text{C}$  1 000,0
- за  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  998,2
- за  $t = 40 \text{ }^\circ\text{C}$  992,2
- за  $t = 99 \text{ }^\circ\text{C}$  952,1
- морська за  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  1 002–1 029

Нафта за  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  850–950

Ртуть за  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  13 547

Олива для гідравлічних систем до 850

Повітря за атмосферного тиску  
і температури  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  (стандартні умови) 1,185

Густина однорідних краплинних рідин слабо залежить від тиску та помітно – від температури. Найбільшу густину вода має за температури  $+4 \text{ }^\circ\text{C}$ .

На відміну від рідин густина газів сильно змінюється залежно від температури й тиску.

У гідрогазодинаміці також використовують таку характеристику рідини, як питома вага, що є відношенням ваги рідини  $G$  до об'єму  $W$ , який вона займає:

$$\gamma = \frac{G}{W}. \quad (3)$$

Оскільки питома вага й густина – це відношення ваги та маси до однакового об'єму, то маємо такий зв'язок між ними:

$$\gamma = \rho \cdot g, \quad (4)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

Питому вагу вимірюють у ньютонках, поділених на кубічний метр ( $\text{Н}/\text{м}^3$ ).

В англійській літературі використовують поняття «specific gravity – SG», яке можна перекласти як «відносна густина» – це відношення густини рідини до густини води за фіксованих умов, найчастіше за температури  $+4 \text{ }^\circ\text{C}$ :

$$SG = \frac{\rho}{\rho_{H_2O(+4^\circ C)}}. \quad (5)$$

Перевагою цієї характеристики є те, що її величина не залежить від системи одиниць, у якій проводять розрахунки. Так, морська вода має  $SG = 1,03$ ; гліцерин  $SG = 1,26$ ; етиловий спирт  $SG = 0,789$ ; бензин  $SG = 0,68$ ; ртуть  $SG = 13,6$ .

### Стисливість рідини

Стисливість – це властивість рідини змінювати свій об'єм залежно від тиску. Стисливість характеризується коефіцієнтом об'ємної стисливості  $\beta_p$  і показує, наскільки зміниться об'єм рідини за зміни тиску на одну одиницю.

Згідно з визначенням зміна об'єму сталої маси рідини  $W_0$  за зміни тиску на величину  $\Delta p = p - p_0$  дорівнює

$$W(p) - W_0 = -\Delta W = \beta_p \cdot W_0 \cdot \Delta p, \quad (6)$$

де  $W(p)$  – об'єм, який займає рідина в разі підвищення тиску на  $\Delta p$ ;  
 $\Delta W$  – величина зміни об'єму.

Знак «мінус» свідчить про те, що з підвищенням тиску об'єм рідини зменшується.

Згідно із (6) коефіцієнт об'ємної стисливості  $\beta_p$  дорівнює

$$\beta_p = -\frac{\Delta W}{W_0 \cdot \Delta p}, \quad (1/\text{Па}). \quad (7)$$

Величину, обернену до коефіцієнта об'ємної стисливості  $\beta_p$ , називають коефіцієнтом об'ємної пружності рідини  $E = \frac{1}{\beta_p}$ , (Па).

Він залежить від швидкості зміни тиску в рідині, причому за повільних процесів коефіцієнт об'ємної пружності значно менший, ніж у разі швидкозмінних процесів. За повільних змін тиску процес зміни об'єму рідини ізотермічний, і відповідно деформативність рідини характеризується ізотермічним об'ємним коефіцієнтом (модулем) пружності  $E_i$ . У разі швидкої

зміни тиску процес деформації рідини адіабатичний і характеризується адіабатичним об'ємним коефіцієнтом (модулем) пружності  $E_a$ .

За зміни тиску на  $\Delta p$  густина рідини  $\rho_{(p)}$  може бути розрахована за формулою

$$\rho_{(p)} = \frac{\rho_0}{1 - \beta_p \cdot \Delta p}, \quad (8)$$

де  $\rho_0$  – густина рідини за тиску  $p_0$ .

Для води  $\beta_p = 4,9 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}$ , для бензину  $\beta_p = 9,2 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}$ .

#### *Температурне розширення*

Під поняттям температурного розширення розуміють зміну об'єму заданої маси рідини за рахунок зміни температури. Цей процес характеризується коефіцієнтом температурного розширення рідини  $\beta_t$ .

Згідно з визначенням у разі підвищення температури заданої маси рідини на величину  $\Delta t$  зміна об'єму дорівнює:

$$\Delta W = W(t) - W_0 = W_0 \cdot \beta_t \cdot \Delta t. \quad (9)$$

Тоді вираз для визначення коефіцієнта температурного розширення матиме вигляд

$$\beta_t = \frac{\Delta W}{W_0 \cdot \Delta t}, \quad (1/^\circ\text{C}). \quad (10)$$

Зі зміною температури рідини від  $t_0$  до  $t$  густину  $\rho$  визначають за залежністю

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta_t \cdot \Delta t}, \quad (11)$$

де  $\rho_0$  – густина рідини за  $t_0$ .

Для води  $\beta_t = 2 \cdot 10^{-4} \text{C}^{-1}$ , для бензину  $\beta_t = 1,255 \cdot 10^{-3} \text{C}^{-1}$ .

Для газів за відносно невеликих температур і тисків густину можна визначити з рівняння газового стану Клапейрона – Менделєєва:

$$\rho = \frac{p}{R^* \cdot T}, \quad (12)$$

де  $R^*$  – питома газова стала, для повітря  $R^* = 287 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , для метану  $R^* = 520 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;

$T$  – термодинамічна температура, К.

### Поверхневий натяг

На поверхні рідини, що контактує з газом або іншою рідиною, з якою вона не змішується, утворюється щось на зразок плівки, інколи досить міцної. Так, сталеві голки, акуратно покладені на воду, будуть утримуватися на її поверхні.

Пояснення цьому явищу таке: молекула всередині рідини притягується до сусідніх молекул з усіх боків, а на поверхні – лише з боку більш глибоких молекул. За рахунок цього утворюється вислідна сила, що сприяє зменшенню поверхні розділу – «натягує» її, оскільки спрямована всередину рідини.

Поверхневий натяг є відношенням енергії мономолекулярного шару  $E_n$ , витраченої на утворення поверхні розділу, до цієї поверхні площею  $A$  або силою  $F$ , що діє на одиницю довжини  $L$  контуру поверхні та намагається скоротити цю довжину до мінімуму:

$$\sigma = \frac{E_n}{A}, \quad (\text{Дж}/\text{м}^2),$$
$$\sigma = \frac{F}{L}, \quad (\text{Н}/\text{м}). \quad (13)$$

Поверхневий натяг на межі між водою та повітрям за нормальних умов становить  $\sigma = 0,073 \text{ Н}/\text{м}$ , що в сім разів менше, ніж для ртуті. Тому краплина ртуті набирає майже ідеальної форми кулі, а воді заважає сила тяжіння.

З поверхневим натягом пов'язане явище змочування. На межі між рідиною й твердим тілом виникають сили взаємодії між молекулами цих двох середовищ. Співвідношення між цими силами та силами взаємодії між молекулами самої рідини визначають характер граничних явищ. Якщо на

твердій горизонтальній поверхні розмістити краплю рідини, то можливі випадки:

- а) повного розтікання рідини по твердій поверхні тонким шаром (повне змочування), коли крайовий кут  $\theta = 0$  (рис. 1 а);
- б) часткового змочування, коли крайовий кут  $\theta < \frac{\pi}{2}$  (рис. 1 б);
- в) часткового незмочування, коли крайовий кут  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  (рис. 1 в);
- г) повного незмочування, коли крайовий кут  $\theta = \pi$  (рис. 1 г).

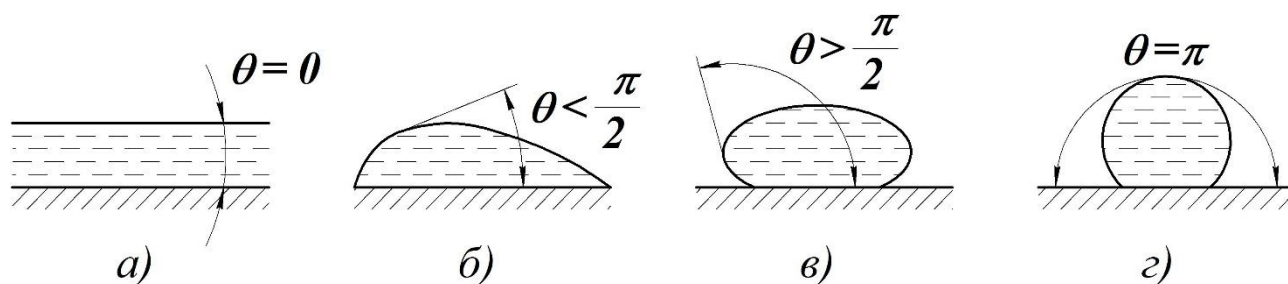


Рисунок 1 – Можливі випадки змочування твердої поверхні в'язкою рідиною

Хоча й існує незмочування, а під час руху рідини швидкості частинок, що доторкуються до твердої поверхні, здебільшого дорівнюють швидкості останньої. Цей факт для гідрогазодинаміки досить важливий, оскільки на ньому базується формулювання граничних умов під час поставлення гідродинамічних задач.

Сили молекулярної взаємодії між рідиною й твердими стінками створюють викривлення вільної поверхні поблизу цих стінок. У трубці малого діаметра (капілярі) поверхня може бути вигнутою (змочування) або випуклою (незмочування) (рис. 2).

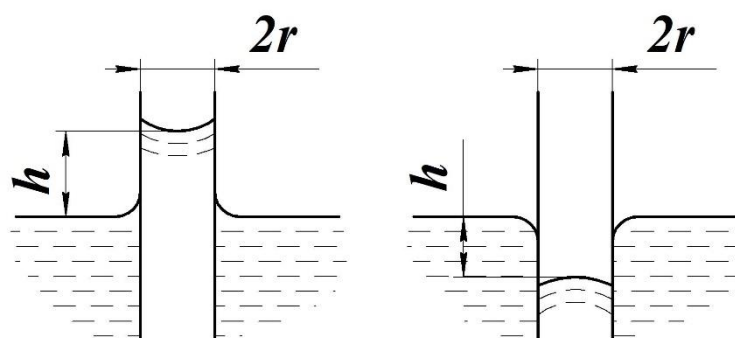


Рисунок 2 – Викривлення вільної поверхні і капілярне піднімання чи зниження рівня у вузьких трубках

Викривлення вільної поверхні супроводжується появою додаткового тиску, що створює піднімання або зниження рівня в таких трубках. Висота капілярного піднімання визначається за формулою

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{\rho \cdot g \cdot r}, \quad (14)$$

де  $\theta$  – крайовий кут;

$\rho$  – густина;

$g$  – прискорення вільного падіння;

$r$  – радіус трубки.

Як бачимо з формули, за малих  $r$  піднімання може бути значним.

Під час проєктування гідравлічних і теплових машин, а також їх експлуатації можуть бути корисними також деякі інші властивості рідини: випарність – здатність переходити в газовий стан за температури, нижчої від точки кипіння; розчинність газів у рідині; піноутворення; хімічна й механічна стійкість під час експлуатації; сумісність робочих рідин із конструкційними матеріалами та особливо з матеріалами ущільнень.

### *В'язкість*

Під час руху реальної рідини між її шарами виникають сили внутрішнього тертя, зумовлені в'язкістю рідини. Унаслідок цього швидкість переміщення окремих шарів рідини неоднакова (рис. 3). Між шарами рідини виникають відносні зсуви. Ще в 1687 році Ньютон сформулював гіпотезу про те, що сили внутрішнього тертя прямо пропорційні швидкості відносного руху, площі поверхні контактувальних шарів рідини, залежать від в'язкості рідини й не залежать від тиску.

Гіпотезу Ньютона неодноразово перевіряли дослідним шляхом і вона була повністю підтверджена. Надзвичайно цінні дослідження для підтвердження гіпотези Ньютона були виконані великим російським ученим, професором Н. П. Петровим (1836–1920), творцем гідравлічної теорії змащування.

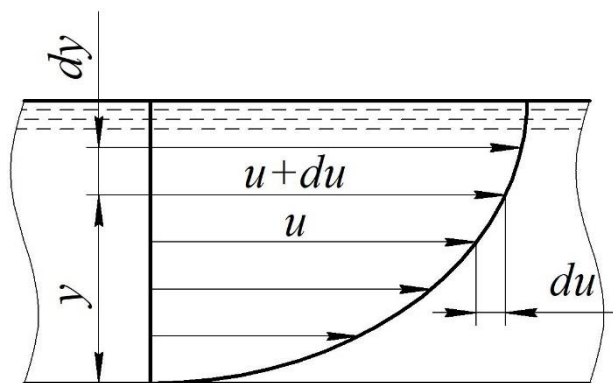


Рисунок 3 – Епюра швидкостей у потоці рідини

Уявлення про пропорційність сил внутрішнього тертя швидкості відносного руху контактувальних шарів рідини в математичній формі може бути наведене таким чином:

$$T = S \cdot \mu \cdot \left| \frac{du}{dy} \right|, \quad (15)$$

де  $T$  – сила внутрішнього тертя;

$S$  – площа контактувальних шарів;

$\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості;

$\frac{du}{dy}$  – градієнт швидкості за нормаллю за напрямком руху;

$du$  – різниця швидкостей контактувальних шарів рідини за умови, що ці шари є нескінченно тонкими.

Унаслідок внутрішнього тертя у в'язких рідинах виникають дотичні напруження, що можуть бути визначені діленням сили внутрішнього тертя на площу тертя  $S$ :

$$\tau = \frac{T}{S} = \mu \left| \frac{du}{dy} \right|. \quad (16)$$

Коли рідина перестає рухатися, і швидкості ковзання дорівнюють нулю, зникають і сили внутрішнього тертя. Тому в рідині, що перебуває в стані спокою, сили внутрішнього тертя і відповідно дотичні напруження не з'являються.

Одиницею вимірювання коефіцієнта динамічної в'язкості  $\mu$  є  $\text{Па} \cdot \text{с}$ .

В'язкість рідин змінюється зі зміною температури. У цьому разі з підвищенням температури в'язкість краплинних рідин різко зменшується. В'язкість краплинних рідин за зміни тиску змінюється неістотно. Тому цією зміною здебільшого нехтують.

На практиці дуже часто користуються не динамічним коефіцієнтом в'язкості  $\mu$ , а відношенням його до густини рідини:

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho}, \text{ (м}^2\text{/с)}, \quad (17)$$

що називається кінематичним коефіцієнтом в'язкості. Цю назву величині  $\vartheta$  присвоєно внаслідок того, що її розмірність містить лише кінематичні параметри: довжину й час.

Залежно від в'язкості рідини поділяють на ньютонівські та неньютонівські. Ньютонівські – це ті, під час руху яких дотичні напруження, що виникають, прямо пропорційні швидкості кутової деформації в усьому діапазоні її зміни (градієнт швидкості), тобто рідини, поведінка яких підпорядковується закону Ньютона. Якщо закон пропорційності не діє, то рідини називають неньютонівськими. Наука про характер залежності  $\tau = f\left(\frac{dU}{dy}\right)$  називається реологією. Для неньютонівських рідин динамічна в'язкість  $\mu$  може залежати від низки факторів, зокрема, від часу, впродовж якого діє напруження, та величини цього напруження. У повсякденній практиці (зокрема, в машинобудуванні) доводиться досить часто працювати з неньютонівськими рідинами – це різні мастила, в'язкопластичні речовини, нафта та нафтопродукти тощо.

Неньютонівські рідини поділяють на три великі групи. До першої групи належать рідини, в яких градієнт швидкості, або швидкість зсуву  $\frac{dU}{dy}$ , залежить лише від дотичних напружень  $\tau$ . Такі рідини описують реологічним рівнянням типу  $\frac{dU}{dy} = f$ , їх називають реологічно стаціонарними рідинами. До таких рідин належать псевдопластичні рідини, реологічний закон для яких – це закон Освальда де Віля:

$$\tau = k \left( \frac{dU}{dy} \right)^n, \quad (18)$$

де  $k$  і  $n$  – реологічні константи.



До цієї групи належать в'язкопластичні середовища, наприклад, рідини, що описуються законом Шведова – Бінгама:

$$\tau = \tau_0 + \mu' \cdot \frac{dU}{dy}, \quad (19)$$

де  $\tau_0$  – початкове напруження зсуву;

$\mu'$  – коефіцієнт пластичності, або структурної в'язкості.

Другу групу становлять рідини, в'язкість яких змінюється з часом за дії відповідних напружень. Рідини цієї групи є реологічно нестационарними і в загальному випадку можуть бути описані рівнянням типу  $\frac{dU}{dy} = f(\tau, t)$ .

Тиксотронні рідини здатні створювати структуру в спокійному стані, що зникає після перемішування.

Реопектичні рідини здатні створювати структуру під час перемішування і руйнувати її в стані спокою.

Третя група – в'язкопружні рідини, тобто такі, що мають властивості як твердого тіла, так і рідини й частково проявляють пружне поновлення форми після зняття напруження.

Для опису рідини подібного типу Максвелл запропонував об'єднати закон Гука і закон Ньютона в одне реологічне рівняння стану:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{r} + \frac{\tau}{G'} \quad (20)$$

де  $G$  – модуль зсуву.

Типовим прикладом максвеллова тіла може бути смола.

На рисунку 4 наведено графічне зображення основних реологічних законів у рідинах.

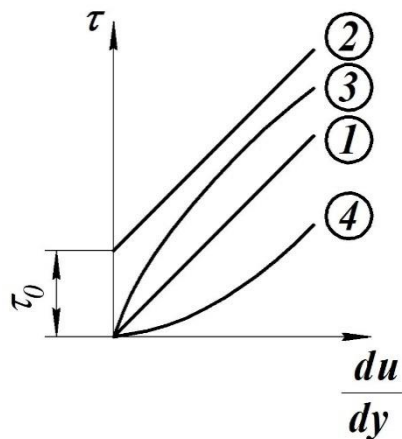


Рисунок 4. – Реологічні закони в рідинах:

- 1 – ньютонівська рідина;
- 2 – рідина Шведова – Бінгама;
- 3 – псевдопластична рідина (закон Освальда де Віля);
- 4 – дилатантна рідина (закон Освальда де Віля)

### Моделі рідинного середовища і методи гідрогазодинаміки

Математичний опис рівнянь руху рідинного середовища загальними диференціальними рівняннями, що враховують усі фізичні властивості, характерні для цього середовища, є досить складним завданням. Якщо навіть обмежитись урахуванням лише текучості, в'язкості й стисливості, то й тоді рівняння руху, що виражають основні закони механіки, стають настільки складними, що до цього часу не вдалося розробити загальних аналітичних методів їх розв'язання. Застосування чисельних методів інтегрування таких рівнянь на базі сучасних ЕОМ також пов'язане зі значними труднощами. У гідрогазодинаміці з цих причин використовують різні спрощені моделі середовища та окремих явищ.

Під моделлю реального середовища розуміють таке гіпотетичне середовище, в якому враховані лише деякі з фізичних властивостей, істотних для певного кола явищ і технічних задач. Інші менш істотні властивості середовища в моделі ігноруються.

Однією з основних у гідрогазодинаміці є модель нестисливої ідеальної (або нев'язкої) рідини. Так називають гіпотетичне суцільне середовище, яке вважається абсолютно нестисливим і нерозширюваним, має абсолютну рухомість частинок і в якому відсутня сила внутрішнього тертя. Неврахування властивостей в'язкості й стисливості значно спрощує математичний опис руху рідини і дозволяє одержати багато рішень у кінцевому замкненому вигляді.

Незважаючи на значний ступінь ідеалізації середовища, теорія нестисливої ідеальної рідини дає низку не лише якісних, а й кількісних підтверджених досвідом результатів, корисних для практичних цілей. Не менш істотне значення цієї теорії полягає і в тому, що вона є базою для інших моделей, які більш повно враховують властивості реальних середовищ. Проте необхідно мати на увазі, що нехтування в'язкістю рідини є дуже істотною ідеалізацією, що може призвести до результатів, які різко розходяться з досвідом.

Більш повно властивості реальної рідини враховують у моделі в'язкої нестисливої рідини, яка є середовищем, що має текучість і в'язкість, але абсолютно нестислива. Теорія в'язкої нестисливої рідини лише в обмеженій кількості випадків із простими граничними умовами дозволяє отримати точні розв'язки повних рівнянь руху. Найбільше значення в цій теорії мають спрощені рівняння та їх розв'язки. Такі рівняння одержують відкиданням тих членів, які неістотно впливають на відповідність теоретичних розв'язків досвіду. Розв'язок спрощених рівнянь може бути як точним, так і наближеним.

Як відомо, краплинні рідини – це малостисливі рідини, тому для широкого кола теоретичних та прикладних задач нехтування стисливістю є цілком допустимою ідеалізацією й досить мало впливає на одержаний результат і ступінь його збігу з даними дослідів. Але все ж таки існують випадки руху рідин, які неможливо достатньо достовірно описати, якщо не враховувати стисливості. Прикладом може бути явище гідравлічного удару в трубах.

Незважаючи на те, що гази є легко стискуваними середовищами, ця властивість не проявляється відчутно, якщо швидкості руху порівняно невеликі (орієнтовно за нормальних умов менше ніж 70 м/с). Для газів, що проходять із малими швидкостями, застосовують обидві описані моделі. Крім того зазвичай під час описування руху газів допустиме нехтування впливом сили тяжіння. Тому можна говорити про моделі ідеальної невагомої нестисливої рідини (газу) або в'язкої невагомої нестисливої рідини (газу).

Існують й інші моделі нестисливих рідин, які використовують у спеціальних розділах гідрогазодинаміки і враховують деякі специфічні властивості цих середовищ. Такі, наприклад, як електропровідні в'язкі нестисливі середовища, двофазні нестисливі середовища, що являють собою суміші рідин та газів або суміші рідин і твердих зважених частинок.

За швидкостей, зіставних зі швидкістю звуку в газі і, тим більше, перевищуючи її, стисливість істотно впливає на характер гідродинамічних явищ, і її врахування досить часто буває більш важливим, ніж урахування в'язкості. Рух

газів з урахуванням їх стисливості є об'єктом вивчення в газовій динаміці, де основну роль відіграють дві моделі середовища: ідеальний (тобто нев'язкий) газ і в'язкий газ. За останні десятиріччя набули широкого розвитку розділи газової динаміки, в яких істотні електропровідність, дисоціація молекул та інші специфічні особливості середовища. Розроблені відповідні моделі цих середовищ та ефективні методи їх дослідження.

У цьому курсі ми будемо мати справу лише з моделями ідеальних і в'язких нестисливих рідин та лише деякою мірою – з ідеальним газом. Далі зупинимося на стислій характеристиці лише тих методів, які застосовують для розв'язування задач, що базуються на цих моделях.

Найбільшими є групи аналітичних методів, які полягають у складанні диференціальних (іноді інтегральних або кінцевих) рівнянь руху, що враховують специфіку конкретного гідродинамічного явища і в знаходженні точних або наближених розв'язків цих рівнянь. Той чи інший метод може бути побудований на одній із зазначених моделей середовища. Крім того, на основі попереднього вивчення створюють розрахункову модель цього явища, в якій по можливості враховують істотні ознаки і нехтують іншими. Загальні рівняння спрощують на основі врахування характерних особливостей цього явища або задачі і вибирають відповідний математичний метод розв'язання одержаних таким чином рівнянь. Важливу роль у цьому разі відіграє вибір раціональної системи координат. Одна й та сама задача, що не має розв'язку в довільно вибраній системі координат, може бути розв'язана, якщо вибрана відповідна спеціальна система координат. Граничні умови за математичного формулювання задачі визначають відповідно до даних попереднього якісного вивчення явища або логічного аналізу. Математичний апарат, який використовують у гідрогазодинаміці, досить різноманітний, але стосовно розділів математики, найбільш широко використовуються диференціальні рівняння, рівняння математичної фізики, функції комплексної змінної, інтегральні рівняння, чисельних методів.

Уже відзначалася важлива роль експерименту в гідрогазодинаміці. Дійсно, інколи експеримент є єдиною можливістю одержання ефективного, тобто придатного для практичного застосування, розв'язку задачі.

Широкого використання набувають так звані напівемпіричні методи, суттю яких є те, що на основі деякої моделі явища теоретично встановлюють структуру (загальний вигляд) залежності між шуканими параметрами, а константи, які до неї входять, знаходять експериментально.

Тісно пов'язана з експериментальним методом його теоретична основа – теорія подібності. Теорія подібності встановлює ті умови й правила, за якими результати експериментів на макетах необхідно переносити на натурний об'єкт. Проте роль теорії подібності цим не вичерпується, оскільки вона є ефективним інструментом узагальнення та опрацювання експериментальних даних, а також дає методи якісного аналізу гідродинамічних явищ. Останню роль відіграє також теорія розмірностей, тісно пов'язана з теорією подібності.

Необхідно також згадати й про метод аналогій, який використовує ту обставину, що деякі явища різної фізичної природи (наприклад, електричні, магнітні, теплові, гідродинамічні) можуть описуватись однаковими за формою диференціальними рівняннями. Це дозволяє, наприклад, гідродинамічні явища відтворювати на електричних моделях, для течії нестисливої рідини застосовувати метод, розроблений стосовно газових течій тощо.

### **Сили, що діють на рідину**

У гідрогазодинаміці, як уже було зазначено, рідину розглядають як суцільне безперервне матеріальне середовище.

Усі сили, що діють на рідину, можна поділити на внутрішні та зовнішні. Внутрішні сили – це сили взаємодії між частинками рідини. Зовнішні сили – це сили, прикладені до частинок об'єму рідини, який розглядають. Ці сили можна поділити на поверхневі й масові.

Внаслідок текучості рідини, тобто рухомості її частинок, зосереджені сили не можуть діяти на рідину. Ці сили повинні діяти лише як рівномірно розподілені по об'єму або на поверхні рідини.

Поверхневими силами називають сили, розподілені рівномірно на поверхні рідини і пропорційні цій поверхні.

Поверхневу силу, що діє нормально до будь-якої площадки, називають силою тиску. Поверхневу силу, що діє по дотичній до площадки, називають силою опору. Сили тиску виявляються як під час руху, так і за умови рівноваги рідини, сили опору – лише під час руху рідини.

Масові сили пропорційні масі й діють на всі частинки об'єму рідини, який розглядають. До масових сил належать сили тяжіння та сили інерції:

$$G = m \cdot g, \quad (21)$$

$$F = m \cdot a, \quad (22)$$

де  $G$  – сила тяжіння;

$m$  – маса рідини.

$g$  – прискорення вільного падіння;

$F$  – сила інерції;

$a$  – прискорення руху рідини.

У гідрогазодинаміці розглядають одиничні масові сили та їх проєкції на координатні осі. Відповідно до цього можна записати таке:

$$\frac{G}{m} = g, \quad (23)$$

$$\frac{F}{m} = a. \quad (24)$$

Тобто одиничні масові сили виражають відповідним прискоренням руху. Проєкції одиничних масових сил на осі координат можна записати так: для сили тяжіння –  $F_x, F_y, F_z$ , для сили інерції:

$$X = a_x = \frac{dU_x}{dt}, \quad Y = a_y = \frac{dU_y}{dt}, \quad Z = a_z = \frac{dU_z}{dt}, \quad (25)$$

де  $a_x, a_y, a_z$  – проєкції прискорення руху рідини на координатні осі, виражені через похідні проєкцій швидкості  $dU_x, dU_y, dU_z$  за часом  $dt$ .

### Запитання і завдання для самоконтролю

- 1 Дайте визначення коефіцієнта об'ємної стисливості та коефіцієнта температурного розширення.
- 2 Як формулюється закон внутрішнього тертя в рідині?
- 3 Чим зумовлена в'язкість рідини?
- 4 Чи існують дотичні напруження в нерухомій рідині?
- 5 Поясніть терміни «ньютонівська» і «неньютонівська» рідина.
- 6 Наведіть моделі рідинного середовища в гідрогазодинаміці.
- 7 Які методи досліджень використовують у гідрогазодинаміці?
- 8 Назвіть сили, які діють на рідину.

## Розділ 1 ГІДРОСТАТИКА

*Гідростатика* – це розділ гідрогазодинаміки, в якому вивчають закони рівноваги рідини в стані абсолютного або відносного спокою.

Під абсолютним спокоєм розуміють стан рідини, за якого поверхневі сили врівноважуються силою ваги, а під відносним – поверхневі сили, крім сили ваги, врівноважуються силами інерції.

### 1.1 Гідростатичний тиск та його властивості

Розглянемо довільний об'єм рідини (рис. 1.1), що перебуває в рівновазі під дією зовнішніх сил.

Розітнемо цей об'єм площиною  $\omega$  й уявно відкинемо його частину з одного боку від цієї площини.

Для того щоб збереглися умови рівноваги, дію відкинutoї частини замінимо рівнодієюною силою  $F$ . На площині  $\omega$  виділимо елементарну площину  $\Delta\omega$ . На неї буде діяти лише частина рівнодієюною сили  $\Delta F$ .

Відношення  $\Delta F$  до  $\Delta\omega$ , якщо  $\Delta\omega$  наближається до нуля, називають *гідростатичним тиском у точці*:

$$P = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta\omega}, \quad (1.1)$$

або

$$P = \frac{dF}{d\omega}. \quad (1.2)$$

Гідростатичний тиск має три основні властивості:

1 Гідростатичний тиск спрямований по внутрішній нормалі до поверхні, на яку він діє (тобто перпендикулярно до поверхні). У рідині не виникають розтягувальні напруження, а якщо вона перебуває в стані спокою, то в ній не виникають і дотичні напруження.



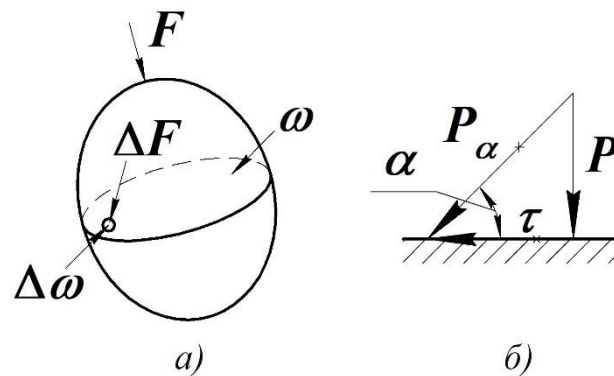


Рисунок 1.1 – Схема для визначення гідростатичного тиску

Тиск може діяти на площину лише під кутом  $90^\circ$ , тому що інакше його можна розкласти на дві складові: нормальну  $p$  і дотичну  $\tau$ . Проте, як уже було зазначено, дотичні напруження можуть виникати в рідині лише під час їх руху. Це ще раз доводить, що гідростатичний тиск діє лише нормально до поверхні й спричиняє стискальні зусилля.

2 У будь-якій точці рідини гідростатичний тиск є однаковим за всіма напрямками. Для ствердження цього положення виділимо в об'ємі рідини призму з основою у вигляді трикутника  $ABC$  (рис. 1.2 а) і замінимо дію об'єму рідини із зовнішнього боку від призми на її бокові грані відповідними силами. Оскільки призма перебуває в рівновазі, то багатокутник (у цьому разі трикутник) цих сил буде замкненим (рис. 1.2 б). Трикутник сил є подібним до трикутника  $ABC$ , і з закону подібності випливає, що

$$\frac{p_{AB}}{AB} = \frac{p_{BC}}{BC} = \frac{p_{CA}}{CA}.$$

Поділимо всі члени цього рівняння на довжину призми  $\Delta l$ :

$$\frac{p_{AB}}{AB \cdot \Delta l} = \frac{p_{BC}}{BC \cdot \Delta l} = \frac{p_{CA}}{CA \cdot \Delta l}.$$

Добутки в знаменниках цього виразу є площами відповідних граней призми. Якщо розміри  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  і  $\Delta l$  будуть наближатися до нуля, то відповідно до виразу (1.1) маємо

$$p_{AB} = p_{BC} = p_{CA} = p. \quad (1.3)$$

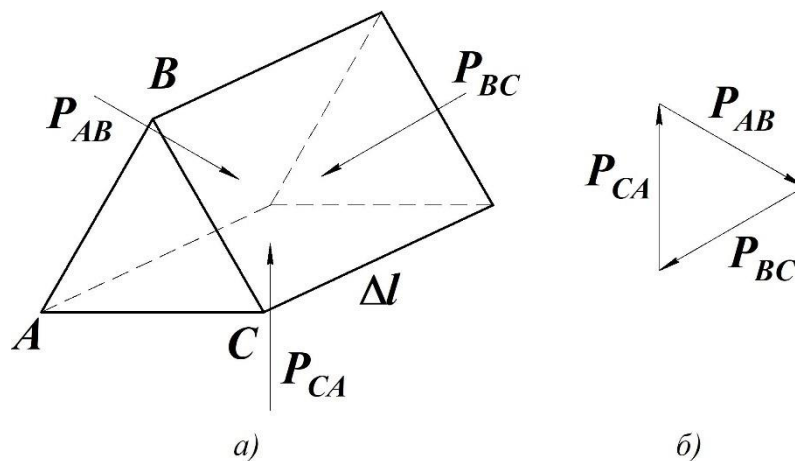


Рисунок 1.2 – Схема для підтвердження однаковості тиску в будь-якій точці рідини за всіма напрямками

Оскільки орієнтація граней призми була вибрана довільно, то необхідно вважати доведеним положення про рівність тиску в одній точці за всіма напрямками.

Значення тиску визначають лише розміщенням певної точки в просторі, заповненому рідиною, тобто воно залежить від її координат:

$$p = f(x, y, z).$$

За одиницю тиску в Міжнародній системі одиниць (СІ) прийнятий Паскаль (Па) – тиск, створюваний силою 1Н, рівномірно розподіленою на площі 1 м<sup>2</sup>.

Застосовують також великі одиниці: кілопаскаль (кПа) і мегапаскаль (МПа):

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 10^{-3} \text{ кПа} = 10^{-6} \text{ МПа}.$$

Оскільки трапляються ще й інші одиниці тиску, в таблиці 1.1 наведені перевідні коефіцієнти. Для отримання тиску в інших одиницях потрібно заданий тиск помножити на відповідні перевідні коефіцієнти, наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Значення коефіцієнтів для переходу від одних одиниць до інших

Одиниця тиску	<i>Па</i>	<i>бар</i>	<i>кгс/м<sup>2</sup></i>	<i>кгс/см<sup>2</sup></i>	<i>мм рт. ст.</i>	<i>м вод. ст.</i>	Атмосфера технічна, <i>ат</i>	Атмосфера фізична, <i>атм</i>
<i>Па</i>	1	0,00001	0,102	$1,02 \cdot 10^{-5}$	0,0075	$1,02 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-5}$	$1,054 \cdot 10^{-5}$
<i>бар</i>	100000	1	10200	1,02	750	10,2	1,02	1,054
<i>кгс/м<sup>2</sup></i>	9,81	0,0000981	1	0,0001	0,0735	0,001	0,0001	$1,033 \cdot 10^{-4}$
<i>кгс/см<sup>2</sup></i>	98100	0,981	10000	1	735,5	10	1	0,968
<i>мм рт. ст.</i>	133,32	0,00133	13,6	0,00136	1	0,0136	0,00136	0,00132
<i>м вод. ст.</i>	9810	0,0981	1000	0,100	73,556	1	0,1	0,0968
Атмосфера технічна, <i>ат</i>	98100	0,981	10000	1	736	10	1	0,968
Атмосфера фізична, <i>атм</i>	101325	1,01	10330	1,033	760	10,33	1,033	1

## 1.2 Повний (абсолютний), манометричний (надлишковий) тиск. Вакуум

Будемо розрізняти такі види тиску: атмосферний тиск  $p_{ат}$ , абсолютний тиск  $p_{абс}$ , надлишковий, або манометричний, тиск  $p_m$ , тиск вакууму, або вакуумметричний тиск  $p_v$ .

На рисунку 1.3 наведена графічна ілюстрація тисків.

*Абсолютний тиск* – це тиск, під час вимірювання якого за початок відліку беруть абсолютний нуль тиску. Останній може мати місце в замкненому об'ємі, з якого видалені всі молекули, або в разі повного зупинення руху молекул, тобто  $T = 0 K$ .

Уявімо собі площину, в усіх точках якої абсолютний тиск  $p = 0$ . Слід цієї площини зображений на рисунку 1.3 горизонтальною лінією  $OO$ ;  $AA$  – слід

площини, абсолютний тиск в усіх точках якої дорівнює атмосферному:  $p = p_{ат}$ . Таким чином, лінія  $OO$  є базою для відрахунку абсолютного тиску, а лінія  $AA$  – базою для відрахунку манометричного тиску й вакууму.

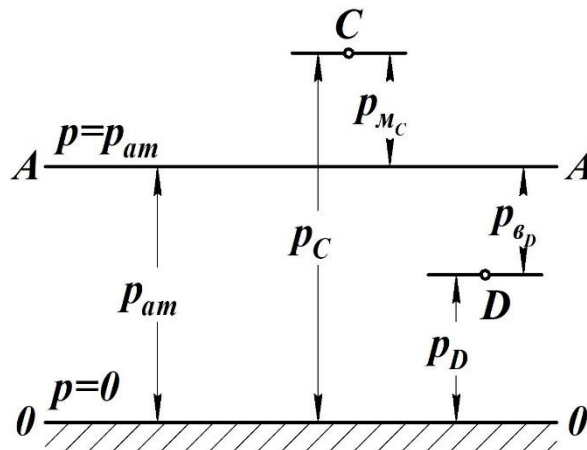


Рисунок 1.3 – Графічна ілюстрація тисків

Відстань від точки  $C$  до лінії  $OO$  являє собою абсолютний тиск у цій точці  $p_C$ , а відстань від точки  $C$  до лінії  $AA$  – манометричний тиск у цій точці  $p_{mC}$ .

Аналогічно відстань від точки  $D$  до лінії  $OO$  являє собою абсолютний тиск у цій точці  $p_D$ , а відстань від точки  $D$  до лінії  $AA$  – вакуум у цій точці  $p_{вD}$ .

Таким чином, абсолютний тиск може бути як більшим від атмосферного, так і меншим:

$$p = p_{ат} + p_{м}, \quad p = p_{ат} - p_{в}. \quad (1.4)$$

Наведена на рисунку 1.3 схема також дає наглядне уявлення про межі зміни манометричного тиску й вакууму.

Для вимірювання розглянутих вище тисків застосовують різноманітні прилади, принципи дії яких буде розглянуто в п. 1.6.

### 1.3 Диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера)

Рівняння Леонарда Ейлера (1755 р.) встановлює зв'язок поверхневих і масових сил у рідині, що перебуває в стані абсолютного або відносного спокою. Для його доведення виділимо в нерухомому об'ємі рідини прямокутний паралелепіпед, сторони якого дорівнюють  $dx, dy, dz$  і паралельні

координатним осям (рис. 1.4). В усіх точках будь-якої нескінченно малої грані тиск рідини беремо однаковим. Уявно відкинемо рідину, що оточує паралелепіпед. Замінімо її дію відповідними силами.

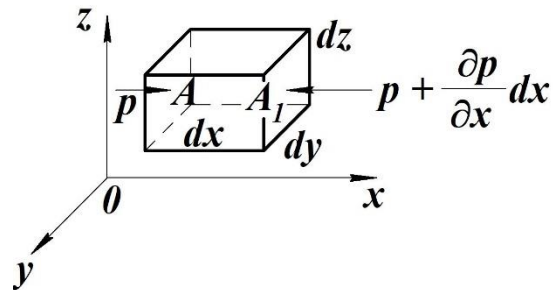


Рисунок 1.4 – Дія сил тиску в напрямку осі  $OX$  на елементарний паралелепіпед рідини

Позначимо  $p$  – гідростатичний тиск у точці  $A$  (центр тяжіння лівої грані), спрямований перпендикулярно дограні й паралельно осі  $OX$ .

Оскільки тиск у рідині, що перебуває в рівновазі, є функцією координат, то в точці  $A_1$  (центр тяжіння правої грані паралелепіпеда) приріст тиску по довжині  $dx$  буде  $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ , де  $\frac{\partial p}{\partial x}$  характеризує зміну тиску на одиницю довжини  $OX$ . Тобто тиск у точці  $A_1$  буде дорівнювати:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Ураховуючи, що площі правої та лівої граней дорівнюють  $dy \cdot dz$ , сума проєкцій сил гідростатичного тиску в напрямку осі  $OX$  дорівнюватиме:

$$p \cdot dydz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \quad (1.5)$$

Розглядаючи аналогічно тиск на грані, перпендикулярні до осей  $OY$  та  $OZ$ , одержуємо відповідно суми проєкцій сил тиску в напрямку цих граней:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz, \\ & - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Крім того, на паралелепіпед можуть діяти масові сили (наприклад, сила тяжіння, сила інерції або комбінація цих сил). Ці сили прикладені в центрі ваги рідин.

Позначимо проєкції одиничних масових сил на координатні осі  $X, Y, Z$ . Тоді масові сили, що діють на паралелепіпед у проєкціях на осі координат, дорівнюватимуть:

$$\begin{aligned} \rho \cdot X \cdot dx dy dz, \\ \rho \cdot Y \cdot dx dy dz, \\ \rho \cdot Z \cdot dx dy dz. \end{aligned} \quad (1.7)$$

де  $\rho \cdot dx dy dz$  – маса паралелепіпеда;  
 $\rho$  – густина рідини.

Враховуючи це, запишемо рівняння рівноваги паралелепіпеда в проєкціях на осі координат:

$$\begin{aligned} \rho \cdot X \cdot dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0, \\ \rho \cdot Y \cdot dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz = 0, \\ \rho \cdot Z \cdot dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Поділивши всі рівняння на масу паралелепіпеда  $\rho dx dy dz$ , одержимо

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Це є система диференціальних рівнянь рівноваги нерухомої рідини Ейлера. Кожне рівняння характеризує зміну тиску, якщо зміниться одна з координат. Для того щоб установити закономірності зміни тиску за зміни

кількох координат, необхідно розглянути рівняння Ейлера сумісно для трьох осей координат.

Перетворимо систему диференціальних рівнянь Ейлера, для цього помножимо рівняння відповідно на  $dx, dy, dz$  та додамо:

$$\begin{array}{l} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} dx, \\ dy, \\ dz. \end{array} \right.$$

Одержимо

$$\begin{array}{l} Xdx - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0, \\ Ydy - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0, \\ Zdz - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0. \end{array} \quad (1.10)$$

Додавши одержані рівняння, будемо мати

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0. \quad (1.11)$$

Тричлен у дужках цього рівняння є повний диференціал функції тиску  $p(x, y, z)$ , тобто

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp. \quad (1.12)$$

Таким чином, рівняння (1.11) можна записати у вигляді

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} dp = 0. \quad (1.13)$$

Рівняння (1.13) показує приріст тиску  $dp$  за зміни координат на  $dx, dy, dz$  в загальному випадку рівноваги рідини.

## 1.4 Окремі випадки інтегрування диференціального рівняння рівноваги рідини

### 1.4.1 Основне рівняння гідростатики

За допомогою диференціального рівняння рівноваги рідини дослідимо закон зміни тиску в рідині. Для цього розглянемо рідину, що перебуває в нерухомій посудині (рис. 1.5) і на яку діють сили ваги. Осі координат розмістимо таким чином, щоб вісь  $OZ$  була спрямована вертикально вгору, тобто паралельно лінії дії сили ваги.

Всередині розглядуваного об'єму рідини виділимо точку  $A$ , що перебуває на відстані  $Z$  від горизонтальної площини  $XOY$  або на глибині  $h$  від вільної поверхні рідини.

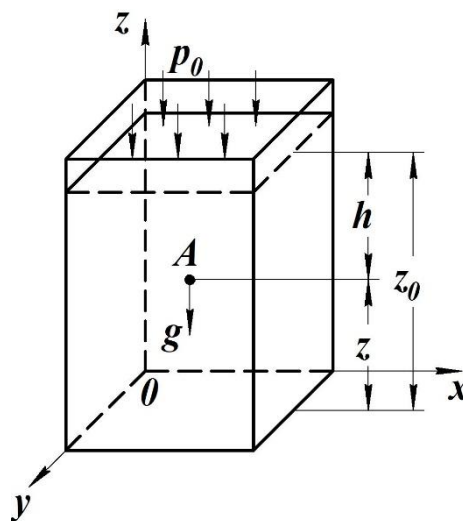


Рисунок 1.5 – Схема для встановлення основного рівняння гідростатики

Запишемо диференціальне рівняння рівноваги

$$\rho (Xdx + Ydy + Zdz) = dp. \quad (1.14)$$

Проекції одиничних масових сил на координатній осі в цьому разі такі:



$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Підставляючи ці значення в рівняння рівноваги рідини (1.14), одержуємо

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

або після інтегрування

$$p = -\rho \cdot g \cdot x + C, \quad (1.15)$$

де  $p$  – тиск у довільній точці  $A$ ;

$C$  – стала інтегрування.

Визначимо  $C$  з граничних умов. Рівняння (1.15) справедливе для довільної точки цього об'єму рідини, зокрема й для точки на вільній поверхні. Для цієї точки  $p = p_0$ ,  $z = z_0$ , де  $p_0$  – тиск на вільній поверхні рідини.

Підставивши ці значення в рівняння (1.15), одержимо

$$p_0 = -\rho \cdot g \cdot z_0 + C, \quad (1.16)$$

звідси

$$C = p_0 + \rho \cdot g \cdot z_0. \quad (1.17)$$

Підставивши значення  $C$  у формулу (1.15) будемо мати

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 - z) \quad (1.18)$$

або після деяких перетворень

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}.$$

Оскільки точка  $A$  і точка вільної поверхні вибрані довільно, то для будь-яких двох довільних точок даного об'єму нерухомої рідини можна записати

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}. \quad (1.19)$$

У рівнянні (1.19) параметр  $z$  відображає геометричну висоту (напір), а вираз  $\frac{p}{\rho g}$  – п'єзометричну висоту (напір).

Суму величин  $z + \frac{p}{\rho g}$  називають гідростатичною висотою (напором).

*Напір* – це питома енергія рідини, тобто енергія, віднесена до одиниці ваги рідини.

Рівняння (1.19) описує основний закон гідростатики: «*Гідростатичний напір для будь-якої точки однорідної рідини є сталою величиною*».

Різницю висот  $z_0 - z$ , що показує глибину занурення точки  $A$ , позначимо через  $h$  (рис. 1.5) і підставимо в рівняння (1.18):

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h. \quad (1.20)$$

Залежність (1.20) визначає тиск у довільній точці однорідної рідини, що залежить від зовнішнього тиску  $p_0$  (закон Паскаля), глибини занурення точки  $h$  та її густини.

Крім поняття площини порівняння, в гідрогазодинаміці використовують поняття площини рівня, вільної поверхні та п'єзометричної площини.

Площина рівня – це площина, на якій тиск у будь-якій її точці є сталою величиною. Вільна поверхня – площина контакту двох фаз (рідкої й газоподібної). П'єзометрична площина – поверхня, на якій абсолютний тиск дорівнює атмосферному. Знайдемо форму цих площин за абсолютного спокою рідини.

За означенням повний диференціал тиску на площині рівня дорівнює нулю. Тоді згідно з (1.14) маємо

$$\rho \cdot g \cdot dz = 0$$

або

$$dz = 0, z = \text{idem}. \quad (1.21)$$

Як бачимо з (1.21), для однорідної рідини, що перебуває в стані абсолютного спокою, поверхня рівня, вільна поверхня та п'єзометрична площина мають форму горизонтальної площини.

### 1.4.2 Відносний спокій рідини під час обертання посудини навколо вертикальної осі

Візьмемо циліндр висотою  $H$  і діаметром  $D = 2R$  (рис. 1.6). Дослідимо закон зміни тиску і визначимо форму вільної поверхні рідини під час обертання цієї посудини навколо вертикальної осі  $z$  із постійною кутовою швидкістю  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$  ( $n$  – кількість обертів за 1 секунду).

Рідина поступово буде набирати ту саму кутову швидкість, що й посудина, а вільна поверхня її видозміниться. У центральній частині рівень рідини знизиться, а біля стінок – підвищиться, і вся вільна поверхня рідини стане деякою поверхнею обертання.

На рідину (точка  $A$ ) в цьому разі діятимуть дві масові сили, що, будучи віднесеними до одиниці маси, відповідно дорівнюватимуть  $g$  і  $\omega^2 r$ .

Рівнодійні масові сили  $j$  зростають зі збільшенням радіуса за рахунок другої складової, а кут нахилу її до горизонту зменшується. Ця сила нормальна до вільної поверхні рідини, тому нахил цієї поверхні зі збільшенням радіуса зростає.

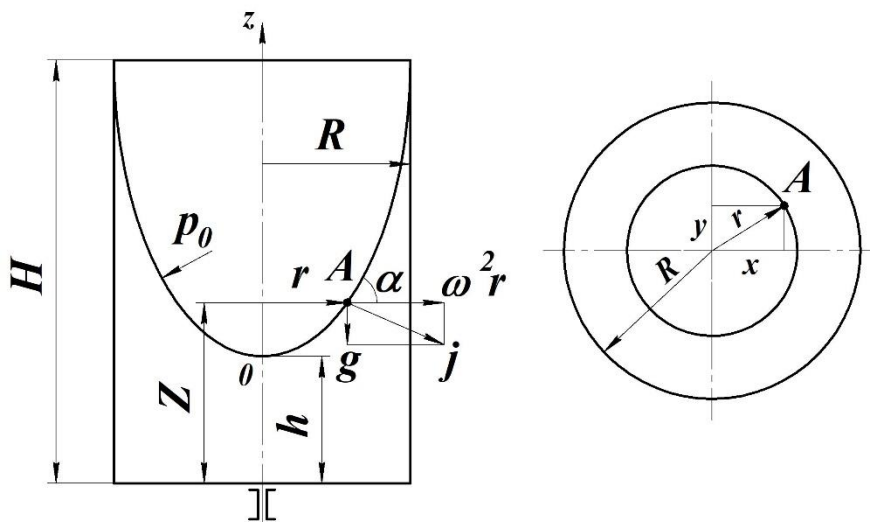


Рисунок 1.6 – Поверхня рідини під час обертання відкритої посудини навколо вертикальної осі

Розмістимо початок координат у центрі дна посудини, вісь  $z$  спрямуємо вертикально вгору. Тоді одиничні масові сили:

$$X = \omega^2 \cdot r \cos(\widehat{r, \hat{x}}) = \omega^2 \cdot x,$$

$$Y = \omega^2 \cdot r \cos(\widehat{r, y}) = \omega^2 \cdot y,$$

$$Z = -g.$$

Після підстановки  $X, Y, Z$  до рівняння (1.13) одержимо

$$\omega^2 \cdot x dx + \omega^2 \cdot y dy - g \cdot dz = \frac{dp}{\rho} \quad (1.22)$$

або

$$dP = \rho \cdot \omega^2 (x dx + y dy) - \rho \cdot g \cdot dz, \quad (1.23)$$

якщо врахувати, що

$$x dx + y dy = d\left(\frac{r^2}{2}\right).$$

Пояснення:

$$d\left(\frac{r^2}{2}\right) = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2x dx + \frac{1}{2} \cdot 2y dy = x dx + y dy.$$

Після інтегрування

$$p = \rho \cdot \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} - \rho \cdot g \cdot z + C, \quad (1.24)$$

де  $C$  – стала інтегрування, яку визначаємо з граничних умов.

За  $r = 0, p = p_0, z = h$

$$p_0 = -\rho \cdot g \cdot h + C, \quad (1.25)$$

Звідси стала інтегрування  $C = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$ .

Отже,

$$p = p_0 + \rho g(h - z) + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}. \quad (1.26)$$

Рівняння (1.26) описує закон зміни тиску в будь-якій точці рідини під час обертання посудини навколо своєї осі  $z$  із постійною кутовою швидкістю  $\omega$ .

Установимо форму вільної поверхні рідини під час обертання посудини навколо вертикальної осі. На вільній поверхні тиск  $p = p_0$ .

Виходячи з рівняння (1.26), маємо

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} = gz - gh,$$

звідси

$$z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} + h. \quad (1.27)$$

З рівняння (1.27) бачимо, що вільна поверхня має форму параболоїда обертання висотою  $\frac{\omega^2 r^2}{2g}$ .

Розв'язуючи задачі на відносний спокій рідини під час обертання відкритого циліндра (чи посудини іншої форми, наприклад, зрізаного конуса) навколо вертикальної осі можуть мати місце три випадки:

- 1 Вершина параболоїда обертання не доторкається до днища посудини (рис. 1.7 а). Об'єм рідини, що знаходиться в посудині, в цьому разі дорівнює

$$V_p = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot z}{2} + \pi \cdot R^2 \cdot h_0. \quad (1.28)$$

- 2 Вершина параболоїда доторкнулася до днища посудини (рис. 1.7, б):

$$V_p = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot z}{2}. \quad (1.29)$$

3 Вершина параболоїда перетнула дно посудини (рис. 1.7 в):

$$V_p = \frac{\pi \cdot g \cdot H^2}{\omega^2} = \frac{\pi \cdot (R^2 - R_1^2) \cdot H}{2}. \quad (1.30)$$

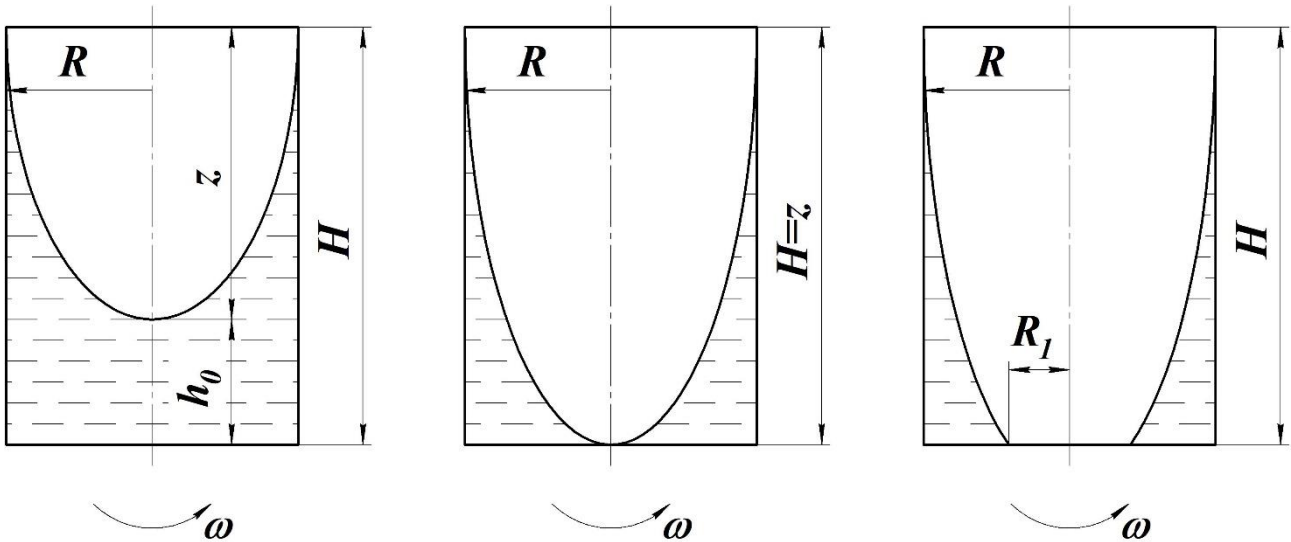


Рисунок 1.7 – Форми параболоїда обертання

#### 1.4.3 Відносний спокій рідини в посудині, що рухається прямолінійно з прискоренням

Типові приклади руху з прискоренням чи гальмуванням – це початок руху або зупинення залізничних цистерн, бензо-, водо-, продуктовозів та ін.

Розглянемо посудину прямокутної форми довжиною  $L$ , шириною  $B$  і висотою  $H$  (рис. 1.8), заповнену рідиною на глибину  $h_{\text{п}}$ . Тиск на вільній поверхні рідини сталий і дорівнює  $p_0$ . Розглянемо довільну точку  $A$  з координатами  $x$  і  $h$ .

Унаслідок рівноприскореного руху посудини з рідиною на рідину в точці  $A$  діють:

- сила ваги, зумовлена прискоренням вільного падіння;
- сила інерції  $F_i$ , зумовлена прискоренням  $a$  і спрямована в протилежний бік.

Визначимо значення їх одиничних сил у проєкціях на координатні осі:

$$X = -a, Y = 0, Z = -g.$$

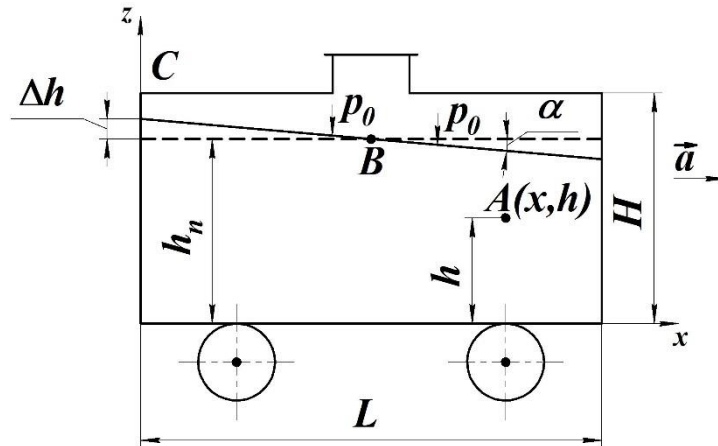


Рисунок 1.8 – Поверхня рідини в посудині, що рухається прямолінійно з прискоренням

Тоді диференціальне рівняння (1.10) буде мати вигляд

$$\rho (-a dx - g dz) = dp, \quad (1.31)$$

$$p = \rho (-ax - gz) + C. \quad (1.32)$$

Розв'яжемо рівняння (1.32) в межах таких крайових умов:

$$z = h_{\Pi}, x = \frac{L}{2}, p = p_0,$$

$$p_0 = -\rho \cdot a \cdot \frac{L}{2} - \rho \cdot g \cdot h_{\Pi} + C. \quad (1.33)$$

Звідси стала інтегрування

$$C = p_0 + \rho \cdot a \cdot \frac{L}{2} - \rho \cdot g \cdot h_{\Pi}. \quad (1.34)$$

Підставивши (1.34) в (1.32), одержимо

$$p = p_0 + \rho g(h_{\Pi} - z) + \rho a \left( \frac{L}{2} - x \right). \quad (1.35)$$

Тепер визначимо форму вільної поверхні рідини. На вільній поверхні тиск  $p = p_0$ :

$$p_0 = p_0 + \rho \cdot g \cdot (h_{\Pi} - z) + \rho \cdot a \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right).$$

Звідси знаходимо вираз, що описує форму вільної поверхні під час рівноприскореного руху посудини з рідиною,

$$z = h_{\Pi} + \frac{a}{g} \left(\frac{L}{2} - x\right). \quad (1.36)$$

$$\text{За } x = 0$$

$$z = h_{\Pi} + \frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2}.$$

Ураховуючи, що  $z - h_{\Pi} = \Delta h$

$$\frac{\Delta h}{L/2} = \frac{a}{g}, \text{tg} \alpha = \frac{a}{g}.$$

Форма вільної поверхні рідини під час рівноприскореного руху являє собою площину, нахилену до горизонту проти руху під кутом  $\alpha$ .

Під час гальмування цистерни нахил вільної поверхні буде зворотним.

### 1.5 Епюри гідростатичного тиску

Зміну тиску за глибиною рідини, описану рівнянням (1.20), можна подати графічно. Для цього розглянемо такий випадок: нехай лінія  $AB$  – слід вертикальної стінки, яка обмежує рідину (рис. 1.9 а). На вільній поверхні діє тиск  $p_0$ .

Для різних значень глибини  $h$  за рівнянням (1.20) обчислимо значення тиску й відкладемо його у відповідному масштабі у вигляді відрізків перпендикулярно до площини  $AB$ .



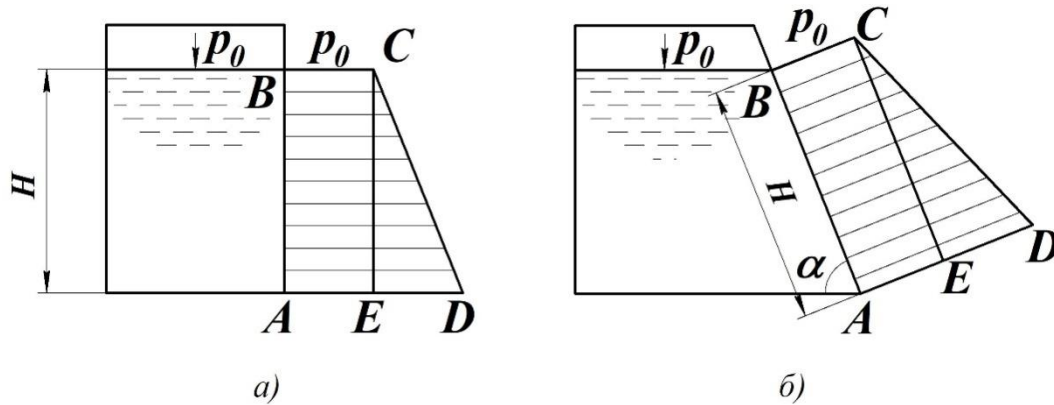


Рисунок 1.9 – Епюри гідростатичного тиску

З'єднаємо всі точки кінців відрізків тиску й побачимо, що залежність тиску від глибини описується прямою нахиленою лінією. Геометричну фігуру  $ABCD$  називають епюрою тиску. У разі якщо площина  $AB$  знаходиться під кутом до горизонту (рис. 1.9 б), рівняння (1.20) для визначення тиску в будь-якій точці площини  $AB$  можна записати так:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha, \quad (1.37)$$

де  $l$  – відстань від точки  $A$  до будь-якої точки площини. Еюра тиску в цьому разі має вигляд, наведений на рисунку 1.9 б.

Як бачимо з рисунка 1.9 а, для побудови епюри тиску достатньо визначити тиск у двох крайніх точках, розміщених на будь-якій відстані одна від одної. У масштабі, перпендикулярно до площини, відкласти значення тиску та з'єднати ці точки прямою лінією. На наведених рисунках фігура  $ABCE$  відповідає епюрі від дії тиску на поверхні рідини, а фігура  $ECD$  – від дії тиску стовпа рідини.

На рисунку 1.10 показані епюри надлишкового тиску на вертикальну стінку у разі якщо на поверхні рідини  $p_0 = p_{ат}(а)$ ,  $p_0 = p_m(б)$ , а також за  $p_0 = p_{вак}(в)$ .

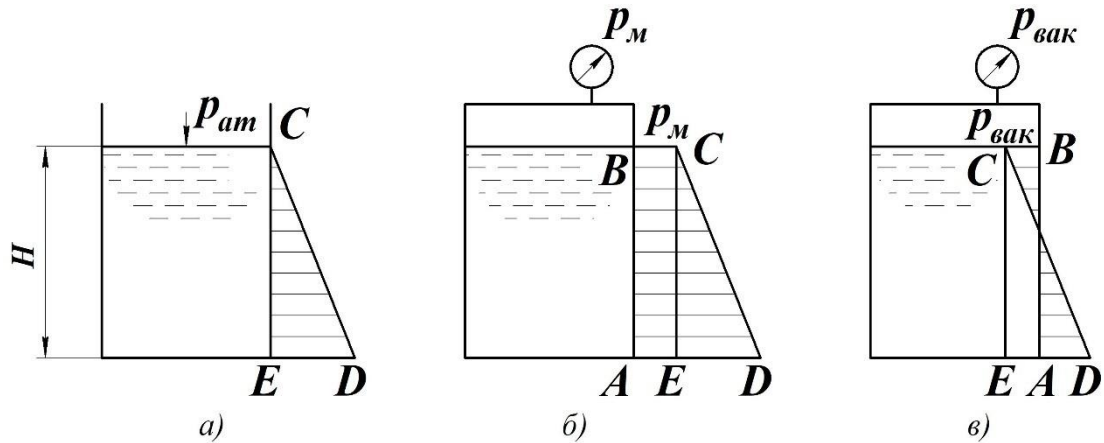


Рисунок 1.10 – Епюри гідростатичного тиску

### 1.6 Прилади для вимірювання тиску

У практиці вимірювання тиску використовують прилади, що фіксують абсолютне або надлишкове його значення.

Атмосферний тиск (абсолютний) вимірюють *барометром* (від грец. *baros* – вага, і *metros* – міра). На рисунку 1.11 показано найпростіший ртутний барометр, який був запроваджений Торрічеллі у 1644 році. Вимірювальну трубку спочатку наповнюють ртуттю, потім відкритим кінцем занурюють у контейнер із ртуттю.

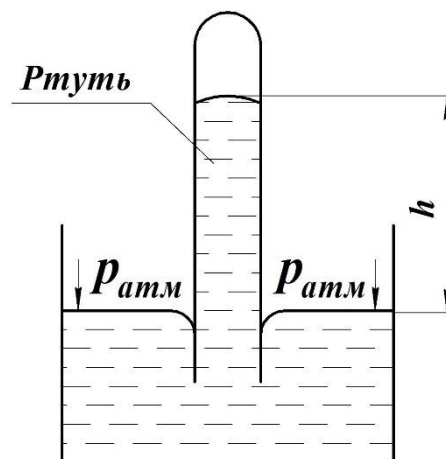


Рисунок 1.11 – Схема ртутного барометра Торрічеллі

Стовпчик у трубці набуває рівноваги, якщо його вага, що створює тиск  $\rho \cdot g \cdot h$  плюс тиск від парів ртуті  $p_{\text{пари}Hg}$ , зрівноважує атмосферний тиск:

$$p_{\text{атм}} = p_{\text{парин}}g + \rho \cdot g \cdot h. \quad (1.38)$$

У практичних вимірюваннях першим додатком (1.38) нехтують, оскільки тиск парів ртуті у вакуумі на кілька порядків менший за атмосферний тиск, отже,  $p_{\text{атм}} = \rho \cdot g \cdot h$ .

До цього часу атмосферний тиск вимірюють у міліметрах ртутного стовпчика, хоча вони є позасистемними.

На рисунку 1.12 наведена принципова схема барометра-анероїда, основним робочим елементом якого є гофрована кругла колба 1, усередині якої створено вакуум. Величина деформації коробки пропорційна зміні атмосферного тиску.

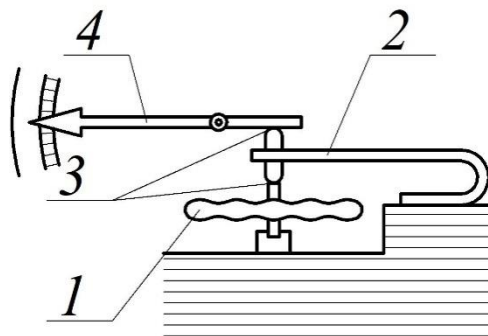


Рисунок 1.12 – Барометр - анероїд

Надлишковий тиск вимірюють *манометрами* (від грец. *manos* – рідкий). Манометри бувають рідинні й механічні. Найпростішим рідинним манометром є п'єзометрична трубка (від грец. *piezos* – тиск). П'єзометрична трубка – це вертикальна скляна трубка діаметром 5–8 мм (щоб усунути менісковий ефект), верхній кінець якої відкритий в атмосферу, а нижній кінець з'єднаний із посудиною (рис. 1.13). Рівень рідини в п'єзометрі відповідає тиску в точці його підключення і дорівнює

$$p = \rho \cdot g \cdot h_p. \quad (1.39)$$

П'єзометри дозволяють вимірювати тиск, що відповідає висоті стовпа води 2–3 м (0,02–0,03 МПа).

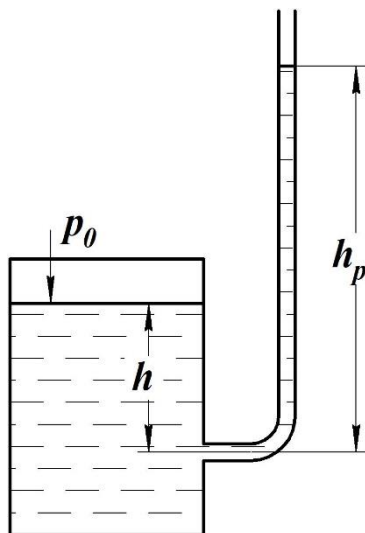


Рисунок 1.13– Вимірювання надлишкового тиску рідини за допомогою п'єзометричної трубки

П'єзометричні трубки не потрібно плутати з п'єзометрами – приладами для визначення зміни об'єму речовини під дією гідростатичного тиску, що буває потрібним під час дослідження діаграм стану, фазових переходів та інших фізико-хімічних процесів.

За більших тисків у резервуарах чи закритих посудинах використовують так звані U-подібні манометри, заповнені ртуттю з густиною  $\rho_{рт} = 13\,600\text{кг/м}^3$  (рис. 1.14).

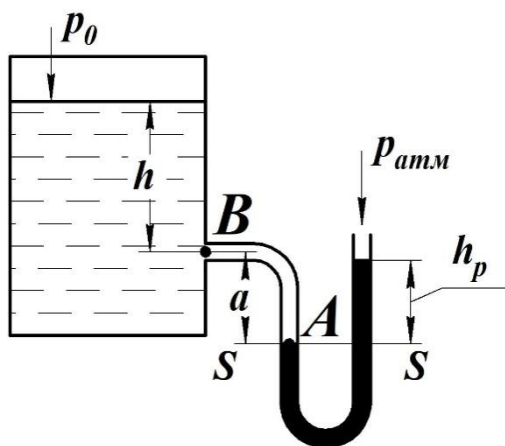


Рисунок 1.14 – Вимірювання тиску рідини за допомогою U-подібного манометра

U-подібні ртутні манометри забезпечують високу точність вимірювання і складаються зі скляної U-подібної трубки, закріпленої на панелі з міліметровою шкалою. Один кінець трубки підключають до посудини, в якій необхідно виміряти тиск, а інший – є відкритим, з'єднаним з атмосферою.

Трубка заповнена ртуттю на половину висоти. До підключення манометра ртуть буде перебувати на одному рівні. Після того як манометр буде під'єднаний до посудини під тиском, рівень ртуті в лівому коліні знизиться, а в правому – підніметься вгору до повної рівноваги системи на рівень  $S-S$ , і абсолютний тиск буде дорівнювати (в точці  $A$ )

$$p_A = p_{\text{ат}} + \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h_{\text{рт}} \quad (1.40)$$

Тиск у точці  $B$

$$p_B = p_A - \rho_p \cdot g \cdot a = p_{\text{ат}} + \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h_{\text{рт}} - \rho_p \cdot g \cdot a, \quad (1.41)$$

де  $\rho_p$  – густина рідини в посудині.

За допомогою ртутних манометрів можна вимірювати тиск до 3–4 МПа.

Більш досконалими є ртутно-чашкові манометри, що діють за принципом U-подібного манометра, в якому одне коліно (ліве) замінене чашкою (рис. 1.15). Він складається з металевої чашки, наповненої ртуттю і з'єднаної з посудиною, в якій вимірюється тиск, і відкритої скляної трубки – п'єзометра. За нуль шкали беруть рівень ртуті в чашці.

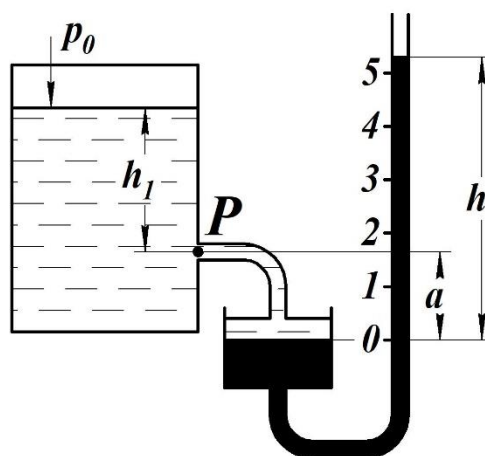


Рисунок 1.15 – Вимірювання тиску за допомогою ртутно-чашкового манометра

Тоді надлишковий тиск  $p$  у точці під'єднання

$$p = \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h - \rho_p \cdot g \cdot a, \quad (1.42)$$

де  $a$  – стала величина поправки для даного приладу.

Таким чином, для визначення тиску  $p$  необхідно лише виміряти висоту стовпчика ртуті над нулем шкали.

Коли необхідно виміряти різницю тисків у двох посудинах або у двох точках рідини в одній і тій самій посудині, використовують так званий диференціальний манометр (рис. 1.16).

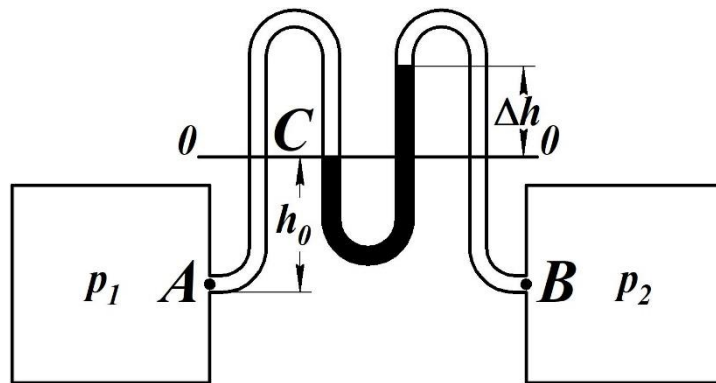


Рисунок 1.16 – Вимірювання різниці тисків за допомогою диференціального манометра

Припустимо, що тиск у точці  $A$  лівої посудини дорівнює  $p = p_1$ , а в точці  $B$ , що перебуває на рівні точки  $A$  правої посудини, дорівнює  $p = p_2$ . Величину тиску  $p$  на рівні поверхні ртуті в лівому коліні (точка  $C$ ) можна визначити із співвідношення

$$p = p_1 - \rho \cdot g \cdot h_0 = p_2 - \rho \cdot g \cdot (h_0 + \Delta h) + \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot \Delta h.$$

Звідси, різниця тисків у точках  $A$  і  $B$   $\Delta p = p_1 - p_2$  дорівнюватиме

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot \Delta h - \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

або

$$\Delta p = (\rho_{\text{рт}} - \rho) \cdot g \cdot \Delta h. \quad (1.43)$$

Таким чином, різницю тисків  $\Delta p$  визначають різницею рівнів у двох колінах диференціального манометра.

Мікроманометри використовують під час вимірювань незначних тисків із високою точністю. Одна з конструкцій мікроманометра – похилий мікроманометр (рис. 1.17). Мікроманометр вміщує резервуар *A*, під'єднаний до посудини, в якій вимірюють тиск, та манометричну трубку *B*, кут нахилу якої до горизонту  $\alpha$  можна змінювати.

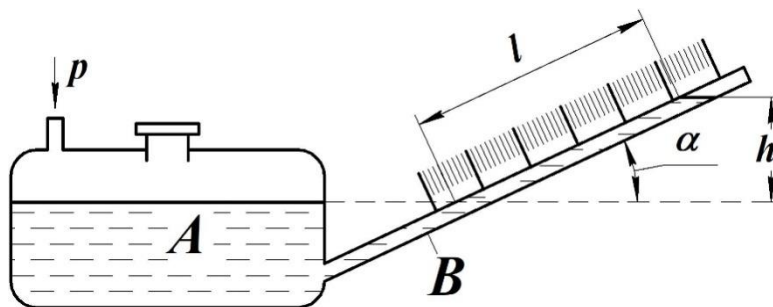


Рисунок 1.17– Вимірювання тиску за допомогою мікроманометра

Величину тиску визначають за такою залежністю:

$$p = \rho \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha. \quad (1.44)$$

Порівняно зі звичайним манометром мікроманометр має більшу точність вимірювань, тому що замість малої висоти  $h$  вимірюють довжину  $l$ , яка тим більша, чим менший кут  $\alpha$ . Мікроманометри заповнюють водою або спиртом.

Для вимірювання високих тисків використовують механічні манометри. Найбільш поширеним серед яких є пружинний, зображений на рисунку 1.18. Він складається з порожнистої тонкостінної латунної трубки виткової форми з сегментоподібним перерізом, так званої пружини Бурдона. Кінець пружини запаяний і з'єднаний системою передач зі стрілкою, що вказує на шкалу, проградуєвану в необхідному діапазоні тиску ( $0 - P$ ). Відкритий кінець (початок трубки) з'єднується з посудиною, в якій вимірюють тиск. Під дією тиску пружина поступово випрямляється і через зубчастий механізм надає руху стрілці, за відхиленням якої на шкалі визначають значення тиску. За допомогою пружинних манометрів можна вимірювати тиск у широкому діапазоні.

Згідно з існуючими стандартами випускають робочі та взірцеві манометри з діапазоном вимірювання тиску в межах (0–0,1; 0–0,16; 0–0,25; 0–0,6 МПа)  $n$ . Тут  $n$  – число кратності шкали, що дорівнює 1, 10, 100 і 1 000. Деякі спеціальні конструкції пружинних манометрів дозволяють вимірювати тиск до 981 МПа. Пружина може бути багатовитковою (так звані пружини Гелікса). Перевага таких манометрів у їх більшій стабільності роботи й довговічності.

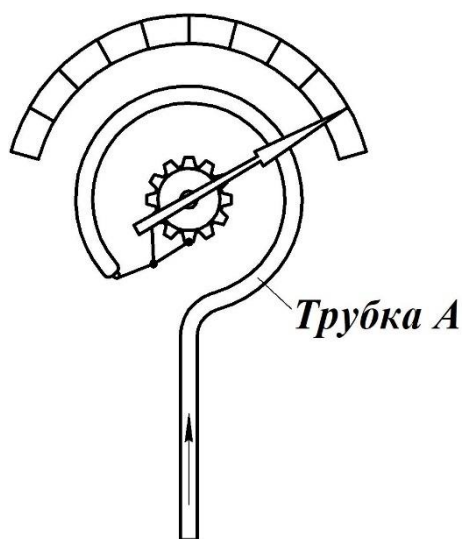


Рисунок 1.18 – Принципова схема пружинного манометра

Крім пружинних, є мембранні манометри, в яких рідина діє на тоненьку металеву (або з прогумованої матерії) пластинку-мембрану. Деформація мембрани пропорційна величині тиску і за допомогою системи важелів передається стрілці. Схема такого манометра зображена на рисунку 1.19. Мембранні манометри виготовляють для вимірювання тисків у діапазоні від 0,02 МПа до 2,9 МПа.

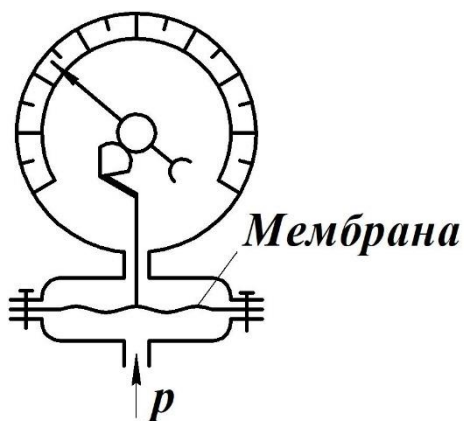


Рисунок 1.19 – Принципова схема мембранного манометра



Для вимірювання тисків, нижчих за атмосферний, використовують прилади, які називають *вакуумметрами*. Вакуумметри принципово нічим не відрізняються від рідинних манометрів (рис. 1.20). Вакуум у рідині А можна виміряти за допомогою U-подібної трубки (див. рис. 1.20 праворуч) або перевернутої U-подібної трубки, один кінець якої занурений у посудину з рідиною (див. рис. 1.20 ліворуч).

$$p_{\text{вак}} = \rho \cdot g \cdot h_{\text{вак}}, \quad (1.45)$$

де  $h_{\text{вак}}$  – вакуумметрична висота.

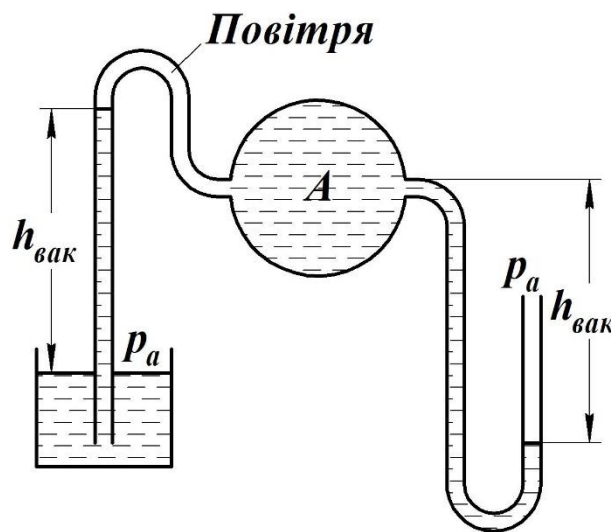


Рисунок 1.20 – Принципові схеми вакуумметрів

Не завжди манометри та вакуумметри заповнюють ртуттю. В окремих випадках (залежно від призначення та умов роботи) використовують інші рідини. Водночас необхідно мати на увазі, що для заповнення вакуумметрів не можна використовувати легкокипаровувані рідини (спирт, ефір), тому що за зниженого тиску вони будуть інтенсивно випаровуватися й можуть закипіти.

Принцип дії механічних вакуумметрів та вище описаних манометрів однаковий, тому їх конструкція повністю повторює конструкцію манометрів. Так, наприклад, принцип дії існуючих мембранних вакуумметрів ґрунтується деформації мембрани, що прогинається під дією атмосферного тиску, після того як під неї підведено вакуум.

Пружинні вакуумметри працюють за тим самим принципом, що й пружинні манометри.

Крім того, є прилади, які називають *мановакуумметрами*, за допомогою яких можна виміряти як надлишковий тиск, так і розрідження (діапазон вимірювання - 0,1 – +0,1 МПа).

### 1.7 Умови рівноваги рідини в з'єднаних посудинах

Застосуємо основне рівняння гідростатики для встановлення умов рівноваги рідин, які знаходяться в з'єднаних посудинах.

Для вирішення поставленого завдання в загальному вигляді будемо розглядати дві з'єднані посудини, наповнені незмішуваними рідинами (рис. 1.21). Посудини закриті, тиск на поверхні рідини різний. Позначимо через  $\rho_1$  і  $\rho_2$  густини рідин, а через  $p_{01}$  і  $p_{02}$  – тиск на поверхні рідин у посудинах I і II. За площину порівняння візьмемо горизонтальну площину, що проходить через лінію А-А розділу різнорідних рідин і визначимо величину гідростатичного тиску в точці С, що виникає внаслідок дії сил із боку посудин I і II. Тоді

$$p_1 = p_{01} + \rho_1 g z_1 \quad \text{і} \quad p_2 = p_{02} + \rho_2 g z_2,$$

де  $z_1$  і  $z_2$  – глибини занурення точки С відносно поверхні рідини в посудинах I і II. Оскільки для рівноваги рідин необхідне виконання рівності  $p_1 = p_2$ , то

$$p_{01} + \rho_1 g z_1 = p_{02} + \rho_2 g z_2,$$

або

$$p_{01} - p_{02} = \rho_2 g z_2 - \rho_1 g z_1. \quad (1.46)$$

Одержана загальна залежність (1.46), що характеризує умови рівноваги рідини в з'єднаних посудинах, дозволяє розглянути низку окремих випадків.

*Випадок 1* У посудини налита однакова рідина, але тиски на її поверхнях різні. Тоді внаслідок рівності  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$p_{01} - p_{02} = \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1). \quad (1.47)$$

*Випадок 2* У посудини налита однакова рідина за однакових тисків на її поверхні.

Оскільки  $\rho_1 = \rho_2$  і  $p_{01} = p_{02}$ , то

$$z_2 = z_1. \quad (1.48)$$

Отже, в розглянутому випадку рідина в обох посудинах буде розміщена на одному рівні. Якщо посудини відкриті, то умова рівноваги може бути сформульована таким чином: якщо відкриті з'єднані посудини заповнені однорідною рідиною, то рідина в цих посудинах повинна розміщуватися на однакових рівнях.

*Випадок 3* У посудини налита однакова рідина.

У цьому разі:

- одна посудина відкрита, а інша – закрита;
- тиск рідини в закритій посудині більший від атмосферного.

Припустимо, що одна з посудин, наведена на рисунку 1.21, наприклад посудина II, закрита, і на її поверхню діє тиск  $p_0 > p_{\text{ат}}$ .

Тоді  $p_1 = p_{\text{ат}} + \rho g z_1$  і  $p_2 = p_0 + \rho g z_2$ .

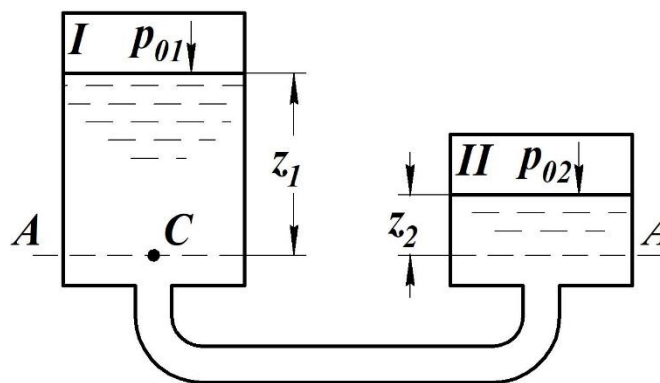


Рисунок 1.21 – Рівновага рідини в з'єднаних посудинах

Отже, в наслідок рівності  $p_1 = p_2$

$$p_{\text{ат}} + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot z_2,$$

$$\frac{p_0 - p_{\text{ат}}}{\rho \cdot g} = z_1 - z_2$$

або

$$z_2 = z_1 - \frac{p_0 - p_{\text{ат}}}{\rho \cdot g}, \quad (1.49)$$

де  $\frac{p_0 - p_{\text{ат}}}{\rho g}$  п'єзометрична висота.

Таким чином, рівень рідини в резервуарі з більшим тиском на поверхні буде розміщений нижче на величину п'єзометричної висоти.

*Випадок 4* У посудини наліті різнорідні незмішувані між собою рідини з різними густинами, але з однаковими тисками на поверхні.

На основі загального рівняння рівноваги рідини в з'єднаних посудинах (1.46) у наслідок рівності  $p_{01} = p_{02}$  можна записати

$$\rho_1 \cdot g \cdot z_1 = \rho_2 \cdot g \cdot z_2.$$

Отже,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (1.50)$$

Таким чином, для рівноваги різнорідних незмішуваних рідин, що містяться у відкритих з'єднаних посудинах, необхідно, щоб висоти стовпців рідин, відраховувані від площини їх розділу, були обернено пропорційні густинам.

### 1.8 Закон Паскаля та його практичне застосування

Допустимо, що в закритій посудині, показаній на рисунку 1.22, в області точки А встановлений поршень, що може створювати тиск на деяку частину примезової поверхні рідини. Нехай поршень створює тиск  $p_0$  на одиницю площі. Величина гідростатичного тиску в будь-якій точці рідини підпорядковується основному рівнянню гідростатики:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h.$$

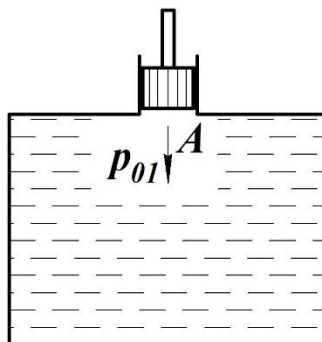


Рисунок 1.22 – Ілюстрація закону Паскаля

Оскільки член  $\rho \cdot g \cdot h$  залежить лише від ваги стовпа рідини висотою  $h$ , то наскільки ми змінимо тиск  $p_0$  в точці А під поршнем, настільки ж зміниться тиск  $p$  у будь-якій точці в середині рідини. У гідрогазодинаміці це положення має назву закону Паскаля.

Закон Паскаля може бути сформульований таким чином: *Зовнішній тиск, що діє на межову поверхню рідини, яка перебуває в рівновазі в замкненому резервуарі, передається всередині рідини рівномірно в усі точки.*

Він є теоретичною основою об'ємного гідроприводу і гідропередач, статичних гідромашин (гідропрес, гідродомкрат, гідроаккумулятор) і перетворювачів тиску (гідромультіплікатор).

Розглянемо принцип дії гідравлічного преса (рис. 1.23).

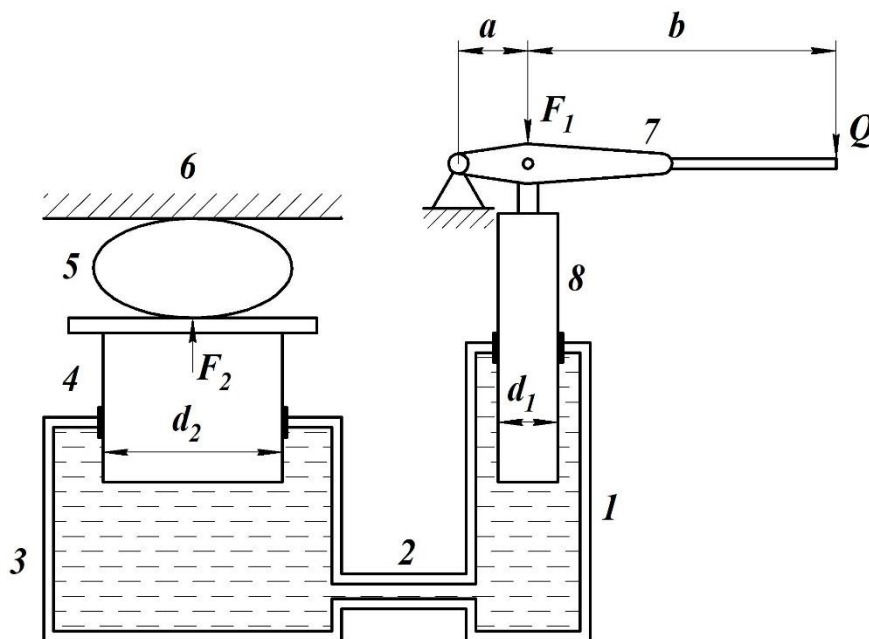


Рисунок 1.23 – Принципова схема гідравлічного преса

Гідравлічний прес використовують для одержання великих стискальних зусиль, необхідних, наприклад, для деформації металів під час оброблення їх тиском (пресування, кування, штампування) тощо. Прес складається з двох циліндрів 1 і 3 малого й великого діаметрів, з'єднаних між собою трубопроводом 2. У малому циліндрі є поршень 8 діаметром  $d_1$ , у великому – поршень 4 діаметром  $d_2$ , на якому розміщене тіло 5. Якщо до малого поршня прикладають силу  $F_1$ , він починає рухатися вниз, створюючи в рідині тиск  $p = \frac{F_1}{S_1}$ .

За законом Паскаля цей тиск передається всьому об'єму рідини однаково, його сила на поршень діаметром  $d_2$  дорівнює

$$F_2 = p \cdot s_2, \quad (1.51)$$

або

$$\frac{F_1}{s_1} = \frac{F_2}{s_2}.$$

Звідси випливає, що

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{s_2}{s_1} = F_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2. \quad (1.52)$$

Під дією цієї сили поршень  $d_2$  разом із тілом 5 починає рухатися ввєрх, поки тіло не торкнеться нерухомої плити 6. У разі подальшого його підйому почнеться процес пресування (стиснення) тіла.

Якщо гідравлічний прес із ручним приводом, то величину сили  $F_1$  можна збільшити за рахунок плечового важеля 7, установленого на малому циліндрі, як показано на рисунку 1.23. Тоді зусилля

$$F_1 = \frac{a + b}{a} \cdot Q, \quad (1.53)$$

а зусилля, що розриває гідравлічний прес, дорівнює

$$F_2 = Q \cdot \left(\frac{a + b}{a}\right) \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2. \quad (1.54)$$

Розглянемо принцип дії гідравлічного мультиплікатора або перетворювача тиску (рис. 1.24). Призначення мультиплікатора – підвищення тиску в системі. Мультиплікатор складається з циліндра 1, усередину якого входить рухомий порожнистий циліндр 2 діаметром  $D$ . Останній ковзає по нерухомому плунжеру з діаметром  $d$ . По осі плунжера проведена трубка для відведення рідини з підвищеним тиском.

Якщо в циліндр *1* подавати рідину під тиском  $p_1$ , то на плунжер *3* діятиме сила  $F = p_1 \cdot s_1$ , де  $s_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$ . Оскільки  $F = p_1 \cdot s_1 = p_2 \cdot s_2$ , а  $s_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ , то в разі знехтування силою тертя тиск на виході мультиплікатора

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{s_1}{s_2} = p_1 \cdot \frac{D^2}{d^2}. \quad (1.55)$$

Необхідне збільшення тиску  $\frac{p_2}{p_1}$  можна розрахувати підбором величин площ  $s_1$  і  $s_2$ .

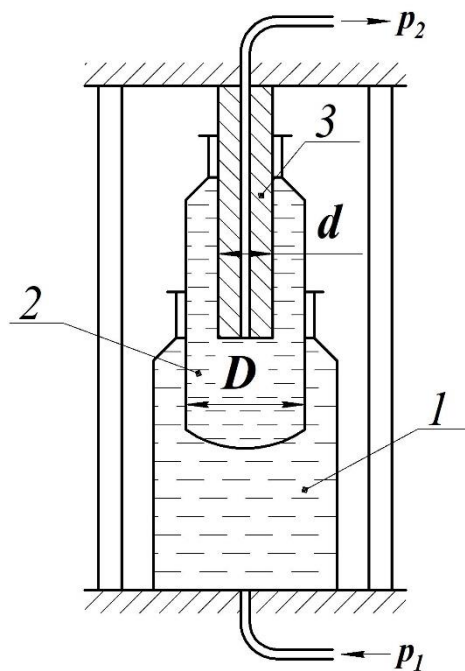


Рисунок 1.24 – Принципова схема гідралічного мультиплікатора

### 1.9 Рівновага вагомому газу. Барометрична формула

За малою висотою стовпа газу його густину можна вважати постійною в усіх точках, отже тиск розраховують за формулою (1.15). Якщо висоту стовпа повітря вимірюють кілометрами, потрібно вважати, що густина залежить від висоти. У цьому разі

$$dp = \rho \cdot g \cdot dh. \quad (1.56)$$

Для інтегрування цього виразу скористаємося законом Бойля – Маріотта, за сталої температури усього стовпа повітря густина його є пропорційною тиску, тобто

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{p}{p_0}. \quad (1.57)$$

Підставлення (1.57) до (1.56), де  $h = \frac{p}{\gamma}$ , та інтегрування дають

$$h = \frac{p_0}{\gamma_0} \int_p^{p_0} \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (1.58)$$

Розв'яжемо (1.58) відносно  $p$ :

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right), \quad h_0 = \frac{p_0}{\gamma_0}. \quad (1.59)$$

Застосуємо (1.58) для двох висот  $h_1$  та  $h_2$ :

$$h_1 = h_0 \cdot \ln \frac{p_0}{p_1}, \quad h_2 = h_0 \cdot \ln \frac{p_0}{p_2}.$$

Після віднімання  $h_2$  від  $h_1$  маємо барометричну формулу:

$$h_1 - h_2 = h_0 \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad (1.60)$$

звідси

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{h_2 - h_1}{h_0}\right). \quad (1.61)$$

Останні формули для ізотермічної атмосфери є тим точнішими, чим меншою є різниця  $h_2 - h_1$ . Насправді температура з висотою змінюється значною мірою. На рисунку 1.25 наведено розподіл тиску повітря  $p$  над рівнем



моря залежно від висоти  $h$  і температури  $t$ , °C. Числа на цій діаграмі прив'язані до так званої стандартної атмосфери ( $p_0 = 101,3$  кПа,  $t = 15$  °C).

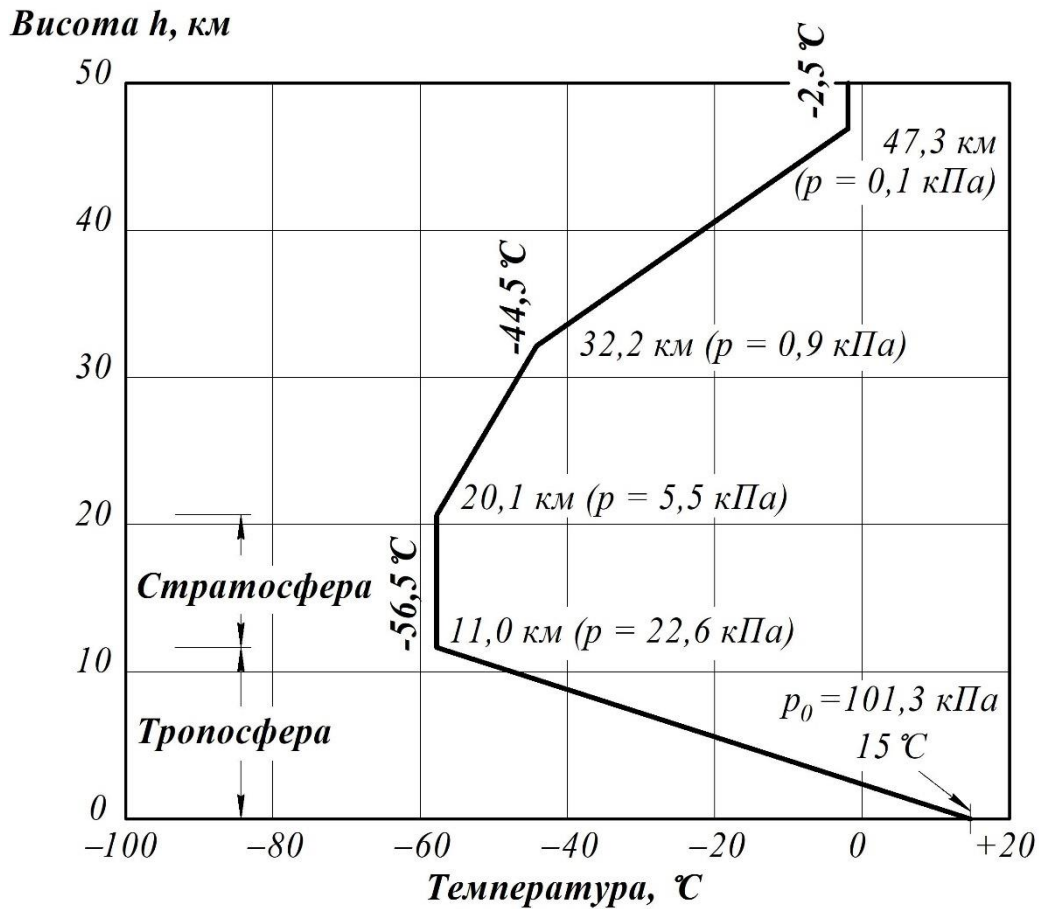


Рисунок 1.25 – Розподіл тиску повітря  $p$  над рівнем моря залежно від висоти  $h$  і температури  $t$ , °C

Для більш освоєної частини атмосфери – тропосфери – можна вважати зміну температури повітря з висотою лінійною:

$$T = T_0 - \beta \cdot h, \quad (1.62)$$

де  $T_0$  відповідає  $h = 0$ ;

$\beta$  – зниження температури з висотою,  $\beta = 0,00650$  К/км.

Барометрична формула за цих умов

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{\beta \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g}{R \cdot \beta}}, \quad (1.63)$$

де  $R$  – газова стала, для повітря  $R = 287$  Дж/(кг·К).

### 1.10 Сила тиску рідини на плоскі поверхні

Визначення сили тиску рідини на ту чи іншу поверхню (стінку, заглушку тощо) має велике практичне значення. Під час розрахунків має значення не лише тиск в окремих точках, а й сила тиску на споруду чи її частину.

Розглянемо визначення сили тиску на плоску стінку довільної форми, що утворює з горизонтом кут  $\alpha$  (рис. 1.26). На цьому рисунку плоска стінка показана також в іншій проєкції, поверненій на  $90^\circ$ .

Рідина тисне на поверхню з площею  $\omega$  в усіх точках, але цей тиск не рівномірний. У верхніх точках тиск менший, у нижніх – більший. Для того щоб знайти рівнодійну силу тиску на плоску стінку, потрібно обчислити силу тиску  $dF$  на елементарну площадку з площею  $d\omega$ , занурену на глибину  $h$ , а потім цей вираз проінтегрувати по всій площі площадки  $\omega$ .

Елементарну силу гідростатичного тиску на площу  $d\omega$  визначають як тиск у точці, помножений на площу площадки:

$$dF = p \cdot d\omega = (p_0 + \rho \cdot g \cdot h) \cdot d\omega,$$

де  $p_0$  – манометричний (надлишковий) тиск на поверхні рідини.

Зробимо деякі перетворення: помножимо й поділимо праву частину на  $\rho g$ :

$$dF = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{p_0}{\rho \cdot g} + h \right) \cdot d\omega = \rho \cdot g \cdot h' \cdot d\omega,$$

де  $h'$  – глибина занурення точки від п'єзометричної площини  $0'' - 0''$ , проведеної вище від вільної поверхні на величину п'єзометричної висоти  $\frac{p_0}{\rho g}$ ,

$$h' = \frac{p_0}{\rho g} + h \text{ або } h' = y' \sin \alpha.$$

Звідси

$$dF = \rho \cdot g \cdot y' \cdot \sin \alpha \cdot d\omega. \quad (1.64)$$

Після інтегрування по всій площі маємо

$$F = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \int_{\omega} y' d\omega.$$

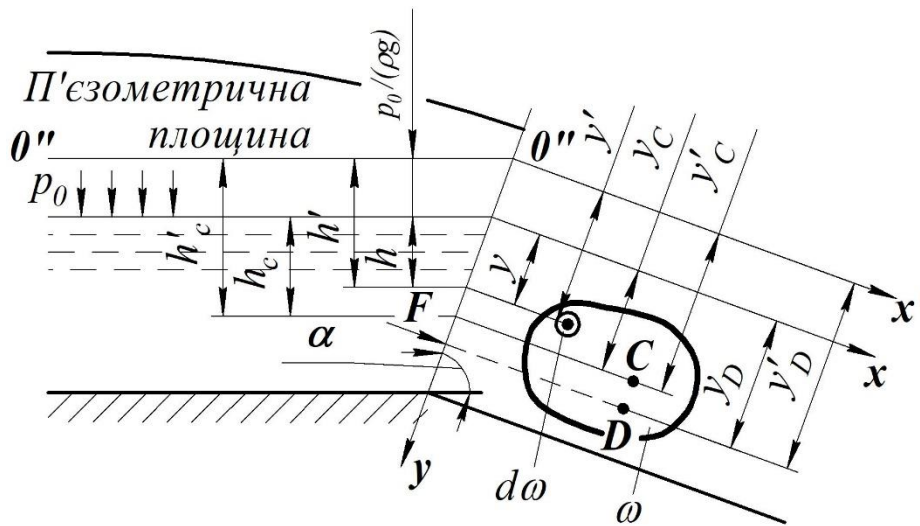


Рисунок 1.26– Визначення сили тиску на плоску стінку

Вираз  $\int_{\omega} y' d\omega$  є статичним моментом  $S_{x'}$  площі  $\omega$  відносно осі  $x'$ , його визначають як добуток відстані  $y'_c$  від центра ваги  $C$  до осі  $x'$  на площу поверхні  $\omega$ :

$$\int_{\omega} y' d\omega = S_{x'} = y'_c \cdot \omega.$$

З урахуванням цього рівнодійна сила

$$F = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot y'_c \cdot \omega \quad (1.65)$$

або

$$F = \rho \cdot g \cdot h'_c \cdot \omega, \quad (1.66)$$

де  $h'_c$  – глибина занурення центра ваги плоскої поверхні від п'єзометричної площини.

Виразимо

$$h'_c = h_c + \frac{p_0}{\rho \cdot g}$$

i

$$F = (p_0 + \rho \cdot g \cdot h_c) \omega. \quad (1.67)$$

В окремому випадку, якщо резервуар відкритий ( $p_0 = 0$ ,  $h' = h$ ,  $y' = y$ ),

$$F = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot \omega. \quad (1.68)$$

Силу тиску на плоску стінку визначають як тиск в її центрі ваги, помножений на площу змоченої поверхні.

Одержані вище результати, згідно з якими сила гідростатичного тиску на виділену поверхню не залежить від форми резервуара, частиною поверхні якого є виділена поверхня, пояснюють так званий *гідростатичний парадокс*. Його проілюстровано на прикладі сили, що діє на дно посудини (рис. 1.27).

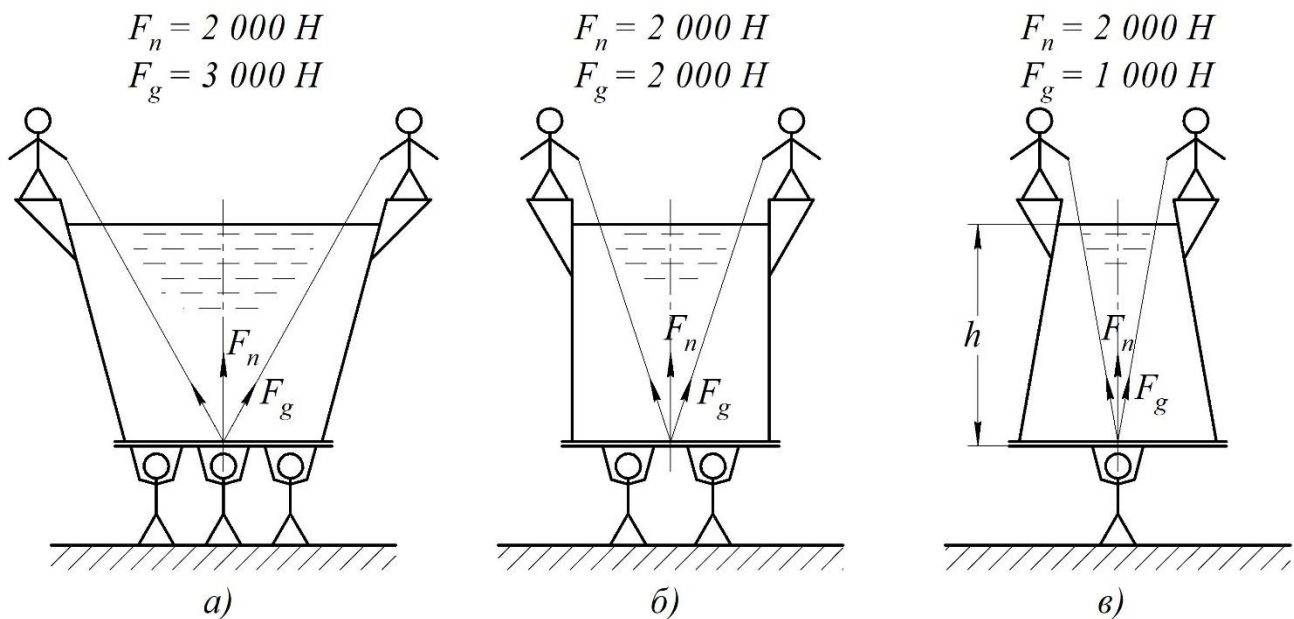


Рисунок 1.27– Ілюстрація гідростатичного парадоксу

Три різні за формою посудини мають однакову площу  $\omega_{\Pi}$  плити, що закриває дно. Сила надлишкового гідростатичного тиску, яка відриває плиту від посудини, в усіх трьох посудинах однакова, і її значення дорівнює

$$F_{\Pi} = \rho \cdot g \cdot h \cdot \omega_{\Pi},$$

в той самий час вага  $F_g$  рідини, що знаходиться в посудинах, істотно різна. Необхідно в цьому разі пояснити, що різниця між силами тиску на дно й реакціями опор, спричинених вагою рідини, зрівноважується вертикальними складовими сил тиску на похилі стінки резервуарів.

Після визначення сили тиску на плоску стінку потрібно визначити точку її прикладання – центр тиску (точку прикладання рівнодійної елементарних сил).

Для визначення центра тиску скористаємося принципом, згідно з яким момент рівнодійної сили дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил.

Позначимо відстань від центра тиску  $D$  до осі  $x$  через  $y_D$ , а до осі  $x'$  – через  $y'_D$ . Тоді

$$F \cdot y'_D = \int_{\omega} dF \cdot y'. \quad (1.69)$$

Звідси з урахуванням формул (1.62) і (1.63) дістанемо

$$y'_D = \frac{\int_{\omega} dF \cdot y'}{F} = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \int_{\omega} y' \cdot d\omega \cdot y'}{\rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot y'_C \cdot \omega} = \frac{\int_{\omega} y'^2 \cdot d\omega}{y'_C \cdot \omega} = \frac{J_{x'}}{S_{x'}}. \quad (1.70)$$

Вираз  $\int_{\omega} y'^2 d\omega = J_{x'}$  є моментом інерції площі відносно осі  $x'$ ,  $y'_C \omega = S_{x'}$  – статичний момент площі відносно осі  $x'$ . Тому

$$y'_D = \frac{J_{x'}}{S_{x'}}.$$

Отже,  $y'_D$  – відстань від центра тиску до осі  $x'$  – дорівнює відношенню моменту інерції  $J_{x'}$  до статичного моменту  $S_{x'}$ . Для практичних розрахунків можна перетворити цей вираз.

З механіки відомо, що між моментом інерції  $J_{x'}$  і центральним моментом інерції  $J_C$  (це момент інерції відносно осі, що проходить через центр ваги плоскої стінки) існує такий зв'язок:

$$J_{x'} = J_C + y'^2_C \omega.$$

Тоді дістанемо

$$y'_D = y'_D + \frac{J_C}{y'^2_C \cdot \omega}. \quad (1.71)$$

В окремому випадку, якщо резервуар відкритий,

$$y_D = y_C + \frac{J_C}{y_C \cdot \omega}. \quad (1.72)$$

Вираз  $\frac{J_C}{y_C \omega}$  показує, наскільки нижче від центру ваги розміщений центр тиску.

Центр тиску – це точка прикладання рівнодійної сили тиску, що проходить через центр ваги епюри тиску.

### **1.11 Графоаналітичний метод визначення сили тиску рідини на плоскі стінки прямокутної форми**

На практиці гідравлічних розрахунків часто виникає потреба у визначенні сили тиску на плоскі поверхні прямокутної форми. У цьому разі зручно користуватися графоаналітичним методом розрахунків.

Цей метод полягає у використанні епюр тиску рідини на стінки, причому епюри тиску будують для кожного окремого випадку. Графічно епюра показує зміну тиску залежно від зміни глибини рідини.

Сумарна сила тиску рідини  $F$  на плоску стінку прямокутної форми дорівнює добутку площі епюри тиску  $s_{еп}$  на ширину стінки  $b$ :

$$F = s_{еп} \cdot b.$$

Принципи побудови епюр тиску розглянемо на прикладі вертикальної стінки  $AB$  (рис. 1.28), верхня точка якої  $A$  збігається з рівнем вільної поверхні рідини.

У точці  $A$  надлишковий (манометричний) тиск  $p_{M(A)} = 0$ . У точці  $B$   $p_{M(B)} = \gamma h$ . Відклавши від точки  $B$  перпендикулярно до стінки  $AB$  величину  $\gamma h$ , одержимо точку  $C$ .

Величина відрізка  $BC$  – це величина манометричного тиску в точці  $B$ . Оскільки зміна манометричного тиску за глибиною підпорядковується лінійному закону ( $p = \gamma h$ ), то, з'єднавши точки  $A$  й  $C$ , отримаємо епюру тиску  $ABC$ .

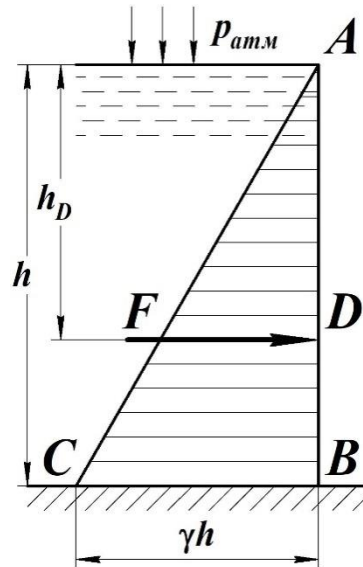


Рисунок 1.28 – Епюра тиску на вертикальну прямокутну стінку

З рисунку бачимо, що площа трикутної епюри тиску

$$S_{\text{еп}} = \frac{\gamma h^2}{2}.$$

Тоді рівнодійна сила тиску на стінку  $AB$

$$F = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot b,$$

де  $b$  – ширина стінки.

Рівнодійна сила проходить через центр тяжіння епюри тиску, тобто

$$h_D = \frac{2}{3}h.$$

Розглянемо побудову епюр для деяких типових випадків прямокутних стінок та наведемо відповідні залежності.

Прямокутна стінка нахилена під кутом (рис. 1.29):

$$S_{\text{еп}} = \frac{\gamma h^2}{2 \cdot \sin \alpha'},$$

$$F = \frac{\gamma h^2}{2 \cdot \sin \alpha} \cdot b,$$

$$F = s_{\text{еп}} \cdot b,$$

$$l_{\text{д}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{\sin \alpha}.$$

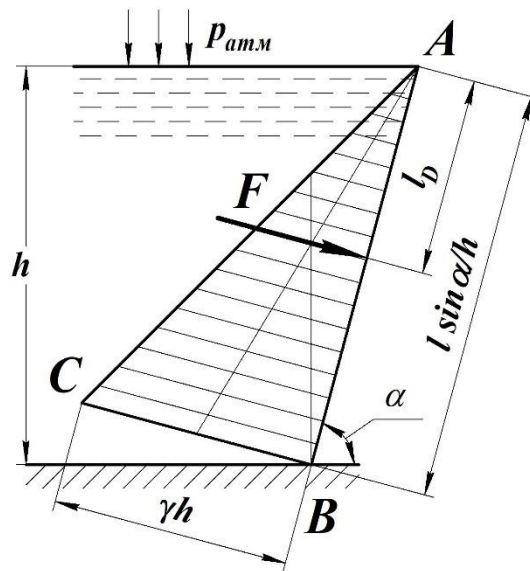


Рисунок 1.29 – Епюра тиску на похилу прямокутну стінку

За тиску рідини з двох боків стінки (рис. 1.30) епюри графічно віднімаються, і результуюча епюра має форму трапеції *ABNM*.

Площа епюри тиску

$$s_{\text{еп}} = \frac{\gamma \cdot (h_1^2 - h_2^2)}{2}.$$

Рівнодійна сила тиску

$$F = s_{\text{еп}} \cdot b = \frac{\gamma \cdot (h_1^2 - h_2^2)}{2} \cdot b.$$

Положення рівнодійної

$$h_{\text{д}} = h_1 - \frac{h_1^3 - h_2^3}{3 \cdot (h_1^2 - h_2^2)}.$$



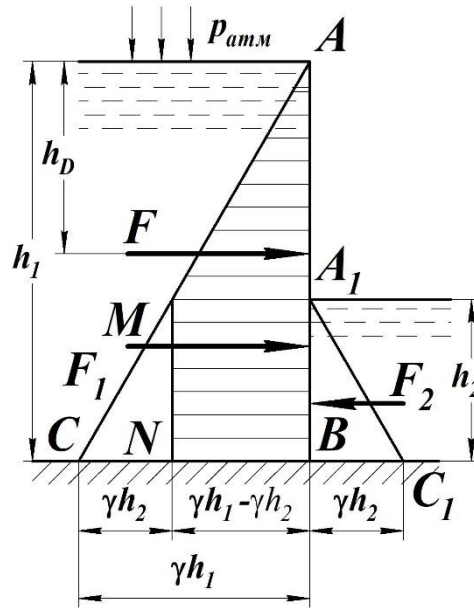


Рисунок 1.30 – Результуюча еюра тиску рідини з двох боків на вертикальну прямокутну стінку

Плоска прямокутна стінка  $AB$  занурена під рівень рідини. У цьому разі еюра має форму трапеції  $ABNM$  (рис. 1.31).

Площа еюри тиску

$$s_{\text{еп}} = \frac{\gamma \cdot (h_1^2 - h_2^2)}{2}.$$

Рівнодійна сила тиску

$$F = s_{\text{еп}} \cdot b = \frac{\gamma \cdot (h_1^2 - h_2^2)}{2} \cdot b.$$

Положення рівнодійної

$$h_D = \frac{2}{3} \cdot \left( h_2 + \frac{h_1^2}{h_1 + h_2} \right).$$

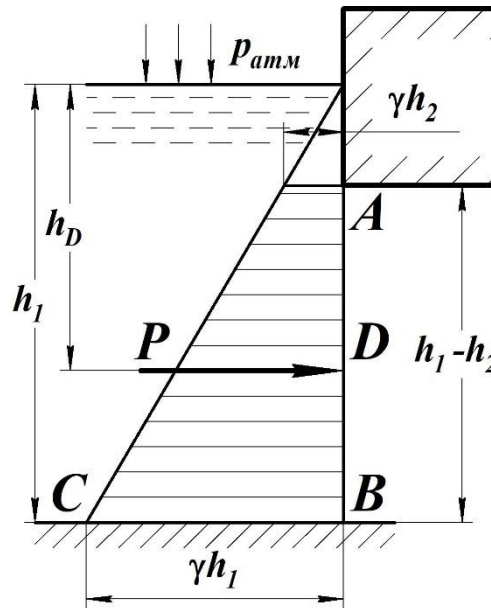


Рисунок 1.31 – Епюра тиску на плоску стінку, занурену під рівень рідини

### 1.12 Сила тиску рідини на криволінійній поверхні

Під час визначення сили тиску рідини на криволінійній поверхні точка прикладання цієї сили та її напрям невідомі, оскільки в кожній точці тиск буде перпендикулярним (нормальним) до цієї поверхні.

Для криволінійних поверхонь елементарні сили тиску, залишаючись нормальними відносно відповідної площадки, вже не будуть паралельними між собою. Вони утворюють систему сил, довільно розміщених у просторі; розрахунок їх зводять до визначення головного вектора сил.

Для визначення сили тиску на криволінійну поверхню передусім необхідно визначити три її складові, паралельні координатним осям.

Розглянемо довільну криволінійну поверхню нескінченно малої товщини, на яку з двох боків діє рідина (рис. 1.32).

Сила тиску на елементарну площадку

$$dF = p \cdot d\omega = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{p_0}{\rho \cdot g} + h \right) \cdot d\omega = \rho \cdot g \cdot h' \cdot d\omega, \quad (1.73)$$

де  $h' = \frac{p_0}{\rho g} + h$  – глибина занурення точки, розміщеної в центрі елементарної площадки і відкладеної від п'езометричної площини.

Складові сили  $dF$ , паралельні координатним осям, визначають як добуток цієї сили на косинус кута між напрямом сили й відповідною віссю:

$$dF_x = p \cdot d\omega \cdot \cos(dF, x),$$

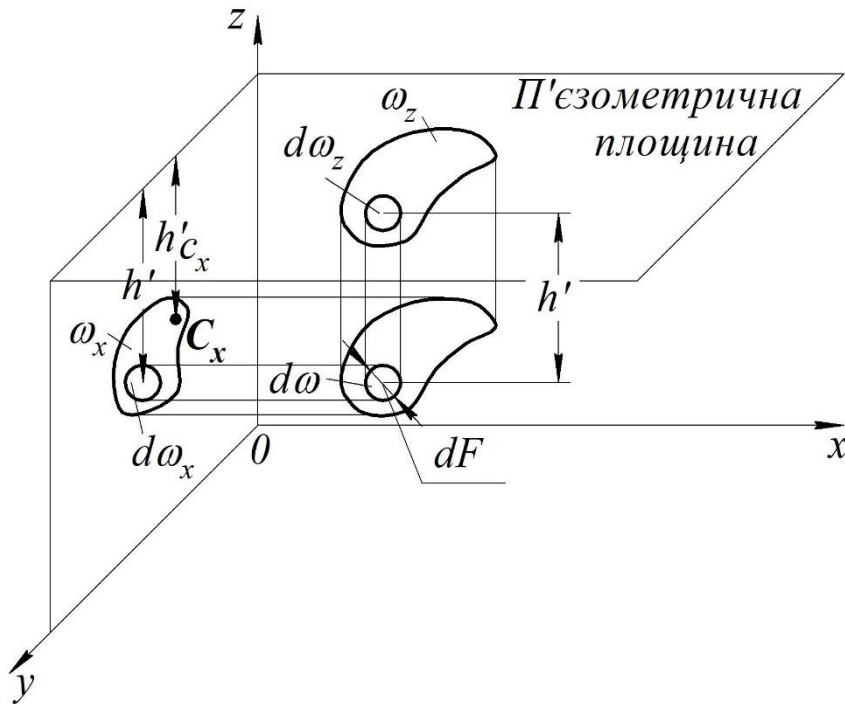


Рисунок 1.32 – Визначення сили тиску рідини на криволінійну поверхню

$$dF_y = p \cdot d\omega \cdot \cos(dF, y),$$

$$dF_z = p \cdot d\omega \cdot \cos(dF, z).$$

Добуток  $d\omega$  на відповідний косинус кута між силою й координатною віссю є проекцією цієї площі на площину, перпендикулярну до відповідної осі, тобто:

$$d\omega \cdot \cos(dF, x) = d\omega_x,$$

$$d\omega \cdot \cos(dF, y) = d\omega_y,$$

$$d\omega \cdot \cos(dF, z) = d\omega_z.$$

Звідси маємо

$$dF_x = p \cdot d\omega_x.$$

Після інтегрування дістанемо аналогічно формулі (1.65):

$$F_x = \int_{\omega_x} p \cdot d\omega_x = \rho \cdot g \int_{\omega_x} h' \cdot d\omega_x = \rho \cdot g \cdot h'_{C_x} \cdot \omega_x, \quad (1.74)$$

$$F_y = \rho \cdot g \cdot h'_{C_y} \cdot \omega_y, \quad (1.75)$$

де  $\omega_x$  і  $\omega_y$  – проєкції площі криволінійної поверхні на вертикальні площини, перпендикулярні до осей  $x$  і  $y$ ;

$h'_{C_x}$  і  $h'_{C_y}$  – глибини занурення центрів ваги цих проєкцій від п'єзометричної площини.

Отже, горизонтальні складові тиску на криволінійну поверхню дорівнюють силам тиску на проєкції цієї поверхні, перпендикулярні до відповідних координатних осей.

Розглянемо вертикальну складову сили тиску

$$F_z = \int_{\omega_z} p \cdot d\omega_z = \rho \cdot g \int_{\omega_z} h' \cdot d\omega_z,$$

де  $h' d\omega_z = dW'$  – об'єм вертикального стовпця рідини, що спирається на площадку  $d\omega_z$  висотою  $h'$ .

Інтеграл цього виразу є об'ємом  $W'$  усього вертикального стовпця рідини, що спирається на криволінійну поверхню та обмежується зверху п'єзометричною площиною.

Такий стовпець називають *тілом тиску*:

$$W' = \int_{\omega_z} h' d\omega_z = \int_{\omega_z} dW',$$

$$F_z = \rho \cdot g \cdot W'. \quad (1.76)$$

Це вертикальна складова сили тиску на криволінійну поверхню, що дорівнює вазі тіла тиску. Звідси рівнодійна сила тиску

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.77)$$

Товщину криволінійної поверхні вважають нескінченно малою, і тому глибина  $h'$  буде однаковою для обох боків поверхні. Отже, й сили  $dF$  будуть однаковими з обох боків площадки.

Сили  $F$  на всю криволінійну поверхню також будуть однаковими з обох боків поверхні, але з протилежним напрямом.

Якщо на вільній поверхні  $p_0 = p_{am}$ , тобто манометричний тиск  $p_M = 0$ , то

$$F_x = \rho \cdot g \cdot h_{C_x} \cdot \omega_x, \quad (1.78)$$

$$F_y = \rho \cdot g \cdot h_{C_y} \cdot \omega_y, \quad (1.79)$$

$$F_z = \rho \cdot g \cdot W, \quad (1.80)$$

де  $h_{C_x}$ ,  $h_{C_y}$  – відповідно глибини занурення центрів ваги проєкцій площ  $\omega_x$  і  $\omega_y$ , вимірюваних від вільної поверхні;

$W$  – об'єм тіла тиску, обмежений зверху вільною поверхнею.

На практиці криволінійні поверхні часто є циліндричними. У цьому разі (рис. 1.33), якщо розмістити систему координат так, щоб вісь  $y$  була паралельною твірній циліндричної поверхні, одержимо формулу рівнодійної сили тиску

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}, \quad (1.81)$$

де складові  $F_x$  і  $F_z$  визначають за наведеними вище формулами.

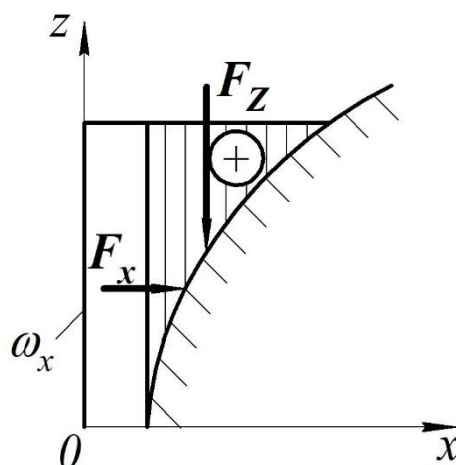


Рисунок 1.33 – Циліндрична криволінійна поверхня

Для практичних розрахунків важливо вміти визначати тіло тиску. На рисунку 1.34 наведені деякі характерні випадки.

У випадках, показаних на рисунку 1.34а), б), тіла тиску однакові за величиною, але в першому з них вертикальна складова спрямована вгору (знак «-»), а в другому – вниз (знак «+»).

Тіло тиску, заповнене рідиною (рис. 1.34 б), називають дійсним на відміну від фіктивного, заповненого рідиною умовно (рис. 1.34 а), в)).

Якщо одну частину криволінійної поверхні (*ab*) рідина стискає зверху, а іншу (*bc*) – знизу (рис. 1.34в), то тіло тиску визначають як суму тіл тиску на кожну частину криволінійної поверхні з відповідними знаками.

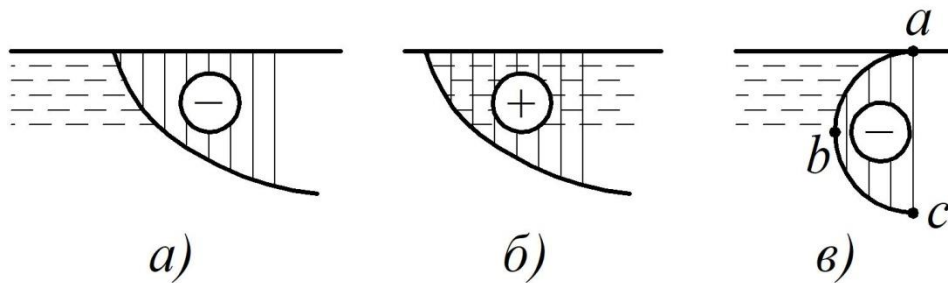


Рисунок 1.34 – Види тіл тиску

Напрям рівнодійної сил тиску характеризують кутом нахилу її до горизонту:

$$\beta = \arctg \frac{F_z}{F_x}. \quad (1.82)$$

Якщо твірна циліндричної поверхні в основі циліндра описує коло, то рівнодійна *F* пройде через центр кола, оскільки вона нормальна до дотичної в точці прикладання, отже, повинна збігатися з напрямом радіуса. На рисунку 1.35 наведено схему визначення складових та рівнодійної сили тиску, а також її напрям на криволінійну поверхню сегментного затвора. Точка прикладання рівнодійної розміщена на перетині її напрямку з криволінійною поверхнею.

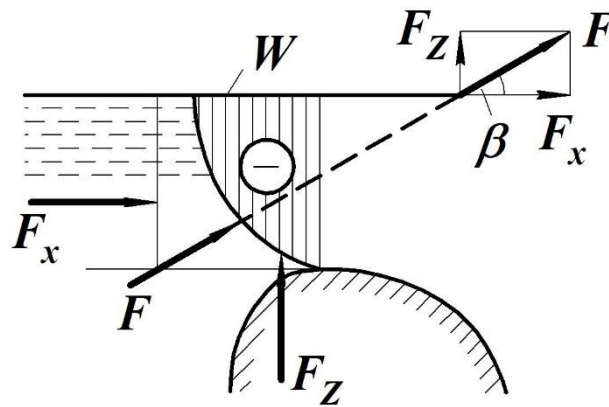


Рисунок 1.35– Схема визначення складових сил тиску, що діють на криволінійну поверхню сегментного затвора

### 1.13 Закон Архімеда та основи теорії плавання тіл

Припустимо, що вертикальний циліндр, висота якого  $H$ , площа основи  $S$  та об'єм  $W$ , занурений у рідину густиною  $\rho$  (рис. 1.36). Водночас верхня основа циліндра занурена на глибину  $h_1$ , а нижня – на глибину  $h_2$ . Цей циліндр перебуває під дією таких сил гідростатичного тиску:

- сили  $F_1$ , що діє на верхню основу циліндра;
- сили  $F_2$ , що діє на нижню основу циліндра;
- сил гідростатичного тиску, що діють з усіх боків на вертикальну поверхню циліндра і спрямовані нормально до його вертикальної осі (вони будуть зрівноважуватися між собою, тому що однакові за величиною й спрямовані в протилежні боки).

Сила  $F_1$ , що діє на верхню основу циліндра, дорівнює

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot S, \quad (1.83)$$

де  $\rho$  – густина рідини, в яку занурене тіло.

Сила  $F_2$ , що діє на нижню основу циліндра, дорівнює

$$F_2 = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot S. \quad (1.84)$$

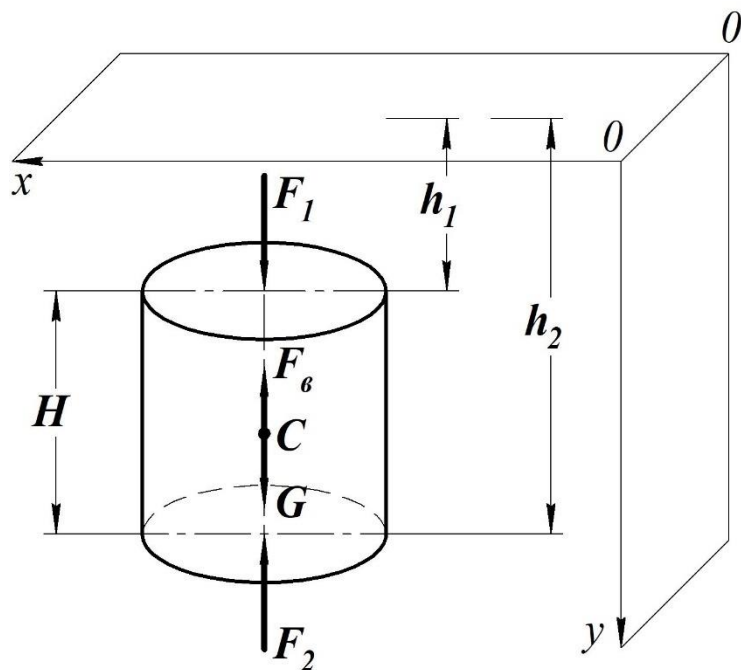


Рисунок 1.36 – Схема для ілюстрації закону Архімеда

Як бачимо з рисунка 1.36, сила  $F_1$  занурює циліндр, а сила  $F_2$  виштовхує його з рідини.

Різницю сил

$$F_B = F_2 - F_1 \quad (1.85)$$

у циліндрі називають виштовхувальною силою, або силою Архімеда.

Підставимо в (1.85) вирази (1.83) і (1.84). Тоді

$$F_B = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot S - \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot S = \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \cdot S = \rho \cdot g \cdot H \cdot S.$$

Ураховуючи те, що  $H \cdot S = W$  є об'ємом циліндра, залежність (1.85) матиме вигляд

$$F_B = \rho \cdot g \cdot W. \quad (1.86)$$

Рівняння (1.86) описує закон Архімеда, який можна сформулювати так: *На тіло, занурене в рідину, діє виштовхувальна сила, що спрямована вертикально вгору й дорівнює вазі витісненої тілом рідини.*



Виштовхувальна сила прикладена в центрі тяжіння витісненого об'єму рідини, який називають центром водотоннажності. Центр водотоннажності в загальному випадку не збігається з центром тяжіння плаваючого тіла. Закон Архімеда має велике значення під час розв'язування задач, пов'язаних із плаванням тіл.

У теорії плавання є дві основні задачі: плавучості та остійкості.

Під поняттям плавучості розуміють здатність тіла плавати в напівзануреному стані. Остійкість – здатність тіла відновлювати положення рівноваги за незначного його відхилення від даного. У разі, якщо виштовхувальна сила  $F_B$  менша від ваги тіла  $G$ , то тіло тоне, якщо  $F_B$  більша за  $G$ , то тіло плаває, якщо  $F_B$  дорівнює  $G$ , тіло плаває в зануреному стані незалежно від глибини занурення.

### **Запитання і завдання для самоконтролю**

- 1 Які властивості має гідростатичний тиск?
- 2 Дайте визначення повного (абсолютного), надлишкового (манометричного) тисків і вакууму.
- 3 Поясніть фізичний зміст величин, що входять до диференціальних рівнянь рівноваги рідини (рівняння Ейлера).
- 4 Сформулюйте основне рівняння гідростатики.
- 5 Наведіть характерні епюри гідростатичного тиску.
- 6 Прилади для вимірювання тиску, різниці тисків, їх переваги й недоліки.
- 7 Сформулюйте закон Паскаля і наведіть приклади його практичного застосування.
- 8 Які умови рівноваги рідини в з'єднаних посудинах?
- 9 Запишіть барометричну формулу для тропосфери та поясніть її фізичний зміст.
- 10 Як визначають силу тиску рідини на плоскі поверхні?
- 11 Як знаходить центр тиску – точку прикладання рівнодійної сили?
- 12 Як визначають силу тиску на криволінійній поверхні?
- 13 Поясніть значення терміна «тіло тиску».
- 14 Дайте визначення дійсного й фіктивного тіл тиску.
- 15 Сформулюйте закон Архімеда.

## Розділ 2 КІНЕМАТИКА РІДИНИ

### 2.1 Основні методи вивчення руху рідини

*Кінематика руху рідини* – розділ механіки рідини, в якому вивчають види й кінематичні характеристики руху рідини, але не розглядають сил, під дією яких рідина рухається.

У кінематиці рідин і газів вивчають положення частинок рідини й газу в просторі залежно від часу. За висловлюванням М. Є. Жуковського, кінематика є геометрією руху.

На відміну від теоретичної механіки, в якій вивчають рух абсолютно твердого тіла, а також рух окремої точки або системи точок із фіксованою відстанню між ними, в кінематиці суцільного середовища вивчають рух деформованих тіл. У процесі руху таких тіл змінюються первинна їх форма і відстань між двома будь-якими частинками. Здатність деформуватись є основною кінематичною особливістю суцільного середовища взагалі й рідин та газів зокрема.

Розглядувані в курсі поняття й закони кінематики відносять не лише до рідин та газів, а й до всіх суцільних або деформованих середовищ. Таким чином, кінематика суцільного середовища вивчає геометрію руху рідинних, газоподібних і деформованих твердих тіл, що мають одну загальну властивість – суцільність або безперервність середовища.

Є два методи вивчення руху рідини.

*Метод Лагранжа.* Згідно з цим методом об'єктом вивчення є сама рідина, причому вивчають рух кожної окремої частинки рідини. Нехай частинка рідини  $M$  у початковий момент часу  $t_0$  має координати  $x_0, y_0, z_0$ . Під час руху цієї частинки рідини її координати змінюються і на момент часу  $t$  вони будуть  $x, y$  та  $z$ .

Рух частинки рідини буде описаний, коли буде встановлена залежність між початковими та кінцевими її координатами як функція часу, тобто коли буде розкрита залежність

$$\left. \begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0, t), \\ y &= y(x_0, y_0, z_0, t), \\ z &= z(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Змінні  $x_0, y_0, z_0, t$  є незалежними змінними, які називають змінними Лагранжа.

*Метод Ейлера.* За цим методом рух рідини описують функціями, що вказують зміну швидкостей у точках нерухомого простору, в якому рухається рідина. Таким чином, координати  $x, y, z$  розглядають як координати нерухомого простору, через які послідовно проходять різні частинки рідини. Швидкості частинок рідини в різних точках простору (поток) будуть різними й змінюватимуться в часі, оскільки через ці точки простору проходять різні частинки рідини. Отже, весь простір буде прийнятий потоком, тобто його можна подати у вигляді поля швидкостей, що безперервно змінюється в часі.

Явище буде описане, якщо будуть розкриті залежності зміни поля швидкостей як функції координат простору та часу:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t), \\ u_y &= u_y(x, y, z, t), \\ u_z &= u_z(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Розкривши ці функціональні залежності, можна визначити швидкість у довільній точці простору в довільний момент часу. Змінні  $x, y, z, t$  називають незалежними змінними Ейлера.

Загалом дослідження зручно проводити в змінних Ейлера, а в деяких окремих задачах переваги може мати метод Лагранжа. У цьому курсі метод Лагранжа не застосовують. Усе вивчення побудоване на методі Ейлера.

## 2.2 Види руху рідини

Будемо вважати, що всі кінематичні величини безперервні в просторі та часі й диференціюються. В окремих випадках неперервність деяких величин може порушуватися, можуть з'являтися поверхні розриву таких величин, як швидкість, прискорення і т. ін.

Рух суцільного середовища характеризується насамперед швидкостями її частинок. У кожний момент часу кожна частинка має визначену за величиною й напрямком швидкість.

Мають місце два види руху рідини: стаціонарний та нестаціонарний.

*Стаціонарний рух.* Розглянемо простір, заповнений рухомою рідиною. Будемо спостерігати за зміною швидкостей у довільно вибраних точках цього простору. Якщо впродовж часу  $t$  величини швидкостей частинок рідини  $u$  та гідродинамічного тиску  $p$  залишаються постійними, то такий рух називають стаціонарним (усталеним).

У цьому разі можна записати:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ p &= p(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Тобто під час стаціонарного руху величини швидкості та гідродинамічного тиску є функціями лише координат точки й не залежить від часу.

*Нестаціонарний рух.* Якщо в просторі, зайнятому потоком, у кожній точці величини швидкості та гідродинамічного тиску будуть змінюватися в часі, такий рух рідини називають нестаціонарним (неусталеним).

Для нестаціонарного руху можна записати такі функціональні залежності:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z, t), \\ p &= p(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Отже, під час нестаціонарного руху рідини величини швидкості та гідродинамічного тиску є функціями як координат точок, так і часу.

### 2.3 Прискорення частинки рідини

Вектор прискорення частинки рідини, що рухається зі швидкістю  $U$ , є індивідуальною похідною за часом від вектора швидкості, тобто

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt}.$$

Оскільки вектор швидкості залежить від часу й координат, тобто

$$\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t),$$

то за правилом диференціювання складної функції знайдемо

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (2.5)$$

Оскільки похідні від координат рухомої точки за часом є відповідною проекцією, то

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + u_x \frac{\partial\vec{U}}{\partial x} + u_y \frac{\partial\vec{U}}{\partial y} + u_z \frac{\partial\vec{U}}{\partial z}. \quad (2.6)$$

Використовуючи оператор Гамільтона  $\nabla$ , що дорівнює

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k},$$

прискорення частинки рідини можна подати у вигляді

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V}.$$

Перший доданок правої частини рівняння виражає зміну швидкості в часі в деякій фіксованій точці простору, тобто місцеву зміну, і тому його називають *локальною складовою прискорення*. Другий доданок характеризує зміну швидкості частинки рідини під час її переміщення, його називають *конвективною складовою прискорення*.

У проекціях на осі координат  $x, y, z$  рівняння (2.6) буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}, \\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Під час стаціонарного руху локальне прискорення завжди дорівнює нулю. Під час нестаціонарного руху воно може перетворюватися на нуль лише тоді, коли в даній точці має максимальне або мінімальне значення в часі.

Конвективне прискорення може виникати як під час стаціонарного, так і під час нестаціонарного руху. Воно перетворюється на нуль лише тоді, коли середня швидкість не залежить від координат.

## 2.4 Лінія течії рідини

Розглянемо декілька понять, необхідних під час подальшого вивчення руху рідини.

*Траєкторія частинки рідини.* Виділимо частинку А в рідині, що рухається в розглядуваному просторі. Вважаючи рух криволінійним, можна зазначити, що за певний проміжок часу  $t$  виділена частинка переміститься від початкового положення  $A_1$  до кінцевого  $A_2$  та опише якусь криву між цими крайніми точками. Цю криву називають траєкторією частинки рідини. Таким чином, траєкторія є характеристикою зміни положення частинки рідини в просторі й часі.

*Лінія течії.* Розглянемо точку 1 (рис. 2.1), у якій вектор швидкості дорівнює  $u_1$ . Якщо вибрати в напрямі цього вектора точку 2, в ній буде вектор швидкості  $u_2$ . Аналогічно дістанемо вектори швидкостей  $u_3, u_4$  і т. ін. Сукупність цих векторів дає ламану лінію. У разі зменшення відстані між точками одержимо плавну криву, яку називають *лінією течії*.

Отже, лінія течії є уявною геометричною кривою, проведеною в просторі так, що дотична в будь-якій точці кривої характеризує напрям швидкості в цій точці в певний момент часу.

Під час усталеного руху лінія течії збігається з траєкторією руху частинки.

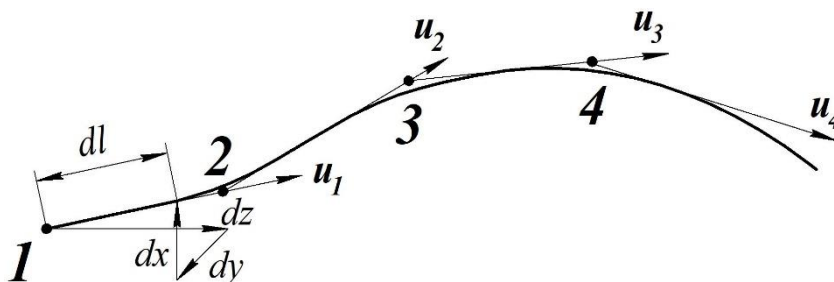


Рисунок 2.1 – Лінія течії рідини

У цьому разі за час  $dt$  частинка за швидкості  $u$  пройде шлях  $dl$ , проєкції якого на осі будуть  $dx, dy, dz$ .

Складові швидкості на осі:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Тоді

$$dt = \frac{dx}{u_x}, dt = \frac{dy}{u_y}, dt = \frac{dz}{u_z}.$$

Звідси маємо

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (2.8)$$

Це рівняння називають *рівнянням лінії течії*.

Як впливає з визначення, лінією течії є лінія, в кожній точці якої нормальна складова швидкості дорівнює нулю, тобто через лінію течії немає перетікання. Таким чином, між двома довільними лініями течії кількість протічної рідини постійна. Тому для нестисливої рідини в місцях, де лінії течії зближуються, й, навпаки, там, де вони розходяться, швидкості зменшуються.

Якщо через поверхню обтічного тіла рідина не перетікає, то ця поверхня є поверхнею течії. Для плоского обтікання (рис. 2.2) це буде лінія течії, яку на відміну від інших називають нульовою лінією течії.

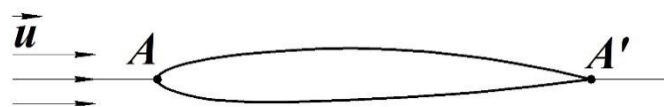


Рисунок 2.2 – Нульова лінія течії

Через будь-яку точку рухомого середовища на цей момент часу можна провести лише одну лінію течії, але існують деякі особливі точки, в яких це правило порушується. В особливих точках лінії течії перетинаються, отже, в цих точках вектор швидкості повинен мати різні напрямки, що за кінцевого значення швидкості неможливо. Тому в особливих точках величина швидкості повинна дорівнювати або нулю, або нескінченності.

Під час обтікання тіла нульова лінія течії, що утворює непроникний контур (рис. 2.2), має особливі точки  $A$  і  $A'$ . У цих точках, які називають критичними, величина швидкості дорівнює нулю.



Особливу точку другого типу маємо під час розгляду задачі про витікання середовища з однієї точки або, навпаки, в разі її втікання в точку (рис. 2.3).

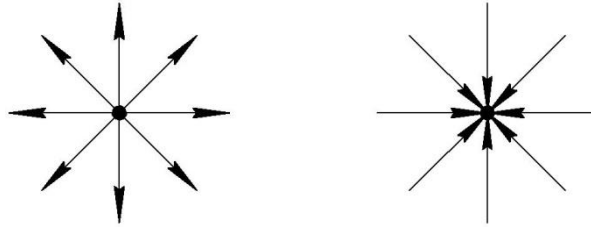


Рисунок 2.3 – Точкове джерело і точковий стік

Перший рух має назву *точкового джерела*, а другий – *стоку*. В обох випадках у точках перетину величина швидкості перетворюється на нескінченність.

## 2.5 Елементарна струминка рідини

Розглянемо замкнений елементарний контур площею  $d\omega$  (рис. 2.4). Припустимо, що через кожну точку периметра цього контуру проходить лінія течії. Ці лінії течії створюють елементарну трубку, обмежену по контуру лініями течії. Якщо через кожну точку поперечного перерізу  $d\omega$  цієї трубки проходять частинки рідини, що заповняють трубку, ми одержимо елементарну струминку рідини.

Елементарна струминка має такі основні властивості:

- Під час усталеного руху форма елементарної струминки з часом не змінюється, а під час неусталеного – змінюється;
- площі нормальних перерізів струминки нескінченно малі, але водночас неоднакові в різних місцях ( $d\omega_1$  не дорівнює  $d\omega_2$ ). Інакше кажучи, пучок ліній течії всередині трубки може згущуватися й розріджуватися;
- в усіх точках певного нормального перерізу струминки швидкості однакові (рис. 2.4 б) (що впливає з умови нескінченно малої величини самих перерізів), але під час переходу від одного перерізу до іншого швидкості змінюються.

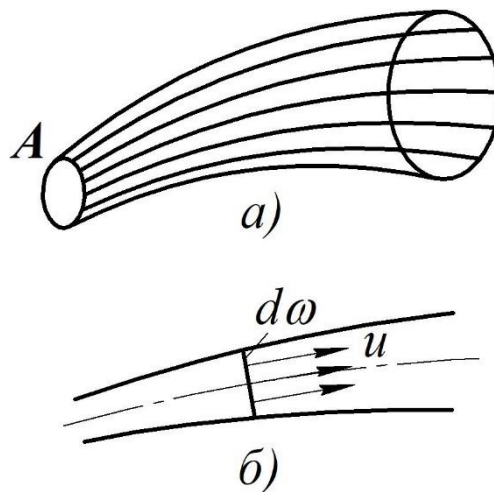


Рисунок 2.4 – Елементарна струминка рідини

Потоком рідини в гідрогазодинаміці називають масу рідини, що рухається в контурах, які її обмежують і складається з безлічі елементарних струминок. Наприклад, рух рідини в трубопроводах, каналах, річках і т. ін. Для вивчення руху потоку рідини приймають струминну модель потоку, тобто потік вважають сукупністю великої кількості елементарних струминок. Зазвичай у цьому разі залежності, одержані для елементарної струминки реальної рідини, з деякими корективами можна застосовувати й для потоку рідини.

Основними параметрами потоку є витрата  $Q$  та середня швидкість  $V$ . Розглянемо ці поняття.

## 2.6 Витрата потоку рідини

Визначимо спочатку поняття про живий переріз потоку. Домовимося називати живим перерізом потоку поверхню поперечного перерізу потоку, нормального до лінії течії, тобто нормального до всіх елементарних струминок. Живий переріз потоку буде становити деяку криволінійну поверхню. Але для умов рівномірного або повільно-змінного руху з достатньою для практичних цілей точністю за живий переріз потоку можна брати плоский поперечний переріз, нормальний до основного напрямку руху рідини.

Площу живого перерізу потоку можна визначити як суму живих перерізів елементарних струминок:

$$\omega = \int_{\omega} d\omega. \quad (2.9)$$

Елементарною витратою струминки  $dQ$  будемо називати об'єм рідини, що протікає через живий переріз струминки за одиницю часу.

Розглянемо рух рідини в елементарній струминці. Виберемо переріз 1–1 і позначимо площу живого перерізу струминки  $d\omega$  (рис. 2.5).

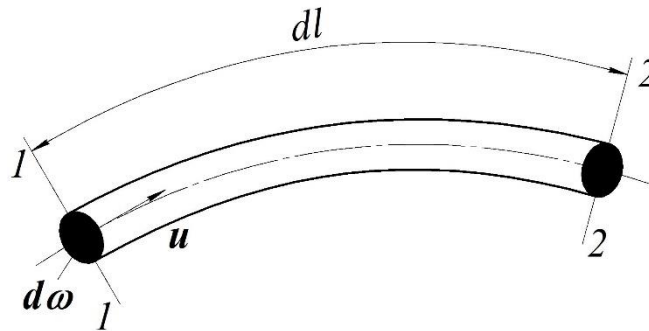


Рисунок 2.5 – Рух рідини в елементарній струминці

За час  $dt$  частинки рідини перемістяться від перерізу 1–1 на відстань  $dl$  до поперечного перерізу 2–2, тобто через поперечний переріз  $d\omega$  в елементарну струминку пройде об'єм рідини  $dW$ . Цей об'єм дорівнює добутку площі живого перерізу на відстань між перерізами 1–1 та 2–2, тобто

$$dW = d\omega \cdot dl. \quad (2.10)$$

З іншого боку, шлях  $dl$ , який пройдуть частинки рідини, можна подати як добуток швидкості й часу:

$$dl = u \cdot dt, \quad (2.11)$$

де  $u$  – швидкість руху частинок рідини.

Підставляючи це у вираз (2.10), одержуємо

$$dW = d\omega \cdot u \cdot dt.$$

Звідси

$$\frac{dW}{dt} = u \cdot d\omega. \quad (2.12)$$

У лівій частині рівняння ми маємо об'єм рідини, що пройшов через живий переріз 1–1 за одиницю часу, тобто елементарну витрату  $dQ$ :

$$dQ = \frac{dW}{dt} = u \cdot d\omega, \quad (2.13)$$

*Витратою потоку рідини* називають об'єм рідини, що пройшов через живий переріз потоку за одиницю часу.

Виходячи зі струминної моделі потоку, витрату потоку можна одержати як суму витрат елементарних струминок, що утворюють цей потік:

$$Q = \int_{\omega} dQ. \quad (2.14)$$

Підставивши значення  $dQ$  з рівняння (2.13), одержимо

$$Q = \int_{\omega} u \cdot d\omega. \quad (2.15)$$

Щоб проінтегрувати вираз (2.15), потрібно знати закон розподілу швидкостей за живим перерізом потоку. Здебільшого цей закон нам невідомий, отже, безпосередньо проінтегрувати (2.15) ми не можемо. Але ж витрата є однією з найважливіших характеристик потоку і знайти її необхідно в будь-якому разі. Тому в практичних розрахунках використовують середню швидкість потоку  $V$ , постійну для цього поперечного перерізу. У цьому разі формулу (2.15) можна записати в такому вигляді:

$$Q = \int_{\omega} u \cdot d\omega = V \int_{\omega} d\omega, \quad (2.16)$$

тобто

$$Q = V \cdot \omega, \quad (2.17)$$

де  $V$  – середня швидкість потоку;

$\omega$  – площа живого перерізу потоку.

Ми одержали важливу залежність (2.17), а саме: *витрата потоку рідини дорівнює добутку середньої швидкості потоку й площі живого перерізу.*

## 2.7 Середня швидкість потоку

Пояснимо більш детально поняття «середня швидкість потоку». Розглянемо рух реальної рідини в трубопроводі. Виберемо переріз 1–1 і відмітимо декілька точок в цьому перерізі (рис. 2.6). Як ми вже знаємо, внаслідок в'язкості рідини різні її шари рухаються з різною швидкістю, тобто виникають сили тертя між шарами рідини, а також між рідиною та стінками трубопроводу.

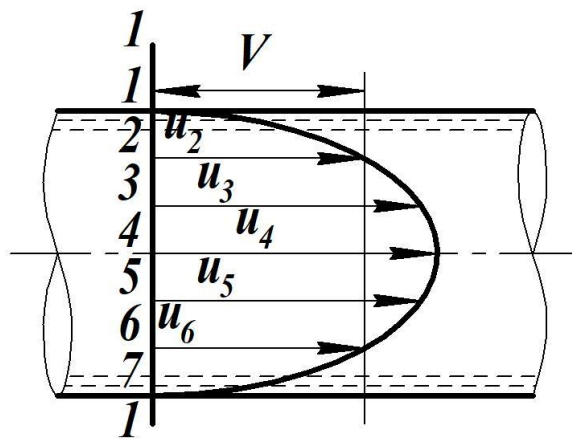


Рисунок 2.6 – Епюра швидкості рідини в трубі

Очевидно, що частинки рідини, які безпосередньо дотикаються до стінок трубопроводу, нерухомі, а частинки рідини, розміщені близько до стінок, мають невелику швидкість. Чим більша відстань частинки рідини від стінок трубопроводу, тим величина швидкості цієї частинки більша. Свого максимального значення швидкість досягає по осі трубопроводу. Тобто розподіл швидкостей частинок рідини (епюра швидкостей) має криволінійну форму (рис. 2.6).

Оскільки витрата є важливою характеристикою потоку, з'ясуємо її фізичну суть. Розглянемо вираз (2.15). У правій частині цієї формули  $\int_{\omega} u \cdot d\omega$  є не що інше, як об'єм епюри розподілу швидкостей, тобто витрата потоку визначають об'ємом епюри швидкостей. Припустимо далі, що всі частинки потоку рухаються з однаковою швидкістю  $V$ . У цьому разі епюра швидкостей буде мати

форму циліндра висотою  $V$ . Якщо величина  $V$  цієї фіктивної епюри буде підібрана таким чином, що її об'єм буде дорівнювати об'єму реальної криволінійної епюри (рис. 2.6), то очевидно, що реальну витрату можна виразити об'ємом циліндричної епюри:

$$Q = \int_{\omega} u \cdot d\omega = \int_{\omega} V \cdot d\omega = V \int_{\omega} d\omega = V\omega,$$

тобто ми одержали залежність (2.17).

Отже, середньою швидкістю потоку називають таку фізичну швидкість, за якої витрата буде дорівнювати реальній витраті потоку, обчисленій за реальними швидкостями елементарних струминок. Із залежності (2.17) маємо

$$V = \frac{Q}{\omega}, \quad (2.18)$$

тобто середня швидкість дорівнює витраті рідини, поділеній на площу живого перерізу.

Декілька слів про гідравлічні елементи перерізу потоку.

Гідравлічними елементами перерізу потоку є:

- а) площа живого перерізу потоку  $\omega$ ;
- б) змочений периметр  $\chi$ ;
- в) гідравлічний радіус  $R_{\Gamma}$ .

Площа живого перерізу – площа поперечного перерізу, нормального до основного напрямку руху рідини. Для круглого перерізу (труби)

$$\omega = \frac{\pi \cdot d^2}{4}.$$

Змоченим периметром називають довжину контуру живого перерізу. Гідравлічним радіусом називають відношення площі живого перерізу до змоченого периметра:

$$R_{\Gamma} = \frac{\omega}{\chi}, \text{ або } R_{\Gamma} = \frac{\pi \cdot d^2}{4\pi \cdot d} = \frac{d}{4}.$$

Отже, для круглого перерізу гідравлічний радіус дорівнює  $1/4$  діаметра труби. Аналогічно можна обчислити гідравлічні елементи будь-якої форми живого перерізу потоку.

### 2.8 Рух нескінченно малої частинки рідини (теорема Коші – Гельмгольца)

Нескінченно мала частинка рідини під час руху змінює не лише своє положення, а й форму. Зміна форми пов'язана з тим, що швидкості в різних точках частинки різні за значенням і напрямком, тому що  $u = f(x, y, z)$ , і відповідно проєкції швидкостей на осі будуть:

$$u_x = f_1(x, y, z), u_y = f_2(x, y, z), u_z = f_3(x, y, z).$$

Виділимо в прямокутній системі координат нескінченно малий об'єм рідини у вигляді паралелепіпеда зі сторонами  $dx, dy, dz$  (рис. 2.7). У точках  $A, B, C, D$  швидкості можуть бути різними або однаковими.

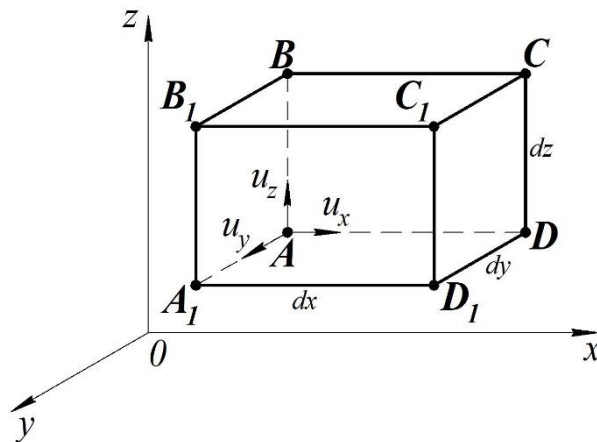


Рисунок 2.7 – Схема частинки рідини у формі прямокутного паралелепіпеда

Розглянемо деякі випадки.

1 Якщо швидкості в усіх точках однакові, тобто  $u_{x_A} = u_{x_B} = u_{x_C} = u_{x_D} = u_x$ , то грань  $ABCD$  переміститься в нове положення  $A'B'C'D'$  без деформації (рис. 2.8). Такий рух називають *лінійним переміщенням*.

2 Якщо  $u_{x_A} = u_{x_B}, u_{x_C} = u_{x_D}$ , але  $u_{x_A} \neq u_{x_D}$ , то такий вид руху називають *лінійною деформацією* (рис. 2.9). За одиницю часу ліва грань паралелепіпеда переміститься на величину  $u_x$ , а права – на величину

$(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx)$ . Величина  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$  являє собою лінійну деформацію частинки. Паралелепіпед може подовжитися або вкоротитися.

3 Якщо  $u_{x_B} > u_{x_A}$ , то шлях, який пройшла точка  $B$  уздовж осі  $x$ , буде відрізнятися від шляху, який пройшла точка  $A$ , на величину  $\frac{\partial u_x}{\partial z} dz$ , тобто грань  $AB$  повернеться на кут  $\beta_1$  (рис. 2.10). Кут  $\beta_1$  через його малу величину можна прирівняти до тангенса:

$$\beta_1 \approx \text{tg} \beta_1 = \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

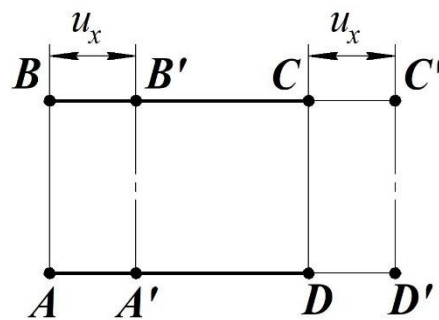


Рисунок 2.8 – Схема лінійного переміщення грані  $ABCD$  без деформації

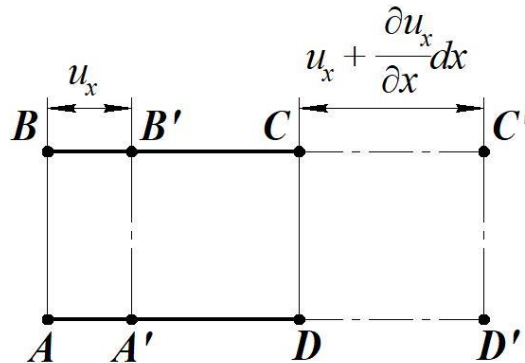


Рисунок 2.9 – Схема лінійної деформації

За аналогією за різних вертикальних швидкостей  $u_x$  у точках  $A$  і  $D$  ці точки перебуватимуть на різних рівнях. Кут повороту

$$\beta_2 = \frac{\partial u_z}{\partial x} \approx \text{tg} \beta_2.$$



Повна кутова деформація грані паралелепіпеда у площині  $xz$  (відносно осі  $y$ ) внаслідок повороту граней  $AB$  і  $AD$

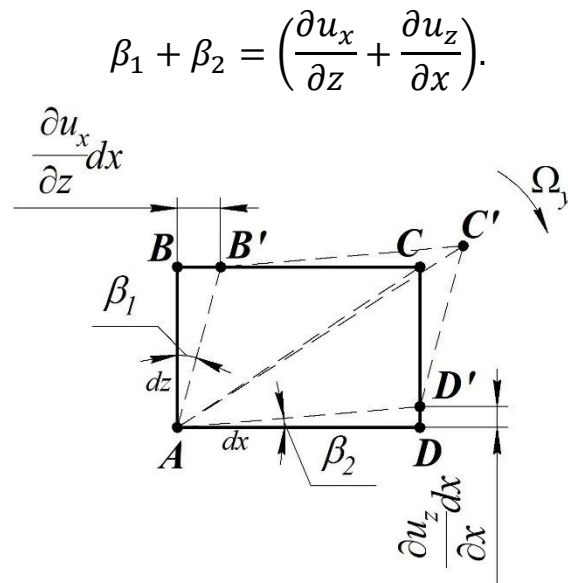


Рисунок 2.10 – Схема куткової деформації

Умовно можна вважати, що на одну грань припадає половина куткової деформації, тобто

$$\theta_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (2.19)$$

Індекс « $y$ » означає кутову деформацію відносно осі  $y$ . За аналогією відносно осі  $z$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (2.20)$$

4 Унаслідок повороту граней  $AB$  і  $AD$  може змінити своє положення й діагональ  $AC$  (рис. 2.10), тобто частинка за одиницю часу може повернутися на кут, що дорівнює кутовій швидкості обертання  $\omega_y$ . Колову швидкість точки  $B$ , що обертається навколо осі  $y$  з кутовою швидкістю  $\omega_y$ , визначають як

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} dz = \omega_y dz. \quad (2.21)$$

З іншого боку, для точки  $D$  колова швидкість

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} dx = -\omega_y dx. \quad (2.22)$$

Знак « $-$ » показує, що точка  $D$  обертається проти годинникової стрілки. Віднімаючи від рівняння (2.21) рівняння (2.22), одержимо

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\omega_y$$

або

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (2.23)$$

За аналогією для осей  $x$  і  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Ці вирази є проєкціями кутових швидкостей обертання на відповідні координатні осі.

Отже, рух нескінченно малої частинки рідини складається з лінійного переміщення, лінійної й кутової деформації та *обертального руху* навколо миттєвих осей обертання, паралельних осям координат, що проходять через точку  $A$ . (Аналогічні вирази можна одержати й для інших осей.) Загальна кутова швидкість обертання

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \quad (2.25)$$

У гідрогазодинаміці поряд із вектором  $\vec{\omega}$  обертальний рух частинок рідини характеризують вектором  $\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \text{rot}\vec{u}$ , який називають вихором, або ротором вектора  $\vec{u}$ .

Необхідно зазначити, що теорема Коші – Гельмгольца характеризує лише один із можливих способів розкладання складного руху частинки рідини на найпростіші складові. Проте цей спосіб розкладання є фізично найбільш обґрунтованим, оскільки відкриває основні характерні особливості руху рідинного середовища.

В окремих випадках деякі зі складових руху можуть бути відсутніми. Особливу зацікавленість становить рух без обертання частинок рідини або безвихровий рух ( $\vec{\omega} = 0$ ), що має низку чудових властивостей. Перед тим як переходити до його вивчення, з'ясуємо закономірності більш загального вихрового руху, коли  $\vec{\omega} \neq 0$ .

## 2.9 Вихрові лінії й трубки. Теорема Гельмгольца. Утворення вихорів

Розглянемо випадок, коли в кожній точці простору, зайнятого рухомою рідиною, вектор  $\vec{\omega}$  відмінний від нуля, тобто всі частинки обертаються. Тоді ми маємо поле вектора  $\vec{\omega}$ , для якого можна побудувати векторні лінії. Назвемо вихровою лінією криву, в кожній точці якої вектор  $\vec{\omega}$  спрямований по дотичній. Тоді елементарні відрізки  $d\vec{s}$  такої лінії (рис. 2.11) будуть миттєвими осями обертання тих частинок рідини, які на них розміщені. Очевидно, цей рух можливий лише завдяки деформації обертальних частинок рідини, оскільки вихрова лінія, власне кажучи, криволінійна, і загалом не може розглядатись як вісь обертання кінцевого об'єму рідини.

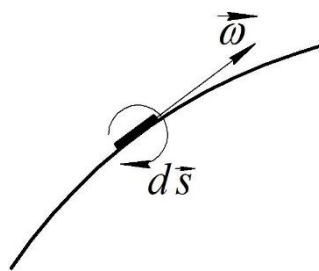


Рисунок 2.11 – Вихрова лінія

Диференціальне рівняння вихрових ліній легко одержати з умови колінеарності вектора кутової швидкості  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  й елементарного спрямованого відрізка  $d\vec{s}(dx, dy, dz)$ :

$$d\vec{s} \cdot d\vec{\omega} = 0. \quad (2.26)$$

Закриваючи векторний добуток, маємо

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 0,$$

$$\vec{i} \cdot (dy \cdot \omega_z - dz \cdot \omega_y) - \vec{j} \cdot (dx \cdot \omega_z - dz \cdot \omega_x) + \vec{k} \cdot (dx \cdot \omega_y - dy \cdot \omega_x) = 0,$$

$$dy \cdot \omega_z - dz \cdot \omega_y = 0,$$

$$dx \cdot \omega_z - dz \cdot \omega_x = 0,$$

$$dx \cdot \omega_y - dy \cdot \omega_x = 0.$$

Умову пропорційності однойменних проєкцій цих векторів запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (2.27)$$

Знаючи функції  $\omega_x(x, y, z)$ ,  $\omega_y(x, y, z)$ ,  $\omega_z(x, y, z)$  із системи двох рівнянь (2.27), можна знайти вигляд вихрових ліній.

Проведемо через точки малого контуру  $dl$  (рис. 2.12) вихрові лінії. Отриману трубчасту поверхню будемо називати елементарною вихровою трубкою, а сукупність обмежених нею частинок рідини – вихровим шнуром.

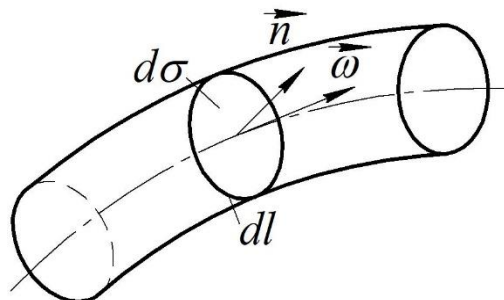


Рисунок 2.12 – Вихрова трубка

Якщо поперечний переріз вихрового шнура  $d\sigma$  достатньо малий, то можна припустити, що в його межах вектор  $\vec{\omega}$  має постійне значення.

Скалярний добуток  $dj$  векторів  $\vec{\omega}$  і  $d\vec{\sigma}$  називають *інтенсивністю*, або *напруженістю вихрової трубки*, він є мірою вихрового руху:

$$dj = \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma} = \omega_n \cdot d\sigma, \quad (2.28)$$

де  $\omega_n$  – проєкція вектора  $\vec{\omega}$  на нормаль до площини  $d\sigma$ .

Візьмемо тепер довільну поверхню  $\sigma$  і, розбивши її на елементарні площадки  $d\sigma$ , побудуємо на кожній із них вихровий шнур. Сумарна інтенсивність цих шнурів є потоком вектора  $\vec{\omega}$  через поверхню  $\sigma$ :

$$j = \int_{\sigma} \vec{\omega} d\sigma = \int_{\sigma} \omega_n d\sigma. \quad (2.29)$$

Величина

$$2j = 2 \int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_{\sigma} \Omega_n d\sigma$$

є потоком вектора вихору  $\vec{\Omega}$  через поверхню  $\sigma$  або просто потоком вихорів.

У кінематиці відома так звана друга теорема Гельмгольца: *потік вектора вихору швидкості через довільно проведений поперечний переріз вихрової трубки на даний момент часу має постійне значення вздовж усієї трубки*.

З цієї теореми випливають дуже важливі наслідки:

1 Переріз вихрової трубки ніде не може дорівнювати нулю, оскільки в цьому разі швидкість обертання частинок рідини повинна стати нескінченною, що фізично неможливо.

2 Вихрові трубки не можуть закінчуватися всередині рідини. Дійсно, це означало б, що в разі переходу через такий переріз усередину рідини вектор  $\vec{\omega}$  стрибкоподібно повинен змінюватися від кінцевого значення до нуля, що суперечить положенню про безперервність поля швидкостей. Вони або замикаються самі на собі, утворюючи вихрові кільця (рис. 2.13), або спираються на стінку чи вільну поверхню.

Вихрові трубки у вигляді кілець можна спостерігати, наприклад, під час початкової стадії витікання рідини через отвір у середовище тієї самої густини.

Структура вихрових рухів реальних рідин досить різноманітна. У деяких випадках виникають великі вихори, які можна спостерігати візуально, якщо в

рідину ввести фарбу або спеціальну речовину. Великі вихори можна бачити і в природі – це водяні й повітряні смерчі.

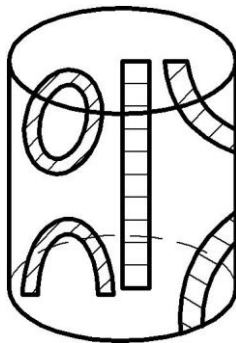


Рисунок 2.13 – Типи вихрових трубок

Але вихровий рух не завжди супроводжується утворенням візуально спостережуваних вихрових шнурів. Наприклад, під час прямолінійного руху рідини між нерухомими плоскими паралельними пластинами (рис. 2.14).

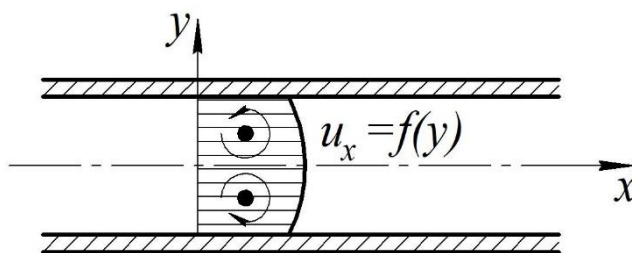


Рисунок 2.14 – Вихровий рух рідини між паралельними пластинами

Проекції швидкості в системі координат, показані на рисунку 2.14, мають такі значення:

$$u_x = f(y), u_y = u_z = 0,$$

де  $f(y)$  – безперервна функція.

Проекції вектора кутової швидкості  $\vec{\omega}$  згідно з (2.24) в цьому разі дорівнюють:

$$\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Звідси випливає, що ця течія – вихрова, в цьому разі вектор  $\vec{\omega}$  в усіх точках паралельний осі  $z$  (нормальній площині креслення), і тому вихрові лінії мають вигляд прямих, нормальних до лінії течії.

Проте вихрова структура течії в цьому разі візуально не спостерігається. Рух такого типу може бути безвихровим, тобто проходити без обертання частинок, лише у разі  $f(y) = \text{const}$ . Останнє означає рівномірність розподілу швидкостей по товщині потоку, що в реальних умовах неможливо унаслідок прилипання в'язких рідин до твердих стінок.

Течія реальних рідин між твердими стінками зазвичай є вихровою і в інших випадках. Поряд з упорядкованими елементарними вихорами, безперервно розміщеними в області течії, в таких потоках можуть утворюватися зони, заповнені великими візуально спостережуваними вихорами.

## 2.10 Циркуляція швидкості й теорема Стокса

Поняття інтенсивності вихорів є прямою характеристикою вихрового руху, але воно має недоліки: величина інтенсивності не може бути безпосередньо виміряна. Крім того, в деяких розрахунках зручніше оперувати такою мірою вихрового руху, яка б виражалася не через куту, а через поступальну швидкість. Цій меті відповідає поняття циркуляції швидкості.

Циркуляцією  $\Gamma$  вектора швидкості  $\vec{u}$  по деякому контуру  $L$  називають контурний інтеграл від скалярного добутку  $\vec{u}$  на елементарний вектор  $d\vec{s}$  дуги  $L$  (рис. 2.15):

$$\Gamma = \oint_L \vec{u} d\vec{s}. \quad (2.30)$$

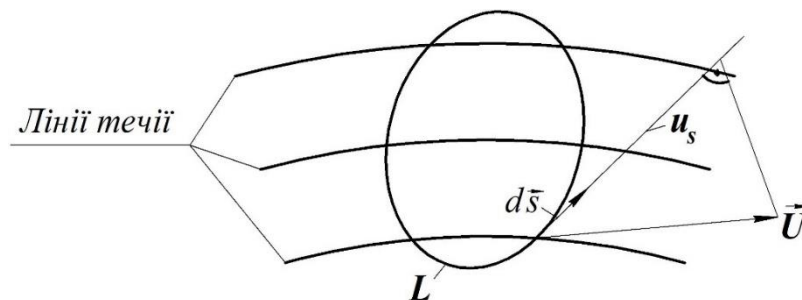


Рисунок 2.15 – Схема для визначення циркуляції швидкості по замкнутому контуру

Згадуючи різні вирази для скалярного добутку двох векторів, циркуляцію можна подати такими формами:

$$\Gamma = \oint_L u ds \cdot \cos(s, u) = \oint_L u_s ds = \oint_L u_x dx + u_y dy + u_z dz, \quad (2.31)$$

де  $dx, dy, dz$  – проєкції вектора  $d\vec{s}$ .

Визначимо властивості циркуляції, що впливають із її визначення як контурного інтеграла.

Циркуляція швидкості по контуру дорівнює сумі циркуляцій по окремих ділянках цього контуру.

Зміна напрямку обходу контуру на протилежний приводить до зміни знака циркуляції.

Домовимося вважати додатною циркуляцію, яку одержують, якщо контур обходити так, щоб обмежена ним область залишалася зліва.

Зв'язок між циркуляцією  $\Gamma$  й інтенсивністю вихорів устанавлюється теоремою Стокса, яку ми сформулюємо без доведення для однозв'язної й багатозв'язної областей. Нагадаємо, що однозв'язна – це така область, яка подумки може бути стягнена в одну точку (рис. 2.16).

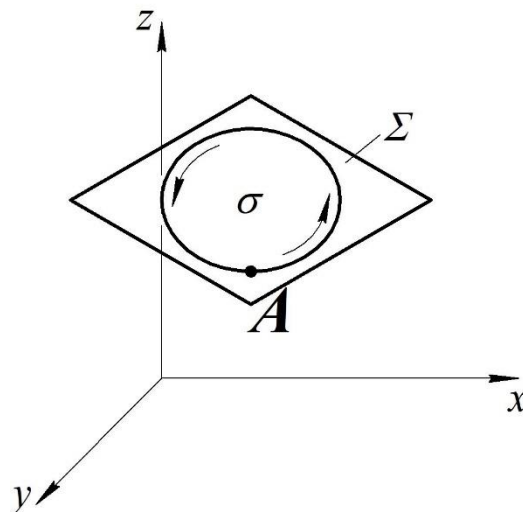


Рисунок 2.16 – Схема однозв'язної області



Циркуляція швидкості по замкненому контуру, що обмежує однозв'язну область, дорівнює потоку вихорів через цю область.

Схема багатозв'язної області показана на рисунку 2.17.

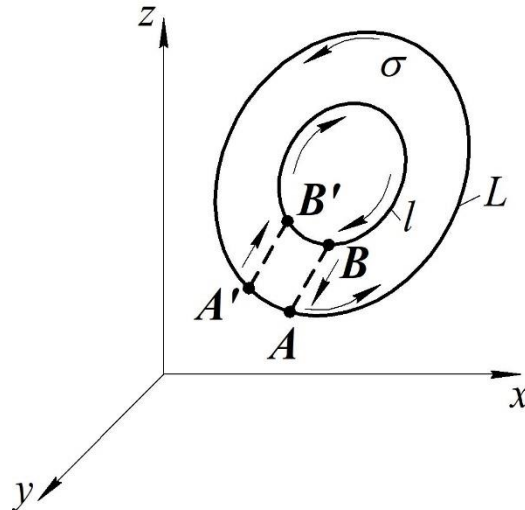


Рисунок 2.17 – Схема багатозв'язної області

Потік вихорів через багатозв'язну область дорівнює різниці між циркуляцією по зовнішньому контуру  $L$  і сумою циркуляцій по всіх внутрішніх контурах  $l_i$ .

Таким чином, циркуляція швидкості  $\Gamma$  по замкненому контуру може бути, поряд з інтенсивністю вихорів, мірою вихрового руху. В теоретичних і практичних розрахунках поняття циркуляції виявилось досить зручним та ефективним.

### 2.11 Безвихровий або потенціальний рух

Розглянемо окремий випадок, коли усталений рух рідини проходить без обертання частинок, тобто допустимо, що в усьому об'ємі, зайнятому рідиною,  $\vec{\omega} = 0$ .

Ця умова може бути переписана у такому вигляді:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0,$$

що рівносильно системі:

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (2.32)$$

Із теорії криволінійних інтегралів відомо, що співвідношення (2.32) є необхідними й достатніми умовами для того, щоб тричлен вигляду  $u_x dx + u_y dy + u_z dz$  являв собою повний диференціал деякої функції трьох змінних, яку позначимо  $\varphi(x, y, z)$ . Таким чином,

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = d\varphi. \quad (2.33)$$

Ураховуючи, що повний диференціал виражають формулою

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz, \quad (2.34)$$

можна записати

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

Оскільки ця рівність виконується за будь-яких  $dx, dy, dz$ , коефіцієнти з диференціалами незалежних змінних у лівій і правій частинах рівні, тобто:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.35)$$

Отже, під час безвихрового руху компоненти вектора швидкості  $\vec{u}$  є частинними похідними деякої функції  $\varphi$ , яку називають *потенціалом швидкості*.

Вектор швидкості в цьому разі може бути поданий у вигляді

$$\vec{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (2.36)$$

або

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi. \quad (2.37)$$

Проведені міркування та співвідношення справедливі також для нестисливого руху. У цьому разі їх можна застосувати до будь-якого фіксованого моменту часу, який буде відігравати роль параметра, і, отже,

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t).$$

Використовуючи поняття похідної за напрямком, нескладно продемонструвати, що для будь-якого напрямку

$$u_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

Отже, проекція вектора швидкості на будь-який напрямок дорівнює похідній потенціалу швидкості на цьому напрямку:

$$u_s = u \cos(s, u) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \quad (2.38)$$

Розглянемо два окремих напрямки одиничного вектора  $\vec{s}_0$ :

1  $\vec{s}_0$  паралельний  $\vec{u}$ . Для цього випадку  $\cos(s, u) = 1$ , і похідна  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$  за цим напрямком набуває найбільшого значення, що дорівнює модулю вектора швидкості  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = u$ . Іншими словами, вектор швидкості  $\vec{u}$  вказує напрямок найшвидшої зміни функції  $\varphi$ . Оскільки вектори дотичні до лінії течії, то вздовж них функція  $\varphi$  змінюється швидше, ніж за будь-яким іншим напрямком.

2  $\vec{s}_0$  перпендикулярний до  $\vec{u}$ . У цьому разі  $\cos(s, u) = 0$  і  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ . Отже, вздовж цього напрямку функція  $\varphi$  залишається постійною. Але в просторі нескінченно багато напрямків, ортогональних до вектора швидкості  $\vec{u}$ . У кожній точці лінії течії вони утворюють деяку поверхню, яку називають екіпотенціальною.

Її рівняння має вигляд

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const.} \quad (2.39)$$

Таким чином, у потенціальному, або безвихровому потоці рідини можна побудувати сім'ю екіпотенціальних поверхонь і сукупність ліній течії, кожна з яких перетинає будь-яку екіпотенціальну поверхню ортогонально (рис. 2.18).

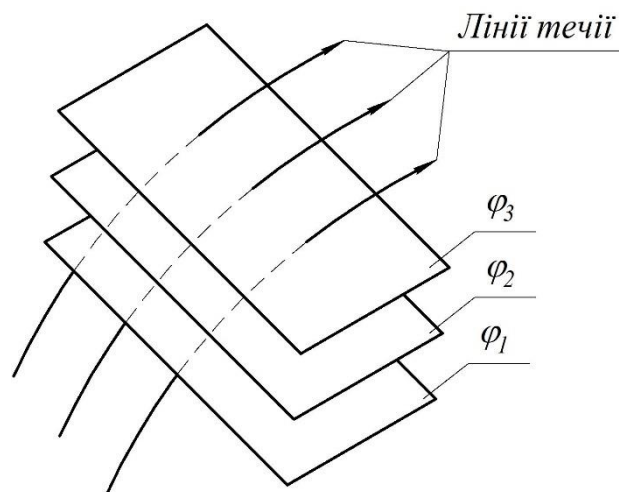


Рисунок 2.18 – Лінії течії, що перетинають екіпотенціальні поверхні по нормалях

Розглянемо довільну (необов'язково екіпотенціальну) поверхню  $\Sigma$  і замкнений контур  $L$ , розміщений у ній (див. рис. 2.16).

Якщо потік в усіх точках є безвихровим, то за теоремою Стокса  $\Gamma_L = 0$ . Ураховуючи загальний вираз циркуляції (2.31), одержимо

$$\Gamma = \oint_L u_x dx + u_y dy + u_z dz = \oint_L \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \oint_L d\varphi = \varphi_{A'} - \varphi_A = 0,$$

де  $\varphi_{A'}$  і  $\varphi_A$  – відповідно значення потенціалу швидкості в точці  $A$  після обходу контуру та його вихідне значення в цій точці.

Ми бачимо, що  $\varphi_{A'} = \varphi_A$ , тобто після обходу контуру значення потенціалу швидкості не змінилося. Іншими словами, якщо потік усередині деякої замкненої області потенціальний, то його потенціал є однозначною функцією.

У разі якщо хоча б в одній точці всередині контуру потік є вихровим, згідно з теоремою Стокса циркуляція не буде дорівнювати нулю, і розмірковування, подібні вищенаведеним, дають

$$\varphi_{A'} = \varphi_A + \Gamma_L.$$

Винятком є випадок, коли вихори мають різні знаки й такі, що їх сумарна інтенсивність дорівнює нулю.

Таким чином, якщо всередині області потенціальність порушується, то потенціал є функцією багатозначною, що змінюється на величину циркуляції після кожного обходу контуру.

## **2.12 Плоскі потоки нестисливої рідини. Функція течії та гідродинамічна сітка**

Властивості течій, викладені в попередніх підрозділах, справедливі для будь-яких просторових (тривимірних) течій нестисливої або стисливої рідини. Ми розглянемо окремий, але практично дуже важливий випадок плоскої течії нестисливої рідини, тобто такий, у якому конфігурація ліній течії в усіх площинах, нормальних до деякої прямої, однакова.

Вибравши зазначену пряму за одну із осей координат (наприклад, за вісь  $z$ ), ми стверджуємо, що для всього поля течії відповідно проєкція швидкості дорівнює нулю ( $u_z = 0$ ).

Проте в природі плоскі течії не трапляються, але існує досить багато випадків, коли потік із достатньою для практичних цілей точністю може вважатися плоским.

Прикладами можуть бути:

- потік повітря, що обтікає довге циліндричне крило (рис. 2.19 а), якщо з розгляду виключити області поблизу кінців крила;
- потік води в широкому прямокутному каналі (рис. 2.19 б), якщо з розгляду виключити області, які контактують із боковими стінками.

Подібних прикладів багато.

Вивчення плоских течій істотно легше, по-перше, тому що рівняння, які їх описують, простіші, ніж у загальному випадку, а по-друге, тому що достатньо дослідити течію всього лише в одній площині, щоб скласти уявлення про потік загалом.

Нехай  $u_z = 0$ . Тоді рівняння нерозривності нестисливої рідини (див. п. 2.15) набуває вигляду

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \text{ або } \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (2.40)$$

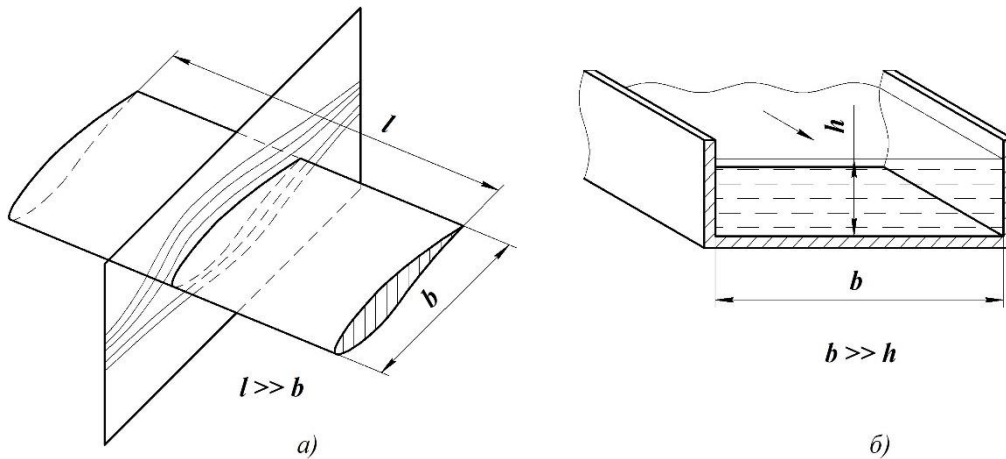


Рисунок 2.19 – Приклади плоских течій:

а) обтікання довгого циліндричного крила; б) течія в широкому каналі

а рівняння лінії течії – вигляду

$$\frac{\partial x}{u_x} = \frac{\partial y}{u_y} \text{ або } u_x dy - u_y dx = 0. \quad (2.41)$$

Співвідношення (2.40) є необхідною й достатньою умовою, щоб ліва частина (2.41) була повним диференціалом деякої функції двох змінних. Тоді

$$u_x dy - u_y dx = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy.$$

Порівнюючи коефіцієнти зад  $dx$  і  $dy$ , одержуємо

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.42)$$

Уздовж будь-якої лінії течії виконується (2.41), і, отже, вздовж неї  $\partial \psi = 0$  або  $\psi(x, y) = const$ . Таким чином, функція течії має властивість зберігати

вздовж будь-якої лінії течії стале значення, яке, проте, різне для різних ліній течії.

Щоб з'ясувати фізичний зміст функції течії, проведемо дві довільні лінії течії  $PQ$  і  $MN$  (рис. 2.20) та розрахуємо витрату  $q$  рідини між ними, беручи розмір потоку в напрямку нормалі до площини креслення таким, що дорівнює одиниці. Використаємо загальний вираз витрати (2.15) та одержимо

$$q = \int_l u_n dl = \int_l \vec{u} \vec{n} dl,$$

де  $l$  – довільна крива, що з'єднує лінії течії,

$$\text{або } q = \int_l [u_x \cos(nx) + u_y \cos(ny)] dl.$$

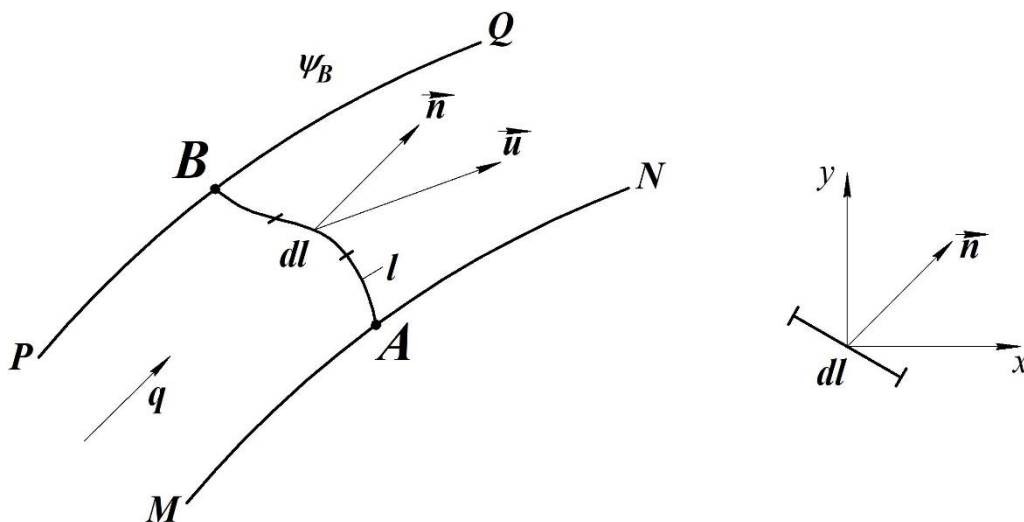


Рисунок 2.20 – Різниця значень функцій течії на двох лініях течії, що дорівнює витраті рідини між ними ( $\psi_B - \psi_A = q$ )

Як бачимо з рисунка 2.20,  $dl \cos(nx) = dy$ ,  $dl \cos(ny) = -dx$ .

Тоді

$$q = \int_l u_x dy - u_y dx = \int_l \frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int_l d\psi = \psi_B - \psi_A.$$

Тобто різниця значень функції течії на двох лініях течії дорівнює витраті рідини між ними. Якщо  $\psi_A = 0$ , то  $q = \psi_B$ , і тому можна говорити, що  $\psi$  є витратною функцією.

Підкреслимо, що існування функції течії не залежить від наявності або відсутності в рідині вихорів. Проте воно впливає з рівняння нерозривності для плоских течій, і тому функція течії наведеного типу існує лише для плоских течій.

Припустимо тепер, що потік не лише плоский, а й потенціальний. Тоді в ньому можна провести екіпотенціальні поверхні, які в цьому разі є циліндричними і в перетині з площиною течії дають плоскі екіпотенціальні лінії. Таким чином, плоский потенціальний потік нестисливої рідини характеризується двома ортогональними сім'ями кривих:  $\psi = const$  (лінії течії) і  $\varphi = const$  (екіпотенціальні). Ці сім'ї утворюють гідродинамічну сітку, що має такі властивості:

- сітка ортогональна;
- однойменні лінії сітки ні в яких місцях не перетинаються, крім точок із нульовою й нескінченною швидкостями (критичні або особливі точки);
- гідродинамічна сітка малих розмірів квадратична.

Нехай ми маємо малу клітинку  $abcd$  (рис. 2.21), утворену парою відрізків ліній течій ( $ab$  і  $dc$ ) та парою екіпотенціальних ( $ad$  й  $bc$ ).

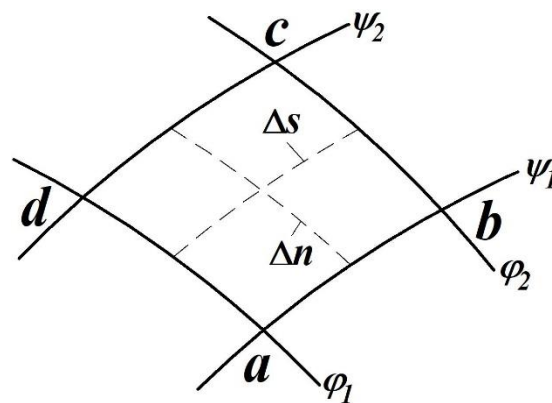


Рисунок 2.21 – Квадратичність гідродинамічної сітки

Нехай  $\Delta n$  – відрізок середнього екіпотенціалу, а  $\Delta S$  – відрізок передньої лінії течії. Витрату через клітинку можна виразити у вигляді

$$\Delta q = u \cdot \Delta n = \Delta \psi,$$



де  $\Delta\psi$  – приріст функції течії на відрізку  $\Delta n$  між лініями течії  $ab$  і  $dc$ .

Але

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

де  $\Delta\varphi$  – приріст потенціалу на відрізку  $\Delta S$  між еквіпотенціалами  $ab$  і  $dc$ .

Отже,

$$\Delta q = \Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \Delta n,$$

або

$$\Delta\psi \cdot \Delta s = \Delta\varphi \cdot \Delta n.$$

Звідси випливає, якщо сітка складається з малих криволінійних квадратів ( $\Delta s \approx \Delta n$ ),  $\Delta\varphi \approx \Delta\psi$  і навпаки. У цьому розумінні введений термін «квадратичність».

Перелічені властивості гідродинамічної сітки дозволяють використовувати її для визначення параметрів (насамперед швидкостей) плоских потенціальних потоків. На рисунку 2.22 показана гідродинамічна сітка, побудована для випадку витікання рідини під тиском із посудини з плоскими стінками.

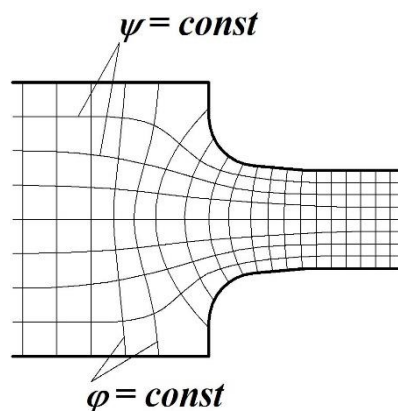


Рисунок 2.22 – Гідродинамічна сітка, побудована для випадку витікання рідини під тиском із посудини з плоскими стінками

### 2.13 Поняття про рівномірний і нерівномірний рух рідини

Як ми зазначали раніше, є два види руху рідини: стаціонарний та нестаціонарний. Стаціонарний рух може бути рівномірним або нерівномірним.

Рівномірний рух рідини характеризується паралельністю та прямолінійністю течії. Розміри та форма перерізів, а також середні швидкості потоків за його довжиною не змінюються. Прискорення під час рівномірного руху дорівнюють нулю.

Рівномірний рух рідини може виникати лише на прямолінійних ділянках штучних русел (наприклад, у трубопроводах, каналах) за постійних параметрів цих русел (площі поперечного перерізу, шорсткості тощо).

Нерівномірний рух рідини характеризується тим, що лінії течії не є паралельними прямими. Площі живих перерізів та середні швидкості змінюються впродовж довжини потоку. Якщо кривизна лінії течії мала, то такий нерівномірний рух буде називатися повільно змінним.

### 2.14 Рівняння нерозривності для елементарної струминки

Вважаємо, що рідина зі струминки не витікає і не втікає до неї з боків. Якби ці умови не виконувалися, то в будь-якій точці струминки швидкість була б спрямована під кутом до лінії течії, що не відповідає визначенню лінії течії. Насправді ж, якщо зі струминки деяка кількість рідини втікає в боки, то така сама кількість рідини повинна притікати до струминки з боків.

Розглянемо в струминці два перерізи: 1–1 і 2–2 зі швидкостями  $u_1$  та  $u_2$ . За час  $dt$  ці перерізи перемістяться відповідно на відстані  $dl_1$  і  $dl_2$  та займуть положення 1'–1' і 2'–2' (рис. 2.23).

Оскільки загальна маса рідини в струминці залишається незмінною, а також незмінною повинна бути маса між перерізами 1'–1' і 2–2, то звідси маємо, що маси між перерізами 1–1 і 1'–1' та перерізами 2–2 і 2'–2' повинні дорівнювати одна одній:

$$\rho_1 \cdot dl_1 \cdot d\omega_1 = \rho_2 \cdot dl_2 \cdot d\omega_2,$$

де  $d\omega_1$  і  $d\omega_2$  – відповідно площі перерізів струминки 1–1 і 2–2;  
 $dl = u dt$ .

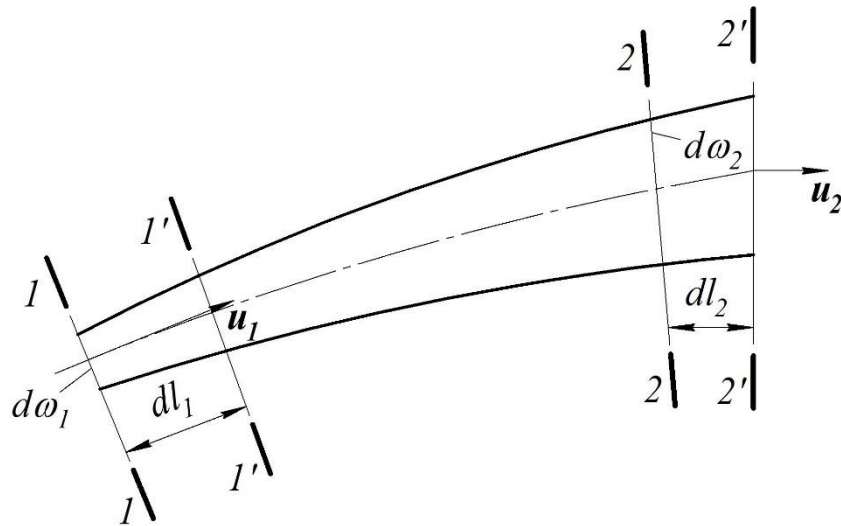


Рисунок 2.23 – Схема руху рідини в елементарній струминці

Тоді

$$\rho_1 \cdot u_1 \cdot d\omega_1 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot d\omega_2. \quad (2.43)$$

Для нестисливої рідини ( $\rho = const$ ):

$$u_1 \cdot d\omega_1 = u_2 \cdot d\omega_2. \quad (2.44)$$

Вирази (2.43) і (2.44) є рівняннями нерозривності для елементарної струминки.

Звідси маємо, що витрата вздовж елементарної струминки  $dQ = U d\omega$  залишається постійною під час усталеного руху:

$$dQ_1 = dQ_2 = const.$$

Розглядаючи струминну модель потоку, можна записати, враховуючи (2.14), що для двох перерізів потоку  $Q_1 = Q_2$ , тобто проінтегрувавши (2.44), одержимо

$$V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2. \quad (2.45)$$

Це рівняння називають рівнянням нерозривності для потоку реальної рідини. З нього випливає, що швидкості в живих перерізах потоку обернено пропорційні їх площам:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (2.46)$$

Ці співвідношення широко використовують для розв'язання широкого кола інженерних задач.

### 2.15 Рівняння нерозривності для елементарної струминки у диференціальній формі

Виділимо в потоці під час усталеного руху рідини нерухомий нескінченно малий контур у формі паралелепіпеда з ребрами  $dx, dy, dz$  (рис. 2.24). У центрі паралелепіпеда в точці А швидкість течії в напрямі  $x$  дорівнює  $u_x$ , а густина рідини  $\rho$ .

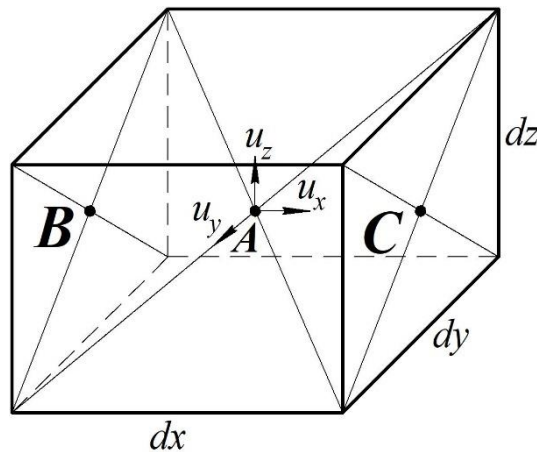


Рисунок 2.24 – Схема руху рідини в елементарному паралелепіпеді

Швидкість у центрі лівої грані (точка B)  $u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$ , а в центрі правої грані  $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$ . Аналогічно в центрі лівої грані густина  $\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}$ , а в центрі правої  $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}$ . Тоді різниця мас, що надходить через ліву грань і витікає через праву за одиницю часу,

$$\begin{aligned} \left( \rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot \left( u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dydz - \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dydz = \\ = - \frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} dx dy dz. \end{aligned}$$

Аналогічно для напрямків  $y$  і  $z$  різниця мас

$$-\frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial y} dx dy dz;$$

$$-\frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} dx dy dz.$$

Згідно із законом збереження мас сума цих приростів повинна дорівнювати нулю. Тоді для стисливої рідини

$$\frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.47)$$

Для нестисливої рідини

$$\frac{\partial(u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.48)$$

або

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (2.49)$$

Рівняння (2.47), (2.48) і (2.49) називають *рівняннями нерозривності у диференціальній формі для усталеного руху рідини*.

### Запитання і завдання для самоконтролю

- 1 Чим відрізняється метод вивчення руху рідини Ейлера від методу Лагранжа?
- 2 Які є види руху рідини?
- 3 Фізичний зміст локального й конвективного прискорень частинки рідини.
- 4 Дайте визначення лінії течії. Чим ця лінія відрізняється від траєкторії руху частинки рідини?
- 5 Що таке елементарна струминка рідини і які властивості вона має?
- 6 Сформулюйте визначення потоку рідини, виходячи зі струминної моделі.
- 7 Що таке витрата рідини та як визначити витрату потоку?
- 8 Що таке середня швидкість потоку та який фізичний зміст цього поняття?
- 9 Як розкладається рух нескінченно малої частинки рідини?
- 10 Зазначте зв'язок між кутовою й лінійними швидкостями.
- 11 Наведіть визначення вихрової лінії.
- 12 Що таке елементарна вихрова трубка рідини і які властивості вона має?
- 13 Дайте визначення циркуляції швидкості.
- 14 Назвіть зв'язок між циркуляцією швидкості по замкненому контуру, що обмежує область, і потоком вихорів через неї.
- 15 Що таке потенціал швидкості?
- 16 Наведіть приклади плоских течій.
- 17 Фізичний зміст функції течії.
- 18 Що таке гідродинамічна сітка плоского потоку?
- 19 Наведіть рівняння нерозривності для елементарної струминки.
- 20 Наведіть рівняння нерозривності в диференціальній формі.

## Розділ 3

### ДИНАМІКА РІДИНИ

Динаміка рідини – розділ гідрогазодинаміки, в якому вивчають закони руху рідини залежно від прикладених до неї сил, а також механічну взаємодію між рідиною й тілами під час їх відносного руху.

Нагадаємо, що під ідеальною рідиною розуміють таку абстрактну модель рідини, яка характеризується абсолютною рухомістю та абсолютною відсутністю опору розриву, тобто повною відсутністю в'язкості. Оскільки ідеальна рідина є нев'язкою рідиною, в ній не виникають сили внутрішнього тертя.

Вивчаючи закони динаміки нев'язкої рідини, ми одержуємо залежності, які досить точно описують фізичні явища і з деякими поправками можуть бути використані для характеристики руху реальної в'язкої рідини.

#### 3.1 Диференціальні рівняння руху нев'язкої рідини Ейлера

Для практичного застосування законів руху рідини необхідно знати, які сили діють на рідину і в якому співвідношенні вони перебувають.

Уперше теоретичне вирішення цього питання для нев'язкої рідини було запропоноване Ейлером. На рухому рідину, крім сил тяжіння та тиску (які діють на рідину в стані спокою), діють ще й сили інерції. Оскільки ми розглядаємо рух нев'язкої рідини, сил тертя немає.

Раніше ми одержали диференціальні рівняння Ейлера для рідини, що перебуває в стані спокою:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Згідно з принципом Д'Аламбера систему диференціальних рівнянь для руху рідини можна одержати з рівнянь гідростатики, якщо до відповідних рівнянь увести сили інерції.

Як відомо, силу інерції виражають залежністю

$$F = -ma, \quad (3.1)$$

де  $m$  – маса рідини;

$a$  – прискорення руху рідини.

Знак «мінус» означає, що сила інерції спрямована в бік, протилежний прискоренню. Одиничною силою інерції буде  $-a = \frac{F}{m}$ , тобто одинична сила інерції дорівнює прискоренню зі знаком «мінус».

Позначимо проєкції одиничних сил інерції на координатні осі  $a_x, a_y, a_z$ . Ураховуючи, що прискорення є похідною від швидкості за часом, можна записати:

$$a_x = \frac{du_x}{dt}, a_y = \frac{du_y}{dt}, a_z = \frac{du_z}{dt}.$$

Це й будуть проєкції одиничної сили інерції на координатні осі. Вводячи їх, згідно з принципом Д'Аламбера, до відповідних рівнянь гідростатики, одержуємо

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Це й є диференціальні рівняння руху нев'язкої рідини Ейлера.

Із цих рівнянь неможливо визначити, вихровий рух чи невихровий. Для цього потрібно розкрити праву частину рівнянь. Розглянемо це на прикладі для осі  $x$ :



$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Частинні похідні  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$  і  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$  можна виразити через компоненти вихору:

$$\Omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x},$$

$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Звідси

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \Omega_y,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \Omega_z.$$

Тоді рівняння (3.2) матиме вигляд

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \Omega_z \right) + u_z \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \Omega_y \right),$$

або

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \Omega_y u_z - \Omega_z u_y.$$

Розглянемо вираз у дужках

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x^2}{2} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right).$$

Тоді

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \Omega_y u_z - \Omega_z u_y.$$

За аналогією запишемо рівняння до осей  $y$  і  $z$ :

$$Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \Omega_z u_x - \Omega_x u_z,$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \Omega_x u_y - \Omega_y u_x.$$

Наведені рівняння і є *рівняннями Ейлера у формі Громеки*. У такому вигляді ці рівняння дають можливість встановити наявність чи відсутність вихорів, а також показують розбіжності в особливостях руху рідини під час безвихрового та вихрового руху.

Продовжимо подальші перетворення цих рівнянь:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_x, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_y, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_z, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $(\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_x$ ,  $(\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_y$ ,  $(\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_z$  – проєкції векторного добутку двох векторів на відповідні осі координат.

Допустимо, що масові сили, проєкції яких на осі координат позначені через  $X, Y, Z$ , мають потенціал, тобто існує така функція координат  $\Phi$ , яка задовольняє такими умовам:

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

або

$$-d\Phi = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Тоді, вважаючи  $\rho$  постійною величиною, рівняння (3.3) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_x &= 0, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_y &= 0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_z &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

або у векторній формі

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad} \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u}) = 0. \quad (3.5)$$

Граничні й початкові умови для цих рівнянь будуть такими самими, як і для рівняння Ейлера.

За рівності нулю складової  $(\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})$  система рівнянь (3.4) істотно спрощується. Остання складова перетворюється на нуль у трьох випадках:

- 1) швидкість потоку дорівнює нулю;
- 2) вектори швидкості та вихору швидкості паралельні, й тому векторний добуток дорівнює нулю (це випадок так званого гвинтового руху, що на практиці трапляється досить рідко);
- 3) вихор швидкості дорівнює нулю (безвихровий або так званий потенціальний потік).

### 3.2 Рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини

Рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини одержимо після інтегрування диференціальних рівнянь руху нев'язкої рідини Ейлера.

Помножимо кожне з рівнянь Ейлера (3.2) на відповідні проєкції елементарного переміщення, що дорівнюють  $dx = u_x dt$ ,  $dy = u_y dt$ ,  $dz = u_z dt$ , та додамо всі члени рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} dx, \\ dy, \\ dz. \end{aligned}$$

Одержимо

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) &= \\ = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ураховуючи, що

$$\begin{aligned} u_x du_x &= d\left(\frac{u_x^2}{2}\right), \\ u_y du_y &= d\left(\frac{u_y^2}{2}\right), \\ u_z du_z &= d\left(\frac{u_z^2}{2}\right), \\ u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 &= u^2, \end{aligned}$$

одержуємо

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\rho} \cdot dp + d\left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (3.7)$$

Інтегрування цього рівняння виконаємо для основного випадку усталеного руху ідеальної рідини, якщо на рідину діє лише одна масова сила – сила ваги  $X = 0, Y = 0, Z = -g$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння:

$$-gdz - \frac{dp}{\rho} - d\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0,$$

$$dz + \frac{dp}{\rho \cdot g} + d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = 0.$$

Для нестисливої рідини  $\rho = \text{const}$ :

$$d \left( z + \frac{P}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} \right) = 0. \quad (3.8)$$

Це означає, що приріст трьох складових під час переміщення частинки рідини в елементарній струминці ідеальної рідини дорівнює нулю.

Тобто

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \text{const.}$$

Для двох перерізів елементарної струминки ідеальної рідини це рівняння можна записати у вигляді

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{u_2^2}{2g} = \text{const}, \quad (3.9)$$

де індекси 1 і 2 є номерами перерізів.

### 3.3 Геометрична та фізична інтерпретація рівняння Бернуллі

#### 3.3.1 Геометрична інтерпретація

Розглянемо елементарну струминку ідеальної рідини. Виберемо два перерізи струминки 1–1 та 2–2 (рис. 3.1), а також довільну горизонтальну площину порівняння 0–0 і позначимо відстані від центрів перерізів відповідно  $z_1$  та  $z_2$ . Очевидно, що  $z_1$  та  $z_2$  є вертикальними координатами центрів сили тяжіння вибраних перерізів струминки.

Визначимо розмірності складових рівняння Бернуллі. Оскільки  $z_1$  та  $z_2$  є вертикальними координатами центрів сили тяжіння вибраних перерізів, то вони мають лінійну розмірність. Називають їх *геометричними напорами* в перерізах.

Величини  $\frac{P_1}{\rho g}$  і  $\frac{P_2}{\rho g}$  також мають лінійну розмірність.

Величину  $\frac{P}{\rho g}$  називають п'єзометричним напором, або п'єзометричною висотою. Цю величину можна виміряти за допомогою п'єзометрів, установлених у перерізах 1–1 та 2–2. Під дією гідродинамічного тиску рідина піднімається на висоту  $\frac{P_1}{\rho g}$  в п'єзометрі, встановленому в перерізі 1–1, і на висоту  $\frac{P_2}{\rho g}$  – в п'єзометрі, встановленому в перерізі 2–2.

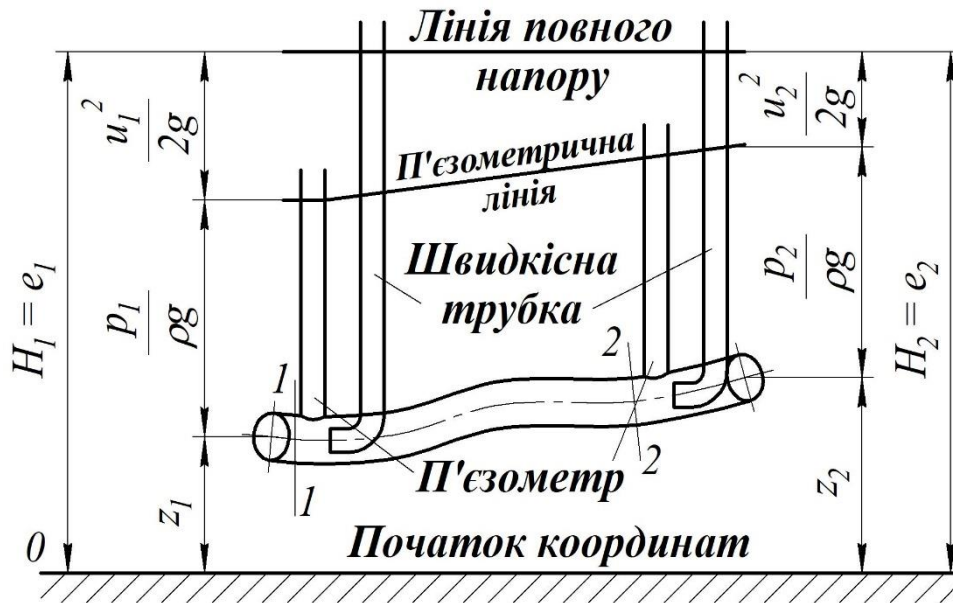


Рисунок 3.1 – Геометрична інтерпретація рівняння Бернуллі для струминки ідеальної рідини

Третій член рівняння Бернуллі  $\frac{U^2}{2g}$  також має лінійну розмірність. Величину  $\frac{U^2}{2g}$  називають швидкісним або динамічним напором. Виміряти цю величину можна за допомогою загнутої трубки (трубки Піто), розміщеної в перерізах, якщо отвір трубки спрямувати проти руху рідини. У такій трубці рідина піднімається на висоту  $\frac{P}{\rho g}$  під дією гідродинамічного тиску. Подальше підняття буде викликане швидкісним напором  $\frac{U^2}{2g}$ .

Лінійність величин, що входять до рівняння Бернуллі, дає можливість легко зобразити його графічно у вигляді суми відрізків трьох напорів: геометричного, п'єзометричного та швидкісного.

Оскільки, згідно з рівнянням Бернуллі, сума трьох напорів є постійною величиною вздовж цієї елементарної струминки ідеальної рідини, можна записати

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{u^2}{2g} = H = \text{const}, \quad (3.10)$$

де  $H$  – повний гідродинамічний напір.

Таким чином, із геометричного погляду рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини можна сформулювати так: сума трьох напорів – геометричного, п'єзометричного та швидкісного – для елементарної струминки ідеальної рідини є сталою величиною. Іншими словами, величина повного гідродинамічного напору не змінюється вздовж елементарної струминки ідеальної рідини.

Лінію, що з'єднує верхні точки відрізків п'єзометричних напорів, називають *п'єзометричною лінією*. Лінію, що з'єднує верхні точки відрізків швидкісних напорів, називають *лінією повного напору*. Ця лінія для елементарної струминки ідеальної рідини паралельна площині порівняння.

### 3.3.2 Фізична інтерпретація

Розглянемо фізичну інтерпретацію рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини. Зазначимо, що питомою енергією рідини  $e$  називають енергію одиниці ваги об'єму рідини, тобто

$$e = \frac{E}{G} = \frac{E}{\Delta m \cdot g}, \quad (3.11)$$

де  $E$  – енергія об'єму рідини масою  $\Delta m$ ;

$G$  – вага об'єму рідини.

Доведемо, що кожна зі складових рівняння Бернуллі – це одна з можливих форм питомої енергії.

Обчислимо, наприклад, потенціальну енергію маси рідини  $\Delta m$ , що розміщена на висоті  $z$ :

$$\Delta E_{\text{пот}} = \Delta m \cdot g \cdot z, \quad (3.12)$$

Ураховуючи, що вага об'єму  $G = \Delta m \cdot g$ , питома потенціальна енергія рідини буде дорівнювати

$$e_{\text{п}} = \frac{E_{\text{пот}}}{G} = \frac{\Delta m \cdot g \cdot z}{\Delta m \cdot g} = z. \quad (3.13)$$

Тобто питома потенціальна енергія рідини виражається висотою положення  $z$ , або геометричним напором.

Аналогічно питома потенціальна енергія тиску маси рідини  $\Delta m$ , піднята під дією напору на висоту  $\frac{P}{\rho \cdot g}$ ,

$$e_{\text{п. тис.}} = \frac{\Delta m \cdot g \left( \frac{P}{\rho \cdot g} \right)}{\Delta m \cdot g} = \frac{P}{\rho \cdot g}. \quad (3.14)$$

Тобто величина  $\frac{P}{\rho \cdot g}$  – це питома потенціальна енергія тиску.

Кінетична енергія маси рідини  $\Delta m$  дорівнює

$$E_{\text{к}} = \frac{\Delta m \cdot u^2}{2}. \quad (3.15)$$

Питома кінетична енергія рідини

$$e_{\text{к}} = \frac{E_{\text{к}}}{G} = \frac{\Delta m \cdot u^2}{2 \cdot \Delta m \cdot g} = \frac{u^2}{2g}. \quad (3.16)$$

Тобто величина  $\frac{u^2}{2g}$  є питомою кінетичною енергією рідини. Суму трьох питомих енергій: питомої потенціальної енергії положення, питомої потенціальної енергії тиску та питомої кінетичної енергії, називатимемо повною питомою енергією  $e$ :

$$e = e_{\text{п}} + e_{\text{п. тис.}} + e_{\text{к}} = z + \frac{P}{\rho \cdot g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const.} \quad (3.17)$$

Отже, з фізичної позиції рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини можна інтерпретувати так: повна питома енергія для цієї



елементарної струминки ідеальної рідини є сталою величиною й не змінюється по довжині струминки. Очевидно, що під час руху рідини один вид енергії переходить в інший, але повна питома енергія для струминки ідеальної рідини завжди буде сталою. Тобто ми маємо окремий випадок закону збереження енергії для струминки ідеальної рідини.

### 3.4 Рівняння Бернуллі для елементарної струминки реальної (в'язкої) рідини

Реальні рідини на відміну від ідеальних є в'язкими рідинами. Під час руху реальної рідини виникає тертя між її шарами, зумовлене її в'язкістю, і тертя між рідиною та стінками, що її обмежують. Тобто виникає опір руху (гідрравлічний опір), очевидно, що частина енергії рідини витрачається на подолання цього опору.

Під час практичних розрахунків необхідно враховувати це явище, тобто необхідно внести корективи в залежності, одержані для ідеальної рідини.

Розглянемо елементарну струминку реальної рідини (рис. 3.2). Виберемо два перерізи: 1–1 та 2–2. Повна питома енергія в перерізі 1–1 буде

$$e_1 = H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{u_1^2}{2g} \quad (3.18)$$



Рисунок 3.2 – Геометрична інтерпретація рівняння Бернуллі для струминки реальної рідини

Рідина переміщується від перерізу 1–1 до перерізу 2–2. Оскільки рідина реальна, то під час її руху виникають сили тертя, на подолання яких витрачається частина питомої енергії. Отже, в перерізі 2–2 питома енергія (напір) буде меншою, ніж у перерізі 1–1:

$$e_1 = H_1 > H_2 = e_2.$$

Позначимо втрату питомої енергії між перерізами  $h_W$ , тоді

$$H_1 = H_2 + h_W \quad \text{або} \quad e_1 = e_2 + h_W. \quad (3.19)$$

Але

$$e_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{u_1^2}{2g}; \quad e_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

Отже, підставляючи ці значення у вираз (3.19), одержуємо

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_W. \quad (3.20)$$

Рівняння (3.19) є рівнянням Бернуллі для елементарної струминки реальної рідини.

Величина втрати питомої енергії (напору)  $h_W$  також має лінійну розмірність, оскільки є різницею напорів у двох обраних перерізах.

Рівняння (3.20) можна подати графічно (рис. 3.2) як суму відрізків геометричного, п'єзометричного та швидкісного напорів. Але, як бачимо з рівняння (3.17) та рисунка 3.2, ця сума не залишається постійною (як для ідеальної рідини), а зменшується вздовж елементарної струминки в напрямку руху рідини. Таким чином, із геометричного погляду рівняння (3.20) можна інтерпретувати так: для елементарної струминки реальної рідини величина повного напору зменшується в напрямку руху рідини.

З фізичного погляду величина  $h_W$  є втратою питомої енергії. Ця частина повної енергії перетворюється на теплову й розсіюється. Тобто рівняння Бернуллі для елементарної струминки реальної рідини (як і для ідеальної) є окремим випадком закону збереження енергії.

### 3.5 Диференціальні рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є – Стокса)

Рівняння Нав'є – Стокса можна одержати додаванням до диференціальних рівнянь руху невіязкої рідини складових сил в'язкості, віднесення до одиниці маси  $X_B$ ,  $Y_B$ ,  $Z_B$ . Ці складові за спрощеним методом Жуковського можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} X_B &= \nu \cdot \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \nu \cdot \nabla^2 \cdot u_x, \\ Y_B &= \nu \cdot \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = \nu \cdot \nabla^2 \cdot u_y, \\ Z_B &= \nu \cdot \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = \nu \cdot \nabla^2 \cdot u_z, \end{aligned} \quad (3.21)$$

де  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

З урахуванням цього диференціальні рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є – Стокса) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - \nu \cdot \nabla^2 \cdot u_x, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} - \nu \cdot \nabla^2 \cdot u_y, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - \nu \cdot \nabla^2 \cdot u_z. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Загального розв'язку рівнянь Нав'є – Стокса поки що немає. Проте існують деякі часткові розв'язки для окремих випадків, для яких можуть бути задані граничні й початкові умови. Початковими умовами задають розподіл швидкостей в області руху в заданий момент часу. Граничними умовами можуть бути задані тиск і швидкість на границях потоку. Наприклад, біля стінки швидкість часто дорівнює нулю, а тиск на вільній поверхні потоку – атмосферний.

Диференціальні рівняння руху в'язкої рідини у формі Громеко за аналогією з рівнянням (3.4) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \nu \cdot \nabla^2 \cdot u_x + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_x &= 0, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \nu \cdot \nabla^2 \cdot u_y + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_y &= 0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \nu \cdot \nabla^2 \cdot u_z + (\text{rot} \vec{u} \cdot \vec{u})_z &= 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

### 3.6 Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини

Потік в'язкої рідини складається з нескінченної кількості елементарних струминок, кожна з яких характеризується своєю швидкістю течії. Без знання закону зміни швидкостей у живому перерізі потоку рідини просте інтегрування їх витрат неможливе, тому вводять поняття середньої розрахункової швидкості та використовують рівняння для елементарної струминки в'язкої рідини (3.23):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_w.$$

Для вагової витрати елементарної струминки  $\rho \cdot g \cdot dQ$  повна її енергія в перерізах 1–1 і 2–2 буде дорівнювати

$$\begin{aligned}\left( z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{u_1^2}{2g} \right) \cdot \rho \cdot g \cdot dQ &= \\ = \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) \cdot \rho \cdot g \cdot dQ + h_w \cdot \rho \cdot g \cdot dQ.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Для потоку рідини

$$\begin{aligned}\int_{\omega_1} \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{u_1^2}{2g} \right) \cdot \rho \cdot g \cdot dQ &= \\ = \int_{\omega_2} \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) \cdot \rho \cdot g \cdot dQ + \int_{\omega_2} h_w \cdot \rho \cdot g \cdot dQ.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Для кожної елементарної струминки потоку сума питомих потенціальних енергій положення ( $z$ ) і тиску  $\left(\frac{p}{\rho \cdot g}\right)$  є сталою величиною, її можна винести за знак інтеграла.

Тоді

$$\begin{aligned} & \rho \cdot g \cdot \left(z + \frac{p}{\rho \cdot g}\right) \int_{\omega} dQ = \\ & = \rho \cdot g \cdot \left(z + \frac{p}{\rho \cdot g}\right) \int_{\omega} u d\omega = \rho \cdot g \cdot \left(z + \frac{p}{\rho \cdot g}\right) \cdot Q. \end{aligned} \quad (3.26)$$

У разі використання поняття середньої швидкості потоку можна вести мову лише про середні витрати напору (енергії) між перерізами 1–1 та 2–2:

$$\int_{\omega_2} h_W \cdot \rho \cdot g \cdot dQ = h_W \cdot \rho \cdot g \int_{\omega_2} u d\omega_2 = h_W \cdot \rho \cdot g \cdot Q. \quad (3.27)$$

Розглянемо інтеграл, що враховує дійсну кінетичну енергію потоку рідини:

$$K_d = \int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \cdot \rho \cdot g \cdot dQ = \int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \cdot \rho \cdot g \cdot u d\omega. \quad (3.28)$$

У гідрогазодинаміці для розв'язування інтеграла (3.28) використовують припущення, що швидкості в різних точках живого перерізу сталі й дорівнюють середньому її значенню  $V$ . Тоді можна підрахувати величину умовної кінетичної енергії:

$$K_{ум} = \int_{\omega} \frac{V^2}{2g} \cdot \rho \cdot g \cdot V d\omega = \frac{V^2}{2g} \cdot \rho \cdot g \cdot Q. \quad (3.29)$$

Розділивши вираз для дійсного закону розподілу енергії (3.28) в живому перерізі потоку на її умовне значення (3.29):

$$\frac{K_d}{K_{ум}} = \frac{\int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \cdot \rho \cdot g \cdot u d\omega}{\int_{\omega} \frac{V^2}{2g} \cdot \rho \cdot g \cdot V d\omega} = \alpha, \quad (3.30)$$

Одержимо коефіцієнт Коріоліса  $\alpha$ , так званий коефіцієнт нерівномірності розподілу швидкостей у живому перерізі потоку рідини. Коефіцієнт  $\alpha$  визначають за допомогою вимірювання місцевих швидкостей у різних точках перерізу. Для усталених плавномірних течій рідини в каналах і трубах у разі турбулентного режиму середнє його значення змінюється в межах 1,03–1,1 і під час розрахунків зазвичай беруть  $\alpha = 1$ . Під час ламінарного руху рідин у круглих трубах – це стала величина  $\alpha = 2$ . З урахуванням коефіцієнта  $\alpha$  перепишемо відношення (3.30) у такому вигляді:

$$\int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \cdot \rho \cdot g \cdot u d\omega = \alpha \int_{\omega} \frac{V^2}{2g} \cdot \rho \cdot g \cdot V d\omega. \quad (3.31)$$

Підставимо рівності (3.26) та (3.31) в рівняння (3.25) і, поділивши всі його члени на  $\rho \cdot g \cdot Q$ , одержимо рівняння Бернуллі для одиниці ваги потоку в'язкої рідини:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2g} + h_w. \quad (3.32)$$

Отже, рівняння Бернуллі за своєю структурою аналогічне рівнянню Бернуллі для елементарної струминки в'язкої рідини, в якому місцеві швидкості у виділених перерізах замінені їх середніми значеннями, а їх відхилення враховуються коефіцієнтами  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ .

З геометричного погляду рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини являє собою суму трьох напорів: геометричного, п'єзометричного та швидкісного. Як бачимо з рівняння (3.26), величина повного напору під час руху рідини зменшується в напрямку руху на величину втрат напору на подолання сил тертя (рис. 3.3).

З фізичного погляду рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини є енергетичним рівнянням. Сума трьох питомих енергій: питомої потенціальної енергії положення, питомої потенціальної енергії тиску,

питомої кінетичної енергії – зменшується в напрямку руху на величину втрати енергії на подолання гідравлічного опору.



Рисунок 3.3 – Геометрична інтерпретація рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини

Зменшення величини повної питомої енергії на одиницю довжини потоку називають *гідравлічним нахилом*:

$$I = \frac{h_W}{l} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2g}\right)}{l}, \quad (3.33)$$

де  $l$  – відстань між перерізами 1–1 і 2–2.

Зменшення питомої потенціальної енергії, віднесене до одиниці довжини, називають *п'езометричним нахилом*:

$$i_p = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g}\right)}{l}. \quad (3.34)$$

Необхідно зауважити, що для рівномірного руху рідини  $V_1 = V_2 = const$ , тобто швидкісні напори  $\frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2g} = \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2g}$ . Тому п'езометрична лінія буде паралельною лінії повного напору, і п'езометричний нахил буде дорівнювати гідравлічному:  $i_p = I$ .

### 3.7 Приклади застосування рівняння Бернуллі

#### 3.7.1 Трубка Піто

Розглянемо визначення швидкості за допомогою гідродинамічної трубки, яку називають трубкою Піто (2) (рис. 3.4).

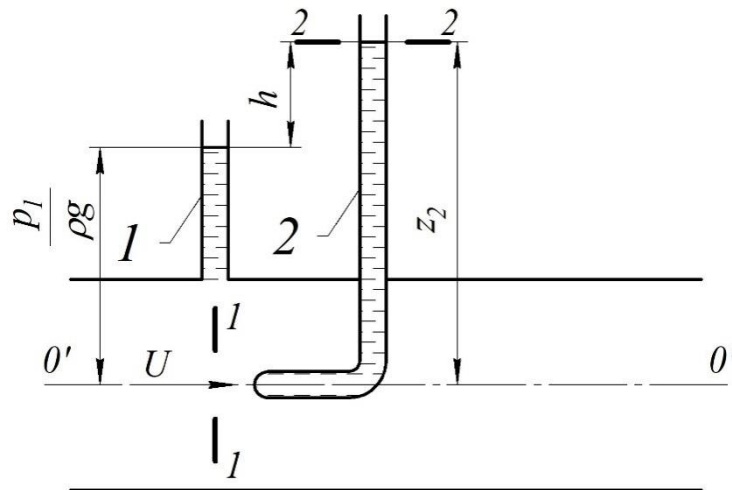


Рисунок 3.4 – Визначення швидкості за допомогою трубки Піто

Цю трубку розміщують у потоці рідини так, щоб загнутий кінець трубки був спрямований проти течії; працює ця трубка в комплекті з п'езометром 1.

Потік набігає на отвір трубки Піто, і тому рідина в ній піднімається вище, ніж у п'езометрі.

Проведемо площину порівняння  $0' - 0'$  через центр отвору в загнутому кінці трубки й запишемо рівняння Бернуллі (3.9) для перерізів 1-1 перед входом в трубку і 2-2 – на поверхні води в трубці.

Оскільки рідина в трубці Піто не рухається, то втрати напору в рівнянні Бернуллі враховувати не потрібно. Це рівняння запишемо для елементарної струминки, тому що трубка Піто вимірює місцеву швидкість у точці, в якій вона встановлена. У цьому разі  $z_1 = 0, u_1 = u, u_2 = 0, p_2 = 0$  ( $p_2$  – манометричний тиск на вільній поверхні в трубці).

Тоді

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{u^2}{2g} = z_2, \quad \frac{u^2}{2g} = z_2 - \frac{p_1}{\rho \cdot g} = h$$



i

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \quad (3.35)$$

Часто трубку Піто об'єднують в одному корпусі з п'езометром. Таку трубку називають трубкою Піто – Прандтля. Її виконують невеликим діаметром з обтічним кінцем (носком), але й у цьому разі вона створює збурення в потоці. Тому значення швидкості, визначене за формулою (3.35), потрібно помножити на тарувальний коефіцієнт  $\varphi = 1,0-1,04$ .

### 3.7.2 Водомір Вентурі (труба Вентурі)

Труба Вентурі – це пристрій для вимірювання витрати рідини. Він має вигляд дуже плавної збіжно-розбіжної вставки, до якої під'єднано п'езометри (рис. 3.5).  $D_1$  – діаметр головного трубопроводу;  $D_2$  – діаметр звуження.

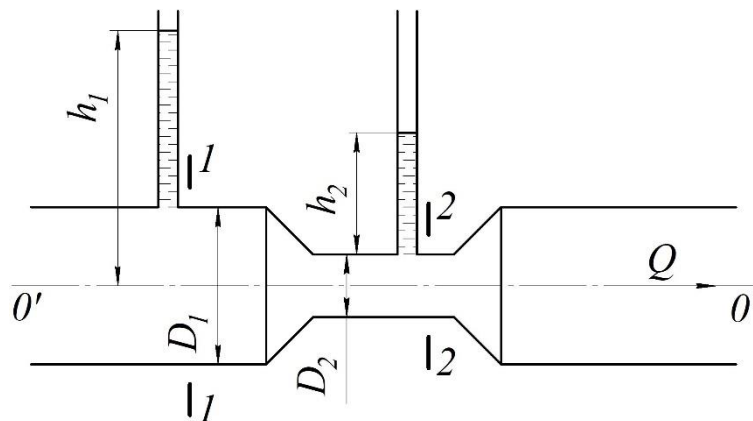


Рисунок 3.5 – Водомір Вентурі

У звуженій частині трубопроводу швидкість зростає, а тиск і п'езометрична висота зменшуються порівняно з тиском  $p$  та п'езометричною висотою до звуження  $h_1$ .

Для виведення формули витрати застосовуємо рівняння Бернуллі і рівняння витрати  $Q = V \cdot \omega$ .

Проведемо площину порівняння  $0' - 0'$  через вісь труби і виберемо два перерізи: 1-1 – до звуження, і 2-2 – у звуженій частині.

Якщо вісь горизонтальна, то  $z_1 = z_2 = 0$ . Рівняння Бернуллі матиме вигляд

$$h_1 + \frac{\alpha \cdot V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{\alpha \cdot V_2^2}{2g} + h_{\text{втр}}.$$

Ураховуючи, що  $\alpha = 1$ ,  $Q = V \cdot \omega$ , одержимо

$$\frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot \omega_2^2} - \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot \omega_1^2} = h_1 - h_2 - h_{\text{втр}}$$

i

$$\frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot \omega_2^2} \cdot \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) = h_1 - h_2 - h_{\text{втр}}.$$

Для круглої труби  $\omega = \pi \cdot D^2 / 4$ .

Тоді

$$\frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot \left(\frac{\pi \cdot D_2^2}{4}\right)^2} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{\pi \cdot D_2^2}{4}\right)^2}{\left(\frac{\pi \cdot D_1^2}{4}\right)^2}\right] = h_1 - h_2 - h_{\text{втр}}.$$

Звідси

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \pi^2 \cdot D_2^4 \cdot (h_1 - h_2 - h_{\text{втр}})}{16 \cdot \left(1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}\right)}} = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2 - h_{\text{втр}})}{1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}}}. \quad (3.36)$$

Оскільки відстань між перерізами 1–1 і 2–2 невелика, то в разі плавного звуження труби втрати напору  $h_{\text{втр}}$  будуть незначними. Тому ними можна знехтувати в першому наближенні.

Тоді витрата  $Q_1$  (без урахування втрат):

$$Q_1 = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2)}{1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}}} = M_1 \cdot \sqrt{h_1 - h_2},$$

де  $M_1$  – стала величина для кожного водоміра,

$$M_1 = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2g}{1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}}}$$

Фактична витрата  $Q$  буде трохи меншою, ніж  $Q_1$ , тому що є втрати напору:

$$Q = Q_1 \cdot \mu,$$

де  $\mu$  – тарувальний коефіцієнт, значення якого менше від одиниці. Зазвичай  $\mu = 0,95-0,97$ .

Позначаючи  $M = \mu \cdot M_1$ , маємо

$$Q = M \cdot \sqrt{h_1 - h_2}. \quad (3.37)$$

### 3.7.3 Водоструминний насос

З рівняння (3.36) можна визначити п'єзометричну висоту у звуженій частині труби. Нехтуючи втратами напору, одержуємо

$$h_2 = h_1 - \frac{16 \cdot Q^2}{2 \cdot g \cdot \pi^2 \cdot D^4} \cdot \left(1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}\right).$$

З цього рівняння випливає, що в разі зменшення діаметра звуженої частини труби  $D_2$  або в разі збільшення витрати  $Q$  п'єзометрична висота у звуженій частині  $h_2$  може бути від'ємною (тобто п'єзометрична лінія  $p-p$  може біти розміщена нижче від осі труби).

Це означає, що тут створюється вакуум із висотою:

$$h_{\text{вак}} = \frac{8 \cdot Q^2}{g \cdot \pi^2 \cdot D^4} \cdot \left(1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}\right) - h_1. \quad (3.38)$$

Цей принцип створення вакууму використовують у водоструминних насосах, які застосовують для того, щоб відкачувати воду з колодязів, а також для змішування різних рідин (рис. 3.6).

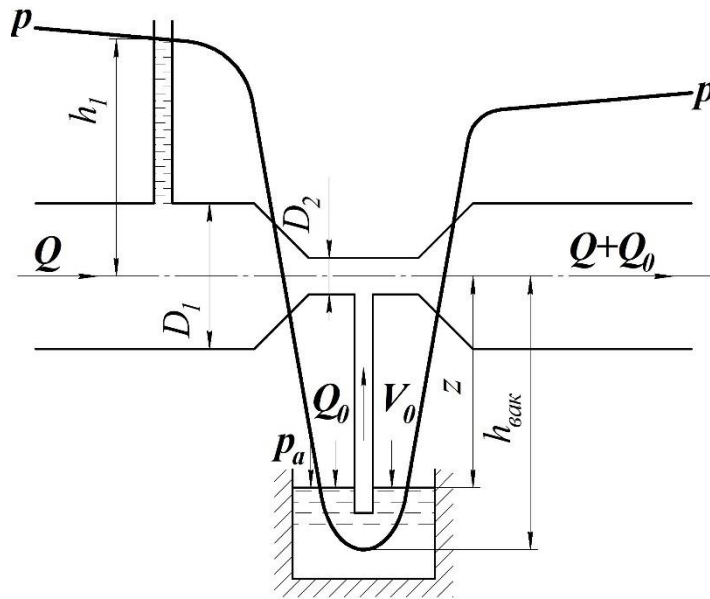


Рисунок 3.6 – Принципова схема водоструминного насоса

Оскільки тиск у звуженій частині в цьому разі менший, ніж у резервуарі А, то рідина з резервуара А буде всмоктуватися в трубу на висоту  $z$ , що трохи менша, ніж  $h_{\text{вак}}$ , тому що частина вакууму витрачається на створення швидкісного напору у вертикальній трубі  $\frac{V_0^2}{2g}$  й на подолання опорів у цій трубі.

#### 3.7.4 Обтікання споруд вітровим потоком

Швидкість вітрового потоку  $V_1 > V_2 = 0$  (тому що під дахом немає руху повітря). У зоні підвищеної швидкості  $V_1$  створюється знижений тиск повітря, а в зоні, де швидкість  $V_2 = 0$ , створюється підвищений тиск ( $p_2 > p_1$ ). Тому за великих швидкостей вітру дах може відірватися (рис. 3.7).

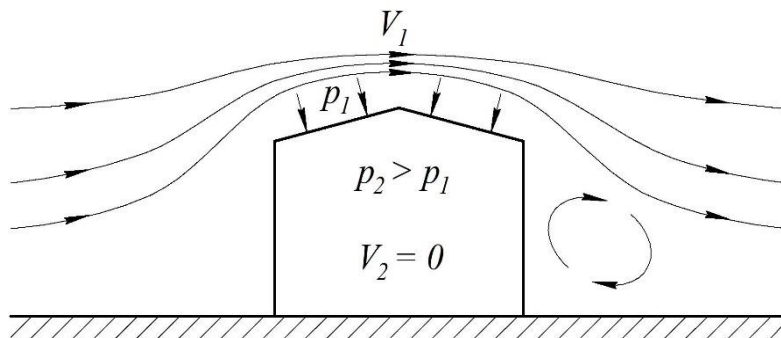


Рисунок 3.7 – Схема обтікання споруд вітровим потоком

Важливо також розуміти розподіл тиску по контуру будівлі або споруди (рис. 3.8). Величину тиску в окремих точках контуру зручно характеризувати безрозмірним аеродинамічним коефіцієнтом

$$k = \frac{2 \cdot p}{\rho \cdot V_1^2}. \quad (3.39)$$

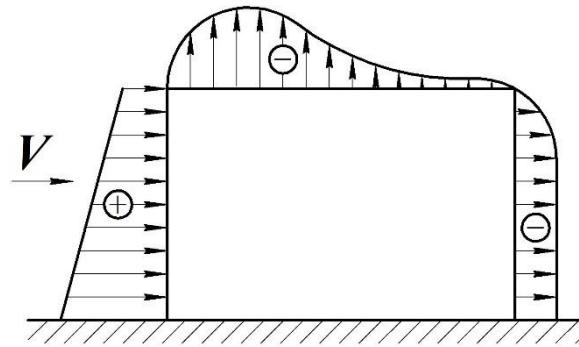


Рисунок 3.8 – Розподіл тиску по контуру будівлі

На навітряному боці споруди тиск більший від атмосферного ( $k = +(0,7-0,8)$ ), на тильному боці і над дахом утворюється розрідження, тобто  $k = -(0,1-0,3)$ .

### 3.8 Рівняння Бернуллі для стисливої рідини

За невеликих змін тиску вздовж руху рівняння Бернуллі для газів (повітря) можна використовувати у вигляді (3.9) для нестисливої рідини:

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{u^2}{2g} = const,$$

або

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const. \quad (3.40)$$

За значної зміни тиску змінюється й густина  $\rho$  (газопроводи високого тиску, повітродувні установки та ін.). Тому в цьому разі таке рівняння застосовувати не можна, бо  $\rho \neq const$ . За великих тисків величиною  $gz$  у цьому рівнянні можна знехтувати.

Тоді

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (3.41)$$

Після диференціювання цього рівняння матимемо

$$d \frac{p}{\rho} + d \frac{u^2}{2} = 0. \quad (3.42)$$

Інтегруємо цей вираз уздовж елементарної струминки:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (3.43)$$

Цей вираз є рівнянням Бернуллі для стисливої рідини.

З енергетичної точки зору член  $\int \frac{dp}{\rho}$  характеризує потенціальну енергію газу з урахуванням перетворення його внутрішньої енергії. Тому рівняння (3.43) можна сформулювати так: *за усталеної течії газу вздовж трубки течії сума питомої потенціальної й кінетичної енергії є сталою величиною.*

Для обчислення інтеграла  $\int \frac{dp}{\rho}$  потрібно знати характеристики процесу зміни стану газу в розглядуваному випадку течії. Якщо газ тече без теплообміну з навколишньою атмосферою, то такий процес у загальному випадку називають *адіабатичним*. Якщо в цьому разі вважати газ нев'язким, то процес буде мати зворотний характер і називатися *ізоентропійним*. Його можна описати рівнянням

$$\frac{p}{\rho^k} = C, \quad (3.44)$$

де  $k$  – показник адіабати процесу (для повітря  $k = 1,4$ );  
 $C$  – стале число.

З рівняння (3.44) визначаємо

$$\rho = \frac{p^{1/k}}{C^{1/k}}. \quad (3.45)$$

Тепер обчислимо інтеграл  $\int \frac{dp}{\rho}$ :

$$\int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{p^{1/k}/C^{1/k}} = C^{1/k} \int \frac{dp}{p^{1/k}} = C^{1/k} \cdot \frac{p^{\frac{k-1}{k}}}{\frac{k-1}{k}} = C^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{k}{k-1} \cdot p^{\frac{k-1}{k}}.$$

Виконаємо заміну:

$$C^{1/k} = \frac{p^{1/k}}{\rho}.$$

Тоді

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p^{1/k}}{\rho} \cdot \frac{k}{k-1} \cdot p^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot p^{\frac{1}{k}} \cdot p \cdot p^{-\frac{1}{k}} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho}.$$

Рівняння (3.40) можна записати як

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const, \quad (3.46)$$

або, враховуючи рівняння газового стану Клапейрона–Менделєєва,

$$\frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T + \frac{u^2}{2} = const. \quad (3.47)$$

Із рівняння (3.47) випливає, що зміна швидкості вздовж струминки стисливого газу пов'язана зі зміною температури. У разі збільшення швидкості температура знижується.

Для потоку нев'язкого газу, беручи  $\alpha = 1,0$ , маємо рівняння Бернуллі у вигляді

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = const. \quad (3.48)$$

Це рівняння використовують для розрахунків витікання газів із резервуарів і балонів за високого тиску.

### Запитання і завдання для самоконтролю

- 1 Чим відрізняються диференціальні рівняння руху рідини Ейлера від аналогічних рівнянь спокою рідини?
- 2 У чому особливість подання рівнянь руху Ейлера у формі Громеко?
- 3 Який геометричний зміст складових рівняння Бернуллі для струминки ідеальної рідини та їх розмірність?
- 4 Який фізичний зміст складових рівнянь Бернуллі для струминки ідеальної рідини?
- 5 Чим відрізняється рівняння Бернуллі для струминки реальної рідини від аналогічного рівняння для елементарної струминки?
- 6 Чим відрізняються диференціальні рівняння Нав'є – Стокса від диференціальних рівнянь Ейлера для руху рідини?
- 7 Чим відрізняється рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини від аналогічного рівняння для елементарної струминки?
- 8 Який фізичний зміст коефіцієнта Коріоліса?
- 9 Дайте визначення гідравлічного й п'єзометричного нахилів.
- 10 Наведіть приклади застосування рівняння Бернуллі в інженерній практиці.
- 11 У чому полягає особливість рівнянь Бернуллі для стисливої рідини?



## Розділ 4

## ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ ТА ВТРАТИ НАПОРУ ПІД ЧАС РУХУ РІДИНИ

## 4.1 Загальні відомості про гідравлічні втрати енергії

Як уже зазначалося, під час руху реальної в'язкої рідини виникають втрати енергії на подолання сил тертя, що відображено в рівнянні Бернуллі (3.32). Отже, щоб розв'язати це рівняння, необхідно визначити втрати енергії  $h_W$ .

Розглянемо, наприклад, рівномірний рух рідини в трубопроводі (рис. 4.1) на ділянці трубопроводу між перерізами 1–1 і 2–2, нахиленому під кутом  $\alpha$ . Позначимо буквами  $A$  й  $B$  центри тяжіння перерізів 1–1 і 2–2 і розглянемо умови рівноваги об'єму рідини між цими перерізами.

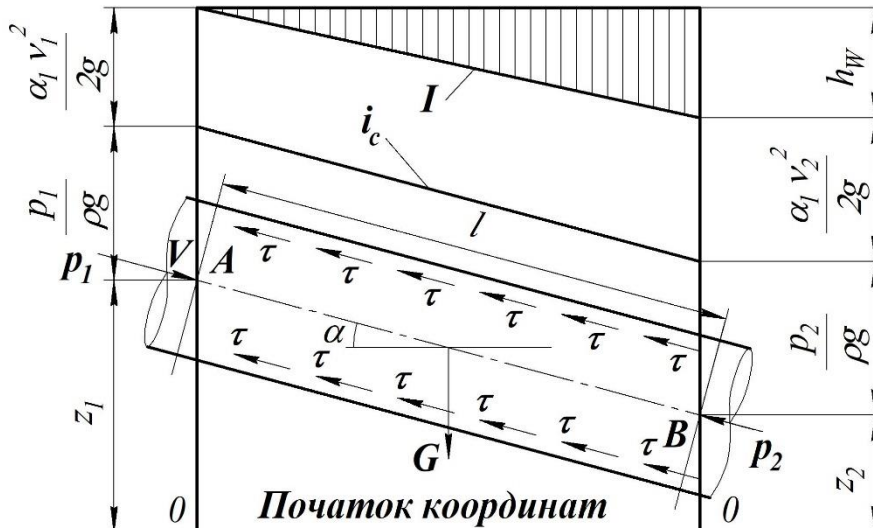


Рисунок 4.1 – Схема рівномірного руху рідини в трубі

На виділений об'єм рідини діють сили тиску  $P_1$  і  $P_2$ , сила тяжіння  $G$  і сила тертя  $R_T$ . Розглянемо ці сили.

Сили гідростатичного тиску:

$$P_1 = p_1 \cdot \omega, P_2 = p_2 \cdot \omega, \quad (4.1)$$

де  $p_1$  – тиск у центрі тяжіння перерізу 1–1;

$p_2$  – тиск у центрі тяжіння перерізу 2–2;

$\omega$  – площа живого перерізу.

Сила тяжіння

$$G = \rho \cdot g \cdot \omega \cdot l,$$

а її проєкція на вісь руху

$$G \cdot \sin \alpha = \rho \cdot g \cdot \omega \cdot l \cdot \sin \alpha,$$

де  $\omega \cdot l$  – об'єм рідини між перерізами 1–1 і 2–2;

$l$  – відстань між перерізами.

Враховуючи, що  $l \cdot \sin \alpha = z_1 - z_2$ , одержуємо

$$G \cdot \sin \alpha = \rho \cdot g \cdot \omega \cdot (z_1 - z_2). \quad (4.2)$$

Сили тертя  $R_T$  спрямовані в бік, протилежний руху рідини:

$$R_T = -\tau \cdot \chi \cdot l, \quad (4.3)$$

де  $\tau$  – напруження тертя, рівномірно розподілене по площі стінок;

$\chi$  – змочений периметр перерізу труби.

Запишемо рівняння рівноваги сил (4.1), (4.2), (4.3):

$$\rho \cdot g \cdot \omega \cdot (z_1 - z_2) + \omega \cdot (p_1 - p_2) - \tau \cdot \chi \cdot l = 0. \quad (4.4)$$

Поділивши на  $\rho \cdot g \cdot \omega$ , одержимо

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{\tau \cdot \chi \cdot l}{\rho \cdot g \cdot \omega}.$$

Ураховуючи, що  $\frac{\omega}{\chi} = R$  – гідравлічний радіус, одержуємо

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g}\right) = \frac{\tau}{\rho \cdot g} \cdot \frac{l}{R}. \quad (4.5)$$

Запишемо рівняння Бернуллі для двох перерізів:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2g} + h_W. \quad (4.6)$$

Ураховуючи, що для рівномірного руху  $V_1 = V_2$  і беручи  $\alpha_1 = \alpha_2$ , рівняння (4.6) можна записати так:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g}\right) = h_W. \quad (4.7)$$

Порівнюючи рівняння (4.5) і (4.7), бачимо, що

$$\frac{\tau}{\rho \cdot g} \cdot \frac{l}{R} = h_W, \quad (4.8)$$

але  $\frac{h_W}{l} = I$  – гідравлічний нахил, тоді

$$\frac{\tau}{\rho \cdot g} = R \cdot I, \quad (4.9)$$

Одержане рівняння є основним рівнянням рівномірного руху та описує, по суті, рівномірний розподіл сил тертя по довжині потоку (втрат енергії). Як показує досвід, розмір цих втрат залежить від режиму руху рідини.

Гідравлічні втрати поділяють на втрати за довжиною потоку й місцеві втрати. Втрати за довжиною потоку рівномірно розподіляються за довжиною і пропорційні їй (формула Дарсі – Вейсбаха):

$$h_l = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad (4.10)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт втрат на тертя (коефіцієнт Дарсі);

$V$  – середня швидкість;

$d$  – внутрішній діаметр трубопроводу.

*Місцеві втрати* – втрати, що виникають у певних місцях потоку (наприклад, у місцях установлення арматури на трубопроводах, поворотів, розширень або звужень трубопроводів та ін.).

Ці втрати визначають за формулою Вейсбаха:

$$h_M = \xi \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad (4.11)$$

де  $\xi$  – коефіцієнт втрат у місцевих опорах.

#### 4.2 Режими руху рідини й гідравлічні опори

На характері зміни руху рідини наголошували ще Готтхільф Генріх Людвіг Хаген (1838 р.), Юліус Вейсбах (1842 р.), Д. І. Менделєєв (1875 р.), але лише в 1885 році англійський фізик Осборн Рейнольдс підтвердив наявність двох режимів течії рідини на основі простих і наочних дослідів.

Рейнольдс виконав свої дослідження на установці, принципову схему якої використовують і до цього часу для демонстрації режимів руху (рис. 4.2).

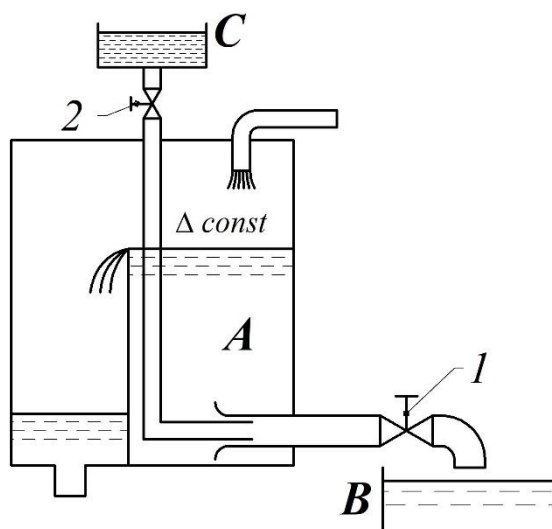


Рисунок 4.2 – Схема дослідної установки Рейнольдса

Вона вміщувала напірний резервуар А, в якому підтримувався постійний рівень рідини. До резервуара Абула приєднана скляна трубка з краном 1, за допомогою якого можна регулювати витрату. Для візуального спостереження за режимом руху рідини передбачався резервуар С, із якого підфарбована рідина, міняючи кран 2, підводилася до скляної трубки.

Витрати вимірювали об'ємним способом за допомогою бака В. У разі невеликого відкриття крана 1 швидкість рідини в скляній трубці мала, і підфарбована рідина рухалася окремою струминкою, не змішуючись із основною рідиною. Це свідчить про те, що всі струминки рухаються паралельно. Такий режим руху назвали ламінарним.

У разі повільного збільшення відкриття крана 1 швидкість руху рідини в трубці зростає. Підфарбована струминка починає викривлятися, набирає форми, близької до синусоїди, а в разі подальшого збільшення швидкості зовсім розмивається, що свідчить про порушення паралельно струминності руху й утворення вихорів на всій довжині трубки. Такий режим одержав назву турбулентного.

Таким чином, під ламінарною течією рідини будемо розуміти впорядковану струминну течію, за якої частинки рідини рухаються шарами, а під турбулентною – невпорядковану вихрову, за якої наявні пульсації швидкості, тиску тощо.

У разі зворотного зменшення швидкості руху рідини режим знову стає ламінарним, але цей перехід відбувається за меншої швидкості, ніж перехід від ламінарного режиму до турбулентного.

Швидкість, з якою ламінарний режим переходить у турбулентний, називають верхньою критичною швидкістю  $V_{в.к}$ , а швидкість, з якою турбулентний режим переходить у ламінарний, називають нижньою критичною швидкістю  $V_{н.к}$ . Рейнольдс запропонував визначати режим руху рідини за параметром, що становив відношення сил інерції до сил в'язкого тертя і який у подальшому став називатися *числом Рейнольдса*  $Re$ :

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu}, \quad (4.12)$$

де  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості.

Рейнольдс дійшов висновку, що існує таке критичне число  $Re_{к}$ , яке відмежовує ламінарний режим руху від турбулентного. Турбулентний режим

переходить у ламінарний за нижнього критичного числа  $Re_{н.к} = \frac{V_{н.к} \cdot D}{\nu}$ , а ламінарний режим переходить у турбулентний за верхнього числа  $Re_{в.к} = \frac{V_{в.к} \cdot D}{\nu}$ . Проте це число, як і верхня критична швидкість, має несталі значення і тому на практиці беруть  $Re_k = Re_{н.к} = 2320$ .

### 4.3 Ламінарний рух рідини в трубі

Ламінарна течія є шаровою течією без перемішування рідин. Теорія ламінарної течії рідини ґрунтується на законі тертя Ньютона. Це тертя між шарами рухомої рідини є єдиним джерелом втрат енергії в цьому разі.

Розглянемо усталену ламінарну течію рідини в прямій круглій циліндричній трубі з внутрішнім діаметром  $d = 2R$ . Припустимо, що труба розміщена горизонтально. Водночас виключається вплив сили тяжіння. Достатньо далеко від входу до труби, де потік повністю вже сформований (стабілізувався), виділимо відрізок довжиною  $l$  між перерізами 1–1 і 2–2 (рис. 4.3).

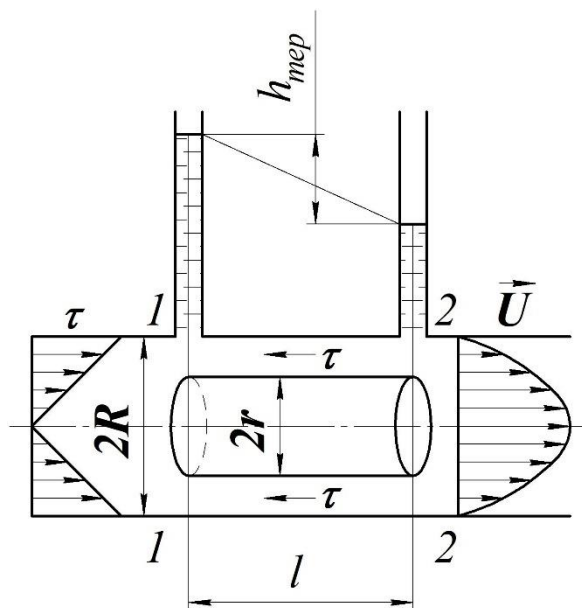


Рисунок 4.3 – Ламінарний рух рідини в трубі

Нехай в перерізі 1–1 тиск дорівнює  $p_1$ , а в перерізі 2–2 –  $p_2$ . Оскільки діаметр постійний по всій довжині труби, середня швидкість буде сталою, а коефіцієнт  $\alpha$  – однаковий уздовж потоку внаслідок його стабільності, тому

рівняння Бернуллі для ділянок між вибраними перерізами набере такого вигляду:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + h_{\text{тер}}, \quad (4.13)$$

де  $h_{\text{тер}}$  – втрати напору на тертя по довжині.

Звідси

$$h_{\text{тер}} = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{p_{\text{тер}}}{\rho \cdot g}, \quad (4.14)$$

що й показують п'єзометри, встановлені в цих перерізах.

У потоці рідини виділимо циліндричний об'єм радіусом  $r$ . Вісь виділеного об'єму збігається з віссю труби, а його основи знаходяться у вибраних перерізах. Запишемо рівняння рівномірного руху виділеного об'єму рідини в трубі, тобто рівність нулю суми сил, що діють на об'єм: сил тиску та опору. Позначивши дотичне напруження на бічній поверхні циліндра через  $\tau$ , одержимо

$$(p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2 - 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \tau = 0. \quad (4.15)$$

Звідси

$$\tau = \frac{p_{\text{тер}}}{2 \cdot l} \cdot r. \quad (4.16)$$

Із формули видно, що дотичні напруження в поперечному перерізі труби змінюються за лінійним законом у функції радіуса. Епюра дотичного напруження показана на рисунку 4.3 (ця епюра не залежить від режиму течії).

Виразимо дотичне напруження  $\tau$  згідно із законом тертя Ньютона через динамічну в'язкість і поперечний градієнт швидкості, в цьому разі замінимо змінну  $y$  (відстань від стінки) на поточний радіус  $r$ :

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy} = -\mu \frac{dU}{dr}. \quad (4.17)$$

Знак «мінус» зумовлений тим, що напрям відрізка  $r$  (від осі до стінки) протилежний напрямку збільшення швидкості (від стінки до центра).

Підставивши значення  $\tau$  в попереднє рівняння, одержимо

$$\frac{p_{\text{тер}}}{2 \cdot l} \cdot r = -\mu \frac{dU}{dr}. \quad (4.18)$$

Звідси знайдемо приріст швидкості

$$dU = -\frac{p_{\text{тер}} \cdot r dr}{2 \cdot \mu \cdot l}. \quad (4.19)$$

За додатного приросту радіуса одержуємо від'ємний приріст (зменшення) швидкості.

Проінтегрувавши одержимо

$$U = -\frac{p_{\text{тер}} \cdot r^2}{4 \cdot \mu \cdot l} + C. \quad (4.20)$$

Сталу інтегрування  $C$  визначимо з умови, що на стінці за  $r = R$  швидкість  $U = 0$ :

$$0 = -\frac{p_{\text{тер}} \cdot r^2}{4 \cdot \mu \cdot l} + C.$$

Звідси

$$C = \frac{p_{\text{тер}} \cdot r^2}{4 \cdot \mu \cdot l}. \quad (4.21)$$

Швидкість рідини на колі радіусом  $r$

$$U = \frac{p_{\text{тер}}}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot (R^2 - r^2). \quad (4.22)$$



Цей вираз є законом розподілу швидкостей по перерізу круглої труби за ламінарної течії. Крива, що зображає епюру швидкостей, є параболою другого степеня.

Максимальна швидкість є в центрі перерізу ( $zar = 0$ ):

$$U_{max} = \frac{p_{тер} \cdot R^2}{4 \cdot \mu \cdot l}. \quad (4.23)$$

Відношення  $\frac{p_{тер}}{l}$ , що входить до формули (4.23), є гідравлічним нахилом, помноженим на  $\rho \cdot g$ . Ця величина є сталою вздовж прямої труби сталого діаметра.

Використаємо одержаний закон розподілу швидкостей (4.22) для розрахунку витрати. Для цього виразимо спочатку елементарну витрату через нескінченно малу площадку  $d\omega$ .

Максимальна швидкість є в центрі перерізу ( $zar = 0$ ):

$$dQ = U d\omega. \quad (4.24)$$

Тут  $U$  є функцією радіуса, що визначається за формулою (4.22), а площадку  $d\omega$  доцільно взяти у вигляді кільця радіусом  $r$  і шириною  $dr$ , тоді

$$dQ = \frac{p_{тер}}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot (R^2 - r^2) \cdot 2\pi \cdot r dr. \quad (4.25)$$

Після інтегрування по всій площі поперечного перерізу, тобто від  $r = 0$  до  $r = R$ :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi \cdot p_{тер}}{2 \cdot \mu \cdot l} \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r dr = \frac{\pi \cdot p_{тер}}{2 \cdot \mu \cdot l} \left( \int_0^R R^2 \cdot r dr - \int_0^R r^3 dr \right) = \\ &= \frac{\pi \cdot p_{тер}}{2 \cdot \mu \cdot l} \left( \frac{R^2 \cdot r^2}{2} \Big|_0^R - \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi \cdot p_{тер} \cdot R^4}{8 \cdot \mu \cdot l}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Середню за перерізом швидкість знайдемо поділивши витрату на площу. З урахуванням (4.26) одержимо

$$V = \frac{Q}{\pi \cdot R^2} = \frac{p_{\text{тер}} \cdot R^2}{8 \cdot \mu \cdot l}. \quad (4.27)$$

Порівняння цього виразу з формулою (4.23) доводить, що середня швидкість за ламінарної течії вдвічі менша, ніж максимальна:

$$V = 0,5U_{\text{max}}. \quad (4.28)$$

Для одержання залежності втрат напору  $h_{\text{тер}}$  на тертя від витрати й розмірів труби визначимо  $\Delta p_{\text{тер}}$  з формули (4.26). Поділивши цей вираз на  $\rho \cdot g$ , замінивши  $\mu$  на  $\nu \cdot \rho$  і  $p_{\text{тер}}$  на  $h_{\text{тер}} \cdot \rho \cdot g$ , а також перейшовши від  $R$  до  $d = 2R$ , знайдемо

$$h_{\text{тер}} = \frac{p_{\text{тер}}}{\rho \cdot g} = \frac{8 \cdot \nu \cdot \rho \cdot l}{\pi \cdot R^4 \cdot \rho \cdot g} \cdot Q = \frac{128 \cdot \nu \cdot l}{\pi \cdot g \cdot d^4} \cdot Q. \quad (4.29)$$

Одержаний закон опору показує, що за ламінарної течії в трубі круглого перерізу втрата напору на тертя пропорційна витраті, довжині труби і в'язкості рідини в першому степені та обернено пропорційна діаметру в четвертому степені. Залежність (4.29) використовують для розрахунку трубопроводів за ламінарної течії, вона експериментально встановлена французьким лікарем Жаном Марі Луї Пуазейлем у 1840 році і названа *формулою Пуазейля*.

Визначимо коефіцієнт гідравлічного тертя під час ламінарного руху. Для цього в формулі (4.29) замінимо витрату добутком  $\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot V$ :

$$\frac{128 \cdot \nu \cdot l}{\pi \cdot g \cdot d^4} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot V = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

$$\frac{32 \cdot \nu}{D} = \lambda \cdot \frac{V}{2}.$$

Враховуючи, що  $Re = \frac{Vd}{\nu}$ , одержимо

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (4.30)$$

У гідравліці залежність (4.30) називають *формулою Стокса*.

Втрати напору на тертя по довжині за ламінарної течії пропорційні швидкості в *першому степені*.

Визначимо коефіцієнт кінетичної енергії  $\alpha$  за ламінарного режиму:

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} U^3 d\omega}{V^3 d\omega} = \frac{U_{max}^3 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi \cdot r dr}{\left(\frac{U_{max}}{2}\right)^3 \pi \cdot R^2} = \frac{U_{max}^3 \cdot 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r dr}{\frac{U_{max}^3}{8} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R^6}.$$

Після перетворення:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{16}{R^8} \cdot \left( \int_0^R R^6 \cdot r dr - 3 \int_0^R R^4 \cdot r^3 dr + 3 \int_0^R R^2 \cdot R^5 dr - \int_0^R r^7 dr \right) = \\ &= \frac{16}{R^8} \cdot \left( \frac{R^6 \cdot R^2}{2} - \frac{3 \cdot R^4 \cdot R^4}{4} + \frac{3 \cdot R^2 \cdot R^6}{6} - \frac{R^8}{8} \right) = \\ &= \frac{16}{R^8} \cdot \left( \frac{4 \cdot R^8 - 6 \cdot R^8 + 4 \cdot R^8 - R^8}{8} \right) = 2. \end{aligned}$$

Отже, під час ламінарного руху  $\alpha = 2$ .

Таке велике відхилення коефіцієнта  $\alpha$  від одиниці пов'язане з тим, що під час ламінарного руху існує дуже значна нерівномірність розподілу швидкостей по перерізу.

#### 4.4 Початкова ділянка ламінарного руху

Якщо рідина з якого-небудь резервуара надходить у трубу сталого діаметра і рухається по ній ламінарним потоком, то розподіл швидкостей по перерізу труби поблизу входу є практично рівномірним (рис. 4.4).

Але під дією сил в'язкості відбувається перерозподіл швидкостей по перерізах, і шари рідини, які прилягають до стінки, гальмуються, а центральна частина потоку (ядро), де ще зберігається рівномірний розподіл швидкостей, рухається прискорено, що обумовлено необхідністю проходження через незмінну площу певної витрати рідини.

Водночас товщина шарів загальмованої рідини поступово збільшується, поки не почне дорівнювати радіусу труби, тобто поки шари, що прилягають до

протилежних стінок, не зімкнуться на осі труби. Після цього встановлюється характерний для ламінарної течії параболічний профіль швидкостей.

Ділянка від початку труби, на якій формується (стабілізується) параболічний профіль швидкостей, називається початковою ділянкою ламінарного руху ( $l_n$ ). За межами цієї ділянки маємо стабілізовану ламінарну течію, параболічний профіль швидкостей залишається незмінним, якою б довгою не була труба за умовами збереження її прямолінійності й сталості перерізу. Викладена вище теорія ламінарної течії справедлива саме для цієї стабілізованої ламінарної течії і не підходить для початкової ділянки.

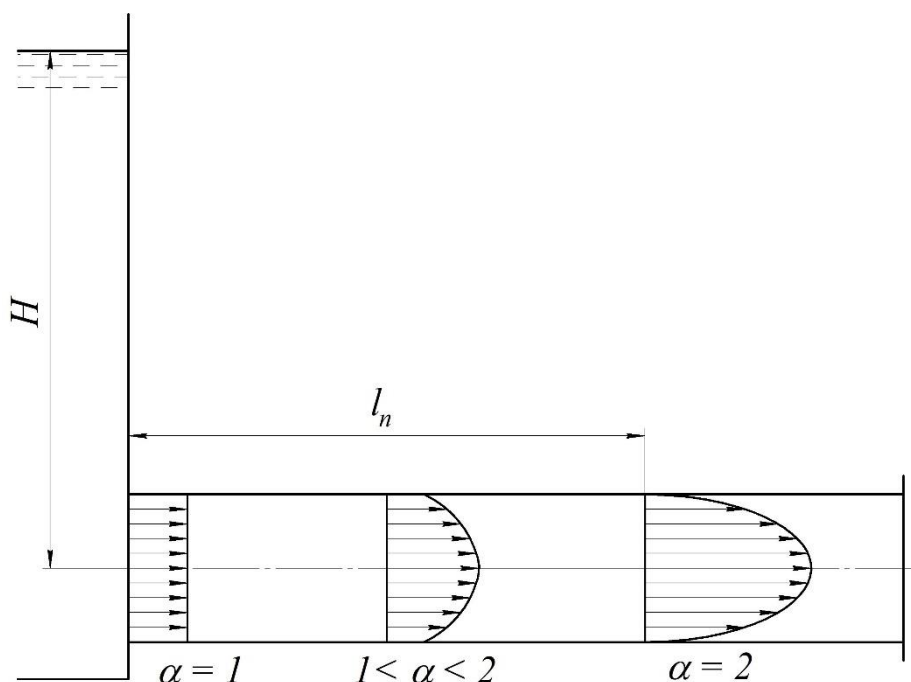


Рисунок 4.4 – Початкова ділянка ламінарного руху

Є різні рекомендації щодо визначення довжини початкової ділянки. Наприклад, формула Шиллера:

$$l_n = 0,029 \cdot D \cdot Re. \quad (4.31)$$

Гідравлічний нахил  $I$  і гідравлічний коефіцієнт тертя  $\lambda$  на початковій ділянці є більшими, ніж на іншій частині труби. У коротких трубах, якщо  $l_{тр} < l_n$ ,  $\lambda$  визначають за формулою Френкеля:

$$\lambda = \frac{B}{Re}, \quad (4.32)$$

де  $B$  визначають за такими даними:

$\frac{l}{D \cdot Re}$	0,029	0,025	0,015	0,01	0,005	0,0025
$B$	69,5	72	80	89	105	120

Якщо довжина труби більша, ніж  $l_n$ , то втрати напору за довжиною складаються з втрат напору на початковій ділянці та решти частини труби.

#### 4.5 Турбулентний рух рідини

Механізм турбулентного руху значно складніший, ніж ламінарного. За турбулентного режиму течії спостерігається безперервне інтенсивне перемішування частинок рідини внаслідок їх переміщення в напрямі, перпендикулярному до основного напрямку руху потоку. В цьому разі виникають миттєві зміни величин і напрямів швидкостей руху окремих частинок, що називається *пульсацією швидкостей*  $u'$  (рис. 4.5).

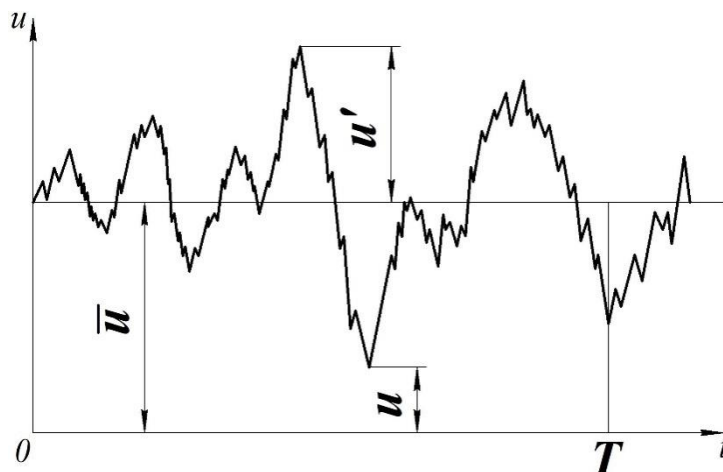


Рисунок 4.5 – Пульсація швидкості в турбулентному потоці

Швидкість у певний момент часу в певній точці турбулентного потоку називають *місцевою миттєвою швидкістю*.

Явище пульсації швидкостей полягає в тому, що місцеві миттєві швидкості (швидкості руху в точці) безперервно змінюються, коливаючись навколо деякої сталої величини, що називається *місцевою осередненою швидкістю*.

Якщо в турбулентному потоці взяти будь-який період часу осереднення  $T$ , то можна отримати осереднену місцеву швидкість

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt. \quad (4.33)$$

Величина  $\bar{u}$  – *осереднена швидкість*. Її визначають як висоту прямокутника завширшки  $T$ . Цей прямокутник рівновеликий із фігурою, що має межі: осі координат, ординату  $T$  і криву, що характеризує зміну миттєвої швидкості  $U$  з часом.

Якщо виміряти місцеві швидкості  $U$  за допомогою спеціальних точних приладів та обчислити усереднену місцеву швидкість за залежністю (4.33), то можна побачити, що осереднена місцева швидкість є практично сталою і спрямована вздовж потоку. Це дозволяє вважати турбулентний потік квазіусталеним, тобто умовно усталеним. У цьому разі до нього можна застосувати рівняння нерозривності й рівняння Бернуллі.

Різницю між миттєвою та осередненою швидкістю називають *пульсаційною швидкістю*, або *пульсацією*:

$$u' = u - \bar{u}. \quad (4.34)$$

Складові пульсаційної швидкості за осями  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - \bar{u}_x, \\ u'_y &= u_y - \bar{u}_y, \\ u'_z &= u_z - \bar{u}_z. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Оскільки швидкість та тиск пов'язані між собою рівнянням Бернуллі, то пульсація швидкості призводить і до пульсації тиску:

$$\begin{aligned} p'_x &= p_x - \bar{p}_x, \\ p'_y &= p_y - \bar{p}_y, \\ p'_z &= p_z - \bar{p}_z. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Уведення поняття осередненої швидкості дає можливість застосувати до турбулентного потоку основні поняття й рівняння руху без урахування пульсації швидкостей. Фактично пульсації існують і впливають на значення дотичних напружень у турбулентному потоці й на втрати енергії.

Розглянемо умовну струминну модель руху з урахуванням дії пульсації. Виділимо в потоці частину шару рідини 1 – 2 – 3 – 4, що рухається вздовж осі  $x$  (рис. 4.6).

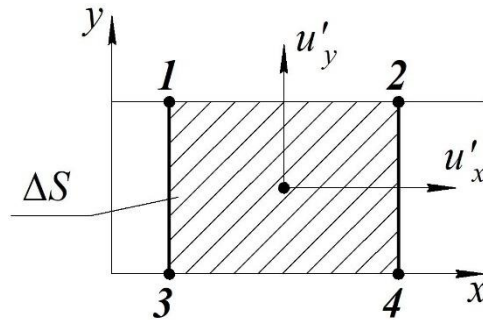


Рисунок 4.6 – Схема для визначення дотичних напружень у турбулентному потоці рідини

Унаслідок дії поперечної пульсаційної швидкості  $u'_y$  через бокову поверхню шару 1 – 2 з площею  $\Delta S$  за час  $dt$  проходить маса рідини

$$\Delta m' = \rho \cdot \Delta S \cdot u'_y dt. \quad (4.37)$$

Ця маса рідини внаслідок дії поздовжньої пульсації  $u'_x$  створює кількість руху:

$$KP = \rho \cdot \Delta S \cdot u'_y dt \cdot u'_x. \quad (4.38)$$

Ця кількість руху втрачається у вищерозміщеному шарі, внаслідок цього виникає імпульс сили:

$$IC = \Delta F dt, \quad (4.39)$$

де  $\Delta F$  – зсувна сила, прикладена до вищерозміщеного шару з боку нижчерозміщеного.

Також верхній шар діє на нижній із силою опору  $\Delta T$ , що дорівнює силі  $\Delta F$ , але спрямована в протилежний бік.

Зміна кількості руху дорівнює імпульсу діючих сил:

$$\Delta T dt = -\rho \cdot \Delta S \cdot u'_x \cdot u'_y dt. \quad (4.40)$$

Відомо, що відношення  $\frac{\Delta T}{\Delta S}$  дорівнює дотичним напруженням у турбулентному потоці:

$$\frac{\Delta T}{\Delta S} = \tau_{\text{турб}}.$$

Звідси

$$\tau_{\text{турб}} = -\rho \cdot u'_x \cdot u'_y. \quad (4.41)$$

Це рівняння показує залежність дотичних напружень від пульсації швидкості під час турбулентного руху, тобто від обміну кількістю руху між шарами рідини.

Оскільки  $u'_x$  і  $u'_y$  характеризують пульсації швидкості в певний момент часу, то  $\tau_{\text{турб}}$  за формулою (4.41) буде величиною миттєвою. Тому осереднені дотичні напруження можна записати так:

$$\tau_{\text{турб}} = -\rho \cdot \overline{u'_x \cdot u'_y}. \quad (4.42)$$

У правій частині цього рівняння потрібно осереднювати добуток складових пульсаційних швидкостей, тому що осереднені значення окремих складових  $u'_x$  і  $u'_y$  будуть дорівнювати нулю через взаємну компенсацію від'ємних і додатних пульсацій.

За однакових знаків в один і той самий момент часу  $u'_x$  і  $u'_y$  їх осереднений добуток буде завжди додатним, а за різних знаків – від'ємним, але не буде дорівнювати нулю.

Поздовжні й поперечні складові пульсації швидкості  $u'_x$  та  $u'_y$  прямо пропорційні осередненій швидкості  $\bar{u}$  і середній швидкості  $V$ .

Згідно з цим а також із формулою (4.42) дотичні напруження пропорційні квадрату середньої швидкості. Ця важлива особливість турбулентного режиму



відрізняє його від ламінарного, за якого дотичні напруження пропорційні швидкості в першому степені.

Водночас у турбулентному потоці, крім дотичних напружень, зумовлених перемішуванням рідини, виявляються також сили в'язкості (сили внутрішнього тертя), зумовлені зчепленням між шарами рідини потоку й стінками русла. З урахуванням цього повні дотичні напруження будуть дорівнювати:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_{\text{турб}} + \bar{\tau}_{\text{в'язк}}, \quad (4.43)$$

або

$$\bar{\tau} = -\rho \cdot \overline{u'_x \cdot u'_y} + \mu \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy}. \quad (4.44)$$

Цей вираз можна подати у вигляді

$$\bar{\tau} = \varepsilon_T \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy} + \mu \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy}, \quad (4.45)$$

де  $\varepsilon_T$  – коефіцієнт турбулентної в'язкості;

$\bar{u}_x$  – осереднена швидкість по осі  $x$  (напрямок потоку);

$\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості,

$$\varepsilon_T = - \frac{\rho \cdot \overline{u'_x \cdot u'_y}}{\frac{d\bar{u}_x}{dy}}. \quad (4.46)$$

Турбулентна в'язкість на відміну від динамічної враховує не молекулярну структуру рідини, а особливості турбулентного режиму. Вона не є постійною, а залежить від кінематичних характеристик потоку і числа  $Re$ . Пульсації швидкості збільшуються зі збільшенням числа  $Re$ , тому збільшується й  $\varepsilon_T$ .

За великого степеня турбулентності  $\varepsilon_T$  набагато більший, ніж  $\mu$ , і тому в цьому разі  $\mu$  можна знехтувати. За меншої турбулентності  $\mu$  сумірий з  $\varepsilon_T$ , і тому під час визначення втрат напору необхідно враховувати як в'язкість, так і інерційні сили.

У цьому разі порушується висновок про те, що дотичні напруження залежать від квадрата швидкості, тому що за рахунок впливу в'язкісних сил

дотичні напруження стають пропорційними швидкості в степені, меншому ніж два (зазвичай це 1,75–2,0).

#### 4.6 Структура турбулентного потоку в трубі

На основі експериментальних досліджень і теоретичних припущень Кармана, Прандтля, Нікурадзе та інших вважається, що в потоках, які перебувають в умовах турбулентного режиму, на поверхні труб, стінок, каналів існує досить тонкий шар рідини з режимом руху, близьким до ламінарного. Цей шар рідини називають *ламiнарною плівкою*, або *ламiнарним підшаром*. Товщина цієї плівки  $\delta_{пл}$  дуже мала, її вимірюють частками міліметра. Інша частина потоку створює так зване *турбулентне ядро*. Між ламінарною плівкою та турбулентним ядром існує теж достатньо тонкий перехідний шар рідини з змішаним режимом руху (ламiнарним часом, турбулентним часом із добре видимими зривами вихорів).

Отже, потік, що заходиться в турбулентному режимі руху, складається з ламінарної плівки, перехідного шару й турбулентного ядра (рис. 4.7). Ламінарна плівка  $\delta_{пл}$  та перехідна зона  $\delta_{п}$  становлять примежовий шар товщиною  $\delta$ .

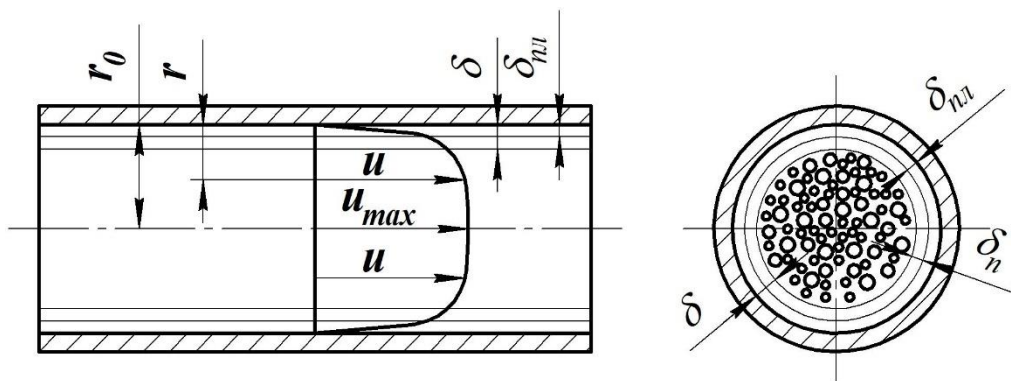


Рисунок 4.7 – Епюра швидкості за турбулентного режиму руху рідини

У межах ламінарної плівки динамічна в'язкість  $\mu$  значно більша від турбулентної  $\varepsilon_T$ , і напруження в'язкого тертя значно більші від напружень, що виникають під дією сил інерції.

Інше відбувається в турбулентному ядрі. Тут дотичні напруження від турбулентного перемішування в багато разів більші, ніж напруження в'язкого тертя.

У перехідній зоні величини  $\mu$  і  $\varepsilon_T$  мають однаковий порядок.

## 4.6.1 Розподіл осереднених швидкостей по перерізу труби

Розподіл швидкостей по живому перерізу труби в умовах турбулентного режиму виявлено лише експериментально. Внаслідок складності процесів, що проходять у потоці, точного аналітичного розв'язку немає. За допомогою дослідів встановлено:

1) швидкості на поверхні стінки дорівнюють нулю внаслідок прилипання до них рідини;

2) на дуже маленькій відстані від поверхні стінки швидкості можуть досягати значної величини, що мало відрізняється від значень швидкостей в інших точках живого перерізу;

3) у точках живого перерізу потоку, більш віддалених від поверхні стінки, швидкості зростають повільніше.

Згідно з теорією турбулентності Прандтля в ядрі турбулентного потоку місцеві усереднені швидкості змінюються за логарифмічним законом, що також підтверджується експериментами:

$$\bar{u} = u_* \left( 5,75 \cdot \lg \frac{y \cdot u_*}{\nu} + 5,5 \right), \quad (4.47)$$

де  $y$  – відстань точки до стінки труби;

$\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості;

$u_*$  – динамічна швидкість, або швидкість зрізу, що визначається за формулою

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (4.48)$$

де  $\tau_0$  – постійне напруження тертя на стінці;

$\rho$  – густина рідини.

Але ця формула дає велику похибку в зоні поблизу твердої поверхні, тобто в зоні ламінарного режиму течії.

Встановлена залежність між максимальною осередненою й середньою швидкостями:

$$\bar{u}_{max} = V + 3,75 \cdot u_*. \quad (4.49)$$

Коефіцієнт кінетичної енергії в круглих трубах за турбулентного режиму визначають за формулою Коріоліса:

$$\alpha = 1,0 + 2,65 \cdot \lambda, \quad (4.50)$$

і  $\alpha$  змінюється в межах 1,03–1,13.

#### 4.6.2 Гідравлічно гладкі та гідравлічно шорсткі труби

Людвіг Прандтль вважав, що безпосередньо біля стінки в примежовому шарі сили молекулярної в'язкості мають такий самий порядок, як і сили інерції, і що саме безпосередньо в цьому шарі сконцентрована гальмівна дія стінки.

Як показують досліди, біля стінки під час турбулентного руху рідини втрачається близько 80–90 % від загальної кількості енергії від молекулярної в'язкості. Це зумовлено наявністю великих градієнтів швидкості в цьому шарі, що спричиняє великі дотичні напруження. За межами цього шару відповідно до гіпотези Прандтля в'язкість рідини можна взагалі не враховувати. Аналіз руху рідини в пристінному шарі засвідчує, що втрати на ньому (енергії) залежать від стану самої стінки (її шорсткості).

Залежно від співвідношення абсолютної висоти виступів шорсткості  $\Delta$  й товщини ламінарної плівки  $\delta_{пл}$  по-різному виявляється вплив в'язкісного тертя та сил інерції на дотичні напруження і втрати енергії в потоці. Товщину ламінарної плівки визначають за формулою

$$\delta_{л} = \frac{30 \cdot D}{Re \cdot \sqrt{\lambda}}. \quad (4.51)$$

Це значення  $\delta_{пл}$  потрібно порівнювати з висотою виступів шорсткості. Оскільки фактично висота всіх виступів неоднакова, то вводять поняття еквівалентної шорсткості  $\Delta_{екв}$ , тобто такої рівномірної шорсткості, яка дає під час розрахунків однакове із заданою шорсткістю значення гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ . Наведемо деякі значення еквівалентної шорсткості для різних труб (табл. 4.1).

Схематично можна розглядати такі три області гідравлічних опорів:

1 Область гідравлічно гладких труб: виступи шорсткості вкриті в'язкою ламінарною плівкою ( $\Delta_{екв} \ll \delta_{пл}$ ) і не порушують її цілісності (рис. 4.8 а).

Виступи обтікаються без відривів та не утворюють вихорів. У цьому разі шорсткість не впливає на гідравлічні опори, і гідравлічний коефіцієнт тертя залежить лише від числа Рейнольдса. За даними О. Д. Альтшуля, ця область існує за  $Re \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} < 10$ .

Таблиця 4.1 – Середнє значення еквівалентної шорсткості

Матеріал труби і спосіб виготовлення	$\Delta_{\text{екв}}, \text{мм}$
Сталеві суцільнотягнуті нові	0,02–0,05
Те саме, ненові (ті, які були в експлуатації)	0,15–0,3
Сталеві зварні нові	0,04–0,1
Чавунні нові	0,25–1,0
Чавунні й сталеві зварні ненові	0,8–1,5
Азбестоцементні нові	0,05–0,1
Те саме, ненові	0,6
Бетонні та залізобетонні	0,3–0,8

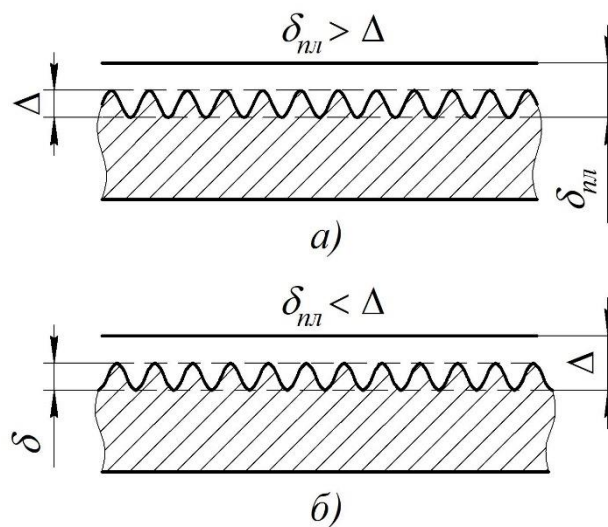


Рисунок 4.8 – Гідравлічно гладкі й шорсткі труби

2 За  $10 < Re \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} < 500$  існує перехідна область: висота виступів шорсткості  $\Delta_{\text{екв}}$  того самого порядку, що й товщина в'язкої ламінарної плівки  $\delta_{\text{пл}}$  (рис. 4.8 б). У цьому разі на гідравлічний опір впливають число Рейнольдса і висота виступів шорсткості.

3 За  $Re \frac{\Delta_{екв}}{D} > 500$  має місце область гідравлічно шорстких труб: виступи шорсткості виходять за межі в'язкої ламінарної плівки ( $\Delta_{екв} \gg \delta_{пл}$ ). Відривне обтікання виступів (рис. 4.8 б) зводить опір тертя до опору обтікання тіл із різкою зміною конфігурації, який не залежить від числа Рейнольдса і пропорційний швидкісному напору потоку та розмірам виступів шорсткості. Саме ці фактори пов'язані з інерційним опором переміщуваних частинок рідини.

#### 4.6.3 Гідравлічний коефіцієнт тертя (коефіцієнт Дарсі)

Коефіцієнт тертя залежить від числа Рейнольдса і відносної шорсткості труби, тобто  $\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta_{екв}}{D}\right)$ . Однією з найбільш відомих праць у цій сфері є дослідження Нікурадзе (1932 р., Німеччина), показані на рисунку 4.9.

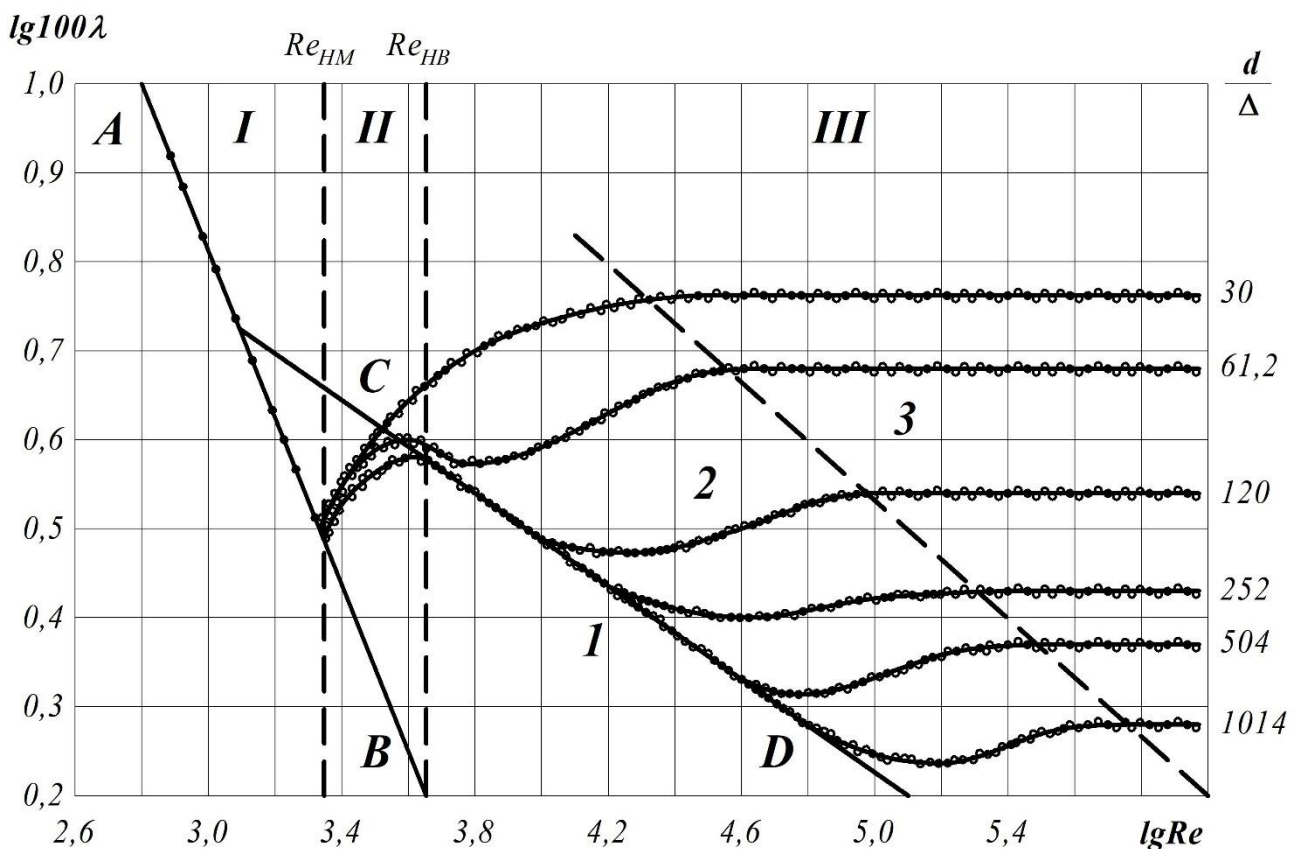


Рисунок 4.9 – Графік Нікурадзе

Ці дослідження були виконані дуже старанно, їх проводили в трубах із штучною однорідною шорсткістю, яку створювали наклеюванням зерен піску

певного розміру на внутрішню поверхню труб. У трубах із такою шорсткістю на різних витратах визначали втрату напору  $\Delta h$  і за формулою Дарсі–Вейсбаха

$$\Delta h = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.52)$$

вираховували коефіцієнт  $\lambda$ , значення якого наносили на графік у функції числа Рейнольдса.

На цьому графіку по осі ординат  $y$  відкладали значення  $\lambda = f\left(Re, \frac{d}{\Delta_{\text{екв}}}\right)$  для кожного значення відносної шорсткості  $\frac{d}{\Delta_{\text{екв}}}$ , а по осі абсцис  $x$  – у логарифмічному масштабі числа Рейнольдса. На графіку виділено три зони, що визначаються вертикальними лініями  $Re_{\text{НМ}}$  та  $Re_{\text{ВМ}}$ . Перша зона (I) – зона ламінарного режиму. В цій зоні ( $Re < 2\,300$ , чому відповідає  $\lg Re < 3,36$ ) всі дослідні точки незалежно від шорсткості стінок розміщені на одній прямій АВ. Це означає, що тут коефіцієнт Дарсі  $\lambda$  не залежить від шорсткості, а є лише функцією числа Рейнольдса.

За значень числа Рейнольдса  $2\,300 < Re < 4\,000$  (перехідна зона від ламінарного режиму до турбулентного) коефіцієнт гідравлічного опору  $\lambda$  швидко зростає зі збільшенням  $Re$ , залишаючись однаковим для різних шорсткостей. Втрати напору пропорційні швидкості в степені 1,75.

Третя зона (III) – зона турбулентного режиму ( $Re > 4\,000$ ). У цій зоні розрізняються три області опору. Перша область (1) гідравлічно гладких труб (гладкостінного опору) – пряма CD. У цій області коефіцієнт Дарсі  $\lambda$  не залежить від шорсткості (всі точки розміщені на одній прямій), а є функцією числа Рейнольдса. Межі області  $4\,000 < Re < 20 \frac{d}{\Delta_{\text{екв}}}$ .

Друга область (2) – область доквадратичного опору. В цій області коефіцієнт Дарсі  $\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta_{\text{екв}}}{d}\right)$ . Втрати напору в цій області пропорційні швидкості в степені 1,75–2. Межі області  $20 \frac{d}{\Delta_{\text{екв}}} < Re < 500 \frac{d}{\Delta_{\text{екв}}}$ .

Третя область (3) – область квадратичного опору. В цій області коефіцієнт Дарсі  $\lambda = f\left(\frac{\Delta_{\text{екв}}}{d}\right)$  і не залежить від числа Рейнольдса. Втрати напору в цій області пропорційні швидкості в другому степені. Межі області  $Re > 500 \frac{d}{\Delta_{\text{екв}}}$ .

Одержані результати підтверджують, що поки виступи шорсткості занурені у в'язкий примежовий шар, тобто якщо  $\Delta_{\text{екв}} < \delta$ , то в цьому разі для

структури потоку немає відмінності між гладкими й шорсткими поверхнями стінок, і коефіцієнт  $\lambda$  залежить лише від числа Рейнольдса.

Якщо виступи шорсткості виходять за межу в'язкого примежового шару ( $\Delta_{\text{екв}} > \delta$ ), ламінарна течія порушується, і виступи шорсткості призводять до відриву рідини від стінок й утворення в ній вихорів.

Як зазначали раніше, товщина примежового шару зменшується зі збільшенням числа Рейнольдса. Тому у разі відносно невеликих значень цього числа, якщо  $\Delta_{\text{екв}}$  має такий самий порядок, як і  $\delta$ , коефіцієнт  $\lambda$  повинен залежати не лише від шорсткості стінок, а й від числа Рейнольдса (область доквадратичного опору). Якщо число Рейнольдса дуже велике і  $\Delta_{\text{екв}}$  значно перевищує  $\delta$ , то  $\lambda$  залежить лише від шорсткості (зона квадратичного опору або автомодельності).

Як уже зазначалося, досліди Нікурадзе проводили в трубах з однорідною штучною шорсткістю. Труби, які використовують на практиці, мають шорсткість неоднорідну й нерівномірну. Тому залишилося незрозумілим, наскільки правильними будуть висновки, зроблені Нікурадзе для труб із штучною шорсткістю, стосовно звичайних промислових труб із дійсною шорсткістю і які числові значення шорсткості для цих труб.

Висвітленню цих питань були присвячені фундаментальні експериментальні дослідження (праці Кольбрука, І. О. Ісаєва, Г. О. Муріна, Ф. О. Шевелева), з яких найбільший інтерес становлять експерименти Г. О. Муріна з дослідження гідравлічних опорів у звичайних промислових сталевих трубах.

Результати цих досліджень наведені на графіку рисунка 4.10.

Підтвердивши основні закономірності, встановлені Нікурадзе, ці досліди дозволили зробити низку важливих нових висновків. За їх допомогою доведено, що для труб із дійсною шорсткістю коефіцієнт  $\lambda$  в перехідній зоні  $b$  є завжди більшим, ніж у квадратичній (а не меншим, як у Нікурадзе для штучної шорсткості), і знижується. Тому криві, одержані Г. А. Муріним, не мають западини, характерної для кривих Нікурадзе. Штриховою лінією позначено межу між областями.

Це потрібно враховувати під час розрахунків труб, що працюють у перехідній зоні. Необхідно також зазначити, що кожна труба є не лише гладкою або шорсткою. Залежно від числа Рейнольдса одна й та сама труба може працювати в області гідравлічно гладких, шорстких труб або в перехідній області. У трубах із порівняно великою шорсткістю під час переходу до



турбулентного режиму примежовий шар не вкриває виступів шорсткості й область гідравлічно гладких труб відсутня.

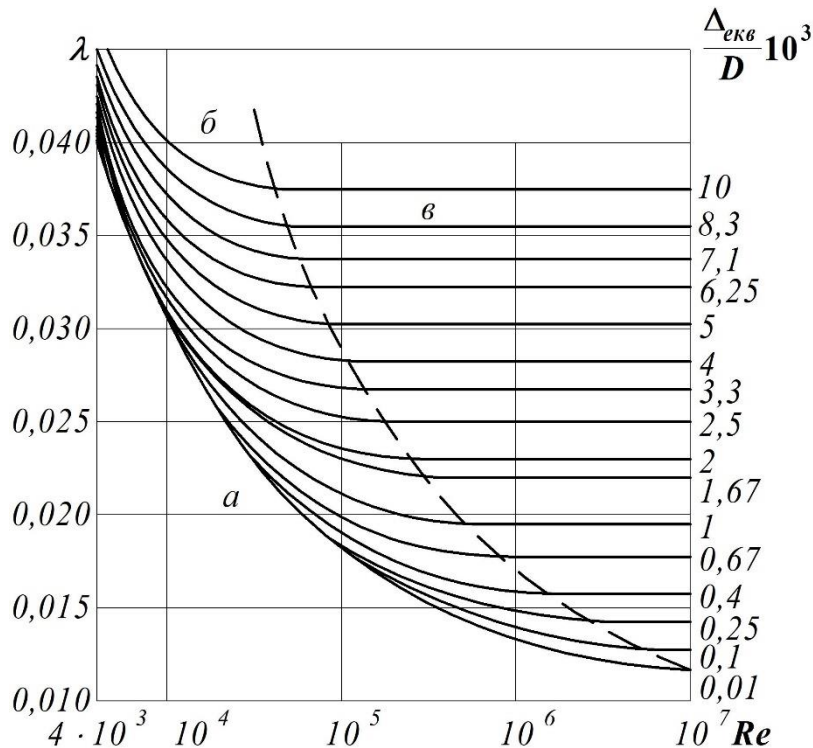


Рисунок 4.10 – Результати експериментальних досліджень гідравлічних опорів у звичайних сталевих трубах

Залежно від особливостей кожної області є різні емпіричні формули для визначення гідравлічного коефіцієнта тертя.

Для гідравлічно гладких труб використовують *формулу Блазіуса*:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad (4.53)$$

У перехідній області опору гідравлічний коефіцієнт тертя визначають за *формулою Альтшуля*:

$$\lambda = 0,11 \cdot \left( \frac{\Delta_{екв}}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} \quad (4.54)$$

Цю формулу можна застосовувати для всіх областей опору. За малих чисел Рейнольдса  $\frac{\Delta_{екв}}{D}$  значно менше від величини  $\frac{68}{Re}$  і нею можна знехтувати. У

цьому разі формула (4.54) перетвориться на формулу (4.53). За великих чисел Рейнольдса величиною  $\frac{68}{Re}$  можна знехтувати порівняно з  $\frac{\Delta_{\text{екв}}}{D}$ , і для гідравлічно шорстких труб (область квадратичного опору) формула (4.54) перетвориться на формулу Шифрінсона:

$$\lambda = 0,11 \cdot \left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} \right)^{0,25}. \quad (4.55)$$

Широко використовують також формулу Прандтля:

$$\lambda = \frac{1}{4 \cdot \left( \lg \frac{3,7 \cdot D}{\Delta_{\text{екв}}} \right)^2}. \quad (4.56)$$

*4.6.4 Узагальнена формула Л. С. Лейбензона для визначення втрат напору*

Втрати напору від тертя можуть бути визначені за допомогою узагальненої формули академіка Л. С. Лейбензона, яку одержують із формули Дарсі:

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

Записавши значення коефіцієнта гідравлічного опору  $\lambda$  у вигляді

$$\lambda = \frac{A}{Re^m},$$

підставимо в цей вираз значення числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \lambda}.$$

Тоді

$$\Delta h = \beta \cdot \frac{Q^{2-m} \cdot \nu^m \cdot l}{D^{5-m}}, \quad (4.57)$$

$$\beta = \frac{8 \cdot A}{4^m \cdot \pi^{2-m} \cdot g}, \quad (4.58)$$

де  $A$  і  $m$  – коефіцієнти, що залежать від режиму руху рідини (наведені табл. 4.2).

Таблиця 4.2 – Значення коефіцієнтів узагальненої формули для різних режимів течії рідини

Режим течії	$m$	$A$	$\beta, c^2/m$
Ламінарний	1	64	$\frac{128}{\pi \cdot g} = 4,15$
Турбулентний, область гідравлічно гладких труб	0,25	0,3164	$\frac{0,242}{g} = 0,0247$
Зона змішаного тертя	0,123	$10^{0,127 \cdot \lg \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D}} - 0,627$	$0,0802 \cdot A$
Зона квадратичного тертя	0	$\lambda$	$\frac{8 \cdot \lambda}{\pi^2 \cdot g} = 0,0826 \cdot \lambda$

#### 4.6.5 Визначення втрат напору у водопровідних трубах

Якщо у формулу для визначення втрат на тертя по довжині труби ввести величину гідравлічного нахилу  $I = \frac{h_{\text{терп}}}{l}$  і гідравлічний радіус  $R = \frac{D}{4}$ , то вона набере такого вигляду:

$$I = \frac{\lambda}{4 \cdot R} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.59)$$

Визначивши з цього виразу величину швидкості, одержимо відому формулу Шезі:

$$V = c \cdot \sqrt{R \cdot I}, \quad (4.60)$$

де  $c = \sqrt{\frac{8 \cdot g}{\lambda}}$ .

Витрату рідини можна одержати помноживши обидві частини виразу (4.60) на площу поперечного перерізу труби або живого перерізу потоку:

$$Q = V \cdot S = S \cdot c \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{I} = K \cdot \sqrt{I}, \quad (4.61)$$

Величину  $K = S \cdot c \cdot \sqrt{R}$  називають витратною характеристикою труби, або модулем витрати, вона являє собою витрату рідини через заданий живий переріз потоку за гідравлічного нахилу, що дорівнює одиниці. Розмірність витратної характеристики  $K$  така сама, як і витрати  $Q$ .

Витратна характеристика труби залежить від її діаметра й шорсткості стінки і може бути вирахована для труб різних діаметрів із різною шорсткістю поверхні (табл. 4.3).

Таблиця 4.3 – Витратні характеристики водопровідних труб  $K^2, \text{м}^6/\text{с}^2$

D, мм	Шорсткість, мм		
	$\Delta = 0,2$	$\Delta = 0,5$	$\Delta = 1,0$
75	0,001133	0,000863	0,000686
100	0,005162	0,003973	0,003187
125	0,016024	0,012469	0,009659
150	0,043370	0,034103	0,027627
175	0,098143	0,076840	0,062259
200	0,197200	0,155456	0,127142
250	0,634161	0,504082	0,415352
300	1,648925	1,414260	1,091313
400	7,406182	5,795040	4,974592
500	23,739375	19,257813	16,130625

Отже, маючи значення витратної характеристики, яку вибирають із таблиць залежно від діаметра, шорсткості й витрати, легко визначити гідравлічний нахил

$$I = \frac{Q^2}{K^2}. \quad (4.62)$$

Тоді втрати напору у водопровідних трубах будуть дорівнювати

$$\Delta h = I \cdot l. \quad (4.63)$$

### Запитання і завдання для самоконтролю

- 1 Наведіть основне рівняння рівномірного руху.
- 2 За якою формулою визначають втрати напору за довжиною потоку?
- 3 За якою формулою визначають місцеві втрати напору?
- 4 Які існують режими течії рідини?
- 5 Наведіть формулу і поясніть фізичний зміст числа Рейнольдса.
- 6 На якому законі ґрунтується теорія ламінарної течії рідини в трубі?
- 7 Наведіть закон розподілу швидкості по перерізу круглої труби за ламінарної течії.
- 8 За якою формулою визначають коефіцієнт гідравлічного тертя за ламінарної течії рідини?
- 9 Що означає термін «початкова ділянка ламінарного руху»?
- 10 Яким чином визначають осереднену місцеву швидкість за турбулентного руху?
- 11 Які дотичні напруження виникають у турбулентному потоці рідини?
- 12 Наведіть структуру турбулентного потоку в трубі.
- 13 Наведіть розподіл швидкостей по живому перерізу труби в умовах турбулентного режиму.
- 14 Яка відмінність між гідравлічно гладкими й шорсткими трубами?
- 15 Охарактеризуйте графік Нікурадзе.
- 16 У чому полягає відмінність між графіком Нікурадзе та Муріна?
- 17 Наведіть формули для визначення коефіцієнта Дарсі для всіх областей турбулентної зони.

## Розділ 5

### МІСЦЕВІ ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ ТА ВТРАТИ НАПОРУ. ОПІР ЗА ВІДНОСНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА Й РІДИНИ

#### 5.1 Класифікація місцевих опорів

Місцевими опорами називають будь-яку зміну живого перерізу потоку рідини або зміну напрямку її руху. Врахування місцевих опорів має велике значення під час гідрравлічних розрахунків так званих коротких трубопроводів, місцеві втрати напору в яких одного порядку з втратами напору за їх довжиною.

Місцеві опори в трубах і каналах зумовлені різними факторами. До них належать: різка зміна конфігурації потоку, течія зі зміною швидкості, поперечна циркуляція потоку, злиття потоків.

Розглянемо окремо кожний із цих факторів.

1 Різка зміна конфігурації потоку (рис. 5.1). За різкої зміни конфігурації живого перерізу або за різкого повороту потік обтікає кути, що утворилися внаслідок зміни напрямку стінок русла. У разі обтікання цих кутів за ними утворюються коловоротні зони, на обертальний рух рідини в яких витрачається енергія (напір).

Найбільші коловоротні зони виникають поряд із великими швидкостями транзитного потоку, що сприяють збільшенню інтенсивності закручування води в них. Це відбувається безпосередньо за місцевим опором.

Між транзитним потоком і коловоротними зонами виникають поверхні розділу (на рис. 5.1 показано штриховими лініями).

На поверхні розділу утворюються окремі вихори, які безперервно переміщуються. Течію в таких зонах називають *відривною*.

Відрив потоку відбувається також під час протікання рідини крізь різні фасонні частини – арматуру (вентилі, засувки, клапани, фільтри).

2 Під час течії рідини зі зменшенням швидкості на розширюваних ділянках (дифузори) тиск збільшується (рис. 5.2 а). Рух у разі розширення проходить від перерізу з меншим тиском до перерізу з більшим тиском. Цей

5 Місцеві гідравлічні опори та втрати напору. Опір за відносного руху твердого тіла й рідини протитиск утруднює поступальний рух частинок рідини, особливо біля стінок труби, де швидкості мінімальні.

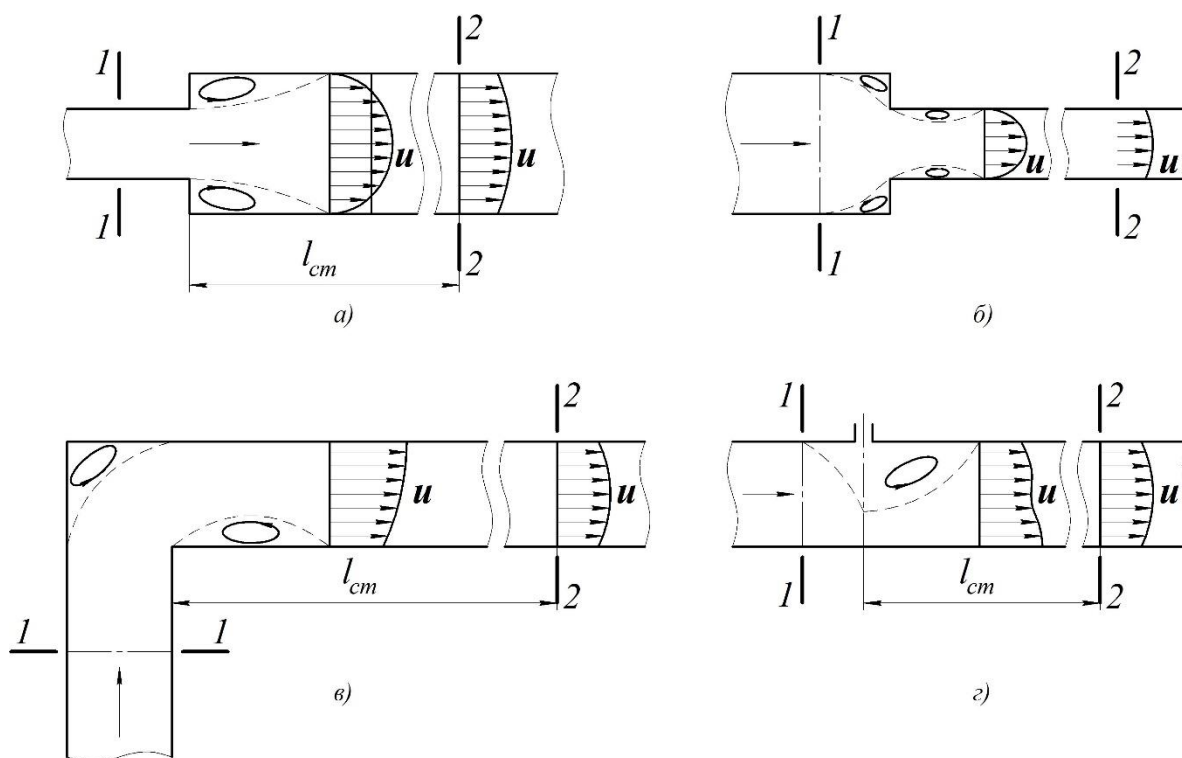


Рисунок 5.1 – Схеми різкої зміни конфігурації потоку

За кутів розширення  $\beta > 8-10^\circ$  частинки рідини біля стінок можуть зупинитися і навіть почати рухатися в протилежний бік, що призводить до відриву основного потоку від стінок й утворення коловоротних зон.

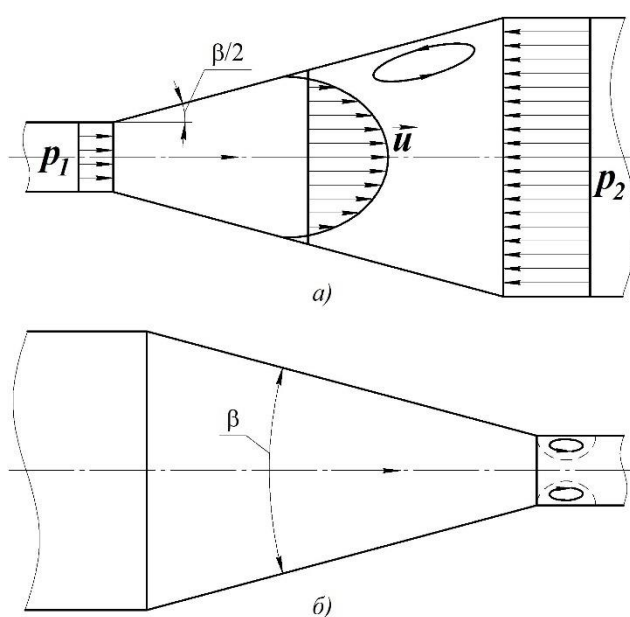


Рисунок 5.2 – Схема течії рідини в дифузори та конфузори

Під час руху на звужених ділянках (конфузорах) такі явища не відбуваються (рис. 5.2 б), тому що різниця тисків тут не перешкоджає руху, а сприяє йому, і втрати напору в конфузорах менші, ніж у дифузорах.

3 Поперечна циркуляція потоку (рис. 5.3). У разі плавного повороту труби або каналу виникають відцентрові сили, що збільшують тиск біля ввігнутої стінки труби і зменшують його біля опуклої. Внаслідок цього створюються умови для руху рідини в поперечному напрямі від області більшого тиску до області меншого тиску. Таке явище називають *поперечною циркуляцією*.

Після повороту рух стає поступально-обертальним. Поперечна циркуляція загасає на деякій відстані від повороту.

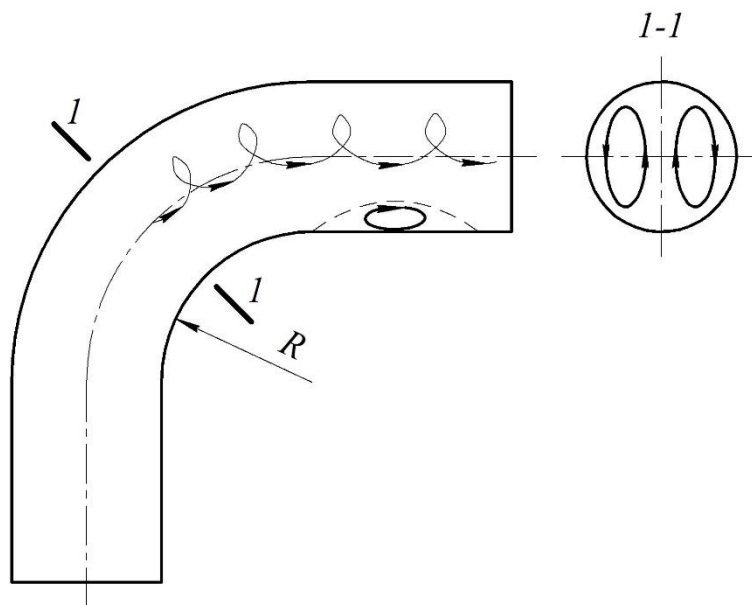


Рисунок 5.3 – Схема течії рідини в разі плавного повороту труби

4 Злиття потоків (рис. 5.4). У разі злиття двох потоків виникає поверхня розділу з різними швидкостями частинок з обох боків від неї.

Втрати енергії зумовлюються витратою її на переформування кінематичної структури потоку.

Для переформування кінематичної структури потоку після місцевих опорів, загасання поперечних циркуляцій і пульсацій швидкостей необхідна прямолінійна ділянка потоку, яку називають ділянкою стабілізації  $l_{ст}$  (рис. 5.1, 5.4). Втрати напору (енергії на стабілізацію потоку на цій ділянці входять до загальних місцевих втрат напору (енергії).



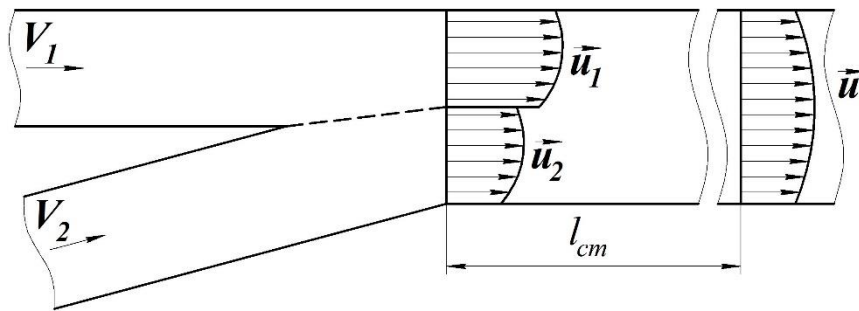


Рисунок 5.4 – Схема течії рідини в разі злиття потоків

Визначити загальну теоретичну залежність для місцевих втрат напору неможливо через велику їх різноманітність.

У 1840 р. Вейсбах запропонував визначати місцеві втрати напору за формулою

$$h_m = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad (5.1)$$

де  $\zeta$  – коефіцієнт місцевих опорів, який визначають за даними експериментів.

Швидкісний напір  $\frac{V^2}{2g}$  зазвичай обчислюють залежно від швидкості за місцевим опором.

Коефіцієнт у разі раптового звуження (див. рис. 5.1 б) можна визначити за приблизною формулою Ідельчика:

$$\zeta_{р.з.} = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right), \quad (5.2)$$

де  $\omega_1$  і  $\omega_2$  – відповідно площі живих перерізів до та після звуження потоку.

Якщо  $\omega_1$  набагато більша за  $\omega_2$  (тобто в разі втікання рідини в трубу з резервуара та відсутності закругленого вхідного кута), коефіцієнт опору

$$\zeta_{р. з} = \zeta_{вх} = 0,5.$$

## 5.2 Раптове розширення потоку

Як уже зазначалося, значення коефіцієнтів місцевих втрат здебільшого отримують із дослідів, на основі яких виводять емпіричні формули або будують графіки. Проте для раптового розширення потоку за турбулентної течії втрату напору можна досить точно визначити теоретично.

У разі раптового розширення русла (труби) (рис. 5.5) потік зривається з кута і розширюється не раптово, як русло, а поступово, причому в кільцевому просторі між потоком та стінкою труби утворюються вихори, що й є причиною втрат енергії. Як показують спостереження, відбувається безперервний обмін частинками рідини між основним потоком й завихреною його частиною. Крім того, основний вихор породжує інші, більш дрібні вихори, що виносяться потоком й розкидаються на ще дрібніші вихори. Таким чином, втрата енергії відбувається не лише в основному вихорі, а й по довжині наступної за ним ділянки потоку.

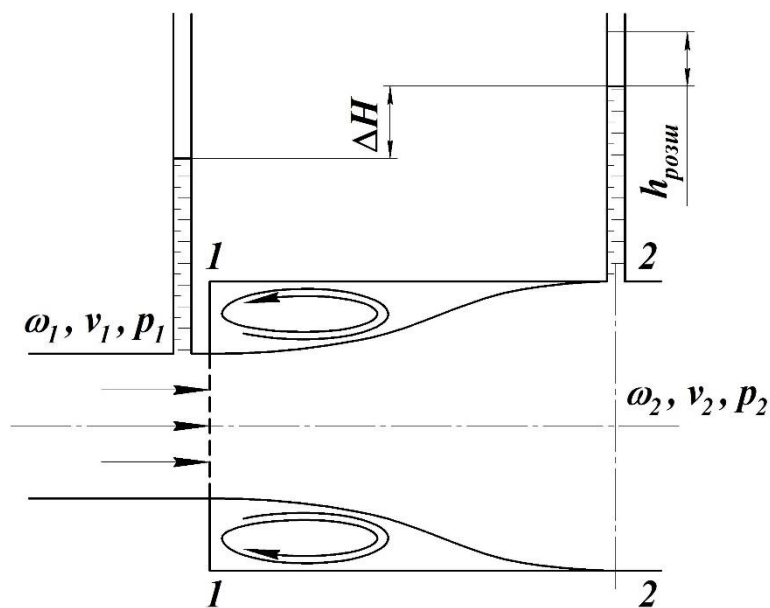


Рисунок 5.5 – Схема раптового розширення потоку

Розглянемо два перерізи горизонтального потоку: 1–1 у площині розширення труби, і 2–2 – в тому місці, де потік, розширившись, заповнив увесь переріз широкої труби. Оскільки потік між розглядуваними перерізами розширюється, то швидкість його зменшується, а тиск зростає. Тому другий п'езометр показує висоту, на  $\Delta H$  більшу, ніж перший. Але, якби втрат напору в

5 Місцеві гідравлічні опори та втрати напору. Опір за відносного руху твердого тіла й рідини

цьому місці не було, то другий п'езометр показав би висоту, більшу ще на  $\Delta h_{\text{розш}}$ . Ця висота і є місцева втрата напору на розширення.

Позначимо тиск, швидкість і площу потоку в перерізі 1–1 відповідно  $p_1, V_1$  і  $\omega_1$ , а в перерізі 2–2 – через  $p_2, V_2$  та  $\omega_2$ .

Перш ніж як скласти вихідні рівняння, приймемо три допущення:

1) розподіл швидкостей у перерізах 1–1 та 2–2 рівномірний, тобто  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , що зазвичай беруть під час турбулентного руху;

2) дотичні напруження на стінці труби між перерізами 1–1 та 2–2 дорівнюють нулю, тобто нехтуємо силою тертя, незначною порівняно із силами тиску;

3) тиск  $p_1$  у перерізі 1–1 діє по всій площі  $\omega_2$ , тому що труба хоч і розширилася, потік у перерізі 1–1 ще зберіг свій поперечний розмір, а отже, ні швидкість, ні тиск ще не змінилися.

Запишемо для перерізів 1–1 та 2–2 рівняння Бернуллі з урахуванням втрат напору  $h_{\text{розш}}$  на розширення потоку, беручи  $z_1 = z_2 = 0$ :

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{\text{розш}}. \quad (5.3)$$

Потім застосуємо теорему Ейлера про зміну кількості руху до фіксованого циліндричного об'єму, розміщеного між перерізами 1–1 та 2–2 і стінкою труби.

Згадаємо цю відому з теоретичної механіки теорему.

Для матеріального тіла масою  $m$ , що рухається зі швидкістю  $V$ , зміна кількості руху за час  $dt$  унаслідок дії сили  $F$  виражається векторним рівнянням:

$$m d\vec{V} = \vec{F} dt, \quad (5.4)$$

де  $m d\vec{V}$  – приріст кількості руху;

$\vec{F} dt$  – імпульс.

Далі визначимо рівнодійну зовнішніх сил, що діють на розглядуваний об'єм рідини в напрямку руху, тобто сил тиску.

Враховуючи, що площі основ циліндра зліва й справа однакові та дорівнюють  $\omega_2$ , а також припускаючи, що в перерізі 1–1 тиск  $p_1$  рівномірно розподілений по всій площі  $\omega_2$ , одержуємо рівнодійну силу, що дорівнює секундному імпульсу:

$$(p_1 - p_2) \cdot \omega_2. \quad (5.5)$$

Відповідну до цього імпульсу зміну кількості руху визначимо як різницю між секундною кількістю руху, який виноситься з розглядуваного об'єму рідини і тим, що заходить до нього.

У разі рівномірного розподілу швидкостей по перерізах ця різниця дорівнює

$$Q \cdot \rho \cdot (V_2 - V_1). \quad (5.6)$$

Прирівнюючи вирази (5.5) і (5.6), одержуємо таке:

$$(p_1 - p_2) \cdot \omega_2 = Q \cdot \rho \cdot (V_2 - V_1). \quad (5.7)$$

Поділимо одержане рівняння на  $\omega_2 \cdot \rho \cdot g$ , ураховуючи, що  $Q = V_2 \cdot \omega_2$ , і перетворимо праву частину рівняння:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{V_2}{g} \cdot (V_2 - V_1) = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{2 \cdot V_1 \cdot V_2}{2g} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}. \quad (5.8)$$

Згрупувавши члени цього рівняння, одержимо:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}. \quad (5.9)$$

Порівнюючи рівняння (5.9) з рівнянням (5.3), одержуємо

$$h_{\text{розш}} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}. \quad (5.10)$$

Тобто втрати напору в разі раптового розширення потоку рідини дорівнюють швидкісному напору, що визначається за різницею швидкостей. Це положення часто називають *теоремою Борда* на честь французького вченого, який у 1766 році вивів цю формулу.

Якщо враховувати, що згідно з рівнянням витрати

$$V_1 \cdot \omega_1 = V_2 \cdot \omega_2,$$

то одержаний результат можна записати у вигляді, що відповідає загальному способу вираження місцевих втрат:

$$h_{p. p} = \zeta_{p. p} \frac{V_2^2}{2g},$$

$$\zeta_{p. p} = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2. \quad (5.11)$$

Втрати напору в разі раптового розширення потоку рідини можна подати залежно від швидкісного напору до розширення:

$$h_{p. p} = \zeta_{p. p} \cdot \frac{V_1^2}{2g}, \quad (5.12)$$

$$\zeta_{p. p} = \left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2. \quad (5.13)$$

Якщо  $\omega_2$  набагато більше від  $\omega_1$  (наприклад, рідина витікає з труби в резервуар), то співвідношення  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  наближається до нуля, і в цьому разі  $\zeta_{p. p} = \xi_{вих} = 1$ .

Розглянута втрата напору (енергії) за раптового розширення потоку витрачається виключно на вихороутворення, що пов'язано з відривом потоку від стінок, тобто на підтримку безперервного обертального руху рідинних мас із постійним їх оновленням (обміном). Тому цей вид втрат енергії, пропорційний швидкості в другому степені, називають втратами на вихороутворення. У кінцевому підсумку вони витрачаються на роботу сил тертя, але не безпосередню, як у прямих трубах постійного перерізу, а через вихороутворення.

### 5.3 Коефіцієнт місцевого опору за поступового розширення

Трубу, що поступово розширюється, називають *дифузором*. Течія рідини в дифузорі супроводжується зменшенням швидкості та збільшенням тиску, а отже, перетворенням кінетичної енергії рідини на енергію тиску.

Повну втрату напору  $h_{\text{диф}}$  у дифузорі умовно розглянемо як суму двох складових:

$$h_{\text{диф}} = h_{\text{тер}} + h_{\text{розш}},$$

де  $h_{\text{тер}}$  і  $h_{\text{розш}}$  – втрати напору на тертя і розширення (вихороутворення).

Втрату напору на тертя можна приблизно підрахувати таким способом. Розглянемо круглий дифузор із прямолінійною твірною і кутом  $\beta$  біля вершини. Нехай радіус вхідного отвору дифузора дорівнює  $r_1$ , вихідного –  $r_2$  (рис. 5.6).

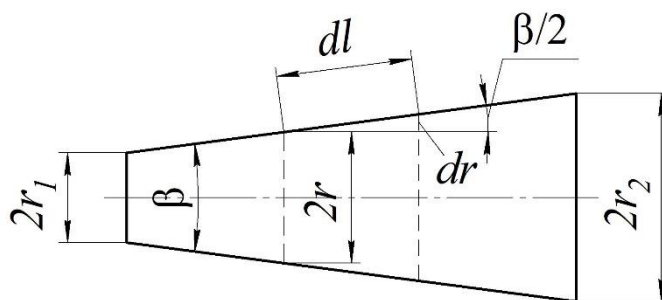


Рисунок 5.6 – Розрахункова схема дифузора

Оскільки радіус перерізу і швидкість течії рідини є змінними величинами вздовж дифузора, то необхідно взяти елементарний відрізок дифузора довжиною вздовж твірної  $dl$  і для нього виразити елементарну втрату напору на тертя за основною формулою:

$$dh_{\text{тер}} = \lambda \cdot \frac{dl}{2 \cdot r} \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad (5.14)$$

де  $V$  – середня швидкість у довільно взятому перерізі, радіус якого  $r$ ;  
 $\lambda$  – коефіцієнт гідравлічного опору.

З елементарного трикутника  $dl = \frac{dr}{\sin(\beta/2)}$ . На основі рівняння витрати можна записати

$$V = V_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^2, \quad (5.15)$$

де  $V_1$  – швидкість на початку дифузора.

Підставимо ці вирази у формулу для  $dh_{\text{тер}}$  і виконаємо інтегрування в межах від  $r_1$  до  $r_2$ , тобто вздовж усього дифузора, вважаючи коефіцієнт  $\lambda$  сталим:

$$dh_{\text{тер}} = \frac{dr}{2 \cdot r \cdot \sin(\beta/2)} \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^4 \cdot \frac{V_1^2}{2g}. \quad (5.16)$$

Звідси

$$h_{\text{тер}} = \frac{\lambda}{8 \cdot \sin(\beta/2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{V_1^2}{2g}. \quad (5.17)$$

де  $n = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$  – степінь розширення дифузора.

Втрати напору на розширення (вихороутворення) мають у дифузорі таку саму природу, як і в разі раптового розширення, але менші за значенням, тому їх виражають тією самою формулою, але з поправковим коефіцієнтом  $k$ , меншим за одиницю:

$$h_{\text{розш}} = k \cdot \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = k \cdot \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \cdot \frac{V_1^2}{2g} = k \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{V_1^2}{2g}. \quad (5.18)$$

Оскільки в дифузорі порівняно з раптовим розширенням гальмування потоку ніби пом'якшується, коефіцієнт  $k$  називають коефіцієнтом пом'якшення. Його числове значення для дифузорові із кутами конусності  $\beta = 5-20^\circ$  можна визначити за наближеною формулою:

$$k = \sin \beta. \quad (5.19)$$

Ураховуючи одержані формули (5.18) і (5.19), вираз (5.17) можна переписати у вигляді

$$k = \left[ \frac{\lambda}{8 \cdot \sin(\beta/2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + k \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 \right] \cdot \frac{V_1^2}{2g} = \zeta_{\text{диф}} \cdot \frac{V_1^2}{2g}, \quad (5.20)$$

а коефіцієнт опору дифузора можна виразити формулою

$$\zeta_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \cdot \sin(\beta/2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \sin \beta \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2. \quad (5.21)$$

Цей вираз показує, що коефіцієнт  $\zeta_{\text{диф}}$  залежить від кута  $\beta$ , коефіцієнта  $\lambda$  та степеня розширення  $n$ .

Коефіцієнт місцевого опору для дифузорові можна визначити за такою формулою:

$$\zeta = k \cdot \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2, \quad (5.22)$$

де  $k$  залежить від кута конусності (див. табл. 5.1).

Таблиця 5.1 – Значення коефіцієнта  $k$  для перехідних розширюваних конусів

$\alpha$ , град.	$\alpha$	$\alpha$ , град.	$\alpha$	$\beta$ , град.	$k$
5	0,13	40	0,90	90	1,07
10	0,17	50	1,03	100	1,06
15	0,26	60	1,12	120	1,05
20	0,41	70	1,13	160	1,02
30	0,71	80	1,10		

#### 5.4 Коефіцієнт місцевого опору за поступового звуження

Поступове звуження труби, тобто кінечно збіжна труба, називають *конфузором* (рис. 5.2 б). Течія рідини в конфузорові супроводжується збільшенням швидкості та зниженням тиску. Оскільки тиск рідини на початку



конфузора вищий, ніж у кінці, причиною для вихороутворення і зривів потоку (як і в дифузорі) є тертя. У зв'язку з цим опір конфузора завжди менший, ніж опір такого самого дифузора.

Втрату напору на тертя в конфузорі можна підрахувати так само, як і для дифузора, тобто спочатку виразити втрату для елементарного відрізка, а потім виконати інтегрування. У результаті одержимо таку формулу:

$$h_{\text{тер}} = \frac{\lambda}{8 \cdot \sin(\beta/2)} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2} \cdot \frac{V_1^2}{2g} \quad (5.23)$$

Коефіцієнт опору визначають за формулою

$$\zeta_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \cdot \sin(\beta/2)} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2}, \quad (5.24)$$

де  $n = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  – степінь стиску конфузора.

### 5.5 Стабілізація потоку за місцевими опорами та їх взаємний вплив

Кожний місцевий опір деформує потік, збільшує пульсацію і перерозподіляє осереднені швидкості по перерізу. Зазвичай коефіцієнт кінетичної енергії  $\alpha$  за місцевим опором більший, ніж під час рівномірного стабілізованого руху. Розглянемо процес стабілізації потоку на прикладі протікання рідини крізь засувку, яка не повністю відкрита (рис. 5.7). Безпосередньо за місцевим опором епюра швидкостей може бути як завгодно деформована, іноді можуть виникати навіть зворотні течії.

Далі в разі збільшення відстані від місцевого опору епюра швидкостей буде змінювати свою форму. За рахунок взаємного впливу під час перемішування частинок із великою й малою швидкостями останні будуть вирівнюватися, а епюра швидкостей буде наближатися до прямокутника з коефіцієнтом кінетичної енергії  $\alpha = 1$ .

Під час подальшого руху рідини під впливом сил тертя на стінках труби епюра швидкостей буде поступово витягуватися і на деякій відстані набере форми, що відповідає стабільному руху ( $\alpha = 1,08-1,1$ ).

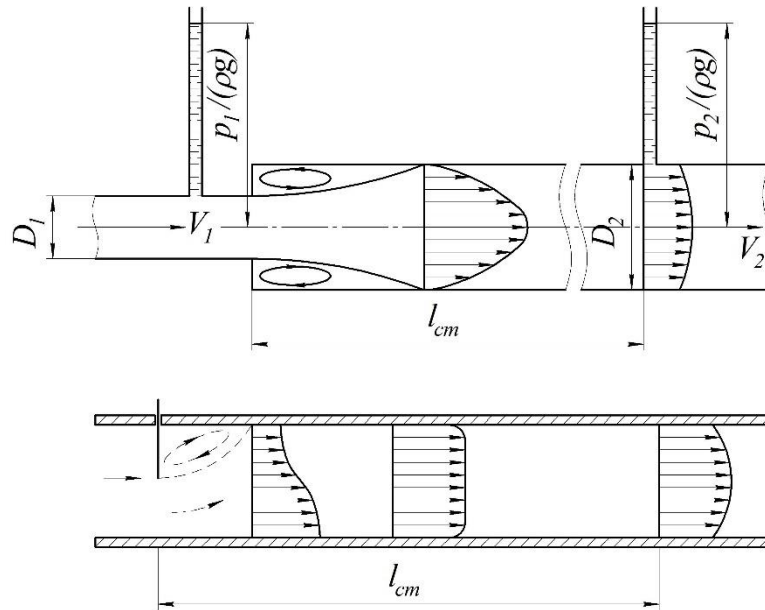


Рисунок 5.7 – Схема стабілізації потоку за місцевим опором

Довжина ділянки стабілізації  $l_{ст}$  залежить від коефіцієнта місцевого опору  $\zeta$ , гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda_{ст}$  за стабілізованого руху, діаметра труби  $D$ .

Відносну довжину ділянки стабілізації можна визначити за графіком  $\frac{l_{ст}}{D} = f(\lambda_{ст}, \zeta)$  (рис. 5.8).

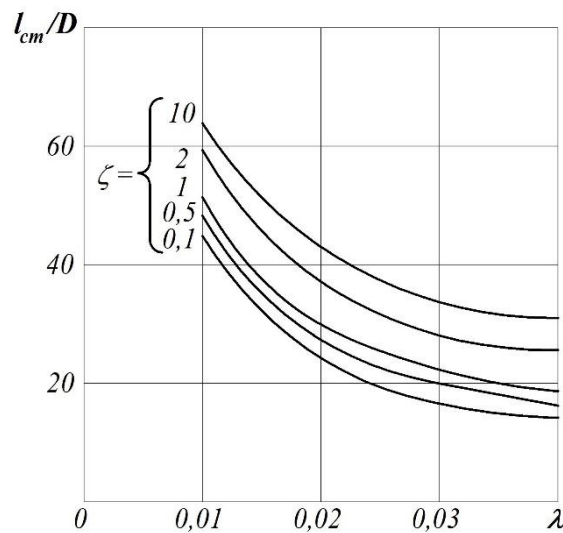


Рисунок 5.8 – Відносна довжина ділянки стабілізації

Якщо в трубі є кілька місцевих опорів, то втрати напору в них потрібно додавати. Проте, якщо відстані між опорами відносно невеликі, загальні втрати напору можуть відрізнятися від суми втрат на кожному з них.

Це можна пояснити тим, що потік після першого місцевого опору не встигає стабілізуватися до другого. Якщо довжина труби між цими опорами  $l_{тр}$  менша від довжини ділянки стабілізації, то втрати напору на першому опорі виявляються неповністю.

Коефіцієнт такого місцевого опору можна обчислити за формулою

$$\zeta_i = \beta \cdot \zeta, \quad (5.25)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт зменшення місцевого опору, який визначають за графіком (рис. 5.9);

$\zeta$  – коефіцієнт місцевого опору.

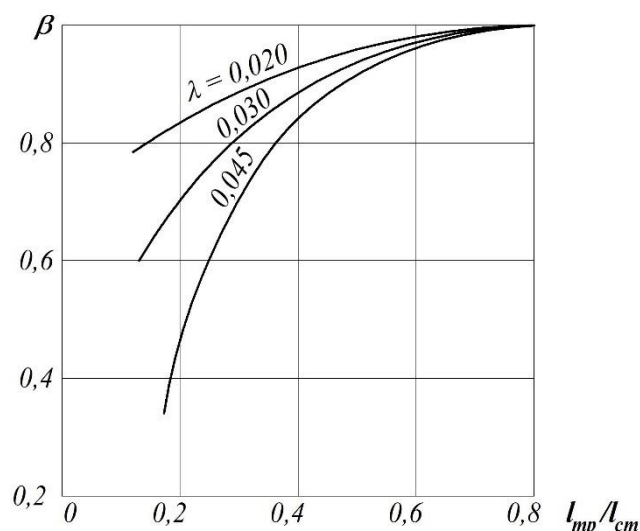


Рисунок 5.9 – Графік для визначення коефіцієнта зменшення місцевого опору

Формулу (5.25) можна застосувати за  $\frac{l_{тр}}{l_{ст}} = 0,15-1,0$ . Наведені вище рекомендації стосуються розвиненого турбулентного руху з великими числами Рейнольдса, тобто руху за незначного впливу в'язкості на коефіцієнти місцевих опорів. За малих чисел Рейнольдса на значення місцевих опорів (як і на величину гідравлічного коефіцієнта тертя) впливають також сили в'язкісного тертя, що враховано формулою Альтшуля:

$$\zeta = \frac{B}{Re} + \zeta_{\text{КВ}},$$

де  $B$  – коефіцієнт, який визначають для різних місцевих опорів за таблицею 5.2;  $\zeta_{\text{КВ}}$  – коефіцієнт розглядуваного місцевого опору.

Таблиця 5.2 – Коефіцієнти місцевих опорів  $\zeta_{\text{КВ}}$  і коефіцієнти  $B$ , що враховують вплив числа Рейнольдса

Вид опору	$\zeta_{\text{КВ}}$	$B$
Пробковий кран	0,4–1,5	150
Вентиль	2,5–6,0	900–3000
Засувка, повністю відкрита	0,15	75
Вхід із резервуара в трубу	0,5	30
Вихід із труби в резервуар	1	30
Вхід у трубу зі сіткою	6	–
Те саме, з оборотним клапаном	10	–
Різкий поворот труби:		
на кут 30 °	0,155	–
на кут 45 °	0,348	–
на кут 60 °	0,555	–
на кут 90 °	1,190	400
Плавний поворот труби на кут $\varphi$ °:		
з радіусом повороту $R_n = 1,5D$	$0,45 \frac{\varphi}{90}$	180
з радіусом повороту $R_n = 2,5D$	$0,42 \frac{\varphi}{90}$	180

### 5.6 Опір за відносного руху твердого тіла та рідини

Під час вивчення відносного руху твердого тіла й рідини розглядають два якісно подібних випадки: рух тіла в рідині, що не рухається, або обтікання нерухомого тіла потоком рідини. Ці випадки належать до зовнішньої задачі гідрогазодинаміки, основою якої є визначення сили опору рідини руху тіла або сили тиску рідини на тіло.

Опір рідини руху тіла  $F$  можна подати як суму опорів тертя  $F_{\text{тер}}$  і тиску  $F_{\text{тис}}$ :

$$F = F_{\text{тер}} + F_{\text{тис}} \quad (5.26)$$

Опір тертя в чистому вигляді можна подати як опір тонкої пластини, вставленої вздовж напрямку руху потоку (рис. 5.10). Опір тиску можна визначити розглядаючи опір такої самої пластини, вставленої нормально до напрямку руху потоку (рис. 5.11). Звичайно діють обидва види опорів, хоча один може переважати інший.

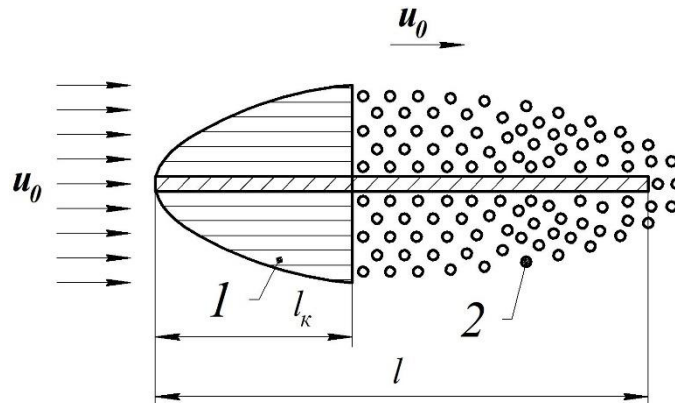


Рисунок 5.10 – Схема для визначення опору тертя тонкої пластини

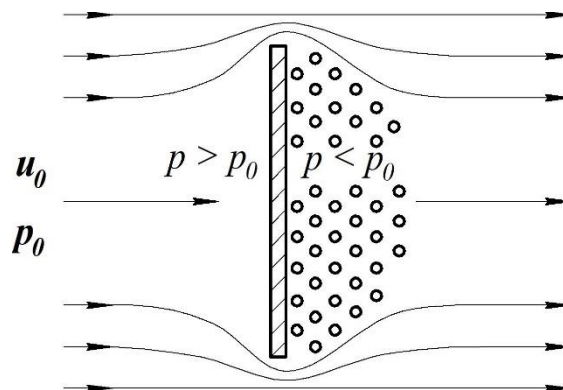


Рисунок 5.11 – Схема для визначення опору тиску тонкої пластини

### 5.6.1 Опір тертя

У разі встановлення пластинки паралельно лініям течії вздовж неї утворюється примежовий шар рідини, в якому кінематика руху рідини відрізняється від кінематики руху решти потоку. Біля самої пластини швидкість наближається до нуля, а з віддаленням від неї поступово збільшується до швидкості незбуреного потоку. Практично вважають, що границя примежового

шару проходить там, де швидкість  $u = 0,99u_0$  ( $u_0$  – швидкість незбуреного потоку).

Примежовий шар починається біля переднього краю пластини і поступово розширюється зі збільшенням відстані від цього краю.

Примежовий шар може бути ламінарним чи турбулентним. Ламінарний примежовий шар 1 (рис. 5.10) установлюється найчастіше у передній частині пластини. На деякій відстані  $l_k$  від переднього краю пластини ламінарний примежовий шар переходить у турбулентний 2.

Критерій переходу визначають за числом Рейнольдса:

$$Re_k = \frac{u_0 \cdot l_k}{\nu} = (3 - 4,85) \cdot 10^5. \quad (5.27)$$

Якщо довжина пластини  $l < l_k$ , а отже,  $Re = \frac{u_0 \cdot l}{\nu} < Re_k$ , то весь примежовий шар буде ламінарним. За великих чисел Рейнольдса частина примежового шару буде ламінарною, а частина – турбулентною.

Опір тертя можна визначити за формулою

$$F_{\text{тер}} = C_{\text{тер}} \cdot \omega \cdot \rho \cdot \frac{u_0^2}{2}, \quad (5.28)$$

де  $C_{\text{тер}}$  – коефіцієнт опору тертя;

$\omega$  – площа обтічної поверхні тіла (в цьому разі площа пластини з обох боків).

У разі ламінарного примежового шару за Блазіусом

$$C_{\text{тер}} = \frac{1,33}{\sqrt{Re}}. \quad (5.29)$$

У разі турбулентного примежового шару коефіцієнт опору можна визначити за формулою Альтшуля:

$$C_{\text{тер}} = 0,03 \cdot \left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{l} + \frac{83}{Re} \right)^{0,2}, \quad (5.30)$$

де  $\Delta_{\text{екв}}$  – еквівалентна шорсткість.

5 Місцеві гідравлічні опори та втрати напору. Опір за відносного руху твердого тіла й рідини

За малих шорсткостей і швидкостей руху води  $\left(\frac{\Delta_{\text{екв}}}{l} \ll \frac{83}{Re}\right)$  ця формула перетворюється на *формулу Кармана*:

$$C_{\text{тер}} = 0,072 \cdot Re^{-0,2}, \quad (5.31)$$

а для великих швидкостей і значних шорсткостей

$$C_{\text{тер}} = 0,03 \cdot \left(\frac{\Delta_{\text{екв}}}{l}\right)^{0,2}. \quad (5.32)$$

### 5.6.2 Опір тиску

Якщо пластина встановлена нормально до напрямку руху потоку (рис. 5.11), то струминки рідини чинять додатковий тиск на її лобову поверхню. Зі зворотного боку пластини струмінь відривається від неї і виникає коловоротна область зі зниженим тиском. Унаслідок дії збільшеного тиску з лобового боку і зниження зі зворотного боку виникає опір тиску, спрямований назустріч потоку.

Опір тиску можна визначити за формулою, запропонованою Ньютоном:

$$F_{\text{тис}} = C_{\text{тис}} \cdot \omega \cdot \rho \cdot \frac{u_0^2}{2}, \quad (5.33)$$

де  $C_{\text{тис}}$  – коефіцієнт опору тиску, що залежить від форми обтічного тіла і числа Рейнольдса;

$\omega$  – площа міделевого перерізу, тобто проєкція тіла на площину, нормальну до напрямку руху тіла (або рідини);

$\rho$  – густина рідини;

$u_0$  – швидкість цього руху.

Число Рейнольдса істотно впливає на характер обтікання.

У разі обтікання кулі за дуже малих чисел  $Re = \frac{u_0 \cdot d}{\nu} < 1$  ( $d$  – еквівалентний діаметр частинки) коефіцієнт опору визначають за теоретичною формулою Стокса:

$$C_{\text{тис}} = \frac{24}{Re}, \quad (5.34)$$

де  $C_{\text{тис}}$  – коефіцієнт опору тиску.

За великих чисел Рейнольдса коефіцієнт опору визначають за дослідними даними. Деякі з них наведено в таблиці 5.3.

Характерною особливістю обтікання плавно окреслених тіл (кулі, циліндра) є різке зменшення коефіцієнтів опору за значного збільшення чисел Рейнольдса (рис. 5.12, табл. 5.3). Дослідження свідчать, що в цьому разі відбуваються відрив ламінарного примежового шару й утворення вихрової доріжки (рис. 5.12) за числа Рейнольдса  $Re = 250$ .

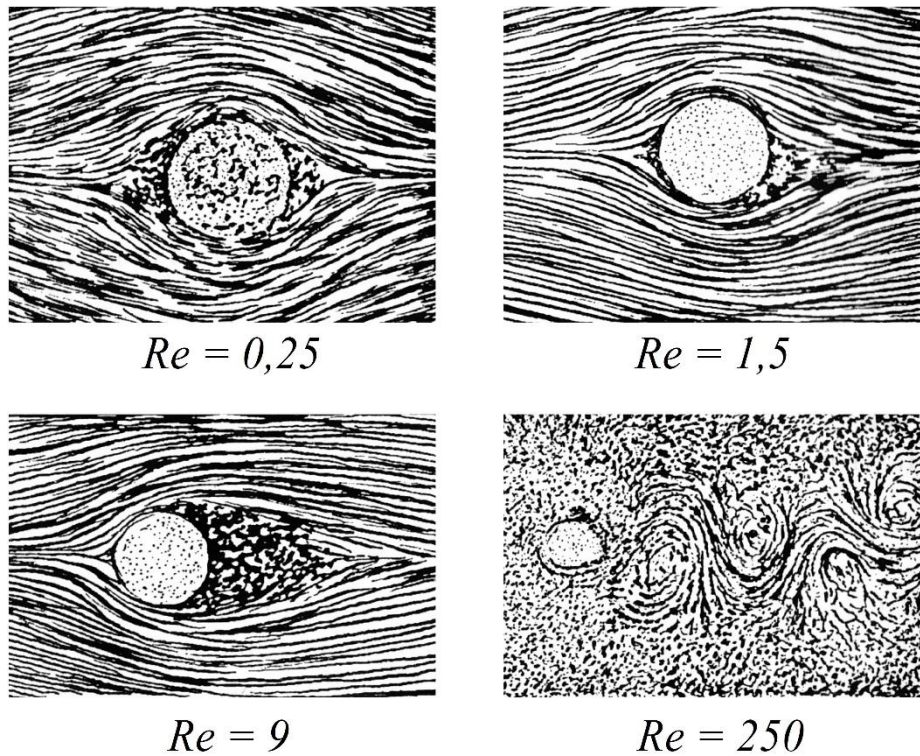


Рисунок 5.12 – Обтікання плавно окресленого тіла – кулі

Таблиця 5.3 – Коефіцієнти опору тиску деяких тіл

Форма тіла	$C_{\text{тис}}$	$Re$
Куля	0,47	1 000–300 000
	0,22	300 000
Круглий циліндр нескінченної довжини	1,2	200 000
	0,3	500 000
Куб	1,2	–



### 5.6.3 Падіння твердих частинок у рідині

Залежності з визначення сили опору руху тіл у рідині набувають подальшого розвитку під час розглядання умов пересування твердих частинок у рідині. Це пов'язано з розв'язуванням таких практичних задач, як відстоювання рідини, розрахунки відстійників, гідро- та пневмотранспорту.

Розглянемо падіння твердих частинок у рідині. Умовно вважатимемо, що тверда частинка має форму кулі з діаметром  $d$  (рис. 5.13). Падіння її відбувається під дією сили тяжіння:

$$G = (\rho_T - \rho_p) \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{6}, \quad (5.35)$$

де  $\rho_T$  – густина твердої частинки;

$\rho_p$  – густина рідини;

$g$  – прискорення вільного падіння.

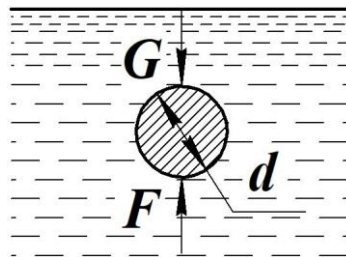


Рисунок 5.13 – Схема падіння кулі в рідині

Дослідження свідчать, що падіння частинки відбувається рівномірно зі швидкістю  $V_{Г.к}$ , яку за температури  $10^\circ\text{C}$  називають *гідравлічною крупністю частинки*. Під час падіння частинки виникає опір, який з урахуванням виразу (5.33) визначають за формулою

$$F = C_{\text{тис}} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \rho_p \cdot \frac{V_{Г.к}^2}{2}. \quad (5.36)$$

Оскільки падіння відбувається рівномірно, то сили тяжіння та опору  $G = F$ , тобто

$$(\rho_T - \rho_p) \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{6} = C_{\text{тис}} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \rho_p \cdot \frac{V_{\text{Г.к}}^2}{2}. \quad (5.37)$$

Звідси гідравлічна крупність

$$V_{\text{Г.к}} = \sqrt{\frac{4 \cdot (\rho_T - \rho_p) \cdot g \cdot d}{3 \cdot \rho_p \cdot C_{\text{тис}}}}. \quad (5.38)$$

За  $Re > 1$  коефіцієнт опору залежить від числа Рейнольдса і від форми частинки. На рисунку 5.14 наведено дослідні дані О. П. Зегжда для піску та гравію і Л. І. Седова для куль.

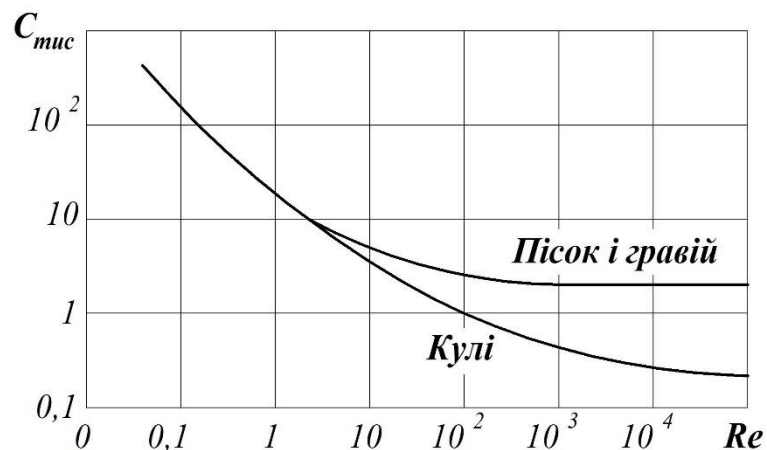


Рисунок 5.14 – Залежність коефіцієнтів тиску  $C_{\text{тис}}$  від числа Рейнольдса

На графіку продемонстровано, що для частинок неправильної форми коефіцієнт опору є більшим, ніж для куль. За великих чисел Рейнольдса значення коефіцієнта опору не залежать від  $Re$  (наприклад, для піску і гравію за  $Re \geq 240$ ).

За чисел  $Re = \frac{V_{\text{Г.к}} \cdot d}{\nu} \leq 1$  коефіцієнт опору тиску визначають за теоретичною формулою Стокса (5.34).

Тоді

$$V_{\text{Г.к}} = \frac{\rho_T - \rho_p}{18 \cdot \mu} \cdot g \cdot d^2, \quad (5.39)$$

де  $\mu = \rho_p \cdot \nu$  – динамічна в'язкість рідини.

**Запитання і завдання для самоконтролю**

- 1 Які фактори зумовлюють місцеві гідравлічні опори?
- 2 Наведіть теорему Борда для визначення втрат напору за раптового розширення.
- 3 Що означає термін «стабілізація потоку за місцевими опорами»?
- 4 Наведіть складові опору руху твердого тіла в рідині.
- 5 Як визначають опір тертя?
- 6 Як визначають опір тиску?
- 7 Що означає термін «гідравлічна крупність частинок»?

## Розділ 6

### ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПРОВІДІВ

#### 6.1 Призначення та класифікація трубопроводів

Трубопроводи є гідротехнічними спорудами, якими транспортуються різні рідини та гази на великі й малі відстані. Використовують трубопроводи в апаратах, гідравлічних системах, а магістральними трубопроводами транспортують воду, нафту, нафтопродукти, гази на великі відстані. Останні є складними гідравлічними спорудами на сотні кілометрів і мають зазвичай велику пропускну здатність.

Під час гідравлічних розрахунків залежно від геометричної конфігурації потрібно розрізняти такі трубопроводи: прості та складні, короткі й довгі, тупикові та замкнені, з транзитною й шляховою витратою.

Простим трубопроводом називають трубопровід постійного поперечного перерізу, що не має розгалужень. Складний трубопровід виконують із труб різних діаметрів або він має відводи та розгалуження. Складні трубопроводи поділяють на такі основні види:

а) паралельно сполучені, що мають дві та більше паралельних віток (рис. 6.1 а);

б) послідовно сполучені, змонтовані з ділянок різних діаметрів (рис. 6.1 б);

в) розгалужені (тупикові), в яких рідина з магістралі подається в бокові відводи (рис. 6.1 в);

г) кільцеві (замкнені), що являють собою замкнені гідравлічні мережі, якими в задану точку рідина подається по двох і більше лініях (рис. 6.1 г).

Залежно від співвідношення розміру втрат напору на місцеві опори і по довжині розрізняють довгі й короткі трубопроводи.

Короткими називають трубопроводи, в яких втрати напору в місцевих опорах близькі до втрат по довжині, тобто мають однаковий порядок. Під час гідравлічного розрахунку таких трубопроводів ураховують обидва види втрат напору і додають їх. Прикладами коротких трубопроводів можуть бути

всмоктувальні лінії насосів, територіальні трубопроводи нафтобаз, насосних станцій та ін.

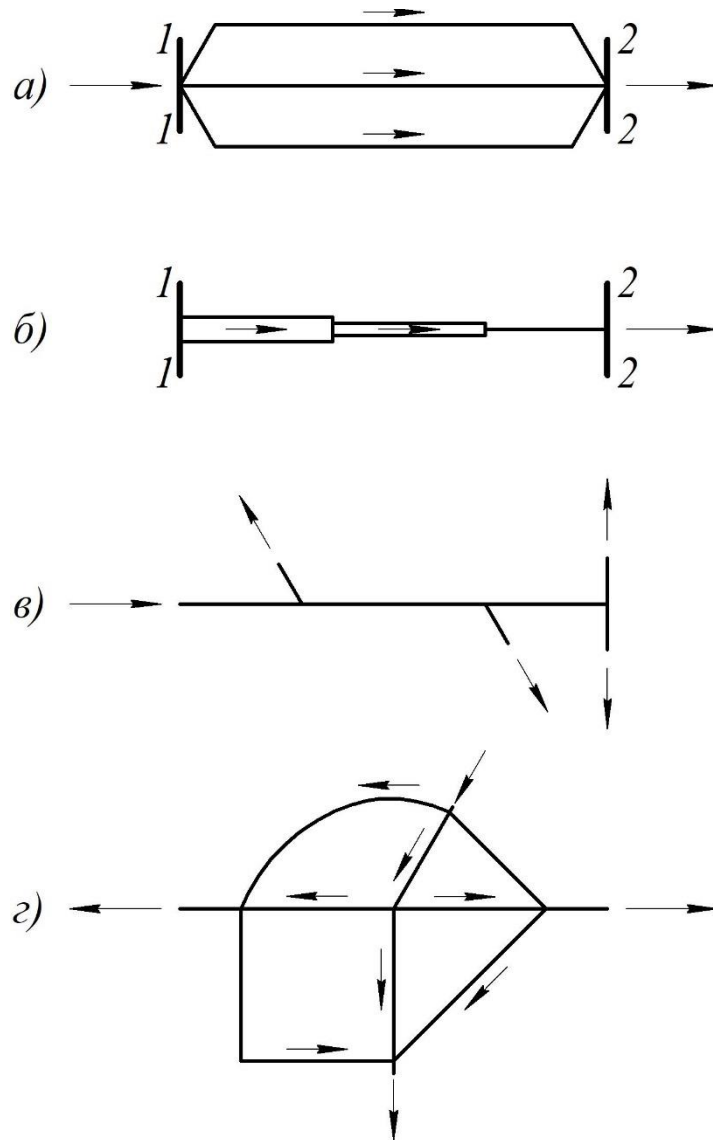


Рисунок 6.1 – Схеми складних трубопроводів

Довгими є трубопроводи, в яких втрати напору в місцевих опорах становлять 5–8 % від втрат напору по довжині. Під час розрахунку таких трубопроводів втрати напору в місцевих опорах не обчислюють, а враховують відповідним коефіцієнтом  $\alpha$ :

$$h = \alpha \cdot h_l, \quad (6.1)$$

де  $h$  – сумарні втрати напору;

$h_l$  – втрати напору на тертя по трубопроводу;

$\alpha = 1,05$ – $1,08$

Трубопроводи можуть бути з транзитною витратою, коли витрата рідини по всій довжині трубопроводу залишається постійною, і зі шляховою втратою, коли витрата по довжині змінна внаслідок відбору рідини або підкачування її в окремих точках трубопроводу.

Розрізняють також трубопроводи напірні та безнапірні. У напірних трубопроводах рідина рухається за надлишкового тиску й повністю заповнює весь поперечний переріз. Безнапірні трубопроводи працюють неповним перерізом і характеризуються наявністю вільної поверхні, тиск над якою атмосферний або менший від нього.

Кожний з вищеперелічених трубопроводів має свої особливості під час гідравлічного розрахунку.

Якою б не була трубопровідна система, її можна розбити на окремі ділянки так, що кожна з них окремо буде простим трубопроводом. Тому в основу гідравлічного розрахунку складних трубопроводів покладена методика розрахунку простого трубопроводу.

## 6.2 Розрахунок коротких трубопроводів

### 6.2.1 Всмоктувальна лінія насоса

Мета розрахунку – визначення висоти всмоктування насоса  $h_{вс}$  (рис. 6.2). Для розрахунку  $h_{вс}$  беремо перерізи на поверхні рідини в резервуарі 1–1 і перед входом у насос 2–2. Площина порівняння 0'–0' проходить через переріз 1–1.

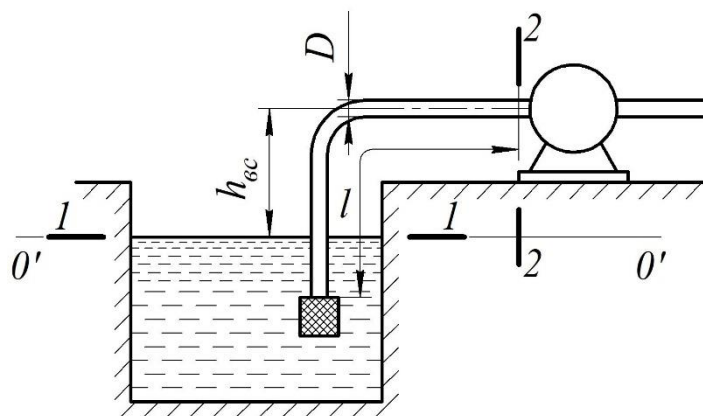


Рисунок 6.2 – Всмоктувальна лінія насоса

Складаємо рівняння Бернуллі для перерізів 1–1 і 2–2 з урахуванням усіх втрат напору:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2g} + \sum h_m + \sum h_l.$$

У цьому разі

$$p_1 = p_{ат}, \quad z_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad z_2 = h_{вс}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1.0, \quad V_2 = \frac{Q}{\omega} \quad \omega = \frac{\pi \cdot D^2}{4}.$$

З урахуванням цього рівняння Бернуллі набирає вигляду

$$\frac{p_{ат}}{\rho \cdot g} = h_{вс} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2g} + \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V_2^2}{2g} + \sum \zeta \cdot \frac{V_2^2}{2g}.$$

Висота всмоктування насоса

$$h_{вс} = \frac{p_{ат} - p_2}{\rho \cdot g} - \frac{V_2^2}{2g} \left( 1 + \lambda \cdot \frac{l}{D} + \sum \zeta \right). \quad (6.2)$$

Оскільки  $\frac{p_{ат} - p_2}{\rho \cdot g} = h_{вак}$ , то висота всмоктування насоса

$$h_{вс} = h_{вак} - \frac{V_2^2}{2g} \left( 1 + \lambda \cdot \frac{l}{D} + \sum \zeta \right). \quad (6.3)$$

Це рівняння показує, що висота всмоктування завжди менша, ніж вакуумметрична висота (10 м), тому що глибина вакууму витрачається на створення швидкісного напору  $\frac{V_2^2}{2g}$  (тобто на створення руху рідини), а також на подолання гідравлічних опорів. Для надійної роботи насосів, щоб запобігти переходу води в пароподібний стан за низьких тисків, частіше беруть  $h_{вак} < 6-7$  м. Тому гранична висота всмоктування насоса не повинна перевищувати 4–6 м.

6.2.2 Напірний резервуар із трубопроводом, що складається з двох ділянок різного перерізу

На рисунку 6.3 наведено напірний резервуар із трубопроводом, що складається з двох ділянок різного перерізу.

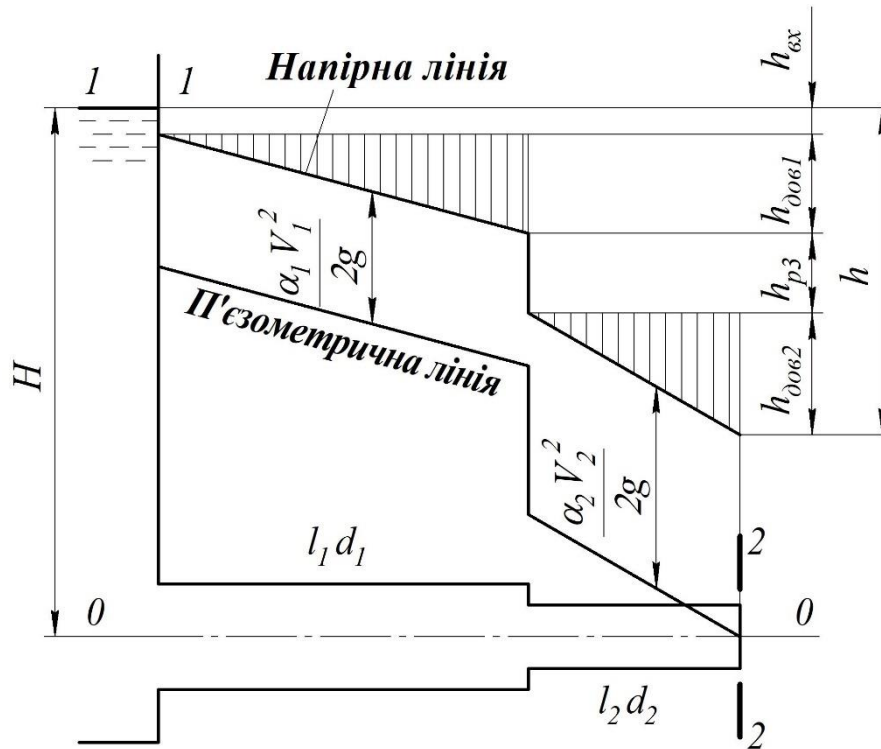


Рисунок 6.3 – Схема до розрахунку короткого трубопроводу

Позначимо  $H$  – напір у резервуарі;  $l_1$  та  $l_2$  – довжини трубопроводів;  $d_1$  та  $d_2$  – діаметри трубопроводів. Складемо рівняння Бернуллі для перерізів 1–1 та 2–2 відносно площини порівнянь 0–0:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2g} + h.$$

Для перерізу 1–1:  $z_1 = H$ ,  $p_1 = p_{ат}$ ,  $V_1 = 0$  – швидкість 1 перерізі 1–1.

Для перерізу 2–2:  $z_2 = 0$ ,  $p_2 = p_{ат}$ .

Виконавши відповідні підстановки в рівняння Бернуллі, одержимо:

$$H + \frac{p_{ат}}{\rho \cdot g} = \frac{p_{ат}}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2g} + h,$$



тобто

$$H = \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2g} + h, \quad (6.4)$$

де  $V_2$  – середня швидкість рідини в трубопроводі 2.

Втрати напору в трубопроводах 1 і 2 складаються з місцевих втрат та втрат за довжиною:

$$h = h_m + h_l.$$

Втрати напору за довжиною в кожному трубопроводі визначають за формулою Дарсі – Вейсбаха:

$$h_l = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

Місцеві втрати напору в трубопроводі 1 в нашому випадку це втрати на вхід в трубу

$$h_{m1} = \zeta_{вх} \cdot \frac{V_1^2}{2g}, \quad (6.5)$$

де  $\zeta_{вх} = 0,5$  – коефіцієнт опору на вході в трубу.

Місцеві втрати напору в трубопроводі 2 в нашому випадку – це втрати на раптове звуження потоку. Коефіцієнт втрат на раптове звуження потоку визначають за формулою Ідельчика:

$$\zeta_{р. з.} = 0,5 \left( 1 - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right).$$

Сумарні втрати напору під час руху рідини від перерізу 1–1 до перерізу 2–2 становлять

$$h_{\Sigma} = \left( \zeta_{\text{вх}} + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \right) \cdot \frac{V_1^2}{2g} + \left( \zeta_{\text{п.з.}} + \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \right) \cdot \frac{V_2^2}{2g}, \quad (6.6)$$

де  $V_1$  – середня швидкість рідини в трубопроводі 1.

Використавши рівняння нерозривності  $V_1 \cdot \omega_1 = V_2 \cdot \omega_2$ , визначимо  $V_1$ :

$$V_1 = V_2 \cdot \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right),$$

де  $\omega_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4}$ ,  $\omega_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}$  – площі живих перерізів трубопроводів 1 і 2.

Тоді

$$V_1 = V_2 \cdot \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2.$$

Підставляючи в рівняння (6.4) та спрощуючи, одержуємо

$$H = \left[ \alpha_2 + \left( \zeta_{\text{вх}} + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \right) \cdot \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 + \left( \zeta_{\text{п.з.}} + \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \right) \right] \cdot \frac{V_2^2}{2g}. \quad (6.7)$$

Звідси

$$V_2 = \mu_{\text{сист}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}. \quad (6.8)$$

Витрата  $Q = V_2 \cdot \omega_2$ , тобто

$$Q = \mu_{\text{сист}} \cdot \omega_2 \sqrt{2 \cdot g \cdot H}, \quad (6.9)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт витрати системи,

$$\mu_{\text{сист}} = \frac{1}{\left[ \alpha_2 + \left( \zeta_{\text{вх}} + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \right) \cdot \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 + \left( \zeta_{\text{п.з.}} + \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \right) \right]}.$$

Ураховуючи всі втрати напору послідовно, можна побудувати напірну та п'езометричну лінії (рис. 6.3).

## 6.2.3 Сифонний трубопровід

Сифонним трубопроводом називають трубопровід, що працює в умовах вакууму (рис. 6.4). Частина такого трубопроводу розміщена вище за відмітки водоймища *A* і резервуара *B*. Особливістю розрахунку є необхідність перевірки величини вакууму в найвищій точці сифона. Проведемо площину порівняння  $0' - 0'$  на поверхні резервуара *B* і запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 та 2-2:

$$H + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho \cdot g} = H + h + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha \cdot V^2}{2g} + \left( \lambda \cdot \frac{l}{D} + \sum_1^2 \zeta \right) \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad (6.10)$$

де  $h$  – перевищення найвищої точки сифона над поверхнею водоймища *A*;

$l$  – відстань цієї точки від початку сифона;

$\sum_1^2 \zeta$  – сума коефіцієнтів місцевих опорів від початку трубопроводу до перерізу 2-2.

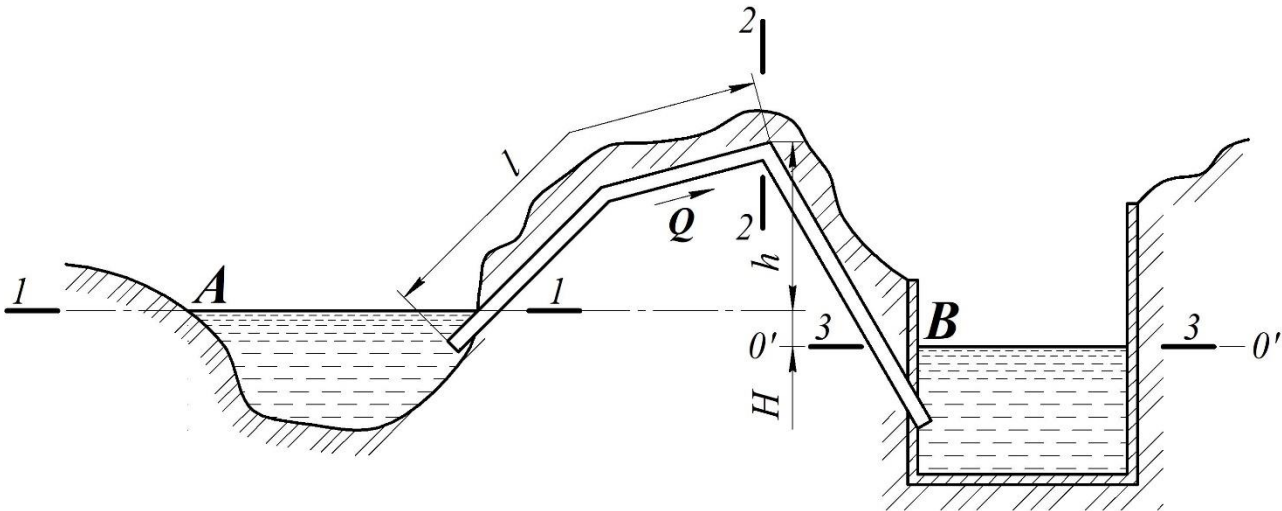


Рисунок 6.4 – Схема для розрахунку сифонного трубопроводу

Потім запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 3-3:

$$H = \left( \lambda \cdot \frac{l}{D} + \sum \zeta \right) \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad (6.11)$$

де  $l$  – повна довжина сифона;

$\sum \zeta$  – сума коефіцієнтів усіх місцевих опорів.

Визначивши з рівняння (6.11) значення швидкісного напору  $\frac{v^2}{2g}$  і підставивши його у формулу (6.10), можна записати

$$h_{\text{вак}} = h + H \cdot \frac{1 + \lambda \cdot \frac{l}{D} + \sum_1^2 \zeta}{\lambda \cdot \frac{l}{D} + \sum \zeta}. \quad (6.12)$$

Вакуумметрична висота зазвичай повинна бути не більшою ніж 7 м. В іншому випадку робота сифона може бути нестійкою, і виникне загроза так званого зриву вакууму. Для усунення цього недоліку потрібно змінити геометричні параметри сифона (зазвичай  $h$  або  $H$ ) так, щоб зазначена вище умова ( $h_{\text{вак}} < 7 \text{ м}$ ) задовольнялася.

### 6.3 Основні задачі розрахунку трубопроводів

Під час гідравлічного розрахунку трубопроводів розв'язують такі основні задачі:

*Задача 1* Визначення необхідного напору (тиску) на початку трубопроводу  $H(p)$  за відомих його геометричних розмірів (внутрішній діаметр  $d$ , довжина  $l$ ) витрати  $Q$ , фізичних параметрів рідини (в'язкість і густина). Відомі профіль траси ( $z_1, z_2$ ), матеріал труб та спосіб їх виготовлення, місцеві опори.

*Задача 2* Визначення пропускної здатності трубопроводу  $Q$  за відомих його геометричних розмірів (довжина  $l$ , діаметр  $d$ ), профілю траси (відмітки початкового й кінцевого перерізів трубопроводу  $z_1$  і  $z_2$ ), початкового та кінцевого тисків  $p_1$  і  $p_2$  або діючого напору  $H$ , фізичних параметрів рідини (в'язкість і густина), а також матеріалу та технічного стану внутрішньої поверхні труби (еквівалентна шорсткість), відомостей про місцеві опори.

*Задача 3* Визначення необхідного діаметра трубопроводу. Відомі його довжина  $l$ , матеріал труб (шорсткість), відмітки початку й кінця трубопроводу  $z_1$  і  $z_2$ , витрата  $Q$ , початковий й кінцевий тиски ( $p_1$  і  $p_2$ ) або величина діючого напору  $H$ , фізичні параметри.

*Задача 4* Визначення оптимального діаметра трубопроводу за заданого плану перекачування (відома витрата рідини  $Q$ ). Відомі фізичні властивості рідини (в'язкість і густина) та їх залежність від температури, профіль траси ( $z_1$  і  $z_2$ ) й довжина  $l$ , необхідний тиск у кінці трубопроводу  $p_2$ , але невідомий необхідний тиск початку  $p_1$ .

Перші дві задачі розв'язують для існуючих трубопроводів, що перебувають в експлуатації. Задачі 3 та 4 задовольняють умови, що виникають під час проектування трубопроводів.

### 6.3.1 Визначення необхідного напору (тиску) на початку трубопроводу

Рідина рухається по трубопроводу завдяки тому, що її енергія на початку трубопроводу більша, ніж у кінці. Цей перепад (різниця) рівнів енергії може бути створений тим чи іншим способом: роботою насоса, завдяки різниці рівнів рідини, тиском газу. В машинобудуванні маємо справу переважно з такими трубопроводами, рух рідини в яких зумовлений роботою насоса. У деяких спеціальних пристроях застосовують газобалонну подачу рідини, тобто використовують тиск газу. Течія рідини за рахунок різниці рівнів (різниці геометричних висот) здійснюється в допоміжних пристроях, а також у гідротехніці й водопостачанні.

Нехай простий трубопровід постійного перерізу розміщений довільно в просторі (рис. 6.5), має загальну довжину  $l$  і діаметр  $d$  та містить ряд місцевих опорів. У початковому перерізі 1–1 геометрична висота дорівнює  $z_1$  і надлишковий тиск  $p_1$ , а в кінцевому перерізі 2–2 – відповідно  $z_2, p_2$ . Швидкість потоку в цих перерізах унаслідок постійності діаметра труби однакова й дорівнює  $V$ .

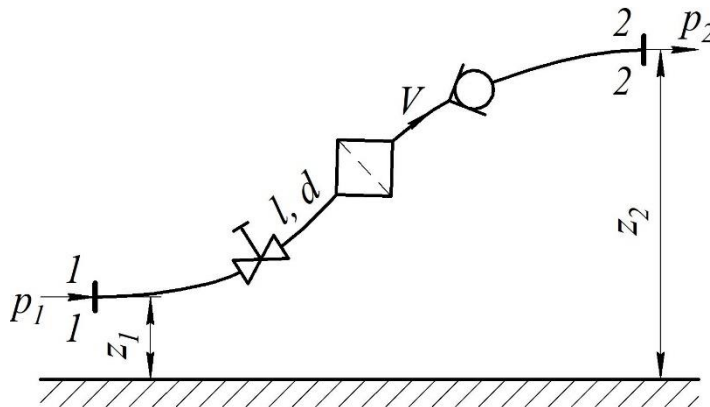


Рисунок 6.5 – Схема простого трубопроводу

Запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1–1 і 2–2. Виключаючи швидкісні опори, одержуємо

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \sum h \quad (6.13)$$

або

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} = z_2 - z_1 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \sum h. \quad (6.14)$$

П'єзометричну висоту, що знаходиться в лівій частині рівняння (6.14), будемо називати необхідним напором на початку трубопроводу  $H_{\text{необ}}$ . Як бачимо з формули, цей напір складається з геометричної висоти  $\Delta z = z_2 - z_1$ , на яку піднімається рідина в процесі руху по трубопроводу, п'єзометричної висоти в кінці трубопроводу і суми всіх втрат напору в трубопроводі.

Сума двох перших складових  $\Delta z + \frac{p_2}{\rho \cdot g}$  є статичним напором і його можна подати як деяку еквівалентну геометричну висоту  $H_{\text{ст}}$  підйому рідини, а останню складову  $\sum h$  – як степеневу функцію витрати, тоді

$$H_{\text{необ}} = H_{\text{ст}} + \sum h = H_{\text{ст}} + K \cdot Q^m, \quad (6.15)$$

де  $K$  – величина, яку називають опором трубопроводу, а показник  $m$  має різні значення залежно від режиму течії.

Для ламінарної течії в разі заміни місцевих опорів еквівалентними довжинами одержимо

$$\sum h = \frac{128 \cdot \nu \cdot l_{\text{розр}}}{\pi \cdot g \cdot d^4} \cdot Q. \quad (6.16)$$

Отже,

$$K = \frac{128 \cdot \nu \cdot l_{\text{розр}}}{\pi \cdot g \cdot d^4} \quad \text{і} \quad m = 1, \quad (6.17)$$

де  $l_{\text{розр}} = l + l_{\text{екв}}$ .

Для турбулентної течії

$$\sum h = \left( \sum \zeta + \lambda \cdot \frac{l}{D} \right) \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot d^4}, \quad (6.18)$$

Отже,

$$K = \left( \sum \zeta + \lambda \cdot \frac{l}{D} \right) \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot d^4} \quad \text{і } m = 2. \quad (6.19)$$

Формула (6.15), доповнена виразами (6.17) і (6.19), є основою для розрахунку простих трубопроводів. За нею можна побудувати криву необхідного напору, тобто його залежність від витрати рідини в трубопроводі. Чим більша витрата, яку необхідно подавати по трубопроводу, тим більший необхідний напір. За ламінарної течії цю криву зображують прямою лінією, за турбулентної – параболою з показником степеня, що дорівнює 2. Величина  $H_{ст}$  додатна в тому разі, якщо рідина піднімається або рухається в ємність із підвищеним тиском, і від'ємна – у разі опускання рідини або її руху в ємність із розрідженням.

Крутість кривих необхідного напору для ламінарного (рис. 6.6 а) і турбулентного (рис. 6.6 б) режимів течії залежить від опору трубопроводу  $K$  і зростає зі збільшенням довжини трубопроводу та зменшенням діаметра, а також збільшенням місцевих гідравлічних втрат.

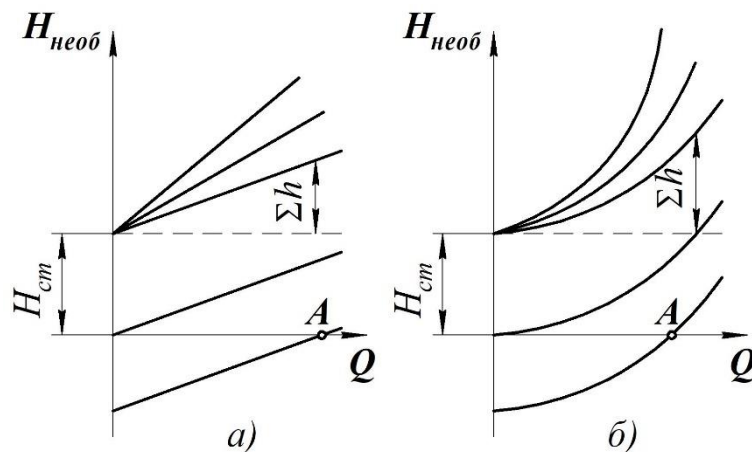


Рисунок 6.6 – Залежності необхідного напору від витрати рідини в трубопроводі

Точка перетину кривої необхідного напору з віссю абсцис за  $H_{ст} = \Delta z = 0$  (точка А) визначає витрату під час руху рідини самопливно, тобто за рахунок лише різниці геометричних висот  $\Delta z$ . Необхідний напір у цьому разі дорівнює нулю, оскільки тиск на початку і в кінці трубопроводу дорівнює атмосферному (за початок трубопроводу беремо вільну поверхню у верхньому резервуарі). Такий трубопровід прийнято називати самопливним (рис. 6.7).

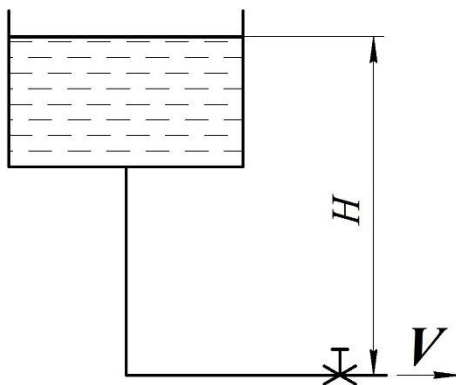


Рисунок 6.7 – Схема самопливного трубопроводу

Якщо в кінці самопливного трубопроводу витікає рідина в атмосферу, то в рівняння (6.15) для необхідного напору до втрат напору необхідно додати швидкісний напір.

Іноколи замість кривих необхідного напору зручно користуватися характеристиками трубопроводу.

*Характеристикою трубопроводу* називають залежність сумарної втрати напору (або тиску) в трубопроводі від витрати:

$$\Sigma h = f(Q).$$

Таким чином, характеристика трубопроводу є кривою необхідного напору, зміщеною на початок координат. Характеристика трубопроводу збігається з кривою необхідного напору за  $H_{ст} = 0$ , наприклад, коли трубопровід лежить у горизонтальній площині, а протитиск  $p_2$  відсутній.

### 6.3.2 Трубопровід з насосною подачею рідини

У машинобудуванні, як уже відмічалось, основним способом подання рідини є примусова подача насосом. Розглянемо спільну роботу трубопроводу з насосом і принцип розрахунку трубопроводу з насосною подачею рідини.

Трубопровід із насосною подачею може бути розімкненим, тобто таким, по якому рідина перекачується з однієї ємності в іншу (рис. 6.8 а), або замкненим (кільцевим), у якому циркулює одна й та сама кількість рідини (рис. 6.8 б).



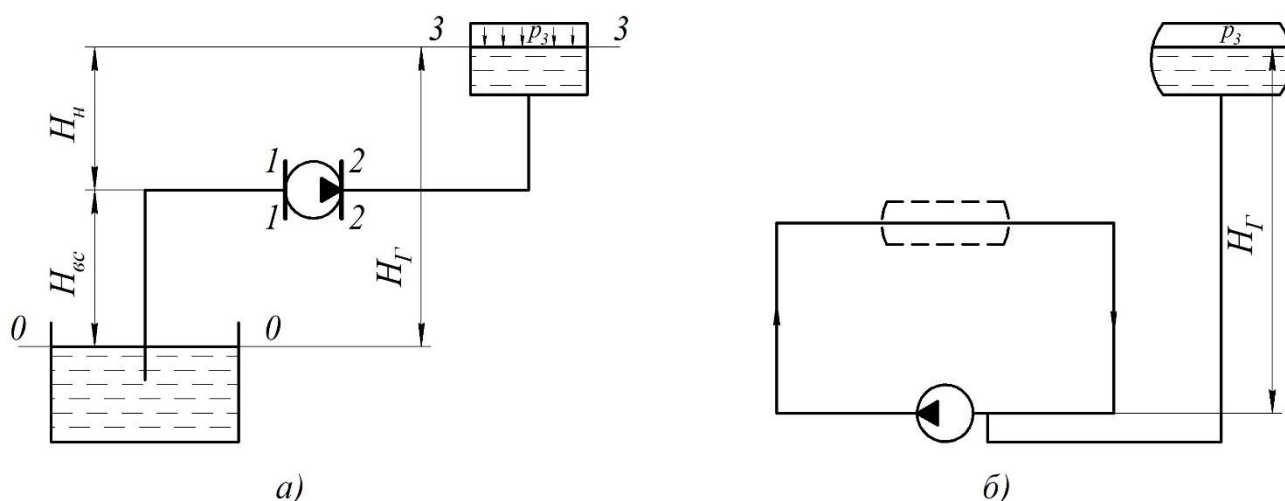


Рисунок 6.8 – Трубопровід із насосною подачею рідини

Розглянемо спочатку розімкнений трубопровід.

Висоту розміщення осі насоса відносно нижнього рівня рідини  $H_{вс}$  називають геометричною висотою всмоктування, а трубопровід, по якому рідина надходить до насоса, – всмоктувальним трубопроводом, або лінією всмоктування. Висоту розміщення верхнього рівня рідини  $H_{н}$  відносно осі насоса називають геометричною висотою нагнітання, а трубопровід, по якому рідина рухається від насоса, – напірним, або лінією нагнітання.

Розрахунок всмоктувальної лінії проводять на основі рівняння Бернуллі, записаного для перерізів 0–0 та 1–1, він зводиться загалом до визначення допустимої висоти всмоктування за аналогією з розрахунком висоти сифонного трубопроводу.

Напір насоса під час його роботи буде визначатися різницею напорів у перерізах 2–2 і 1–1:

$$H_{нас} = H_2 - H_1 = \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{a_2 \cdot V_2^2}{2g} \right) - \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{a_1 \cdot V_1^2}{2g} \right). \quad (6.20)$$

Напір у перерізі 1–1 (на вході в насос) визначимо з рівняння Бернуллі для всмоктувальної лінії (для перерізів 0–0 і 1–1):

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{a_0 \cdot V_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{a_1 \cdot V_1^2}{2g} + h_{0-1}. \quad (6.21)$$

Звідси

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{a_1 \cdot V_1^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{a_0 \cdot V_0^2}{2g} - h_{0-1}. \quad (6.22)$$

Запишемо рівняння Бернуллі для нагнітальної лінії (для перерізів 2–2 і 3–3):

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{a_2 \cdot V_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{a_3 \cdot V_3^2}{2g} + h_{2-3}. \quad (6.23)$$

Далі, виходячи з рівняння (6.20) і нехтуючи швидкісними напорами в перерізах 0–0 і 3–3 віднімемо відповідні ліві та праві частини рівнянь (6.22) і (6.23):

$$H_H = z_3 - z_0 + \frac{p_3 - p_0}{\rho \cdot g} + h_{0-1} + h_{2-3}. \quad (6.24)$$

Як бачимо з рисунка 6.8,

$$z_3 - z_0 = H_{BC} + H_H = H_\Gamma.$$

Втрати напору  $h_{0-1}$  є втратами напору на всмоктувальній ділянці трубопроводу:  $h_{0-1} = h_{BC}$ , а втрати напору  $h_{2-3}$  є втратами в нагнітальному трубопроводі:  $h_{2-3} = h_H$ .

Таким чином,

$$H_{\text{нас}} = H_\Gamma + \frac{p_3 - p_0}{\rho \cdot g} + h_{BC} + h_H. \quad (6.25)$$

Позначимо суму перших двох членів через  $H_{CT}$ , що складають статичний напір насосної установки, а суму втрат напору – через  $\Sigma h$ . Тоді напір насоса

$$H_{\text{нас}} = H_{CT} + \Sigma h. \quad (6.26)$$

Як бачимо, під час роботи насоса його напір дорівнює напору, необхідному в трубопроводі:

$$H_{\text{нас}} = H. \quad (6.27)$$

На рівнянні (6.27) базується методика визначення режиму роботи насосної установки. Для цього на одному й тому самому графіку в координатах  $H - Q$  будують дві криві: криву 1 (рис. 6.9) – графічна залежність необхідного напору  $H$  у трубопроводі від витрати  $Q$ , і криву 2, яка відображає характеристику насоса і є графіком напорів, що розвиває насос за різних значень подачі рідини. Точка перетину цих кривих (т. А) є робочою точкою, що визначає параметри режиму роботи насоса й трубопроводу  $Q_p$  і  $H_p$ , оскільки саме в цій точці виконується умова  $H_{\text{нас}} = H$ .

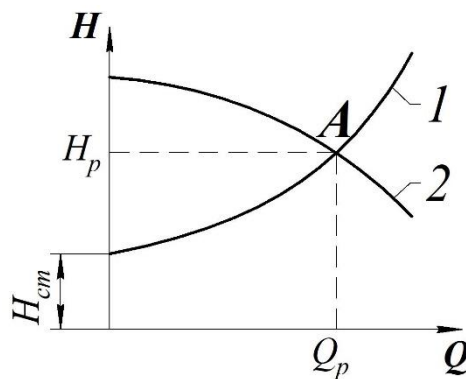


Рисунок 6.9 – Графічне визначення робочої точки

## 6.4 Розрахунок складних трубопроводів

### 6.4.1 Послідовне з'єднання простих трубопроводів

Візьмемо декілька труб, наприклад, 1, 2 та 3 (різної довжини, різного діаметра та з різними місцевими опорами), і з'єднаємо їх послідовно (рис. 6.10 а).

Очевидно, що під час подання рідини по такому трубопроводу витрата в усіх послідовно з'єднаних трубах одна й та сама, а повна втрата напору між точками  $M$  і  $N$  дорівнює сумі втрат напору в усіх послідовно з'єднаних трубах, тобто маємо такі рівняння:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q,$$

$$\Sigma h_{M-N} = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 + \Sigma h_3. \quad (6.28)$$

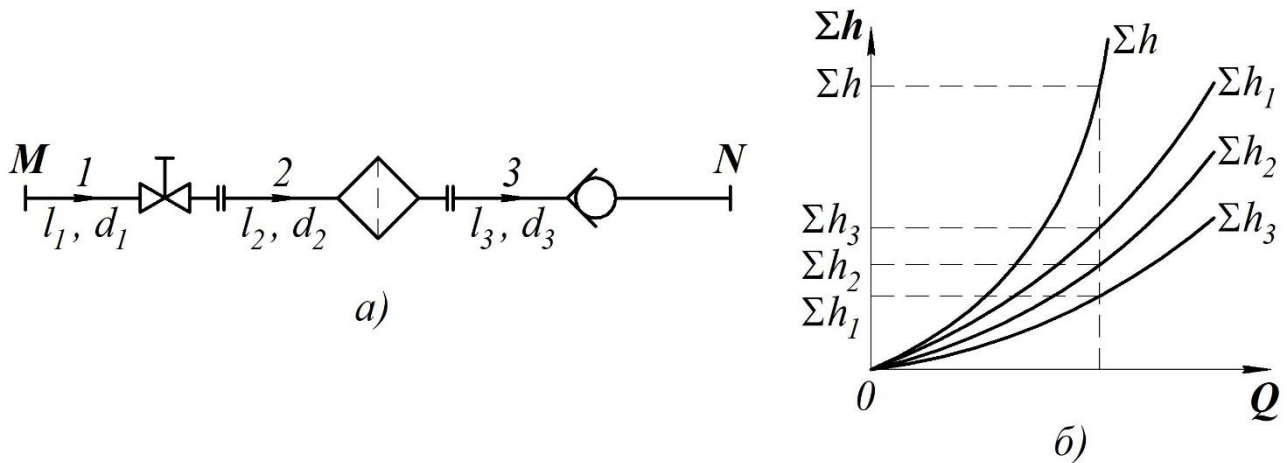


Рисунок 6.10 – Послідовне з'єднання простих трубопроводів

Ці рівняння визначають правило побудови характеристики послідовно з'єднаних труб. Нехай відомі характеристики трубопроводів 1, 2 і 3 (рис. 6.10 б). Щоб побудувати характеристику всього послідовного з'єднання  $M-N$  потрібно відповідно до формул (6.29) скласти втрати напору за однакових витрат, тобто скласти ординати всіх трьох кривих за постійних абсцис.

Оскільки в розглядуваному більш загальному випадку швидкості на початку  $M$  і в кінці  $N$  трубопроводу різні, то формула необхідного напору для всього трубопроводу  $M-N$  на відміну від формули (6.15) повинна містити різницю швидкісних напорів у кінці й на початку трубопроводу. Беручи турбулентний режим течії  $\alpha = 1$ , маємо

$$H_{\text{необ}} = z_N - z_M + \frac{V_N^2}{2g} + \Sigma h_{M-N} + \frac{P_N}{\rho \cdot g} = H_{\text{ст}} + C \cdot Q^2 + K \cdot Q^m, \quad (6.29)$$

$$\text{де } C = \frac{1}{2g} \left( \frac{1}{\omega_N^2} - \frac{1}{\omega_M^2} \right);$$

$$H_{\text{ст}} = z_N - z_M + \frac{P_N}{\rho g};$$

$\omega_N$  – площа живого перерізу в кінці трубопроводу;

$\omega_M$  – площа живого перерізу на початку трубопроводу.

## 6.4.2 Паралельне з'єднання простих трубопроводів

Таке з'єднання декількох простих трубопроводів між точками  $M$  і  $N$  показано на рисунку 6.11 а. Для простоти припустимо, що трубопроводи розміщені в горизонтальній площині.

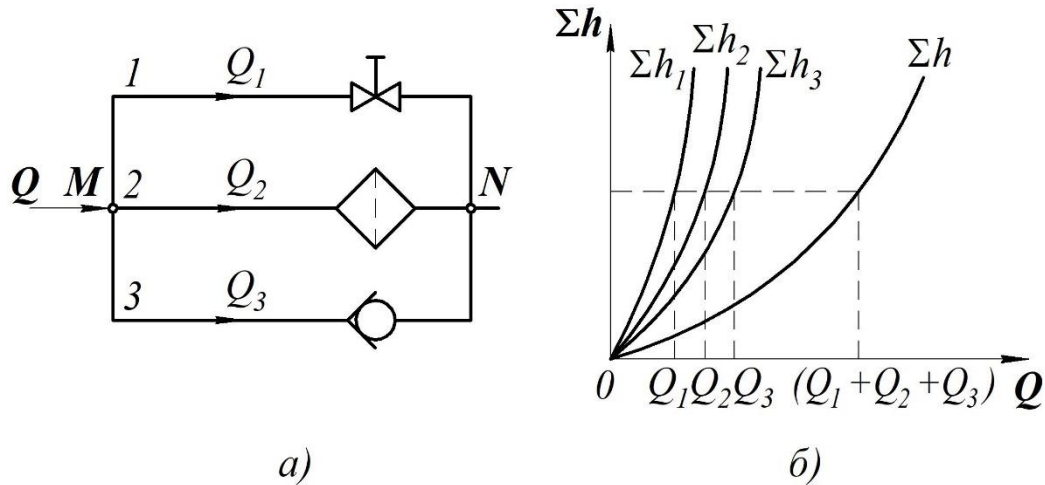


Рисунок 6.11 – Паралельне з'єднання трубопроводів

Позначимо повні напори в точках  $M$  і  $N$  відповідно через  $H_M$  та  $H_N$ , витрату в основній магістралі (до розгалуження й після злиття) – через  $Q$ , а в паралельних трубопроводах – через  $Q_1, Q_2$  і  $Q_3$ ; сумарні втрати напору через  $\Sigma h_1, \Sigma h_2, \Sigma h_3$ .

Насамперед запишемо очевидне рівняння:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (6.30)$$

Потім виразимо втрати напору в кожному з трубопроводів через повні напори в точках  $M$  і  $N$ :

$$\begin{aligned} \Sigma h_1 &= H_M - H_N, \\ \Sigma h_2 &= H_M - H_N, \\ \Sigma h_3 &= H_M - H_N. \end{aligned}$$

Звідси робимо такий важливий висновок:

$$\Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3, \quad (6.31)$$

тобто втрати напору в паралельних трубопроводах рівні між собою. Їх можна виразити через відповідні витрати таким чином:

$$\begin{aligned}\Sigma h_1 &= K_1 Q_1^m, \\ \Sigma h_2 &= K_2 Q_2^m, \\ \Sigma h_3 &= K_3 Q_3^m,\end{aligned}$$

де  $K$  і  $m$  визначають залежно від режиму течії за формулами (6.17) або (6.19).

Отже, додатково до рівняння (6.30) одержимо на основі рівностей (6.31) ще два рівняння:

$$K_1 Q_1^m = K_2 Q_2^m, \quad (6.32)$$

$$K_2 Q_2^m = K_3 Q_3^m. \quad (6.33)$$

Система рівнянь (6.30), (6.32) і (6.33) дозволяє розв'язати, наприклад, таку типову задачу: відомі витрата в основній магістралі  $Q$  і всі розміри трубопроводів. Необхідно визначити витрати в паралельних трубопроводах  $Q_1$ ,  $Q_2$  і  $Q_3$ .

Використовуючи формули (6.30) і (6.31), можна скласти стільки рівнянь, скільки паралельних трубопроводів між точками  $M$  і  $N$ .

З рівнянь (6.30) і (6.31) випливає таке важливе правило: для побудови характеристики паралельного з'єднання декількох трубопроводів необхідно скласти абсциси (витрати) характеристик цих трубопроводів за однакових ординат ( $\Sigma h$ ). Приклад такої побудови наведено на рисунку 6.11 б.

#### 6.4.3 Розгалужене з'єднання простих трубопроводів

Домовимося називати розгалуженим з'єднанням сукупність декількох простих трубопроводів, що мають один спільний переріз – точку розгалуження (або з'єднання) труб. Нехай основний трубопровід має розгалуження в перерізі  $M-N$  від якого відходять, наприклад, три труби 1, 2 і 3 різних розмірів, що містять у своєму складі різні місцеві опори (рис. 6.12).

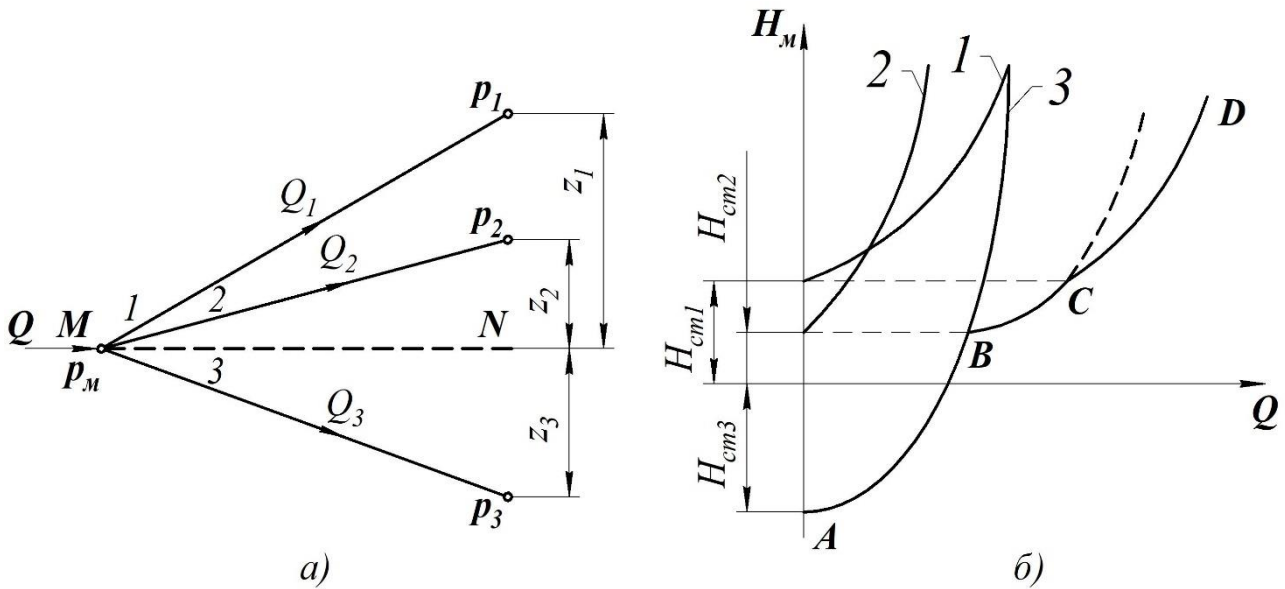


Рисунок 6.12 – Схеми розгалуженого трубопроводу і побудова кривої необхідного напорю

Геометричні висоти  $z_1$ ,  $z_2$  та  $z_3$  кінцевих перерізів і тисків  $p_1$ ,  $p_2$  та  $p_3$  в них нехай також будуть різними. Знайдемо зв'язок між тиском  $p_M = \rho g H_M$  у перерізі  $M-N$  і витратами  $Q_1$ ,  $Q_2$  та  $Q_3$  в трубопроводах, беручи напрям течії в них заданим.

Як і для паралельних трубопроводів,

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (6.34)$$

Записавши рівняння Бернуллі для перерізу  $M-N$  і кінцевого перерізу, наприклад першого трубопроводу, одержимо (нехтуючи різницею швидкісних напорів):

$$H_M = z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \Sigma h_1. \quad (6.35)$$

Позначаючи суму двох перших членів у правій частині рівняння через  $H_{CT}$  і виражаючи третій член через витрату, одержуємо:

$$H_M = H_{CT1} + K_1 Q_1^m. \quad (6.36)$$

Аналогічно для двох інших трубопроводів можна записати:

$$H_M = H_{ст2} + K_2 Q_2^m, \quad (6.37)$$

$$H_M = H_{ст3} + K_3 Q_3^m. \quad (6.38)$$

Таким чином, одержуємо систему чотирьох рівнянь із чотирма невідомими:  $Q_1, Q_2, Q_3$  і  $H_M$ .

Основна задача під час розрахунку розгалуженого трубопроводу така: задані витрата в точці  $M$ , всі розміри розгалужень (включаючи геометричні висоти  $z$ ), тиск у кінцевих перерізах та всі місцеві опори; визначити витрати  $Q_1, Q_2$  і  $Q_3$ , а також необхідний напір  $H_M = H_{необ}$ . Можливі й інші варіанти поставлення задачі, розв'язуваної на основі тієї самої системи рівнянь.

Побудову кривої необхідного напору для розгалуженого трубопроводу виконують складанням кривих необхідних напорів для віток за правилом складання характеристик паралельних трубопроводів – складанням абсцис ( $Q$ ) за однакових ординат ( $H_M$ ). Криві необхідних напорів для віток позначені цифрами 1, 2 і 3, а сумарна крива, тобто крива необхідного напору для всього розгалуження, позначена літерами  $ABCD$ . З графіка (рис. 6.12, б) зрозуміло, що умовою подачі рідини в усі вітки є нерівність  $H_M > H_{ст1}$ .

## 6.5 Розрахунок довгих трубопроводів

Під час розрахунків довгих трубопроводів місцевими втратами напору в рівнянні Бернуллі можна знехтувати через їх незначну величину порівняно з втратами напору по довжині:

$$\sum \zeta \cdot \frac{V^2}{2g} \ll \sum \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

Якщо для водопровідних мереж брати  $z$  як відмітку землі над певним перерізом трубопроводу, то величину  $\frac{p_1}{\rho \cdot g}$  (п'єзометричну висоту в певному перерізі) називають *вільним перерізом*  $H_B = \frac{p}{\rho \cdot g}$  (тобто напором над поверхнею землі).

Тоді

$$H = z + H_B. \quad (6.39)$$



Вільні напори для водопроводу беруть залежно від кількості поверхів приміщення, але не менше ніж 10 м. Тому й п'єзометричні напори теж будуть більшими за 10 м.

Швидкісні напори за звичайних швидкостей руху води в трубі  $V = 1\text{--}3$  м/с мають такий діапазон:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1,05 \cdot (1 - 3)^2}{2 \cdot 9,81} = 0,05 - 0,48 \text{ м.}$$

Звідси випливає, що швидкісними напорами також можна знехтувати, оскільки вони дуже малі порівняно з п'єзометричним напором:

$$H = z + \frac{p}{\rho \cdot g}.$$

Отже, рівняння Бернуллі матиме вигляд

$$H_1 = H_2 + \sum \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

Під час розв'язування практичних задач витрата або відома, або її потрібно визначити. Тому формулу для втрат напору по довжині зручно подати у вигляді

$$h_l = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{16 \cdot Q^2}{2 \cdot g \cdot \pi^2 \cdot d^4} = s_0 \cdot Q^2 \cdot l, \quad (6.40)$$

де  $s_0$  – питомий опір труби, що залежить від її діаметра й гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ ,

$$s_0 = \frac{8 \cdot \lambda}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5}. \quad (6.41)$$

Як і  $\lambda$ , питомий опір залежить від відносної еквівалентної шорсткості труби  $\frac{\Delta_{\text{екв}}}{D}$  і числа Рейнольдса  $Re$ .

В окремому випадку для водопровідних труб  $s_0$  можна визначити залежно від матеріалу труби і  $D$ , а також середньої швидкості. Значення  $s_0$  наведені в довідниках.

Як приклад, у таблиці 6.1 наведені питомі опори  $s_0, c^2/m^6$ , для деяких сталевих і чавунних труб у квадратичній області опору (за швидкості  $V \geq 1,2$  м/с).

Таблиця 6.1 – Питомі опори сталевих і чавунних труб за швидкості  $V \geq 1,2$  м/с

Діаметр умовного проходу $D, мм$	Сталева труба		Чавунна труба	
	розрахунковий внутрішній діаметр $D_p, мм$	$s_{0\text{ кв}}, c^2/m^6$	розрахунковий внутрішній діаметр $D_p, мм$	$s_0, c^2/m^6$
50	64	3686	51,6	11540
60	70	2292	–	–
75	83	929	–	–
80	95	454	82,6	953
100	114	173	102,0	312
125	133	76,4	127,2	96,7
150	158	30,7	152,4	37,1
175	170	20,8	–	–
200	209	6,96	202,6	8,09
250	260	2,19	253,0	2,53
300	311	0,85	304,4	0,95
350	363	0,373	352,4	0,437
400	414	0,186	401,4	0,219
450	466	0,099	450,6	0,199
500	516	0,058	500,8	0,0678
600	616	0,0226	600,2	0,0260
700	706	0,0110	699,4	0,0115
800	804	0,00551	799,8	0,00567
900	904	0,00296	899,2	0,00305
1 000	1 004	0,00170	998,4	0,00175
1 200	1 202	0,000654	1 199,2	0,000663
1 400	1 400	0,000292	–	–
1 500	1 500	0,000202	–	–
1 600	1 600	0,000144	–	–

За швидкості руху води в трубі  $V < 1,2$  м/с (перехідна область опору) питомі опори таких труб обчислюють за формулою

$$s_0 = s_{0\text{ кв}} \cdot \theta, \quad (6.42)$$

де  $\theta$  – коефіцієнт, який визначають залежно від швидкості води  $V$  (табл. 6.2).

Таблиця 6.2 – Залежність коефіцієнта  $\theta$  від швидкості води

Швидкість $V, \text{ м/с}$	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2
Коефіцієнт $\theta$	1,0	1,015	1,03	1,04	1,06	1,11	1,2	1,41

З урахуванням викладеного довгі трубопроводи розраховують за формулою

$$H_1 - H_2 = \sum s_0 \cdot Q^2 \cdot l. \quad (6.43)$$

У науковій літературі також наведено метод розрахунку довгих труб, що ґрунтується на формулі середньої швидкості під час рівномірного руху. За цим методом швидкість руху води в трубі визначають за формулою

$$V = W \cdot \sqrt{I}, \quad (6.44)$$

де  $W$  – швидкісна характеристика;  
 $I$  – гідравлічний нахил.

Звідси

$$Q = \omega \cdot W \cdot \sqrt{I} = K \cdot \sqrt{I}, \quad (6.45)$$

де  $K$  – витратна характеристика,

$$K = \omega \cdot W = f(D; n), \quad (6.46)$$

де  $n$  – характеристика поверхні.

Тоді

$$Q^2 = K^2 \cdot I = K^2 \cdot \frac{h_l}{l},$$

$$h_l = H_1 - H_2 = \frac{Q^2 \cdot l}{K^2}. \quad (6.47)$$

Порівнюючи залежності (6.43) і (6.45), можна записати

$$s_0 = \frac{1}{K^2}. \quad (6.48)$$

Як приклад, у таблиці 6.3 наведено значення витратної характеристики  $K_{\text{КВ}}$  для деяких діаметрів сталевих (за коефіцієнта швидкості  $n = 0,013$ ), бетонних та залізобетонних ( $n = 0,015$ ) труб, що працюють у квадратичній області опору.

Таблиця 6.3 – Витратна характеристика  $K_{\text{КВ}}$  для деяких діаметрів труб

$D, \text{ мм}$	$K_{\text{КВ}}, \text{ м}^3/\text{с}$ для труб		$D, \text{ мм}$	$K_{\text{КВ}}, \text{ м}^3/\text{с}$ для труб	
	сталевих	бетонних та залізо-бетонних		сталевих	бетонних та залізо-бетонних
100	0,0763	–	700	9,57	7,99
125	0,115	–	800	13,49	11,42
150	0,180	–	900	18,37	15,65
175	0,190	–	100	28,24	20,75
200	0,378	–	1 100	–	26,77
250	0,679	–	1 200	39,31	33,78
300	1,089	0,75	1 300	–	41,83
350	1,637	–	1 400	58,50	50,99
400	2,268	1,79	1 500	70,40	61,31
450	3,165	–	1 600	83,35	72,84
500	4,160	3,25	1 700	–	85,64
600	6,649	5,29	1 800	–	99,77

Розрахунковий діаметр  $D_p$  сталевих труб беруть за даними таблиці 4.3; для залізобетонних труб  $D_p = D$ .

Під час роботи сталевих труб у перехідній зоні опору ( $V < 1,2$  м/с) витратну характеристику визначають за формулою

$$K = K_{\text{кв}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\theta}} \quad (6.49)$$

У проєктних організаціях для розрахунків водопровідних мереж використовують таблиці Ф. О. Шевелева, що ґрунтуються на формулі

$$H_1 - H_2 = s_0 \cdot Q^2 \cdot l,$$

зведеної до вигляду

$$1000 \cdot I = 1000 \cdot \frac{h_l}{l} = 1000 \cdot s_0 \cdot Q^2 = f(D, Q, \text{матеріал труби}).$$

Величина  $1000 \cdot I$  – це втрати напору в трубі завдовжки 1000 м, підраховані для різних витрат у трубах із різними діаметрами з різних матеріалів.

За більших чи менших довжин труби втрати напору пропорційно збільшуються або зменшуються.

## 6.6 Особливості розрахунку трубопроводів під час руху стисливої рідини

У трубопроводах повітродувних систем на водоочисних станціях, а також у газопроводах течія газу (повітря) відбувається за сталої температури, що дорівнює температурі навколишнього середовища. Такий процес називають *ізотермічним*. За значної довжини трубопроводу в ньому встановлюється великий перепад тисків, що призводить до істотної зміни густини газу (повітря) і відповідно – до потреби врахування його стиснення.

Застосуємо для такої течії рівняння Бернуллі. Переходячи до рівняння для потоку та враховуючи втрати тиску по довжині  $d(\Delta p_l)$ , запишемо

$$\frac{dp}{\rho} + d \frac{V^2}{2} + d(\Delta p_l) = 0,$$

або

$$dp + \rho V dV + \lambda \cdot \frac{dl}{D} \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} = 0. \quad (6.50)$$

Оскільки масова витрата  $M = \rho \cdot Q$ , то швидкість течії газу в газопроводі з урахуванням рівняння газового стану

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{M}{\rho \cdot \omega} = \frac{M}{\omega} \cdot \frac{R_* \cdot T}{p},$$

а її диференціал

$$dV = -\frac{M}{\omega} \cdot R_* \cdot T \frac{dp}{p^2}.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (6.50), одержуємо

$$dp - \frac{M^2}{\omega^2} \cdot R_* \cdot T \frac{dp}{p^2} + \lambda \cdot \frac{dl}{D} \cdot \frac{M^2}{2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{R_* \cdot T}{p} = 0,$$

або

$$-p dp = \left( \lambda \cdot \frac{dl}{D} - 2 \cdot \frac{dp}{p} \right) \cdot \frac{M^2}{2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{R_* \cdot T}{p} = 0. \quad (6.51)$$

Інтегруючи це рівняння за сталих  $M$  і  $T$  та за  $\lambda = const$ , маємо

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \left( \lambda \cdot \frac{l}{D} - 2 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \right) \cdot \frac{M^2}{2 \cdot \omega^2} \cdot R_* \cdot T. \quad (6.52)$$

Для довгих газопроводів величина  $2 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$  зазвичай значно менша, ніж  $\lambda \cdot \frac{l}{D}$ , і нею можна знехтувати. З урахуванням рівняння газового стану можна записати

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2 \cdot p_1} = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{M^2}{2 \cdot \omega^2 \cdot \rho_1}. \quad (6.53)$$

Під час руху нестисливого газу ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ) втрати тиску з урахуванням формули Дарсі–Вейсбаха:

$$\Delta p_0 = p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot h_l = \rho \cdot g \cdot \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{Q^2 \cdot \rho^2}{2 \cdot g \cdot \omega^2 \cdot \rho^2} = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{M^2}{2 \cdot \omega^2 \cdot \rho}. \quad (6.54)$$

Порівнюючи вирази (6.53) і (6.54), бачимо, що праві частини в них однакові. Оскільки

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2 \cdot p_1} = \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot p_1} \cdot (p_1 + p_2),$$

то втрати тиску під час руху стисливого газу в газопроводі можна подати у вигляді

$$p_1 - p_2 = \frac{2 \cdot p_1}{p_1 + p_2} \cdot \Delta p_0 = \frac{2}{1 + \frac{p_2}{p_1}} \cdot \Delta p_0 = \frac{2}{2 - \frac{\Delta p}{p_1}} \cdot \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{M^2}{2 \cdot \omega^2 \cdot \rho_1}, \quad (6.55)$$

де  $\Delta p = p_1 - p_2$  – різниця тисків на початку та в кінці трубопроводу.

З формули (6.55) випливає, що врахування впливу стисливості газу необхідне, якщо множник біля  $\Delta p_0$  істотно відрізняється від одиниці. У більшості технічних розрахунків можна припускати похибку до 5 %; у цьому разі відносний перепад тиску  $\frac{\Delta p}{p_1}$  не повинен перевищувати 9,5 %.

З рівняння (6.55) можна визначити пропускну здатність газопроводу (масову витрату):

$$M = \omega \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot \left(1 - 1,05 \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1}\right) \cdot D \cdot \rho_1}{\lambda \cdot l}}. \quad (6.56)$$

Якщо  $\Delta p = p_1 - p_2 \leq 0,095 \cdot p_1$ , то формула (6.56) спрощується:

$$M = \omega \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot D \cdot \rho_1}{\lambda \cdot l}}. \quad (6.57)$$

У формулах (6.52–6.57)  $p_1$  і  $p_2$  є абсолютними тисками.

### 6.7 Усталений рух газорідних сумішей у трубопроводах

Розв'язування багатьох технологічних задач видобування, промислового збирання і транспортування газоконденсатних та газонафтових родовищ неможливе без виконання гідродинамічних розрахунків течії газорідних сумішей (ГРС) у трубопроводах. Крім того, гідродинаміка ГРС набула широкого застосування і в енергетиці, хімічній, атомній, авіаційній та інших галузях промисловості.

Принцип течії ГРС у трубопроводах є предметом широких теоретичних та експериментальних досліджень в усіх промислово розвинених країнах світу. Однак сучасні методи розрахунку ГРС не мають ще того рівня обґрунтування й точності, який досягнутий у гідродинаміці однофазних потоків.

Початковий період досліджень в області гідродинаміки ГРС характеризується використанням у більшості емпіричних методів розрахунку втрат тиску залежно від параметрів потоку та діаметра трубопроводу.

У 40–50-х рр. ХХ ст. почалося розроблення методів узагальнення дослідних даних, класифікації структур руху ГРС і початків теоретичних основ газорідних течій.

Розвиток теорії гідродинаміки ГРС вплинув на вдосконалення методів експериментальних досліджень. Ефективним виявився критеріальний метод оброблення даних, що впливає з основних рівнянь гідродинаміки сумішей і на цей час використовується як найбільш обґрунтований та поширений.

Теоретично обґрунтована необхідність окремого вивчення кількісних та якісних залежностей для всіх візуально відомих форм течії ГРС. Сучасні інженерні методи розрахунку ґрунтуються на експериментальних і теоретичних дослідженнях із застосуванням методу окремого вивчення структур течії.



### 6.7.1 Властивості газорідних сумішей

Газорідну суміш розглядають як двофазний потік, у якому газова фаза є сумішшю реальних газів і насичених парів рідини, тобто фази перебувають у термодинамічній рівновазі й масові витрати їх є незмінними.

Характерною особливістю ГРС є змінність у просторі й часі їх поверхонь розділу. Ця особливість руху ГРС пояснюється переважно різницею густин фаз і є причиною різноманітності форм (структур) течії. Тому закономірності руху ГРС значно складніші від течії однорідної рідини (газу).

Крім різноманітності форм течії, турбулентний потік ГРС характеризується значними коливальними рухами та довготривалими пульсаціями тиску, які в декілька разів перевищують пульсації тиску в однорідному турбулентному потоці. Тому всі фізичні величини, що описують газорідний рух, осереднюються в просторово-часових координатах. У тому самому розумінні вживають термін «усталений рух». Оскільки витрата газу або рідини через довільний переріз труби змінює своє значення в різні моменти часу, відхиляючись від середніх значень в той чи інший бік, то для кожної форми течії існує такий мінімальний проміжок часу, впродовж якого ця витрата може вважатися сталою, і надалі всі величини вживаються саме в такому розумінні.

Під час усталеного руху однорідної рідини в каналі характер турбулентності змінюється неістотно, а під час руху ГРС зміна швидкості фаз приводить до перебудови структури течії навіть на незначній довжині, особливо у випадку складної форми каналу.

Зміна густини, в'язкості, поверхневого натягу та концентрації суміші зумовлюють закономірності, відсутні під час течії однорідних рідин.

За малих швидкостей суміші гравітаційні сили істотно впливають на структуру течії, величину відносної швидкості, опору та пульсації тиску. Тому, наприклад, течія суміші в каналах, по-різному розміщених у просторі, на відміну від однорідної течії не відповідає одним і тим самим закономірностям.

Нижче розглядаються осереднені в часі параметри потоку ГРС. Дійсна об'ємна концентрація газу в ГРС дорівнює відношенню миттєвої площі живого перерізу газу в ГРС до площі живого перерізу:

$$V_{\Gamma} = \frac{\omega_{\Gamma}}{\omega}, \quad (6.58)$$

де  $\omega_{\Gamma}$  – миттєва площа живого перерізу потоку в ГРС;

$\omega$  – площа живого перерізу ГРС у трубі.

Тоді дійсна об'ємна концентрація рідини

$$r_p = 1 - r_r, \quad (6.59)$$

де  $r_r$  – дійсна об'ємна концентрація газу.

Дійсна густина ГРС

$$\rho_c = r_r \cdot \rho_r + r_p \cdot \rho_p, \quad (6.60)$$

де  $\rho_r$  і  $\rho_p$  – відповідно густина газу та рідини за середнього тиску й середньої температури суміші в трубопроводі.

Середню швидкість ГРС визначають із рівняння витрати

$$V_c = \frac{Q_c}{\omega} = \frac{Q_p + Q_r}{\omega}, \quad (6.61)$$

де  $Q_c$ ,  $Q_p$ ,  $Q_r$  – відповідно витрати суміші, рідинної та газової фаз.

Дійсні швидкості рідини та газу відповідно дорівнюють:

$$V_p = \frac{Q_p}{\omega_p}, \quad V_r = \frac{Q_r}{\omega_r}. \quad (6.62)$$

Характерним параметром газорідинних потоків є відносна швидкість фаз

$$V_B = V_r - V_p,$$

яку називають ще швидкістю «ковзання» фаз. Її величина залежить від співвідношення густини та в'язкості фаз, коефіцієнта поверхневого натягу, структури потоків, напрямів руху суміші й градієнта тиску. Під час висхідного руху суміші в трубах напрям руху фаз та градієнтів тиску збігається і  $V_B > 0$ , тобто швидкість газу більша, ніж швидкість рідини. За низхідного руху ГРС напрями руху суміші та градієнта тиску протилежні, і  $V_B < 0$ .

Об'ємні витратні концентрації газової й рідкої фаз відповідно рівні:

$$\beta_p = \frac{Q_p}{Q_c}, \quad \beta_\Gamma = \frac{Q_\Gamma}{Q_c}. \quad (6.63)$$

Виходячи з рівняння об'ємної витрати потоку

$$V_c \cdot \omega = V_\Gamma \cdot \omega_\Gamma + V_p \cdot \omega_p \quad (6.64)$$

та з урахуванням залежностей  $V_B = V_\Gamma - V_p$  і (6.58) і (6.59), взаємозв'язок між дійсною й витратною об'ємними концентраціями газу описується рівнянням

$$\beta_\Gamma = r_\Gamma \cdot \left(1 + r_p \cdot \frac{V_B}{V_c}\right). \quad (6.65)$$

З рівності (6.65) випливає, що залежно від знака  $V_B$  витратні концентрації фаз можуть бути більшими, меншими й дорівнювати дійсним.

Унаслідок «ковзання» фаз дійсний динамічний тиск визначають для кожної фази окремо. З урахуванням частки живого перерізу газу в потоці ГРС дійсний динамічний тиск газу

$$p_{\text{дин. } \Gamma} = 0,5 \cdot V_\Gamma^2 \cdot \rho_\Gamma \cdot r_\Gamma, \quad (6.66)$$

а з урахуванням залежностей (6.58), (6.61), (6.62) і (6.63)

$$p_{\text{дин. } \Gamma} = 0,5 \cdot V_c^2 \cdot \rho_\Gamma \cdot \frac{\beta_\Gamma^2}{r_\Gamma}. \quad (6.67)$$

Аналогічно для рідини

$$p_{\text{дин. } p} = 0,5 \cdot V_c^2 \cdot \rho_p \cdot \frac{\beta_p^2}{r_p}. \quad (6.68)$$

Тоді дійсний динамічний тиск ГРС з урахуванням (6.67) і (6.68) дорівнює

$$p_{\text{дин. } c} = p_{\text{дин. } \Gamma} + p_{\text{дин. } p} = 0,5 \cdot V_c^2 \cdot \left( \frac{\beta_\Gamma^2}{r_\Gamma} \cdot \rho_\Gamma + \frac{\beta_p^2}{r_p} \cdot \rho_p \right). \quad (6.69)$$

Швидкість поширення малих імпульсів тиску (швидкість звуку) в ГРС за відсутності масообміну між фазами визначають з урахуванням приросту питомого об'єму ГРС:

$$dW_c = dW_p + dW_r = -\frac{W_c \cdot (1 - r_r) dp}{E_p} - \frac{W_c \cdot r_r dp}{E_r},$$

де  $dW_p$  і  $dW_r$  – прирости питомих об'ємів відповідно рідини й газу.

Тоді

$$\frac{dW_c}{dp} = -W_c \cdot \left( \frac{1 - r_r}{E_p} + \frac{r_r}{E_r} \right), \quad (6.70)$$

де  $E_p$  і  $E_r$  – модулі об'ємного стиснення відповідно рідини й газу.

Ураховуючи, що  $W_c = \frac{1}{\rho_c}$  та  $E_r = n \cdot p$ , де  $n$  – об'ємний показник політропи газу, запишемо рівняння (6.68) у такому вигляді:

$$\frac{d\rho_c}{dp} = \rho_c \cdot \left( \frac{1 - r_r}{E_p} + \frac{r_r}{n \cdot p} \right).$$

Швидкість звуку

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Тоді з урахуванням (6.69) швидкість у достатньо гомогенній ГРС

$$c_c = \left\{ [r_r \cdot \rho_r + (1 - r_r)] \cdot \left( \frac{1 - r_r}{E_p} + \frac{r_r}{n \cdot p} \right) \right\}^{-0,5}. \quad (6.71)$$

Нехтуючи масою газу і вважаючи рідину абсолютно нестисливою, формула (6.71) дещо спрощується:

$$c_c = \sqrt{\frac{n \cdot p}{r_T \cdot (1 - r_T) \cdot \rho_T}} \quad (6.72)$$

Мінімальна швидкість звуку існує за  $r_T = 0,5$ . У разі завершеного теплообміну між фазами ( $n = 1$ ) та нормального атмосферного тиску згідно із (6.72) у водоповітряній суміші  $c_{c \min} = 20$  м/с.

Таким чином, на відміну від однорідних середовищ швидкість звуку в ГРС істотно залежить від значення тиску і може бути на 1–2 порядки меншою порівняно зі швидкістю звуку в однорідному середовищі.

### 6.7.2 Структура потоків у газорідних сумішах

Унаслідок великої кількості різнорідних факторів існує значна різноманітність структур у потоках ГРС. Згідно з візуальними спостереженнями найбільш характерними формами потоків ГРС є:

- розшарована з гладкою або хвилястою поверхнею розділу фаз;
- пробкова, що характеризується чергуванням газових та рідинних пробок різних розмірів і форм;
- емульсійна пінна, в якій газ рівномірно розподілений у потоці у вигляді дрібних бульбашок, розділених тонкими плівками рідини;
- кільцева, за якої основна частина рідини рухається по стінках труби, а всередині рухається газове ядро;
- дисперсна, що характеризується рівномірним розподілом дрібних крапель рідини в потоці газу.

Структуру потоку визначають сукупністю параметрів:

- фізичними властивостями фаз (густиною, в'язкістю, поверхневим натягом на межі поділу фаз);
- розміщенням трубопроводу в просторі та його діаметра;
- витратою фаз та їх співвідношенням.

Наприклад, розшарована структура може існувати лише в горизонтальному та низхідному потоках. Емульсійна структура утворюється за наявності в рідині достатньої кількості природних або штучних емульгаторів.

Необхідно звернути увагу, що в нафтопроводах зниження тиску по його довжині є причиною розгазування нафти та утворення піни, що також обмежує завершеність гравітаційного поділу фаз. Це є причиною деякої відміни структур

нафтогазового й водоповітряного потоків. В останньому масообмін між фазами практично відсутній.

За заданого співвідношення фаз форму течії ГРС в трубопроводі визначають за критерієм стійкості Кутателадзе:

$$Ku = V_c \cdot \left( \frac{\rho_c^2}{(\rho_p - \rho_r) \cdot g \cdot \sigma} \right)^{0,25}, \quad (6.73)$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу на межі поділу рідини з газом.

Так, межі переходу від розшарованої структури потоку до пробкової відповідає критичне значення критерію Кутателадзе, яке визначають із залежності

$$Ku_{кр} = \frac{2,25}{1 - \beta_T} \cdot \left( 1 + 0,2 \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta}{\lambda_p}} \right), \quad (6.74)$$

де  $\theta$  – кут нахилу трубопроводу до горизонту;

$\lambda_p$  – коефіцієнт гідравлічного опору під час безнапірної течії рідини.

За  $Ku < Ku_{кр}$  в трубопроводі існує пробкова структура, а за  $Ku > Ku_{кр}$  – розшарована.

У трубопроводах систем нафтогазозбору, де реалізуються умови  $\sigma = idem$ ,  $\frac{\rho_p - \rho_r}{\rho_p} \approx 1$  та  $D \gg 0,05$  м, достатню точність розрахунків дає методика ВНДІ газу (Всеросійського науково-дослідного інституту газу та газових технологій). У цій методиці для узагальнення дослідних результатів замість критерію Кутателадзе використовують критерій Фруда:

$$Fr_c = \frac{V_c^2}{g \cdot D}. \quad (6.75)$$

Межу переходу від кільцевої структури до пробкової або розшарованої визначають за допомогою величини

$$\Gamma_{кр} = \frac{8,2 - 0,017 \cdot \bar{\mu}^2}{\sqrt{Re_r \cdot Fr_c \cdot \frac{\rho_r}{\rho_p - \rho_r}}} \cdot e^{(8 + 62 \cdot \bar{\mu}) \cdot \beta_p}, \quad (6.76)$$

де  $\bar{\mu} = \mu_{\Gamma} / \mu_p$  – приведена в'язкість,

$$Re_{\Gamma} = \frac{V_c \cdot D \cdot \rho_{\Gamma}}{\mu_{\Gamma}}. \quad (6.77)$$

За  $\Gamma_{кр} > 1$  структура потоку пробкова або розшарована, а за  $\Gamma_{кр} \leq 1$  – кільцева. Межу поділу між пробковою та розшарованою структурами визначають із залежності

$$Fr_{кр} = \frac{0,2 + 2 \cdot \lambda_p^{-1} \cdot \sin \theta}{(1 - \beta_{\Gamma})^2} \cdot e^{-2,5 \cdot \beta_{\Gamma}}. \quad (6.78)$$

Звідси

$$\lambda_p = 0,067 \cdot \left( \frac{158}{Re_p} + \frac{2 \cdot \Delta_{екв}}{D} \right)^{0,2}, \quad (6.79)$$

$$Re_p = \frac{\rho_p \cdot D}{\mu_p} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot D \cdot \sin \theta}{\lambda_p}}. \quad (6.80)$$

Значення  $\lambda_p$  визначають методом послідовних наближень залежно від числа Рейнольдса за допомогою розв'язування рівнянь (6.79) і (6.80).

За  $Fr_c > Fr_{кр}$  в трубопроводі існує пробкова структура потоку, а за  $Fr_c < Fr_{кр}$  – розшарована.

Необхідно мати на увазі, що зазначені структури потоку та залежності одержані для ділянок трубопроводів з усталеною структурою. Після місцевих опорів (колін, засувок тощо) диспергація газу в потоці зростає, і структура потоку відновлюється на ділянках труб довжиною, в окремих випадках, до 100 діаметрів.

Зауважимо, що явище стабілізації потоку ГРС вивчене недостатньо. На практиці відомі випадки застосування діафрагм як пристрою для штучної диспергації скупчень рідини в промислових газопроводах і подальшого транспортування її як ГРС упродовж кілометрів.

Для потоків ГРС характерні також пульсації тиску з певною амплітудою  $p_a$  і частотою. За допомогою проведення дослідів накопичені й узагальнені результати спостережень за пульсаціями тиску під час експлуатації

промислових нафтогазопроводів діаметром від 0,05 м до 0,5 м за тисків 2,5–3,0 МПа.

Хвилі тиску, поширювані в трубопроводі зі швидкістю звуку, можуть спричиняти коливання трубопроводу, особливо за наявності резонансу. Значні реактивні зусилля в трубопроводі можуть також виникнути унаслідок наявності різких поворотів, розгалужень тощо.

Найбільші за амплітудою пульсації тиску та інтервали часу для осереднення параметрів потоку відповідають області переходу від розшарованої до пробкової структури потоку. Встановлено, що зі збільшенням дисперсності газу в потоці амплітуда пульсацій тиску зменшується, а частота зростає.

### 6.7.3 Гідралічний розрахунок трубопроводів для газорідних сумішей

Оскільки немає ще розв'язку системи рівнянь, що описують течію ГРС у трубопроводах змінного профілю, то їх гідралічний розрахунок виконують для кожної ділянки окремо з використанням розрахункових формул для тієї структури потоку, яка формується на ній, і для середніх (по довжині ділянки) значень тиску й температури:

$$p_c = 0,5 \cdot (p_{1c} + p_{2c}) \text{ і } T_c = 0,5 \cdot (T_{1c} + T_{2c}). \quad (6.81)$$

Індекси 1 і 2 відповідають початку й закінченню розрахункової ділянки.

Втрати тиску на розрахунковій ділянці

$$\Delta p_c = \Delta p_{ст} + \Delta p_{тер} + \Delta p_{м}, \quad (6.82)$$

де  $\Delta p_{ст}$ ,  $\Delta p_{тер}$ ,  $\Delta p_{м}$  – перепади тиску на подолання сил тяжіння, тертя та гідралічні втрати тиску в місцевих опорах.

Загальний перепад тиску в трубопроводі

$$\Delta p_c = \sum_{i=1}^n \Delta p_{c i}, \quad (6.83)$$

де  $i$  – номер розрахункової ділянки;

$n$  – число розрахункових ділянок.



Для розрахунку втрат тиску на тертя існують різні методики, описані в спеціальній науковій літературі. Однією з найбільш досконалих є методика ВНДІ газу, що дозволяє виконувати розрахунки в широкому діапазоні змін параметрів потоку.

Методика ВНДІ газу ґрунтується на теоретичних дослідженнях і лабораторних експериментах, виконаних із використанням суміші типу повітря – вода, повітря – водні розчини гліцерину, повітря – олива. Перепади тиску визначають окремо для низхідної й висхідної ділянок трубопроводу.

#### 6.7.4 Місцеві опори

Визначення втрат тиску в місцевих опорах є однією з найскладніших задач в гідродинаміці ГРС. Відносно незначний накопичений експериментальний матеріал ще не знайшов достатнього узагальнення. Найбільш досконало розроблені методики розрахунку втрати тиску в потоках ГРС за раптового звуження й розширення течії ГРС через штуцери (циліндричні насадки) і діафрагми. У практичних розрахунках найчастіше використовують емпіричні залежності.

Зазвичай під час течії ГРС через місцеві опори відбувається гомогенізація потоку, структура потоку наближається до пробкової з подрібненою до дрібних бульбашок газовою фазою. Після місцевого опору на ділянці стабілізації структура потоку ГРС може відновитися до того стану, який був до місцевого опору.

Для наближених оцінювань втрат тиску потоку ГРС у місцевих опорах можна користуватися методиками, рекомендованими для однорідних середовищ. У цьому разі ГРС розглядають як гіпотетичну однорідну рідину з густиною

$$\rho_c = \beta_p \cdot \rho_p + \beta_r \cdot \rho_r$$

і кінематичною в'язкістю

$$\nu_c = \left( \frac{\beta_p}{\nu_p} + \frac{\beta_r}{\nu_r} \right)^{-1}.$$

Число Рейнольдса в цьому разі дорівнює

$$Re_c = V_c \cdot D \cdot \left( \frac{\beta_p}{\nu_p} + \frac{\beta_r}{\nu_r} \right).$$

### Запитання і завдання для самоконтролю

- 1 Наведіть класифікацію трубопроводів.
- 2 Яка принципова відмінність у розрахунках коротких і довгих трубопроводів?
- 3 Наведіть основні задачі розрахунку трубопроводів.
- 4 Яким чином визначають необхідний напір на початку трубопроводу?
- 5 Яка відмінність між необхідним напором та характеристикою трубопроводу?
- 6 Як визначають робочу точку насоса?
- 7 Наведіть рівняння для послідовно з'єднаних простих трубопроводів.
- 8 Наведіть рівняння для паралельно з'єднаних простих трубопроводів.
- 9 Назвіть особливості розрахунку розгалужено з'єднаних простих трубопроводів.
- 10 Як визначають питомий опір труби  $s_0$ ?
- 11 Зазначте особливості розрахунку трубопроводів під час руху стисливої рідини.

## Розділ 7

### ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ ТА НАСАДКІВ

#### 7.1 Загальна характеристика процесу витікання рідини

Під час витікання рідини з отворів та насадків утворюється струмина, що на відміну від руслових потоків не обмежена твердою поверхнею. Струминна гідравліка – один із найважливіших розділів гідромеханіки. Процеси витікання рідин через отвори та насадки (короткі патрубки різної конфігурації) мають місце в інженерній практиці. Це, наприклад, операції з випорожнення різних ємностей (бочок, резервуарів, цистерн тощо), витікання рідин із дозувальних пристроїв та форсунок, робота активних гідравлічних турбін, гідромоніторних апаратів і т. ін. Тому над дослідженням аналогічних процесів і вирішенням відповідних практичних завдань ще з XVII століття працювали визначні інженери.

Процес витікання рідини з посудин через отвори та насадки обумовлений напором, який визначається глибиною знаходження центра ваги площини отвору відносно рівня рідини в посудині і в тому середовищі, куди здійснюється витікання. Тобто має місце перетворення потенціальної енергії на кінетичну. Якщо цей напір підтримують постійним, процес витікання буде стаціонарним (усталеним).

#### 7.2 Витікання рідини з отворів

*7.2.1 Витікання рідини з малого отвору в тонкій стінці за сталого напору*

Отвір називають *малим*, якщо в усіх його точках геометричний напір  $H$  практично однаковий. У цьому разі швидкості у верхніх і нижніх точках отвору приблизно однакові.

Зазвичай отвір називають малим, якщо його висота  $d$  менша або дорівнює  $0,2-0,1H$  (рис. 7.1).

Якщо товщина стінки не впливає на умови витікання рідини, то такий отвір вважають отвором у тонкій стінці. У цьому разі рідина торкається лише кромки отвору, що може бути в разі зрізу кромки під гострим кутом (рис. 7.1 б) або за товщини стінки  $\delta$ , меншої від половини його діаметра ( $\delta \leq 0,5d$ , рис. 7.1 в). Сталий напір  $H$  забезпечується припливом рідини до резервуара з витратою  $q$ , що дорівнює витраті витікання  $Q$ .

Для визначення швидкості витікання використаємо рівняння Бернуллі для перерізів  $0-0$  і  $C-C$  відносно площини порівняння  $0'-0'$ , що проходить через центр отвору. Переріз  $0-0$  вибирають на поверхні води в резервуарі, а для вибору другого перерізу потрібно враховувати те, що витічний з отвору струмінь стискується. Безпосередньо в отворі лінії течії мають різне викривлення, і живий переріз не є плоским. На відстані приблизно  $0,5d$  від входу в отвір, де струмінь має найбільше стиснення (переріз  $C-C$ ), криволінійні струминки вирівнюються.

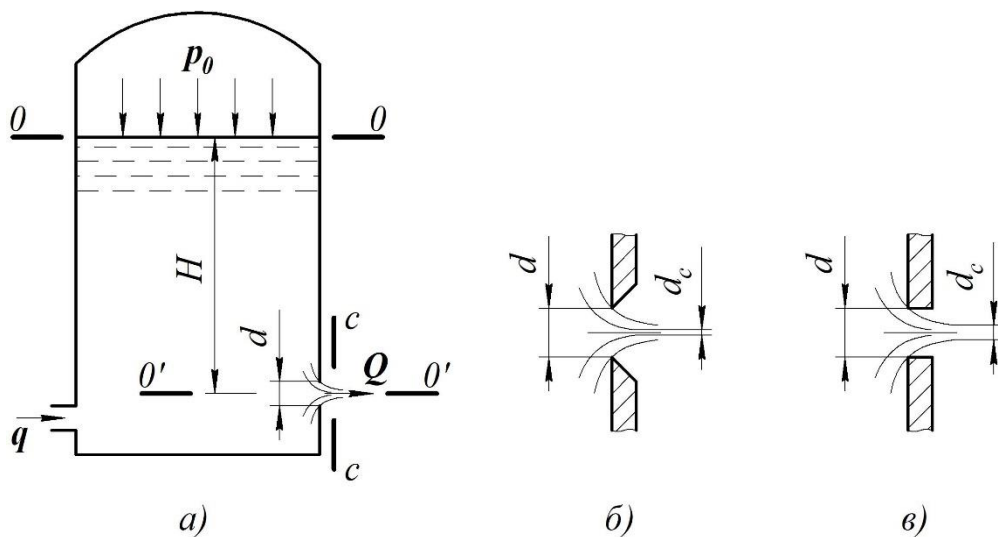


Рисунок 7.1 – Витікання рідини з малого отвору в тонкій стінці за сталого напіру

Переріз  $C-C$  називають *стисненим перерізом*:

$$H + \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha \cdot V_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha \cdot V_c^2}{2g} + \zeta_{\text{отв}} \cdot \frac{V_c^2}{2g}, \quad (7.1)$$

де  $p_0$  – манометричний тиск на вільній поверхні води в резервуарі;  
 $V_0$  – середня швидкість у перерізі  $0-0$ ;

$z_C$  – координата центра перерізу  $C-C$ ,  $p_C = 0$ ;

$V_C = V$  – швидкість у перерізі  $C-C$ ;

$\zeta_{\text{отв}}$  – коефіцієнт місцевих опорів в отворі.

Позначимо  $H' = H + \frac{p_0}{\rho \cdot g}$ . Це зведений напір.

Повний, або гідродинамічний, напір

$$H_0 = H' + \frac{\alpha \cdot V_0^2}{2g}. \quad (7.2)$$

Взявши  $\alpha \approx 1,0$ , після перетворення дістанемо

$$H_0 = \frac{V^2}{2g} \cdot (1 + \zeta_{\text{отв}}). \quad (7.3)$$

Звідси швидкість витікання рідини з малого отвору

$$V = \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}, \quad (7.4)$$

де  $\varphi$  – коефіцієнт швидкості, що залежить від виду отвору,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{отв}}}}. \quad (7.5)$$

Коефіцієнт  $\varphi$  завжди менший за одиницю. Він характеризує зменшення швидкості в'язкої (реальної) рідини порівняно зі швидкістю нев'язкої рідини за рахунок втрат під час витікання води через отвір. Наприклад, для круглого отвору  $\varphi = 0,97$ . Витрата  $Q$  під час витікання рідини через отвори є добутком її швидкості в перерізі  $C-C$  на площину живого перерізу струменя  $\omega_C$ . Оскільки струмінь у цьому перерізі стискується, то

$$\omega_C = \varepsilon \cdot \omega, \quad (7.6)$$

де  $\varepsilon$  – коефіцієнт стиснення, що залежить від форми отвору й умов стиснення (для круглого отвору  $\varepsilon = 0,64$ );

$\omega$  – площа перерізу отвору.

Звідси маємо

$$Q = V \cdot \omega_c = \varphi \cdot \varepsilon \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0},$$

і

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}, \quad (7.7)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт витрати,

$$\mu = \varepsilon \cdot \varphi < 1. \quad (7.8)$$

### 7.2.2 Витікання рідини з відкритого резервуара

В окремому випадку під час витікання рідини з відкритого резервуара

$$H' = H, \quad H_0 = H + \frac{\alpha V_0^2}{2g}.$$

У резервуарах, що мають великі поперечні розміри, швидкість у перерізі 0–0, дуже мала і величиною швидкісного напору  $\frac{\alpha \cdot V_0^2}{2 \cdot g}$  можна знехтувати.

Тоді формули для закритого резервуара матимуть вигляд:

$$V = \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H'}, \quad (7.9)$$

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H'}; \quad (7.10)$$

для відкритого резервуара:

$$V = \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}, \quad (7.11)$$

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}. \quad (7.12)$$

### 7.2.3 Траєкторія струменя. Визначення коефіцієнтів швидкості, витрати і стиснення струменів

Струмінь витікає з отвору (рис. 7.2) з горизонтальною швидкістю  $V$ , і за час  $t$  частинка рідини в струмені подолає відстань по горизонталі

$$x = Vt. \quad (7.13)$$

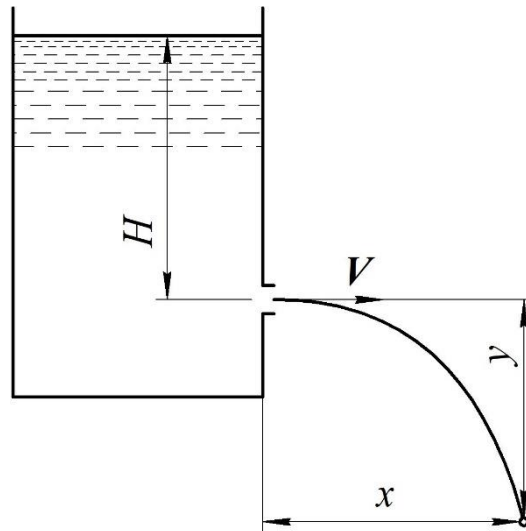


Рисунок 7.2 – Траєкторія струменя рідини

За цей самий час  $t$  частинка рідини в умовах вільного падіння пройде вертикальний шлях

$$y = \frac{g \cdot t^2}{2}. \quad (7.14)$$

Визначивши  $t$  із формули (7.13) і підставивши його у вираз (7.14), одержимо рівняння траєкторії струменя, що рухається в повітрі:

$$y = \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot V^2}. \quad (7.15)$$

Координати  $x$  і  $y$  у будь-якій точці струменя можна визначити за допомогою експерименту і потім знайти швидкість

$$V = x \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot y}} \quad (7.16)$$

За достатньої величини значення  $x$  і  $y$  таке визначення швидкості є більш точним, ніж безпосереднє вимірювання швидкості в струмені за невеликих його поперечних розмірів. Потім із формули (7.11) коефіцієнт швидкості

$$\varphi = \frac{V}{\sqrt{2 \cdot g \cdot H}} \quad (7.17)$$

Витрату  $Q$  можна визначити об'ємним способом, а потім знайти коефіцієнт витрати:

$$\mu = \frac{Q}{\omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}} \quad (7.18)$$

а також коефіцієнт стиснення струменя

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\varphi} \quad (7.19)$$

Таке визначення коефіцієнта  $\varepsilon$  є більш точним, ніж безпосереднє вимірювання розмірів перерізу струменя в повітрі.

#### 7.2.4 Повне досконале, недосконале та неповне стиснення

Вищенаведені дані стосуються так званого повного стиснення, за якого відстань від будь-якої межі контуру отвору до вільної поверхні рідини або краю стінки, в межах якої розміщений отвір, буде не меншою, ніж потрібний поперечний розмір отвору (рис. 7.3).

Якщо хоча б одна з таких відстаней буде меншою за потрібний розмір отвору, то стиснення буде недосконалим (рис. 7.3 II). Тоді коефіцієнт витрати збільшується і його можна визначити за формулою

$$\mu_H = \mu \cdot \left[ 1 + 0,641 \cdot \left( \frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right] \quad (7.20)$$



де  $\omega$  – площа отвору;

$\Omega$  – площа стінки, в якій розміщений отвір.

Якщо в разі підходу до отвору потік з одного або кількох боків не має стиснення (рис. 7.3 III, рис. 7.4), то стиснення буде неповним. Коефіцієнт витрат у цьому разі визначають за формулою

$$\mu_{\text{нп}} = \mu \cdot \left( 1 + k \cdot \frac{\chi_1}{\chi} \right), \quad (7.21)$$

де  $k$  – коефіцієнт, що залежить від форми отвору, для круглих отворів  $k = 0,128$ , для квадратних  $k = 0,152$ ;

$\chi_1$  – частина периметра, де відсутнє стиснення;

$\chi$  – повний периметр отвору.

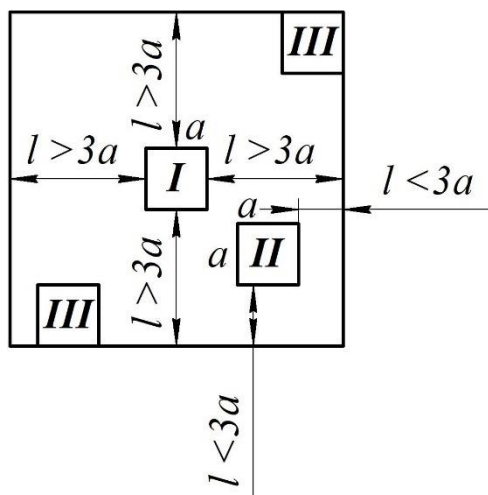


Рисунок 7.3 – Повне досконале й недосконале стиснення

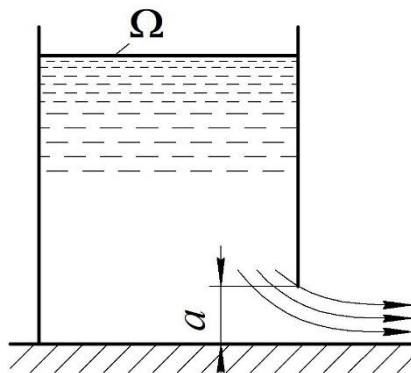


Рисунок 7.4 – Неповне стиснення

### 7.2.5 Вплив числа Рейнольдса на витікання рідини з отворів

Коефіцієнти швидкості, витрати, стиснення струменя, наведені вище, характеризують квадратичну область опорів і відповідають числам Рейнольдса  $Re = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot H \cdot d}}{\nu} \geq 10^5$ . За менших чисел Рейнольдса ці коефіцієнти залежать від їх значень. Їх наведено на графіку О. Д. Альтшуля (рис. 7.5). Зазвичай малі числа Рейнольдса характеризують витікання рідини з підвищеною в'язкістю (нафта, бітум, машинні мастила тощо).

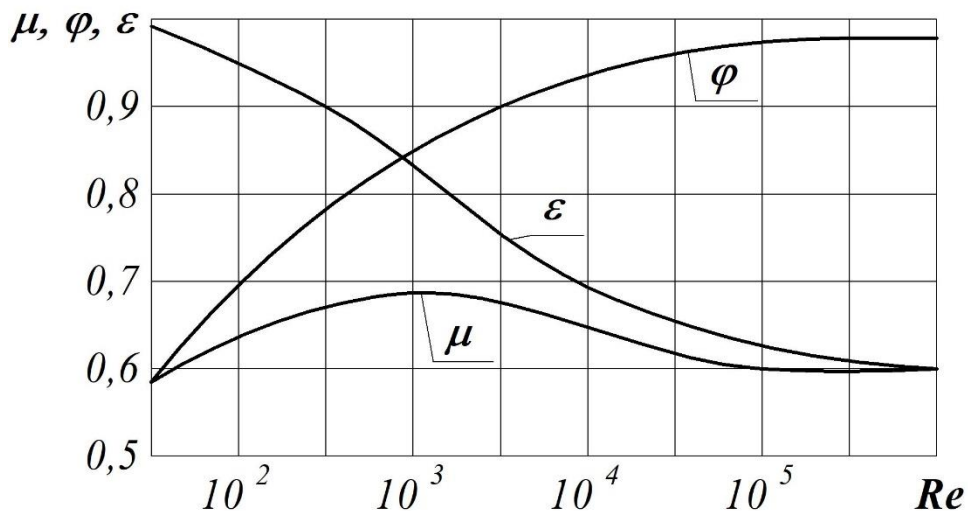


Рисунок 7.5 – Залежність  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  і  $\mu$  від  $Re$  для круглого отвору в тонкій стінці

### 7.2.6 Витікання рідини через затоплені отвори (під рівень)

У цьому разі розрахункові перерізи 1–1 і 2–2 вибирають на поверхнях рідини в обох резервуарах (рис. 7.6), а площина порівняння проходить через центр отвору.

Нехтуючи швидкісними напорами в перерізах 1–1 і 2–2, можемо записати

$$H_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = H_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{V^2}{2g} (\zeta_{\text{отв}} + \zeta_{\text{вих}}), \quad (7.22)$$

де  $V$  – швидкість рідини в стисненому перерізі;

$\zeta_{\text{отв}}$  – коефіцієнт опору отвору;

$\zeta_{\text{вих}}$  – коефіцієнт опору на виході з отвору в резервуар.

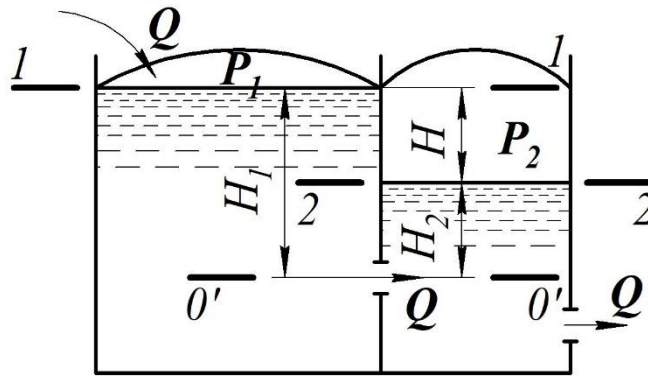


Рисунок 7.6 – Витікання рідини через затоплений отвір (під рівень)

За великих розмірів резервуара можна записати  $\zeta_{\text{вих}} = \alpha = 1$ .

Тоді

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{отв}}}} \cdot \sqrt{2g \left( H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)},$$

або

$$V = \varphi \cdot \sqrt{2g \cdot \left( H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}, \quad (7.23)$$

де  $H = H_1 - H_2$ .

Аналогічно витрата

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g \cdot \left( H + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} \right)}. \quad (7.24)$$

Для відкритих резервуарів

$$V = \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}, \quad (7.25)$$

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}. \quad (7.26)$$

### 7.3 Витікання рідини з насадків

Насадком називають короткий патрубок, умонтований в стінку чи дно посудини. Співвідношення довжини насадка  $l$  до його діаметра  $d$ :  $l/d = 2 - 4$ .

Якщо:

- $l < 2d$ , вважають, що витікання рідини проходить через отвір;
- $l > 4d$ , то розглядають насадок як складний місцевий опір;
- $l > 20d$ , то розглядають насадок як короткий трубопровід.

На практиці переважно використовують такі форми насадків (рис. 7.7):

- 1) циліндричні зовнішні;
- 2) циліндричні внутрішні;
- 3) конічно збіжні (кут конусності  $12-15^\circ$ ) або конфузорні;
- 4) конічно розбіжні (кут конусності  $5-7^\circ$ ) або дифузорні;
- 5) коноїдальні (виконані за формою стисненої струмини).

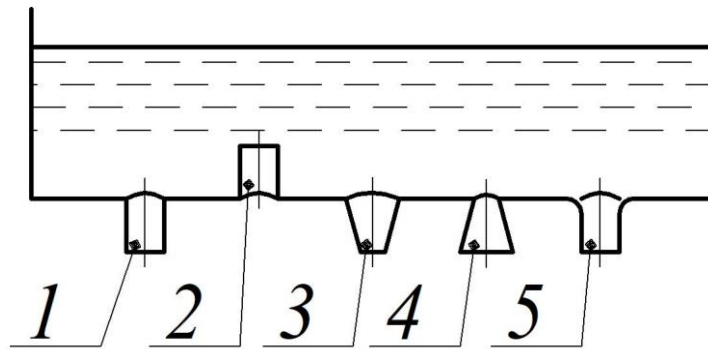


Рисунок 7.7 – Основні типи насадків

Циліндричними насадками є також отвори в товстій стінці без заокруглення вхідної кромки.

Використовують насадки для зливання рідини з резервуарів, басейнів, водоймищ тощо.

Конічно збіжні насадки, як і коноїдальні, використовують для створення струмини з великою кінетичною енергією (пожежні брандспойти, робочі насадки гідромоніторних пристроїв та активних гідравлічних турбін, тощо).

Конічно розбіжні насадки використовують для зменшення вихідної швидкості й перетворення кінетичної енергії потоку на потенціальну енергію напору (тиску) рідини.

## 7.3.1 Зовнішній циліндричний насадок

У разі входу в зовнішній циліндричний насадок потік обтікає гострі його краї, і струмінь стискується так само, як і під час витікання через отвори (рис. 7.8).

Струмінь, протікаючи, захоплює повітря, яке на початку витікання перебувало між ним і стінками насадка. У результаті в цьому просторі створюється вакуум, що притягує струмінь до стінок. Струмінь розширюється й витікає з насадка вже повним живим перерізом без стиснення на виході.

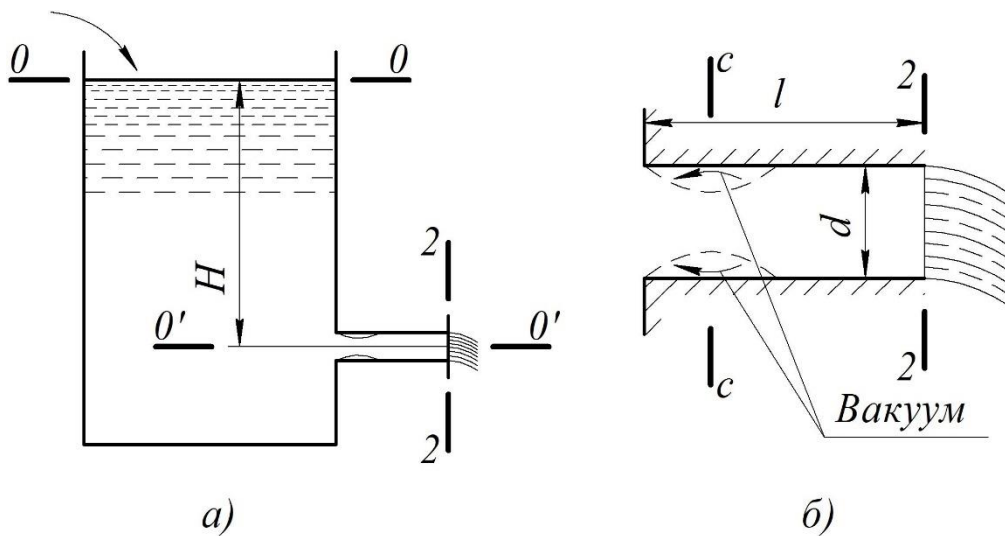


Рисунок 7.8 – Витікання рідини із зовнішнього циліндричного насадка

Витікання через насадок розраховують аналогічно витіканню через отвір за допомогою рівняння Бернуллі для перерізів 0–0 і 2–2 на виході з насадка.

Розглянемо випадок витікання з відкритого резервуара, припускаючи, що  $V_0 \approx 0$  і  $H_0 = H$ .

Тоді маємо

$$H = \frac{V^2}{2g} + \zeta_{\text{нас}} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

Звідси

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{нас}}}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = \varphi_{\text{нас}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}, \quad (7.27)$$

де  $\zeta_{\text{нас}}$  – коефіцієнт опору для насадки;

$\varphi_{\text{нас}}$  – коефіцієнт швидкості для насадку.

Коефіцієнт швидкості  $\varphi_{\text{нас}}$  у цьому разі буде відрізнятися від коефіцієнта швидкості для отвору  $\varphi_{\text{нас}}$ , тому що, крім втрат на обтікання країв, у насадку будуть ще й втрати напору на розширення струменя за перерізом С–С. Можна вважати, що загальний опір у насадку буде аналогічним опору на вході в трубу з резервуара ( $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$ ). Тоді маємо

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{отв}} + \zeta_{\text{розш}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{вх}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5}} = 0,82, \quad (7.28)$$

де  $\zeta_{\text{отв}}$  – коефіцієнт опору для отвору;

$\zeta_{\text{розш}}$  – коефіцієнт опору в разі розширення струменя після стисненого перерізу.

Результати дослідів близькі до результату, одержаного за формулою (7.28) за довжини насадок  $l = (3 - 4)d$  (де  $d$  – це діаметр насадку). За довжини насадку  $l > (3 - 4)d$  до опорів на обтікання країв і розширення струменя потрібно додавати опір по довжині насадку, що зменшує коефіцієнт швидкості:

$$\varphi_{\text{нас}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{отв}} + \zeta_{\text{розш}} + \lambda \cdot \frac{l}{d}}}. \quad (7.29)$$

Якщо  $l < (3 - 4)d$ , ділянка розширеного струменя в насадку буде дуже короткою й неспроможною протистояти різниці атмосферного тиску на виході з насадку і зниженого тиску ( $p_c < p_a$ ) в зоні перерізу С–С. У цьому разі зовнішнє повітря час від часу проривається до насадку, ліквідує вакуум. Течія рідини стає нестійкою, що неприпустимо в інженерних спорудах. Тому наведена вище довжина насадку є оптимальною.

Витрату через насадок визначають за формулою

$$Q = \mu_{\text{нас}} \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}. \quad (7.30)$$

Однак коефіцієнт витрати  $\mu_{\text{нас}}$ , унаслідок того що відсутнє стиснення струменя на виході з насадка, є значно більшим, ніж під час витікання через отвір.

За  $\varphi_{\text{нас}} = 0,82$ ,  $\varepsilon_{\text{нас}} = 1,0$ ,  $\mu_{\text{нас}} = \varphi_{\text{нас}}\varepsilon_{\text{нас}} = 0,82 \cdot 1,0 = 0,82$ .

Для порівняння  $\mu_{\text{отв}} = 0,62$ .

$$\frac{\mu_{\text{нас}} - \mu_{\text{отв}}}{\mu_{\text{отв}}} \cdot 100 \% = \frac{0,82 - 0,62}{0,62} \cdot 100 \% = 30 \%$$

Це означає, що витрата через насадок на 30 % більша, ніж через отвір. Швидкість протікання через насадок на 15 % менша, ніж швидкість протікання через отвір:

$$\frac{\varphi_{\text{отв}} - \varphi_{\text{нас}}}{\varphi_{\text{отв}}} \cdot 100 \% = \frac{0,97 - 0,82}{0,97} \cdot 100 \% = 15 \%$$

### 7.3.1 Вакууму насадку

Вакуум у насадку встановлюють тим більшим, чим більшою буде швидкість витікання, тобто чим більший напір перед входом до насадка.

Оскільки вакуум має граничне значення, то й напір перед насадком не може бути як завгодно великим і теж має граничне значення. Його можна визначити з рівняння Бернуллі для стисненого перерізу С–С і перерізу 2–2 на виході з насадка (рис. 7.8 б)

$$\frac{p_c}{\rho \cdot g} + \frac{V_c^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{c-2}. \quad (7.31)$$

Вважаємо, що втрати напору  $h_{c-2}$  між перерізами С–С і 2–2 визначають як втрати на раптове розширення потоку.

Тоді маємо

$$\frac{p_c}{\rho \cdot g} + \frac{V_c^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{(V_c - V_2)^2}{2g}, \quad (7.32)$$

з рівняння нерозривності впливає

$$V_c \cdot \omega_c = V_2 \cdot \omega_2, \quad (7.33)$$

де  $\omega_c$  – площа живого перерізу С–С;

$\omega_2$  – площа живого перерізу 2–2.

$$V_c = V_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_c} = \frac{V_2}{\varepsilon}, \quad (7.34)$$

де  $\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega_2}$  – коефіцієнт стиснення струменя в перерізі С–С.

$$\frac{p_2}{\rho \cdot g} - \frac{p_c}{\rho g} = \frac{V_c^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} - \frac{(V_c - V_2)^2}{2g},$$

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho \cdot g} - \frac{p_c}{\rho \cdot g} &= \frac{V_2^2}{\varepsilon^2 \cdot 2 \cdot g} - \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 = \frac{V_2^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} - 1\right) = \\ &= \frac{V_2^2}{2g} \cdot \left(\frac{2}{\varepsilon} - 2\right) = \frac{V_2^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$V_2 = \varphi_H \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H},$$

одержуємо

$$\frac{p_2}{\rho \cdot g} - \frac{p_c}{\rho g} = 2 \cdot \varphi_{\text{нас}}^2 \cdot H \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right).$$

Вважаючи, що коефіцієнт стиснення струменя в перерізі С–С, як і для малого отвору,  $\varepsilon = 0,64$  і  $\varphi_{\text{нас}} = 0,82$ , одержуємо

$$p_2 - p_c = 0,75 \cdot \rho \cdot g \cdot H. \quad (7.35)$$

Ураховуючи, що  $p_2 = p_{\text{ат}}$ , а теоретично граничним є такий вакуум, за якого вода перетворюється на пару, тобто тиск у цьому разі є тиском пароутворення (наприклад, для води за  $t = 20^\circ\text{С}$  п'езометрична висота, що відповідає тиску пароутворення,  $\frac{p_{\text{п}}}{\rho g} = 0,24$  м), маємо



$$H_{кр} = \frac{p_a - p_{п}}{0,75 \cdot \rho \cdot g} = \frac{10,33 - 0,24}{0,75} = 13,5 \text{ м.}$$

В інженерній практиці з деяким запасом (з метою запобігання зриву вакууму) рекомендується брати

$$h_{вак} = \frac{p_a - p_{п}}{\rho g} = 8 \text{ м,}$$

тобто

$$H_{кр} \leq 10,7 \text{ м.}$$

Коли  $H < H_{кр}$  насадок буде працювати в режимі насадка;  $H > H_{кр}$  – витікання з насадка буде таким, як витікання з малого отвору.

#### 7.4 Витікання рідини з отворів і насадків за змінного напору

Розглянемо витікання рідини з резервуара, коли витрата з резервуара  $Q$  не дорівнює витраті, що надходить до резервуара  $q$  (рис. 7.9).

За  $q > Q$  рівень води в резервуарі збільшуватиметься, а за  $q < Q$  – зменшуватиметься. Витікання рідини в цьому разі є рух неусталений.

За час  $dt$  об'єм рідини в резервуарі зміниться на величину  $\Omega dz$  ( $\Omega$  – площа поверхні рідини в резервуарі на відмітці  $z$  за час  $dt$ ).

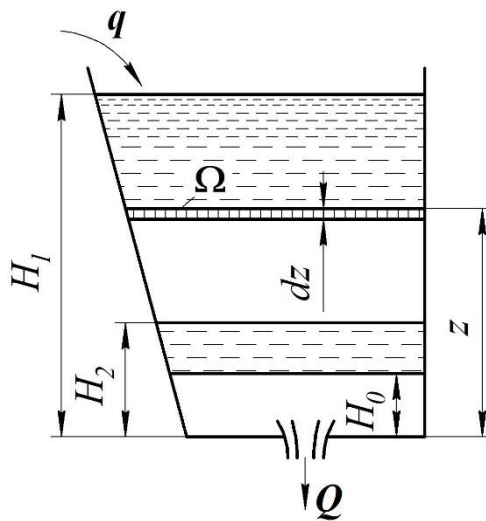


Рисунок 7.9 – Витікання рідини з резервуара за змінного напору

Ця зміна об'єму дорівнює різниці об'єму, який надійшов у резервуар  $qdt$ , та об'єму, який витік із резервуара  $Qdt$ :

$$\Omega dz = qdt - Qdt. \quad (7.36)$$

Це рівняння балансу води (рівняння неусталеного руху води в резервуарі).

При сталому припливі  $q$  неусталений рух намагається стати усталеним. У будь-який період часу витрата з резервуара

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gz}. \quad (7.37)$$

Якщо  $q > Q$ , то рівень рідини в резервуарі збільшується, якщо  $q < Q$ , то рівень зменшується. У цьому разі витрата витікання  $Q$  збільшується (зменшується) доти, поки вона не дорівнюватиме припливу рідини  $q$ . Тоді рух стане усталеним.

За  $Q = q$  напір

$$H_0 = \frac{q^2}{\mu^2 \cdot \omega^2 \cdot 2 \cdot g}. \quad (7.38)$$

Час, потрібний для зміни рівня рідини в резервуарі на величину  $dz$ , визначають за формулою (7.36) з урахуванням залежностей (7.37) і (7.38):

$$\Omega dz = dt \cdot (\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0} - \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z}).$$

Звідси

$$dt = \frac{\Omega dz}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g} \cdot (\sqrt{H_0} - \sqrt{z})}.$$

Найчастіше  $\mu = f(Re)$ , але для рідин із невеликою в'язкістю (вода) можна вважати, що  $\mu = const$ . Зінтегруємо цей вираз. Час зміни рівня води від рівня  $H_1$  до  $H_2$

$$t = \frac{1}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{\Omega dz}{(\sqrt{H_0} - \sqrt{z})}. \quad (7.39)$$

Для розв'язування цього рівняння необхідно знати закон зміни площі поверхні води  $\Omega$  залежно від її відмітки  $\Omega = f(z)$ .

Визначимо час спорожнення резервуара без припливу води. За  $q = 0$  з формули (7.38) маємо  $H_0 = 0$ , і тоді

$$\begin{aligned} t &= -\frac{\Omega}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \\ &= -\frac{2 \cdot \Omega}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}} \cdot \sqrt{z} \Big|_{H_1}^{H_2} = \frac{2 \cdot \Omega}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Це час часткового спорожнення резервуара від рівня  $H_1$  до рівня  $H_2$ .

В окремому випадку за повного спорожнення резервуара ( $H_2 = 0$ ) рівняння (7.40) набирає вигляду

$$t = \frac{2 \cdot \Omega \cdot \sqrt{H_1}}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_1}} = \frac{2 \cdot \Omega \cdot H_1}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1}}$$

або

$$t = \frac{2 \cdot W_1}{Q_1}, \quad (7.41)$$

де  $W_1$  – початковий об'єм води в резервуарі;

$Q_1$  – витрата на початку витікання.

Час повного спорожнення резервуара вдвічі більший від часу витікання такого самого об'єму рідини за сталого напору.

### 7.5 Сила тиску струмини на плоскі й криволінійні поверхні

Струмінь витікає з отвору з витратою  $Q_0$  та швидкістю  $V_0$ , натрапляє на своєму шляху на тверду перешкоду і розтікається вздовж неї (рис. 7.10).

Для плоскої стінки це розтікання відбувається по обидва боки від місця стикання з перешкодою зі швидкостями  $V_1$  і  $V_2$  й витратами  $Q_1$  та  $Q_2$ .

Струмінь діє на перешкоду із силою  $F$ . Для визначення сили  $F$  застосуємо рівняння зміни кількості руху для відсічення струменя, обмеженого перерізами 0-0, 1-1 і 2-2.

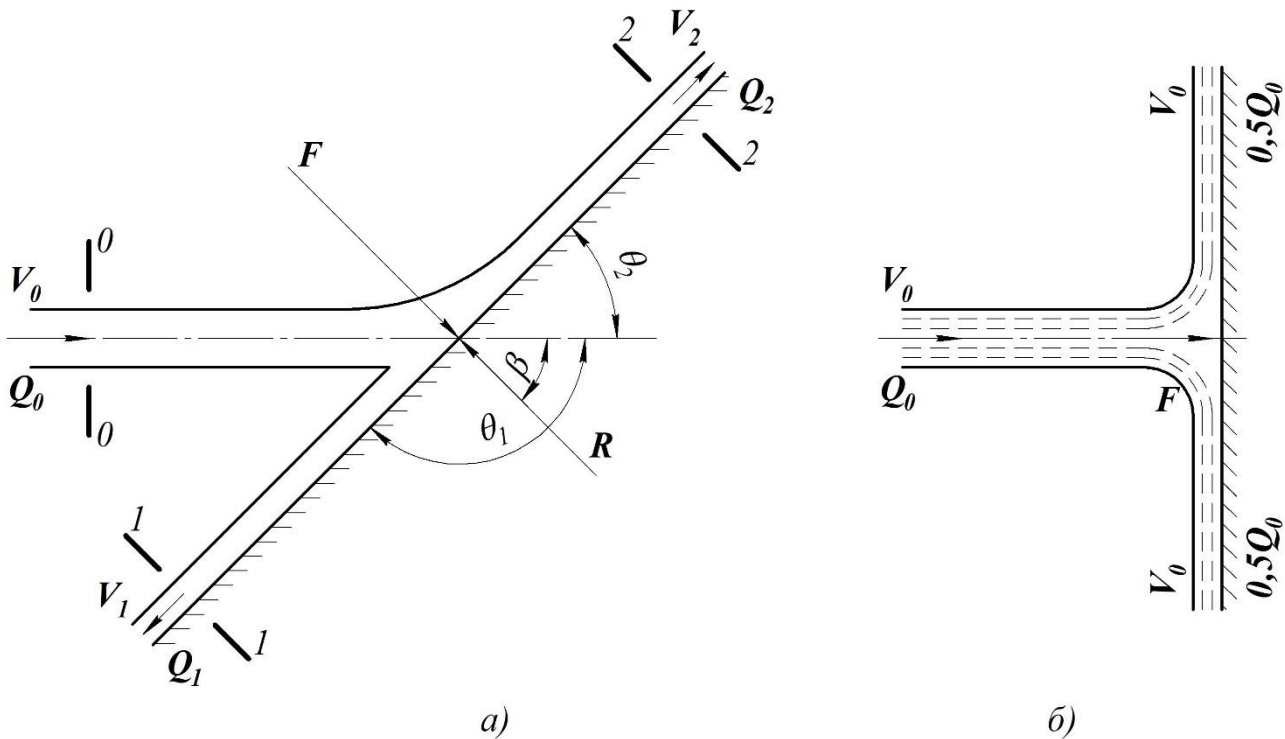


Рисунок 7.10 – Схема для визначення тиску струменя на плоскі поверхні

Кількість руху в будь-якому перерізі струменя за одиницю часу (за 1 с)

$$KP = \rho \cdot Q \cdot \alpha_0 \cdot V, \quad (7.42)$$

де  $\alpha_0$  – коефіцієнт кількості руху,  $\alpha_0 = 1,0$ .

Сила тиску струменя на перешкоду дорівнює реактивній силі тиску перешкоди на струмінь ( $F = -R$ ).

Проекція імпульсу цієї сили на вісь струменя дорівнює зміні проєкції кількості руху в струмені до та після його розтікання:

$$F \cdot \cos \beta = \rho \cdot V_0 \cdot Q_0 - \rho \cdot V_1 \cdot Q_1 \cdot \cos \theta_1 - \rho \cdot V_2 \cdot Q_2 \cdot \cos \theta_2. \quad (7.43)$$

Якщо струмінь діє на плоску поверхню, розміщену перпендикулярно до напрямку струменя (рис. 7.10 б), то  $\beta = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ ,  $\cos 0^\circ = 1$ .

Тоді

$$F = \rho \cdot V_0 \cdot Q_0 = \rho \cdot V_0^2 \cdot \omega. \quad (7.44)$$

Досліди засвідчують, що в дійсності сила тиску становить приблизно 92–96 % від значення  $F$ , визначеного за цією формулою. Це зменшення пояснюють викривленням ліній течії під час взаємодії струменя з перешкодою.

Для порівняння розглянемо динамічний і статичний тиск рідини на плоску поверхню.

Наприклад, струмінь витікає з резервуара через зовнішній циліндричний насадок під дією напору  $H$ . Швидкість витікання

$$V_0 = \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}.$$

Сила тиску струменя на перешкоду, встановлену поблизу від виходу з насадка (рис. 7.11 а), з урахуванням зменшення її до 94 %

$$F = \rho \cdot V_0^2 \cdot \omega \cdot 0,94 = \rho \cdot \varphi^2 \cdot 2 \cdot g \cdot H \cdot \omega \cdot 0,94 = 1,88 \cdot \rho \cdot \varphi^2 \cdot g \cdot \omega \cdot H. \quad (7.45)$$

Якщо перешкоду перемістити впритул до виходу з насадка, то витікання припиниться, і на перешкоду діятиме сила статичного тиску (рис. 7.11 б):

$$F_{ст} = \rho \cdot g \cdot \omega \cdot H. \quad (7.46)$$

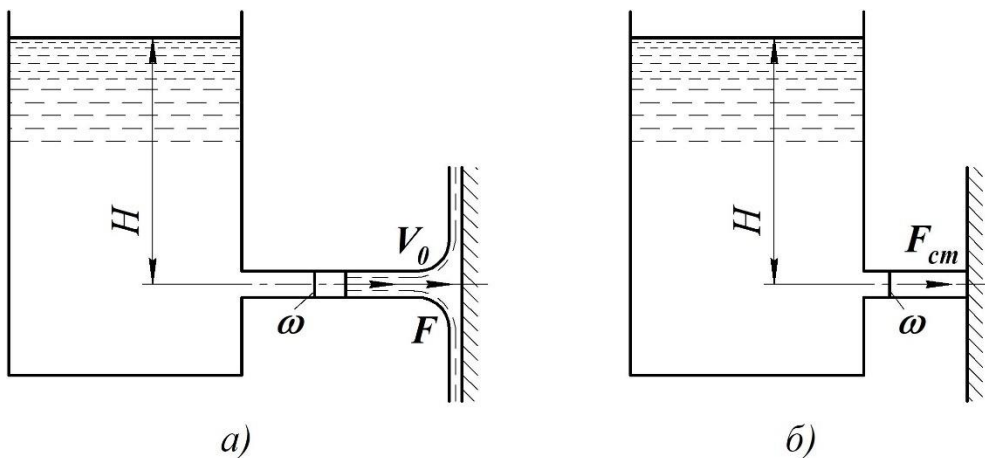


Рисунок 7.11 – Схема для визначення сили тиску на перешкоду

Відношення сили тиску струменя до сили статичного тиску для зовнішніх циліндричних насадків:

$$\frac{F}{F_{ст}} = \frac{1,88 \cdot \rho \cdot \varphi^2 \cdot g \cdot \omega \cdot H}{\rho \cdot g \cdot \omega \cdot H} = 1,88 \cdot \varphi^2 = 1,88 \cdot 0,82^2 = 1,26.$$

Отже, динамічний тиск більший від статичного в 1,26 раза.

Якщо поверхня, на яку діє тиск струменя, має вигляд, як на рис. 7.12 а, то кути  $\theta_1 = \theta_2 > 90^\circ$ , і косинус цих кутів буде меншим від нуля. Таке положення збільшує силу тиску струменя; це використовують під час проектування робочих коліс гідротурбін. Найбільшою сила тиску буде за  $\theta_1 = \theta_2 = 180^\circ$  (рис. 7.12 б).

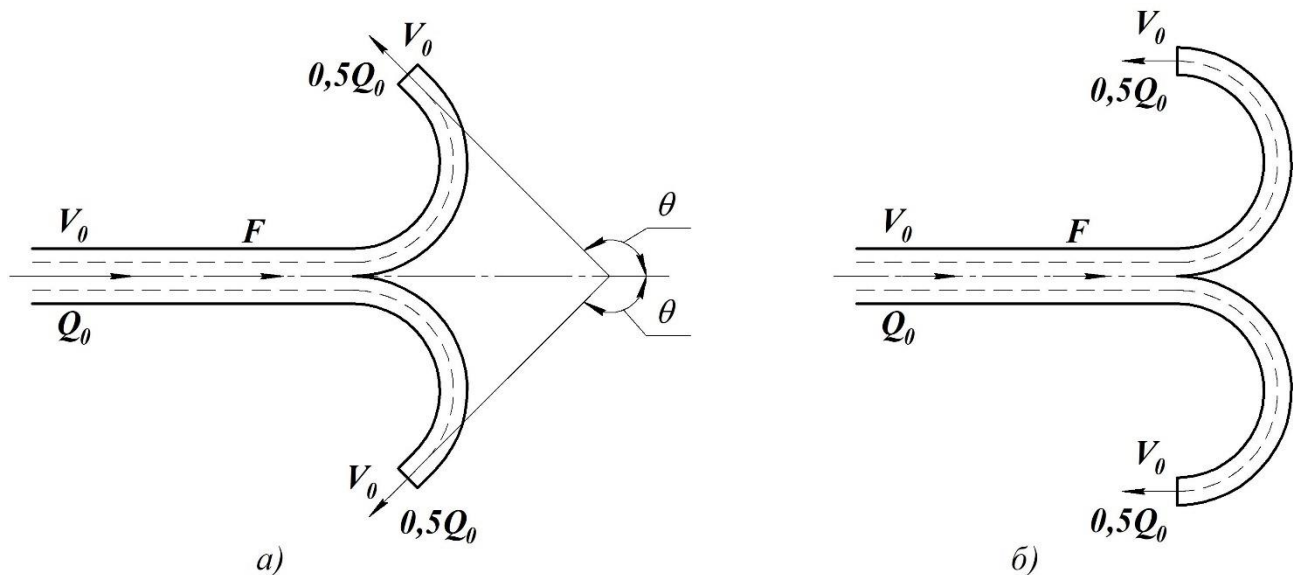


Рисунок 7.12 – Схема для визначення сили тиску на криволінійну поверхню

### 7.6 Витікання стисливої рідини з отворів

Якщо різниця тисків перед отвором та за ним (рис. 7.13) досить велика, витікання газу потрібно розглядати як витікання стисливої рідини.

Вважатимемо зміну стану газу під час витікання адіабатичною. Це положення ґрунтується на тому, що в разі великої різниці тисків виникає настільки велика швидкість витікання, що потік не встигає віддати своє тепло навколишньому середовищу. Нехтуючи в першому наближенні втратами тиску, застосуємо в цьому разі рівняння Бернуллі для стисливої рідини.

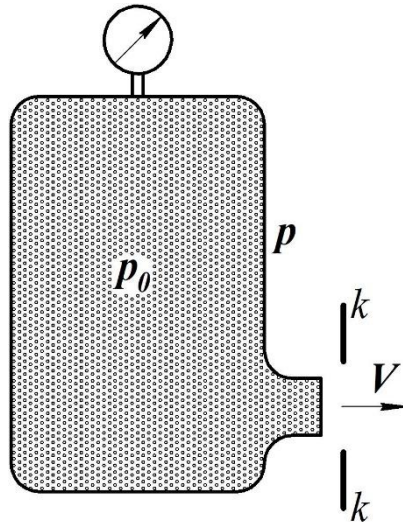


Рисунок 7.13 – Витікання стисливої рідини з отворів

Позначаючи через  $p_0$  й  $\rho_0$  тиск та густину газу в резервуарі, а через  $p, V, \rho$  – відповідно тиск, швидкість і густину в струмені, що витікає, запишемо рівняння Бернуллі для стисливої рідини у вигляді

$$\frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{k}{k-1} = \frac{p}{\rho} \cdot \frac{k}{k-1} + \frac{V^2}{2}. \quad (7.47)$$

Звідси

$$V = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right)}. \quad (7.48)$$

Вираз у дужках з урахуванням того, що  $\rho = \left( \frac{p}{C} \right)^{1/k}$ , перетворимо так:

$$\begin{aligned} \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) &= \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left( 1 - \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \right) = \\ &= \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left( 1 - \frac{p}{p_0} \cdot \frac{p_0^{1/k} \cdot C^{1/k}}{p^{1/k} \cdot C^{1/k}} \right) = \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{k-1} \right]. \end{aligned}$$

Далі після врахування втрат тиску за допомогою введення коефіцієнта швидкості  $\varphi$  одержимо

$$V = \varphi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (7.49)$$

Це формула Сен – Венана для швидкості витікання газу. Масову витрату з урахуванням стиснення струменя визначають за формулою

$$M = V \cdot \omega \cdot \rho \cdot \varepsilon = \mu \cdot \omega \cdot \rho \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}, \quad (7.50)$$

де  $\mu = \varphi \cdot \varepsilon$  – коефіцієнт витрати ( $\varepsilon$  – коефіцієнт стиснення струменя).

Візьмемо до уваги, що  $p/\rho^k = p_0/\rho_0^k$  і  $\rho = \rho_0 \cdot (p/p_0)^{1/k}$ . Підставимо цей вираз у формулу (7.50) і підведемо його під корінь.

Тоді

$$M = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{k-1} \cdot p_0 \cdot \rho_0 \cdot \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} = \mu \cdot \omega \cdot \Psi \cdot \sqrt{p_0 \cdot \rho_0}, \quad (7.51)$$

де функція

$$\Psi = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{k-1} \cdot p_0 \cdot \rho_0 \cdot \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (7.52)$$

Аналіз залежностей (7.51) і (7.52) свідчить, що витрата газу через отвір за заданих  $p_0, \rho_0$  для різних газів, тобто за різних  $k$ , залежить від відношення  $p/p_0$ , що входить до функції  $\Psi$ .

Графік зміни цієї функції залежно від  $p/p_0$  для повітря ( $k = 1,4$ ) наведено на рисунку 7.14. Функція  $\Psi = 0$  за  $p/p_0 = 0$  і за  $p/p_0 = 1$ , а за значень  $0 < p/p_0 < 1$   $\Psi > 0$ . За так званого критичного відношення тисків  $p_{кр}/p_0 = 0,53$  функція  $\Psi$  досягає максимуму:  $\Psi_{max} = \Psi_{кр} = 0,68$ . За  $p/p_0 < 0,53$  згідно з формулою (7.52) значення  $\Psi$  повинне зменшуватися (штрихова лінія на графіку), і відповідно за збільшення перепаду тисків  $p_0 - p$  повинна зменшуватися й витрата  $M$ , що природно важко пояснити.



Дослідження свідчать, що за  $p/p_0 < p/p_{кр}$  витрата зберігає стале значення, що дорівнює критичному (горизонтальна лінія для  $\Psi$  у діапазоні  $p/p_0 = 0 - 0,53$ ). Це пояснюють тим, що в разі досягнення швидкості критичного значення (за  $p = p_{кр}$ ) тиск зовнішнього середовища  $p$  вже не може поширюватися на переріз  $k - k$  за виходом з отвору  $A$ , на струмінь у цьому разі впливають параметри газу в резервуарі, і в перерізі  $k - k$  встановлюється тиск  $p = p_{кр}$ , що потрібно враховувати у формулах (7.49) і (7.51).

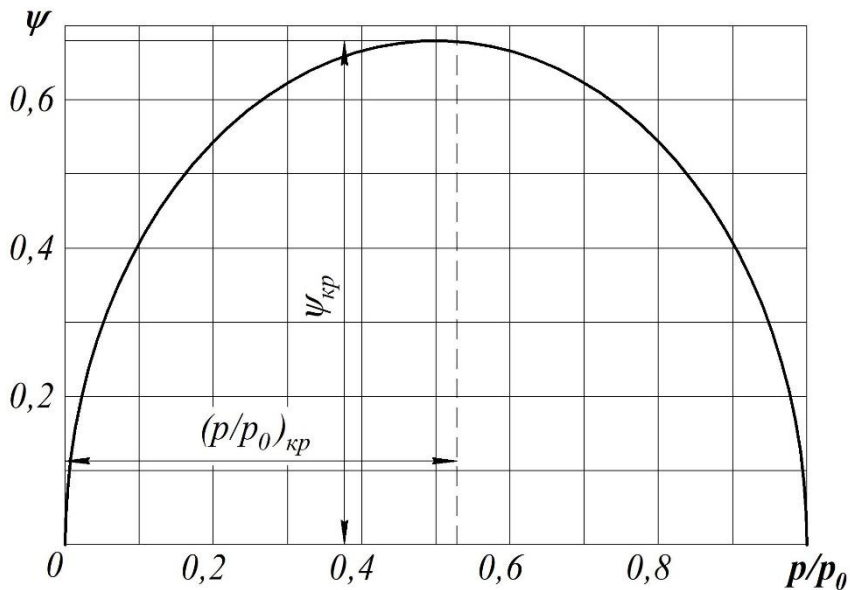


Рисунок 7.14 – Графік зміни функції  $\Psi$  залежно від  $p/p_0$  для повітря

Якщо під час визначення витрати обмежитися точністю до 5 %, то в діапазоні  $p/p_0 = 1 - 0,4$  можна користуватися формулою гідравліки у вигляді (без урахування стиснення)

$$M = \mu \cdot \rho \cdot \omega \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{p_0 - p}{\rho}}. \quad (7.53)$$

### Запитання і завдання для самоконтролю

- 1 Як визначають швидкість витікання рідини через малий отвір?
- 2 Поясніть фізичний зміст коефіцієнта швидкості  $\varphi$ .
- 3 Як визначають витрату рідини через малий отвір?
- 4 Як визначають коефіцієнт витрати?
- 5 Поясніть терміни «повне досконале стиснення», «недосконале стиснення» і «неповне стиснення».
- 6 Як визначають швидкість витікання і витрату рідини через затоплений отвір?
- 7 Наведіть основні типи насадків і сфери їх застосування.
- 8 Як визначають швидкість витікання й витрату рідини через насадки?
- 9 Наведіть рівняння балансу рідини (рівняння неусталеного руху рідини) в резервуарі.
- 10 Як визначають час спорожнення резервуара без припливу рідини?
- 11 Наведіть формулу для визначення сили дії струмини на плоску поверхню.
- 12 Зазначте особливості процесу витікання стисливої рідини з отворів.

## Розділ 8

### ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР У ТРУБОПРОВОДАХ

*Гідравлічним ударом* зазвичай називають різке підвищення тиску, що виникає в напірному трубопроводі в разі несподіваного гальмування потоку рідини. Точніше, гідравлічний удар – це коливальний процес, що виникає в пружному трубопроводі з краплинною рідиною за несподіваної зміни її швидкості. Цей процес є дуже швидкоплинним і характеризується черговістю різких підвищень і знижень тиску. Зміна тиску в цьому разі тісно пов'язана з пружними деформаціями рідини та стінок трубопроводу.

Гідравлічний удар найчастіше виникає в разі швидкого закриття або відкриття крана чи іншого пристрою керування потоком. Проте можуть бути й інші причини його виникнення, зокрема, раптове зупинення насоса, який подає воду нагнітальним трубопроводом у резервуар. Після вимкнення насоса рідина за інерцією деякий час рухається, і в трубопроводі виникає зниження тиску (безпосередньо біля насоса). Потім починається зворотний рух води з резервуара в область зниженого тиску в трубопроводі, і тиск підвищується.

Гідравлічний удар нерідко супроводжується звуком, подібним до звуку глухого удару твердих тіл, а в низці випадків – і сильним потрясінням трубопроводу.

Незважаючи на те, що з явищем гідравлічного удару, що неодноразово призводив до аварій трубопроводів, учені та інженери були знайомі давно, правильно пояснив цей складний фізичний процес лише в 1899 році професор М. Є. Жуковський на основі широких теоретичних та експериментальних досліджень у праці «О гидравлическомъ ударѣ въ водопроводныхъ трубахъ» («Про гідравлічний удар у водопровідних трубах»). Теорія гідравлічного удару й розрахункові формули, які вивів Жуковський, були використані вченими та інженерами всього світу під час розрахунку трубопроводів і подальшого вивчення цього явища.

Нехай у кінці труби, якою рідина рухається зі швидкістю  $V_0$ , відбулося миттєве закриття крана (рис. 8.1 а). Тоді швидкість частинок рідини, що наштовхнулися на кран, буде погашена, а їх кінетична енергія перейде в роботу

деформації труби й рідини. У цьому разі стінки будуть розтягуватися, а рідина стискуватися відповідно до підвищення тиску  $\Delta p_{\text{уд}}$ . Нехтувати стисливістю рідини в цьому разі не можна, оскільки мала стисливість рідини і є причиною виникнення великого, але кінцевого ударного тиску.

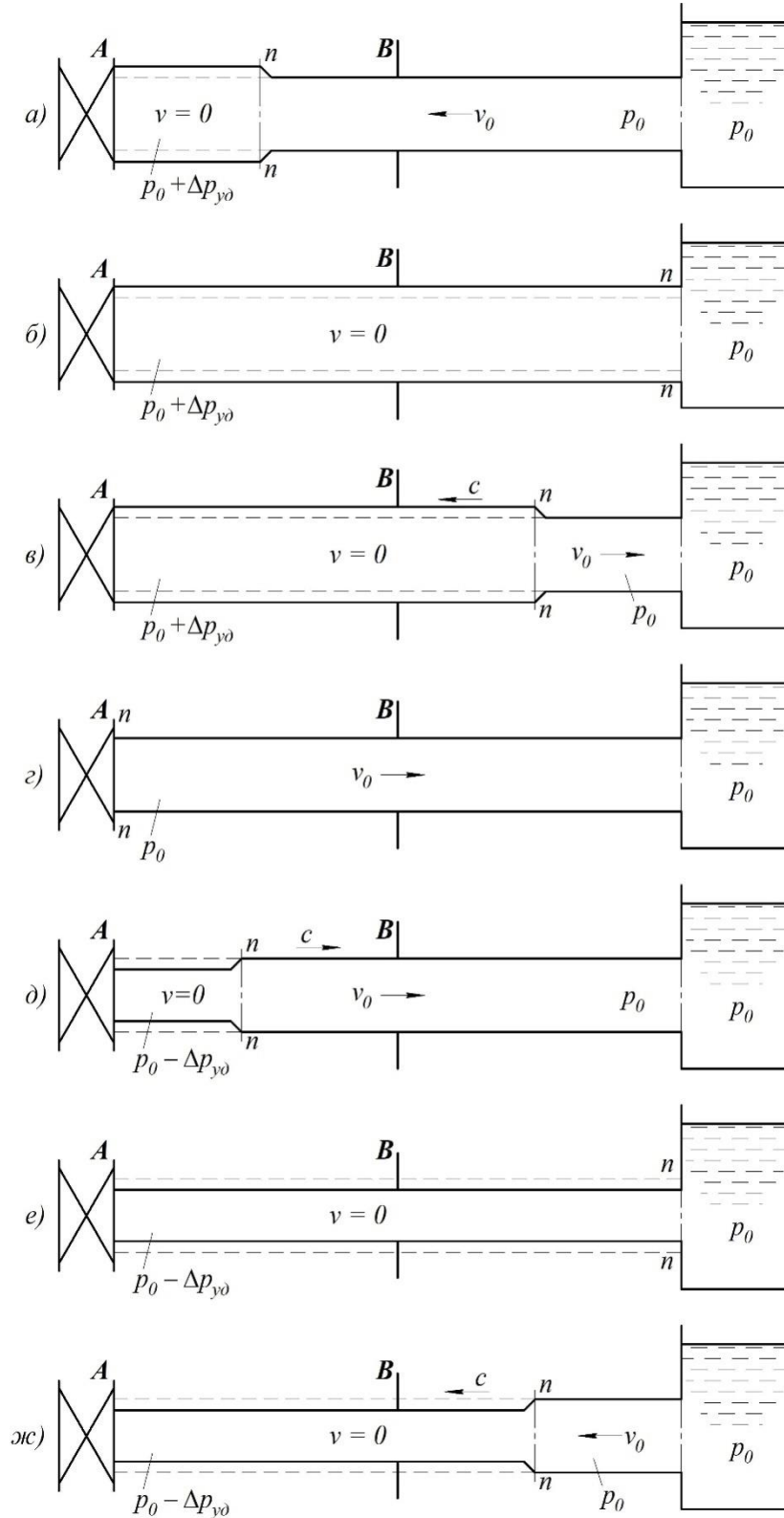


Рисунок 8.1 – Стадії гідравлічного удару

Назагальмовані частинки біля крана набігають інші, сусідні з ними, частинки, також втрачаючи швидкість, унаслідок цього переріз  $n - n$  переміщується праворуч зі швидкістю  $C$ , що називається *швидкістю ударної хвилі*. Сама ж перехідна область, у якій тиск змінюється на величину  $\Delta p_{уд}$ , називається *ударною хвилею*.

Коли ударна хвиля переміститься до резервуара, рідина виявиться зупиненою й стиснутою в усій трубі, а стінки труби будуть розтягнутими. Ударне підвищення тиску  $\Delta p_{уд}$  пошириться на всю трубу (рис. 8.1 б).

Але такий стан не є рівноважним. Під дією перепаду тиску  $\Delta p_{уд}$  частинки рідини прямують із труби в резервуар, у цьому разі рух починається з перерізу, розміщеного безпосередньо біля резервуара. Переріз  $n - n$  переміщується в зворотному напрямку – до крана – з тією самою швидкістю  $C$ , залишаючи за собою вирівняний тиск  $p_0$  (рис. 8.1 в).

Рідина і стінки труби вважаються пружними, тому вони повертаються в попередній стан, що відповідає тиску  $p_0$ . Робота деформації повністю переходить у кінетичну енергію, і рідина в трубі поновлює попередню швидкість  $V_0$ , але вже спрямовану в протилежний бік.

З цією швидкістю «рідинна колона» (рис. 8.1 г) прагне відірватися від крана. У підсумку виникає від'ємна ударна хвиля під тиском  $p_0 - \Delta p_{уд}$ , спрямована від крана до резервуара зі швидкістю  $C$ , залишаючи за собою стиснуті стінки труби й розширену рідину, що зумовлено зниженням тиску (рис. 8.1 д). Кінетична енергія рідини знову переходить у роботу деформації, але протилежну за знаком.

Стан труби на момент приходу від'ємної ударної хвилі та резервуара показано на рисунку 8.1 е. Як і для випадку, показаного на рисунку 8.1 б, він не є рівноважним. На рисунку 8.1 ж показаний процес вирівнювання тиску в трубі і резервуарі, що супроводжується виникненням руху рідини зі швидкістю  $V_0$ .

Очевидно, що як тільки відбита від резервуара ударна хвиля під тиском  $\Delta p_{уд}$  досягає крана, виникає ситуація, що вже мала місце на момент закриття крана. Весь цикл гідравлічного удару повторюється.

У дослідах Жуковського було зареєстровано до 12 повних циклів із поступовим зменшенням  $\Delta p_{уд}$ , зумовленого тертям у трубі й розсіюванням енергії в резервуарі.

Процес проходження гідравлічного удару в часі ілюструється діаграмою, наведеною на рисунку 8.2.

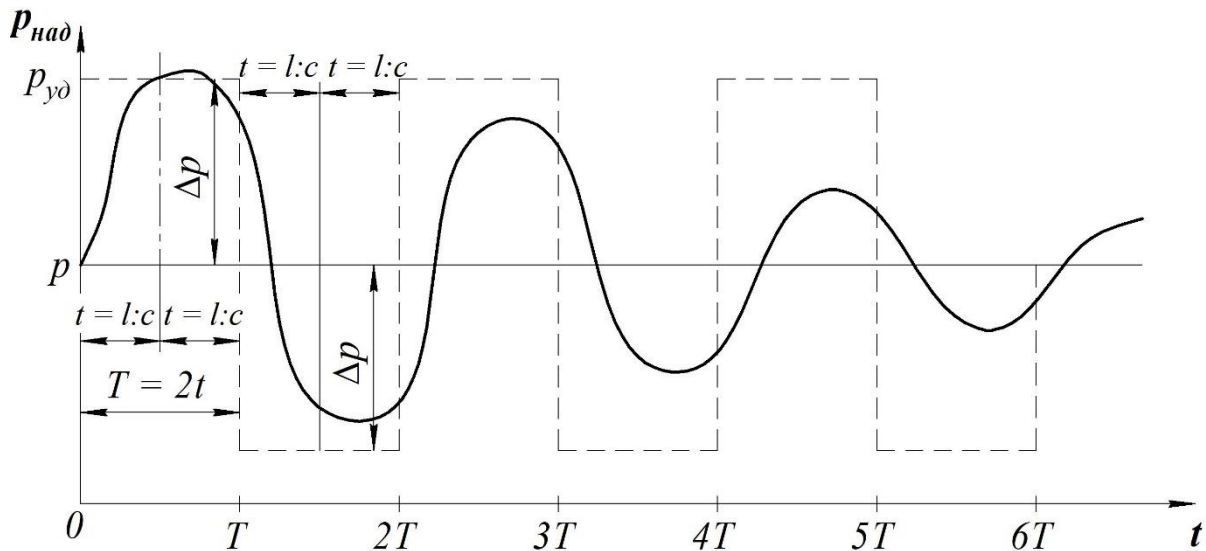


Рисунок 8.2 – Графіки зміни ударного тиску перед краном

Діаграма, показана штриховими лініями на рисунку 8.2, характеризує теоретичну зміну тиску  $p_{уд}$  в точці А (див. рис. 8.1) безпосередньо біля крана (закриття крана приймається миттєвим). Суцільною лінією подано приблизний вигляд дійсної картини зміни тиску в часі. Насправді тиск збільшується (а також знижується) хоча й стрімко, але не миттєво. Крім того, має місце згасання коливань тиску, тобто зменшення його амплітудних значень, зумовлених тертям і виходом енергії в резервуар.

Описана картина зміни тиску може виникнути лише в тому разі, якщо є наявний достатній запас тиску  $p_0$ , тобто коли  $p_0 > \Delta p_{уд}$ , і в разі зниження тиску на  $\Delta p_{уд}$  він залишається додатним. Якщо ж тиск  $p_0$  невеликий (а це буває досить часто), то початкове підвищення тиску під час удару буде приблизно таким, як і в попередньому випадку. Проте зниження тиску на  $\Delta p_{уд}$  неможливе. Абсолютний тиск біля крана знижується практично до нуля ( $p_{над} \approx -0,1 \text{ МПа}$ ), «рідинна колона» відривається від крана, виникає кавітація, й утворюється парова каверна. У зв'язку з цим порушується періодичність процесу, і характер зміни тиску в часі стає приблизно таким, як показано на рисунку 8.3.

Ударна хвиля пройде всім трубопроводом за час  $l/c$ . Час одного циклу з підвищенням і зниженням тиску називають *фазою удару*  $T$  і визначають за формулою

$$T = \frac{2 \cdot l}{c}. \quad (8.1)$$

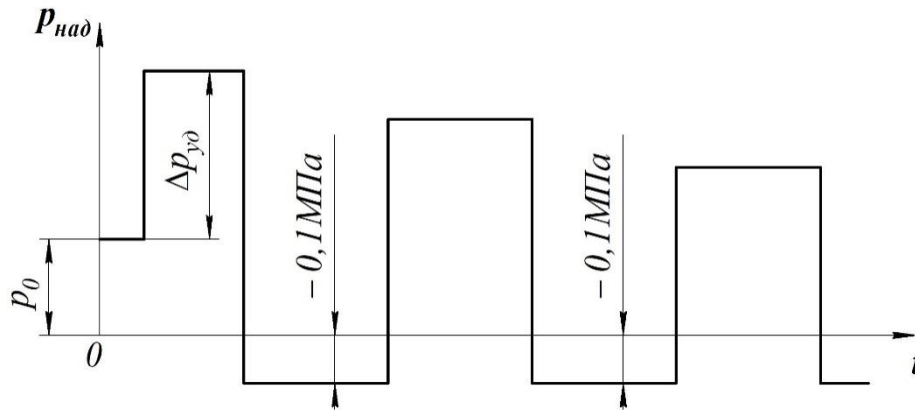


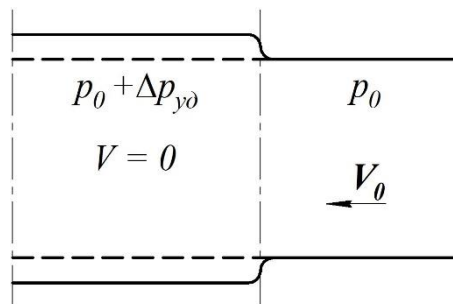
Рисунок 8.3 – Графік зміни ударного тиску перед краном

Якщо час закриття крана менший або дорівнює фазі удару  $T$ , то удар є *прямим*.

Якщо  $t < T$ , то за час підвищення й зниження тиску кран ще не буде закритим, рух рідини в трубі не зупиниться, і не вся кінетична енергія перейде в потенціальну, тобто підвищення буде меншим, ніж у разі прямого удару. Такий удар називають *непрямим*.

### 8.1 Прямий гідравлічний удар

Підвищення тиску  $\Delta p_{уд}$  досить просто пов'язати зі швидкостями  $V_0$  і  $C$ , якщо розглянути елементарне переміщення ударної хвилі  $dx$  за час  $dt$  та застосувати до елемента труби  $dx$  теорему про зміну кількості руху (див. рис. 8.4).

Рисунок 8.4 – Переміщення ударної хвилі за час  $dt$ 

У цьому разі одержимо

$$[(p_0 + \Delta p_{уд}) - p_0] \cdot \omega dt = \omega \cdot \rho \cdot (V_0 - 0) dx.$$

Звідси швидкість поширення ударної хвилі

$$C = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}}{\rho \cdot V_0},$$

отже,

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho \cdot V_0 \cdot C. \quad (8.2)$$

Одержане рівняння має назву *формули Жуковського*. Але поки що невідома швидкість  $C$ , тому ударний тиск  $\Delta p_{\text{уд}}$  визначимо іншим шляхом, а саме з умови, що кінетична енергія рідини переходить у роботу деформації: розтягнення стінок труби й стиснення рідини. Кінетична енергія рідини в трубі радіусом  $r$

$$\frac{m \cdot V_0^2}{2} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \rho \cdot V_0^2}{2}.$$

Робота деформації дорівнює потенціальній енергії деформованого тіла і складає половину добутку сили на подовження.

Виражаючи роботу деформації стінок труби як роботу сил тиску на шляху  $\Delta r$  (рис. 8.5 а), одержуємо

$$\frac{\Delta p_{\text{уд}} \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \Delta r}{2}.$$

Згідно із законом Гука

$$\sigma = \frac{2\pi \cdot [(r + \Delta r) - r]}{2\pi \cdot r} \cdot E = \frac{\Delta r}{r} \cdot E, \quad (8.3)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу трубопроводу;

$\sigma$  – нормальне напруження в матеріалі стінки труби, пов'язане з тиском  $\Delta p_{\text{уд}}$  і товщиною стінки співвідношенням

$$\sigma = \frac{\Delta p_{\text{уд}} \cdot r}{\delta}. \quad (8.4)$$



Виражаючи  $\Delta r$  із рівняння (8.3), а  $\sigma$  – з рівняння (8.4), одержуємо роботу деформації стінок труби:

$$\frac{\Delta p_{уд}^2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot l}{\delta \cdot E}.$$

Роботу стиснення рідини об'ємом  $W$  можна подати як роботу сил тиску на шляху  $\Delta l$  (рис. 8.5 б), тобто

$$\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \Delta p_{уд} \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \cdot \Delta p_{уд} \cdot \Delta W.$$

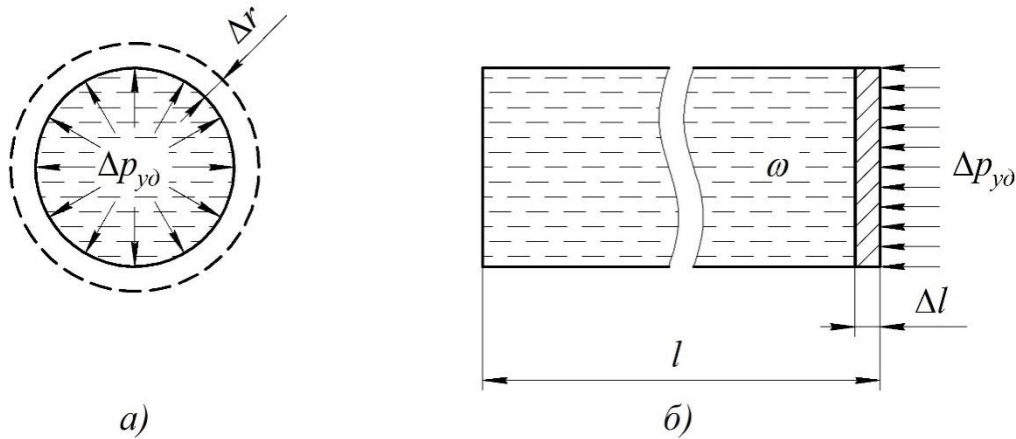


Рисунок 8.5 – Схеми деформації труби й рідини

Аналогічно закону Гука для лінійного подовження відносно зменшення об'єму рідини  $\Delta W/W$  пов'язане з тиском залежністю

$$\frac{\Delta W}{W} \cdot E_p = \Delta p_{уд},$$

де  $E_p$  – середнє для даного  $\Delta p_{уд}$  значення адіабатного модуля пружності рідини.

Взявши за  $W$  об'єм рідини в трубі, одержимо вираз для визначення роботи стиснення рідини:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta p_{уд} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l}{E_p}.$$

Таким чином, рівняння енергії набере вигляду

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \rho \cdot V_0^2 = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot l \cdot \Delta p_{уд}}{\delta \cdot E} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \Delta p_{уд}^2}{2 \cdot E_p}$$

Розв'язуючи його відносно  $\Delta p_{уд}$ , одержуємо формулу Жуковського:

$$\Delta p_{уд} = \rho \cdot V_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_p} + \frac{2 \cdot \rho \cdot r}{\delta \cdot E}}} = \rho \cdot V_0 \cdot C. \quad (8.5)$$

Таким чином, швидкість поширення ударної хвилі

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_p} + \frac{2 \cdot \rho \cdot r}{\delta \cdot E}}} \quad (8.6)$$

Якщо допустити, що труба має абсолютно жорсткі стінки, тобто  $E = \infty$ , то від останнього виразу залишається лише  $\sqrt{\frac{\rho}{E_p}}$ , тобто швидкість звуку в однорідному пружному середовищі з густиною  $\rho$  та об'ємним модулем  $E_p$ . Для води ця швидкість дорівнює 1 435 м/с, для бензину – 1 165 м/с, для оливи – 1 200–1 400 м/с. Оскільки в розглядуваному випадку стінки труби не абсолютно жорсткі, то величина  $C$  буде швидкістю поширення ударної хвилі в пружній рідині, що заповнює пружний трубопровід. Ця швидкість дещо менша від швидкості звуку.

Якщо швидкість у трубі зменшується не до нуля, а до значення  $V_1$ , виникає неповний гідравлічний удар, і формула Жуковського набере вигляду

$$\Delta p_{уд} = \rho \cdot (V_0 - V_1) \cdot C. \quad (8.7)$$

## 8.2 Непрямий гідравлічний удар

У разі непрямого гідравлічного удару за час  $T$  рух води в трубопроводі ще не припинився, і тому не вся кінетична енергія переходить у потенціальну. Це приводить до меншого, ніж у разі прямого удару, підвищення тиску.

У разі непрямого удару втрачається не вся початкова швидкість  $V_0$ , а лише її частина, так звана *втрачена швидкість*  $V_{\text{втр}}$  (рис. 8.6):

$$V_{\text{втр}} = V_0 - V, \quad (8.8)$$

де  $V$  – швидкість за заданого ступеня відкриття засувки.

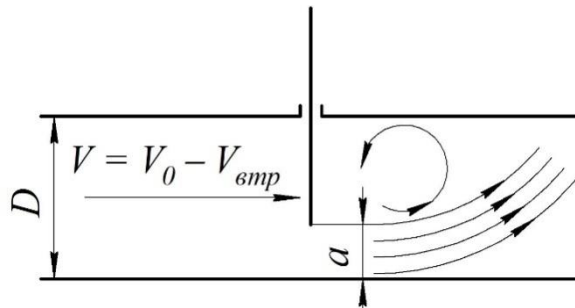


Рисунок 8.6 – Схема непрямого гідравлічного удару

Підставимо  $V_{\text{втр}}$  у формулу (8.5):

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho \cdot C \cdot (V_0 - V). \quad (8.9)$$

Крім того, в разі часткового закриття засувки на трубопроводі збільшений тиск на початку трубопроводу повинен дорівнювати збільшеним втратам тиску в ньому.

Ураховуючи формули

$$h_l = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \text{ і } h_m = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g}$$

і переходячи до тисків, маємо

$$p_0 + \Delta p_{\text{уд}} = \rho \cdot \left( \lambda \cdot \frac{l}{D} + \sum \zeta + \zeta_3 \right) \cdot \frac{V^2}{2}, \quad (8.10)$$

де  $p_0$  – тиск до закриття засувки на початку трубопроводу;

$\sum \zeta$  – сума коефіцієнтів місцевих опорів;

$\zeta_3$  – коефіцієнт опору засувки за певного ступеня її відкриття  $\alpha/D$  (рис. 8.7).

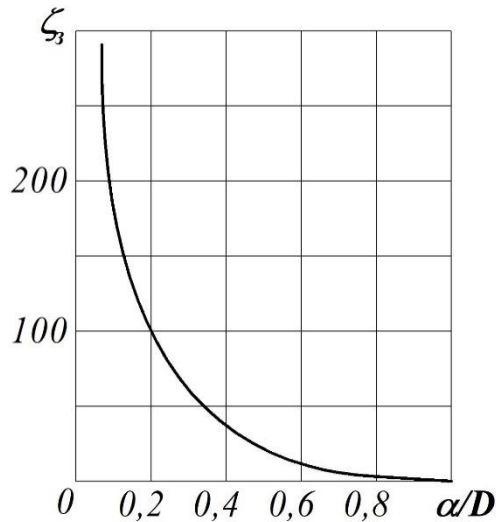


Рисунок 8.7 – Залежність коефіцієнта опору засувки від ступеня її відкриття

Звичайно величина  $\zeta_3$  зростає повільно на початку закриття засувки і швидко – наприкінці закриття, тобто за малих відношень  $\alpha/D$  (рис. 8.7). Можна вважати, що ступінь відкриття засувки  $\alpha/D$  змінюється рівномірно зі зміною часу (рис. 8.8). Якщо час зміни  $\alpha/D$  від 1 до 0 дорівнює  $t_3$ , то ступінь відкриття засувки наприкінці першої фази удару

$$\alpha/D = \frac{(t_3 - T)}{t_3} = 1 - \frac{T}{t_3}. \quad (8.11)$$

Зміна ступеня відкриття засувки впродовж будь-якої фази удару

$$\Delta\alpha/D = \frac{T}{t_3}.$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (8.9) і (8.10), можна знайти підвищення тиску  $\Delta p_{уд}$  і швидкість  $V$  наприкінці першої фази удару за відповідного значення коефіцієнта опору засувки  $\zeta_{3_1} = f(\alpha_1/D)$ . У такій самій послідовності можна визначити підвищення тиску наприкінці другої й наступних фаз удару. В цих випадках у формулу (8.9) замість  $V_0$  підставляють швидкість наприкінці першої

фази удару, а в формулу (8.10) замість  $p_0$  – підвищений тиск у цей самий час і відповідне значення коефіцієнта  $\zeta_3$ .

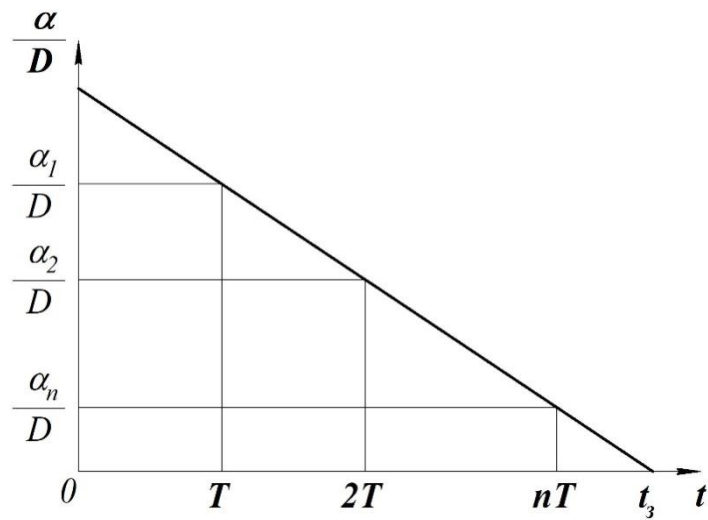


Рисунок 8.8 – Залежність ступеня відкриття засувки від часу

У разі повного закриття засувки непрямий удар є повним. У цьому разі підвищення тиску визначають як суму підвищення тиску в усіх фазах удару за час закриття засувки. Неповний удар буде в разі неповного закриття засувки. Підвищення тиску в цьому разі визначають сумісним розв'язуванням рівнянь (8.9) та (8.10) за коефіцієнта опору засувки  $\zeta_3$ , що відповідає ступеню її відкриття  $\alpha/D$ .

У гідравлічній літературі наведено також спрощений (наближений) спосіб визначення підвищення тиску за непрямого удару. Вважають, що в разі непрямого удару втрачається не вся швидкість  $V_0$ , а швидкість  $V$ , пропорційна відношенню фази удару до часу закриття засувки  $t_3$ , тобто  $V = V_0 \cdot \frac{T}{t_3}$ . Тоді враховуючи формулу (8.5),

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho \cdot V \cdot C = \rho \cdot V_0 \cdot \frac{T}{t_3} \cdot C,$$

$$\Delta p_{\text{уд}} = \frac{2 \cdot \rho \cdot V_0 \cdot l}{t_3}. \quad (8.12)$$

### 8.3 Гідравлічний удар у тупиковому трубопроводі

У тупиковому трубопроводі ударний тиск може збільшуватися вдвічі (під ударним тиском у цьому разі даному випадку розуміють різке підвищення тиску в трубопроводі, зумовлене несподіваним увімкненням його у джерело високого тиску). Пояснимо це схемою (рис. 8.9) і такими розміркованнями.

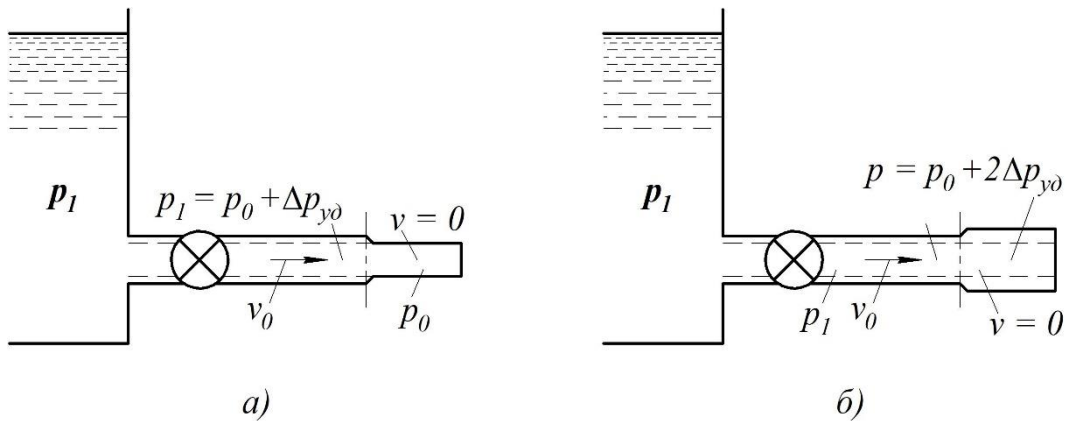


Рисунок 8.9 – Схема тупикового трубопроводу

Нехай трубопровід із початковим тиском  $p_0$  відділений краном від ємності великого об'єму (або насоса) з високим тиском  $p_1$ . Під час миттєвого відкриття крана тиск на початку трубопроводу різко підвищується на  $\Delta p_{уд} = p_1 - p_0$ . Хвиля тиску, що виникає, зі швидкістю  $C$  переміщується в кінець трубопроводу. Тиск за її фронтом відрізняється від тиску перед фронтом на  $\Delta p_{уд}$ , а швидкість рідини в площині фронту збільшується від нуля до  $V_0$ , що визначається формулою (8.5):

$$V_0 = \frac{\Delta p_{уд}}{\rho \cdot C} \quad (8.13)$$

На момент підходу фронту хвилі до кінця тупика тиск рідини в усьому трубопроводі збільшується на  $\Delta p_{уд}$ , і рідина набуває швидкості  $V_0$ . Подальший рух рідини гаситься, додатково збільшуючи тиск на  $\Delta p_{уд} = \rho \cdot V_0 \cdot C$ .

Таким чином, у трубопроводі виникає нова (відбита) хвиля тиску, спрямована до крана (засувки), за фронтом якої тиск порівняно з початковим зріс на  $2\Delta p_{уд}$ , а швидкість рідини  $V = 0$  (рис. 8.9 б).

Формули (8.5) і (8.6) одержані з використанням низки спрощених допущень: справедливість закону Гука в разі деформації труби й рідини, відсутність тертя в рідині та інших видів розсіювання енергії в процесі удару та рівномірність розподілу швидкостей за перерізом труби.

Експериментальні дослідження гідравлічного удару показують, що якщо рідина не містить повітряних домішок і початковий тиск  $p_0$  невеликий, то, незважаючи на перелічені допущення, формула Жуковського досить добре підтверджується досвідом. Нерівномірність розподілу швидкостей, а відповідно, і режим течії в трубі (ламінарний або турбулентний), здавалося б, повинні впливати на величину  $\Delta p_{уд}$ , оскільки від цього залежить кінетична енергія потоку. Проте цей вплив практично відсутній. Пояснюється це тим, що в разі різкого гальмування потоку мають місце інтенсивний зсув шарів рідини і великі втрати енергії на внутрішнє тертя, що приблизно компенсують надлишок кінетичної енергії за рахунок нерівномірності швидкостей.

За великих початкових тисків  $p_0$  і великих  $\Delta p_{уд}$  останні стають дещо більшими, ніж за формулою Жуковського, внаслідок збільшення модуля  $E_p$ , тобто порушення лінійності деформації за тиском.

Способи попередження і пом'якшення гідравлічного тиску вибирають для кожного конкретного випадку. Найбільш ефективним методом зниження можливості прямого гідравлічного удару є усунення можливості прямого гідравлічного удару, що за заданого трубопроводу зводиться до збільшення часу відкриття кранів та інших регульовальних пристроїв. Аналогічний ефект досягається встановленням перед цими пристроями компенсаторів у вигляді достатніх місцевих об'ємів рідини, гідроаккумуляторів або запобіжних клапанів. Зменшення швидкості руху рідини в трубопроводах (збільшення діаметра труби за заданої витрати) і довжини трубопроводів (для отримання непрямого удару) також сприяють зниженню ударного тиску. Інколи замість усіх перелічених способів зменшення  $\Delta p_{уд}$  надають перевагу простому підвищенню міцності слабких ланок системи.

#### 8.4 Порівняння ударного та інерційного тисків

Проведемо зіставлення ударного тиску  $\Delta p_{уд}$  й інерційного:

$$p_{ін} = \rho \cdot g \cdot h_{ін}.$$

Якщо розглядати непрямий удар і вважати, що швидкість рідини  $V_0$  зменшується у разі закриття крана за лінійним законом у функції часу  $t$ , то в формулі (8.12) відношення  $\frac{V_0}{t_3}$  можна замінити прискоренням  $a = \frac{dV}{dt}$ . Тоді ця формула набере вигляду  $\Delta p_{уд} = 2 \cdot \rho \cdot a \cdot l$ , або

$$\Delta h_{уд} = \frac{\Delta p_{уд}}{\rho \cdot g} = 2 \cdot \frac{a}{g} \cdot l = 2 \cdot h_{ін}. \quad (8.14)$$

Таким чином, ударний напір (або тиск) за непрямого гідравлічного удару вдвічі більший від інерційного напору. Отже, якщо необхідно розрахувати трубу на міцність, то розрахунок потрібно проводити не за інерційним, а за ударним тиском.

На рисунку 8.10 наведений графік порівняння ударного  $\Delta p_{уд}$  (суцільна лінія) та інерційного  $p_{ін}$  (штрихова лінія) тисків залежно від часу закриття крана.

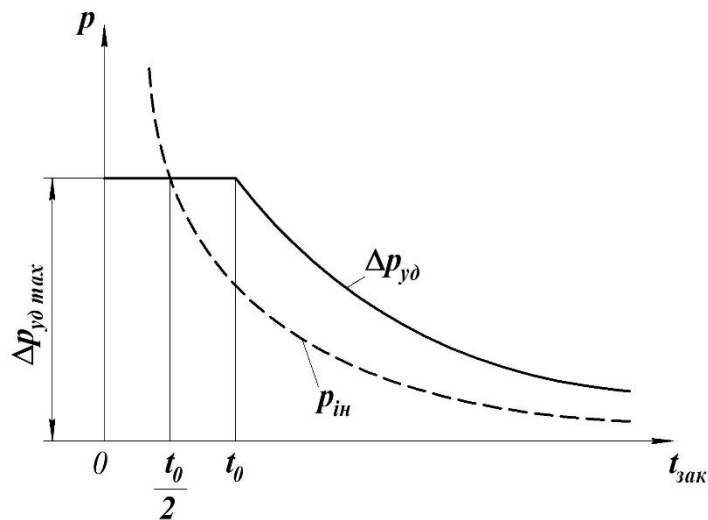


Рисунок 8.10 – Порівняння ударного та інерційного тисків

Перша лінія побудована за формулою (8.12) за  $t_3 > t_0$ , а за  $t_3 < t_0$  відповідно до (8.5) прийнято постійним. Друга лінія побудована за формулою

$$h_{ін} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \int_{t_1}^{t_2} dl = \frac{1}{g} \cdot a \cdot (l_2 - l_1) = \frac{a}{g} \cdot l \quad (8.15)$$



Із заміною  $a = \frac{V_0}{t_{\text{зак}}} p_{\text{ін}} = \rho \cdot g \cdot h_{\text{ін}}$ .

Як бачимо з графіка, побудованого за  $V_0 = \text{const}$ ,  $z a t = \frac{t_0}{2} \Delta p_{\text{уд}} = \Delta p_{\text{ін}}$ . Проте  $z a t_3 < t_0$  інерційний тиск є нереальним. За  $t_3 > t_0$  інерційний тиск можна розглядати як осереднений за часом тиск у разі гідравлічного удару.

### 8.5 Гідравлічний таран

Підвищення тиску в разі гідравлічного удару може бути використане з корисними цілями, наприклад, для піднімання води за допомогою гідравлічного тарана (рис. 8.11). У цьому разі частину води, що надходить із водойми *A* з напором  $H_1$ , можна підняти на висоту  $H_2 > H_1$ .

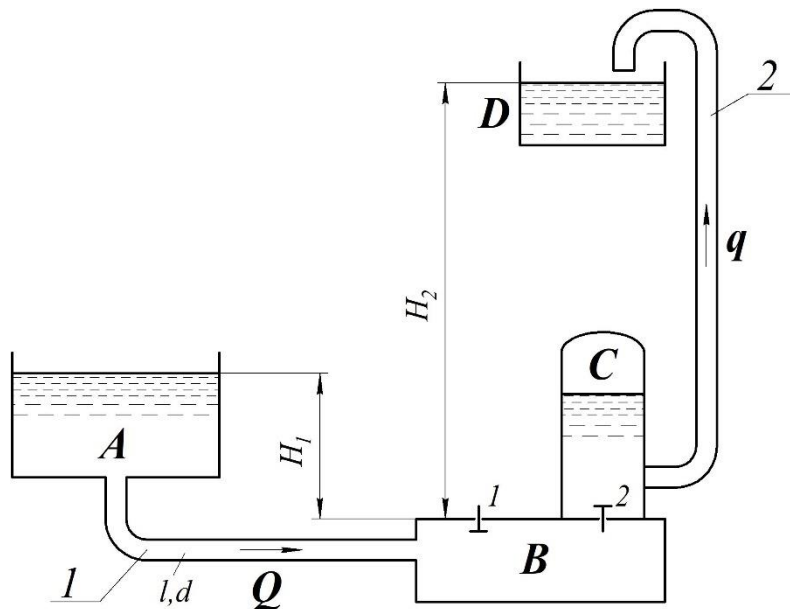


Рисунок 8.11 – Принципова схема гідравлічного тарана:

1 – зливна лінія; 2 – напірна лінія

Таран складається з робочої коробки *B* з ударним клапаном 1 і нагнітальним клапаном 2 та повітряного клапана *C* на напірному трубопроводі.

У разі відкриття ударного клапана 1 вода надходить із резервуара в коробку тарана. Завдяки тиску обтічного потоку ударний клапан закривається, і в коробці виникає гідравлічний удар.

Унаслідок підвищення тиску відкривається нагнітальний клапан 2, частина води ввійде в повітряний ковпак, стискуючи повітря, що міститься в ньому, а останній витискує після цього воду по напірному трубопроводу в резервуар *D* на

висоту  $H_2$ . Через витіснення частини води з робочої коробки тиск у ній зменшиться, і клапан 1 під дією власної ваги знову відкриється. У цей час клапан 2 під дією тиску повітря в ковпаку буде закритим. Потім знову потік води закриває клапан 1, і цикл повторюється.

Коефіцієнт корисної дії тарана являє собою відношення корисної роботи до витраченої:

$$\eta = \frac{\rho \cdot g \cdot q \cdot H_2}{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H_1} = \frac{q \cdot H_2}{Q \cdot H_1}, \quad (8.16)$$

де  $q$  – подача (витрата) тарана;

$Q$  – витрата, що надходить у таран із водойми.

Зауважимо, що в реальних умовах  $H_1$  і  $H_2$  – напори відповідно в зливній 1 і напірній 2 лініях з урахуванням гідравлічних втрат.

Для розрахунків гідравлічного тарана необхідно знати величини  $Q$  і  $H_2$ . За можливостей рельєфу беруть  $H_1 = H_2 / (5 - 10)$  і за її зміни в межах 1–10 м висота подачі може досягати 100 м.

ККД гідравлічного тарана залежить від співвідношення  $H_2/H_1$  і може змінюватися в межах від 0,85 ( $H_2/H_1 = 2$ ) до 0,4 ( $H_2/H_1 = 10$ ).

За  $H_2:H_1 = 1:10$  залежність  $\eta = f(H_2)$  наведена в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 – Залежність коефіцієнта корисної дії гідравлічного тарана від величини напору в напірній лінії

$\eta$	0,56	0,41	0,32	0,15	0,13	0
$H$	0	7	11	19	20	26

Залежно від геометричних розмірів тарана і співвідношення  $H_2:H_1$  його продуктивність може коливатись у межах  $q = (0,07 - 0,4) \cdot Q$  (за малих значень  $H_2:H_1$ ).

У побутовій практиці довжина зливної лінії  $l \approx 5H_1$ , а за  $d = 50$  мм і  $H_2 = 20-60$  м  $q = 5,7-22$  л/с. Пропускна здатність напірного трубопроводу дорівнює 77–242 л/хв за  $\eta = 0,6 - 0,74$  і частоти гідроударів 30–120 за 1 хвилину, що дозволяє забезпечити водою населений пункт кількістю 300–400 жителів.

**Запитання і завдання для самоконтролю**

- 1 Поясніть фізичне явище виникнення гідравлічного удару.
- 2 У якому випадку гідравлічний удар є прямим, а в якому випадку він буде непрямым?
- 3 Назвіть способи попередження та пом'якшення гідравлічного удару.
- 4 Поясніть принцип роботи гідравлічного тарана.

## Розділ 9

### ОСНОВИ ГІДРАВЛІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

#### 9.1 Геометрична, кінематична та динамічна подібності

##### 9.1.1 Подібність гідравлічних явищ

Вище було зазначено, що під час розв'язуванні багатьох інженерних задач поряд із теоретичними залежностями застосовують і експериментальні або в рівняння, одержані теоретично, вводять дослідні коефіцієнти. Так, результатами експериментальних досліджень є значення й формули гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ , коефіцієнтів місцевих опорів  $\xi$ , коефіцієнтів швидкості  $\varphi$ , витрати  $\mu$  і стиснення струменя  $\varepsilon$  під час протікання рідини через отвори.

Експериментальні коефіцієнти й формули одержують на основі дослідження споруд у природних умовах або, частіше, на лабораторних моделях.

Складні гідротехнічні, водопровідні та водовідвідні споруди, а також гідравлічні й пневматичні машини не підлягають точному розрахунку і під час проектування потрібно проводити дослідження на моделях для якісного та кількісного оцінювання явища.

Під час проведення досліджень у лабораторних умовах вивчають такі характеристики споруди (машини), як пропускна здатність, втрати напору, розподіл місцевих швидкостей, напрям лінії течії тощо. Геометричні розміри моделі зазвичай менші, ніж подібні розміри натурних споруд (машин), і тому потрібно встановити відповідні їм значення витрат, швидкостей потоку на моделі, значення шорсткості русла (проточної частини) моделі і, якщо це необхідно, в'язкість рідини, яку використовують для дослідження на моделі. Необхідно також установити порядок перенесення одержаних на моделі результатів на умови роботи споруди (машини) в натурі. Усі ці питання розглянуто в теорії моделювання гідравлічних явищ.

Можна розглядати моделювання математичне й фізичне. Математичне моделювання передбачає вивчення явищ, відмінних від натурних, фізичних явищ, що описуються аналогічними математичними залежностями. Прикладом такого моделювання є *метод електрогідродинамічних аналогій*, який використовують для вивчення роботи водопровідних мереж.

Під час *фізичного моделювання* на моделі відтворюють те саме явище, що і в натурі, але в іншому масштабі. У подальшому ми будемо розглядати особливості саме фізичного моделювання.

### 9.1.2 Закон подібності Ньютона

Для того щоб модель була фізично (механічно) подібною споруді (машині) в натурі, потрібно дотримуватися геометричної, кінематичної та динамічної подібностей.

Для *геометричної подібності* необхідно, щоб відношення будь-яких розмірів розглядуваних потоків були пропорційними, а кути їх напрямів – рівними.

Якщо який-небудь лінійний розмір натурального потоку буде  $l_H$  (рис. 9.1), а відповідний розмір моделі  $l_M$ , то відношення

$$\frac{l_H}{l_M} = k_l = const \quad (9.1)$$

повинно зберігатися однаковим і для співвідношення будь-яких інших лінійних розмірів. Коефіцієнт  $k_l$  називають *лінійним масштабом моделювання*, що показує, в скільки разів розміри моделі зменшені порівняно з натурним об'єктом.

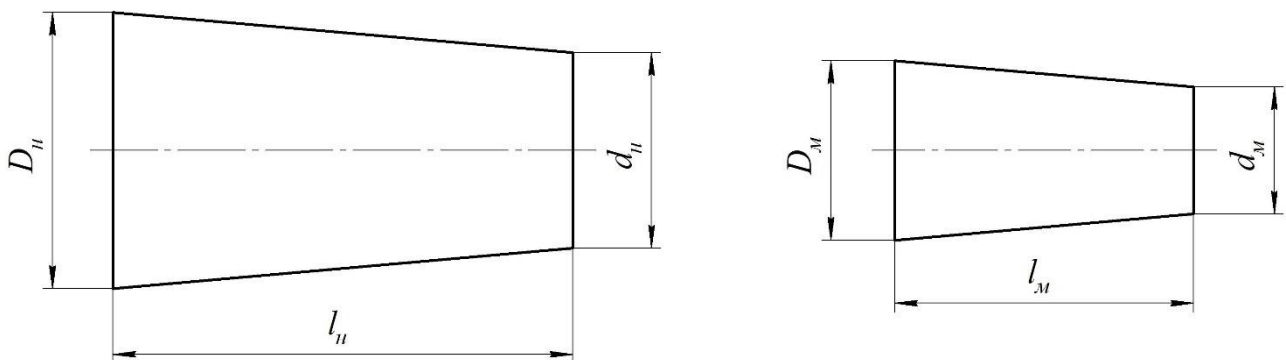


Рисунок 9.1 – Схема для пояснення геометричної подібності

Площі та об'єми зв'язані відповідно співвідношеннями

$$\frac{\omega_H}{\omega_M} = k_l^2 = const \quad \text{і} \quad \frac{W_H}{W_M} = k_l^3 = const. \quad (9.2)$$

Однієї геометричної подібності недостатньо для встановлення гідравлічної подібності. Так, у природі може існувати турбулентний режим руху, а на геометрично подібній моделі – ламінарний, тобто явища в природі будуть якісно й кількісно відрізнятися (наприклад, у відношенні втрат напору) між собою.

*Кінематична подібність* потоків може мати місце лише в геометрично подібних потоках.

Так, якщо деяка частинка рідини в натурному потоці за час  $t_H$  проходить ділянку траєкторії  $l_H$ , то відповідна їй частинка на моделі потоку за деякий інший час  $t_M$  повинна пройти відрізок траєкторії  $l_M$ , геометрично подібний відрізку  $l_H$ . У цьому разі співвідношення  $t_H/t_M$  повинне мати постійне й однакове значення для будь-яких відповідних точок обох потоків. Це співвідношення називають масштабом часу і позначають  $k_t$ .

Таким чином, у кінематично подібних потоках швидкості й прискорення повинні бути пропорційними у відповідних точках, а кути напрямку їх векторів рівними.

Це означає, що

$$\frac{V_H}{V_M} = k_v \text{ і } \frac{a_H}{a_M} = k_a,$$

$$V_H = \frac{k_l}{k_t} \cdot V_M \text{ і } a_H = \frac{k_v}{k_t} \cdot a_M. \quad (9.3)$$

*Динамічна подібність* передбачає додержання таких умов, за яких у будь-якій точці моделі повинна діяти сила, аналогічна за своєю природою й напрямом силі у відповідній точці природи. Відношення сил у природі  $F_H$  та на моделі  $F_M$  для всіх подібних точок потоку називають *масштабом сил*  $k_F$ , що є постійним для всіх точок:

$$k_F = \frac{F_H}{F_M} = const. \quad (9.4)$$

Якщо гідравлічне явище задовольняє геометричні, кінематичні та динамічні подібності, то можна переходити до встановлення гідравлічної або гідродинамічної подібності. Для цього потрібно встановити зв'язок між зазначеними вище видами подібності, тобто між масштабами  $k_l$ ,  $k_V$ ,  $k_F$ , що характеризують геометричну, кінематичну й динамічну подібності. Цей зв'язок не є довільним, а підпорядковується певній закономірності. Оскільки сила  $F$  є добутком маси  $m = \rho \cdot W$  на прискорення  $a$ , то залежність (9.4) можна записати у вигляді

$$k_F = \frac{\rho_H \cdot W_H \cdot a_H}{\rho_M \cdot W_M \cdot a_M} = k_\rho \cdot k_l^3 \cdot k_a, \quad (9.5)$$

де  $k_\rho$  – масштаб густини, або

$$k_F = k_\rho \cdot k_l^2 \cdot k_V^2. \quad (9.6)$$

Цей вираз називають *законом подібності Ньютона в масштабних множниках*. За деяких заданих або обраних масштабів із залежності (9.6) можна знайти невідомий масштаб, а потім за наведеними вище залежностями – й інші масштаби.

Виражаючи масштабні множники в рівнянні (9.6) як відношення відповідних величин у натурі й на моделі, одержимо

$$\frac{F_H}{F_M} = \frac{\rho_H \cdot l_H^2 \cdot V_H^2}{\rho_M \cdot l_M^2 \cdot V_M^2}$$

або

$$\frac{F_H}{\rho_H \cdot l_H^2 \cdot V_H^2} = \frac{F_M}{\rho_M \cdot l_M^2 \cdot V_M^2} = Ne \quad (9.7)$$

Критерій  $Ne = \frac{F}{\rho \cdot l^2 \cdot V^2}$  називається *критерієм Ньютона*. Для будь-яких подібних точок за подібних явищ у натурі та на моделі критерії Ньютона повинні бути однаковими, тобто

$$Ne_H = Ne_M. \quad (9.8)$$

Критерій Ньютона можна також подати у вигляді

$$Ne = \frac{F \cdot l}{\rho \cdot l^3 \cdot V^2} = \frac{F \cdot l}{M \cdot V^2}, \quad (9.9)$$

де  $M = \rho \cdot l^3$  – маса рідини в розглядуваному об'ємі.

У цьому разі закон подібності Ньютона у фізичних величинах набирає вигляду

$$\frac{F_H \cdot l_H}{M_H \cdot V_H^2} = \frac{F_M \cdot l_M}{M_M \cdot V_M^2}. \quad (9.10)$$

## 9.2 Критерії гідравлічної подібності

Умови моделювання гідравлічних явищ для повної подібності потребують додержання рівняння (9.7) для всіх сил, під дією яких відбувається певне явище (сил тяжіння, тиску, тертя, поверхневого натягу і т. ін.), та сил інерції. Аналіз залежностей величин, що входять до цих рівнянь, свідчить, що для всіх сил одночасне виконання цих умов практично неможливе, але можна визначити окремі критерії для випадків, коли деякі з діючих сил мають переважне значення порівняно з іншими. Наприклад, під час дослідження руху рідини в трубопроводах найважливішу роль відіграють сили тертя.

Сила тертя є добутком дотичних напружень  $\tau_0$  і площі зіткнення потоку зі стінками труби:

$$F_{\text{тер}} = \tau_0 \cdot l^2. \quad (9.11)$$

Підставивши цей вираз в обидві частини рівняння (8.10), можна записати

$$\frac{\tau_{0H}}{\rho_H \cdot V_H^2} = \frac{\tau_{0M}}{\rho_M \cdot V_M^2} \quad (9.12)$$

або з урахуванням того, що дотичні напруження на стінці труби згідно з формулою  $\tau_0 = \rho \cdot \frac{\lambda}{8} \cdot V^2$ ,

$$\lambda_H = \lambda_M, \quad (9.13)$$



тобто потоки рідини в трубопроводах будуть гідравлічно подібними, якщо гідравлічні коефіцієнти тертя в натурі й на моделі дорівнюватимуть один одному.

За ламінарного режиму течії рідини або за турбулентного режиму в області гідравлічно гладких труб гідравлічний коефіцієнт тертя залежить лише від числа Рейнольдса. Тому для окремих випадків можна замість рівняння (9.13) записати

$$Re_H = Re_M \quad (9.14)$$

або

$$\frac{V_H \cdot l_H}{\nu_H} = \frac{V_M \cdot l_M}{\nu_M}, \quad (9.15)$$

де лінійний розмір  $l$  у кожному конкретному випадку може бути діаметром або радіусом труби.

Вираз

$$\frac{V \cdot l}{\nu} = Re \quad (9.16)$$

як уже раніше було зазначено, називають *числом (критерієм) Рейнольдса*.

Отже, за переважного впливу сил тертя та руху рідини за ламінарного режиму або в області гідравлічно гладких труб за турбулентного режиму потоки будуть подібними, якщо для подібних точок або подібних перерізів природи і моделі числа (критерії) Рейнольдса будуть однаковими.

У разі використання на моделі тієї самої рідини, що і в натурі ( $k_\nu = 1$ ), згідно з формулою (9.15)

$$V_M = V_H \cdot \frac{l_H}{l_M} = V_H \cdot k_\nu, \quad (9.17)$$

тобто під час моделювання за критерієм Рейнольдса швидкість на моделі повинна бути  $k$  разів більшою, ніж швидкість у натурі, що не завжди зручно.

Якщо під час моделювання гідравлічних явищ переважають сили тиску, що можна подати як добуток тиску на площу його дії ( $F_p = p \cdot \omega$ ), то вираз (9.7) у цьому разі перетвориться на вираз

$$\frac{p_H \cdot \omega_H}{\rho_H \cdot l_H^2 \cdot V_H^2} = \frac{p_M \cdot \omega_M}{\rho_M \cdot l_M^2 \cdot V_M^2} \quad (9.18)$$

або з урахуванням пропорційності площі  $\omega$  квадрата лінійного розміру  $l^2$

$$\frac{p_H}{\rho_H \cdot V_H^2} = \frac{p_M}{\rho_M \cdot V_M^2} = Eu, \quad (9.19)$$

де  $Eu$  – критерій Ейлера, що повинен бути однаковим для натури й моделі за переважного значення сил тиску.

Рух рідини в трубопроводі характеризують не абсолютним тиском, а різницею тисків  $\Delta p$  у розрахункових перерізах. Тому критерій Ейлера  $Eu$  виражають ще й так:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \cdot V^2}. \quad (9.20)$$

Необхідно зазначити, що за додержання критерію Рейнольдса критерій Ейлера виконується автоматично. Дійсні втрати тиску по довжині

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot g \cdot \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \rho \cdot \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2}. \quad (9.21)$$

Тоді

$$Eu = \lambda \cdot \frac{l}{2 \cdot D} \quad (9.22)$$

або

$$\lambda_M \cdot \frac{l_M}{D_M} = \lambda_H \cdot \frac{l_H}{D_H}. \quad (9.23)$$

Оскільки під час моделювання передбачають геометричну подібність, то  $\frac{l_M}{D_M} = \frac{l_H}{D_H}$  і, отже,  $\lambda_H = \lambda_M$ , тобто виникає умова (9.13), яка за ламінарного режиму або руху в області гідравлічно гладких труб за турбулентного режиму відповідає рівності критеріїв Рейнольдса в натурі й на моделі.

У разі вивчення питань протікання води через водозливи та інші споруди, переважною силою є сила тяжіння ( $F_G = g \cdot M$ ). У цьому разі рівняння (9.10) набирає вигляду

$$\frac{V_H^2}{g_H \cdot l_H} = \frac{V_M^2}{g_M \cdot l_M} = Fr \quad (9.24)$$

або

$$Fr_H = Fr_M. \quad (9.25)$$

Вираз (9.24) називають *критерієм Фруда*. Якщо рух відбувається за переважного впливу сили тяжіння, то критерії Фруда в натурі й на моделі повинні бути однаковими. Оскільки здебільшого  $g_H = g_M$ , то згідно з рівнянням (9.24) можна записати

$$V_M = V_H \cdot \sqrt{\frac{l_M}{l_H}} = \frac{V_H}{\sqrt{k_l}} \quad (9.26)$$

Звідси випливає, що масштаб швидкостей під час моделювання за критерієм Фруда

$$k_V = \frac{V_H}{V_M} = \sqrt{k_l}, \quad (9.27)$$

а масштаб витрат

$$k_Q = k_V \cdot k_l^2 = k_l^{2,5}. \quad (9.28)$$

Формули (9.27) та (9.28) наочно показують зручність моделювання за критерієм Фруда, за якого в лабораторних умовах на моделях можуть бути значно зменшені порівняно з натурою швидкість потоку й особливо витрати.

Порівнюючи вираз (9.17) і (9.26), бачимо, що вони несумісні, тобто неможливо моделювати явища сумісно за критеріями Рейнольдса й Фруда, якщо на моделі використовують ту саму рідину, що і в натурі. Якщо можна на моделі використовувати іншу рідину, то згідно з формулою (9.15) одержимо

$$V_M = V_H \cdot \frac{l_H}{l_M} \cdot \frac{v_M}{v_H} = V_H \cdot \frac{k_l}{k_v}, \quad (9.29)$$

де  $k_v = \frac{v_M}{v_H}$  – масштаб кінематичних в'язкостей.

Порівнюючи вирази (9.26) і (9.29), одержуємо

$$k_v = k_l^{3/2} \quad (9.30)$$

або

$$v_M = \frac{v_H}{k_l^{3/2}}, \quad (9.31)$$

$$v_M = v_H,$$

тобто для одночасного виконання критеріїв Рейнольдса і Фруда потрібно, щоб кінематична в'язкість рідини, яку застосовують на моделі, була б меншою, ніж кінематична в'язкість рідини, що протікає в натурній споруді, в  $k_l^{3/2}$  разів (де  $k_l$  – лінійний масштаб моделі).

На практиці цю умову виконати практично неможливо, оскільки якщо в натурних спорудах протікає вода, то важко знайти рідину з кінематичною в'язкістю, що є значно меншою, ніж в'язкість води. Проте можна діяти навпаки, тобто на зменшених моделях за допомогою води моделювати явища, пов'язані з рухом рідини з більшою в'язкістю.

Крім розглянутих вище критеріїв Рейнольдса, Ейлера, Фруда, існують також критерії Вебера (за переважного впливу сил поверхневого натягу), Маха (під час моделювання руху стисливої рідини – повітря), Струхалія (під час моделювання неусталеного руху) тощо.

### 9.3 Моделювання напірних трубопроводів

Спочатку зупинимося на основних правилах гідравлічного моделювання. Вибираючи масштаб моделі, потрібно дотримуватися низки умов, що впливають із загальних законів подібності. Наприклад, якщо потік у натурі є турбулентним, то він повинен бути турбулентним і на моделі. Тому мінімальний розмір моделі вибирають так, щоб забезпечувалося дотримання цієї умови.

Необхідно дотримуватися також умови, яка полягає в тому, що стан потоку (бурхливий або спокійний) на моделі повинен бути таким самим, як і в натурі. Під час моделювання потрібно прагнути до геометричної подібності шорсткості, але найчастіше це не можна виконати. Тому необхідно забезпечити подібність опорів на моделі та в натурі, щоб виконати умову (9.12).

Під час моделювання деяких явищ виникають серйозні труднощі. Так, неможливо змоделювати аерацію потоку, тобто насичення його повітрям.

Великі труднощі становить моделювання кавітації. Під час моделювання доводиться спотворювати (викривлювати) масштаб моделі. Якщо розміщення моделі в лабораторії ускладнене, можна використати різні горизонтальні та вертикальні масштаби. Різні масштаби застосовують також тоді, коли на моделі неможливо встановити шорсткість, що буде подібною натурній. У такому випадку подібність гідравлічних опорів можна досягти зміною величини гідравлічного радіуса, тобто змінивши (спотворивши) вертикальний масштаб. Приклади моделювання з порушеним масштабом наведено в спеціальній літературі.

Вище було встановлено, що під час усталеного руху рідини подібність гідравлічних явищ вимагає постійності критеріїв Рейнольдса, Ейлера та Фруда.

У трубопроводах визначальним є критерій Рейнольдса, оскільки їх пропускна здатність і втрати напору залежать від сил тертя, що виникають під час руху рідини. Критерій Ейлера для горизонтального трубопроводу визначають за формулою (9.20), тобто він залежить від гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ , який залежить від числа Рейнольдса й шорсткості труби.

Однак гідравлічний коефіцієнт тертя може й не залежати від числа Рейнольдса в широкому діапазоні зміни його значень. Це стосується області гідравлічно шорстких труб, або області квадратичного опору, і характеризується великими числами Рейнольдса (рис. 9.2).

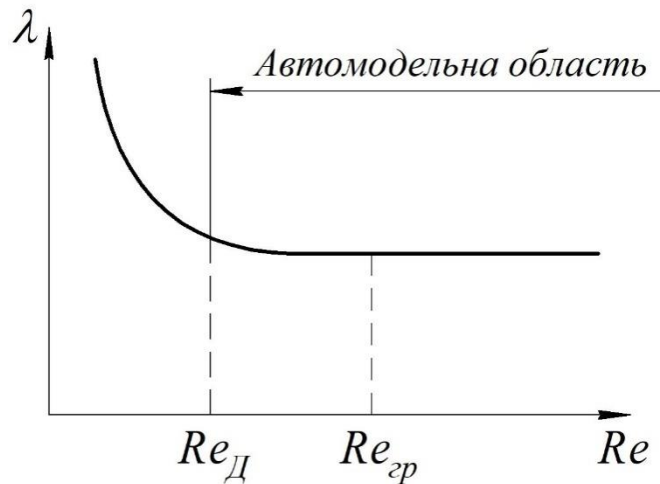


Рисунок 9.2 – Залежність коефіцієнта Дарсі від великих значень числа Рейнольдса

Відомо, що за великих значень чисел Рейнольдса їх вплив на величину місцевих опорів стає незначним. Це означає, що в таких випадках єдиною умовою, що забезпечує подібність гідравлічних явищ, є подібність умов однозначності, тобто геометрична подібність виступів шорсткості, конфігурації місцевих опорів та обтічних тіл. Звідси випливає, що за великих значень чисел Рейнольдса зміна цього числа не впливає на характер явища. Такі явища, а також області зміни чисел Рейнольдса називають автомодельними. У межах автомодельної області в разі зменшення розмірів моделі порівняно з розмірами натури явище якісно не змінюється, незважаючи на зменшення числа Рейнольдса. Необхідно зазначити, що умова автомодельності за геометричної подібності шорсткості й місцевих опорів еквівалентна додержанню критерію Ейлера. У цьому разі число Ейлера не залежить від числа Рейнольдса, а умовою подібності є рівність  $\lambda_m = \lambda_n$ . Проте останню вимогу не завжди легко виконати, оскільки важко забезпечити повну геометричну подібність виступів шорсткості в трубах різного діаметра за різної технології її виготовлення. У цьому разі критерій Ейлера є більш строгим, ніж критерій рівності гідравлічних коефіцієнтів тертя.

З цього випливає, що якщо в натурі потік перебуває в автомодельній області, то на моделі число Рейнольдса повинна перевищувати величину, що відповідає нижній межі зони квадратичного опору  $Re_{гр}$ .

Для труб із рівнозернистою шорсткістю граничне число Рейнольдса  $Re_{гр}$  також можна визначити за даними Нікурадзе:

$$Re_{гр} = \frac{84 \cdot D_M}{\Delta_M \cdot \sqrt{\lambda_M}}, \quad (9.32)$$

де  $D_M$  – діаметр модельної труби;  
 $\Delta_M$  – висота виступів шорсткості на моделі;  
 $\lambda_M$  – гідравлічний коефіцієнт тертя на моделі.

У квадратичній області опору гідравлічний коефіцієнт тертя не залежить від числа Рейнольдса. У значній частині перехідної області опору зміна  $\lambda$  здебільшого неістотна. Згідно з дослідженнями О. П. Зегжда, таке положення має місце за чисел Рейнольдса, що дорівнюють або є більшими, ніж допустиме. Такі числа визначають за формулою

$$Re_d = \frac{14 \cdot D_M}{\Delta_M \cdot \sqrt{\lambda_M}} \quad (9.33)$$

За чисел Рейнольдса  $Re \gg Re_d$  (вважається, що  $\lambda_M = \lambda_H$ ) не виникає істотних похибок під час моделювання. Відношення допустимих чисел Рейнольдса за моделлю  $Re_d$  і в натурі

$$\frac{Re_d}{Re_H} = \frac{V_M \cdot D_M \cdot \nu_M}{V_H \cdot D_H \cdot \nu_H} = \frac{k_V}{k_V \cdot k_l}. \quad (9.34)$$

Під час моделювання потрібно також мати на увазі, що турбулентний потік навіть за одних і тих самих значень критеріїв подібності ( $Re, Fr$ ) може бути неоднозначним й залежно від умов входу в трубу або протікання через місцеві опори може мати різні характеристики турбулентності та, отже, різний опір руху. Проте за допомогою дослідів доведено, що турбулентна течія має властивість стабілізації. На деякій відстані від входу або іншого місцевого опору характеристики турбулентності стають властивими для повної форми перерізу русла та його шорсткості. Довжину ділянки стабілізації можна визначити за формулою Гіжі:

$$l_{ст} = 19 \cdot D \cdot (1 - e^{-0,6\zeta}) + \frac{0,45 \cdot D}{\lambda}, \quad (9.35)$$

що визначає мінімальну відстань, за якої не відбувається взаємного впливу місцевих опорів ( $e$  – основа натурального логарифму).

У практиці є трубопроводи, що працюють як гідравлічно гладкі труби, наприклад, поліетиленові, скляні, іноді сталеві. Як відомо, в цьому разі  $\lambda = f(Re)$ , і подібності можна досягнути за рівності чисел Рейнольдса в натурі й на моделі. У разі застосування на моделі тієї самої рідини, що і в натурі ( $k_v = 1$ ,  $k_\rho = 1$ ), зв'язок між масштабами різних величин з урахуванням залежностей (9.17) і (9.20) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}k_v &= \frac{1}{k_l}, \\k_{\Delta p} &= k_v^2 = \frac{1}{k_l^2}, \\k_Q &= k_v \cdot k_l^2 = k_l.\end{aligned}\tag{9.36}$$

Ці вимоги за різних розмірів моделей виконати досить важко, тому на практиці моделювання набуває поширення метод, що враховує масштабний ефект сил в'язкості. Сутність його полягає в дослідженні розгляданого явища в кількох масштабах за достатньо широкого діапазону зміни числа Рейнольдса. Це дає можливість побудувати емпіричні залежності між досліджуваними характеристиками й числами Рейнольдса, наприклад,  $\lambda = f(Re)$  або  $\zeta = f(Re)$ . За допомогою цих залежностей можна внести відповідні корективи в дані модельних досліджень. Необхідно мати на увазі, що питання про вплив числа Рейнольдса на різні характеристики руху рідини є досить висвітленими в літературі, що дає можливість часто визначати масштабний ефект в'язкості й без додаткових різномасштабних досліджень.

## 9.4 Метод аналізу розмірностей

### 9.4.1 Пі-теорема

Рівняння, що зв'язують параметри гідродинамічних процесів, виражають ті чи інші фізичні закони, і тому їх структура не повинна залежати від системи одиниць вимірювання.

Ураховуючи цю обставину й беручи до уваги можливість застосовувати для опису гідродинамічних процесів різні, зокрема спеціально вибрані, системи



одиниць, можна встановити деякі загальні властивості зазначених рівнянь. Знання цих властивостей дозволяє в багатьох випадках прогнозувати структуру шуканих зв'язків між фізичними розмірними й безрозмірними параметрами.

Використовуючи формулу розмірностей, можна зазначити також раціональні комбінації фізичних параметрів, визначення зв'язків між якими дає результати, що належать відразу до цілого класу явищ.

Метод аналізу розмірностей базується на відомій  $\pi$ -теоремі ( $\pi$ -теоремі), яку формулюють так: *рівняння, яке зв'язує між собою  $n$  розмірних величин, що характеризують розглядуване явище, серед яких  $k$  мають незалежну розмірність, може бути перетворене на  $n - k$  безрозмірних комплексів, складених із зазначених фізичних величин.*

Фізичне рівняння, тобто залежність між величинами  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , можна записати у вигляді

$$f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0. \quad (9.37)$$

Відповідно до  $\pi$ -теорема це рівняння можна замінити таким, де кожне число  $\pi$  є безрозмірним добутком кількох  $A$ :

$$\varphi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-k}) = 0. \quad (9.38)$$

У цьому разі число членів у фізичному рівнянні (9.37) скоротилося до  $n - k$  у рівнянні (9.38).

Роль  $\pi$ -теорема в теорії подібності визначається тим, що безрозмірні комплекси  $\Pi_i$  є критеріями подібності й, отже, рівняння (9.38) демонструє зв'язок між ними.

$\pi$ -теорема має загальнофізичний характер. Для застосування цієї теорема для розв'язування задач гідрогазодинаміки необхідно конкретизувати механічні величини, які в них трапляються, а також їх безрозмірні комбінації. Так, під час описування руху в'язкої пружної рідини трапляються три групи величин:

1) геометричні параметри, що характеризують розміри й форми граничних поверхонь,  $-l_1, l_2, l_3, \dots$ ;

2) кінематичні та динамічні характеристики течії – швидкість  $V$  (або витрата  $Q$ ), тиск  $p$  (або його градієнт  $dp/dx$ ), дотичні напруження  $\tau$ , сила опору  $F_0$ ;

3) характеристики фізичних властивостей рідини – густина  $\rho$ , динамічний коефіцієнт в'язкості  $\mu$ , модуль пружності  $E$ , коефіцієнт поверхневого натягу  $\sigma$ .

Наведений перелік параметрів не є обов'язковим, його можна розширити, деякі з параметрів замінити іншими. Наприклад, замість динамічного коефіцієнта в'язкості можна ввести кінематичний коефіцієнт  $\nu = \mu/\rho$ . Геометричними параметрами можуть бути кути, що визначають границі або поля течії. Зазвичай шуканою дослідною величиною є параметр другої групи, тобто кінематична або динамічна характеристика потоку, яку потрібно визначити як функцію всіх або частини інших параметрів. Необхідно підкреслити, що складові повного переліку параметрів, що визначають досліджуваний процес, є важливою частиною розв'язування задачі методом розмірностей. Розв'язок спрощується, якщо процес має математичний опис, зокрема диференціальними рівняннями. В іншому випадку необхідно мати чітке уявлення про фізичну сутність процесу, що ґрунтується на попередньому експериментальному вивченні. Для застосування методу розмірностей зазвичай необхідна схематизація явища, подібна застосовуваній для математичного опису.

За параметри з незалежними розмірностями зазвичай вибирають характерні довжину  $l$ , швидкість  $V$  і густину  $\rho$ , що входять до кожної з безрозмірних комбінацій  $\Pi_i$ .

Розглянемо декілька прикладів використання методу розмірностей у конкретних задачах.

#### 9.4.2 Визначення критичного числа Рейнольдса

З гідрогазодинаміки відомо, що межу між ламінарним і турбулентним режимами руху рідини характеризує критичне число Рейнольдса  $Re_{кр}$ . Дослідження свідчать, що ця межа залежить переважно від чотирьох фізичних величин: діаметра трубки  $D$ , динамічної в'язкості  $\mu$ , її густини  $\rho$  і критичної швидкості  $V_{кр}$  у перерізі труби. Ці фізичні величини мають такі розмірності:

$$[D] = [L], [\mu] = [ML^{-1}T^{-1}], [\rho] = [ML^{-3}], [V_{кр}] = [LT^{-1}]. \quad (9.39)$$

Отже, в цьому разі лише одна фізична величина – діаметр трубопроводу – характеризується незалежною розмірністю довжини  $[L]$ , а інші фізичні величини –  $\mu, \rho, V_{кр}$  – характеризуються похідними розмірностями, що вміщують

три незалежні розмірності  $[M]$ ,  $[T]$ ,  $[L]$ , тобто  $k = 3$ . Отже, число безрозмірних комплексів  $n - k = 4 - 3 = 1$ .

Розглядувану залежність можна виразити в узагальненому вигляді:

$$\Pi = D^x \cdot \mu^y \cdot \rho^z \cdot V_{кр}^j, \quad (9.40)$$

де  $x, y, z, j$  – невідомі показники степеня.

Виразимо фізичні величини в рівнянні (9.40) через їх розмірності, а оскільки величина  $\pi$  є безрозмірною, то виразимо її через незалежні розмірності в нульовому степені:

$$M^0 T^0 L^0 = L^x M^y L^{-y} T^{-y} \cdot M^z L^{-3z} L^j T^{-j}. \quad (9.41)$$

Прирівняємо показники степеня в лівій і правій частинах біля однакових основ:

$$\left. \begin{aligned} x - y - 3z + j &= 0, \\ y + z &= 0, \\ -y - j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.42)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь і виражаючи через  $j$  всі інші невідомі, одержуємо, що  $x = j$ ,  $y = -j$ ,  $z = j$ .

Тоді безрозмірний комплекс набирає вигляду

$$\Pi = \left( \frac{V_{кр} \cdot \rho \cdot D}{\mu} \right)^j, \quad (9.43)$$

де невідомий показник степеня  $j$  може бути будь-яким числом, що відрізняється від нуля ( $j \neq 0$ ), оскільки безрозмірне число в будь-якому степені є безрозмірним числом. Якщо  $j = 1$ , одержимо відомий вираз для критичного числа Рейнольдса:

$$\Pi = \frac{V_{кр} \cdot \rho \cdot D}{\mu} = \frac{V_{кр} \cdot D}{\nu} = Re_{кр}. \quad (9.44)$$

### 9.4.3 Дотичні напруження на стінках труби і гідравлічний коефіцієнт тертя

Рівняння (9.39) часто записують в іншому вигляді, а саме: одну з фізичних величин (звичайно шукану) переносять в ліву частину, а безрозмірний комплекс  $\pi$  – в праву як коефіцієнт пропорційності. Проте в такому разі потрібно дотримуватись правила: *розмірності фізичних величин у лівій і правій частинах рівняння, виражені через розмірності незалежних величин маси [M], часу [T] й довжини [L], повинні відповідати одна одній.*

Наприклад, розглянемо залежність для дотичних напружень на стінках труби і пов'язані з нею залежності для гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ .

Вважаємо, що дотичні напруження на стінках труби  $\tau_0$  залежать від діаметра труби  $D$ , середньої швидкості  $V$  у живому перерізі, густини рідини  $\rho$  та її динамічної в'язкості  $\mu$ . Тобто і в цьому разі  $n = 4$ , а  $k = 3$ , і ми повинні одержати один ( $n - k = 4 - 3 = 1$ ) безрозмірний комплекс  $\pi$ .

З урахуванням викладеного

$$\tau_0 = \pi \cdot D^x \cdot V^y \cdot \rho^z \cdot \mu^j. \quad (9.45)$$

Розмірність  $\tau_0 = [FL^{-2}] = [MLT^{-2}L^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]$ , а розмірності інших величин у формулі (9.46) визначають за залежністю (9.40). Для безрозмірного комплексу  $\pi$  як коефіцієнта пропорційності розмірності величин, що входять до нього, не проставляємо.

Тоді

$$ML^{-1}T^{-2} = \Pi [L^x L^y T^{-y} M^z L^{-3z} M^j L^{-j} T^{-j}]. \quad (9.46)$$

Прирівнюючи показники степенів біля однакових основ, одержуємо

$$\left. \begin{aligned} 1 &= z + j, \\ -1 &= x + y - 3z - j, \\ -2 &= -y - j. \end{aligned} \right\} \quad (9.47)$$

Звідси  $x = y - 2$ ,  $z = y - 1$ ,  $j = 2 - y$ , і рівняння (9.46) можна записати у вигляді

$$\tau_0 = \Pi \cdot D^{y-2} \cdot V^y \cdot \rho^{y-1} \cdot \mu^{2-y}. \quad (9.48)$$

Помножимо й поділимо праву частину цього рівняння на  $V^{2-y}$ , одержимо

$$\tau_0 = \Pi \cdot \frac{\rho \cdot V^2 \cdot \mu^{2-y}}{V^{2-y} \cdot D^{2-y} \cdot \rho^{2-y}}, \quad (9.49)$$

або з урахуванням того, що  $\mu = \nu \cdot \rho$ , а  $\frac{V \cdot D}{\nu} = Re$ ,

$$\tau_0 = \Pi \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{Re^{2-y}}. \quad (9.50)$$

З гідрогазодинаміки відомо, що дотичні напруження на стінках труби  $\tau_0$  можна подати таким чином:

$$\tau_0 = \rho \cdot \frac{\lambda}{8} \cdot V^2. \quad (9.51)$$

Тоді, беручи до уваги формулу (9.51), одержуємо

$$\tau_0 = \frac{8 \cdot \Pi}{Re^{2-y}}. \quad (9.52)$$

Залежність (9.52) є узагальненим виразом для гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ . Відомо, що за ламінарного режиму руху дотичні напруження пропорційні швидкості в першому степені (тобто  $y = 1$ ). Вважаючи, що коефіцієнт пропорційності  $\Pi = 8$ , одержуємо відому формулу:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (9.53)$$

За турбулентного режиму руху в області гладких труб показник степеня  $y = 1,75$ , коефіцієнт пропорційності  $\Pi = 0,03955$ , і формула (9.52) перетворюється на відому формулу Блазіуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (9.54)$$

В області шорстких труб (тобто в області квадратичного опору)  $y = 2$ , і формула (9.52) характеризує залежність  $\lambda$  від числа Рейнольдса. У цьому разі  $\lambda = 8 \cdot \Pi$ . У гідрогазодинаміці для квадратичної області опору використовують емпіричну формулу Шифрінсона:

$$\lambda = 0,11 \cdot \left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} \right)^{0,25} . \quad (9.55)$$

Звідси коефіцієнт пропорційності

$$\Pi = \frac{0,11}{8} \cdot \left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} \right)^{0,25} = 0,0138 \cdot \left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} \right)^{0,25} . \quad (9.56)$$

Це означає, що в цьому разі число  $\Pi$  характеризує відносну шорсткість  $\frac{\Delta_{\text{екв}}}{D}$ .

У перехідній області опору  $y$  звичайно знаходиться в межах  $y = 1,75 - 2$ , що приводить до залежності  $\lambda$  як від числа Рейнольдса  $Re$  (або швидкості  $V$ ), так і від відносної шорсткості  $\frac{\Delta_{\text{екв}}}{D}$  за формулою Альтшуля.

Відповідно і втрати напору в різних областях опору будуть залежати від швидкості в різних степенях (1 – за ламінарного режиму; 1,75 – за турбулентного режиму в області гідравлічно гладких труб; 1,75–2 – в перехідній області опору; 2 – в області гідравлічно шорстких труб).

**Запитання і завдання для самоконтролю**

- 1 Охарактеризуйте геометричну, кінематичну й динамічну подібності.
- 2 Наведіть закон подібності Ньютона в масштабних множниках.
- 3 Наведіть критерії динамічної подібності.
- 4 Зазначте особливості методу аналізу розмірностей.
- 5 Сформулюйте  $\pi$ -теорему.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов и др. – Москва : Машиностроение, 1982. – 423 с.
2. Гідравліка, гідро- та пневмопривод : підруч. / за ред. О. О. Федорця, О. Ф. Саленка. – 2-ге видання, переробл. і допов. – Київ : Знання, 2009. – 502 с. – (Вища освіта XXI століття).
3. Гиргидов А. Д. Механика жидкости и газа (гидравлика) : учеб. для вузов / А. Д. Гиргидов. – 3-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 545 с.
4. Дежко В. І. Гідрогазодинаміка : навч. посіб. / В. І. Дежко, В. О. Виноградов-Салтиков, В. Г. Федоров. – Київ : НТУУ «КПІ», 2014. – 414 с.
5. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика : учебник для вузов по специальности «Гидравлические машины и средства автоматизации» / Б. Т. Емцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Машиностроение, 1987. – 440 с.
6. Константинов Ю. М. Технічна механіка рідини і газу : підручник / Ю. М. Константинов, О. О. Гіжа. – Київ : Вища школа, 2002. – 277 с.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – 6-е изд. – Москва : Наука, 1987. – 904 с.
8. Повх И. Л. Техническая гидромеханика : учеб. пособие / И. Л. Повх. Москва : Машиностроение, 1976. – 502 с.
9. Самойлович Г. С. Гидроаэромеханика / Г. С. Самойлович. – Москва : Машиностроение, 1980. – 280 с.
10. Справочник по гидравлике / под ред. В. А. Большакова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев : Вища школа, 1984. – 343 с.
11. Чугаев Р. Р. Гидравлика / Р. Р. Чугаев. – Ленинград : Энергоиздат, 1982. – 671 с.



Навчальне видання

**Гусак** Олександр Григорович,  
**Шарапов** Сергій Олегович,  
**Ратушний** Олександр Валерійович

## **ГІДРОГАЗОДИНАМІКА**

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки С. О. Шарапова  
Редактор С. М. Симоненко  
Комп'ютерне верстання М. Б. Приходченко, С. О. Шарапова

Формат 60×84/8. Ум. друк. арк. 34,88. Обл.-вид. арк. 21,04. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.