

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту
Завідувач кафедри ПМ та МСС

_____ Коплик І.В.

(підпис)

«__» _____ 2022 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «магістр»

спеціальність 113 «Прикладна математика»

освітньо-професійна програма «Наука про дані та моделювання складних систем»

тема роботи: **«МОДЕЛЮВАННЯ ДВОПОТОКОВОЇ НЕСТІЙКОСТІ У
РЕЛЯТИВІСТСЬКОМУ ДВОПОТОКОВОМУ ЕЛЕКТРОННОМУ ПУЧКУ
МЕТОДОМ РС»**

Виконавець

студент факультету ЕлІТ

Федорченко Сергій Сергійович _____

(підпис)

Науковий керівник

док. фіз.-мат. наук, професор

Лисенко Олександр Володимирович _____

(підпис)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота містить 43 сторінки, 18 рисунків, 12 джерел.

Мета роботи – моделювання двопотокової нестійкості у релятивістському двопотоковому електронному пучку методом «частинка-в-комірці», аналіз динаміки двопотокової нестійкості в залежності від параметрів досліджуваної системи.

Об'єкт дослідження – процес двопотокової нестійкості у релятивістському двопотоковому електронному пучку.

Предмет дослідження – вплив модуляції пучків та теплового стану системи на динаміку двопотокової нестійкості.

Методи навчання: метод «частинка-в-комірці», електродинамічні рівняння Максвелла, рівняння руху.

В роботі було проведено аналіз динаміки двопотокової нестійкості у релятивістському двопотоковому електронному пучку з використанням методу «частинка-в-комірці». Отримано співвідношення, які описують динаміку частинок та електричних полів, які вони створюють. На основі отриманих співвідношень було створено комп'ютерну модель та проведено чисельний експеримент і отримано залежності амплітудного спектру та інших метрик електричного поля від параметрів досліджуваної системи. На основі отриманих результатів було з'ясовано вплив теплового розкиду та модуляції пучків у початковий момент часу на характер поведінки системи.

Ключові слова: ДВОПОТОКОВА НЕСТІЙКІСТЬ, МЕТОД «ЧАСТИНКА-В-КОМІРЦІ», ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є, РЕЛЯТИВІСТСЬКИЙ ЕЛЕКТРОННИЙ ПУЧОК.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1 ДВОПОТОКОВА НЕСТІЙКІСТЬ У РЕЛЯТИВІСТСЬКОМУ ЕЛЕКТРОННОМУ ПУЧКУ МЕТОДОМ PIS	5
1.1. Явище двопотокової нестійкості	5
1.2. Метод Particle-In-Cells для моделювання двопотокової нестійкості	7
1.2.1 Загальна характеристика методу PIS	7
1.2.2. Техніка реалізації методу	9
1.2.3. Точність та умови стійкості методу	14
РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДВОПОТОКОВОЇ НЕСТІЙКОСТІ У РЕЛЯТИВІСТСЬКОМУ ДВОПОТОКОВОМУ ЕЛЕКТРОННОМУ ПУЧКУ МЕТОДОМ PIS	16
2.1. Обезрозмірення та нормалізація величин.....	16
2.2. Реалізація методу PIS для моделювання двопотокової нестійкості.....	16
2.3. Амплітудний спектр електричного поля за допомогою перетворень Фур'є	18
2.4. Початкові та граничні умови	19
РОЗДІЛ 3 РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ	23
3.1. Параметри та постійні величини	23
3.2. Відсутність початкової дисперсії за швидкостями частинок	23
3.3. Наявність початкової дисперсії за швидкостями частинок	27
3.4. Модуляція початкових швидкостей за синусоїдою.....	31
ВИСНОВКИ	34
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	35
ДОДАТКИ	37
ДОДАТОК А.....	37
ДОДАТОК В.....	43

ВСТУП

Добре відомо, що двопотокова нестійкість виникає в консервативних системах, і з цієї точки зору ця нестійкість є загальним класом реактивних нестійкостей [1], які виникають внаслідок взаємодії між пучками холодних електронів. Двопотокова нестійкість є дуже поширеною нестійкістю у фізиці плазми [2]. Дослідження цієї нестійкості було проведено за допомогою графічного розв'язку дисперсійного співвідношення [3], а також аналізу поведінки протилежно спрямованих потоків з використанням чисельного моделювання [4]. Ця нестійкість може бути породжена двома зустрічними потоками, енергетичним потоком частинок, введених у плазму, або встановленням струму вздовж плазми, де різні види (іони та електрони) можуть мати різні швидкості дрейфу. У всіх наведених вище прикладах енергія частинок може переходити у збудження плазмової хвилі. Двопотокова нестійкість вперше було вивчено за рівнянням макроскопічного моменту [5], повні аналітичні та чисельні дослідження вже були детально описані у 2000-х [6-10]. Відповідно до цього ця нестійкість актуальна для різних сфер науки, предмет дослідження постійно вивчався в різноманітних ситуаціях [1-6].

РОЗДІЛ 1 ДВОПОТОКОВА НЕСТІЙКІСТЬ У РЕЛЯТИВІСТСЬКОМУ ЕЛЕКТРОННОМУ ПУЧКУ МЕТОДОМ РС

1.1. Явище двопотокової нестійкості

Двопотокова нестійкість є дуже поширеною нестійкістю у фізиці плазми. Це може бути викликано потоком заряджених частинок, введеним у плазму, або встановленням струму вздовж плазми, щоб різні види (іони та електрони) могли мати різні швидкості дрейфу. Енергія від частинок може призвести до збудження плазмової хвилі.

Двопотокова нестійкість може виникнути у випадку двох холодних пучків, у яких жодна частинка не резонує з хвилею, або внаслідок двох гарячих пучків, у яких існують частинки з одного або обох пучків, які резонують з хвилею.

Двопотокова нестійкість відома в різних граничних випадках як пучково-плазмова нестабільність або нестабільність пучка [3].

Розглянемо холодну, однорідну та ненамагнічену плазму, де іони нерухомі, а електрони мають швидкість v_0 , тобто система відліку рухається разом із потоком іонів. Нехай електростатичні хвилі мають вигляд:

$$E_1 = \xi_1 \exp[i(kx - \omega t)] \hat{x} \quad (1.1.1)$$

Застосування методів лінеаризації до рівняння руху для обох видів, до рівняння безперервності та рівняння Пуассона, а також використання просторових і часових гармонічних операторів $\partial_t \rightarrow i\omega$, $\nabla \rightarrow ik$, ми можемо отримати такий вираз [5]:

$$1 = \omega_{pe}^2 \left[\frac{m_e/m_i}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} \right], \quad (1.1.2)$$

який представляє дисперсійне співвідношення для поздовжніх хвиль і представляє рівняння кватричної частини в ω . Коріння можна виразити у вигляді:

$$\omega_j = \omega_j^R + i\gamma_j \quad (1.1.3)$$

Якщо уявна частина $(Im(\omega_j))$ дорівнює нулю, тоді розв'язки представляють усі можливі стани, зростання чи згасання тимчасової хвилі немає взагалі:

$$E = \xi \exp[i(kx - \omega t)] \hat{x} \quad (1.1.4)$$

Якщо $Im(\omega_j) \neq 0$, тобто, деякі з коренів є комплексними числами, це призводить до появи спряжених пар. Підстановка у вираз для електростатичних хвиль призводить до:

$$E = \xi \exp[i(kx - \omega_j^R t)] \exp[\gamma t] \hat{x} \quad (1.1.5)$$

Через другу експоненціальну функцію з правої частини часова динаміка амплітуди хвилі сильно залежить від параметра γ ; якщо $\gamma < 0$, то хвилі будуть експоненціально загасати; з іншого боку, якщо $\gamma > 0$, то хвилі нестабільні й зростатимуть з експоненціальною швидкістю.

У випадку гарячого пучка нестійкість двох потоків можна розглядати як зворотну величину затухання Ландау. Є частинки, які мають таку саму швидкість, що й хвиля. Існування більшої кількості частинок, які рухаються повільніше, ніж фазова швидкість хвилі v_{ph} , порівняно з тими, які рухаються швидше, призводить до передачі енергії від хвилі до частинок. У випадку двопотокової нестійкості, коли електронний потік входить в плазму, функція розподілу частинок за швидкостями має «шишку» на своєму «хвості». Якщо

хвиля має фазову швидкість в області, де нахил позитивний, кількість швидших частинок ($v > v_{ph}$) більша, ніж повільніших частинок, тому це більша кількість енергії, що передається від швидких частинок до хвилі, що призводить до експоненціального зростання хвилі [7].

У випадку холодного пучка немає частинок, які мають ту саму швидкість, що й фазова швидкість хвилі (жодна частинка не є резонансною). Однак хвиля може експоненціально зростати навіть у цьому випадку. У цьому випадку частинки пучка згруповані в просторі у хвилі, що поширюється, само зміцнюючись, навіть якщо жодна частинка не рухається зі швидкістю поширення.

Як у випадку гарячого, так і холодного пучка нестійкість зростає, поки частинки пучка не потраплять в електричне поле хвилі. Саме тоді кажуть, що нестабільність насичується [9].

1.2. Метод Particle-In-Cells для моделювання двопотокової нестійкості

1.2.1 Загальна характеристика методу PIC

У фізиці плазми метод частинок у коміріці (PIC) відноситься до техніки, яка використовується для вирішення певного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних. У цьому методі окремі частинки (або елементи рідини) у системі Лагранжа відстежуються в безперервному фазовому просторі, тоді як моменти розподілу, такі як густини та струми, обчислюються одночасно на ейлерових (стаціонарних) точках сітки.

Методи PIC вже використовувалися ще в 1955 році, ще до появи перших компіляторів Fortran. Метод набув популярності для моделювання плазми наприкінці 1950-х і на початку 1960-х років Бунеманом, Доусоном, Хокні, Бердсолом, Морсом та іншими. У додатках із фізики плазми цей метод зводиться

до відстеження траєкторій заряджених частинок у самоузгоджених електромагнітних (або електростатичних) полях, обчислених на фіксованій сітці.

Для багатьох типів задач класичний метод РІС, винайдений Бунеманом, Доусоном, Хокні, Бердсолом, Морсом та іншими, є відносно інтуїтивно зрозумілим і простим у реалізації. Ймовірно, це пояснює більшу частину його успіху, особливо для моделювання плазми, для якого метод зазвичай включає наступні процедури [2]:

- 1) інтегрування рівнянь руху;
- 2) інтерполяція членів джерела заряду та струму до сітки поля;
- 3) розрахунок полів на точках сітки;
- 4) інтерполяція полів від сітки до розташування частинок.

Моделі, які включають взаємодію частинок тільки через середні електричного поля, називаються *PM* (particle-mesh). Ті, які включають прямі бінарні взаємодії, є *PP* (частинка-частинка). Моделі з обома типами взаємодії називаються *PP – PM* або *P³M*.

З початку практичного використання було визнано, що метод РІС сприйнятливий до помилок через так званий дискретний шум частинок. Ця похибка є статистичною за своєю природою, і сьогодні вона залишається менш вивченою, ніж традиційні методи з фіксованою сіткою, такі як схеми Ейлера або напівлагранжеві схеми [6].

Сучасні геометричні алгоритми РІС базуються на зовсім іншій теоретичній основі. Ці алгоритми використовують інструменти дискретного різноманіття, інтерполяційних диференціальних форм і канонічних або неканонічних симплектичних інтеграторів, щоб гарантувати калібрувальний інваріант і збереження заряду, енергії-імпульсу і, що більш важливо, нескінченновимірної симплектичної структури системи поля частинок. Ці бажані особливості пов'язані з тим фактом, що геометричні алгоритми РІС побудовані на більш фундаментальній теоретичній основі поля та безпосередньо пов'язані з ідеальною формою, тобто варіаційним принципом фізики.

У розрізі вивчення процесів у плазми досліджуються системи різних видів (електрони, іони, нейтрони, молекули, частинки пилу тощо). Таким чином, набір рівнянь, пов'язаних із РС-кодами, це сила Лоренца як рівняння руху, розв'язане в так званому штовхачі або рушії частинок коду, і рівняння Максвелла, що визначають електричні та магнітні поля, розраховані в розв'язуючому апараті для полів.

У фізиці плазми моделювання РС успішно використовується для вивчення лазерно-плазмових взаємодій, прискорення електронів та нагрівання іонів в авроральній іоносфері, магнітогідродинаміки, магнітного перез'єднання, а також іонно-температурного градієнта та інших мікронестійкостей у токамаках, крім того, вакуумних розрядів, і запиленої плазми [10-12].

Гібридні моделі можуть використовувати метод РС для кінетичної обробки деяких видів, тоді як інші види моделюються за допомогою рідинної моделі.

Моделювання РС також застосовувалося поза межами фізики плазми до проблем механіки твердого тіла та рідини.

1.2.2. Техніка реалізації методу

Досліджувані реальні системи часто надзвичайно великі з точки зору кількості частинок, які вони містять. Щоб моделювання було ефективним або взагалі можливим, використовуються так звані суперчастинки. Суперчастинка (або макрочастинка) — це обчислювальна частинка, яка представляє багато реальних частинок; це можуть бути мільйони електронів або іонів у випадку моделювання плазми або, наприклад, вихровий елемент у моделюванні рідини. Дозволено масштабувати кількість частинок, оскільки прискорення від сили Лоренца залежить лише від співвідношення заряду до маси, тому суперчастинка буде слідувати тією ж траєкторією, що й справжня частинка.

Кількість реальних частинок, що відповідає суперчастинці, має бути обрана таким чином, щоб можна було зібрати достатню статистику щодо руху частинки. Якщо існує значна різниця між густиною різних частинок у системі (між іонами та нейтронами, наприклад), для них можна використовувати окремі співвідношення реальних і суперчастинок [8].

Навіть із суперчастинками кількість змодельованих частинок зазвичай дуже велика ($> 10^5$), і часто рух частинок є найбільш трудомісткою частиною РС, оскільки це потрібно робити для кожної частинки окремо. Таким чином, від розв'язуючого апарату вимагається висока точність і швидкість, і багато зусиль витрачається на оптимізацію різницевих схем.

Схеми, які використовуються для руху частинок, можна розділити на дві категорії: неявні та явні розв'язувачі. У той час як неявні розв'язувачі (наприклад, неявна схема Ейлера) обчислюють швидкість частинок на основі вже оновлених полів, явні розв'язувачі використовують лише стару силу з попереднього кроку часу, і тому вони простіші та швидші, але вимагають меншого кроку часу. У моделюванні РС використовується метод чехарди, явний метод другого порядку. Також використовується алгоритм Бориса, який компенсує магнітне поле в рівнянні Ньютона-Лоренца [5].

Для застосування у фізиці плазми метод чехарди має такий вигляд:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = v_{k+\frac{1}{2}}, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left(E_k + \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k-\frac{1}{2}}}{2} \times B_k \right), \quad (1.2.2)$$

де нижній індекс k стосується «старих» величин із попереднього кроку часу, $k + 1$ — оновлених величин із наступного кроку часу (тобто $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, а швидкості обчислюються між звичайними часовими кроками t_k).

Рівняння схеми Бориса, які замінюють наведені вище рівняння, такі:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t v_{k+\frac{1}{2}}, \quad (1.2.3)$$

$$v_{k+\frac{1}{2}} = u' + q'E_k, \quad (1.2.4)$$

причому

$$u' = u + (u + (u \times h)) \times s, \quad (1.2.5)$$

$$u = v_{k-\frac{1}{2}} + q'E_k, \quad (1.2.6)$$

$$h = q'B_k, \quad (1.2.7)$$

$$s = 2h/1 + h^2, \quad (1.2.8)$$

$$q' = \Delta t \times (q/2m). \quad (1.2.9)$$

Завдяки високій точності на довгострокових проміжках часу алгоритм Бориса є класичним методом моделювання просування зарядженої частинки. Було виявлено, що висока точність нерелятивістського алгоритму Бориса пояснюється тим фактом, що він зберігає об'єм фазового простору, навіть якщо він не є симплектичним. Глобальна межа енергетичної похибки, яка зазвичай пов'язана з симплектичними алгоритмами, все ще зберігається для алгоритму Бориса, що робить його ефективним алгоритмом для багатомасштабної динаміки плазми. Було також виявлено, що можна покращити релятивістський поштовх Бориса, щоб зробити його водночас збереженням об'єму та мати розв'язок постійної швидкості в схрещених полях E та B [10].

Найпоширеніші методи розв'язування рівнянь Максвелла (або, загалом, диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП)) належать до однієї з наступних трьох категорій:

- методи кінцевих різниць (FDM)
- методи скінченних елементів (FEM)

- спектральні методи.

За допомогою FDM безперервна область замінюється дискретною сіткою точок, на якій розраховуються електричні та магнітні поля. Потім похідні апроксимуються різницями між сусідніми значеннями точок сітки, і таким чином ДРЧП перетворюються на алгебраїчні рівняння.

За допомогою FEM неперервна область розбивається на дискретну сітку елементів. ДРЧП розглядають як проблему обчислення власних значень, і спочатку пробне рішення обчислюється з використанням базисних функцій, локалізованих у кожному елементі. Остаточне рішення потім отримується шляхом оптимізації до досягнення необхідної точності.

Також спектральні методи, такі як швидке перетворення Фур'є (ШПФ), перетворюють ДРЧП у задачу обчислення власних значень, але цього разу базисні функції мають високий порядок і визначаються глобально по всій області. Сама область в цьому випадку не дискретизується, вона залишається безперервною. Знову ж таки, пробне рішення знаходить шляхом введення базисних функцій у рівняння власних значень і потім оптимізує для визначення найкращих значень початкових пробних параметрів.

Назва «частинка в комірці» походить від того, що макровеличини плазми (числова густина, густина струму тощо) призначаються симуляційним частинкам (тобто вага частинок). Частинки можуть розташовуватися будь-де в безперервній області, але макровеличини обчислюються лише в точках сітки, як і поля. Щоб отримати макровеличини, припускають, що частинки мають задану «форму», яка визначається функцією форми:

$$S(x - X), \quad (1.2.10)$$

де x — координата частинки, а X — точка спостереження. Мабуть, найпростішим і найбільш використовуваним вибором для функції форми є так звана схема хмари в комірці, яка є схемою зважування першого порядку (лінійною). Якою б

не була схема, функція форми повинна задовольняти наступним умовам: просторова ізотропія, збереження заряду та підвищення точності (сходження) для членів вищого порядку.

Поля, отримані за допомогою розв'язувача полів, визначаються лише на точках сітки і не можуть бути використані безпосередньо в механізмі руху частинок для обчислення сили, що діє на частинки, а повинні бути інтерпольовані за допомогою зважування поля [12]:

$$E(x) = \sum_i E_i S(x_i - x), \quad (1.2.11)$$

де нижній індекс i позначає точку сітки. Щоб гарантувати, що сили, що діють на частинки, отримані самоузгоджено, спосіб обчислення макровеличин від позицій частинок на точках сітки та інтерполяції полів від точок сітки до позицій частинок також має бути узгодженим, оскільки вони обидва з'являються в рівняннях Максвелла. Перш за все, схема інтерполяції поля повинна зберігати імпульс. Цього можна досягти, вибравши ту саму схему зважування для частинок і полів і одночасно забезпечивши відповідну симетрію простору (тобто відсутність власної сили та виконання закону дії-реакції) розв'язувача полів.

Оскільки розв'язувач поля повинен бути вільним від сил власного впливу, усередині клітини поле, створене частинкою, повинно зменшуватися зі зменшенням відстані від частинки, і, отже, сили між частинками всередині клітин недооцінюються. Це можна збалансувати за допомогою кулонівських зіткнень між зарядженими частинками. Моделювання взаємодії для кожної пари великої системи було б надто дорогим з обчислювальної точки зору, тому замість цього було розроблено кілька методів Монте-Карло. Широко використовуваним методом є бінарна модель зіткнення, у якій частинки групуються відповідно до їх комірки, потім ці частинки випадковим чином поєднуються в пари, і, нарешті, пари зіштовхуються.

У реальній плазмі може відігравати роль багато інших реакцій, починаючи від пружних зіткнень, таких як зіткнення між зарядженими та нейтральними частинками, до непружних зіткнень, таких як електрон-нейронні іонізаційні зіткнення, до хімічних реакцій; кожен з них потребує окремого підходу. Більшість моделей зіткнень, що обробляють заряджено-нейтральні зіткнення, використовують або пряму схему Монте-Карло, за якою всі частинки несуть інформацію про ймовірність зіткнення, або схему нульового зіткнення, яка не аналізує всі частинки, а натомість використовує максимальну ймовірність зіткнення для кожної зарядженої частинки.

1.2.3. Точність та умови стійкості методу

Як і будь-який метод моделювання, для РІС крок у часі та розмір сітки повинні бути правильно вибрані, щоб значення величин у часі та просторі, які цікавлять, було правильно знайдено в задачі. Крім того, часовий крок і розмір сітки впливають на швидкість і точність методу.

Для електростатичного моделювання плазми з використанням явної схеми інтеграції часу (наприклад, метод чехарди, який використовується найчастіше), дві важливі умови щодо розміру сітки Δx і кроку за часом Δt має бути виконано, щоб забезпечити стабільність рішення [9]:

$$\Delta x < 3.4\lambda_D, \quad (1.2.12)$$

$$\Delta t \leq 2\omega_{pe}^{-1}, \quad (1.2.13)$$

яку можна отримати, розглядаючи гармонійні коливання одновимірної ненамагніченої плазми. Остання умова є суворо необхідною, але практичні міркування, пов'язані зі збереженням енергії, пропонують використовувати набагато суворіше обмеження, де коефіцієнт 2 замінюється числом на один порядок меншим. Типовим є використання $\Delta t \leq 0.1\omega_{pe}^{-1}$. Не дивно, що природна

шкала часу в плазмі визначається зворотною плазмовою частотою ω_{pe}^{-1} і шкалою довжини за довжиною Дебая λ_D .

Для явного моделювання електромагнітної плазми крок у часі також повинен задовольняти умову Куранта-Фрідрікса-Леві:

$$\Delta t < \Delta x / c, \quad (1.2.14)$$

де $\Delta x \sim \lambda_d$, та c – швидкість світла [11].

РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДВОПОТОКОВОЇ НЕСТІЙКОСТІ У РЕЛЯТИВІСТСЬКОМУ ДВОПОТОКОВОМУ ЕЛЕКТРОННОМУ ПУЧКУ МЕТОДОМ РС

2.1. Обезрозмірення та нормалізація величин

Розглянемо обезрозмірення простору та часу. Щоб разом нормалізувати простір і час, використовується плазмова частота і швидкість світла:

$$t' = \omega_{pe} t, \quad (2.1.1)$$

$$l' = \frac{\omega_{pe} l}{c}, \quad (2.1.2)$$

в результаті чого час обчислюється в періодах хвиль електронної плазми, а довжина в $d_e = c/\omega_{pe}$. Заряд (або масу) можна нормувати в одиницях заряду (маси) в одиничному кубі: $Q' = Q/n_0 e d_e^3$ ($M' = M/n_0 m_e d_e^3$).

На практиці нормалізація вище дозволяє спростити рівняння системи Власова-Максвелла та його дискретизації методом РС шляхом прирівнювання до одиниці ряду величин. Зокрема, вибір заряду, маси та характеристичної густини електронів одиничними ($e = 1, m_e = 1, n_e = 1$), призводить до одиничної електронної плазмової частоти. Вибір $\epsilon_0 = 1$ і $\mu_0 = 1$ дозволяють нормалізувати швидкості, заряд та масу.

2.2. Реалізація методу РС для моделювання двопотокової нестійкості

Нагадаємо основні етапи реалізації РС:

- 1) інтегрування рівнянь руху;
- 2) інтерполяція членів джерела заряду та струму до сітки поля;
- 3) розрахунок полів на точках сітки;
- 4) інтерполяція полів від сітки до розташування частинок.

Основними рівняннями, що описують рух електронів та динаміку електричного поля при моделюванні двопотокової нестійкості є

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = eE \\ E = -\nabla_x \varphi \\ \epsilon_0 \nabla_x^2 \varphi = -e(n_0 - n) \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

i – номер пучка, x та v - координата та швидкість електрону, e , n — заряд та щільність електронів, E , φ и n_0 визначають електричне поле, потенціал збудженої хвилі та щільність фону, що нейтралізує важкі іони.

Рівняння руху розв'язуються класичним ітеративним чином (етап 1):

$$\tilde{x}_p^{new} = \tilde{x}_p^{old} + \Delta t \tilde{v}_p^{old}, \quad (2.2.2)$$

$$\tilde{v}_p^{new} = \tilde{v}_p^{old} - \frac{e}{m} \Delta t \widetilde{E}_p(\tilde{x}_p^n). \quad (2.2.3)$$

Після виконання кроку 1 необхідно перейти від частинок до сітки. Сітка є рівномірною і одновимірною, нехай i -та частинка лежить між k -тим та $k + 1$ -шим вузлами сітки. В такому разі обчислюється концентрація частинок у вузлах k та $k + 1$ (етап 2):

$$n_k = \frac{\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_i}{\Delta \tilde{x}}, n_{k+1} = \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_k}{\Delta \tilde{x}}, \quad (2.2.4)$$

причому величини під тільдою є нормованими, а \tilde{x}_k – координата точок сітки.

Отримавши концентрацію по вузлах сітки, обчислюється електричне поле та інші його метрики на позиціях частинок даних вузлах (етап 3) –

$$\tilde{E}_i = \left(\frac{\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_i}{\Delta\tilde{x}} \right) \tilde{E}_k + \left(\frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_k}{\Delta\tilde{x}} \right) \tilde{E}_{k+1} \quad (2.2.5)$$

Після цього процес можна повторювати до проходження необхідної кількості ітерацій. Важливо зазначити, що оскільки розглядається релятивістський електронний пучок, дослідження проводиться у власній та лабораторній системах відліку. При переході від власної до лабораторної системи (у випадку швидкостей, співставних зі швидкістю світла), використовуються наступні перетворення для електричного поля:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad (2.2.6)$$

$$E'_{\perp} = \frac{E_{\perp} + [v_0 B]}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}, \quad (2.2.7)$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad (2.2.8)$$

$$B'_{\perp} = \frac{B_{\perp} - [v_0 E]/c^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}, \quad (2.2.9)$$

де символами \parallel та \perp відмічені компоненти полів, паралельні та перепендикулярні вектору v_0 .

2.3. Амплітудний спектр електричного поля за допомогою перетворень Фур'є

Для дослідження динаміки електричного поля, отримаємо його амплітудний спектр.

Існує природній спосіб зробити з скінченного набору значень нескінченну послідовність: продовжити $\{E_i\}$ нульовими значеннями при інших $i \in \mathbb{Z}$.

Тоді формула для дискретного перетворення Фур'є має вигляд:

$$\hat{f}_d(\omega) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} E_i \exp(-i\omega n \Delta t). \quad (2.3.1)$$

Деяка нелогічність цієї формули полягає у тому, що параметр ω є неперервним на відміну від скінченного числа дискретних значень $n\Delta t$, у той час коли у вихідній формулі перетворення Фур'є змінні ω й t були рівноправними. Було б правильніше, коли б для дискретного перетворення Фур'є дискретний ряд значень x_0, \dots, x_{N-1} , перетворювався б також у дискретний ряд y_0, \dots, y_{N-1} . Виконати це нескладно. Оскільки функція $\hat{f}_d(\omega)$ періодична з періодом $2\pi / \Delta t$, то природно взяти дискретну серію частот

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N\Delta t}, k = 0, \dots, N-1, \quad (2.3.2)$$

Які проходять проміжок $[0; 2\pi/\Delta t)$ із кроком $\frac{2\pi}{N\Delta t}$. Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} A_k = \hat{f}_d(\omega_k) &= \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} E_i \exp(-i\omega_k n \Delta t) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} E_i \exp\left(-\frac{i2\pi kn \Delta t}{N\Delta t}\right) \\ &= \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} E_i \exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

2.4. Початкові та граничні умови

Для системи (номер) відомий початковий розкид швидкостей та координат електронів під номерами $i = 0, \dots, N$. Початкова координата кожної частинки обирається випадковим чином з проміжку $[0; L]$.

Граничні умови також є періодичними, тобто, якщо внаслідок моделювання частинка i має набути координати $x_i = L + b_i$, то координата набуває вигляду $x_i = b_i$, аналогічно, для лівої просторової межі системи.

Початкові швидкості формуються наступним чином:

$$v_i^0 = v_0 + v_{i,t}, \quad (2.4.1)$$

де v_0 – модуль початкової швидкості, додатній для електронів з одного пучка, та від’ємний для іншого, але того самого абсолютного значення для всіх частинок, $v_{i,t}$ – теплова дисперсія швидкостей, спричинена тепловим станом системи, випадкове значення для кожної частинки, але в певному діапазоні.

За $v_{i,t} = 0$, маємо наступний фазовий портрет на рис. 1.

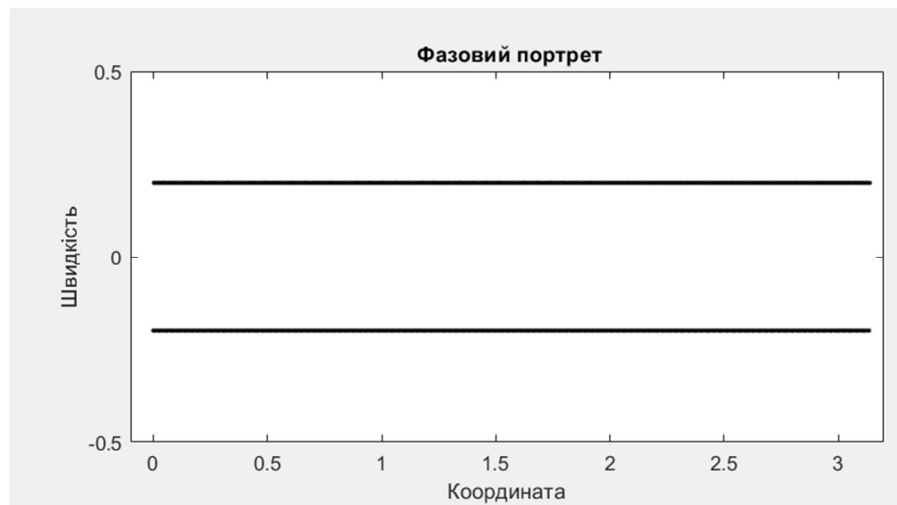


Рисунок 1 – Фазовий портрет системи в початковий момент часу за відсутності теплової дисперсії

За $v_{i,t} \neq 0$, відбувається розкид за швидкостями і фазовий портрет набуває наступного вигляду на рисунку 2.



Рисунок 2 – Фазовий портрет системи в початковий момент часу за наявності теплової дисперсії

Нехай частинки перед потраплянням до плазми пройшли модуляцію певним пристроєм таким чином, що не мають теплового розкиду ($v_t = 0$), але їх швидкості набули на фазовому портреті вигляду синусоїд, що накладаються (рис. 3).

$$v_i^0 = v_0(\sin(kx_i^0) + b) \quad (2.4.2)$$

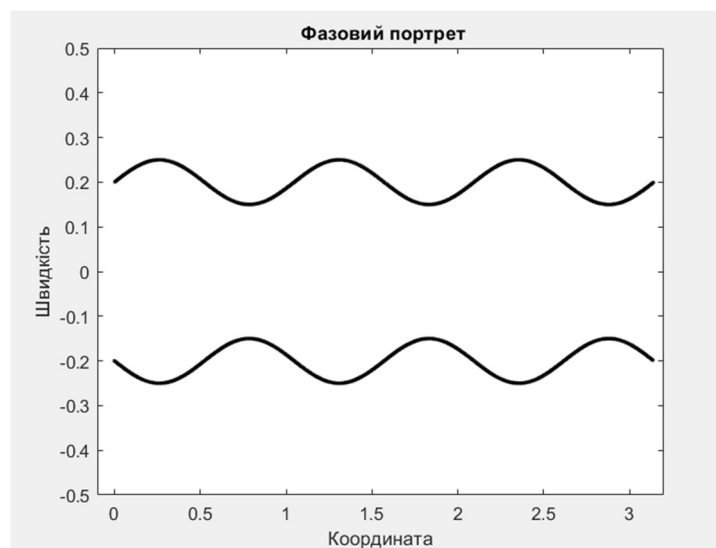


Рисунок 3 – Фазовий портрет системи в початковий момент часу після модуляції початкових швидкостей

Викладені вище випадки задання початкового розкиду швидкостей розглянуто в комп'ютерному експерименті.

Останньою важливою граничною умовою є рівність нулю потенціалу на границях області в будь який момент часу

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0. \quad (2.4.3)$$

РОЗДІЛ 3 РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

3.1. Параметри та постійні величини

В результаті комп'ютерних обчислень математичної моделі, представленого в розділі 2 було побудовано графіки амплітудного спектра електричного поля, залежності амплітуд від часу, фазові портрети системи для різних випадків початкових розкидів швидкостей –

- 1) $v_t = 0$, пучки мають форму прямих ліній;
- 2) $v_t = 0.03; 0.07; 0.1$, пучки мають форму прямих ліній;
- 3) $v_t = 0$, пучки мають швидкості, промодульовані у вигляді синусоїд.

Графіки були побудовані при постійних величинах: просторова довжина системи $L = \pi$, кількість точок сітки $N_g = 64$, кількість суперчастинок $N_p = 1000$, чутливість плазми $d = 1$, модуль початкової швидкості $v_0 = 0.2$, за часом виконувалося $N_t = 100$ ітерацій. Ці початкові дані є типовими для моделювання двопотокової нестійкості.

3.2. Відсутність початкової дисперсії за швидкостями частинок

Одним з параметрів системи, що досліджується, є вплив теплового стану системи на динаміку двопотокової нестійкості. Спочатку розглянемо випадок $v_t = 0$, коли пучки не мають розкиду початкових швидкостей, тобто швидкості всіх частинок однакові за модулем. Розглядаючи амплітудний спектр електричного поля в різні моменти часу, було виявлено, що до певного моменту максимальне значення амплітуди зростає, а після іде на спад. Відповідно, на рисунку 4 показаний спектр у період зростання, на рисунку 5 – в момент пікового значення амплітуди спектру, а на рисунку 6 – поступове згасання амплітуди.

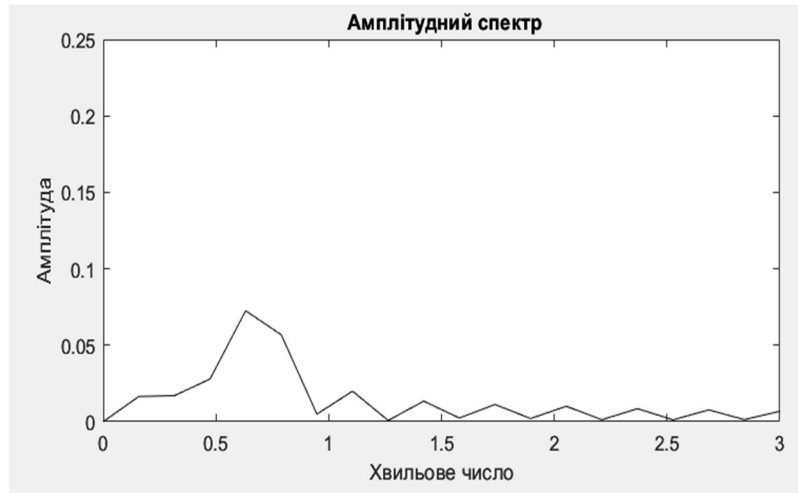


Рисунок 4 – Амплітудний спектр електричного поля на 30-й ітерації ($v_t = 0$)

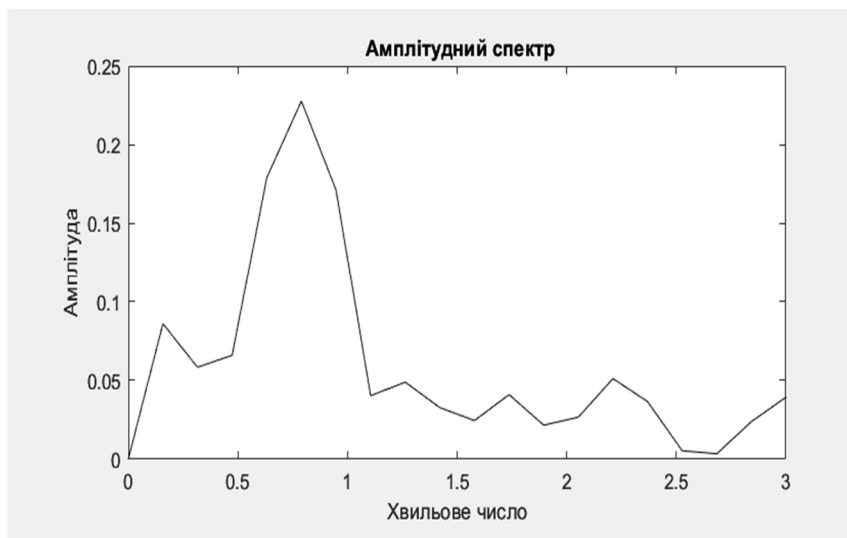


Рисунок 5 – Амплітудний спектр електричного поля на 40-й ітерації ($v_t = 0$)

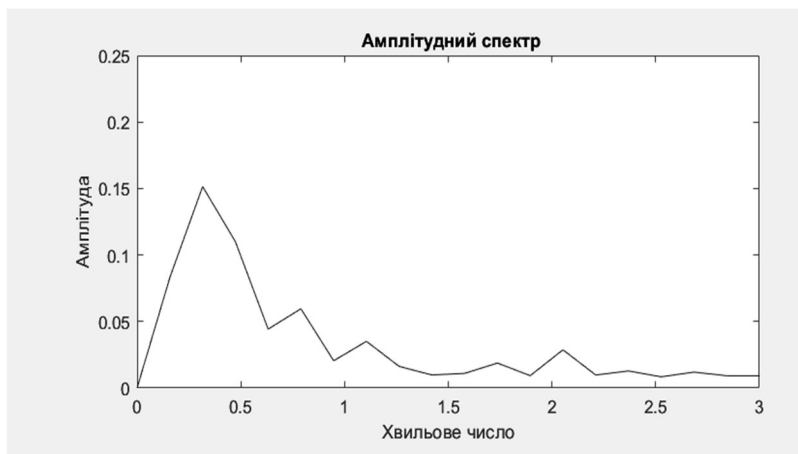


Рисунок 6 – Амплітудний спектр електричного поля на 50-й ітерації ($v_t = 0$)

На рисунку 7 зображена часова залежність кінетичної енергії, з даного графіку видно, що біля 40-ї ітерації значення енергії почало різко зменшуватися після чого повернулося на попередній рівень та коливалося навколо сталої. В цей момент часу відбувся перехід системи з когерентного в некогерентний стан, що корелює із збільшенням амплітуди електричного поля в даний період.

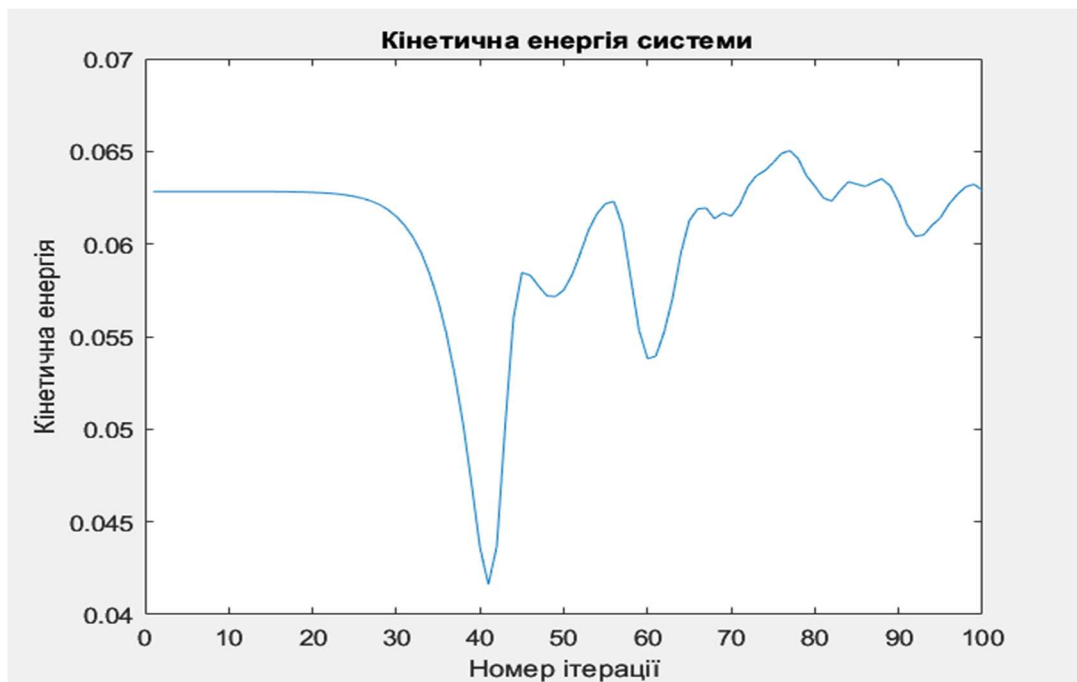


Рисунок 7 – Графік часової залежності кінетичної енергії ($v_t = 0$)

Розглядаючи систему у лабораторній системі відліку, було побудовано координатні залежності амплітуд спектру електричного поля за частотами, за якими амплітуди досягають максимальних значень, було виявлено, що доки система перебуває на проміжку, що відповідає когерентному стані, амплітуди зростають, причому характер їх зростання – експоненціальний (рисунок 8).

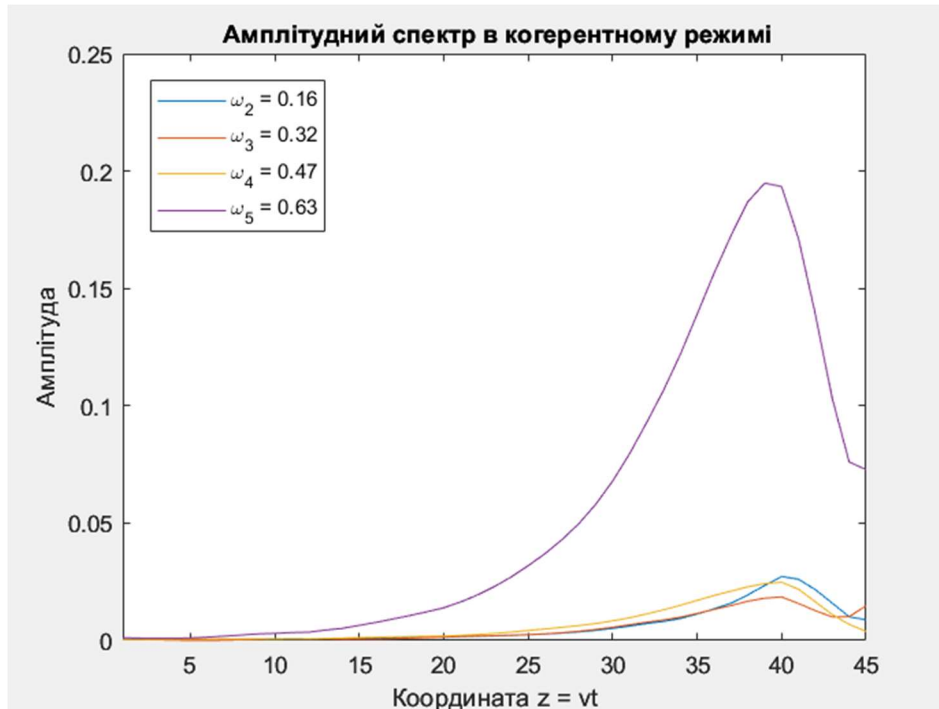


Рисунок 8 – Координатні залежності амплітуд електричного поля на проміжку, що відповідає когерентному стану системи ($v_t = 0$)

В точці переходу з когерентного в некогерентний стан, відбувається насичення двопотокової нестійкості, внаслідок чого амплітуда починає згасати, що показано на рисунку 9.

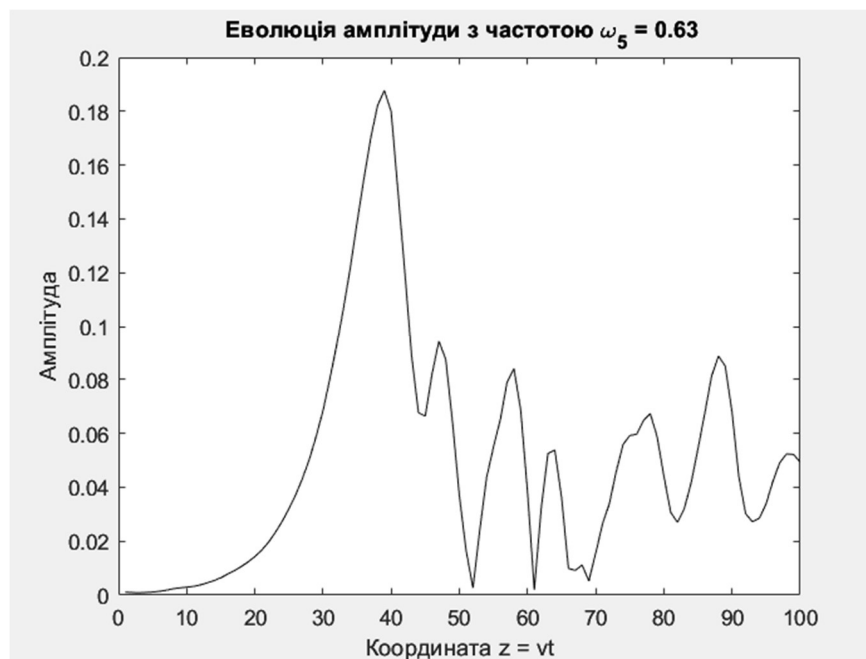


Рисунок 9 – Координатна залежність амплітуди електричного поля за частотою, що відповідає першій гармоніці спектру ($v_t = 0$)

3.3. Наявність початкової дисперсії за швидкостями частинок

Розглянемо випадок коли частинки мають певний розкид за швидкостями, спричинений тепловим станом системи ($v_t = 0.03$). На рисунку 10 зображено фазовий портрет системи після 100 ітерацій, ще зберігається структура потенціальної ями, характерної для двопотокової нестійкості, але вже в менш чіткому вигляді, ніж це відбулося за ту саму кількість ітерацій за відсутністю розкиду за швидкостями.

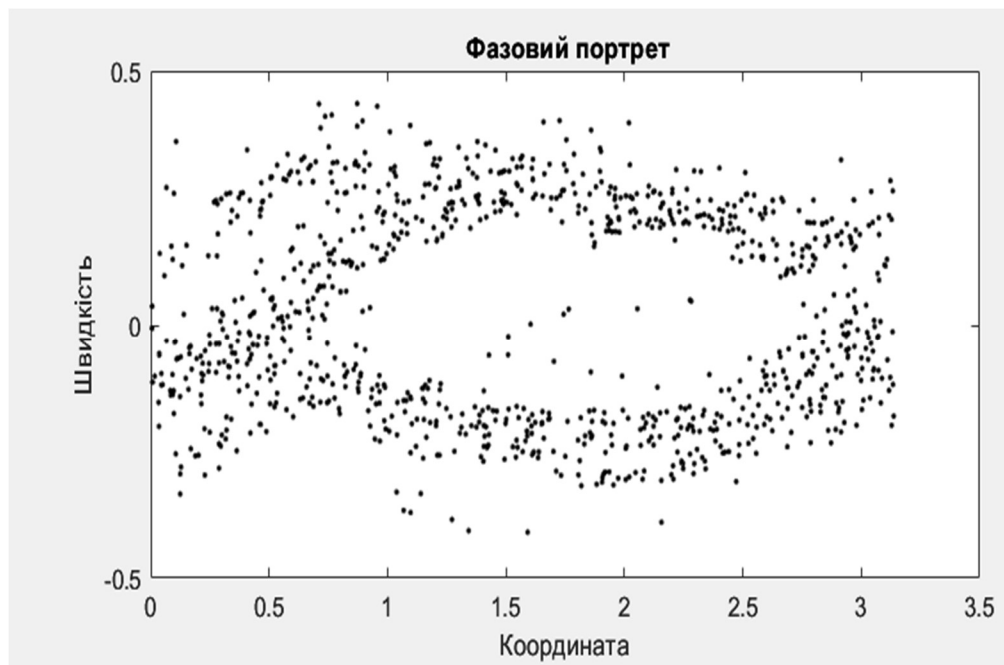


Рисунок 10 – Фазовий портрет системи на 100-й ітерації ($v_t = 0.03$)

Це пов'язано тим, що за наявності розкиду, певні частинки в пучках знаходяться геометрично ближче на фазовому портреті в початковий момент часу, а отже за ту саму кількість ітерацій фазовий портрет системи встигає прийняти більш хаотичного вигляду. На рисунку 11 зображений фазовий портрет системи після виконання 30 ітерацій.

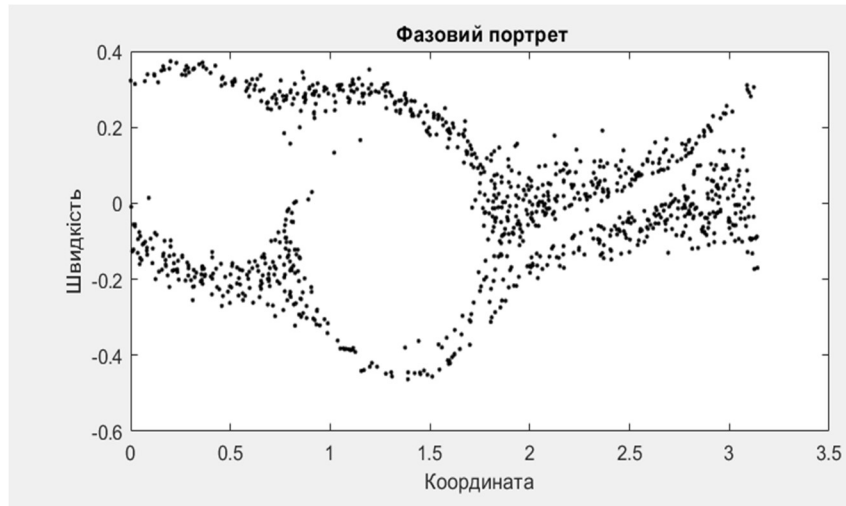


Рисунок 11 – Фазовий портрет системи на 30-й ітерації ($v_t = 0.03$)

Це частинний випадок появи 2 потенціальних ям, і він спричинений випадковим характером розкиду частинок по швидкостях. У більшості випадків, інтеракція пучків одразу призводить до формування однієї ями, але в деяких випадках, є проміжний етап, коли з'являється 2 ями і поступово переходять в одну. Так чи інакше, фазовий портрет після завершення 100 ітерацій буде мати якісно той самий вигляд, як на рисунку 10.

На рисунку 12 зображено амплітудний спектр після виконання 30 ітерацій, було виявлено, що в період знаходження двох ям на фазовому портреті, амплітудний спектр має 2 яскраво виражених максимуми, близьких за значенням.

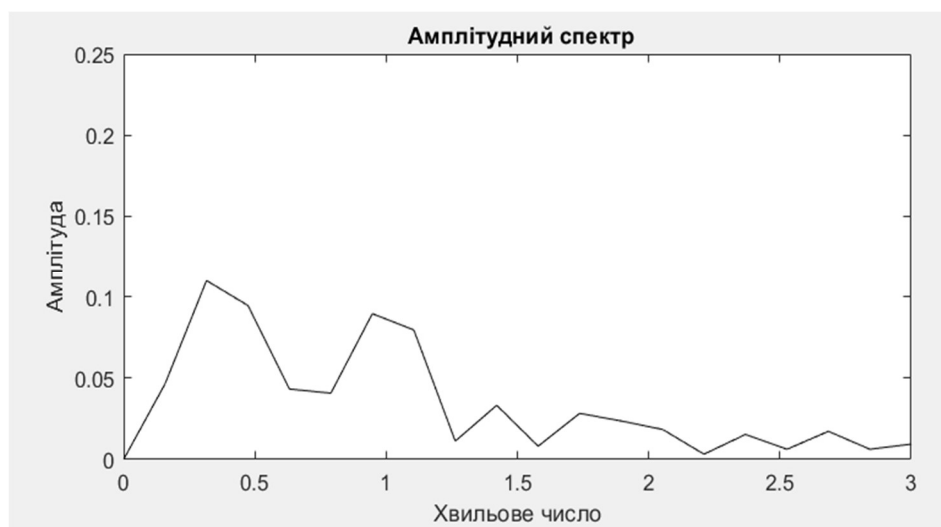


Рисунок 12 – Амплітудний спектр електричного поля на 30-й ітерації ($v_t = 0.03$)

На рисунку 13 зображена часова залежність кінетичної енергії. Момент переходу з когерентного в некогерентний стан відбувся на кілька ітерацій раніше. Це пов'язано з тим, що взаємодія пучків почалася швидше, через розкид за швидкостями.

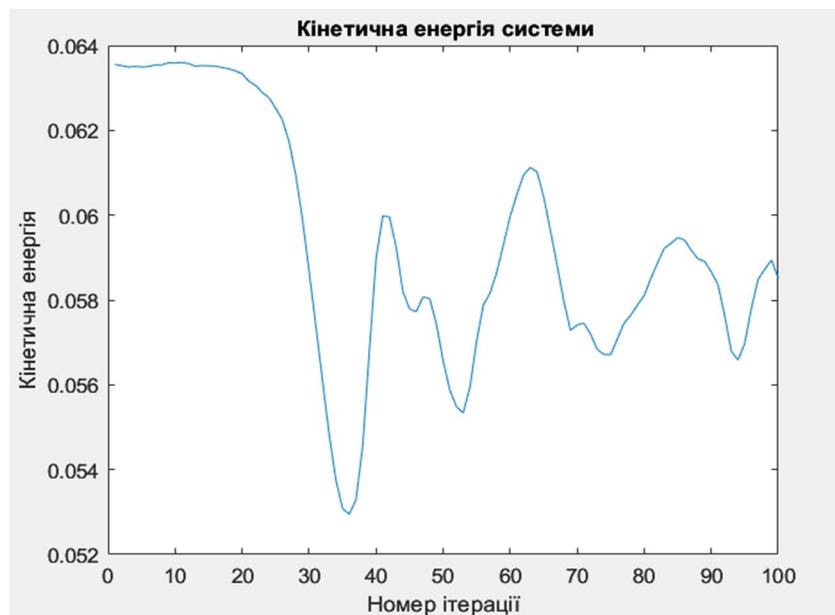


Рисунок 13 - Графік часової залежності кінетичної енергії ($v_t = 0.03$)

Розглядаючи систему у лабораторній системі відліку, суттєвої зміни характеру зростання амплітуд електричного поля, порівнюючи з випадком, коли відсутня дисперсія за швидкостями, виявлено не було, оскільки значення теплової швидкості $v_t = 0.03$ не є достатньо великим, щоб суттєво змінити динаміку амплітудного спектру електричного поля.

Розглядаючи випадок більшого розкиду за швидкостями, наприклад $v_t = 0.07$, було побудовано графіки координатних залежностей амплітуд спектру електричного поля за частотами, за якими амплітуди досягають максимальних значень (рис. 14).

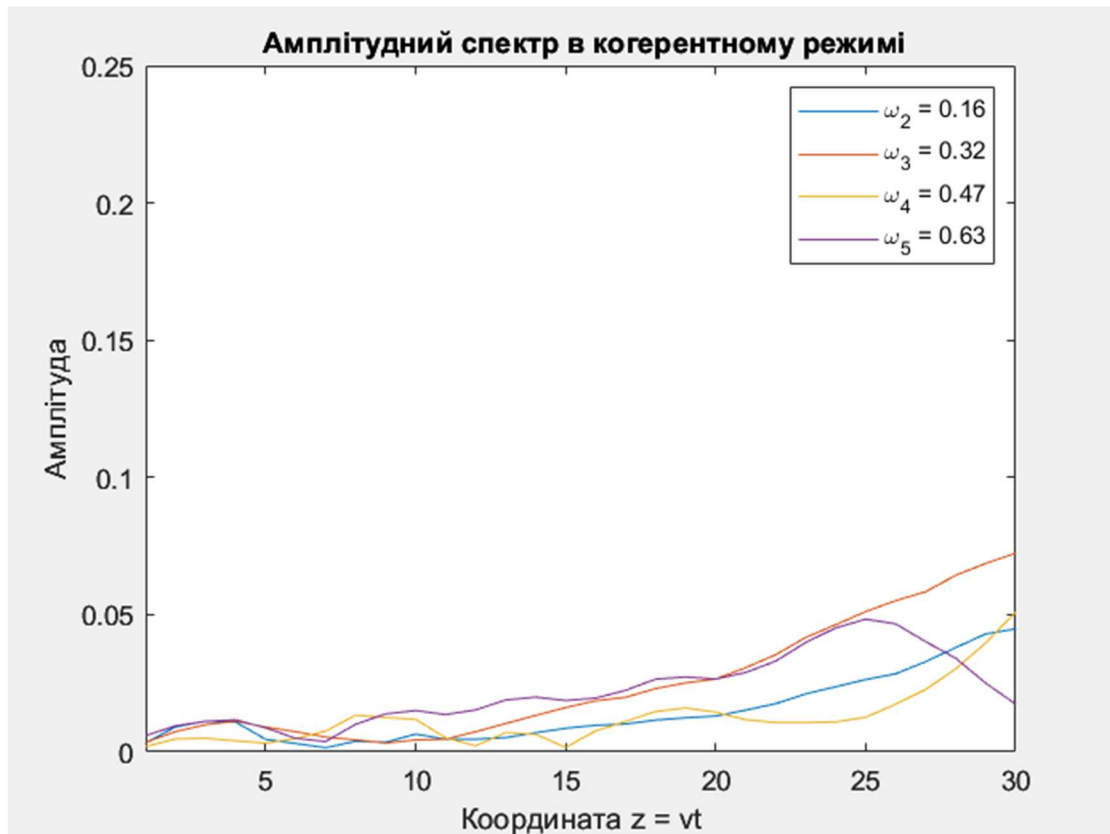


Рисунок 14 – Координатні залежності амплітуд електричного поля на проміжку, що відповідає когерентному стану системи ($v_t = 0.07$)

З даного графіку видно, що максимальне значення амплітуди зменшилося майже вдвічі, порівнюючи із випадком, коли $v_t = 0$, в той час як амплітуди за іншими частотами взагалі втратили експоненціальний характер зростання.

Якщо збільшити v_t до значення 0.1, пучки вже в початковий момент часу будуть знаходитись на невеликій відстані один від одного, в результаті чого проміжок, що відповідає когерентному режиму у лабораторній системі відліку не буде довгим. З графіку координатних залежностей амплітуд електричного поля не можна зробити висновок ані про точку насичення двопотокової нестійкості, ані про експоненціальний характер зростання амплітуд при значеннях координати, менших за координату точки насичення, що говорить про непридатність даного набору параметрів для моделювання двопотокової нестійкості (рис. 15).

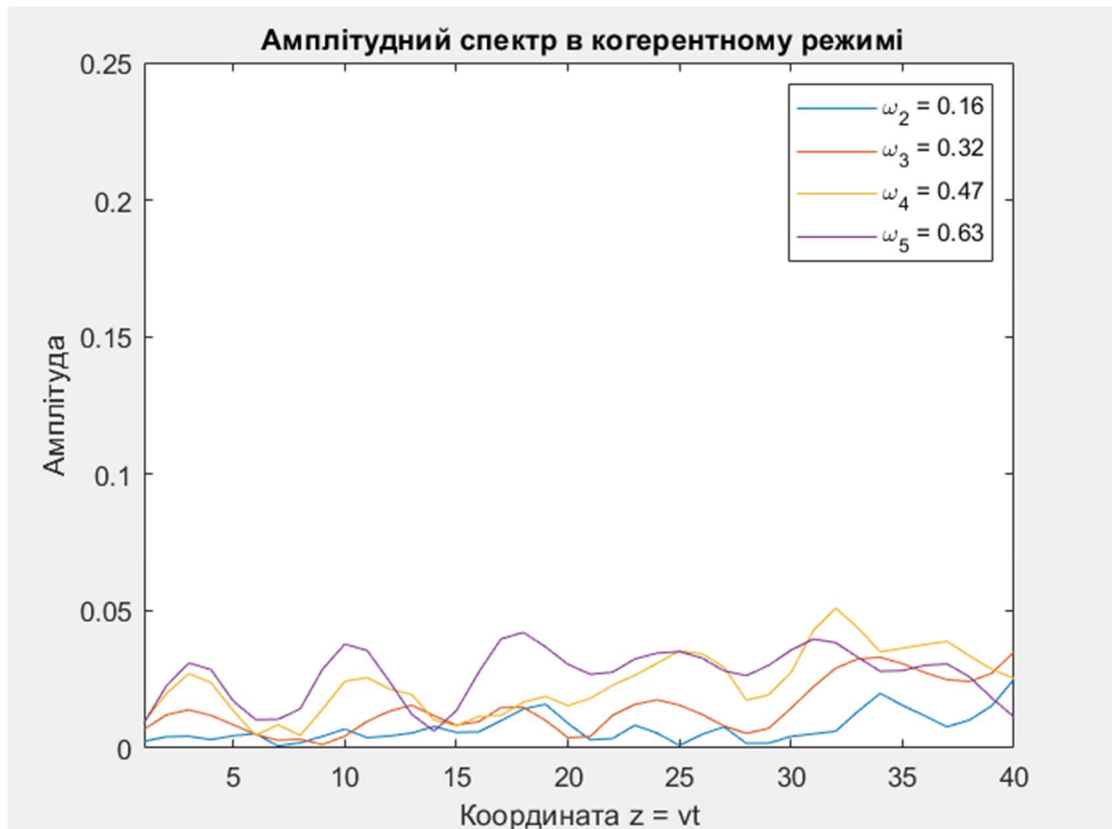


Рисунок 15 - Координатні залежності амплітуд електричного поля на проміжку, що відповідає знаходженню системи у когерентному стані ($v_t = 0.1$)

3.4. Модуляція початкових швидкостей за синусоїдою

Розглянемо випадок, коли електронні пучки промодульовані таким чином, що входять у початковий стан системи у вигляді двох синусоїд, причому кожна з синусоїд має рівно 3 періоди в просторовому сенсі. На рисунку 16 показаний фазовий портрет системи після 40 ітерацій.

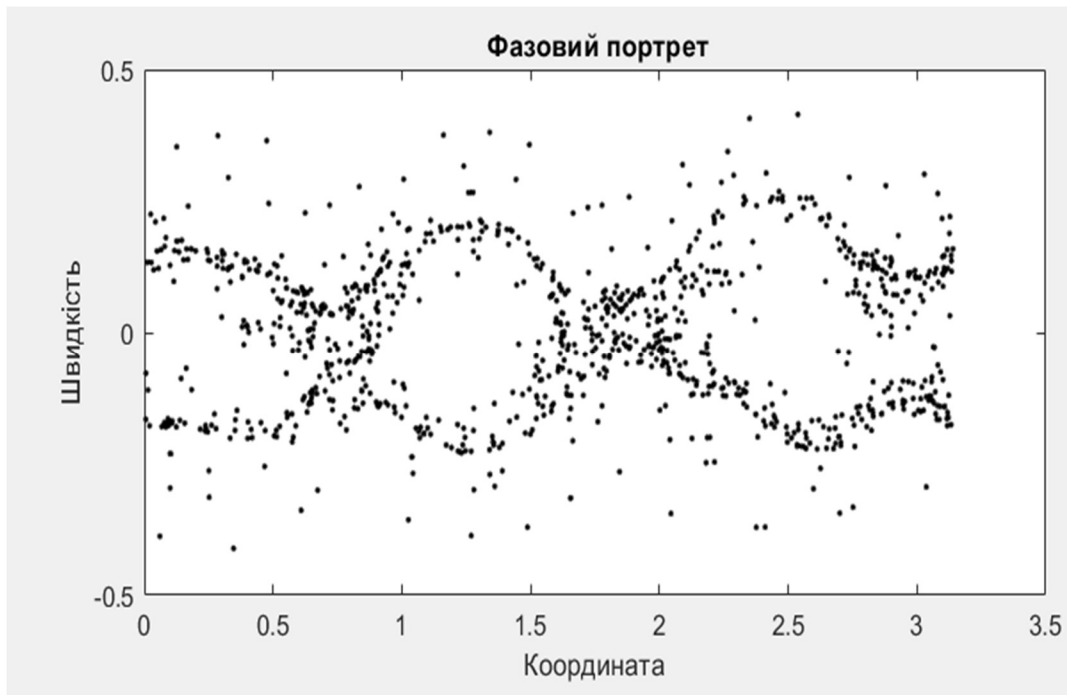


Рисунок 16 – Фазовий портрет системи на 40-й ітерації (модуляція у вигляді синусоїди)

Було виявлено, що кількість ям на даному етапі еволюції системи буде дорівнювати кількості періодів синусоїди, форму якої має пучок. На рисунку 17 зображено фазовий портрет системи після 100 ітерацій.

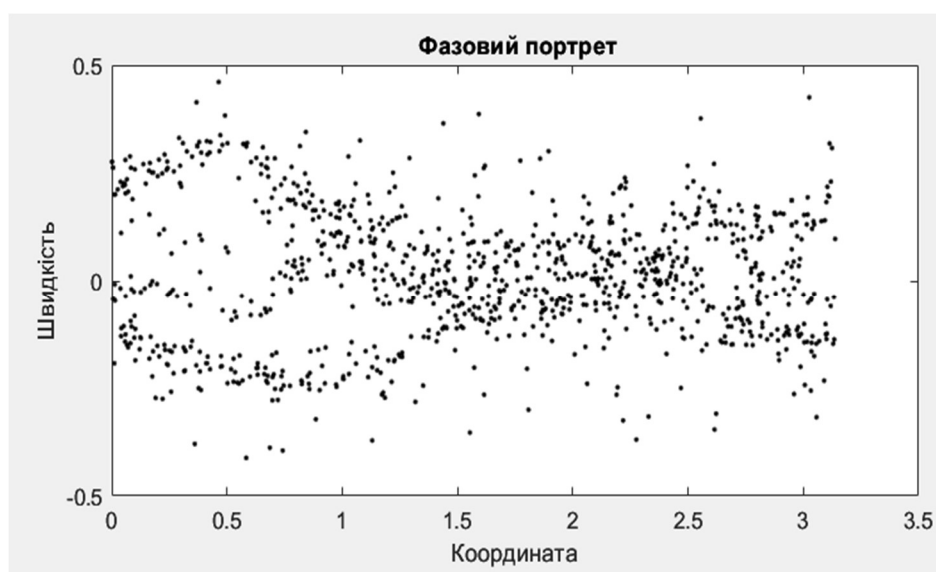


Рисунок 17 – Фазовий портрет системи на 100-й ітерації (модуляція у вигляді синусоїди)

Потенціальна яма виглядає менш структурно цілісною, ніж у двох попередніх випадках, що пов'язано з формою пучків у початковий момент часу: промодульовані пучки починають взаємодіяти швидше, ніж у випадку, коли мають форму прямих ліній, а отже за 100 ітерацій система потрапляє у більше хаотичний стан, ніж у випадках.

Розглядаючи лабораторну систему відліку, на рисунку 18 було побудовано графіки координатних залежностей амплітуд спектру електричного поля за частотами, за якими амплітуди досягають максимальних значень.

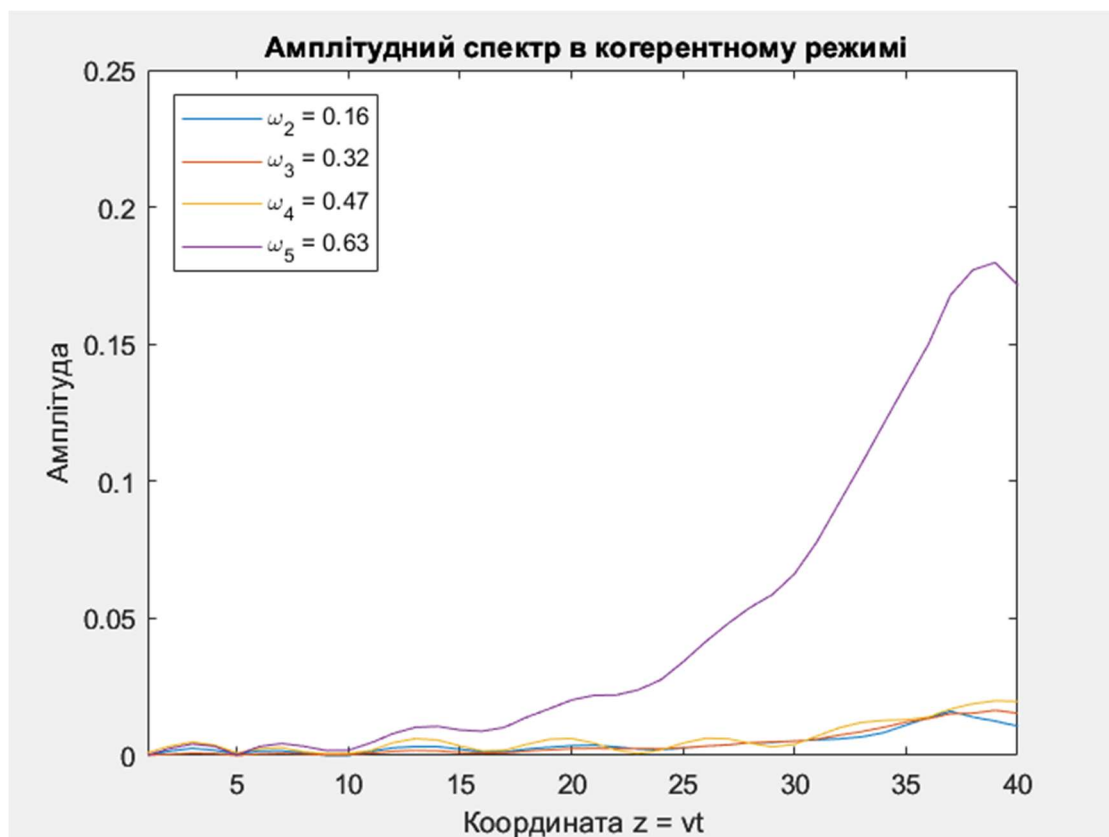


Рисунок 18 - Координатні залежності амплітуд електричного поля на проміжку, що відповідає когерентному стану системи (модуляція у вигляді синусоїди)

З даного графіку видно, що експоненціальний вигляд зберігає лише координатна залежність амплітуди, що досягає максимального значення у амплітудному спектрі, інші мають невиразну форму та знаходяться у, на порядок, меншому діапазоні значень у числовому сенсі.

ВИСНОВКИ

В роботі створено математичну модель та комп'ютерну програму для моделювання двопотокової нестійкості у релятивістському двопотоковому електронному пучку. Проведено аналіз динаміки двопотокової нестійкості залежно від параметрів досліджуваної системи у власній та лабораторній системах відліку.

Для побудови математичної моделі двопотокової нестійкості було використано метод «частинки в комірці», для розв'язку диференціальних рівнянь моделі було використано метод скінчених різниць, а для побудови залежностей амплітуди від координати у лабораторній системі відліку – швидке перетворення Фур'є.

Побудовані амплітудні спектри та фазові портрети в різні моменти часу, часові залежності амплітуд електричного поля та кінетичної енергій системи.

В результаті проведення моделювання було встановлено кореляцію між максимальним значенням амплітудного спектру електричного поля та моментом переходу системи із когерентного в некогерентний стан.

Було встановлено, що зростання амплітуд електричного поля у період знаходження системи в когерентному стані має експоненціальний характер.

Було встановлено залежність швидкості проходження циклу розвитку двопотокової нестійкості від впливу теплового стану системи в початковий момент часу.

Було встановлено залежність якісного характеру динаміки системи від форми електронних пучків у початковий момент часу.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1 Hockney R. W. Computer simulation using particles / R. W. Hockney, J. W. Eastwood. — CRC Press, 2021. — P. 566.
- 2 Samuelsson L. Relativistic two-stream instability / L. Samuelsson, C. S. Lopez-Monsalvo, N. Andersson, G. L. Comer // General Relativity and Gravitation. – 2010. – Vol. 42, No. 413 – P. 13-15.
- 3 Goswami J. Quantum two stream instability in a relativistically degenerate magnetized plasma / J. Goswami, S. Chandra, J. Sarkar, B. Ghosh // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol. 2319, No. 1 – P. 45-50.
- 4 Lysenko A. Influence of two-stream relativistic electron beam parameters on the space-charge wave with broad frequency spectrum formation / A. Lysenko, J. Volk // Plasma Science and Technology. – 2018. – Vol. 20, No. 3 – P. 4-6.
- 5 Benedetti, C. PIC simulations of the production of high-quality electron beams via laser-plasma interaction. - Nuclear Instruments and Methods in Physical Research / Benedetti, C., Londrillo, P., Petrillo, V., Serafini, L., Sgattoni, A., Tomassini, P. & Turchetti, G. – 2009 – No. 608. - P. 94
- 6 Lysenko A. V. Space Charge Wave with Broad Frequency Spectrum Formation in Transit Section of Klystron-type Two-stream FEL with Helical Electron Beam / A.V. Lysenko, I.I. Volk, G.A. Oleksiienko, A.A. Shmat'ko // Журнал нано- та електронної фізики. - 2019. - Vol. 11, No. 5 – P. 3-5.
- 7 Mohammednejad M. Two stream ion acoustic wave instability in warm dense plasmas / M. Mohammednejad, M. Akbari-Moghanjoughi // Astrophysics and Space Science. – 2019. – Vol. 364, No. 23 – P. 15-20.
- 8 Startsev, E.A. Effects of beam-plasma instabilities on neutralized propagation of intense ion beams in background plasma./ Startsev, E.A., Kaganivich, I.D. & Davidson, R.C. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. – 2014. – Vol. 733. – P. 80-85.

- 9 Mikellides I. G. Growth of the modified two-stream instability in the plume of a magnetically shielded Hall thruster. / I. G. Mikellides, A. L. Ortega // *Physics of Plasmas*. – 2020. – Vol. 27. – P. 10-15.
- 10 Sharma P. Oscillating two stream instability in strongly coupled plasma. / P. Sharma, K. Avinash, D. N. Gupta // *Laser and Particle Beams*. – 2018. – Vol. 36, No. 3. – P. 4-6.
- 11 Samit P. Study of two stream instabilities in Lorentzian dusty plasma. / P. Samit, R. Denra, S. Sarkar // *Physics of Plasmas*. – 2021. – Vol. 28. – P. 11-18.
- 12 Liang J.-H. Kinetic study of quantum two-stream instability by Wigner approach. / J.-H. Liang, T.-X. Hu, Z.-M. Sheng // *Physical Review E*. – 2021. – Vol. 103, No. 3. – P. 3 – 10.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Програма для моделювання двопотокової нестійкості мовою Matlab

%% Вхідні параметри в нормалізованих одиницях:

```
L=pi;           % просторова довжина системи
DT=.5;         % крок за часом
NT=100;        % кількість кроків за часом
NG=64;         % кількість точок сітки
N=1000;        % кількість суперчастинок
dens=1;        % щільність плазми
V0=0.2;        % початкова швидкість
VT=0;          % теплова швидкість
XP1=1;         % збудження частинок
alpha_p=dens*L/N; % нормалізована кількість частинок на суперчастинку
rho_back=dens; % щільність заряду
dx=L/(NG - 1); % розмір комірок сітки
WP=1;
QM=-1;
Q=WP^2/(QM*N/L);
```

%% Ініціалізація двопотокової нестійкості

```
x = 0 : dx : L;
xp=transpose(linspace(0,L-L/N,N));
vp=VT*randn(N,1);
pm=transpose([1:N]);pm=1-2*mod(pm,2);
vp=vp+pm.*V0;
```

```
%% Збурення
```

```
xp=xp+XP1*(L/N)*pm.*rand(N,1);
```

```
p=1:N;p=[p p];
```

```
un=ones(NG-1,1);
```

```
Poisson=spdiags([un -2*un un],[-1 0 1],NG-1,NG-1);
```

```
%% Підготовка масивів для зберігання історії динаміки системи
```

```
time = 0:DT:(NT-1)*DT;
```

```
Phi=0; mat=0; Eg=0;
```

```
mom = zeros(1,NT);
```

```
E_kin = zeros(1,NT);
```

```
E_pot = zeros(1,NT);
```

```
vp_history = zeros(length(vp), NT);
```

```
Eg_history = zeros(NG, NT);
```

```
garm1 = []; garm2 = []; garm3 = []; garm4 = []; garm5 = []; garm6 = []; garm7 = [];
```

```
garm8 = [];
```

```
%% Основний цикл обчислень
```

```
figure('Units', 'normalized', 'OuterPosition', [0 0 1 1]);
```

```
for it=1:NT
```

```
    mom(it) = sum(abs(Q)*vp);
```

```
    E_kin(it) = 0.5*abs(Q)*sum(vp.^2);
```

```
    E_pot(it) = 0.5*sum(Eg.^2)*dx;
```

% оновлення координати з урахуванням періодичних граничних умов

```
xp=mod(xp+vp*DT,L);
```

% збереження історії швидкості на напруженості електричного поля

```
vp_history(:,it) = vp;
```

```
Eg_history(:,it) = Eg;
```

% проєкція частинок на сітку

```
g1=floor(xp/dx);
```

```
g=[g1;g1+1];
```

```
fraz1=1-abs(xp/dx-g1);
```

```
fraz=[fraz1;1-fraz1];
```

% застосування граничних умов до проєкції

```
out=(lt(g,1));g(out)=g(out)+NG;
```

```
out=(gt(g,NG));g(out)=g(out)-NG;
```

% обчислення полів

```
mat=sparse(p,g,fraz,N,NG);
```

```
rho=transpose(full((-alpha_p/dx)*sum(mat))+rho_back);
```

```
Phi=Poisson\(-rho(1:NG-1)*dx^2);Phi=[Phi;0];
```

```
Eg=([Phi(NG); Phi(1:NG-1)]-[Phi(2:NG);Phi(1)])/(2*dx);
```

% проєкція комірок на частинки та оновлення швидкості

```

vp=vp-mat*Eg*DT;

% побудова амплітудних спектрів електричного поля

[nu , Eg_fur] = Fur(Eg , NG , L);

% побудова графіків у режимі реального часу

figure(1)
Eg = Eg';
subplot(2,2,1); plot(x,Eg, '!');
xlabel('Координата');ylabel('Напруженість електричного поля'); title('\bf
Напруженість електричного поля');
axis([-0.1 3.2 -0.3 0.3]);
subplot(2,2,2);
plot(nu,abs(Eg_fur),'k')
axis([0 3 0 0.25])
xlabel('Хвильове число');ylabel('Амплітуда'); title('\bf Амплітудний спектр');
subplot(2,2,3);
plot(xp,vp,'k.')
xlabel('Координата');ylabel('Швидкість'); title('\bf Фазовий портрет');
axis([-0.1 3.2 -0.5 0.5]);
subplot(2,2,4);
plot(x,Phi,'k. ');
xlabel('Координата');ylabel('Потенціал'); title('\bf Потенціал');
axis([-0.1 3.2 -0.05 0.05]);
dimen = [.3 .1 0 0.8];
text = ["iteration number = " it];

```



```

a = annotation('textbox',dimen,'String',text,'FitBoxToText','on');
pause(0.5)
delete(a);

% збереження історії амплітудних спектрів

garm2 = [garm2 ; abs(Eg_fur(2))];
garm3 = [garm3 ; abs(Eg_fur(3))];
garm4 = [garm4 ; abs(Eg_fur(4))];
garm5 = [garm5 ; abs(Eg_fur(5))];
garm7 = [garm7 ; abs(Eg_fur(7))];
garm8 = [garm8 ; abs(Eg_fur(8))];
end

%% Побудова графіків кінетичної, потенціальної та повної енергії,
координатних залежностей амплітуд

figure(2);
plot (time,mom);
figure(3);
plot ([1 : NT],E_kin);
xlabel('Номер ітерації');ylabel('Кінетична енергія'); title('\bf Кінетична енергія
системи');
figure(4);
plot (time,E_pot);
E_total=E_kin+E_pot;
figure(5);
plot (time,E_total)
figure;

```

```
plot([1:NT],garm2)
hold on;
plot([1:NT],garm3)
hold on;
plot([1:NT],garm4)
hold on;
plot([1:NT],garm5)
legend('\omega_2 = 0.16' , '\omega_3 = 0.32' , '\omega_4 = 0.47' , '\omega_5 = 0.63')
xlabel('Координата z = vt');ylabel('Амплітуда'); title('{\bf Амплітудний спектр в когерентному режимі}');
axis([1 45 0 0.25]);
figure;
plot([1:NT],garm5,'k')
xlabel('Координата z = vt');ylabel('Амплітуда'); title('{\bf Еволюція амплітуди з частотою \omega_5 = 0.63}');
```

ДОДАТОК В

Програма для побудови амплітудних спектрів електричного поля

```

function [nu , Eg_fur] = Fur(Eg , N , T)
dx = T / (N - 1); % Крок вибірки
EddZero = 0.5; % Додавання нулів праворуч і ліворуч
Z_0 = zeros(1 , N * EddZero);
Eg = [Z_0 , Eg , Z_0];
N_n = N * (1 + 2 * EddZero); % Нова кількість точок
T_n = T * (1 + 2 * EddZero); % Новий інтервал часу
dx_n = T_n / (N_n - 1); % Новий крок вибірки
d_nu = 1 / (N_n * dx_n); % Новий крок частоти
nu_Nyq = 1 / (2 * dx_n); % Частота Найквіста
nu = - nu_Nyq + d_nu * (0 : N_n - 1); % Вектор частот
Eg_fur = fft(Eg) * dx; % Обчислення перетворення Фур'є
Eg_fur = fftshift(Eg_fur); % Перетворення масиву  $E_g$ 
Eg_fur = Eg_fur .* exp(1i * 2 * pi * nu * T_n / 2); % Компенсація експон. множника
Eg_fur = Eg_fur(nu >= 0);
nu = nu(nu >= 0);
end

```