

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
Факультет електроніки та інформаційних технологій

Кафедра електроніки,  
загальної та прикладної фізики

Кваліфікаційна робота магістра

**ТЕМПЕРАТУРНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ОПОРУ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ:  
МОДЕЛЮВАННЯ В LabVIEW**

спеціальності 171 Електроніка

Здобувач вищої освіти гр. ЕП.м-12

А.Ю. Стритович

Науковий керівник,  
канд. фіз.-мат. наук, старший викладач

А.М. Вітренко

Завідувач кафедри ЕЗПФ  
д-р фіз.-мат. наук, професор

І.Ю. Проценко

СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОНІКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
Кафедра електроніки, загальної та прикладної фізики  
Спеціальність 171 – Електроніка, освітньо-професійна програма  
«Електронні інформаційні системи»

ЗАТВЕРДЖУЮ Зав.  
кафедри ЕЗПФ  
\_\_\_\_\_ І.Ю. Проценко  
«\_\_» грудня 2022 р.

**ЗАВДАННЯ**  
**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ МАГІСТРА**

**Стритович Анни Юріївни**

1. Тема роботи \_\_\_\_\_ Температурна залежність опору металевих матеріалів:  
\_\_\_\_\_ моделювання в LabVIEW \_\_\_\_\_

затверджена наказом по університету від «14» листопада 2022 р. , № №1067-VI

2. Термін здачі студентом закінченої роботи 19 грудня 2022 року

3. Вихідні дані до роботи (актуальність, мета)

За електропровідністю матеріали електроніки поділяються на провідникові, напівпровідникові та діелектричні. Електропровідність передбачає рух зарядів у матеріалі під впливом прикладеного електричного поля. Як правило, матеріал можна класифікувати як провідник, якщо він містить велику кількість «вільних» носіїв заряду. Такі метали, як золото, срібло та мідь, є хорошими прикладами провідників. Вони відносяться до металів високої провідності і знаходять широке застосування як контакти елементів електронних схем, без яких неможливо уявити сучасні електронні інформаційні системи.

В останній час з об'єктивних причин дистанційне навчання набирає всі більшої ваги. Це потребує створення різноманітних електронних засобів навчального призначення. Мета даної роботи – розробити програмний застосунок Windows для обчислення питомого опору металів при різних температурах. Вона досягається методами моделювання з використанням програмного середовища LabVIEW.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, що належить їх розробити)

1. Класична теорія електричної провідності металевих матеріалів (модель Друде).
2. Температурна залежність питомого опору ідеально чистих металів. Правило Матіссена. Температурний коефіцієнт опору (ТКО).

3. Розробка в LabVIEW програмного застосунку для обчислення питомого опору металів. Результати обчислень для чистої міді.
4. Висновки.
5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)  
 Слайд № 1 – Титульна сторінка.  
 Слайд № 2 – Актуальність і мета роботи.  
 Слайд №3-4 – Модель Друде (густина струму; дрейфова швидкість, час вільного пробігу, рухливість електронів; питома електропровідність, закон Ома).  
 Слайд № 5-7 – Температурна залежність питомого опору ідеально чистих металів. Правило Матіссена. ТКО. Формули лінійної і ступеневої температурної залежності питомого опору. Табличні значення ТКО для різних чистих металів.  
 Слайд № 8 – Розробка в LabVIEW застосунку «Температурна залежність питомого опору металів» (лицева панель та блок-діаграма).  
 Слайд № 9 – Результати обчислень питомого опору чистої міді (таблиця, графік).  
 Слайд № 10 – Висновки.
6. Дата видачі завдання 05.12.2022 р.

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1.	Аналіз літературних даних	до 08.12.2022 р.	<i>вик.</i>
2.	Освоєння методики комп'ютерного моделювання	до 11.12.2022 р.	<i>вик.</i>
3.	Проведення моделювання та обробка результатів	до 14.12.2022 р.	<i>вик.</i>
4.	Підготовка тексту кваліфікаційної роботи магістра	до 19.12.2022 р.	<i>вик.</i>
5.	Попередній захист роботи	21.12.2022 р., 14 <sup>00</sup> (дистанційно)	<i>вик.</i>
6.	Захист роботи в екзаменаційній комісії	28.12.2022р. 10 <sup>00</sup> -13 <sup>00</sup> (дистанційно) 29.12.2022р. (резервний день) 10 <sup>00</sup> -11 <sup>00</sup> (дистанційно)	<i>вик.</i>

Магістрант

А. Ю. Стритович

Керівник роботи

А. М. Вітренко

## РЕФЕРАТ

Мета кваліфікаційної роботи магістра – розробка програмного застосунку Windows для обчислення питомого опору металевих матеріалів при заданій температурі.

Застосовується метод числового моделювання засобами програмно-інструментального середовища LabVIEW.

Розроблено програмний застосунок для дослідження температурної залежності питомого опору металів. Обчислення здійснюються за формулою лінійної зміни питомого опору з температурою. Вхідними даними є табличні значення питомого опору при контрольній температурі і температурний коефіцієнт опору. Проведені розрахунки питомого опору чистої міді в інтервалі температур від 273 К до 313 К з кроком 5 К (від 0 °С до 40 °С). При 278 К (5 °С) питомий опір дорівнює 15,73 нОм·м, при 293 К (20 °С) – 16,72 нОм·м. Побудовано графік.

Робота викладена на 30 сторінках, зокрема містить 7 рисунків, 2 таблиці, список використаних джерел із 13 найменувань.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** ПРОВІДНИК, ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ, ПИТОМИЙ ОПІР, ТЕМПЕРАТУРНА ЗАЛЕЖНІСТЬ, LabVIEW

## ЗМІСТ

	С.
<b>ВСТУП</b> .....	6
<b>РОЗДІЛ 1 ЕЛЕКТРИЧНА ПРОВІДНІСТЬ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ</b> ...	7
1.1. Класична теорія електричної провідності металевих матеріалів : модель Друде.....	7
<b>РОЗДІЛ 2 ТЕМПЕРАТУРНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ПИТОМОГО ОПОРУ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ</b> .....	13
2.1. Температурна залежність питомого опору ідеально чистих металів .....	13
2.2. Правило Матіссена. Температурний коефіцієнт опору .....	15
<b>РОЗДІЛ 3 МОДЕЛЮВАННЯ В LABVIEW ТЕМПЕРАТУРНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ ПИТОМОГО ОПОРУ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ</b> .....	22
3.1. Розробка програмного застосунку для обчислення питомого опору .....	22
3.2. Обчислення питомого опору металів при заданій температурі.....	26
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	27
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	29

## ВСТУП

За електропровідністю матеріали електроніки поділяються на провідникові, напівпровідникові та діелектричні [1]. Електропровідність передбачає рух зарядів у матеріалі під впливом прикладеного електричного поля. Як правило, матеріал можна класифікувати як провідник, якщо він містить велику кількість «вільних» носіїв заряду. У металах завдяки природі металевого зв'язку валентні електрони атомів утворюють так зване «море» електронів, які вільно рухаються всередині металу. Вони називаються електронами провідності. [2]

Такі метали, як золото, срібло та мідь є хорошими прикладами провідників. Ці речовини мають вільні електрони на крайній зовнішній орбіті. Заборонена зона між зоною провідності та валентною зоною відсутня або її ширина дуже мала. [3] Вони відносяться до металів високої провідності і знаходять широке застосування як контакти елементів електронних схем [1], без яких неможливо уявити сучасні електронні інформаційні системи.

Властивості провідників: мають високу електро- та теплопровідність; в стаціонарних станах вони задовольняють закону Ома; мають позитивний температурний коефіцієнт опору, тобто їх опір зростає зі збільшенням температури; задовольняють закону Відемана–Франца, згідно з яким співвідношення теплопровідності та електропровідності при заданій температурі однакове для всіх металів і пропорційне абсолютній температурі. [3]

Актуальність теми. В останній час з об'єктивних причин дистанційне навчання набирає всі більшої ваги. Це потребує створення різноманітних електронних засобів навчального призначення.

Мета даної роботи – розробити програмний застосунок Windows для обчислення питомого опору металів при різних температурах. Вона досягається методами моделювання з використанням програмного середовища LabVIEW.

## РОЗДІЛ 1

### ЕЛЕКТРИЧНА ПРОВІДНІСТЬ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ

#### 1.1. Класична теорія електричної провідності металевих матеріалів : модель Друде [2]

Як відомо [4], густина електричного струму  $j$  визначається як кількість заряду, що протікає через одиницю площі провідника за одиницю часу, тобто

$$j = \frac{\Delta q}{S \cdot \Delta t}, \quad (1.1)$$

де  $\Delta q$  – кількість заряду, Кл;

$S$  – площа перерізу провідника, м<sup>2</sup>;

$\Delta t$  – час, с.

Електрони провідності в металі фактично рухаються хаотично, невпорядковано. Але в результаті дії прикладеного зовнішнього електричного поля  $E_x$  усі вони набувають швидкості впорядкованого руху в напрямку осі  $x$ . Введемо у розгляд середню швидкість  $v_{dx}(t)$  електронів провідності у заданому напрямку  $x$  у момент часу  $t$  (рисунок 1.1). Вона називається дрейфовою швидкістю і є миттєвою швидкістю  $v_x$  у напрямку  $x$ , усередненою за величезною кількістю електронів:

$$v_{dx} = \frac{1}{N} (v_{x1} + v_{x2} + v_{x3} + \dots + v_{xN}), \quad (1.2)$$

де  $v_{xi}$  – швидкість  $i$ -го електрону в напрямку  $x$ , м/с;

$N$  – кількість електронів провідності у металі.

Введемо у розгляд концентрацію  $n$  електронів провідності, тобто кількість електронів в одиниці об'єму провідника:  $n = N/V$ . Можна відмітити, що  $n \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . За час  $\Delta t$  вільні електрони переміщуються на відстань  $\Delta x = v_{dx} \cdot \Delta t$

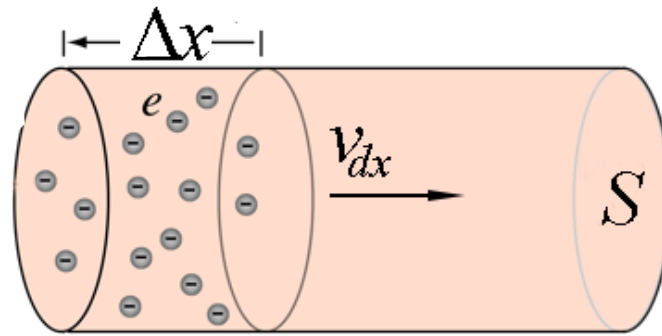


Рисунок 1.1 – Впорядкований рух електронів провідності із середньою швидкістю  $v_{dx}$  у провіднику із площею перерізу  $S$  (адаптовано з [5])

(прямолінійний рівномірний рух). Отже, сумарний заряд  $\Delta q$ , що проходить через поперечний переріз провідника площею  $S$ , дорівнює  $enS\Delta x$ . Це вірно, оскільки всі електрони, що знаходяться в межах відстані  $\Delta x$ , проходять через  $S$ . Таким чином, величина  $n \cdot (S \cdot \Delta x)$  є загальною кількістю електронів провідності, які перетинають  $S$  за час  $\Delta t$ .

Враховуючи вище викладене, густина струму в напрямку  $x$  дорівнюватиме

$$j_x = \frac{\Delta q}{S \cdot \Delta t} = \frac{enSv_{dx} \cdot \Delta t}{S \cdot \Delta t} = env_{dx}.$$

Це загальне рівняння пов'язує густину струму  $j_x$  із середньою швидкістю  $v_{dx}$  електронів провідності. При цьому середня швидкість в один момент часу може не дорівнювати середній швидкості в інший момент часу, оскільки прикладене електричне поле може змінюватися:  $E_x = E_x(t)$ . Тому густина струму залежатиме від часу:

$$j_x(t) = env_{dx}(t). \quad (1.3)$$

Щоб зв'язати густину струму  $j_x$  із електричним полем необхідно дослідити вплив електричного поля на рух електронів провідності у провіднику. Розглянемо приклад із кристалом міді.



Атом міді має один валентний електрон у своїй  $4s$ -підоболонці, який слабо зв'язаний із ядром атома. Метал у твердому стані складається із позитивних іонів  $\text{Cu}^+$  у гранецентрованій кубічній (ГЦК) кристалічній структурі [6]. Валентні електрони вільно переміщуються у твердому тілі, утворюючи електронний газ. Ці рухливі електрони легко реагують на прикладене електричне поле, створюючи густину струму  $j_x$ .

Сили притягання між негативним електронним газом та додатно зарядженими йонами  $\text{Cu}^+$  відповідають за металевий зв'язок та існування металу у твердому стані. Електростатичне притягання між електронами провідності та позитивними іонами металу, як і електростатичне притягання між електроном та протоном в атомі водню, призводить до того, що електрон провідності має як потенціальну енергію ПЕ, так і кінетичну енергію КЕ. Електрони провідності рухаються хаотично в кристалічній решітці так само, як атоми газу – в посудині. Хоча середня КЕ для атомів газу становить  $\frac{3}{2}kT$ , це не стосується електронів у металі, оскільки вони сильно взаємодіють із іонами металу та один з одним у результаті електростатичної взаємодії.

Середнє значення КЕ електронів провідності в металі в основному визначається їх електростатичною взаємодією з позитивними іонами металу, а також один з одним. Тому для більшості практичних цілей можна нехтувати температурною залежністю середньої КЕ порівняно з іншими факторами, які впливають на поведінку електронів провідності в металевому кристалі. Можна припустити, що величина середньої КЕ повинна бути порівняною з величиною середньої ПЕ електростатичної взаємодії або, кажучи інакше, з енергією металевого зв'язку, яка становить кілька електрон-вольт на атом.

Якщо  $u$  є середньою швидкістю електронів провідності, тоді, виходячи з електростатичної взаємодії, очікується, що  $\frac{1}{2}m_e u^2$  дорівнює кільком електрон-вольтам, що означає, що  $u$  зазвичай становить  $\sim 10^6$  м/с. Однак цього суто класичного та інтуїтивного міркування недостатньо, щоб показати, що середня швидкість  $u$  є відносно нечутливою до температури і набагато більшою, ніж

очікується з молекулярно-кінетичної теорії. Справжні причини – квантово-механічні – впливають із так званого принципу заборони Паулі.

В загальному випадку кристал міді не є ідеальним, і атоми не є статичними. Існують кристалічні дефекти, вакансії, дислокації, домішки тощо, які будуть розсіювати електрони провідності. Більш того, завдяки своїй тепловій енергії, атоми будуть вібрувати навколо своїх вузлів решітки (положень рівноваги). Електрон буде стикатися з атомами, що коливаються, отже, буде «розсіюватися» від одного атома до іншого. За відсутності електричного поля електрон рухається випадково в кристалічній решітці і через деякий час перетинає своє початкове положення  $x$  знову. Тобто протягом тривалого часу електрони провідності не виявляють зміщення в будь-якому напрямку.

Якщо ж провідник з'єднаний з акумулятором і прикладено електричне поле до кристала, електрон набуває прискорення у напрямку  $x$  додатково до його випадкового руху, тому впродовж деякого часу він буде дрейфувати в напрямку  $x$  на кінцеву відстань. Електрон прискорюється вздовж напрямку  $x$  під дією сили  $eE_x$ , а потім стикається з атомом, що коливається, і втрачає набрану швидкість. Тому існує середня швидкість у напрямку  $x$ , яка, якщо розрахувати, визначає густину струму за допомогою рівняння (1.3).

Для визначення дрейфової швидкості  $v_{dx}$  електронів, обумовленої прикладеним електричним полем  $E_x$ , розглянемо спочатку швидкість  $v_{xi}$   $i$ -го електрона в напрямку  $x$  у момент часу  $t$ . Припустимо, що його останнє зіткнення відбулося в момент часу  $t_i$ , тому протягом часу  $(t - t_i)$  він прискорювався без зіткнень. Нехай  $u_{xi}$  – швидкість  $i$ -го електрона в напрямку  $x$  одразу після зіткнення. Це його початкова швидкість. Оскільки величина  $eE_x/m_e$  є прискоренням електрона, швидкість  $v_{xi}$  в напрямку  $x$  у момент часу  $t$  дається виразом

$$v_{xi} = u_{xi} + \frac{eE_x}{m_e}(t - t_i). \quad (1.4)$$

Однак вираз (1.4) справедливий лише для  $i$ -го електрона. Нам необхідно записати вираз для середньої швидкості  $v_{dx}$  для всіх електронів уздовж напрямку  $x$ . Для цього ми зробимо усереднення для  $i = 1$  до  $N$  електронів, як у рівнянні (1.2). Припустимо, що відразу після зіткнення з іоном, що коливається, електрон може рухатися в будь-якому випадковому напрямку. Тобто він може з однаковою ймовірністю рухатися як вздовж негативного, так і позитивного напрямку осі  $x$ . Таким чином, початкова швидкість  $u_{xi}$ , усереднена за багатьма електронами, дорівнюватиме нулю. Отже, можна записати

$$v_{dx} = \frac{1}{N}(v_{x1} + v_{x2} + \dots + v_{xN}) = \frac{eE_x}{m_e} \overline{(t - t_i)},$$

де  $(t - t_i)$  – середній час вільного пробігу для  $N$  електронів між зіткненнями.

Припустимо, що  $\tau$  – середній час вільного пробігу або середній час між зіткненнями (також відомий як середній час розсіювання). Для деяких електронів  $(t - t_i)$  буде більшим за  $\tau$ , а для інших він буде меншим. Усереднення  $(t - t_i)$  для  $N$  електронів буде таким же самим, як  $\tau$ . Таким чином, ми можемо підставити  $\tau$  замість  $(t - t_i)$  у попередньому виразі і отримати:

$$v_{dx} = \frac{e\tau}{m_e} E_x. \quad (1.5)$$

Рівняння 1.5 показує, що швидкість дрейфу лінійно зростає з прикладеним електричним полем. Константа пропорційності  $e\tau/m_e$  отримала спеціальну назву та символ. Вона називається дрейфовою рухливістю  $\mu_d$ . Таким чином, можна записати

$$v_{dx} = \mu_d E_x, \quad (1.6)$$

де

$$\mu_d = \frac{e\tau}{m_e}. \quad (1.7)$$

Рівняння (1.7) пов'язує дрейфову рухливість електронів  $\mu_d$  з їх середнім часом розсіювання  $\tau$ . Величина  $\tau$ , яку також називають часом релаксації, безпосередньо пов'язана з мікроскопічними процесами, які викликають розсіювання електронів у металі: коливання решітки, дефекти кристалів, домішки тощо.

Підставимо вираз (1.6) у (1.3), отримаємо

$$j_x = en\mu_d E_x. \quad (1.8)$$

Отже, з формули (1.8) випливає, що густина струму прямо пропорційна напруженості електричного поля. А коефіцієнт пропорційності

$$\sigma = en\mu_d \quad (1.9)$$

є питомою електропровідністю. Примітно, що розглядаючи електрон як частинку та застосовуючи класичну механіку ( $F = ma$ ), можна вивести закон Ома у диференціальній формі:

$$j_x = \sigma E_x. \quad (1.10)$$

Слід зазначити, ми припустили, що середній час розсіювання  $\tau$  не залежить від електричного поля.

## РОЗДІЛ 2

### ТЕМПЕРАТУРНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ПИТОМОГО ОПОРУ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ

#### 2.1. Температурна залежність питомого опору ідеально чистих металів [2]

Якщо електрони провідності розсіюються лише тепловими коливаннями іонів металу, тоді величина  $\tau$  у виразі рухливості (1.7) відноситься до середнього часу між подіями розсіювання в цьому процесі. Результуюча електрична провідність і питомий опір позначаються  $\sigma_T$  і  $\rho_T$ , де нижній індекс  $T$  означає «розсіювання на теплових коливаннях».

Щоб знайти температурну залежність електропровідності  $\sigma$ , спочатку розглянемо температурну залежність середнього часу вільного пробігу  $\tau$ , оскільки він визначає дрейфову рухливість.

Нехай електрон, що рухається із середньою швидкістю  $u$ , зазнає розсіювання, коли його шлях перетинається з площею поперечного перерізу  $S$  центру розсіювання. Центром розсіювання може бути атом, що коливається, домішка, вакансія або інший дефект кристала. Оскільки  $\tau$  – середній час, що припадає на один процес розсіювання, середня довжина вільного пробігу  $\ell$  електрона між процесами розсіювання дорівнюватиме  $u\tau$ . Нехай  $N_s$  – концентрація центрів розсіювання. Тоді в об'ємі  $S\ell$  є один центр розсіювання, тобто  $(Su\tau)N_s = 1$ . Таким чином, середній час вільного пробігу визначається за формулою

$$\tau = \frac{1}{SuN_s}. \quad (2.1)$$

Можна відмітити, що середня швидкість  $u$  електронів провідності в металі незначно залежить від температури. Фактично, електрони безладно блукають у

металевому кристалі з майже постійною середньою швидкістю, яка значною мірою залежить від їх концентрації, а, отже, від кристалічного матеріалу. Прирівнявши кількість центрів розсіювання в одиниці об'єму до атомної концентрації, тоді температурна залежність  $\tau$  впливає, з площі поперечного перерізу  $S$  [формула 2.1)].

Розглянемо, що «бачить» вільний електрон, коли він наближається до кристалічного атома, що коливається. Оскільки коливання атома є випадковими, атом займає площу поперечного перерізу  $\pi a^2$ , де  $a$  – амплітуда коливань. Якщо шлях електрона перетинає  $\pi a^2$ , він розсіюється. Отже, середній час між подіями розсіювання  $\tau$  обернено пропорційний площі  $\pi a^2$ , яка розсіює електрон, тобто  $\tau \propto 1/\pi a^2$ .

Теплові коливання атома можна вважати простими гармонічними коливаннями, так само, як коливання маси  $M$ , прикріпленої до пружини. Середня кінетична енергія коливань становить  $\frac{1}{2}Ma^2\omega^2$ , де  $\omega$  – частота коливань. З кінетичної теорії матерії ця середня кінетична енергія має бути порядку  $\frac{1}{2}kT$ . Тому

$$\frac{1}{2}Ma^2\omega^2 \approx \frac{1}{2}kT.$$

Отже,  $a^2 \propto T$ , що інтуїтивно зрозуміло, оскільки підвищення температури збільшує амплітуду атомних коливань. Таким чином,

$$\tau \propto \frac{1}{\pi a^2} \propto \frac{1}{T},$$

або

$$\tau = \frac{C}{T}, \quad (2.2)$$

де  $C$  – деяка постійна, яка не залежить від температури.

Підставляючи вираз (2.2) в (1.7), отримаємо

$$\mu_d = \frac{eC}{m_e T}.$$

Отже, питомий опір  $\rho_T$  чистого металу становить

$$\rho_T = \frac{1}{\sigma_T} = \frac{1}{en\mu_d} = \frac{m_e T}{e^2 n C}.$$

Тобто, питомий опір  $\rho_T$  чистого металу пропорційний абсолютній температурі  $T$ :

$$\rho_T = AT, \quad (2.3)$$

де  $A$  – незалежна від температури константа.

Формула (2.3) показує, що питомий опір чистого металевого матеріалу лінійно зростає із температурою. Він зумовлений розсіюванням електронів провідності на теплових коливаннях атомів кристалічної ґратки. Це так звана обмежена ґратковим розсіюванням провідність.

## 2.2. Правило Матіссена. Температурний коефіцієнт опору [2]

Теорія провідності, яка розглядає розсіювання на коливаннях ґратки, добре працює лише з чистими металами. На жаль, це не підходить для металевих сплавів. Їх питомий опір слабо залежить від температури. Тому ми повинні шукати інший тип механізму розсіювання.

Розглянемо металевий сплав, який містить довільно розподілені атоми домішок. Електрони тепер можуть бути розсіяні на домішкових атомах, оскільки вони неідентичні основним атомам. Атом домішки не повинен бути більшим за основний атом, він може бути меншим. Поки атом домішки призводить до

локального викривлення кристалічної решітки, він буде ефективним у розсіюванні. Один із способів поглянути на процес розсіювання на домішці – розглянути поперечний переріз розсіювання. Те, що фактично розсіює електрон, – це локальна, несподівана зміна потенційної енергії ПЕ електрона, коли він наближається до домішки, оскільки сила, яка діє на електрон, визначається як

$$F = -\frac{d(\text{ПЕ})}{dx}. \quad (2.4)$$

Наприклад, коли атом домішки іншого розміру порівняно з основним атомом поміщається в кристалічну решітку, атом домішки викривляє область навколо себе, або відштовхуючи основні атоми далі, або втягуючи їх. Поперечний переріз, який розсіює електрон, є областю решітки, яка була пружно викривлена домішкою, так що в цій зоні на електрон діє сила (2.4) через зміну потенціальної енергії ПЕ. Ця область має великий поперечний переріз розсіювання, оскільки викривлення, спричинене домішкою, може поширюватися на кілька атомних відстаней. Таким чином, ці атоми домішок перешкоджатимуть руху електронів, тим самим збільшуючи опір.

Фактично ми маємо два типи середнього вільного часу між зіткненнями: один,  $\tau_T$ , лише для розсіювання від теплових коливань, а інший,  $\tau_I$ , для розсіювання тільки від домішок. Ми визначаємо  $\tau_T$  як середній час між подіями розсіювання, що виникають лише внаслідок теплових коливань, а  $\tau_I$  як середній час між подіями розсіювання, що виникають лише внаслідок зіткнень із домішками.

Загалом, електрон може бути розсіяний обома процесами, тому ефективний середній вільний час  $\tau$  між будь-якими двома подіями розсіювання буде меншим, ніж окремі часи розсіювання  $\tau_T$  і  $\tau_I$ . Таким чином, електрон буде розсіяний, коли він зіткнеться або з коливанням атома, або з атомом домішки. Оскільки в одиницю часу  $1/\tau$  – сумарна ймовірність розсіювання,  $1/\tau_T$  – ймовірність розсіювання лише від коливань ґратки, а  $1/\tau_I$  – ймовірність розсіювання лише від



домішок, тоді в межах елементарної теорії ймовірностей для додавання ймовірностей незалежних подій [7] можна записати

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_T} + \frac{1}{\tau_I}. \quad (2.5)$$

Дрейфова рухливість  $\mu_d$  залежить від ефективного часу розсіювання  $\tau$  відповідно до формули (1.7), тому рівняння (2.5) також можна подати і через дрейфові рухливості, визначені різними механізмами розсіювання. Іншими словами,

$$\frac{1}{\mu_d} = \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_I}, \quad (2.6)$$

де  $\mu_L$  – дрейфова рухливість, обмежена розсіюванням на ґратці;

$\mu_I$  – дрейфова рухливість, обмежена розсіюванням на домішках.

За визначенням,  $\mu_L = e\tau_T/m_e$  та  $\mu_I = e\tau_I/m_e$ .

Ефективний (загальний) питомий опір  $\rho$  металевого матеріалу дорівнює

$$\rho = \frac{1}{en\mu_d} = \frac{1}{en\mu_L} + \frac{1}{en\mu_I},$$

або

$$\rho = \rho_T + \rho_I, \quad (2.7)$$

де  $\rho_T = 1/en\mu_L$  – питомий опір внаслідок розсіювання від теплових коливань;

$\rho_I = 1/en\mu_I$  – питомий опір внаслідок розсіювання від домішок.

Кінцева формула (2.7) показує, що ефективний питомий опір  $\rho$  є сумою двох доданків. Перший доданок,  $\rho_T = 1/en\mu_L$ , є питомим опором, що виникає внаслідок розсіювання електронів провідності на теплових коливаннях основних атомів. Для майже ідеально чистих металевих кристалів він робить домінуючий внесок. Проте, як тільки додаються домішки, виникає додатковий питомий опір,

$\rho_I = 1/en\mu_I$ , який виникає внаслідок розсіювання електронів провідності на домішках. Перший доданок залежить від температури, оскільки  $\tau_T \propto T^{-1}$  [див. формулу (2.2)], а другий – ні.

Середній час  $\tau_I$  між подіями розсіювання, що включають зіткнення електронів з домішковими атомами, залежить від відстані між домішковими атомами  $i$ , отже, від їх концентрації. Якщо  $\ell_I$  – середня відстань між домішками, тоді середній вільний час між зіткненнями лише з домішками  $\tau_I$  буде дорівнювати відношенню  $\ell_I/u$ . Воно не залежить від температури, оскільки  $\ell_I$  визначається концентрацією домішок  $N_I$  (тобто  $\ell_I = N_I^{-1/3}$ ), а середня швидкість  $u$  електронів провідності в металі майже постійна. За відсутності домішок величина  $\tau_I$  є нескінченно великою, і, отже,  $\rho_I = 0$ .

Правило додавання питомих опорів з різними механізмами розсіювання, виражене рівнянням (2.7), називається правилом Маттіссена [8].

Також може мати місце розсіювання електронів провідності на дислокаціях та інших кристалічних дефектах, а також на межах зерен. Усі ці процеси розсіювання роблять внесок до питомого опору металу, як і процес розсіювання на домішках. Тому ми можемо записати ефективний питомий опір металу як

$$\rho = \rho_T + \rho_R, \quad (2.8)$$

де  $\rho_R$  називається залишковим питомим опором.

Він обумовлений розсіюванням електронів домішками, дислокаціями, міжвузловими атомами, вакансіями, межами зерен тощо (це означає, що  $\rho_R$  також включає  $\rho_I$ ). Залишковий питомий опір дуже слабо залежить від температури, тоді як  $\rho_T = AT$  [див. формулу (2.3)]. Тому ефективний питомий опір  $\rho$  визначається як

$$\rho \approx AT + B, \quad (2.9)$$

де  $A$  і  $B$  – незалежні від температури константи.

Рівняння (2.9) показує, що питомий опір металу змінюється майже лінійно з температурою, причому параметри  $A$  і  $B$  залежать від матеріалу.

Замість переліку  $A$  і  $B$  у таблицях питомого опору краще використовувати температурний коефіцієнт, який відноситься до невеликих нормалізованих змін навколо контрольної температури. Температурний коефіцієнт (питомого) опору (ТКО)  $\alpha_0$  визначається як зміна питомого опору на одиницю підвищення температури при контрольній температурі  $T_0$ , тобто

$$\alpha_0 = \frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{\delta\rho}{\delta T} \right]_{T=T_0}, \quad (2.10)$$

де  $\rho_0$  – питомий опір при контрольній (еталонній) температурі  $T_0$ , яка, зазвичай, дорівнює 273 К (0 °С) або 293 К (20 °С);

$\delta\rho = \rho - \rho_0$  – зміна питомого опору внаслідок невеликого збільшення температури  $\delta T = T - T_0$ .

Коли питомий опір відповідає поведінці (2.9), тоді, згідно з рівнянням (2.10), ТКО  $\alpha_0$  постійний в інтервалі температур від  $T_0$  до  $T$ , і рівняння (2.10) призводить до добре відомого рівняння:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha_0 (T - T_0)]. \quad (2.11)$$

Таблиця 2.1 показує, що вираз  $\rho \propto T$  є непоганим наближенням для деяких відомих чистих металів, які використовуються як провідники (Cu, Al, Au тощо). Але він погано підходить для інших, зокрема, магнітних металів [9], такі як залізо та нікель.

Також слід зазначити, що для сплавів, таких як ніхром (Ni–Cr), питомий опір в основному представлений залишковим питомим опором. Тому питомий опір відносно нечутливий до температури з дуже малим ТКО.

**Питомий опір і термічний коефіцієнт питомого опору  $\alpha_0$  при 273 К (0 °С) для різних чистих металів вище 200 К, але нижче їх температури плавлення. Також показано показник питомого опору  $n$  у  $\rho \propto T^n$**

Метал	$\rho_0, \text{n}\Omega\cdot\text{m}$	$\alpha_0, 1/\text{K}$	$n$	Діапазон
Al	24.2	$\frac{1}{227}$	1.20	200–800 К
Sb	390	$\frac{1}{215}$	1.27	80–400 К
Cu	15.4	$\frac{1}{233}$	1.16	200–1100 К
Au	20.5	$\frac{1}{242}$	1.13	225–1000 К
In	80	$\frac{1}{208}$	1.31	200–400 К
Mo	48.5	$\frac{1}{226}$	1.21	200–2400 К
Pt	98.1	$\frac{1}{256}$	1.01	200–1273 К
Ag	14.7	$\frac{1}{242}$	1.13	200–1100 К
Sr	123	$\frac{1}{276}$	0.99	273–800 К
Sn	115	$\frac{1}{248}$	1.10	200–490 К
W	48.2	$\frac{1}{210}$	1.24	200–3000 К
Fe	85.7	$\frac{1}{159}$	1.73	200–900 К
Ni	61.6	$\frac{1}{155}$	1.76	200–700 К

Часто залежність питомого опору від температури чистих металів може бути емпірично представлений степеневим законом у вигляді

$$\rho = \rho_0 \left[ \frac{T}{T_0} \right]^n, \quad (2.12)$$

де  $\rho_0$  – питомий опір при еталонній температурі  $T_0$ ;

$n$  – характерний показник, який найкраще відповідає даним.

У таблиці 2.1 наведено деякі типові значення  $n$  для різних чистих металів.

## РОЗДІЛ 3

### МОДЕЛЮВАННЯ В LABVIEW ТЕМПЕРАТУРНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ ПИТОМОГО ОПОРУ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ

#### 3.1. Розробка програмного застосунку для обчислення питомого опору

Створимо засобами програмного середовища LabVIEW [10-13] програмний застосунок Windows для обчислення питомого опору заданих металів при заданій температурі.

Будемо використовувати формулу (2.11) температурної залежності питомого опору. Вхідними даними є параметри, що визначають метал: 1)  $\rho_0$  – питомий опір при контрольній температурі  $T_0$  (приймаємо 273 К); 2)  $\alpha_0$  – температурний коефіцієнт питомого опору. Використовуються числові дані таблиці (2.1). Також задається абсолютна температура  $T$ . Вихідними даними є  $\rho$  – питомий опір металу при заданій температурі  $T$ .

Для введення вхідних даних будемо використовувати числові контролери “Numeric Control” в загальній кількості три штуки. Розташуємо їх на лицевій панелі LabVIEW та підпишемо як показано на рисунку 3.1. Передбачимо представлення ТКО у вигляді звичайного дробу.

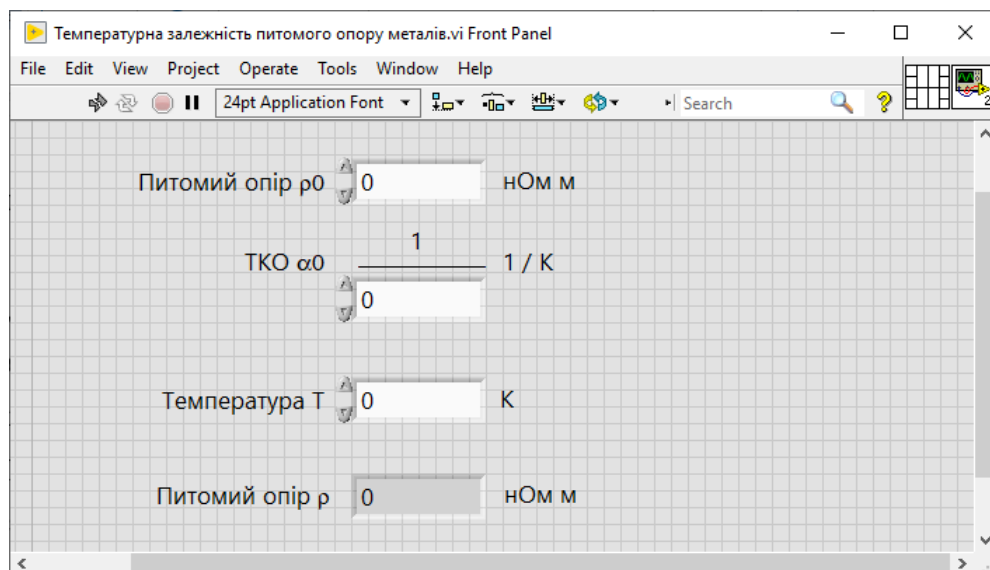


Рисунок 3.1 – Лицьова панель на стадії розробки

Для виведення на екран вихідних даних, а саме обчисленого значення питомого опору  $\rho$  будемо використовувати числовий індикатор “Numeric Indicator” (рисунок 3.1). На цьому розробка лицьової панелі (інтерфейсу користувача) нашого програмного застосунку завершена. Переходимо до роботи над його блок-діаграмою.

Блок-діаграма після компоновки елементів лицьової панелі як на рисунку 3.1. представлена на рисунку 3.2. Вона на даному початковому етапі містить чотири елементи, що відповідають елементам, розташованим на лицевій панелі. Підписи ідентичні (не враховуючі підписи розмірностей). Помаранчевий колір елементів вказує на дійсний тип числових даних. За умовчужанням використовується подвійна точність, що цілком достатньо для наших обчислень.

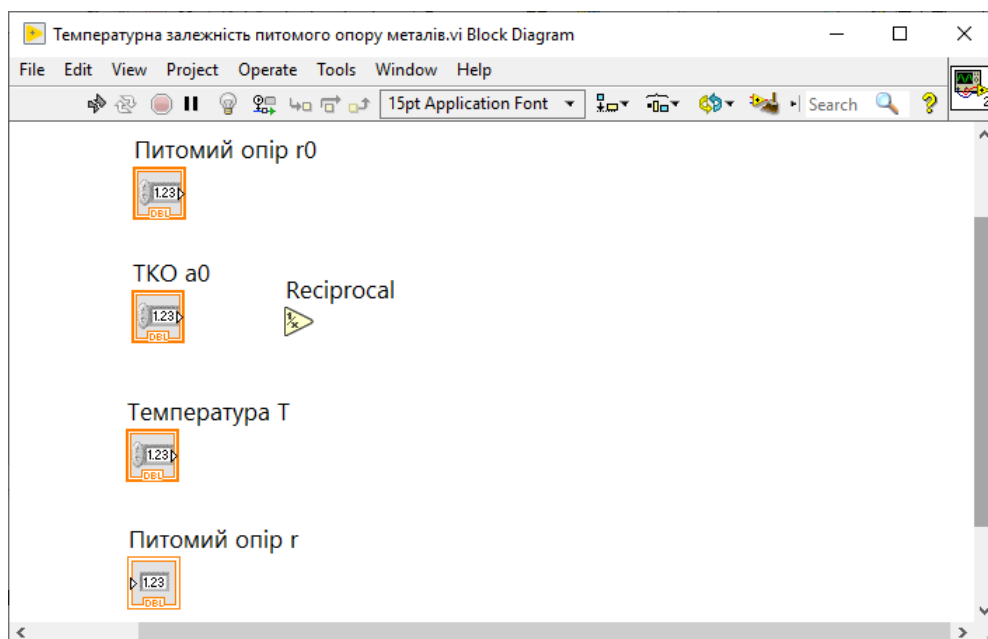



Рисунок 3.2 – Блок-діаграма на початковій стадії розробки

Важливо відмітити, що на лицевій панелі фактично задається величина, обернена до температурного коефіцієнта (питомого) опору (ТКО), тобто числове значення знаменника звичайної дробі. Тому на блок-діаграмі необхідно передбачити знаходження ТКО у вигляді десяткового дробу. Для цього будемо використовувати числову функцію LabVIEW “Reciprocal”. Її піктограма має вигляд .

Для програмної реалізації числових розрахунків за формулою (2.11) використовуємо структуру LabVIEW “Formula Node”. Розташовуємо її на блок-діаграмі. Вказана структура має вигляд як на рисунку 3.3а. Вона дозволяє використовувати текстове представлення математичних виразів, що в нашій ситуації зручніше за графічне представлення.

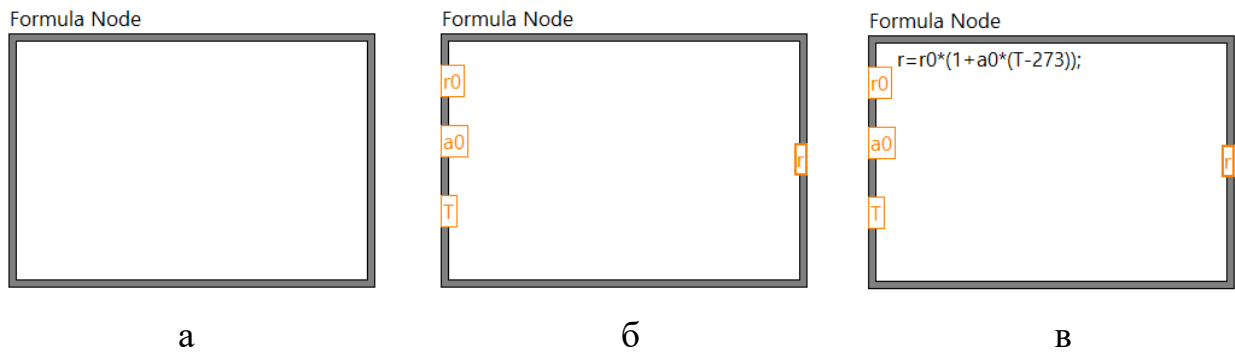


Рисунок 3.3 – Структура LabVIEW “Formula Node”

Наведемо курсор миші на рамку структури “Formula Node” зліва. Натиснемо праву кнопку миші. Обираючи пункт “Add Input” випадаючого меню, створимо три вхідні порти даних. Після цього наведемо курсор миші на рамку структури “Formula Node” справа. Натискаючи праву кнопку миші і обираючи пункт “Add Output”, створимо один вихідний порт даних. Назви портів відповідають назвам змінних у формулі (2.11) (рисунок 3.3б).

Нарешті, запишемо всередині структури “Formula Node” тестовий код математичного виразу (2.11). Використовується синтаксис мови програмування С (рисунок 3.3в). Важливо відмітити, що ім’я змінних мають співпадати з назвами портів, інакше LabVIEW повідомить про помилку.

Блок-діаграма на даній стадії розробки, тобто після завершення роботи зі структурою “Formula Node”, має вигляд як на рисунку 3.4. Ми перенесли числовий індикатор “Питомий опір  $r$ ” в праву частину блок-діаграми і розташували його після “Formula Node”, що відповідає принципу потоку даних LabVIEW зліва направо.



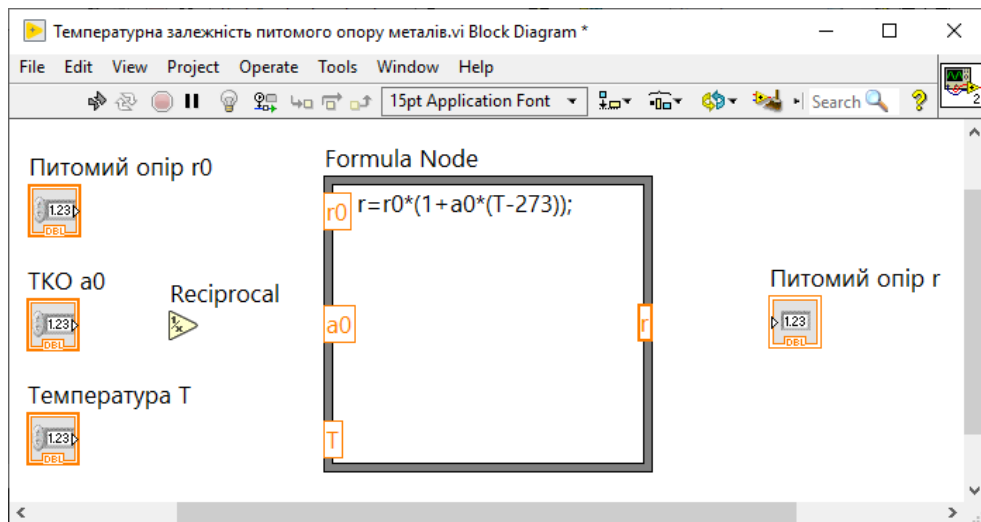


Рисунок 3.4 – Блок-діаграма зі структурою “Formula Node”

На завершальній стадії розробки нашого програмного застосунку залишається з'єднати елементи, розташовані на блок-діаграмі, провідниками даних (рисунок 3.5). Можна відмітити, що вихідні порти контролерів знаходяться в правій частині піктограм, а вхідний порт індикатора – в лівій. Дроти мають помаранчевий колір, що вказує на дійсний тип числових даних.

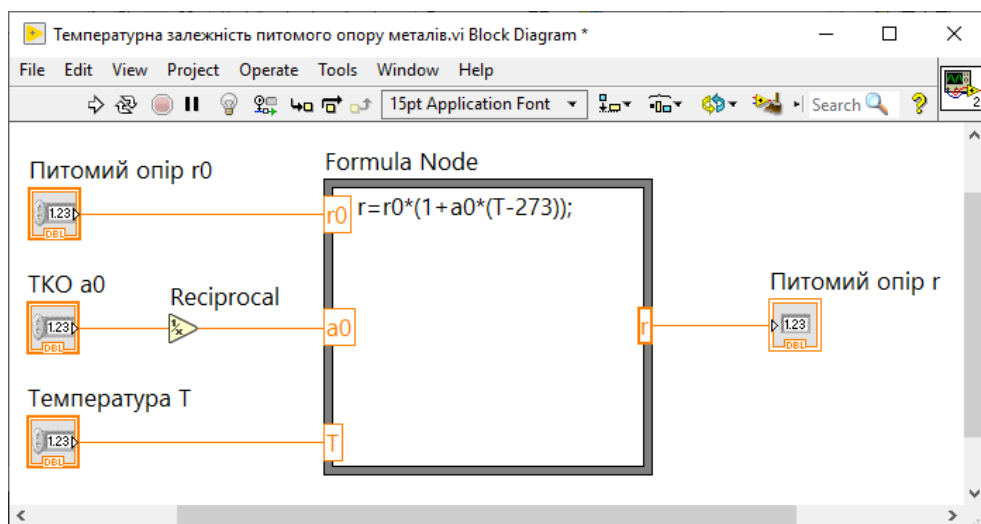


Рисунок 3.5 – Блок-діаграма на завершальній стадії розробки

Перейдемо до тестування розробленого програмного застосунку для обчислення питомого опору металів.

### 3.2. Обчислення питомого опору металів при заданій температурі

Виконаємо розрахунок питомого опору для чистої міді за допомогою розробленого програмного застосунку. Для цього згідно таблиці 2.1 можемо записати:  $\rho_0 = 15,4 \text{ нОм}\cdot\text{м}$ ,  $\alpha_0 = 1/233 \text{ К}^{-1}$ . Введемо ці дані на лицевій панелі. Для абсолютної температури  $T = 278 \text{ К}$  ( $5 \text{ }^\circ\text{С}$ ) обчислене значення питомого опору чистої міді з точністю до сотих  $\rho = 15,73 \text{ нОм}\cdot\text{м}$  (рисунок 3.6). Вказане значення можна отримати в альтернативний спосіб, наприклад, за допомогою калькулятора Windows. Отже, обчислення питомого опору металів за формулою (2.11) в розробленому застосунку реалізовано коректно.

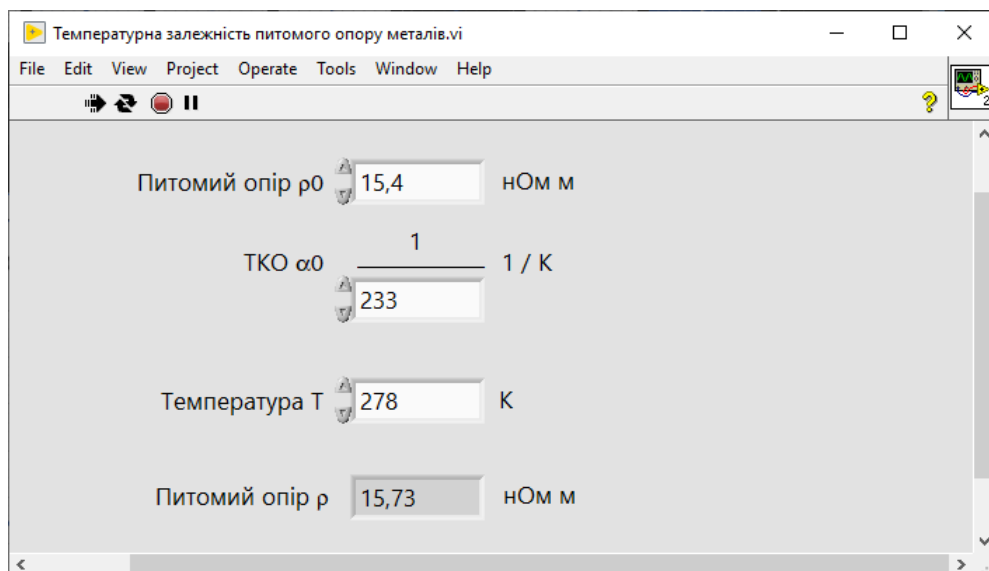


Рисунок 3.6 – Лицьова панель під час виконання розрахунків

Використаємо програмний застосунок для обчислення питомого опору чистої міді в інтервалі температур від 273 К до 313 К з кроком 5 К, тобто від  $0 \text{ }^\circ\text{С}$  до  $40 \text{ }^\circ\text{С}$ . Результати розрахунків подані в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

#### Залежність питомого опору чистої міді від температури

$T, \text{ К}$	273	278	283	288	293	298	303	308	313
$t, \text{ }^\circ\text{С}$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$\rho, \text{ нОм}\cdot\text{м}$	15,4	15,73	16,06	16,39	16,72	17,05	17,38	17,71	18,04

На завершення побудуємо за допомогою Microsoft Excel графік за даними таблиці 3.1. У якості горизонтальної осі оберемо температуру в градусах Цельсія, вертикальної – питомий опір в нОм·м. Графік представлений на рисунку 3.7.

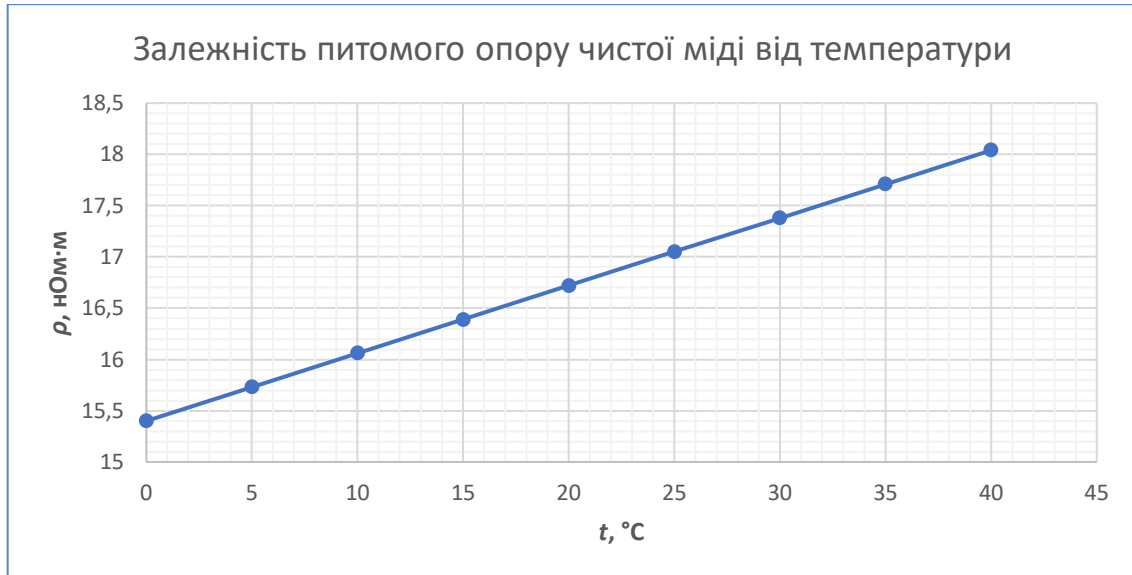


Рисунок 3.7 – Залежність питомого опору міді від температури за даними таблиці 3.1

Рисунок 3.7 ілюструє лінійну зміну питомого опору металів з температурою (на прикладі міді), розраховану за формулою (2.11). Важливо відмітити, що значення питомого опору в таблиці 3.1 приведені з точністю до сотих. Саме при такій точності лінія на рисунку 3.7 виглядає як пряма, а не як ламана у випадку розрахунків з точністю до десятих.

## ВИСНОВКИ

1. Виконано огляд літературних джерел за темою роботи. Розглянуто класичну модель електропровідності металевих матеріалів (модель Друде), яка дозволяє, використовуючи визначення густини електричного струму, середнього часу вільного пробігу електронів провідності та їх рухливості, вивести закон Ома. Показано, що питомий опір чистих металів лінійно зростає із абсолютною температурою, що обумовлено розсіюванням електронів провідності на теплових коливаннях атомів кристалічної ґратки. Приведене правило Маттіссена для додавання питомих опорів із різними механізмами розсіювання в сплавах. Надано визначення температурного коефіцієнту питомого опору.
2. В середовищі LabVIEW розроблено програмний застосунок «Температурна залежність питомого опору металів», який дозволяє обчислювати питомий опір при заданій температурі і відомих параметрах металу – питомого опору при еталонній температурі та температурного коефіцієнту питомого опору.
3. За допомогою розроблено програмного застосунку виконані розрахунки питомого опору чистої міді в інтервалі температур від 273 К до 313 К з кроком 5 К (від 0 °С до 40 °С). Наприклад, при 278 К (5 °С) він дорівнює 15,73 нОм·м, при 293 К (20 °С) – 16,72 нОм·м. В Microsoft Excel побудовано графік для ілюстрації лінійної зміни питомого опору чистої міді з температурою.
4. Розроблений програмний застосунок «Температурна залежність питомого опору металів» є основою для створення віртуальної лабораторної роботи з дослідження зміни питомого опору металів із температурою та експериментального визначення їх температурного коефіцієнта опору.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Однодворець Л. В. Матеріали і компоненти функціональної електроніки : навчальний посібник / Л. В. Однодворець, І. М. Пазуха. – Суми : Сумський державний університет, 2020. – 196 с.
2. Kasap S. O. (Safa O.) Principles of Electronic Materials and Devices / S. O. Kasap. – New York : McGraw-Hill, 2018. – 992 p.
3. Introduction to Microelectronics to Nanoelectronics : Design and Technology / M. K. Majumder, V. R. Kumbhare, A. Jara, B. K. Kaushik. – Boca Raton : CRC Press, 2021. – 373 p.
4. Калита В. М. Загальна фізика. Електродинаміка. Модульне навчання : навч. посіб. для студ. за галузями знань «Інформаційні технології», «Автоматизація та приладобудування», «Електроніка та телекомунікації» / В. М. Калита, О. В. Дімарова, С. О. Решетняк. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 144 с.
5. Microscopic Electric Current [Електронний ресурс] // HyperPhysics . – URL : <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/miccur.html> (дата звернення : 22.12.2022).
6. Поплавко Ю. М. Фізика твердого тіла : підручник. В 2-х томах. / Ю. М. Поплавко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – Том 1: Структура, квазічастинки, метали, магнетики. – 415 с.
7. Філіпова Н. Ю. Імовірнісні основи обробки даних : Практикум. Частина 1. Основи теорії ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка» / Н. Ю. Філіпова, Власюк Г. Г. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 115 с.
8. Augustus Matthiessen: His Studies on Electrical Conductivities and the Origins of his “Rule” [Scanning Our Past] / S. Reif-Acherman // Proc. IEEE. – 2015. – V. 103, I. 4. – P. 713-721.
9. Магнетики в електроніці : Курс лекцій : навч. посіб. для студ. спеціальності 153 «Мікро- та наносистемна техніка» освітньої програми «Мікро- та

- наноелектроніка» / Ю. М. Поплавко, О. В. Борисов, І. П. Голубева, Ю. В. Діденко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 365 с.
10. Essick J. Hands-on Introduction to LabVIEW for Scientists and Engineers / J. Essick. – New York: Oxford University Press, 2016. – 686 p.
  11. Смутко С. В. Програмно-апаратний комплекс LabVIEW : Лабораторний практикум для студентів спеціальностей «Галузеве машинобудування» і «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / С. В. Смутко, П. С. Майдан, С. П. Лісевич – Хмельницький : ХНУ, 2018. – 100 с.
  12. Жураковський Я. Ю. Основи системного аналізу: Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студ. напр. «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Частина 1. / Я. Ю. Жураковський, Є. С. Черьопкін – К. : НТУУ «КПІ», 2015. – 106 с.
  13. What Is LabVIEW? [Електронний ресурс] // ni.com. – URL : <https://www.ni.com/en-us/shop/labview.html> (дата звернення : 20.11.2022).