Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Кулінченко Г. В., Павлов А. В., Леонтьєв П. В.

БАГАТОВИМІРНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Конспект лекцій

Суми
Сумський державний університет
2023

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

БАГАТОВИМІРНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Конспект лекцій
для студентів спеціальності
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
освітнього ступеня «магістр»
усіх форм навчання

Затверджено
на засіданні
кафедри комп'ютеризованих
систем управління
як конспект лекцій
із дисципліни «Багатовимірні
системи автоматичного
керування».
Протокол №6 від 10.01.2023

Суми
Сумський державний університет
2023

Багатовимірні системи автоматичного керування : конспект лекцій / укладачі: Г. В. Кулінченко, А. В. Павлов П. В. Леонтьєв – Суми : Сумський державний університет, 2023. – 46 с.

Кафедра комп’ютеризованих систем управління

ЗМІСТ

ВСТУП

До середини XX століття теорія автоматичного керування розвивалася базуючись на трьох фундаментальних принципах побудови автоматичних систем: принципі керування за відхиленням, принципі керування за збуренням та принципі комбінованого керування. Однак, починаючи з другої половини XX століття, з початком інтенсивного розвитку кібернетики, розробляли засоби, що ефективно використовували властивість запам'ятовування інформації у своїй роботі. У результаті з'являється здатність самостійно виконувати досить трудомісткі для людини математичні обчислення. Так з'явилися відносно ефективні, електронні обчислювальні машини (ЕОМ), що стали технологічною базою для розроблення й удосконалення більш потужних і продуктивних комп'ютерів та комп'ютерних систем. З появою відносно маловартісних комп'ютерів ученим та інженерам стало під силу виконання таких завдань:

– дослідження та аналізування складних нелінійних систем за допомогою обчислювальних методів;

– розроблення та реалізація ефективних алгоритмів регулювання, що використовують принцип предикції під час формування керувальних впливів;

– питання формалізації та дослідження лінійних систем із великою кількістю змінних (багатовимірні системи) за допомогою методу змінних стану.

Окремим класом завдань, яким рівень їх виконання підвищився з використанням комп'ютерів, є завдання ідентифікації об'єктів. Перехід від «ручних» обчислень до обчислень із застосуванням числових методів дозволив вирішувати завдання ідентифікації з достатньою ефективністю й точністю.

Підсумовуючи вищенаведене, можна зазначити, що основними об'єктами вивчення та дослідження для сучасної теорії автоматичного керування є нелінійні системи зі складними перехідними процесами й можливістю самоорганізації їх внутрішніх параметрів, дискретні інформаційно-керувальні системи та багатовимірні лінійні системи з великою кількістю вихідних змінних.

Основним інструментарієм сучасної теорії автоматичного керування є обчислювальні аналітичні й числові методи, основою більшої частини яких є базові (класичні) підходи до аналізування, синтезування та керування, відомі ще з класичної теорії автоматичного керування. Проте нових темпів розвитку ці методи набули лише з появою високо-продуктивних комп’ютерів. Додатковими факторами розвитку інструментарію сучасної теорії автоматичного керування є збільшення швидкодії та якості пристроїв запам’ятовування інформації, їх мініатюризація й зменшення енергоспоживання.

1 ВИЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ І МЕТОДИКА ЇХ ОПИСУВАННЯ

Розглянемо визначення багатовимірної системи, використовуване в теорії керування.

Багатовимірними системами називають системи керування, в яких є декілька, більше ніж одна, керованих змінних величин.

Одновимірна система характеризується тим, що контролюється (вимірюється, регулюється) лише одна змінна величина об’єкта керування (ОК).

Розглянемо структуру типової одновимірної системи керування з прикладу керування швидкістю обертання електродвигуна.

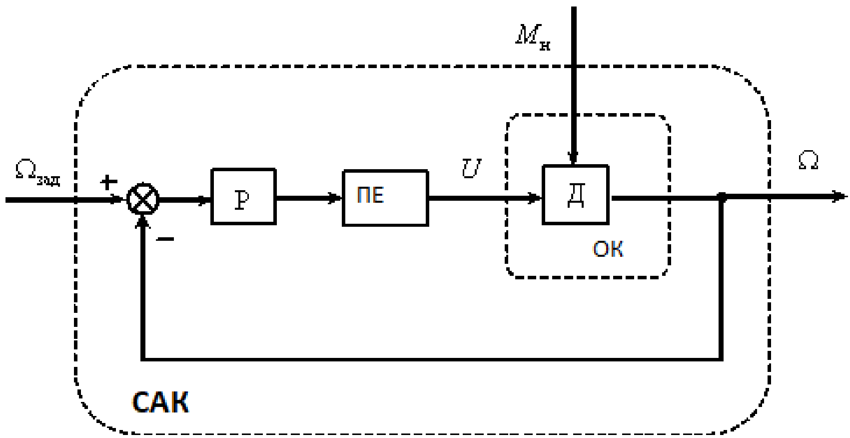

Рисунок 1.1 – Структурна схема САК

У системі, показаній на рисунку 1.1, ОК є електродвигун Д. На двигун впливає перетворювач енергії ПЕ, що надає руху двигуну й змінює швидкість за допомогою величини напруги U, яка підводиться до двигуна. На двигун також впливає робоче навантаження, яке створює на валу двигуна момент (Мн), що призводить до зміни швидкості (Ω) на відміну від заданої швидкості (Ωзад). У процесі роботи двигуна в разі зміни навантаження буде змінюватися й швидкість, що є неприпустимим із погляду вимог до якості підтримання параметра, який задають, наприклад, швидкість подання різця металорізального верстата. У функції відхилення швидкості від задання регулятор Р впливає на перетворювач енергії таким чином, щоб знизити відхилення швидкості.

У цьому разі як система керування загалом, так і ОК, уявляються у вигляді математичної моделі, яка має скалярні вхід, вихід та вплив, що збурює.

Для аналізування та синтезування в таких системах використовують математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь, передатних функцій, структурної схеми, частотних і часових характеристик.

Загальна тенденція розвитку промислових пристроїв полягає у підвищенні якості та зниженні витрат. У разі підвищення якості керування доводиться враховувати більше збурювальних факторів і потрібно керувати кількома змінними параметрами об’єкта. Це повинно забезпечувати вимоги до точності, динамічності, стабільності та економічності процесу руху вала двигуна. Тоді й ОК (двигун) та систему керування розглядають як багатовимірні.

Структура системи керування швидкістю двигуна набирає вигляду, показаного на рисунку 1.2.

Як бачимо, контрольованими змінними двигуна є швидкість, кут обертання вала φ, який часто потрібний у разі точного зупинення вала. Також контролюють навантаження двигуна за споживаним струмом *I*, економічність – за коефіцієнтом корисної дії η, нагрівання двигуна – за температурою двигуна *Тд*. На систему діє збурення, що має так само кілька компонентів:

– момент навантаження, температуру навколишнього середовища *Т*, важливі для установок, що працюють на відкритому повітрі;

– відхилення параметрів джерела енергії, який живить перетворювач енергії, що важливо для автономних установок.

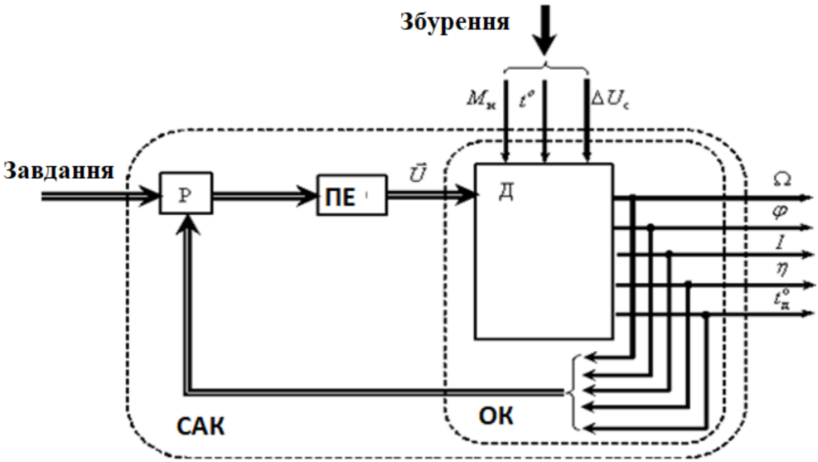

Рисунок 1.2 – Структура системи керування
швидкістю двигуна

У цьому разі керувальна дія на двигун так само є векторною величиною Ū.

Таким чином, справа не лише в системах електропривода, а й загалом у розробленні систем автоматизації промислових установок.

Здебільшого під час розроблення промислових установок вирішують завдання забезпечення заданої якості технологічного процесу за мінімізації енергетичних та економічних витрат. У цьому разі необхідно не лише враховувати численні фактори, що збурюють ОК, а й використовувати кілька точок докладання керувальних впливів.

Розглянемо найбільш характерні приклади багатовимірних систем у різних галузях промисловості.

На рисунку 1.3 показаний приклад структури установки, що реалізує процес оброблення гнучких матеріалів (нитка, дріт, тканина, тонколистовий метал, плівки, багатошарові матеріали).

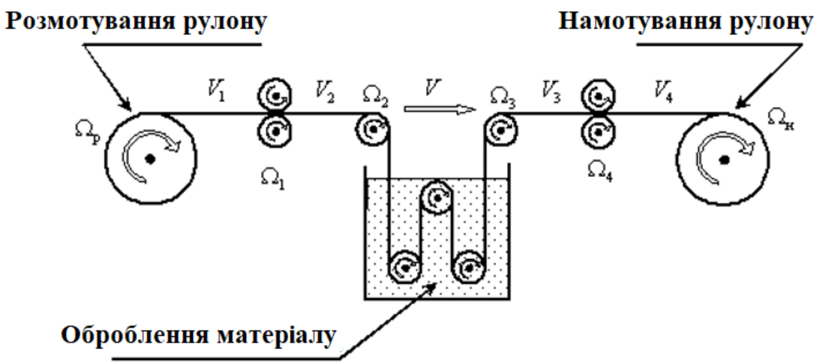

Рисунок 1.3 – Установка оброблення гнучких матеріалів

Основне завдання таких систем – стабілізація швидкості оброблення матеріалу *V* із забезпеченням відсутності деформації матеріалу. Для цього максимальну кількість обертових роликів оснащують регульованими приводами, щоб за допомогою керувальних впливів – співвідношень швидкостей $\Omega_р$, $\Omega_к$, Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 впливати на лінійні швидкості V_1 ,V_2, V_3, V_4, і, отже, на інші параметри оброблюваного матеріалу, особливо це важливо у тих випадках, коли матеріал легко деформується, наприклад, оброблення марлі або бинтів у текстильній промисловості.

На рисунку 1.4 показана типова кінематична схема промислового робота для маніпулювання і транспортування предметів.

Основне завдання таких систем – переміщення схоплювача маніпулятора в задану точку простору робочої зони робота (X_w, Y_w, Z_w). Це завдання можна реалізувати впливаючи на величини кутів повороту і переміщення в зчленування маніпулятора (Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, Θ_5), за допомогою електромеханічних, пневматичних або гідравлічних приводів.

Таким чином, тут ми маємо об’єкт і систему з великою кількістю вхідних впливів, тобто багатовимірну систему.

Узагальнена структура таких багатовимірних систем матиме вигляд, показаний на рисунку 1.5.

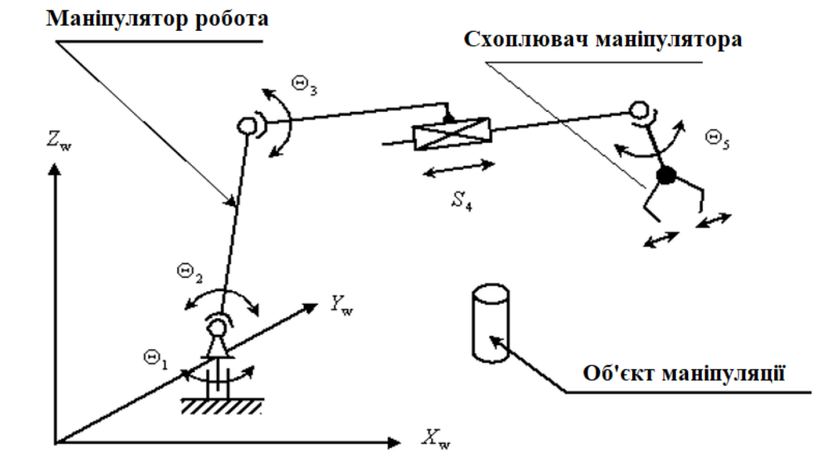

Рисунок 1.4 – Кінематична схема робота

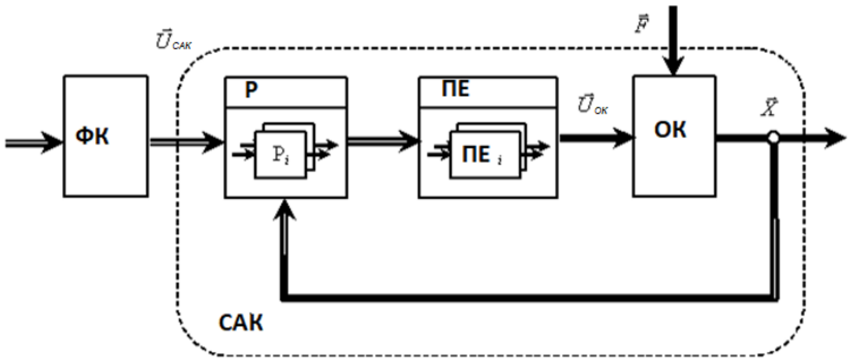

Рисунок 1.5 – Структура багатовимірної системи

Блок формування керування (ФК) перетворює завдання оператора на вектор керування системою $\vec{U}_{\text{САК}}$. Блок регуляторів P, що діє у функції відхилень виміряних регульованих величин $\vec{X}$ від заданих, керує перетворювачами енергії ПЕ, які здійснюють керувальні впливи $\vec{U}_{\text{ОК}}$ на ОК. На ОК також діють впливи $\vec{F}$, що збурюють його стабільну поведінку.

Ми бачимо, що в цьому разі багатовимірна система має векторний характер входів, виходів та збурювальних впливів, це добре ілюструє рисунок 1.6.

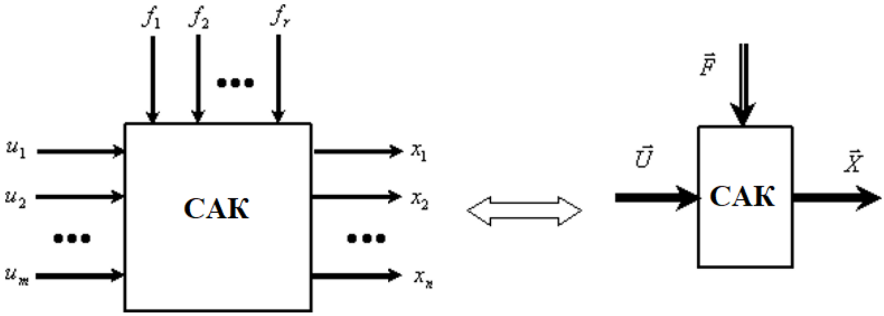

Рисунок 1.6 – Багатовимірна система автоматичного керування

Багатовимірні системи та ОК називають лінійними та стаціонарними, якщо вони описуються системою лінійних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами.

На рисунку 1.6 показані такі вектори:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_r \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

На цей час у практиці аналізування та синтезування багатовимірних систем склалися два підходи до проблеми одержання математичної моделі таких систем.

Перший підхід

Багатовимірну систему розглядають, як систему з багатьма зв’язками та що є сукупністю динамічних ланок і подається у вигляді структурної схеми або орієнтованого графа.

Другий підхід

Враховуючи векторний характер зв'язків між функціональними елементами САК, під час побудови математичних моделей використовують векторно-матричне подання рівнянь і структурних схем, що описують ОК чи систему загалом.

У межах цього підходу існує розподіл математичних моделей на дві групи.

Математичні моделі в частотній області

Вони базуються на операторній формі подання рівнянь і використання перетворення Лапласа. Це такі моделі, як:

– матричні структурні схеми;

– передатні матриці, які іноді називають еквівалентними матрицями, або матрицями «вхід – вихід».

Математичні моделі в часовій області

Вони базуються на векторно-матричній формі подання систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, широкому використанні понять та методів теорії простору станів.

Ідеологію формалізації багатовимірних систем визначають системою вихідних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (змінні станів об'єкта). Зміна станів відбувається під дією ряду вхідних змінних: $u_1, u_2, \ldots, u_m$, та сімейства впливів, що збурюють об'єкт: $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

Тоді рівняння стану багатовимірного об'єкта в операторній формі запису можна визначити так:

$$\begin{cases} P_{11}(p)x_1 + \cdots + P_{1n}(p)x_n = Q_{11}(p)u_1 + \cdots + Q_{1m}(p)u_m + C_{11}(p)f_1 + \cdots + C_{1k}(p)f_k \\ P_{21}(p)x_1 + \cdots + P_{2n}(p)x_n = Q_{21}(p)u_1 + \cdots + Q_{2m}(p)u_m + C_{21}(p)f_1 + \cdots + C_{2k}(p)f_k \\ \ldots \\ P_{n1}(p)x_1 + \cdots + P_{nn}(p)x_n = Q_{n1}(p)u_1 + \cdots + Q_{nm}(p)u_m + C_{n1}(p)f_1 + \cdots + C_{nk}(p)f_k \end{cases}$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(p)x_j = \sum_{j=1}^{m} Q_{ij}(p)u_j + \sum_{j=1}^{k} C_{ij}(p)f_j,$$

де P_{ij} *(p)*, Q_{ij} *(p)*, C_{ij} *(p)* – лапласівські поліноми зі сталими коефіцієнтами, що забезпечують взаємні зв'язки змінних об'єкта.

Математичне подання цього об'єкта можна зробити компактнішим, якщо перейти до матричної форми запису відповідної системи рівнянь:

$$P\,(p)\,X = Q\,(p)\,U + C\,(p)\,F,$$

де $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}, U = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{vmatrix}, f = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_k \end{vmatrix}$ – вектори змінних стану об'єкта,

вхідних сигналів об'єкта та збурювальних впливів на об'єкт;

$$P(p) = \begin{vmatrix} P_{11}(p) & \cdots & P_{1n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(p) & \cdots & P_{nn}(p) \end{vmatrix}, Q(p) = \begin{vmatrix} Q_{11}(p) & \cdots & Q_{1m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1}(p) & \cdots & Q_{nm}(p) \end{vmatrix},$$

$C(p) = \begin{vmatrix} C_{11}(p) & \cdots & C_{1k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(p) & \cdots & C_{nk}(p) \end{vmatrix}$ – матриці поліномів зв'язків змінних об'єкта.

2. КЕРОВАНІСТЬ І СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ ТА ОБ'ЄКТІВ

Керувати станом системи або об'єкта X можна, змінюючи вектор U, а визначати її стан можна, спостерігаючи за вектором виходу Y вимірювальної системи. Надалі всі багатовимірні системи чи багатовимірні об'єкти, які будемо формалізувати в межах цієї теорії, називатимемо узагальненим поняттям «система».

Систему називають *керованою*, якщо вона може бути переведена з довільного початкового стану $x\ (t_0)$ в будь-який інший бажаний стан $x\ (t_1)$ за кінцевий інтервал часу $T = t_1 - t_0$ за допомогою прикладання кусково-безперервного вхідного впливу $u\ (t)$. Іншими словами: керованість системи означає те, що вона має достатню кількість вхідних керувальних змінних $u_i\ (t)$ для однозначного переходу до будь-якого іншого кінцево-визначеного стану її вихідних змінних $x_i\ (t)$.

Оцінити, наскільки багатовимірна система може бути керованою, можна за матрицею керованості відповідної системи, що має вигляд:

$$Q_y = |\ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B\ |, \qquad (2.1)$$

де n – порядок досліджуваної системи, що підлягає керуванню.

Отже, система буде керованою, якщо ранг матриці керування системи відповідає її порядку, тобто якщо виконуватиметься така умова:

$$rang\ Q_y = n. \qquad (2.2)$$

Керованість вимагає, щоб кожний стан системи був чутливим до впливу її вхідних керувальних впливів. Інше поняття щодо спостереження системи вимагає, щоб кожний стан системи впливав на сигнал виходу відповідної вимірювальної системи. Тобто спостережуваність системи дає відповідь на запитання: чи можна, оцінюючи показання виходу вимірювальної системи $y_i\ (t)$, та знаючи значення керуювального входу системи $u_i(t)$, однозначно визначити стан системи $x_i(t)$ в часі.

Систему називають *спостережуваною*, якщо за даними вимірювання або спостереження векторів $u_i(t)$ і $y_i(t)$ на кінцевому інтервалі часу $t_0 \leq t \leq t_1$ можна однозначно визначити початковий стан системи $x(t_0)$. Систему можна назвати спостережуваною *повністю*, якщо спостерігаються всі її стани в будь-який момент часу.

Отже, система спостережувана, якщо всі її стани можна безпосередньо або опосередковано визначити вихідним вектором вимірювальної системи з урахуванням керувальних впливів. Неспостережувана система не може бути ідентифікована в просторі станів, оскільки неможлива ідентифікація параметрів, які належать до станів, що не спостерігаються.

Оцінити, наскільки багатовимірна система є спостережуваною, можна за матрицею спостережуваності відповідної системи. Матрицю спостережуваності визначають таким чином:

$$R = | \, C^T \quad A^T C^T \quad \ldots \quad (A^T)^{n-1} C^T \, |, \tag{2.3}$$

де n – порядок досліджуваної системи, що підлягає спостереженню.

Система буде повністю спостережуваною, якщо ранг матриці спостережуваності системи відповідає її порядку, тобто якщо виконуватиметься така умова:

$$rang\ R = n. \tag{2.4}$$

Критерії керованості та спостережуваності відповідно до виразів (2.1)–(2.4) аналогічні, що дозволяє зробити висновки про їх дуальність та ввести поняття багатовимірної системи дуальної до досліджуваної. Назвемо дві системи S та S^* дуальними, якщо їх можна описати відповідно до рівнянь:

$$S: \begin{cases} X^{/} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}, \tag{2.5}$$

$$S^{*}: \begin{cases} Z^{/} = A^{T}Z + C^{T}U \\ L = B^{T}Z \end{cases}. \tag{2.6}$$

З виразів (2.1)–(2.6) випливає, що якщо система ***S*** у деякий момент часу буде спостережуваною, то дуальна до неї система ***S**** буде також спостережуваною в цей момент часу і навпаки. Отже, спостережуваність однієї з систем можна перевірити аналізуванням керованості дуальної до неї системи.

3 СТІЙКІСТЬ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ ТА ОБ'ЄКТІВ

З курсу класичної теорії автоматичного керування відомо, що внутрішню властивість стійкості системи можна оцінити за характеристичним поліномом системи. Для цього необхідно розрахувати корені відповідного характеристичного полінома, розмістити їх у комплексній площині, що відображає їх положення. У разі якщо всі вони виявляться лівіше від уявної осі (межі стійкості), то відповідна система буде асимптотично стійкою.

Цей аналіз ґрунтується на тому, що динамічна система вважатиметься асимптотично стійкою, якщо її вільний рух $x_c(t)$ обмежений за граничних початкових умов, тобто якщо виконуватиметься така умова:

$$\lim_{t\to\infty} x_c(t) = 0. \tag{3.1}$$

Для багатовимірних систем умова (3.1) може бути сформульована щодо норми вектора змінних стану системи. Нормування вектору вільних складових траєкторій змінних стану X_c відповідної багатовимірної системи має вигляд:

$$\lim_{t\to\infty} \| X_c \| = 0, \tag{3.2}$$

де $\| X_c \|$ – будь-яка норма вектора вільних складових X_c вектора змінних стану X багатовимірної динамічної системи,

наприклад $\|X_c\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[x_{c_i}(t)\right]^2}$.

Виконання умови (3.2) можна перевірити аналогічно тому, як це робили в класичній теорії автоматичного керування щодо виразу (3.1), якщо попередньо одержати характеристичне рівняння, але стосовно досліджуваної багатовимірної системи. У згаданій теорії для одержання характеристичного рівняння досліджуваної на стійкість системи необхідно прирівняти до нуля характеристичний поліном, а саме знаменник передавальної функції відповідної системи.

Під час аналізування *стійкості багатовимірних* лінійних систем аналітичним еквівалентом характеристичного полінома системи буде матриця, наявна в матричній передатній функції відповідної системи як елемент. Знаходження цього елемента здійснюється з використанням операції зворотного перетворення. Таке зворотне перетворення під час обчислень матричних рівнянь подібне дробовому виразу. У цьому разі всі елементи в матричній передатній функції системи позначені зворотним перетворенням, що еквівалентно знаменнику деякого дробового виразу.

Розглянемо вираз для матричної передавальної функції лінійного багатовимірного об’єкта чи системи

$$Y(p) = C\,(pE - A)^{-1}\,B\,U(p),$$
$$W(p) = Y(p)\,U^{-1}(p) = C\,(pE - A)^{-1}\,B.$$

Цей вираз на підставі вищенаведених міркувань можна записати у вигляді характеристичної матриці багатовимірної системи:

$$Q(p) = pE - A. \tag{3.3}$$

Якщо розрахувати детермінант цієї матриці та прирівняти його до нуля

$$\det Q(p) = 0, \tag{3.4}$$

можна одержати характеристичний поліном лінійної багатовимірної системи у вигляді, відомому з класичної теорії автоматичного керування, а саме:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{3.5}$$

Наступний крок щодо кореневого критерію стійкості систем передбачає обчислення коренів виразу (3.5) та аналізування їх розміщення щодо уявної осі (Im), що є межею стійкості у відповідній системі координат комплексної площини (Im, Re). Аналізування розміщення коренів дає повну інформацію про стійкість досліджуваної багатовимірної системи.

Кореневий критерій стійкості систем у формулюванні, застосовуваному для аналізування лінійних безперервних систем, трактують таким чином:

система буде асимптотично стійкою, якщо всі корені її характеристичного рівняння знаходяться лівіше від межи стійкості (уявна вісь комплексної площини). Якщо хоча б один із коренів знаходиться правіше від межі стійкості, система нестійка. Якщо, крім стійкого кореня, є корені, що знаходяться на межі стійкості, система знаходиться на межі стійкості.

Також альтернативний аналіз стійкості можна проводити користуючись алгебраїчними критеріями стійкості, наприклад, Гаусса чи Гурвіца, формуючи відповідні аналітичні таблиці або матриці на підставі значень коефіцієнтів виразу (3.5).

4 МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИМИ СИСТЕМАМИ

Основна ідеологія методів, пов’язаних з модальним керуванням багатовимірними системами або об’єктами, полягає в тому, що для замкненої системи формується певне розміщення коренів узагальненого характеристичного рівняння за допомогою завдання параметрів регулятора. Це формування здійснюють на основі матрично-векторного формату математичного опису в середовищі моделювання.

Відповідне розміщення коренів визначає бажаний вигляд перехідних характеристик для системи загалом. Назва «модальне керування» пояснюється тим, що кожен із коренів визначає вид результуючого виразу узагальненої вільної складової рівняння руху системи. Це рівняння в класичному поданні є сумою показових функцій (*мод*) із коренями характеристичного рівняння, що є показниками ступенів цих показових функцій. Геометрія розміщення коренів узагальненого характеристичного рівняння багатовимірної системи керування містить у собі побічно наведену інформацію про всі прямі показники якості перехідних процесів, можливі у системі. Ця інформація необхідна для початку проєктування регулятора.

Вочевидь, що комбінацій коренів може бути нескінченна кількість, відповідно ці комбінації можуть формувати нескінченну кількість перехідних процесів. Тому під час проєктування систем на основі методів *модального керування* постає питання про те, яке з розміщень буде оптимальним для конкретної системи. Це питання в кожному конкретному випадку вирішується різними способами залежно від властивостей об’єкта керування та особливостей практичної реалізації проєктивної системи.

Нехай замкнена система за результатами синтезування описується таким узагальненим диференціальним рівнянням:

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x(t) = g(t) , \qquad (4.1)$$

і відповідно характеристичним рівнянням

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (4.2)$$

Розглянемо, як орієнтуючись на бажане розміщення коренів характеристичного рівняння системи, а відповідно, й бажаний вигляд перехідних процесів, можна оцінити параметри багатовимірного регулювального пристрою.

Внаслідок того, що в теорії автоматичного керування прийнято розглядати системи за нульових початкових умов і типових впливів, проаналізуємо перехідні характеристики замкненої системи на основі одного з варіантів нижченаведених перехідних характеристик. У цьому разі вважатимемо, що вхідний вплив є одиничною функцією $g(t) = 1(t)$.

4.1 Стандартні форми характеристичних рівнянь систем

4.1.1 Біноміальні стандартні форми. Нижченаведені перехідні характеристики можуть бути одержані з припущенням того, що всі n коренів результуючого характеристичного рівняння замкненої системи збігаються, є дійсними й розміщенні на відстані ω_0 лівіше від уявної осі. Крім того, параметр ω_0 визначає геометрію розміщення відповідного кореня характеристичного рівняння. Він є непрямим показником якості розмірністю [$с^{-1}$] і узагальненою мірою швидкодії синтезованої системи.

Зважаючи на зазначене, характеристичне рівняння (4.2) може бути зведене до бінома Ньютона $(p + \omega_0)^n$, розкриваючи який, одержуємо стандартні значення коефіцієнтів узагальненого характеристичного рівняння систем:

$$p + \omega_0,$$

$$p^2 + 2p\omega_0 + \omega_0^2,$$

$$p^3 + 3p^2\omega_0 + 3p\omega_0^2 + \omega_0^3,$$

$$p^4 + 4p^3\omega_0 + 6p^2\omega_0^2 + 4p\omega_0^3 + \omega_0^4,$$

$$p^5 + 5p^4\omega_0 + 10p^3\omega_0^2 + 10p^2\omega_0^3 + 5p\omega_0^4 + \omega_0^5,$$

$$p^6 + 6p^5\omega_0 + 15p^4\omega_0^2 + 20p^3\omega_0^3 + 15p^2\omega_0^4 + 6p\omega_0^5 + \omega_0^6,$$

$$p^7 + 7p^6\omega_0 + 21p^5\omega_0^2 + 35p^4\omega_0^3 + 35p^3\omega_0^4 + 21p^2\omega_0^5 + 7p\omega_0^6 + \omega_0^7,$$

$$p^8 + 8p^7\omega_0 + 28p^6\omega_0^2 + 56p^5\omega_0^3 + 70p^4\omega_0^4 + 56p^3\omega_0^5 + 28p^2\omega_0^6 + 8p\omega_0^7 + \omega_0^8.$$

Реакції систем у разі біномних розподілів є монотонними, аперіодичними й такими, що відбуваються досить повільно. Такі перехідні процеси забезпечують системи керування з мінімальною кількістю прямих показників якості, що в багатьох випадках може бути оптимальним щодо швидкодії та перерегулювання (рис. 4.1).

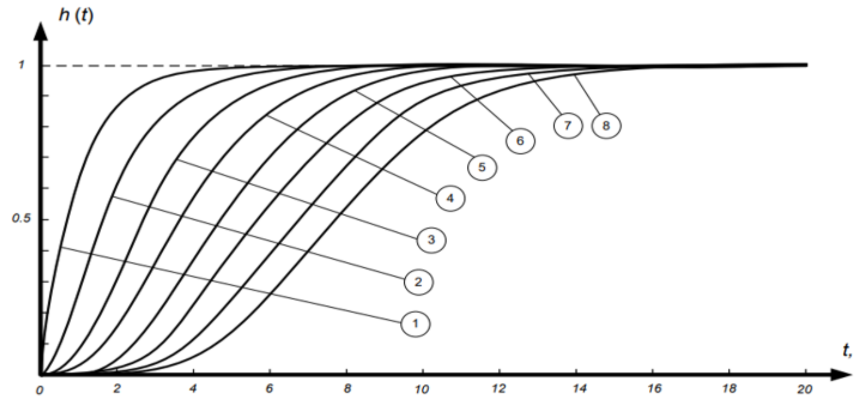

Рисунок 4.1 – Перехідні характеристики систем
із характеристичними рівняннями, що відповідають
біноміальним стандартним формам із першого до восьмого
порядку (криві 1–8, $\omega_0 = 1$)

4.1.2 Стандартні форми Баттерворта. Подані нижче перехідні характеристики можуть бути одержані з припущення того, що всі *n* коренів результуючого характеристичного рівняння замкненої системи розподіляються по півколу радіуса ω_0 у лівій півплощині комплексної площини коренів *p* за умови додержання однаковості кутових відстаней між коренями, що й стало свого часу основою форми Баттерворта. Однаковість кутових відстаней необхідно розуміти так: кут, складений з уявною віссю та радіусом-вектором найближчого до неї кореня, дорівнює половині кута між радіусами-векторами сусіднього кореня. Стандартні форми Баттерворта мають такий вигляд:

$$p + \omega_0,$$

$$p^2 + 1{,}4p\omega_0 + \omega_0^2,$$

$$p^3 + 2p^2\omega_0 + 2p\omega_0^2 + \omega_0^3,$$

$$p^4 + 2{,}6p^3\omega_0 + 3{,}4p^2\omega_0^2 + 2{,}6p\omega_0^3 + \omega_0^4,$$

$$p^5 + 3{,}24p^4\omega_0 + 5{,}24p^3\omega_0^2 + 5{,}24p^2\omega_0^3 + 3{,}24p\omega_0^4 + \omega_0^5,$$

$$p^6 + 3{,}86p^5\omega_0 + 7{,}46p^4\omega_0^2 + 9{,}13p^3\omega_0^3 + 7{,}46p^2\omega_0^4 + 3{,}86p\omega_0^5 + \omega_0^6,$$

$$p^7 + 4{,}5p^6\omega_0 + 10{,}1p^5\omega_0^2 + 14{,}6p^4\omega_0^3 + 14{,}6p^3\omega_0^4 + 10{,}1p^2\omega_0^5 + 4{,}5p\omega_0^6 + \omega_0^7,$$

$$p^8 + 5{,}12p^7\omega_0 + 13{,}14p^6\omega_0^2 + 21{,}84p^5\omega_0^3 + 25{,}69p^4\omega_0^4 + 21{,}84p^3\omega_0^5 + 13{,}14p^2\omega_0^6 + \\ + 5{,}12p\omega_0^7 + \omega_0^8.$$

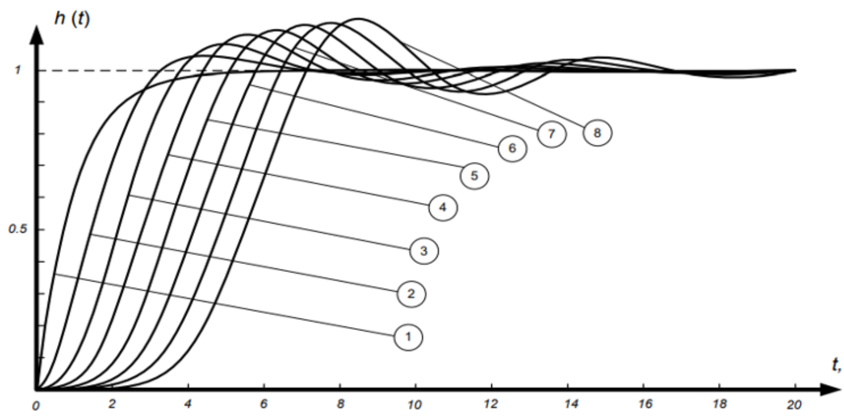

Рисунок 4.2 – Перехідні характеристики систем
із характеристичними рівняннями, що відповідають
стандартним формам Баттерворта з першого до восьмого
порядку (криві 1–8, $\omega_0 = 1$)

Реакції систем Баттерворта порівняно з біноміальними, більш коливні, причому коливність зростає зі збільшенням порядку системи. Втім, така властивість забезпечує більшу швидкодію та максимальну кількість прямих показників якості. У багатьох випадках це може відповідати інтуїтивному уявленню про оптимальний перехідний процес.

4.1.3 Стандартні форми, що забезпечують мінімум лінійного квадратичного інтегрального оцінювання якості $J = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)\,dt$, мають такий вигляд:

$$p + \omega_0,$$

$$p^2 + p\omega_0 + \omega_0^2,$$

$$p^3 + p^2\omega_0 + 2p\omega_0^2 + \omega_0^3,$$

$$p^4 + p^3\omega_0 + 3p^2\omega_0^2 + 2p\omega_0^3 + \omega_0^4,$$

$$p^5 + p^4\omega_0 + 4p^3\omega_0^2 + 3p^2\omega_0^3 + 3p\omega_0^4 + \omega_0^5,$$

$$p^6 + p^5\omega_0 + 5p^4\omega_0^2 + 4p^3\omega_0^3 + 6p^2\omega_0^4 + 3p\omega_0^5 + \omega_0^6,$$

$$p^7 + p^6\omega_0 + 6p^5\omega_0^2 + 5p^4\omega_0^3 + 10p^3\omega_0^4 + 6p^2\omega_0^5 + 4p\omega_0^6 + \omega_0^7,$$

$$p^8 + p^7\omega_0 + 7p^6\omega_0^2 + 6p^5\omega_0^3 + 15p^4\omega_0^4 + 10p^3\omega_0^5 + 10p^2\omega_0^6 + 4p\omega_0^7 + \omega_0^8.$$

Реакції систем із цим типом характеристичного полінома мають більшу коливність порівняно з реакціями Баттерворта, але водночас мають менший час зростання як порівняно з формами Баттерворта, так і порівняно з біноміальними стандартними формами (рис. 4.3).

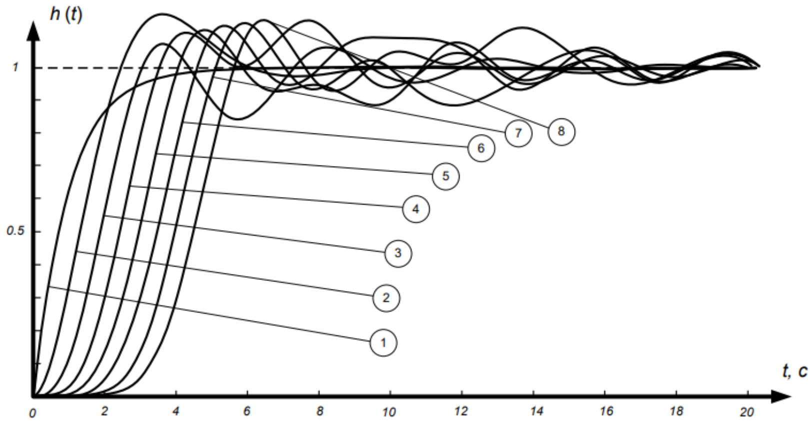

Рисунок 4.3 – Перехідні характеристики систем із характеристичними рівняннями, що відповідають стандартним формам, які забезпечують мінімум лінійного квадратичного інтегрального оцінювання якості $J = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)\,dt$ з першого до восьмого порядку (криві 1–8, $\omega_0 = 1$)

4.1.4 Стандартні форми, що забезпечують мінімум інтегрального оцінювання якості $J = \int_0^\infty t|\varepsilon(t)|\,dt$ мають вигляд:

$p + \omega_0,$

$p^2 + 1{,}4p\omega_0 + \omega_0^2,$

$p^3 + 1{,}75p^2\omega_0 + 2{,}15p\omega_0^2 + \omega_0^3,$

$p^4 + 2{,}1p^3\omega_0 + 3{,}4p^2\omega_0^2 + 2{,}7p\omega_0^3 + \omega_0^4,$

$p^5 + 2{,}8p^4\omega_0 + 5p^3\omega_0^2 + 5{,}5p^2\omega_0^3 + 3{,}4p\omega_0^4 + \omega_0^5,$

$p^6 + 3{,}25p^5\omega_0 + 6{,}6p^4\omega_0^2 + 8{,}6p^3\omega_0^3 + 7{,}45p^2\omega_0^4 + 3{,}95p\omega_0^5 + \omega_0^6,$

$p^7 + 4{,}47p^6\omega_0 + 10{,}42p^5\omega_0^2 + 15{,}08p^4\omega_0^3 + 15{,}54p^3\omega_0^4 + 10{,}64p^2\omega_0^5 + 4{,}58p\omega_0^6 + \omega_0^7,$

$p^8 + 5{,}2p^7\omega_0 + 12{,}8p^6\omega_0^2 + 21{,}6p^5\omega_0^3 + 25{,}75p^4\omega_0^4 + 22{,}2p^3\omega_0^5 + 13{,}3p^2\omega_0^6 + 5{,}15p\omega_0^7 +$
$+ \omega_0^8.$

У цьому разі перехідним характеристикам систем порівняно з перехідними характеристиками біноміальних систем властива більша швидкодія, а порівняно з перехідними характеристиками систем Баттерворта – істотно менша коливність (рис. 4.4).

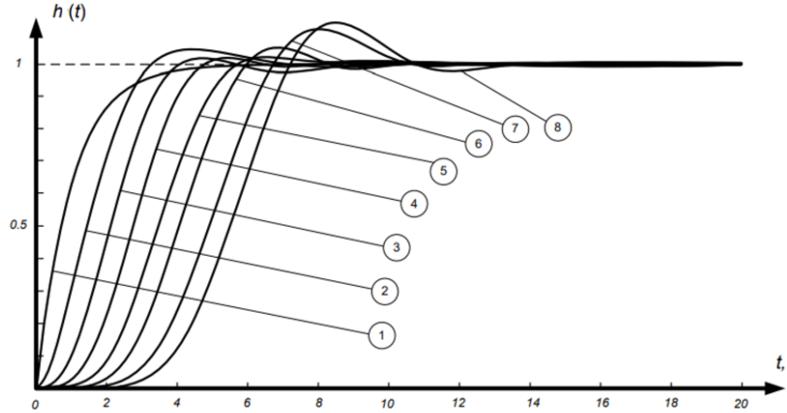

Рисунок 4.4 – Перехідні характеристики систем із характеристичними рівняннями, що відповідають стандартним формам, які забезпечують мінімум інтегрального оцінювання якості $\alpha_0 = \sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n} = a_n/a_0$ з першого до восьмого порядку (криві 1–8, $\omega_0 = 1$)

Ці стандартні форми досить широко використовують на практиці, проте будь-якого загального алгоритму формування немає, оскільки одержані вони були експериментально.

Отже, вище було наведено та описано стандартні варіанти реакцій багатовимірних систем автоматичного керування, які можна використовувати як базові на початкових етапах синтезування багатовимірних керувальних пристроїв. Подальше коригування або використання нових варіантів реакцій синтезованих систем повинно відбуватися в межах розуміння бажаних кореневих показників якості синтезованої системи автоматичного керування.

Одна частина показників якості пов’язана з часовими параметрами перехідних процесів, а інша – характеризує бажані коливальні властивості перехідних процесів у системах із відповідною геометрією розміщення коренів (рис. 4.5), а саме:

1) середньогеометричне розміщення «сузір’я» коренів характеристичного рівняння системи (4.2), зворотне значення якого $\alpha_0 = \sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n} = a_n / a_0$ через свою розмірність, можна використовувати під час аналізування як узагальнену міру швидкодії системи;

2) відстань від межі стійкості до найближчого до неї кореня η (домінуючого кореня), що визначає найбільш тривалі складові (моди) перехідного процесу в системі і називається ступенем стійкості;

3) значення тангенса кута θ, у межах якого можна розміщувати все сімейство коренів характеристичного рівняння (4.2) системи. Цей показник визначає ступінь коливності $\mu = tg\theta$.

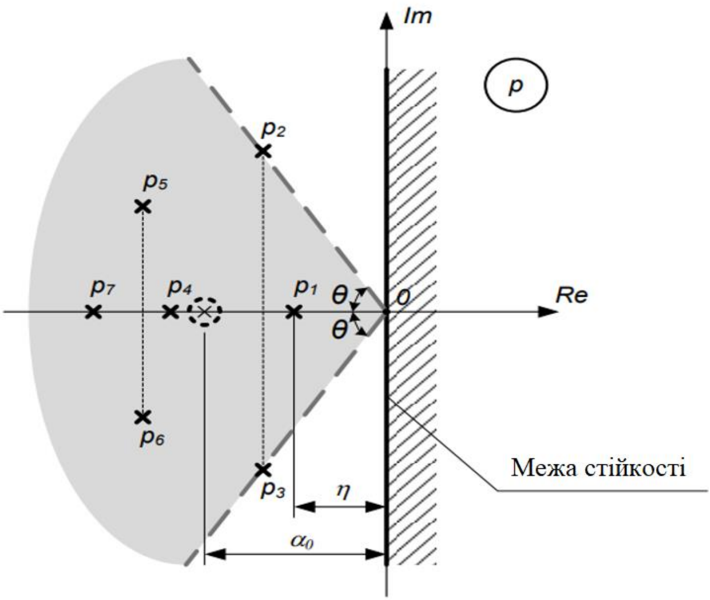

Рисунок 4.5 – Непрямі показники якості систем автоматичного керування

Кут θ складає половину мінімального кута сектора, який будують із початку координат комплексної площини *Im, Re*.

4.2 Розрахунок багатовимірного регулятора

Розглянемо лінійний стаціонарний об’єкт. Для того щоб здійснити керування цим об’єктом, необхідно, щоб він був керованим, а змінні його станів повинні бути спостережуваними. Опис об’єкта повинен відповідати, наприклад, системі рівнянь (2.5). Загалом у сучасній теорії автоматичного керування термін «об’єкт» розуміють ширше, ніж зазвичай. До об’єкта прийнято відносити не лише виконавчі органи, а й підсилювачі та перетворювачі, що передують їм. До описування об’єкта, із відповідним застереженням входять спеціальні вимірювальні системи змінних станів об’єкта у вигляді змінних, що підлягають регулюванню. Тоді багатовимірний об’єкт може сприйматися як об’єкт керування, а його матрична передатна функція має вигляд

$$W(p) = C\,(pE - A)^{-1}\,B. \tag{4.3}$$

Регулятор, що приєднується до об’єкта керування, одержує результати вимірювання стану об’єкта у вигляді змінних. У результаті порівняння заданого й поточного стану регулятор виробляє керувальні впливи, які знову прикладаються до об’єкта (рис. 4.6).

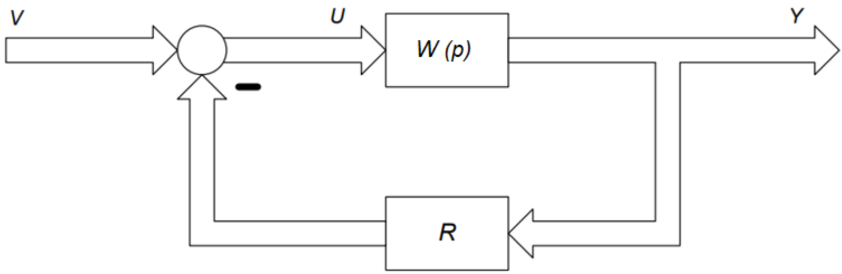

Рисунок 4.6 – Структурна схема багатовимірної системи автоматичного керування

Надалі всі багатовимірні сигнали на структурних схемах будемо позначати товстими з’єднувальними лініями зі стрілками в напрямку передавання сигналів.

Будемо вважати, що регулятор за допомогою матриці перетворення R розмірністю $m \times n$ лінійно перетворює сигнали, що надійшли до нього, і видає на своїх виходах їх лінійні комбінації. Крім того, обов’язково необхідно враховувати вектор вимірюваних зовнішніх впливів на систему V за координатами внутрішніх керувальних впливів у системі U. Останні якраз і вирішують основні завдання керування відповідно до задавальних впливів системи.

Тоді одержимо:

$$U = V - RY. \tag{4.4}$$

Ураховуючи той факт, що керування повинне забезпечувати потрібні зміни стану об’єкта, а не результатів вимірювань, вираз (4.4) можна записати так:

$$U = V - RCX\,,$$
$$BU = BV - BRCX\,.$$

Беручи до уваги вираз передатної функції багатовимірного об’єкта керування (4.3), одержуємо:

$$(pE - A)\,X = BV - BRCX\,,$$
$$(pE - A + BRC)\,X = BV\,.$$

Тоді матрична передатна функція всієї багатовимірної системи керування в замкненому стані буде мати вигляд

$$\Phi\,(p) = X\,(p)\,V^{-1}\,(p) = (pE - A + BRC)^{-1}\,B\,. \tag{4.5}$$

Характеристична матриця системи в цьому випадку дорівнюватиме

$$Q\ (p) = pE - A + BRC. \tag{4.6}$$

Детермінант матриці (4.6) і є тим характеристичним рівнянням, яке за допомогою завдання параметрів матриці регулятора R формує одну із стандартних форм або деякий інший варіант характеристичного полінома з геометрією «сузір'я» коренів. Це «сузір'я» повинне відповідати потрібним кореневим показникам якості перехідних процесів у системі (рис. 4.5).

5 СПОСТЕРІГАЧІ БАГАТОВИМІРНИХ ОБ’ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

З матеріалу попереднього розділу випливає: якщо всі змінні станів багатовимірного об’єкта керування є спостережуваними, то синтез замкненої системи із заданим розподілом полюсів не є складним завданням. Заданому розподілу відповідають конкретні задані *моди* вільних складових перехідної характеристики системи.

Однак найчастіше приладовому вимірюванню досяжні лише деякі змінні станів об’єкта. До того ж часто використання вимірювальних приладів проблематичне або зовсім неможливе. У цьому разі відповідні вимірювальні операції описують складними, іноді нелінійними рівняннями, що істотно ускладнюють формування опису структури об’єкта керування. Тому виконання основних завдань керування в разі неповної інформації про об’єкт не є простим завданням і не приводить до бажаної якості регулювання системою керування.

Отже, виникає необхідність наявності інструментарію, що дозволяє опосередковано оцінити відповідні змінні станів, які є або малодоступними, або зовсім недоступними для прямого вимірювання. Відповідний інструментарій базується на методах, основою яких є використання рівнянь руху відповідного об’єкта керування (модель об’єкта керування). Ці рівняння беруть заздалегідь відомими й здатними заповнити недостатню інформацію про змінні стану об’єкта.

Пристрої визначення координат стану об’єкта керування, в основу яких покладене рівняння його руху, називають *спостерігувальними пристроями*, або *спостерігачами*.

5.1 Загальні поняття теорії спостерігачів

Припустимо, що багатовимірний об’єкт керування описується такою системою матрично-векторних рівнянь:

$$\begin{cases} X' = AX + BU, \\ \quad Y = CX. \end{cases} \tag{5.1}$$

Тоді система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} Q' = FQ + GY + HU, \\ Z = KQ + LY + MU \end{cases} \tag{5.2}$$

може описувати математично процес спостереження за відповідним багатовимірним динамічним об'єктом. Спостерігач стану об'єкта керування по суті є моделлю цього об'єкта, причому цю модель можна сформувати в координатах, зручних для синтезування регулятора. Під час практичної реалізації спостережувальний пристрій стану об'єкта керування формується зазвичай у вигляді підпрограми алгоритму керування, що дозволяє уникнути істотного ускладнення самої системи керування.

Надалі будемо вважати систему матрично-векторних рівнянь (5.2) системою рівнянь, що описує відповідний спостережувальний пристрій об'єкта керування. Умовою цього припущення є така: для кожного початкового стану об'єкта керування $X\ (t_0)$, описуваного системою матрично-векторних рівнянь (5.1), існує початковий стан $Q\ (t_0)$ у системі рівнянь (5.2), причому такий, що рівність $Q\ (t_0) = X\ (t_0)$ приводить до рівності $Z\ (t) = X\ (t)$ для $t_0 \le t_i$, а також для всіх можливих керувань $U\ (t)$.

Необхідно зазначити, що матриці F, G, H, K, L, M вибирають таким чином, щоб забезпечити узгодження їх відповідних розмірностей аналогічно тому, як це робилося для формування матрично-векторної системи рівнянь (5.1).

Якщо розмірність вектора $Q\ (t)$ дорівнює розмірності вектора змінних стану об'єкта $X\ (t)$ і виконання умови $Q\ (t_0) = X\ (t_0)$ дає рівність $Q\ (t) = X\ (t)$ при $t_0 \le t$ та всіх керувань $U\ (t)$, то спостерігача (5.2) називають *спостерігачем повного порядку* об'єкта (5.1). Інакше кажучи, спостерігач буде спостерігачем повного порядку, якщо тотожно будуть рівними перші рівняння систем рівнянь (5.1) і (5.2) за умови повної рівності матриць-векторів X і Q.

Спробуємо оцінити умови, за яких буде виконуватися відповідна тотожність рівнянь. Для цього віднімемо з першого рівняння системи рівнянь (5.1) перше рівняння системи рівнянь (5.2). З урахуванням повної рівності матриць-векторів X і Q одержимо:

$$AX - FQ - GY + (B - H)\,U = 0. \tag{5.3}$$

Підставимо друге рівняння системи рівнянь (5.1) у вираз (5.3) і додатково його перетворимо:

$$(A - GC)\,X - FQ + (B - H)\,U = 0. \tag{5.4}$$

Рівність (5.4) буде виконуватися, якщо

$$F = A - GC\,, \tag{5.5}$$

$$H = B\,. \tag{5.6}$$

У цьому разі одержимо випадок повного відтворення вектора стану об’єкта керування пристроєм ($Q = X$).

У подальшому матрицю G називатимемо *матрицею коефіцієнтів підсилення спостерігача* або *матрицею налаштувань*, а спостерігач повного порядку наведемо в такому вигляді:

$$Q' = (A - GC)\,Q + BU + GY. \tag{5.7}$$

Нескладно довести що стійкість спостерігача повністю визначається поведінкою матриці $A - GC$, а якщо матриці A, C і відповідно матриця коефіцієнтів спостерігача G будуть сталими, то стійкість спостерігача визначатиметься коренями характеристичного рівняння: $det\,(pE - A + GC) = 0$.

Якщо всі корені відповідного характеристичного рівняння будуть у лівій півплощині комплексної площини коренів p, то спостерігач буде відповідно стійким.

Очевидно, що ступінь стійкості спостерігача буде тим вищим, чим далі розміщені домінуючі корені характеристичного рівняння спостерігача щодо межі стійкості (осі *Im* комплексної площини коренів *p*). Це впливає на якість відновлення інформації *спостерігачем* про стан об’єкта керування. Структурна схема взаємодії багатовимірного об’єкта керування та спостерігача повного порядку наведена на рисунку 5.1.

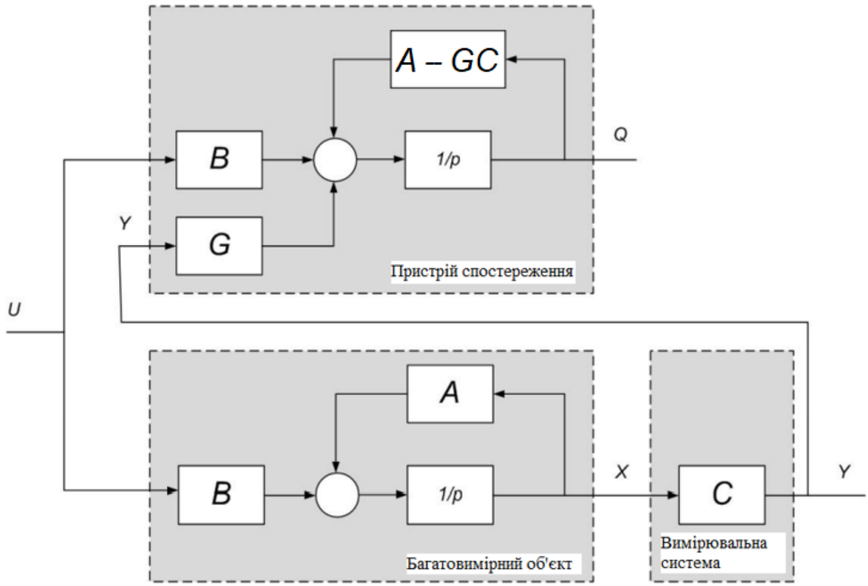

Рисунок 5.1 – Структурна схема взаємодії багатовимірного об’єкта керування та спостерігача повного порядку

Інше подання спостерігача може бути одержане з виразу (5.7), якщо провести деяке перегрупування компонент рівняння так, щоб виділити в рівнянні відповідну структуру об’єкта спостереження за формою першого рівняння системи рівнянь (5.1):

$$Q^{/} = AQ + BU + G\ (Y - CQ). \tag{5.8}$$

Якщо ввести поняття *помилки відновлення спостерігачем результатів вимірювання вектора стану об'єкта* у вигляді

$$\varepsilon = Y - CQ = C(X - Q), \tag{5.9}$$

то можна записати ще один варіант матрично-векторного подання спостережувального пристрою:

$$Q^{/} = AQ + BU + G\varepsilon. \tag{5.10}$$

З огляду на вираз (5.10) стає очевидним назва матриці *G* як матриці, основним завданням якої є максимально ефективне доведення структури спостережувального пристрою до структури спостережуваного об'єкта керування. Вихідні змінні спостерігача в подальшому можуть бути перетворені системою (аналогічною до вимірювальної системи об'єкта керування *C*) таким чином, що стають придатними для їх використання як вхідний сигнал до регулятора.

Ці змінні містять більш повну інформацію про стан багатовимірного керованого об'єкта, ніж результати перетворення вектора станів багатовимірного об'єкта вихідною вимірювальною системою (вектор *C*). Структурна схема взаємодії багатовимірного об'єкта керування та спостерігача з урахуванням викладених раніше міркувань наведена на рисунку 5.2.

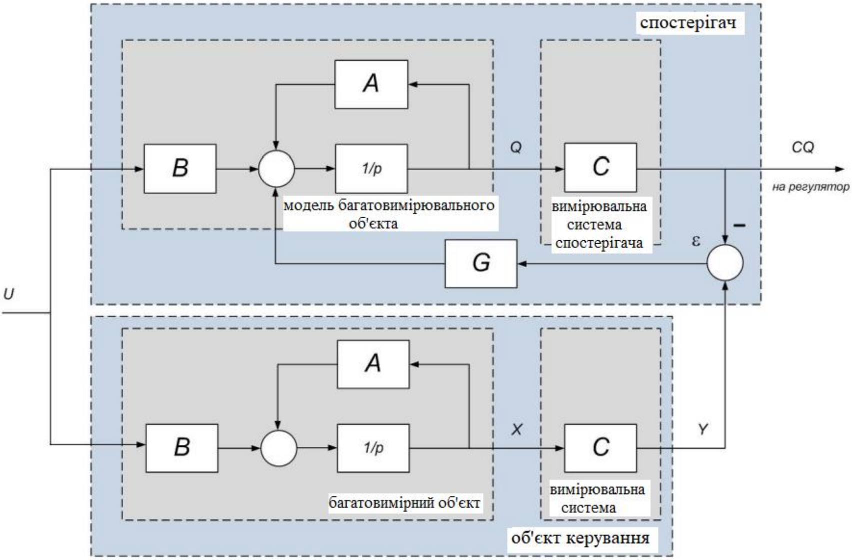

Рисунок 5.2 – Структурна схема взаємодії багатовимірного об’єкта керування та спостерігача

5.2 Відновлення спостерігачем результатів вимірювання вектора стану об’єкта

Помилка відновлення спостерігачем результатів вимірювання вектора стану об’єкта (5.9) характеризує те, наскільки точно інформація, вироблювана спостерігачем, відповідає реальному стану об’єкта керування.

Щоб оцінити, якою є динаміка процесу відновлення інформації про стан об’єкта керування, віднімемо вираз (5.8) від першого виразу системи рівнянь (5.1). Для цієї дії необхідно звести ці рівняння до векторів *Y* і *CQ*. У результаті одержимо матричне диференціальне рівняння *зміни помилки ε* відновлення спостерігачем результатів вимірювання вектора стану об’єкта в процесі функціонування об’єкт керування + спостерігач:

$$\varepsilon^{/} = (A - GC)\varepsilon. \qquad (5.11)$$

Розв’язанням цього диференціального рівняння буде такий вираз:

$$\varepsilon = e^{(A-GC)t}\varepsilon_0 \,. \tag{5.12}$$

Аналізуючи вираз (5.12), можна зробити такі висновки:

1) у разі правильного задання матриці G результати вимірювання вектора стану об’єкта керування можуть бути повністю відновлені спостерігачем із часом із нульовою помилкою незалежно від початкової неузгодженості векторів стану об’єкта керування та спостерігача ε_0, тобто $\varepsilon \to 0$ за $t \to \infty$;

2) процес відновлення результатів вимірювання вектора стану об’єкта керування повністю залежатиме від геометрії розміщення коренів характеристичного рівняння спостерігача. Геометрія розміщення «сузір’я» коренів щодо межі стійкості визначатиме якість процесу відновлення.

6 РЕДУКОВАНИЙ СПОСТЕРЕЖУВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ

Очевидним є те, що спостерігач повного порядку здебільшого є надмірним. Він унаслідок своїх основних особливостей на виході формує повну інформацію про стан відповідного багатовимірного об'єкта керування, навіть якщо немає необхідності. У той самий час потрібна інформація може бути одержана безпосереднім перетворенням змінних стану вимірювальною системою реального об'єкта без використання відповідних обчислювальних ресурсів підсистеми спостерігача. Цієї надмірності можна уникнути, якщо редукувати (зменшити) спостерігач повного порядку до рівня пристрою, який у процесі свого функціонування буде заповнювати результати перетворень змінних стану реального об'єкта керування відповідною вимірювальною системою рівня повної інформації про його стан. Такий пристрій називають *редукованим спостережувальним пристроєм*.

У разі редукованого спостережувального пристрою для розмірного вектора вихідних сигналів Y достатньо синтезувати пристрій ідентифікації розмірності $(n-r)$, що характеризується вектором стану розмірності n.

Нехай досліджуваний об'єкт керування чи механізм описаний системою диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} X' = AX + BU, \\ Y = CX. \end{cases} \tag{6.1}$$

Тоді в цьому разі r виходів об'єкта лінійно незалежні, це еквівалентне тому, що ранг матриці C дорівнює r. Оцінювання всього вектора станів реального об'єкта керування X можна одержати з рівняння

$$\begin{bmatrix} Z \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} \hat{X},$$

де $\hat{X}$ – повністю відновлений вектор стану об'єкта;

Y – виміряні змінні стани об’єкта;

Z – вектор, що складається зі змінних, відновлених редукованим спостерігачем;

T – матриця типу $(n - r) \times n$, що перетворює вектор стану об’єкта керування X на вектор Z.

З цього рівняння випливає вираз для визначення оцінювання вектора станів досліджуваної системи, що має вигляд

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z \\ Y \end{bmatrix} .$$

Вектор станів досліджуваної системи можна записати таким чином:

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ W \end{bmatrix} ,$$

де W – вектор невимірюваних змінних станів досліджуваної системи, що має розмірність $(n - r)$.

Зводячи матриці A і B до блокової форми, відповідно система рівнянь (6.1) перетворюється на таку систему:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{cases} Y' = A_{11}Y + A_{12}W + B_1U, \\ W' = A_{21}Y + A_{22}W + B_2U, \\ \quad Y = EY + 0W. \end{cases} \tag{6.2}$$

З цих рівнянь випливає рівняння для спостережувального пристрою ідентифікації, яке набирає вигляду

$$\widehat{W'} = (A_{22} - LA_{12})\widehat{W} + L[Y' - A_{11}Y - B_1U] + A_{21}Y + B_2U , \tag{6.3}$$

де $\widehat{W}$ – вектор виходів спостерігача розмірністю $(n - r)$;

L – матриця, що визначає розміщення коренів характеристичного полінома спостережувального пристрою.

Структурна схема спостережувального пристрою, побудованого на базі рівняння (6.3), наведена на рисунку 6.1.

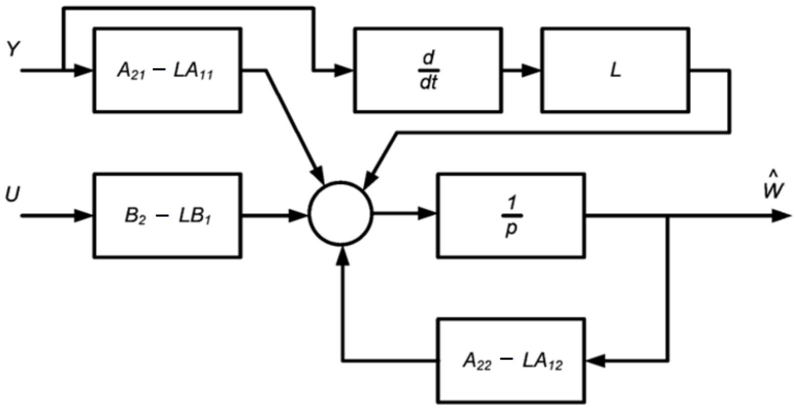

Рисунок 6.1 – Структурна схема редукованого пристрою ідентифікації, що використовує похідні вимірюваних координат

Операції диференціювання вектора вимірюваних змінних пристрою можна уникнути, якщо використовувати перетворене рівняння вигляду (6.4), еквівалентно перенесенню відповідного суматора через інтегратор за напрямком поширення сигналу. Такий пристрій ідентифікації називають пристроєм другого типу. Він базується на рівнянні вигляду

$$Z^{/} = (A_{22} - LA_{12})Z + L[A_{22} - LA_{12}]Y + (A_{21} - LA_{11})Y + (B_2 - LB_1)U, \tag{6.4}$$

де $Z = \widehat{W} - LY$ – вектор стану спостережувального пристрою другого типу.

У результаті структурна схема спостерігача ідентифікації другого типу набирає вигляду, наведеного на рисунку 6.2.

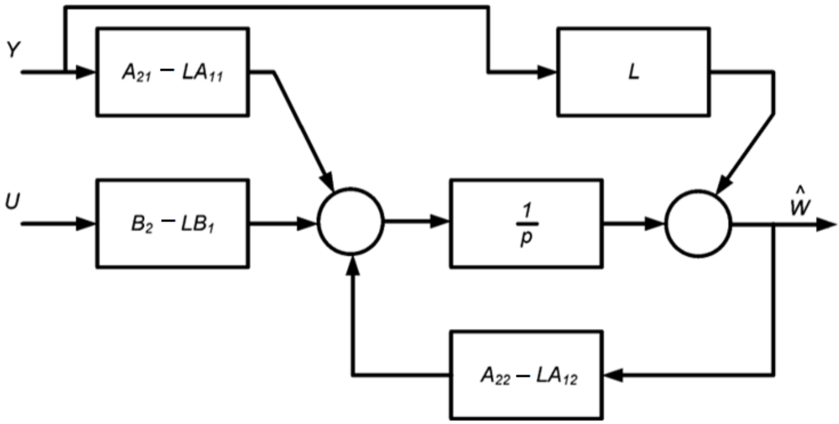

Рисунок 6.2 – Структурна схема редукованого пристрою ідентифікації другого типу

Загалом послідовність синтезування редукованого пристрою ідентифікації змінних стану багатовимірного об'єкта керування можна навести в такому вигляді:

– перевірити спостережуваність вихідної системи за рангом матриці її спостереження;

– оцінити корені характеристичного полінома матриці A;

– вибрати елементи матриці L так, щоб корені відповідного характеристичного полінома забезпечували закінчення перехідних процесів пристрою ідентифікації за необхідний час;

– визначити параметри матриць взаємодії пристрою ідентифікації зі спостережуваною системою.

Одержані співвідношення для визначення структури і параметрів спостережувальних пристроїв дозволяють оцінити величини компонент вектора стану системи керування, безпосереднє вимірювання яких не є можливим. Їх використання дозволяє розширити можливості систем керування різними керованими механізмами.

ПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які системи автоматичного керування вважають багатовимірними?
2. Що таке лінійна багатовимірна стаціонарна система?
3. Що таке лінійна багатовимірна нестаціонарна система?
4. Чим визначається стан багатовимірної динамічної системи чи об’єкта?
5. Які види рівнянь лінійного багатовимірного об’єкта чи системи ви знаєте?
6. Перелічіть основні матриці-параметри, використовувані під час матричного описання багатовимірних об’єктів чи систем.
7. Що таке вектор спостереження за багатовимірним об’єктом чи системою?
8. Що таке матрична передатна функція багатовимірного керування?
9. Як одержати матричну передатну функцію багатовимірного об’єкта керування?
10. Наведіть приклад подання багатовимірного об’єкта в матричному вигляді.
11. Як можна керувати станом багатовимірного об’єкта чи системи?
12. Які багатовимірні системи вважають керованими?
13. Як оцінити керованість багатовимірної системи?
14. Що таке матриця керованості багатовимірної системи?
15. Які багатовимірні системи вважають спостережуваними?
16. Як оцінити спостережуваність багатовимірної системи?
17. Що таке матриця спостереження багатовимірної системи?
18. Які багатовимірні системи вважають дуальними одна до іншої?
19. Наведіть приклад оцінювання керованості багатовимірної системи.
20. Наведіть приклад оцінювання спостережуваності багатовимірної системи.

21. Наведіть математичну умову стійкості багатовимірних систем.

22. Як записати характеристичну матрицю багатовимірної системи чи об’єкта?

23. Наведіть приклад аналізування стійкості багатовимірного об’єкта чи системи.

24. Яким є основний принцип модального керування багатовимірними об’єктами?

25. Перелічіть основні стандартні форми характеристичних рівнянь систем.

26. Що є біноміальними стандартними формами характеристичних рівнянь систем?

27. Які особливості розміщення коренів у біноміальних стандартних формах характеристичних рівнянь систем?

28. Що є стандартними формами Баттерворта характеристичних рівнянь систем?

29. Якою є специфіка розміщення коренів стандартних форм Баттерворта характеристичних рівнянь систем?

30. Наведіть приклади стандартних форм характеристичних рівнянь систем, що забезпечують мінімум різних інтегральних оцінок якості відповідних перехідних процесів.

31. Що таке кореневі показники якості перехідних процесів систем автоматичного керування?

32. Перелічіть основні кореневі показники якості перехідних процесів систем автоматичного керування.

33. Якою є основна специфіка розрахування параметрів багатовимірних регуляторів?

34. Наведіть приклад розрахування параметрів багатовимірного регулятора з урахуванням принципів модального керування.

35. Що таке пристрій спостереження або спостерігач?

36. Як математично можна описати багатовимірний спостережувальний пристрій?

37. Що таке матриця підналаштування спостерігача?

38. Що вважають спостерігачем повного порядку багатовимірного об’єкта керування?

39. Як взаємодіють багатовимірний об’єкт керування та його спостерігач?

40. Що таке помилка відновлення спостерігачем результатів вимірювання вектора стану об’єкта керування?

41. Яка загальна структурна схема спостерігача?

42. Що таке редукований пристрій спостереження?

43. Який алгоритм синтезування редукованого спостерігача?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методи сучасної теорії управління : підруч. / А. П. Ладанюк та ін. – Київ : Вид-во «Ліра-К»; 2019. – 368 с.

2. Основи теорії авторегулювання : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні компоненти і системи» / Д. А. Миколаєць, К. С. Клен, Ю. С. Ямненко – Електронні текстові дані. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 216 с.

Електронне навчальне видання

Кулінченко Георгій Васильович,
Павлов Андрій Володимирович
Леонтьєв Петро Володимирович

БАГАТОВИМІРНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Конспект лекцій
для студентів спеціальності
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
освітнього ступеня «магістр»
усіх форм навчання

Відповідальний за випуск П. В. Леонтьєв
Редактор С. М. Симоненко
Комп'ютерне верстання Г. В. Кулінченка, П. В. Леонтьєва

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 2,85. Обл.-вид. арк. 2,21.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.