

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ  
ТА ЕНЕРГОЕФЕКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ ГІДРОАЕРОМЕХАНІКИ

## **КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

на тему:

**«Статичний та динамічний розрахунок ущільнень з плаваючими  
кільцями»**

Виконав: студент групи КМ.м-11  
спеціальності 131 Прикладна механіка  
ОПП «Комп'ютерна механіка»  
Олексій БАЄНКО

Керівник асист. Олександр ПОЗОВНИЙ

Рецензент Олександр ЧЕРЕВКО

Суми 2022



## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра: 58 с., 13 рис., 11 табл., 13 дж.

Об'єкт досліджень – ущільнення з плаваючими кільцями.

Предмет – статичні та динамічні характеристики ущільнення, вібраційні характеристики ротора під впливом ущільнень.

Мета роботи – статичний та динамічний розрахунок ущільнень з плаваючими кільцями та дослідження їх впливу на динаміку ротора.

Метод дослідження – аналітичний розрахунок, розв'язування та аналіз диференціальних рівнянь коливального руху диску та кільця.

Ущільнення з плаваючими кільцями представляють собою сукупність торцевого та шпаринного ущільнень. У роботі показано, що однією з умов використання ущільнень з плаваючими кільцями є виконання умов самоцентрування, тобто перевищення максимальної центруючої сили в кільцевому зазорі над силою тертя на контактній торцевій поверхні. У роботі виконаний аналіз вимушених коливань таких ущільнень, побудовані амплітудні та фазові частотні характеристики. Проведений аналіз статичної та динамічної стійкості коливань ущільнень під дією кінематичного збудження зі сторони вала та визначений вплив основних параметрів на межі стійкості.

У роботі було проведено дослідження впливу ущільнень з напіврухомими кільцями на динаміку ротора, виявлено основні залежності власних частот коливань ротора від інерційних, гіроскопічних, гідростатичних сил; проведений аналіз впливу залежності дросельованого на ущільненнях перепаду тиску від частоти обертання ротора. Виведені основні умови стійкості коливань ротора.

Прогнозні припущення про розвиток об'єкта дослідження – розширення областей застосування ущільнень з плаваючими кільцями.

УЩІЛЬНЕННЯ З ПЛАВАЮЧИМИ КІЛЬЦЯМИ, ГІДРОДИНАМІЧНА СИЛА, САМОЦЕНТРУВАННЯ КІЛЬЦЯ, РОТОР, ДРОСЕЛЬОВАНИЙ ПЕРЕПАД ТИСКУ, КОНСЕРВАТИВНА СИСТЕМА.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
1. ПРИНЦИП РОБОТИ ТА РОЗРАХУНКОВА СХЕМА .....	7
1.1 Конструкція та принцип роботи ущільнення .....	7
1.2 Розрахункова схема ущільнення та основні припущення.....	8
1.3 Висновок.....	14
2. СТАТИЧНИЙ ТА ДИНАМІЧНИЙ РОЗРАХУНОК .....	15
2.1 Статичний розрахунок .....	15
2.2 Динамічний розрахунок.....	19
2.2.1 Рівняння динаміки кільця.....	19
2.2.2 Вимушені коливання кілець ущільнення.....	22
2.2.3 Динамічна стійкість .....	24
2.3 Висновок.....	26
3. ОЦІНКА ВПЛИВУ УЩІЛЬНЕНЬ З ПЛАВАЮЧИМИ КІЛЬЦЯМИ НА ДИНАМІКУ РОТОРА.....	28
3.1 Розрахункова схема .....	28
3.2 Аналіз динаміки ротора в повітрі .....	29
3.3 Радіальні коливання ротора в жорстких шпаринних ущільненнях.....	32
3.3.1 Власні частоти консервативної системи.....	34
3.3.2 Власні частоти неконсервативної системи.....	36
3.3.3 Власні частоти радіальних коливань ротора у випадку залежності дроселюючого перепаду тиску від частоти обертання .....	39
3.3.4 Критичні частоти коливань .....	40
3.4 Аналіз стійкості коливань.....	46
3.5 Амплітудні та фазові частотні характеристики.....	48
3.6 Висновок.....	52
ВИСНОВКИ.....	54
Список літератури .....	57

## ВСТУП

Проблема ущільнення роторів, що працюють за значних обертів у місцях виходу з корпусу за великих тисків та окружних швидкостей представляє значні складнощі та не може бути вирішена за допомогою простих ущільнень традиційних типів[1,2]. У доцентрових компресорних машинах, працюючих на значних обертах енергетичних насосах, у турбонасосних агрегатах енергетичних установок та інших роторних машинах стає доцільним використання ущільнень з плаваючими кільцями. Це пояснюється простотою їх конструкції та можливістю за належного доведення забезпечити необхідну надійність та герметичність.

Ущільнення з плаваючими кільцями представляє собою сукупність торцевого та шпаринного ущільнення. Внаслідок можливості плаваючого кільця центруватися відносно вала, що обертається завдяки гідродинамічним силам в кільцевій шпарині, радіальні зазори можна виконувати достатньо малими і тим самим значно зменшити витіки. Так як плаваюче кільце не обертається, то значно зменшується потужність тертя на торцевих контактних поверхнях та знімається проблема їх охолодження, яка є актуальною для звичайних механічних торцевих ущільнень. Переваги використання ущільнень з плаваючими кільцями реалізуються лише за виконання певних умов, тому метою роботи є визначення умов самоцентрування кілець, їх статичної та динамічної стійкості, що є основою статичного та динамічного розрахунків.

Варіант роботи кільця, за якого не виконується умова самоцентрування – напіврухоме кільце – є найбільш простим та надійним. Плаваюче кільце працює як нерухоме шпаринне ущільнення, а гідродинамічні сили, що виникають в кільцевому зазорі, цілком передаються на ротор, попереджуючи його вібраційний стан. За рахунок правильного вибору форми зазора, можна збільшувати коефіцієнти гідростатичної жорсткості та демпфірування і тим самим зменшувати амплітуди поперечних коливань ротора. Ущільнення з напіврухомими кільцями дозволяють при певних умовах виключити співударяння вала та кільця навіть при малих зазорах між ними.

Оцінити вплив гідродинамічних характеристик таких ущільнень на власні та критичні частоти парціальних систем, на їх стійкість та на амплітуди вимушених коливань дозволяє аналіз радіальних коливань ротора. Останній дозволяє виявити найбільш важливі закономірності руху реальних роторів.

Об'єктом досліджень даної роботи є ущільнення з плаваючими кільцями, тоді як предмет досліджень – статичні та динамічні характеристики ущільнення, вібраційні характеристики ротора під впливом ущільнень. Серед методів, використаних у роботі – аналітичний розрахунок, розв'язування та аналіз диференціальних рівнянь коливального руху диску та кільця.

Основні задачі розрахунку – провести статичний розрахунок ущільнень з плаваючими кільцями (визначити умову самоцентрування кільця та умову статичної стійкості); провести динамічний розрахунок (визначити умови динамічної стійкості, побудувати амплітудні та фазові частотні характеристики); оцінити основні вібраційні характеристики ротора в ущільненнях з напіврухомими кільцями.

У першому розділі представлена розрахункова схема ущільнення з плаваючими кільцями, розглянуті основні особливості роботи таких ущільнень.

У другому розділі виконаний статичний та динамічний розрахунок ущільнень з плаваючими кільцями, проаналізовані умови статичної та динамічної стійкості коливань кілець.

Третій розділ присвячений оцінці впливу ущільнень на вібраційні характеристики ротора, визначені власні та критичні частоти обертання ротора в жорстких ущільненнях, визначені основні умови стійкості коливань, побудовані амплітудні та фазові частотні характеристики.

Четвертий розділ присвячений охороні праці. У ньому приводиться огляд небезпечних зон на виробництві та найнеобхідніших засобів захисту.

## 1. ПРИНЦИП РОБОТИ ТА РОЗРАХУНКОВА СХЕМА

### 1.1 Конструкція та принцип роботи ущільнення

Ущільнення з плаваючими кільцями[3] (рис.1.1) представляє собою комбінацію кільцевого дроселя В (безконтактне шпаринне ущільнення) і торцевого контакту С, що виконує роль механічного торцевого ущільнення. Дросель В утворений поверхнею обертового вала 1 і внутрішньої циліндричної поверхнею плаваючого кільця 4. Попереднє притиснення кільця до опорної поверхні кришки 2 здійснюється пружними елементами (пружинами) 5, розташованими у втулці 6, закріпленої в корпусі 7.

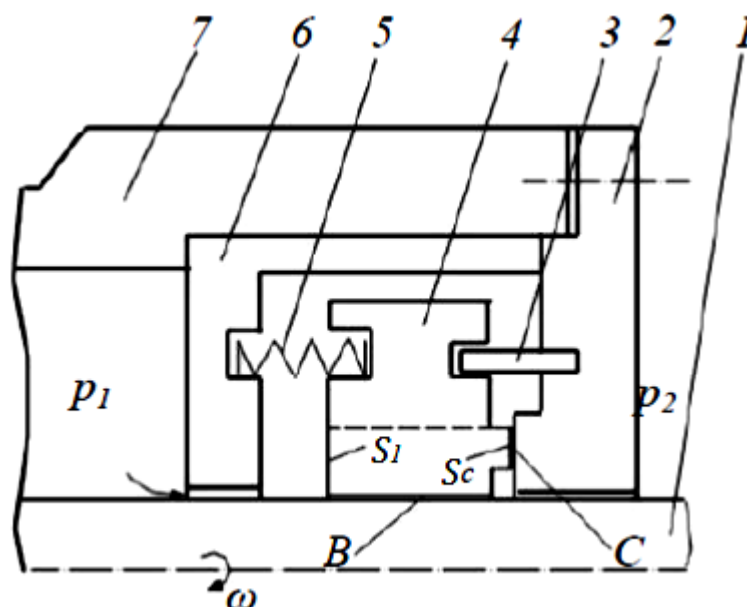


Рисунок 1.1 – Схема ущільнення з плаваючими кільцями

За рахунок ущільнюваного тиску  $p_1$  на навантажувальній поверхні  $S_1$  створюється осьова сила  $F = S_1 p_1$ , що забезпечує необхідну щільність торцевого контакту С. Радіальна гідродинамічна сила  $F_y$ , що виникає в шпаринному ущільненні В та пропорційна ексцентриситету кільця відносно вала, сприяє самоцентруванню кільця, якщо за величиною вона перевищує силу тертя  $T = f F_c$  в торцевому контакті. Герметичність торцевого стику С залежить від відношення контактного тиску  $p_c = F_c / S_c$  до ущільнюваного тиску  $p_1$ .

Контактний тиск, у свою чергу, визначається коефіцієнтом навантаженості. Коли немає протитиску ( $p_2 = 0$ ),  $p_c = kp_1$ ,  $k = S_1 / S_c$ . З механізму роботи ущільнення впливає, що кільце плаває, якщо виконується умова самоцентрування, тобто  $F_{y_{max}} > T$ .

## 1.2 Розрахункова схема ущільнення та основні припущення

Кільце представляє собою систему з п'ятьма степенями свободи: кільце може здійснювати радіальні та кутові коливання відносно нерухомих осей  $x, y$  та осьові коливання вздовж осі  $z$  (рисунок 1.2). До кільця через шар ущільнюваної рідини в кільцевому зазорі прикладене кінематичне збудження зі сторони валу.  $e_1, e_2$  – зміщення центрів вала та кільця відносно центра вала;  $O'_1$  і  $O'_2$  – центри вала та кільця в перетині  $z = l/2$ . Вісь  $O\eta$  рухомої системи координат  $\xi O\eta$  паралельна лінії центрів  $O_1 O_2$ . На рисунку 1.2 в) показані кути перекоосу осей вала  $\vartheta_1$  та кільця  $\vartheta_3$  та їх складові відносно  $x$  та  $y$ .

Осьові зміщення вала при розрахунку не враховувалися, так як кільце прижатє до корпусу ущільнюваним тиском, а кути повороту  $\vartheta_{zx}, \vartheta_{zy}$  малі. Надійність ущільнень з плаваючими кільцями буде забезпечена, якщо амплітуди вимушених коливань відносно вала не перевищують радіального зазора, тобто виключається контакт між кільцем та ротором. Тому при розрахунку ущільнень окрім перевірки статичних умов самоцентрування та умов при яких не розкривається торцевий стик, необхідно визначити власні частоти та амплітуди коливань кілець, а також досліджувати їх динамічну стійкість.



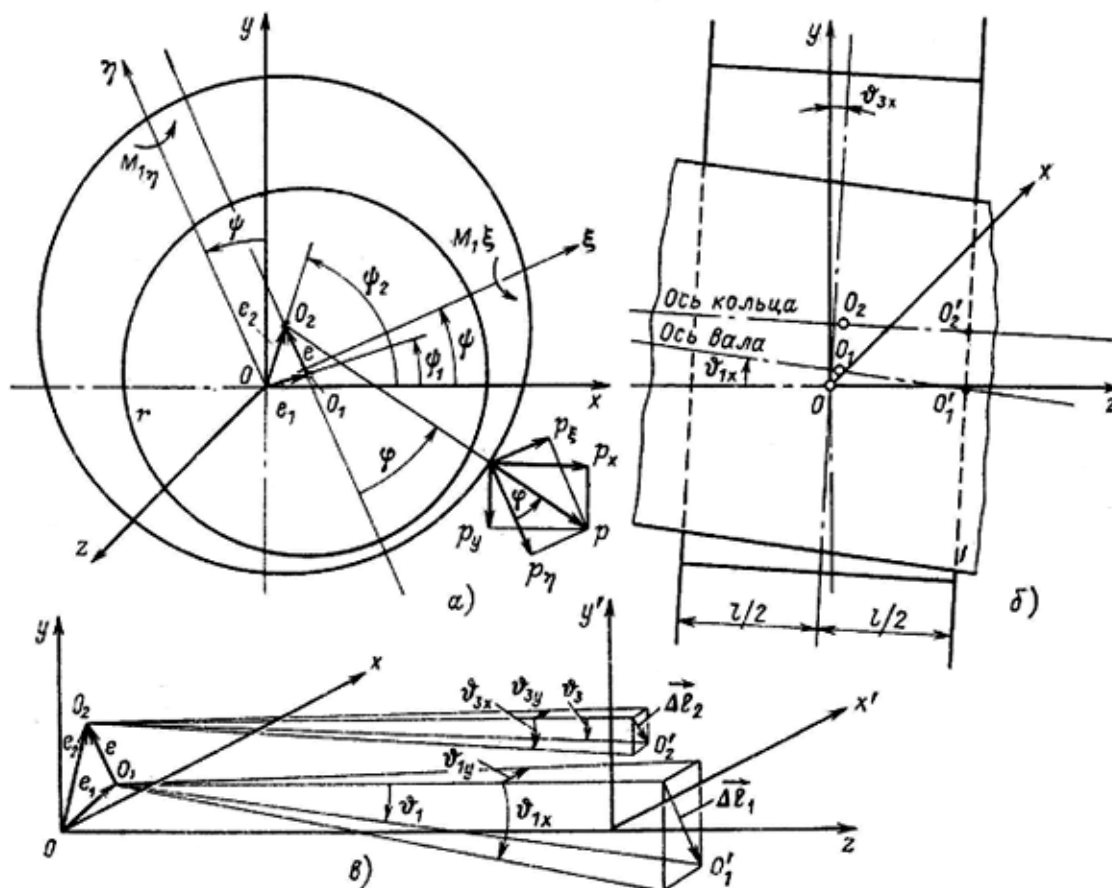


Рисунок 1.2 – Кільцевий дроселючий зазор

а) поперечний перетин, б) повздовжній перетин, в) кути перекосу осей вала та кільця ті їх складові

При статичному та динамічному розрахунках плаваючих ущільнень, були використані вирази для гідродинамічних сил та моментів в кільцевих та торцевих дроселях (1.1).

$$\begin{cases} F_{\xi} = -a_{11}\ddot{\xi} - a_{21}\dot{\xi} - a_{31}\dot{\eta} - a_{41}\eta + \Delta F_{\xi} \\ F_{\eta} = -a_{11}\ddot{\eta} - a_{21}\dot{\eta} + a_{31}\dot{\xi} + a_{41}\xi + \Delta F_{\eta} \end{cases} \quad (1.1)$$

де  $\eta = -e$ ,  $\xi = 0$  (рисунок 1.3),  $\Delta F_{\xi}$ ,  $\Delta F_{\eta}$  – добавки, обумовлені перекосом осі шпаринного ущільнення на кут  $\vartheta$ , за умові, що вісі розташовані в одній площині, що проходить через лінію центрів ( $\vartheta_1 = \vartheta_{1\xi}, \vartheta_{1\eta} = 0$ ):

$$\begin{cases} \Delta F_\xi = -a_{11}\ddot{\Delta}_\xi - a_{21}\dot{\Delta}_\xi - a_{31}\dot{\Delta}_\eta - a_{41}\Delta_\eta \\ \Delta F_\eta = -a_{11}\ddot{\Delta}_\eta - a_{21}\dot{\Delta}_\eta + a_{31}\dot{\Delta}_\xi + a_{41}\Delta_\xi \end{cases} \quad (1.2)$$

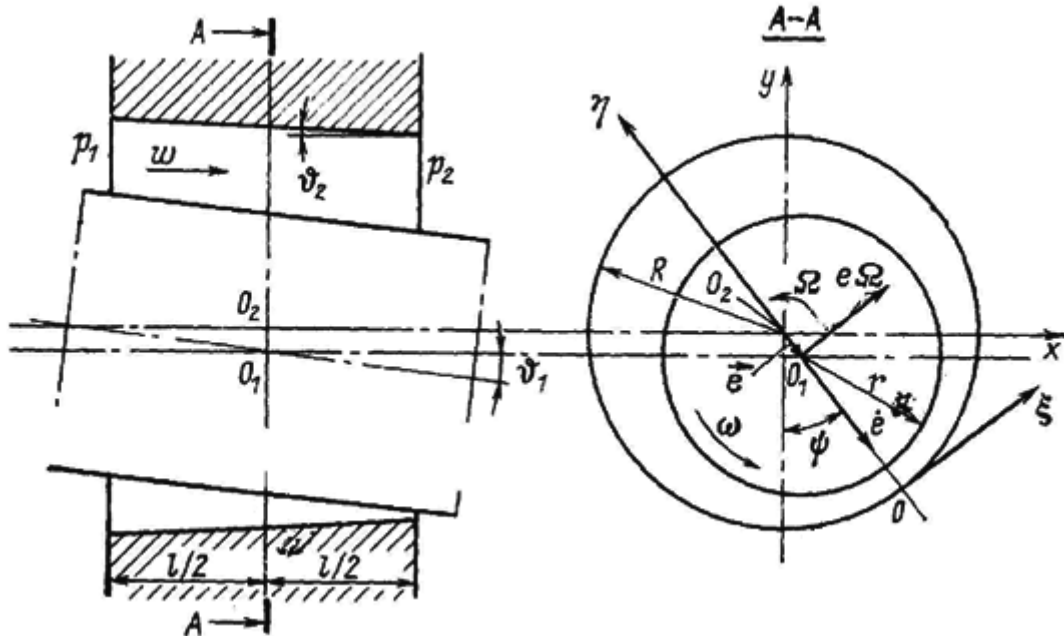


Рисунок 1.3 — Схема торцевого дроселя

Коефіцієнти, що входять до формул 1.1 та 1.2 і їх значення подані в таблиці 1.1. Розрахунок проводиться для ущільнення з наступними параметрами: конусність втулки  $\vartheta_2 = 0.0036$ , перекіс кільця  $\vartheta_3 = 0.0017$ , конусність торцевого зазора  $\vartheta_4 = 0$ , перепад тиску на кільцевому та торцевому дроселях = 1.5 МПа, довжина кільцевого дроселя – 0.025 м, середній радіальний зазор  $h_0 = 0.15 \cdot 10^{-3}$  м, середній торцевий зазор  $h_t = 5 \cdot 10^{-6}$  м, довжина торцевого дроселя  $l_c = 10^{-3}$  м, внутрішній радіус кільця  $r = 0.09$  м, маса кільця  $m = 1.04$  кг. Рідина – вода, густина  $\rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , динамічний коефіцієнт в'язкості  $\mu = 10^{-3}$  Па · с, тип течії – автомодельна область турбулентної течії (показник степеню та постійна у формулі Блазіуса  $n = 0, C = 0.04$ ). Номінальна частота обертання ротора  $\omega_n = 300\text{с}^{-1}$ .

Таблиця 1.1 – Коефіцієнти гідродинамічних сил

Коефіцієнт	Значення коефіцієнту	Коефіцієнт	Значення коефіцієнту
$\theta_2 = \vartheta_2 l / 2h_0$	0.3	$\zeta_0 = \lambda_0 l / 2h_0$	3.33
$a_{11} = \frac{\pi r l^3}{12h_0} \rho (1 - 2\theta_2)$	0.98	$\lambda_0 = 0.04 Re_0^{-0}$	0.04
$k_c = \frac{\pi r l^3 \mu \lambda_0 Re_0}{h_0^3 96}$	$4.9 \cdot 10^3$	$a_{21} = k_c (1 + 8\theta_2 / \zeta_0)$	$8.44 \cdot 10^3$
$Re_0 = 2\rho h_0 \omega_0 / \mu$	9000	$a_{31} = 0.5 a_{11} \omega$	147.26
$\omega_0 = (2\Delta p / \rho \zeta_0)^{0.5}$	30	$a_{41} = 0.5 k_c \omega (1 - 2.08\theta_2 / \zeta_0)$	$5.99 \cdot 10^5$
$a_{51} = \frac{\pi r l}{2h_0} \Delta p (\theta_2 + \alpha c_1)$	$2.46 \cdot 10^7$	$\alpha = 1.5 (1.2 + \zeta_0)^{-1}$	0.33
$\alpha_{11} = \frac{\pi r l^3}{15h_0} \rho \theta_2$	0.59	$\alpha_{31} = 0.5 \omega \alpha_{11}$	88.36
$\alpha_{21} =$ $= k_c (0.4\theta_2 + 8(1 - \theta_2) / \zeta_0)$	$8.84 \cdot 10^3$	$\alpha_{41} = 0.5 k_c (0.4\theta_2 + c_2 / \zeta_0)$	$1.86 \cdot 10^6$
$\alpha_{51} = \frac{\pi r l}{2h_0} \Delta p (1 + \alpha 0.8)$	$4.47 \cdot 10^7$	$Q_0 = 2r h_0 \pi \omega_0$	$2.55 \cdot 10^{-3}$

Вирази для гідродинамічних сил в нерухомій системі координат описуються формулами 1.3 та 1.4.

$$\begin{cases} F_x = -a_{11}\ddot{x} - a_{21}\dot{x} - a_{31}\dot{y} - a_{41}y - a_{51}x + \Delta F_x \\ F_y = -a_{11}\ddot{y} - a_{21}\dot{y} + a_{31}\dot{x} + a_{41}x - a_{51}y + \Delta F_y \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \Delta F_x = -\alpha_{11}\ddot{\Delta}_x - \alpha_{21}\dot{\Delta}_x - \alpha_{31}\dot{\Delta}_y - \alpha_{41}\Delta_y - \alpha_{51}\Delta_x \\ \Delta F_y = -\alpha_{11}\ddot{\Delta}_y - \alpha_{21}\dot{\Delta}_y + \alpha_{31}\dot{\Delta}_x + \alpha_{41}\Delta_x - \alpha_{51}\Delta_y \end{cases} \quad (1.4)$$

де  $x = -\eta \sin \psi$ ,  $y = \eta \cos \psi$ ,  $\Delta_x = h_0 \theta_{1y}$ ,  $\dot{\Delta}_x = h_0 (\dot{\theta}_{1y} + \Omega \theta_{1x})$ ,  $\ddot{\Delta}_x = h_0 (\ddot{\theta}_{1y} + 2\Omega \dot{\theta}_{1x} - \Omega^2 \theta_{1y})$ ,  $\Delta_y = -h_0 \theta_{1x}$ ,  $\dot{\Delta}_y = -h_0 (\dot{\theta}_{1x} - \Omega \theta_{1y})$ ,  $\ddot{\Delta}_y = h_0 (\ddot{\theta}_{1x} -$

$$-2\Omega\dot{\theta}_{1y} - \Omega^2\theta_{1x}); \vartheta_{1\xi} = \vartheta_1, \vartheta_{1\eta} = 0, \vartheta_{1x} = \vartheta_{1\xi}\cos\psi, \vartheta_{1y} = \vartheta_{1\xi}\sin\psi; \theta_{1x} = \vartheta_{1x}l/2h_0, \theta_{1y} = \vartheta_{1y}l/2h_0.$$

Коефіцієнти  $a_{11}$  та  $\alpha_{11}$  характеризують складові інерційних гідродинамічних сил,  $a_{21}$  та  $\alpha_{21}$  – демпфіруючих,  $a_{31}$  та  $\alpha_{31}$  – гіроскопічних,  $a_{41}$  та  $\alpha_{41}$  – циркуляційних,  $a_{51}$  та  $\alpha_{51}$  – гідростатичних сил, обумовлених ексцентриситетом  $e$  та кутом перекоосу  $\vartheta_1$ .

Вирази для гідродинамічних моментів в кільцевих зазорах відносно нерухомої системи координат, описуються формулами 1.5, 1.6 та 1.7.

$$\begin{cases} M_{1x} = -\beta_{11}\ddot{\Delta}_y + \beta_{21}\dot{\Delta}_y - \beta_{31}\dot{\Delta}_x - \beta_{41}\Delta_y - \beta_{51}\Delta_x + \Delta M_x \\ M_{1y} = -\beta_{11}\ddot{\Delta}_x - \beta_{21}\dot{\Delta}_x - \beta_{31}\dot{\Delta}_y - \beta_{41}\Delta_y + \beta_{51}\Delta_x + \Delta M_y \end{cases}, \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \Delta M_x = -b_{11}\ddot{y} + b_{21}\dot{y} - b_{31}\dot{x} - b_{41}x + b_{51}y \\ \Delta M_y = -b_{11}\ddot{x} - b_{21}\dot{x} - b_{31}\dot{y} - b_{41}y - b_{51}x \end{cases}, \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} M_{2x} = \gamma_{11}(\ddot{\Delta}_{2y} - 2\Omega\dot{\Delta}_{2x} - \Omega^2\Delta_{2y}) + \gamma_{21}(\dot{\Delta}_{2y} - \Omega\Delta_{2x}) - \gamma_{51}\Delta_{2y} \\ M_{2y} = -\gamma_{11}(\ddot{\Delta}_{2x} + 2\Omega\dot{\Delta}_{2y} - \Omega^2\Delta_{2x}) - \gamma_{21}(\dot{\Delta}_{2x} + \Omega\Delta_{2y}) + \gamma_{51}\Delta_{2x} \end{cases}, \quad (1.7)$$

де  $\Delta_x = h_0\theta_y$ ,  $\dot{\Delta}_x = h_0(\dot{\theta}_y + \Omega\Delta_x)$ ,  $\ddot{\Delta}_x = h_0(\ddot{\theta}_y + 2\Omega\dot{\theta}_x - \Omega^2\theta_y)$ ,  $\Delta_y = -h_0\theta_x$ ,  $\dot{\Delta}_y = -h_0(\dot{\theta}_x - \Omega\theta_y)$ ,  $\ddot{\Delta}_y = -h_0(\ddot{\theta}_x - 2\Omega\dot{\theta}_y - \Omega^2\theta_x)$ ;  $\Delta_x, \Delta_y$  – зміщення центру кільця відносно центру вала в перетині  $z = \frac{l}{2}$  через перекіс вісі кільця відносно вісі вала;  $x = x_2 - x_1$ ,  $y = y_2 - y_1$ ,  $x_1, y_1$  – координати центру вала,  $x_2, y_2$  – координати центру кільця.  $\theta_1 = \theta_{1\xi}, \theta_{1\eta} = 0, \theta_3 = \theta_{3\xi}, \theta_{3\eta} = 0, \theta = \theta_\xi = \theta_3 - \theta_1, \theta_x = \theta\cos\psi, \theta_y = \theta\sin\psi, \theta_{3x} = \theta_3\cos\psi_2, \theta_{3y} = \theta_3\sin\psi_2, \varepsilon = \varepsilon_\eta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = (\eta_2 - \eta_1)/h_0, \varepsilon_\xi = 0, \varepsilon_x = x/h_0 = -\varepsilon\sin\psi, \varepsilon_y = y/h_0 = \varepsilon\cos\psi$ .

Вирази та значення коефіцієнтів, що входять до формул 1.5 – 1.7 подані у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Коефіцієнти гідродинамічних моментів

Коефіцієнт	Значення коефіцієнту	Коефіцієнт	Значення коефіцієнту
$\gamma_{11} = \frac{\pi r_c^3 l_c^3}{6 l h_t} \rho (1 + 2\theta_4)$	0.09	$k_{s2} =$ $= 1 + 0.8\alpha_t \left(1 + 3c_3 \frac{r_c}{l_c}\right) +$ $+ 2 \frac{r_c}{l_c} [1 - 0.8(c_3 - 2)\alpha_t] \theta_4$	8.92
$\gamma_{21} = k_{c2} \left[1 - \frac{4l_c}{r_c \xi_t} + \frac{8}{\xi_t} \left(1 - \frac{l_c}{r_c}\right) \theta_4\right]$	$7.01 \cdot 10^8$	$\alpha_t = 1.5(1.2 + \xi_t)^{-1}$	0.10
$\gamma_{51} = k_{s2} \frac{\pi r_c^2 l_c^2}{2 l h_t} \Delta p_t$	$1.34 \cdot 10^7$	$\xi_t = \xi_{t0} + 1.2$	13.2
$Re_{t0} = 2\rho h_t \omega_{t0} / \mu$	150.76	$\xi_{t0} = \lambda_{t0} l_c / 2h_t$	12
$\omega_{t0} = (2\Delta p / \rho \zeta_t)^{0.5}$	15.08	$\lambda_{t0} = c Re_{t0}^{-n}$	0.04
$\theta_3 = \theta_{3t} \frac{l h_t}{l_c h_0}$	0.14	$\theta_{3t} = \frac{\vartheta_3 l_c}{2h_t}$	0.5
$\theta_4 = \frac{\vartheta_4 l_c}{2h_t}$	0	$b_{21} = \frac{l}{5} k_c \theta_2$	7.36
$b_{11} = \frac{\pi r l^4}{180 h_0} \rho \theta_2$	$1.23 \cdot 10^{-3}$	$b_{41} = 0.5 b_{21} w$	$1.1 \cdot 10^3$
$b_{31} = 0.5 b_{11} w$	0.18	$\beta_{11} = b_{11} / \theta_2$	$4.09 \cdot 10^{-3}$
$\beta_{31} = 0.5 \beta_{11} w$	0.61	$\beta_{21} = \frac{l}{32} k_c \left(1 + \frac{128}{3\xi_0} \theta_2\right)$	18.56
$\beta_{41} = 0.5 \beta_{21} w$	$2.78 \cdot 10^3$	$\beta_{51} = \frac{\pi r l^2}{5 h_0} \alpha \Delta p$	$1.17 \cdot 10^5$
$b_{51} = \beta_{51} \left[(c_3 - 1)\theta_2 - \frac{c_3}{3}\right]$	$-3.9 \cdot 10^4$	$c_3$	1

Моменти  $M_1$  та  $\Delta M$  виникають в кільцевому зазорі з конусністю  $\vartheta_2 = 0.0036$ , причому момент  $\Delta M$  обумовлений відносним радіальним рухом кільця та вала при збереженні паралельності їх вісей ( $\theta_1 = \theta_3 = 0$ ).  $M_1$  обумовлений кутовими коливаннями кільця відносно вала, які характеризуються сумарним кутом перекосу їх вісей. Момент  $M_2$  виникає в торцевому зазорі з конусністю  $\theta_4$  (в роботі прийнято  $\theta_4 = 0$ ) через кутові коливання кільця, що не обертається,

відносно корпусу. Коефіцієнти  $b_{11}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\gamma_{11}$  характеризують інерційні складові гідродинамічних моментів,  $b_{21}$ ,  $\beta_{21}$ ,  $\gamma_{21}$  – демпфіруючі,  $b_{31}$ ,  $\beta_{31}$  – гіроскопічні,  $b_{41}$ ,  $\beta_{41}$  – циркуляційні,  $b_{51}$ ,  $\beta_{51}$ ,  $\gamma_{51}$  – гідростатичні складові моментів, обумовлені відповідно ексцентриситетом кільця відносно вала в середньому перетині та перекосом вісей.

### 1.3 Висновок

Із принципу роботи ущільнень видно, що їх переваги реалізуються лише в тому випадку, коли виконується умова самоцентрування, тобто коли максимальна центруюча сила в кільцевому зазорі перевищує силу тертя на контактній торцевій поверхні. Однак якщо ця умова не виконується, під дією співударів з валом кільце легко займає нейтральне положення та забезпечує безконтактну роботу. Для цього достатньо щоб амплітуда коливань вала не перевищувала радіальний зазор.

У процесі роботи на плаваюче кільце діють гідродинамічні сили та моменти, що виникають в щілинному ущільненні та змінюються за величиною та напрямком через радіальні та кутові коливання вала, що обертається. Додатковий момент відносно центру кільця створює сила тертя на торцевій контактній поверхні. Під дією цих сил та моментів, кільце може коливатись у своїй площині (по осям  $Ox$  та  $Oy$ , осьові зміщення не враховуються), а також здійснювати кутові коливання навколо цих осей.

Кільце здійснює вимушені коливання під дією кінематичного збудження зі сторони вала. Маса кільця є малою в порівнянні з масою ротора, тому зворотнім впливом коливань кільця на вібрації ротора можна знехтувати.

## 2. СТАТИЧНИЙ ТА ДИНАМІЧНИЙ РОЗРАХУНОК

### 2.1 Статичний розрахунок

Розглянемо умову рівноваги сил та моментів, що діють на плаваюче кільце. Із гідродинамічних сил та моментів у положенні рівноваги залишаються циркуляційні та гідростатичні складові:

$$\begin{cases} F_\omega = -h_0(a_{41}\varepsilon - \alpha_{41}\theta) \\ F_s = -h_0(a_{51}\varepsilon - \alpha_{51}\theta) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} M_\omega = -h_0[b_{41}\varepsilon - \beta_{41}(\theta_3 - \theta_1)] \\ M_s = h_0[b_{51}\varepsilon - \beta_{51}\theta_1 + (\beta_{51} + \gamma_{51})\theta_3] \end{cases} \quad (2.2)$$

де  $\theta = \theta_1 + \theta_3$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ .

Зовнішніми силами (рисунок 2.1) є сила тяжіння кільця  $mg$ , сила тертя  $T$  на торцевому стику, радіальна  $T_1 = f_1 R$  та осьова  $T_{1z} = f_1 R$  сили тертя на штифті,  $R = M_z/r_1$ , де  $M_z$  – момент тертя в кільцевому зазорі (2.3).

$$M_z = c_f \pi r l r^4 w^2$$

$$c_f = 0.25 \lambda_x, \quad \lambda_x = \bar{c} Re_x^{-\bar{n}}, \quad \bar{c} = 0.008 \quad (2.3)$$

$$Re_x = 2\rho h_0 r w / \mu$$

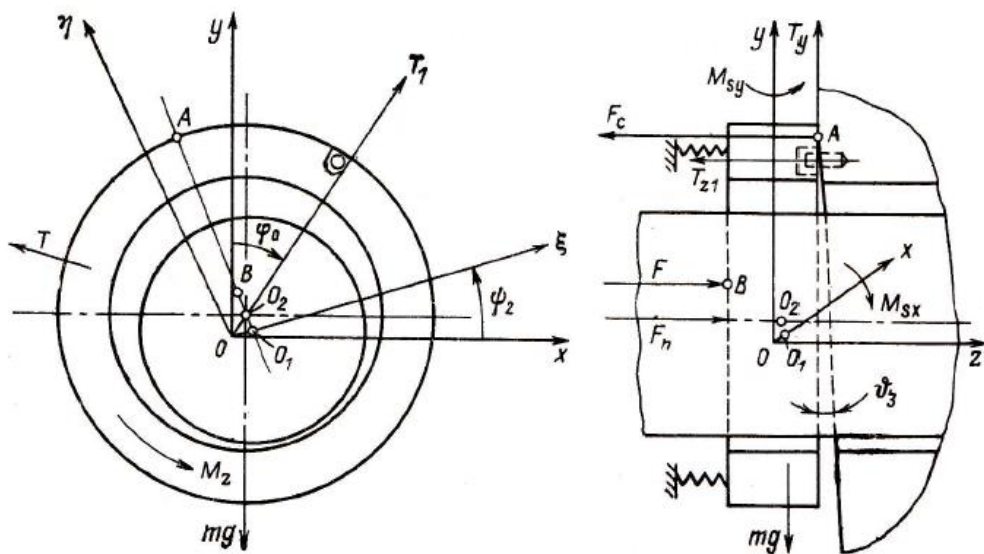


Рисунок 2.1 – Зовнішні сили, що діють на плаваюче кільце

Модуль максимальної сили тертя визначається добутком сили  $F_c$  контактного тиску на коефіцієнт тертя. Для режиму змішаного тертя на торцевому стику, величина сили контактного тиску визначається за наступною формулою:

$$F_c = \Delta p S_c (k - 0.5), \quad (2.4)$$

де  $k = S_1/S_c$ . В розрахунку прийнято, що  $S_1 = S_c$ .

Доки у кільці не з'являється перекус, сила контактного тиску  $F_c$  та результуюча сила тиску  $F$  рівномірно розподілені по контактній поверхні і лінії їх дії співпадають з віссю кільця. З ростом перекоосу, площа контакту стягується в т. А на зовнішньому радіусі кільця, куди і зміщується сила контактного тиску  $F_c$ . При цьому виникає момент  $F_c r_e$ , що протидіє повороту кільця. Перекус викликає також деяке зміщення лінії дії прижимної сили тиску в т. В, у результаті чого відновлюючий момент дещо зменшується.

Визначимо умови, при яких торцевий стик зберігає герметичність ( $\theta_{3x} = \theta_{3y} = 0$ ,  $\theta_x = -\theta_y$ ,  $\theta_x = -\theta_y$ ), а кільце здане самоцентруватися відносно валу за рахунок гідростатичних сил, тобто при умові, що контакт між кільцем та валом, що обертається, не досягається. При наявності перекосів та конусності, умова самоцентрування має вигляд:

$$\varepsilon + \theta \leq 1 - |\theta_2| \quad (2.5)$$

Циркуляційні сили значно менші гідростатичних, тому в статичному розрахунку їх можна не враховувати. Максимальне зовнішнє навантаження діє в напрямку вертикальної осі, якщо штифт розташований на вертикальному діаметрі ( $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $T_{1y} = T_1$ ,  $T_{1x} = 0$ ).

Умова самоцентрування для випадку, коли лінія центрів співпадає з лінією дії рівнодійної зовнішніх сил, описується формулою (2.6). Використовуючи проекцію гідростатичної сили  $F_s$  на лінію центрів (2.1):

$$F_s = -h_0(a_{51}\varepsilon - \alpha_{51}\theta) \geq T + P, \quad (2.6)$$

де  $P = \sqrt{T_1^2 + (mg - R)^2}$ .

Із використанням умови (2.5), умова самоцентрування матиме вигляд:



$$(a_{51} + \alpha_{51})\varepsilon_* > \alpha_{51}(1 - |\theta_2|) + (T + P)/h_0, \quad (2.7)$$

де  $\varepsilon_*$  – допустиме значення допустимого ексцентриситету,  $\varepsilon_* \leq 0.5 \div 0.7$ . Із (2.7), вирази для ексцентриситету та перекосу, при яких виконується умова самоцентрування мають вигляд:

$$\varepsilon_{min} \geq \frac{a_{51}(1 - |\theta_2|) + (T + P)/h_0}{a_{51} + \alpha_{51}} \quad (2.8)$$

$$\theta_{max} \leq 1 - |\theta_2| - \varepsilon_{min}$$

Для розглядуваних параметрів кільця, отримаємо: сила тертя на торцевому стику  $T = 0.199 \cdot 10^3$  Н, модуль сумарної сили  $P = 2.98$  Н, умова самоцентрування  $\varepsilon_{min} \geq 0.47, \theta_{max} \leq 0.23$ . Відносний ексцентриситет не може бути більше  $1 - |\theta_2| = 0.7$ . Якщо  $\varepsilon_{min} > 1 - |\theta_2|$ , то гідростатичні сили не здатні центрувати кільце навіть при відсутності перекосів вала. У цьому випадку центрування кільця може здійснюватись лише за рахунок співударів з валом.

Рівняння рівноваги моментів без циркуляційних складових для найбільш несприятливого випадку, коли вісь  $O\xi$  розташована вертикально, має вигляд:

$$M_s = M_{\xi s} = h_0[(\beta_{51} + \gamma_{51})\theta_3 - \beta_{51}\theta_1 + b_{51}\varepsilon] \geq 0.5l(T + T_1) - r_e T_{1z} \quad (2.9)$$

Гідростатичний момент в торцевому зазорі при, якщо рідина тече від периферії до центру, розкриває торцевий стик, так само як і момент в кільцевому зазорі, обумовлений перекосом кільця. Тому, якщо й існує рівновага моментів при закритому торцевому стику, то воно виявляється не стійким.

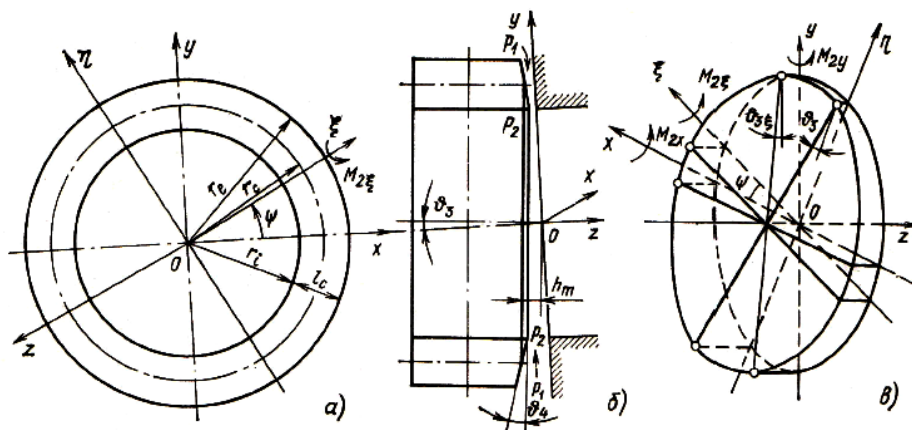


Рисунок 2.2 – Торцевий стик з перекосом

а) вид на контактну поверхню; б) поздовжній перетин; в) кути перекосу в рухомій  $(\xi, \eta)$  та нерухомій  $(x, y)$  системі координат

Умова статичної стійкості відносно поворотів зводиться до умови позитивності коефіцієнту статизму  $\beta_s$ . Для плаваючого кільця дана умова не виконується:

$$\beta_s = \frac{\partial M_i}{\partial \theta_3} - \frac{\partial M_s}{\partial \theta_3} = -h_0(\beta_{51} + \gamma_{51}) < 0 \quad (2.10)$$

де  $M_i$  – момент зовнішніх сил (сил тертя на торцевому стику  $T$  та на штифті  $T_1$ ), не залежний від  $\theta_3$ .

Тому плаваюче кільце не здатне працювати без розкриття торцевого стику. Зі збільшенням осьового навантаження, кільця втрачають здатність до самоцентрування за рахунок радіальних гідростатичних сил, тобто стають напіврухомими. Одночасно через збільшення реакції в контакті та відновлюючого моменту, зменшуються амплітуди їх кутових коливань. Якщо амплітуда коливань вала не перевищує радіального зазора, кільце під дією співударів з валом, займає нейтральне положення, коли у врівноваженому положенні між кільцем та валом контакт відсутній.

Витрати через плаваюче ущільнення визначається головним чином витратами через кільцевий зазор і його можна знайти за формулою (2.11):

$$Q = Q_0 \left( 1 - 8 \frac{h_0}{\lambda_0 l} \theta_2 \right), \quad (2.11)$$

де  $Q_0$  – витрати через канал одиничної ширини,  $Q_0 = 2\pi r h_0 \omega_0$ ,  $\omega_0 = \left( \frac{2\Delta p}{\rho \xi_0} \right)^{0.5}$ .

Для прийнятих параметрів ущільнення, витрати складають  $Q = 1.629 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ .

## 2.2 Динамічний розрахунок

### 2.2.1 Рівняння динаміки кільця

У процесі роботи насоса плаваюче кільце, якщо для нього виконується умова самоцентрування, виконує радіально-кутові коливання під дією збуджень, що передаються на кільце від вібруючого вала через шар ущільнюваної рідини в дроселюючому циліндричному зазорі. Амплітуда коливань повинна бути обмежена настільки, щоб виключити їх співудари з валом, що обертається.

На основі теорем про зміну кількості руху та моменту кількості руху, рівняння радіальних та кутових коливань кільця в нерухомій системі координат мають вигляд:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 &= F_x - a_{п1}x_2 - a_{т1}\dot{x}_2, \\ m\ddot{y}_2 &= F_y - a_{п1}y_2 - a_{т1}\dot{y}_2, \\ I\ddot{\vartheta}_{3x} &= M_{1x} + M_{2x} + M'_{2x} - \beta_{п}\vartheta_{3x}, \\ I\ddot{\vartheta}_{3y} &= M_{1y} + M_{2y} + M'_{2y} - \beta_{п}\vartheta_{3y}, \end{aligned}$$

де проекції радіальних сил  $F_x$  та  $F_y$  визначаються за формулами (1.3) та (1.4), якщо в якості зміщень та кутів повороту прийняти зміщення та кути повороту кільця відносно валу:  $x = x_2 - x_1$ ,  $y = y_2 - y_1$ ,  $\theta_x = \theta_{3x} - \theta_{1x}$ ,  $\theta_y = \theta_{3y} - \theta_{1y}$ ,  $\Delta_x = \Delta_{x2} - \Delta_{x1}$ ,  $\Delta_y = \Delta_{y2} - \Delta_{y1}$ .

Проекції моментів визначаються формулами (1.5) - (1.7).  $m, I$  – маса та екваторіальний момент інерції кільця.  $a_{т1}$  – сумарний коефіцієнт в'язкого тертя на торцевих контактних поверхнях, який для режиму рідинного тертя визначається за формулою:

$$a_{т1} = 2\pi\mu(r_c l_c / h_{т}) \quad (2.12)$$

Із врахуванням виразів для гідродинамічних сил та моментів, рівняння коливань кільця приводяться до вигляду:

$$\begin{aligned}
& \bar{a}_1 \ddot{x}_2 + \bar{a}_2 \dot{x}_2 + a_3 \dot{y}_2 + a_4 y_2 + a_5 x_2 + \alpha_1 \ddot{\Delta}_{x2} + \\
& \quad + \alpha_2 \dot{\Delta}_{x2} + \alpha_3 \dot{\Delta}_{y2} + \alpha_4 \Delta_{y2} + \alpha_5 \Delta_{x2} = \\
& \quad = a_1 \ddot{x}_1 + a_2 \dot{x}_1 + a_3 \dot{y}_1 + a_4 y_1 + a_5 x_1 + \\
& \quad + \alpha_1 \ddot{\Delta}_{x1} + \alpha_2 \dot{\Delta}_{x1} + \alpha_3 \dot{\Delta}_{y1} + \alpha_4 \Delta_{y1} + \alpha_5 \Delta_{x1}, \\
& \bar{a}_1 \ddot{y}_2 + \bar{a}_2 \dot{y}_2 - a_3 \dot{x}_2 - a_4 x_2 + a_5 y_2 + \alpha_1 \ddot{\Delta}_{y2} + \\
& \quad + \alpha_2 \dot{\Delta}_{y2} - \alpha_3 \dot{\Delta}_{x2} - \alpha_4 \Delta_{x2} + \alpha_5 \Delta_{x2} = \\
& \quad = a_1 \ddot{y}_1 + a_2 \dot{y}_1 - a_3 \dot{x}_1 - a_4 x_1 + a_5 y_1 + \\
& \quad + \alpha_1 \ddot{\Delta}_{y1} + \alpha_2 \dot{\Delta}_{y1} + \alpha_3 \dot{\Delta}_{x1} + \alpha_4 \Delta_{x1} + \alpha_5 \Delta_{y1}, \\
& b_1 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + b_3 \dot{y}_2 + b_4 y_2 + b_5 x_2 + \bar{\beta}_1 \ddot{\Delta}_{x2} + \bar{\beta}_2 \dot{\Delta}_{x2} + \\
& \quad + \bar{\beta}_3 \dot{\Delta}_{y2} + \bar{\beta}_4 \Delta_{y2} + \bar{\beta}_5 \Delta_{x2} = \\
& \quad = b_1 \ddot{x}_1 + b_2 \dot{x}_1 + b_3 \dot{y}_1 + b_4 y_1 + b_5 x_1 + \\
& \quad + \bar{\beta}_1 \ddot{\Delta}_{x1} + \bar{\beta}_2 \dot{\Delta}_{x1} + \bar{\beta}_3 \dot{\Delta}_{y1} + \bar{\beta}_4 \Delta_{y1} - \bar{\beta}_5 \Delta_{x1}, \\
& b_1 \ddot{y}_2 + b_2 \dot{y}_2 - b_3 \dot{x}_2 - b_4 x_2 + b_5 y_2 + \bar{\beta}_1 \ddot{\Delta}_{y2} + \bar{\beta}_2 \dot{\Delta}_{y2} - \\
& \quad - \bar{\beta}_3 \dot{\Delta}_{x2} - \bar{\beta}_4 \Delta_{x2} + \bar{\beta}_5 \Delta_{x2} = \\
& \quad = b_1 \ddot{y}_1 + b_2 \dot{y}_1 - b_3 \dot{x}_1 - b_4 x_1 + b_5 y_1 + \\
& \quad + \bar{\beta}_1 \ddot{\Delta}_{y1} + \bar{\beta}_2 \dot{\Delta}_{y1} - \bar{\beta}_3 \dot{\Delta}_{x1} - \bar{\beta}_4 \Delta_{x1} - \bar{\beta}_5 \Delta_{y1},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

де коефіцієнти, що входять до складу рівнянь знаходяться за формулами, поданими в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Таблиця коефіцієнтів диференціальних рівнянь (2.13)

Коефіцієнт	Значення коефіцієнту	Коефіцієнт	Значення коефіцієнту
$a_1 = a_{11}/m$	0.94	$\bar{a}_1 = 1 + a_1$	0.97
$a_2 = a_{21}/m$	$8.1 \cdot 10^3$	$\bar{a}_2 = a_2 + a_{2T}$	$8.1 \cdot 10^3$
$a_3 = a_{31}/m$	141.32	$a_{2T} = a_{T1}/m$	0.34
$a_4 = a_{41}/m$	$5.73 \cdot 10^5$	$b_1 = b_{11}l/2I$	0.04
$a_5 = a_{51}/m$	$2.36 \cdot 10^7$	$b_2 = b_{21}l/2I$	207.7
$\alpha_1 = \alpha_{11}/m$	0.57	$b_3 = b_{31}l/2I$	5.19
$\alpha_2 = \alpha_{21}/m$	$8.48 \cdot 10^3$	$b_4 = b_{41}l/2I$	$3.12 \cdot 10^4$

Продовження таблиці 2.1

Коефіцієнт	Значення коефіцієнту	Коефіцієнт	Значення коефіцієнту
$\alpha_3 = \alpha_{31}/m$	84.79	$b_5 = b_{51}l/2I$	$-1.1 \cdot 10^6$
$\alpha_4 = \alpha_{41}/m$	$1.78 \cdot 10^6$	$\bar{\beta}_1 = 1 + \beta_1 + \bar{\gamma}_1$	3.77
$\alpha_5 = \alpha_{51}/m$	$4.29 \cdot 10^7$	$\bar{\gamma}_1 = \gamma_{11}l/2I$	2.65
$\beta_1 = \beta_{11}l/2I$	0.16	$\bar{\beta}_2 = \beta_2 + \bar{\gamma}_2$	523.58
$\beta_2 = \beta_{21}l/2I$	523.58	$\bar{\gamma}_2 = \gamma_{21}l/2I$	$1.98 \cdot 10^{-6}$
$\beta_3 = \beta_{31}l/2I$	17.31	$\bar{\beta}_3 = \beta_3 + 2\Omega(1 + \bar{\gamma}_1)$	$2.21 \cdot 10^3$
$\beta_4 = \beta_{41}l/2I$	$7.85 \cdot 10^4$	$\bar{\beta}_5 = -\beta_5 + \bar{\gamma}_5 - \Omega^2(1 + \bar{\gamma}_1)$	$-3.81 \cdot 10^8$
$\beta_5 = \beta_{51}l/2I$	$3.3 \cdot 10^6$	$\bar{\beta}_4 = \beta_4 + \Omega\bar{\gamma}_2$	$7.85 \cdot 10^4$
$\bar{\gamma}_5 = -\gamma_{51}l/2I$	$-3.77 \cdot 10^8$	-	-

В операторній формі ( $p = \frac{d}{dt}$  – оператор диференціювання по часу) та в комплексних змінних ( $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}, \Delta_{z_{1,2}} = \Delta_{x_{1,2}} + i\Delta_{y_{1,2}}$ ) рівняння коливань приймають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} D_1(p)z_2 + D_2(p)\Delta_{z_2} &= M_1(p)z_1 + D_2(p)\Delta_{z_1}, \\ D_3(p)z_2 + D_4(p)\Delta_{z_2} &= D_3(p)z_1 + M_2(p)\Delta_{z_1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

де

$$\left. \begin{aligned} D_1(p) &= \bar{a}_1p^2 + \bar{a}_2p + a_5 - i(a_3p + a_4), \\ D_2(p) &= \alpha_1p^2 + \alpha_2p + \alpha_5 - i(\alpha_3p + \alpha_4), \\ D_3(p) &= b_1p^2 + b_2p + b_5 - i(b_3p + b_4), \\ D_4(p) &= \bar{\beta}_1p^2 + \bar{\beta}_2p + \bar{\beta}_5 - i(\bar{\beta}_3p + \beta_4), \\ M_1(p) &= a_1p^2 + a_2p + a_5 - i(a_3p + a_4), \\ M_2(p) &= \beta_1p^2 + \beta_2p - \beta_5 - i(\beta_3p + \beta_4). \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Із (2.14) радіальні та кутові переміщення кільця можна виразити через передаточні функції:

$$z_2 = W_{11}(p)z_1 + W_{12}(p)\Delta_{z_1},$$

$$\Delta_{z2} = W_{21}(p)z_1 + W_{22}(p)\Delta_{z1},$$

де на основі формул Крамера:

$$W_{ij}(p) = \frac{N_{ij}(p)}{D(p)}, i, j = 1, 2; \quad (2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{11}(p) &= D_4M_1 - D_2D_3, \\ N_{12}(p) &= D_2(D_4 - M_2), \\ N_{21}(p) &= D_3(D_1 - M_1), \\ N_{22}(p) &= D_1M_2 - D_2D_3, \\ D(p) &= D_1D_4 - D_2D_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Останній оператор  $D(p)$  – власний оператор системи. На основі (2.16), диференціальні рівняння зв'язаних радіальних та кутових коливань в операторній формі, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} D(p)z_2 &= N_{11}(p)z_1 + N_{12}(p)\Delta_{z1}, \\ D(p)\Delta_{z2} &= N_{21}(p)z_1 + N_{22}(p)\Delta_{z1}, \end{aligned}$$

## 2.2.2 Вимушені коливання кільця ущільнення

Замінюючи у виразах (2.16)  $p = \frac{d}{dt} = i\omega$  отримуємо відповідні частотні передаточні функції, по дійсним та уявним частинам якої можна визначити амплітудні та фазові частотні характеристики кільця:

$$A_{jk}(\omega) = |W_{jk}(i\omega)| = \sqrt{(ReW_{jk})^2 + (ImW_{jk})^2},$$

$$\psi_{jk}(\omega) = \arctg(ImW_{jk}/ReW_{jk}), j, k = 1, 2,$$

де  $A_{11} = e'_2/e_1$ ,  $A_{12} = e''_2/\Delta e_1$ ,  $A_{21} = \Delta e'_2/e_1$ ,  $A_{22} = \Delta e''_2/\Delta e_1$ ;  $e'_2, \Delta e'_2$  – радіальні та кутові зміщення кільця, обумовлені радіальними ( $e_1$ ) зміщеннями вала;  $e''_2, \Delta e''_2$  – складові зміщень кільця, обумовлені перекосом ( $\Delta e_1 = l\vartheta_1/2$ ) осі вала.

Дійсна та уявна частини передаточних функцій (2.16) визначаються за формулами (2.18), а частотні характеристики – (2.19).

$$ReW_{jk} = \frac{U_{jk}U + V_{jk}V}{U^2 + V^2}, ImW_{jk} = \frac{V_{jk}U + U_{jk}V}{U^2 + V^2} \quad (2.18)$$

$$A_{jk}(w) = \left( \frac{U_{jk}^2 + V_{jk}^2}{U^2 + V^2} \right)^{0.5}, \quad (2.19)$$

$$\psi_{jk}(w) = -\arctg \left( \frac{U_{jk}V - V_{jk}U}{U_{jk}U + V_{jk}V} \right),$$

де  $U, V, U_{jk}, V_{jk}$  – дійсні та уявні частини власного оператора  $D(iw)$  та операторів  $N_{jk}(iw)$  відповідно.

Для заданих параметрів кільця були побудовані амплітудна та фазова частотні характеристики (рисунок 2.3).

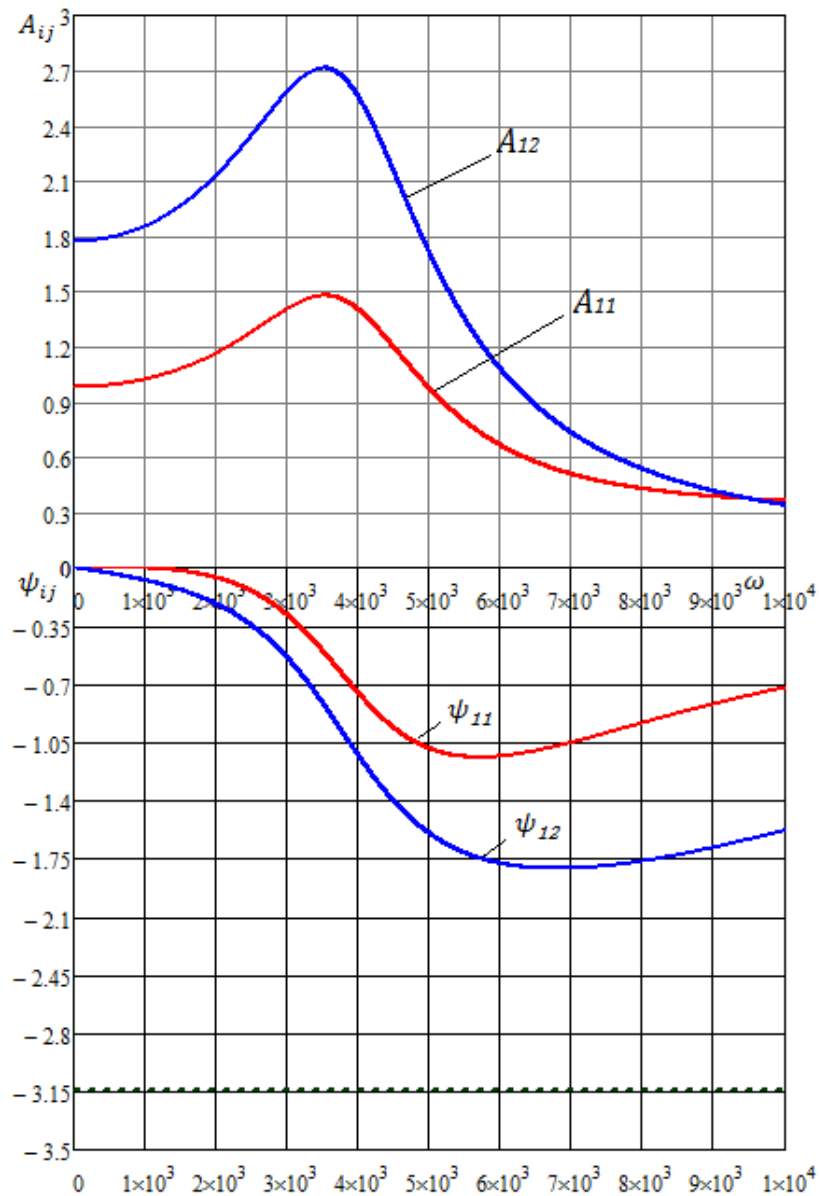


Рисунок 2.3 – Амплітудні та фазові частотні характеристики

На рисунку 2.3 приведені радіальні зміщення кільця, спричинені радіальними зміщеннями вала ( $A_{11}$ ) та радіальні зміщення кільця, обумовлені перекосом осі вала ( $A_{12}$ ).

### 2.2.3 Динамічна стійкість

Стійкість плаваючого кільця можна оцінити за допомогою алгебраїчного критерію Гурвіца. Розділивши дійсну та реальну частини у виразі для власного оператора, отримаємо:

$$D(p) = A_0 p^4 + A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p + A_4 + i(B_1 p^3 + B_2 p^2 + B_3 p + B_4), \quad (2.20)$$

де із врахуванням (2.15) вирази для коефіцієнтів матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} A_0 &= \bar{a}_1 \bar{\beta}_1 - \alpha_1 b_1 \\ A_1 &= \bar{a}_1 \bar{\beta}_2 + \bar{a}_2 \bar{\beta}_1 - \alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1 \\ A_2 &= \bar{a}_1 \bar{\beta}_5 + \bar{a}_2 \bar{\beta}_2 - \alpha_3 \bar{\beta}_3 + \alpha_5 \bar{\beta}_1 - \alpha_1 b_5 - \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 - \alpha_5 b_2 \\ A_3 &= \bar{a}_2 \bar{\beta}_5 - \alpha_3 \bar{\beta}_4 - \alpha_4 \bar{\beta}_3 + \alpha_5 \bar{\beta}_2 - \alpha_1 b_5 + \alpha_3 b_4 + \alpha_4 b_3 - \alpha_5 b_2 \\ A_4 &= -\alpha_4 \bar{\beta}_4 + \alpha_5 \bar{\beta}_5 + \alpha_4 b_4 - \alpha_5 b_5 \\ B_1 &= -\bar{a}_1 \bar{\beta}_3 - \alpha_3 \bar{\beta}_1 + \alpha_1 b_3 + \alpha_3 b_1 \\ B_2 &= -\bar{a}_1 \bar{\beta}_4 - \bar{a}_2 \bar{\beta}_3 - \alpha_3 \bar{\beta}_2 - \alpha_4 \bar{\beta}_1 + \alpha_1 b_4 - \alpha_2 b_3 + \alpha_3 b_2 + \alpha_4 b_1 \\ B_3 &= -\bar{a}_2 \bar{\beta}_4 - \alpha_3 \bar{\beta}_5 - \alpha_4 \bar{\beta}_2 - \alpha_5 \bar{\beta}_3 + \alpha_2 b_4 + \alpha_3 b_5 + \alpha_4 b_2 + \alpha_5 b_3 \\ B_4 &= -\alpha_4 \bar{\beta}_5 - \alpha_5 \bar{\beta}_4 + \alpha_4 b_5 + \alpha_5 b_4 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Необхідною та достатньою умовою стійкості системи, власний оператор якої являє собою комплексний поліном з коефіцієнтами (2.21), є вимога щоб усі діагональні мінори парного порядку  $\Delta_{2j}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) матриці Гурвіца (2.22) були додатні [3].



$$H = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Стійкість кільця можна оцінити за рівняннями незв'язаних радіальних та кутових коливань ( $\alpha_i \ll a_i, b_i \ll \beta_i$ ):

$$\begin{aligned} D_1(p)z_2 &= M_1(p)z_1 + D_2(p)\Delta_{z1}, \\ D_4(p)\Delta_{z2} &= D_3(p)z_1 + M_2(p)\Delta_{z1}. \end{aligned}$$

У виразі для власного оператора системи  $D(i\omega) = D_1(i\omega)D_4(i\omega) - D_2(i\omega)D_3(i\omega)$  другий член характеризує вплив перехресних зв'язків. Якщо  $|D_2(i\omega)D_3(i\omega)| < |D_1(i\omega)D_4(i\omega)|$  то для всіх  $\omega \in (-\infty; \infty)$ , то при асимптотичній стійкості незв'язаних систем, зв'язана система буде також стійка асимптотично. При цьому стійкість зв'язаної системи з деяким запасом буде забезпечуватись, якщо будуть виконуватись умови стійкості незалежних радіальних та кутових коливань. Рівняння вільних радіальних та кутових коливань описуються формулами (2.23):

$$D_1(p)z_2 = 0, \quad D_4(p)\Delta_{z2} = 0 \quad (2.23)$$

Їх стійкість визначається коефіцієнтами операторів  $D_1(p)$  та  $D_4(p)$  (3.4). Складаючи матриці Гурвіца та розкриваючи визначники, отримаємо наступні умови стійкості:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1\bar{a}_2 &> 0, \\ \bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4 + \bar{a}_2^2\bar{a}_5 - \bar{a}_1\bar{a}_4^2 &> 0; \\ \bar{\beta}_1\bar{\beta}_2 &> 0, \\ \bar{\beta}_2\bar{\beta}_3\bar{\beta}_4 + \bar{\beta}_2^2\bar{\beta}_5 - \bar{\beta}_1\bar{\beta}_4^2 &> 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

З (2.24) видно, що інерційні ( $\bar{a}_1, \bar{\beta}_1$ ) та циркуляційні ( $\bar{a}_4, \bar{\beta}_4$ ) сили та моменти можуть порушувати стійкість, а демпфіруючі ( $\bar{a}_2, \bar{\beta}_2$ ), гідростатичні ( $\bar{a}_5, \bar{\beta}_5$ ) стабілізують кільце якщо  $\bar{\beta}_5 > 0$ . Враховуючи зв'язок між коефіцієнтами, (2.24) можна представити у вигляді:

$$\omega < 2 \left( 1 + \frac{a_{2T}}{a_2} \right) \left( \frac{a_5}{1 - a_1 a_{2T}/a_2} \right)^{0,5}, \quad (2.25)$$

а для радіальної стійкості:

$$\omega < 2 \left( 1 + \frac{\bar{\gamma}_2}{\beta_2} \right) \left[ \frac{-\beta_5 + \bar{\gamma}_5}{(1 + \bar{\gamma}_1)(1 + 6\bar{\gamma}_2/\beta_2 + 4\bar{\gamma}_2^2/\beta_2^2) + \beta_1\bar{\gamma}_2/\beta_2} \right]^{0,5} \quad (2.26)$$

Для розглядуваного ущільнення умови динамічної стійкості не виконуються, тобто необхідно застосовувати допоміжні заходи для кутової стабілізації кільця, такі як осьове пружне підтиснення та радіальна пружна підвіска кільця, що сприяють його стабілізації, так як пружні елементи створюють відновлюючий момент пропорційний їх жорсткості.

### 2.3 Висновок

Статичний розрахунок зводиться до запису рівнянь рівноваги системи сил, що діють на кільце. Із умови рівноваги осьових сил була визначена реакція контактної торцевої поверхні  $F_c$  від якої залежить герметичність торцевого стику та здатність кільця до самоцентрування. Для розглянутого ущільнення умова самоцентрування виконується, так як  $\varepsilon_{min} = 0.48 < \varepsilon_*$ . Граничне значення відносного ексцентриситету при якому гідродинамічні сили вже не здатні центрувати плаваюче кільце –  $\varepsilon = 0.7$ .

Від'ємне значення коефіцієнта статизму (умова статичної стійкості) говорить про те, що плаваюче кільце для якого виконується умова центрування не може працювати без розкриття торцевого стику. Зі збільшенням кута повороту  $\theta_3$  утворюється місцевий контакт торцевої поверхні кільця з корпусом, а реакція що при цьому виникає дає відновлюючий момент відносно осі повороту кільця, під дією якого торцевий стик закривається. При роботі насоса, процес розкриття та закриття торцевого стику має періодичний коливальний характер (на кільце діють кінематичні збудження зі сторони вала). У такому випадку контактні напруження призводять до фрикційних втомних руйнувань.

Таким чином, необхідно або підвищити навантаження торцевого стику  $F_c$  щоб умова само центрування не виконувалась і кільце працювало як нерухоме

щільнине ущільнення, здатне центруватись відносно вала під дією співударів (при цьому амплітуда коливань вала в усталеному режимі не повинна перевищувати величину радіального зазору), або за виконання умов самоцентрування, прийняти спеціальні міри для забезпечення виконання умов статичної стійкості. Підвищенню статичної стійкості відносно поворотів кільця сприяє осьове підтиснення та радіальна пружна підвіска кільця. Для підвищення центруючої сили, яка сприяє самоцентруванню кільця, можна використовувати центруючий ефект конфуз орних каналів.

Аналіз вимушених коливань плаваючих кілець дозволяє побудувати амплітудні та фазові частотні характеристики кільця, які дають наочне уявлення про його рух під дією кінематичного збудження зі сторони вала.

Аналіз стійкості коливань дозволяє зробити основні висновки про вплив основних параметрів. Так, перекіс  $\theta_1$  та дифузорність ( $\theta_2 < 0$ ) збільшують амплітуди вимушених коливань та звужують область динамічної стійкості. Кофузорність кільцевого зазору стабілізують кільце. Динамічна стійкість плаваючого кільця забезпечується головним чином шляхом збільшення радіальної ( $a_5$ ) та кутової ( $\beta_{50}$ ) гідростатичної жорсткості та коефіцієнтів демпфірування  $\bar{a}_2, \bar{\beta}_2$ . Збільшення останніх на практиці часто здійснюється завдяки додаткових циліндричних зазорам.

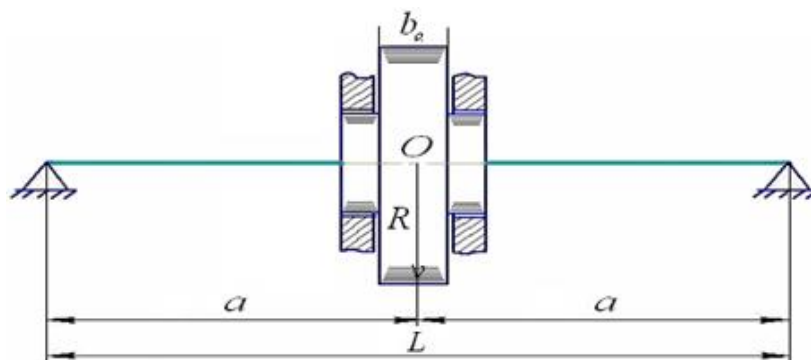
Деякого розширення меж стійкості можна досягти за рахунок радіальної та кутової жорсткості пружної підвіски кільця. Також одним із способів стабілізації є використання торцевого дроселя на тильній стороні кільця. Збільшуючи на ньому перепад тиску, можна забезпечити динамічну стійкість на усіх робочих режимах.

### 3. ОЦІНКА ВПЛИВУ УЩІЛЬНЕНЬ З ПЛАВАЮЧИМИ КІЛЬЦЯМИ НА ДИНАМІКУ РОТОРА

#### 3.1 Розрахункова схема

Оцінимо вібраційний стан ротора з наступними параметрами:  $d = 0.08$  м,  $R = 0.25$  м,  $b_e = 0.04$  м,  $l_c = 0.06$  м; модуль пружності матеріалу та приведена маса ротора  $E_* = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $m = 120$  кг; екваторіальний та полярний моменти інерції, підраховані для приведеної маси та товщини диску  $I = 1.89$  кг · м<sup>2</sup>,  $I_0 = 3.75$  кг · м<sup>2</sup>  $\approx 2I$ ,  $j_0 = 1.98 \approx 2$ . Номінальна робоча частота обертання ротора  $\omega_n = 300$  с<sup>-1</sup>, радіальний та кутовий коефіцієнти зовнішнього демпфування прийняті рівними нулю. Ущільнення з плаваючими кільцями в розрахунку приймаємо таким, для якого не виконується умова самоцентрування, і яке працює як щілинне ущільнення.

В якості спрощеної розрахункової схеми ротора прийнята одномасова симетрична модель, представлена на рисунку 3.1. Розрахункова схема ротора представлена на рисунку 3.2, де  $A_0$  – прогин, вектор якого обертається навколо осі з частотою прицесії,  $a$  – ексцентриситет центра мас диску, вектор якого обертається разом з валом навколо осі вала, що проходить через точку  $O$  з частотою власного обертання  $\omega$ .



$$a = L/2 = 0.75 \text{ м}; L = 1.5 \text{ м}$$

$$R = 0.25 \text{ м}; b_e = 0.04 \text{ м}$$

Рисунок 3.1 – Одномасова симетрична модель ротора

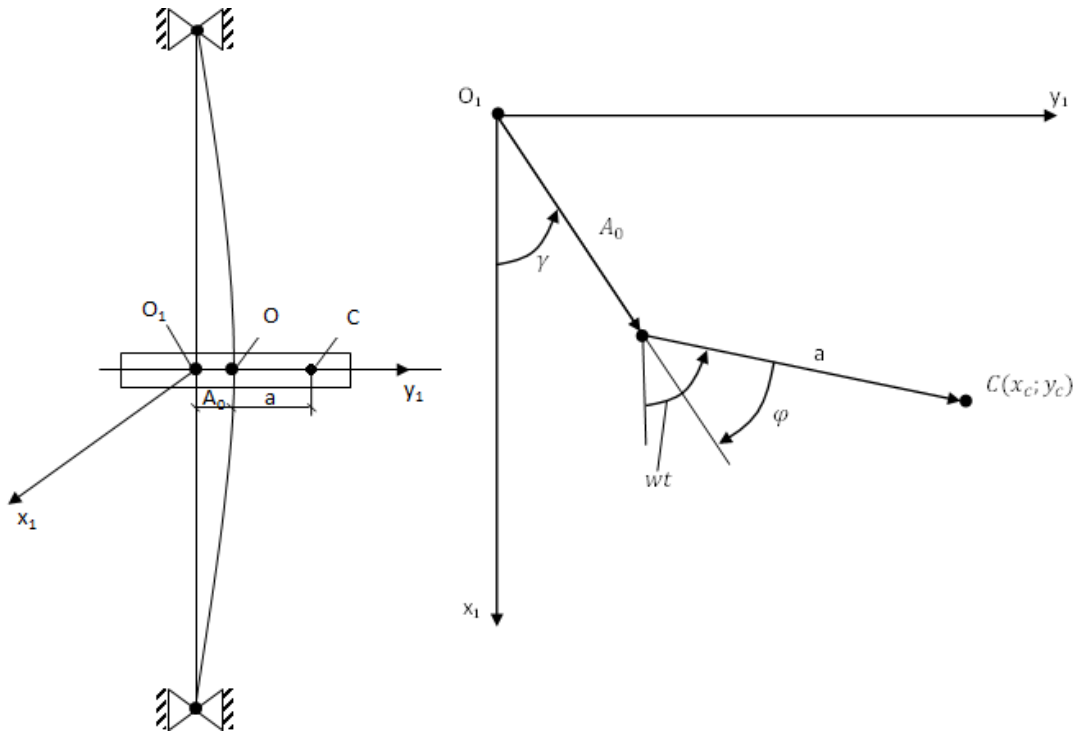


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема симетричного ротора

### 3.2 Аналіз динаміки ротора в повітрі

Рівняння руху ротора в комплексних змінних має вигляд:

$$\ddot{z}_1 + 2n\dot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = a\omega^2 e^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

де  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $x_1 = x_c - a\cos\omega t$ ,  $y_1 = y_c - a\sin\omega t$ ,  $k = \frac{48EI_*}{L^3}$  – коефіцієнт згинальної жорсткості вала,  $I_* [M^4]$  – діаметральний момент інерції перетину вала,  $n = c/2m = 1.7 \cdot 10^{-4} [c^{-1}]$  – питомий (віднесений до подвоєної маси) коефіцієнт демпфірування,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} [c^{-1}]$  – власна частота недемпфірованих коливань ротора. Значення зазначених параметрів наведені в таблиці 3.1. [4]

Таблиця 3.1 – Розраховані параметри коливань ротора

Коефіцієнт	Значення коефіцієнту	Коефіцієнт	Значення коефіцієнту
$k$	$6.005 \cdot 10^6$	$\omega_0$	223.7

Загальний розв'язок дорівнює сумі  $z_1(t) = z(t) + Z(t)$ , де  $z(t)$  – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega_0^2 z = 0,$$

що описує вільний (перехідний рух), викликаний лише збудженням початкових умов;  $Z(z)$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.1), що представляє усталені вимушені гармонічні коливання під дією відцентрової сили неврівноваженої маси.

Частинний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді комплексного числа з амплітудою  $A_0$  та фазою  $\omega t + \varphi$ , зсунутою на кут  $\varphi$  відносно фази зовнішньої сили:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \tilde{A}e^{i\omega t} = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}, \dot{Z} = i\omega Z = i\omega \tilde{A}e^{i\omega t} = \tilde{V}e^{i\omega t}, \\ \ddot{Z} &= (i\omega)^2 Z = -\omega^2 \tilde{A}e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Підставляючи розв'язок (3.2) в рівняння (3.1), отримаємо:

$$\left[ (i\omega)^2 + \frac{c}{m}(i\omega) + \frac{k}{m} \right] A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = a\omega^2 e^{i\omega t}$$

Домножимо ліву та праву частину рівняння на масу  $m$ , отримаємо:

$$[(i\omega)^2 m + c(i\omega) + k] A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = ma\omega^2 e^{i\omega t} = F_a e^{i\omega t}, \quad (3.3)$$

де  $F_a = ma\omega^2$  – амплітуда відцентрової сили.

Відношення реакції коливальної системи до гармонічного впливу при нульових початкових умовах, називається частотною передаточною функцією:

$$W(i\omega) = \frac{Z(t)}{F_a e^{i\omega t}} = \frac{A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}}{F_a e^{i\omega t}} = \frac{A_0}{F_a} e^{i\varphi} = \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (3.4)$$

Модуль даного комплексного числа  $|W(i\omega)| = \frac{A_0}{F_a} = \frac{A_0}{ma\omega^2}$  – амплітудно-частотна характеристика, а фаза  $\varphi(\omega)$  – фазова частотна характеристика.

Якщо перейти до безрозмірної частоти обертання ротора  $\nu = \omega/\omega_0$  та показнику затухання  $\xi = c/m\omega_0$ , то:

$$W(i\nu) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \nu^2 + i2\xi\nu}.$$

На рисунку 3.3 представлені фазова частотна характеристика та залежність коефіцієнта динамічності  $\mu(\nu)$  від безрозмірної частоти обертання  $\nu$  для різних значень показника затухання.

Коефіцієнт динамічності  $\mu(\nu)$  – відношення амплітуди реакції до ексцентриситету центра мас:

$$\mu(\nu) = \frac{A_0}{a} = k|W| = \frac{\nu^2}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + (2\xi\nu)^2}} \quad (3.5)$$

Абсолютне значення амплітуди виражається формулою  $A_0 = a\mu(\nu)$ , яка дає уявлення амплітуди усталених вимушених коливань в частотній області.

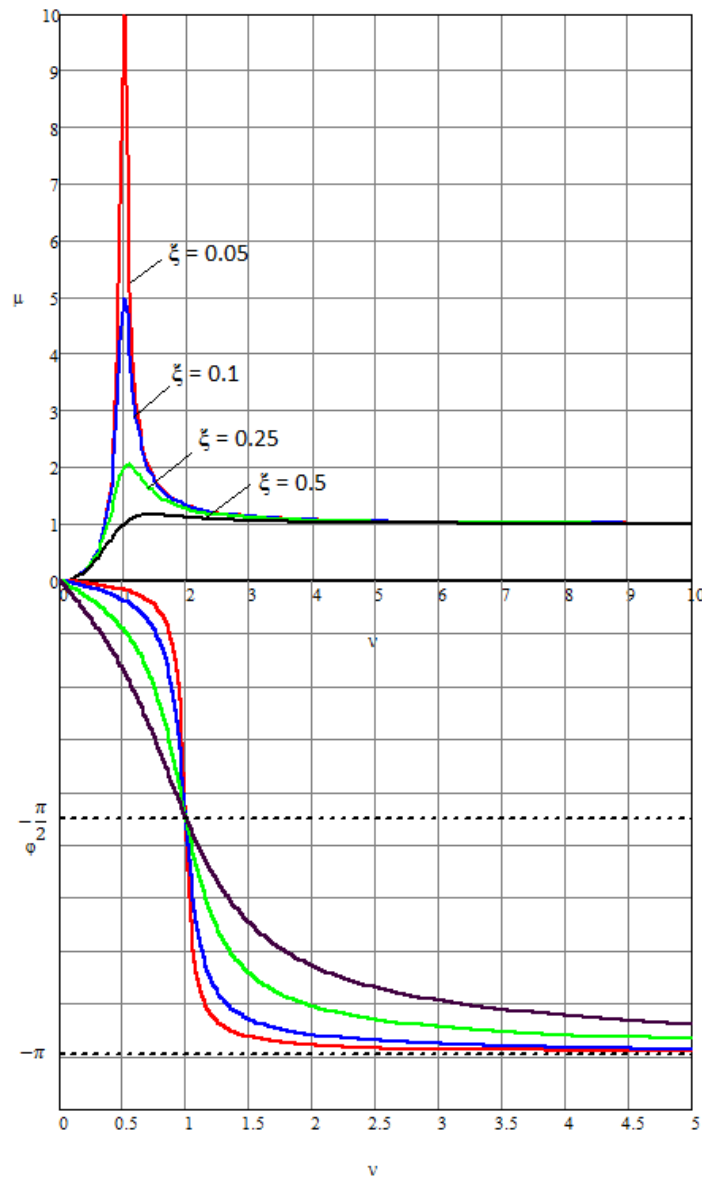


Рисунок 3.3 – Коефіцієнт динамічності та фазові частотні характеристики

### 3.3 Радіальні коливання ротора в жорстких шпаринних ущільненнях

Рівняння радіальних коливань ротора в комплексних змінних описується формулою (3.6):

$$a_1 \ddot{u} + a_2 \dot{u} + a_3 u + \bar{i}(a_4 \dot{u} + a_5 u) = \omega^2 |a^*| e^{i\omega t}, \quad (3.6)$$

де  $u = u_x + iu_y$ ,  $u_x = x/H$ ,  $u_y = y/H$  – безрозмірні радіальні координати,  $H$  – середній радіальний зазор в ущільненні,  $a^* = (a_x + ia_y)/H$ . Коефіцієнти, що входять до рівняння (3.6) визначені в таблиці 3.2, де  $a_1$  – сумарна безрозмірна маса ротора та приєднана маса рідини,  $a_2$  – коефіцієнт демпфіруючих сил,  $a_3$  – коефіцієнт пружних сил,  $a_4$  – коефіцієнт гіроскопічних сил,  $a_5$  – коефіцієнт циркуляційних сил,  $k_p, k_d, k_g$  – силові коефіцієнти гідростатичної жорсткості, демпфірування та інерційних сил відповідно,  $\chi_1, \chi_2$  – місцеві опори, що визначаються відносними коефіцієнтами гідравлічних втрат,  $\zeta_{11}, \zeta_{12}$  – коефіцієнти місцевих гідравлічних втрат на вході в зазор та на виході з нього,  $K$  – коефіцієнт початкової закрутки потоку,  $q_0$  – витрати через канал одиничної ширини,  $n, C$  – показник степеня та постійна у формулі Блазіуса (для автомобельної області турбулентної течії  $n = 0, C = 0.04$ ),  $K_i$  – параметр, що враховує локальну складову сили інерції.

Таблиця 3.2 – Коефіцієнти рівняння радіальних коливань ротора

Коефіцієнт	Значення коефіцієнту	Коефіцієнт	Значення коефіцієнту
$a_{11} = 2k_g$	0.04	$a_{21} = 2(k_d + k_g K_i \theta_0)$	170.2
$a_1 = 1 + a_{11}$	1.04	$a_2 = a_{20} + a_{21}, a_{20} = 0$	170.2
$a_{41} = k_g \kappa \omega$	1.8	$a_{31} = 2k_p (\theta_0 + N \chi_m)$	$3.5 \cdot 10^5$
$a_4 = a_{41}$	1.8	$a_3 = \Omega_{u0}^2 + a_{31}$	$4.04 \cdot 10^5$



## Продовження таблиці 3.2

Коефіцієнт	Значення коефіцієнту	Коефіцієнт	Значення коефіцієнту
$a_{51} = k_d \kappa \omega$	$3.7 \cdot 10^3$	$\Omega_{u0}^2 = \omega_0^2 = \frac{k}{m}$	$5 \cdot 10^4$
$a_5 = a_{51}$	$3.7 \cdot 10^3$	$a_4(\omega) = a'_4 \omega$	-
$a_5(\omega) = a'_5 \omega$	-	$a'_4 = k_g \kappa$	$6.1 \cdot 10^{-3}$
$a'_5 = k_d \kappa$	12.3	$\chi_1 = \varsigma_{11} / \varsigma$	0.27
$\Delta \chi = \chi_1 - \chi_2$	0.23	$\chi_2 = \varsigma_{12} / \varsigma$	0.04
$\varsigma = \varsigma_{11} - \varsigma_{12} + \varsigma_2$ ,	4.3	$\varsigma_2 = \lambda l / 2H$	3.3
$\varsigma_{11}$	1.15	$\varsigma_{12}$	0.15
$\kappa$	0.3	$A_0 = \frac{\lambda_0}{8} \text{Re}_0$	45
$k_p = \Delta p_0 \frac{\pi R_0 l}{2Hm}, [c^{-2}]$	$2.9 \cdot 10^5$	$\chi_m = \chi_1 + \chi_2$	0.3
$k_d = \mu \frac{\pi R_0 l^3 \Lambda_0}{12H^3 m}, [c^{-1}]$	40.9	$N = 2(1+n)/(2-n)$	1
$k_g = \rho \frac{\pi R_0 l^3}{12Hm}, [1]$	0.02	$q_0 = \left[ \frac{4\Delta p_0 H^3}{\rho c l} \left( \frac{2\rho}{\mu} \right)^n \right]^{\frac{1}{2-n}}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
$K_i = \frac{12q_0}{Hl(2-n)}$	$7.2 \cdot 10^3$	$\text{Re}_0 = \frac{2\rho q_0}{\mu}$	9000
$\lambda_0 = \frac{C}{\text{Re}_0^n}$	0.04	-	-

Визначимо власні частоти ротора, значення яких дозволить уникнути роботи на резонансних режимах вимушених коливань. Такі режими у випадку вимушених коливань під дією відцентрової сили невірноваженої маси виникають на частотах обертання, які збігаються з однією з його власних частот. Власні частоти визначаються розв'язком рівнянь вільних коливань.

Рівняння (3.6) в проєкціях  $u_x$  та  $u_y$  матиме вигляд:

$$a_1 \ddot{u}_x + a_2 \dot{u}_x + a_3 u_x + a_4 \dot{u}_y + a_5 u_y = \omega^2 a_x^* \quad (3.7)$$

$$a_1 \ddot{u}_y + a_2 \dot{u}_y + a_3 u_y - a_4 \dot{u}_x - a_5 u_x = \omega^2 a_y^* .$$

Підставляючи в (3.7) розв'язок, який шукаємо у вигляді  $u_x = B_x e^{\lambda t}$ ,  $u_y = B_y e^{\lambda t}$ , отримаємо характеристичне рівняння – алгебраїчне рівняння четвертого ступеня:

$$P(\lambda) = a_1^2 \lambda^4 + 2a_1 a_2 \lambda^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3 + a_4^2) \lambda^2 + 2(a_2 a_3 + a_4 a_5) \lambda + a_3^2 + a_5^2 = 0. \quad (3.8)$$

Рівняння (3.8) в комплексних змінних приймає дещо компактніший вигляд:

$$a_1 \lambda^2 + (a_2 \mp i a_4) \lambda + a_3 \mp i a_5 = 0 \quad (3.9)$$

### 3.3.1 Власні частоти консервативної системи

Розглянемо консервативну систему, поклавши, що  $a_2 = a_5 = 0$ , а також знехтуємо приєднаною масою  $a_{11} = 2k_g \ll 1$ ,  $a_1 \approx 1$ . В цьому випадку характеристичне рівняння спрощується:

$$\lambda^2 \mp i a_4 \lambda + a_3 = 0 \quad (3.10)$$

Корені даного рівняння:

$$\lambda_{1,4} = -i \frac{a_4}{2} \pm i \sqrt{a_3} \sqrt{1 + \frac{a_4^2}{4a_3}} = i \left( -\frac{a_4}{2} \pm \Omega_u \sqrt{1 + \frac{a_4^2}{4\Omega_u^2}} \right)$$

$$\lambda_{2,3} = i \frac{a_4}{2} \pm i \sqrt{a_3} \sqrt{1 + \frac{a_4^2}{4a_3}} = i \left( \frac{a_4}{2} \pm \Omega_u \sqrt{1 + \frac{a_4^2}{4\Omega_u^2}} \right) = \lambda_{1,4} + a_4$$

Для даної моделі ротора  $a_4^2/4\Omega_u^2 = 2.185 \cdot 10^{-6} \ll 1$ , тому можна прийняти, що:

$$\lambda_1 \approx i\left(-\frac{a_4}{2} + \Omega_u\right), \quad \lambda_3 \approx i\left(\frac{a_4}{2} - \Omega_u\right) = -\lambda_1$$

$$\lambda_2 \approx i\left(\frac{a_4}{2} + \Omega_u\right), \quad \lambda_4 \approx i\left(-\frac{a_4}{2} - \Omega_u\right) = -\lambda_2$$

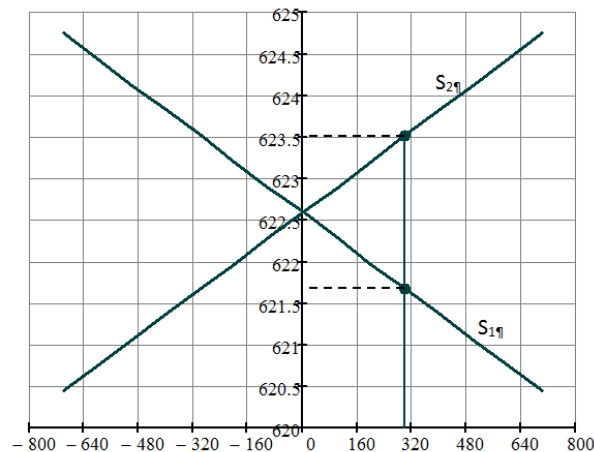
Таким чином, отримано чотири уявних попарно сполучених кореня, модулі яких представляють власні частоти вільних незатухаючих коливань:

$$s_1 = -0,5a_4 + \Omega_u = -s_3, \quad s_2 = 0,5a_4 + \Omega_u = -s_4$$

Гіроскопічна сила характеризується коефіцієнтом  $a_4 = k_g \kappa \omega$  та пропорційна частоті обертання, тому й власні частоти лінійно залежать від частоти обертання:

$$s_{1,2} \approx \mp \frac{k_g \kappa}{2} \omega + \Omega_u, \quad s_{3,4} \approx \pm \frac{k_g \kappa}{2} \omega - \Omega_u = -s_{1,2} \quad (3.11)$$

Дані залежності (частотні діаграми) представлені на рисунку 3.4. Діаграми попарно симетричні відносно горизонтальної осі, тому була побудована лише верхня частина графіків. Розрахунок показав, що  $s_1 = -s_3 = 621.7 \text{ c}^{-1}$ ,  $s_2 = -s_4 = 623.5 \text{ c}^{-1}$ .



ω

Рисунок 3.4 – Частотна діаграма консервативної системи

У другому і четвертому квадрантах знаки власних частот протилежні знаку частоти власного обертання: вільне прецесійне обертання спрямоване проти частоти обертання ротора, тобто має місце зворотна прецесія.[9,10]

### 3.3.2 Власні частоти неконсервативної системи

Розглянемо повне рівняння (3.8), яке містить неконсервативну силу в'язкого опору ( $a_2$ ) та циркуляційну силу ( $a_5$ ).

Корені квадратного рівняння мають вигляд:

$$\lambda_{1-4} = -\frac{a_2 \mp ia_4}{2a_1} \pm \sqrt{\left(\frac{a_2 \mp ia_4}{2a_1}\right)^2 - \frac{a_3 \mp ia_5}{a_1}} \quad (3.12)$$

Розділивши у підкореновому виразі уявну та дійсну частини, отримаємо:

$$\lambda_{1-4} = -\frac{a_2 \mp ia_4}{2a_1} \pm i \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \sqrt{1 - \frac{a_2^2 - a_4^2}{4a_1 a_3} \pm i \frac{a_2 a_4 - 2a_1 a_5}{2a_1 a_3}} \quad (3.13)$$

Підкореновий вираз – спряжені комплексні числа  $w = u \pm iv$ . Враховуючи, що  $a_3/a_1 = \Omega_u^2$  – квадрат власної частоти радіальних коливань без урахування демпфіруючих, гіроскопічних та циркуляційних сил, вирази для  $u$  та  $v$  можна виразити формулами:

$$u = 1 - \frac{a_2^2 - a_4^2}{4a_1 a_3} = 1 - \frac{a_2^2 - a_4^2}{4a_1^2 \Omega_u^2}, \quad v = \frac{a_2 a_4 - 2a_1 a_5}{2a_1 a_3} = \frac{a_2 a_4 - 2a_1 a_5}{2a_1^2 \Omega_u^2}, \quad (3.14)$$

$$w = |w|e^{\pm i\varphi}, \quad |w| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \varphi = \pm \arctg v/u.$$

Корінь з числа  $w$  приймає два значення:  $\sqrt{w} = \pm \sqrt{|w|}e^{\pm i\frac{\varphi}{2}}$ , підставляючи які в рівняння (3.13) та розділяючи у ньому дійсну та реальну частини, отримаємо характеристичні показники у вигляді спряжених комплексних чисел:

$$\lambda_{1-4} = -\frac{a_2}{2a_1} \mp \Omega_u \sqrt{|w|} \sin \frac{\varphi}{2} + i \left( \pm \frac{a_4}{2a_1} \pm \Omega_u \sqrt{|w|} \cos \frac{\varphi}{2} \right) = -n_{u(1,2)} + i s_{u(1-4)}, \quad (3.15)$$

де

$$\begin{aligned} n_{u1} &= \frac{a_2}{2a_1} + \Omega_u \sqrt{|w|} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad n_{u2} = \frac{a_2}{2a_1} - \Omega_u \sqrt{|w|} \sin \frac{\varphi}{2}, \\ s_{u1} &= -s_{u3} = -\frac{a_4}{2a_1} + \Omega_u \sqrt{|w|} \cos \frac{\varphi}{2}, \\ s_{u2} &= -s_{u4} = \frac{a_4}{2a_1} + \Omega_u \sqrt{|w|} \cos \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

– питомі коефіцієнти демпфірування та власні частоти радіальних коливань. Враховуючи, що  $\cos(\varphi) = \frac{v}{|w|}$  і  $v^2/u^2 \ll 1$ , наближені вирази можна записати у вигляді:

$$n_{u1,2} \approx \frac{a_2}{2a_1} \pm \Omega_u \frac{v}{2\sqrt{u}}, \quad (3.17)$$

$$s_{u1,3} \approx \pm \left( -\frac{a_4}{2a_1} + \Omega_u \sqrt{u} \right), \quad s_{u2,4} \approx \pm \left( \frac{a_4}{2a_1} + \Omega_u \sqrt{u} \right). \quad (3.18)$$

Приводячи вирази (3.14) до безрозмірного вигляду та підставляючи у (3.17) та (3.18), питомі коефіцієнти демпфірування та власні частоти радіальних коливань опишуться формулами:

$$\bar{\lambda}_{1,3} = -\bar{n}_{u1} \pm i\bar{s}_{u1}, \quad \bar{\lambda}_{2,4} = -\bar{n}_{u2} \pm i\bar{s}_{u2}, \quad \bar{n}_{u1,2} = \xi_u \pm \frac{\xi_u \eta_u - \zeta_u}{K_u \sqrt{1 - \frac{\xi_u^2 - \eta_u^2}{K_u^2}}}, \quad (3.19)$$

$$\bar{s}_{u1} = -\bar{s}_{u3} = -\eta_u + K_u \sqrt{1 - \frac{\xi_u^2 - \eta_u^2}{K_u^2}}, \quad \bar{s}_{u2} = -\bar{s}_{u4} = \eta_u + K_u \sqrt{1 - \frac{\xi_u^2 - \eta_u^2}{K_u^2}}, \quad (3.20)$$

де  $\bar{n}_{u1,2}$  – приведені показники затухання, що враховують також вплив

гіроскопічної та циркуляційної сил ( $\bar{n}_{u1,2} = \frac{n_{u1,2}}{\Omega_{u0}}$ );  $\bar{\lambda}_{1-4} = \frac{\lambda_{1-4}}{\Omega_{u0}}$ ,  $\bar{s}_{u(1-4)} = \frac{s_{u(1-4)}}{\Omega_{u0}}$ ,  $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\Omega_{u0}}$

– безрозмірні величини характеристичних чисел, власних частот радіальних

коливань та частоти змушуючої сили,  $\xi_u$  – показник затухання, обумовлений сумарною силою в'язкого опору ( $a_2$ );  $\zeta_u, \eta_u$  – безрозмірні коефіцієнти циркуляційної ( $a_5$ ) та гіроскопічної сил ( $a_4$ ) відповідно. Підрахунок вищезгаданих коефіцієнтів приведений у таблиці 3.3.[11]

Таблиця 3.3 – Безрозмірні коефіцієнти

Коефіцієнт	Значення коефіцієнту	Коефіцієнт	Значення коефіцієнту
$\xi_u = \frac{a_2}{2a_1\Omega_{u0}}$	0.365	$\eta_u = \frac{a_4}{2a_1\Omega_{u0}}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$
$\zeta_u = \frac{a_5}{2a_1\Omega_{u0}^2}$	0.04	$K_u^2 = \frac{\Omega_u^2}{\Omega_{u0}^2} = \frac{1}{a_1} + \frac{a_{31}}{a_1\Omega_{u0}^2}$	2.78

Як впливає з формули, для  $\bar{n}_{u1}$  (3.19), циркуляційна сила грає роль сили негативного опору (прискорюючої сили:  $\bar{n}_{u1} = \zeta_u$ ) і при відсутності в'язкого опору викликає зростання амплітуди вільних коливань за експоненціальним законом. Таким чином, якщо не враховувати дисипативні сили ( $\xi_u = 0$ ), то рух[12] ротора під дією потенційних ( $K_u$ ), гіроскопічних ( $\eta_u$ ) та циркуляційних ( $\zeta_u$ ) сил нестійкий.

Розрахунок за формулами (3.20) за постійного перепаду тиску на ущільненнях  $\Delta p = 1.5$  МПа дав наступні результати:

$$\bar{s}_{u1} = 2.75; \bar{s}_{u2} = 2.77, \quad (3.21)$$

тобто власні частоти радіальних коливань ротора в ущільненнях майже в 3 рази більше власної частоти коливань ротора в повітрі. Основний внесок у підвищення власної частоти вносить гідростатична центруюча сила, яка характеризується відношенням  $a_{31}/\Omega_{u0}^2$ . В нашому випадку  $a_{31}/\Omega_{u0}^2 = 7.06, \Omega_u \approx 2.6\Omega_{u0}$ . Конусність каналу впливає на власну частоту через гідростатичну жорсткість ( $a_{31}$ ), а також, меншою мірою, через показник затухання ( $\xi_u$ ).

### 3.3.3 Власні частоти радіальних коливань ротора у випадку залежності дроселюючого перепаду тиску від частоти обертання

Якщо перепад тиску на ущільненнях є функцією від частоти обертання ротора, то залежності власних частот від  $\omega$  матимуть вигляд:

$$\bar{s}_{01} = -\bar{s}_{03} = -\eta'_u \bar{\omega} + K_u \sqrt{1 - \frac{\xi_u^2 - (\eta'_u \bar{\omega})^2}{K_u^2}} \quad (3.22)$$

$$\bar{s}_{02} = -\bar{s}_{04} = \eta'_u \bar{\omega} + K_u \sqrt{1 - \frac{\xi_u^2 - (\eta'_u \bar{\omega})^2}{K_u^2}}$$

Коефіцієнт гідростатичної жорсткості  $k_p$  пропорційний перепаду тиску. Коефіцієнт демпфірування  $k_d$  теж залежить від перепаду тиску через витрати, що входять в параметр  $\Lambda_0$ . Таким чином, всі коефіцієнти (таблиця 3.2) рівнянь руху, що містять  $k_p$  і  $k_d$ , в загальному випадку залежать від частоти обертання ротора. Ці залежності наведені в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4 – Коефіцієнти, в залежності від частоти обертання ротора

Коефіцієнт в залежності від $\bar{\omega}$	Константа, що входить до залежності	Значення константи
$\eta_u = \eta'_u \bar{\omega}$	$\eta'_u = \frac{a'_4}{2a_1} = \frac{k_g \kappa}{2(1 + 2k_g)}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$
$\zeta_u = \zeta'_u \bar{\omega}$	$\zeta'_u = \frac{a'_5}{2a_1 \Omega_{u0}} = \frac{k_d \kappa}{2(1 + 2k_g) \Omega_{u0}}$	0.03

Деякі спрощені формули (3.22) матимуть вигляд:

$$\bar{s}_{01,2} \approx \mp \eta'_u \bar{\omega} + K_u \left( 1 - \frac{\xi_u^2 - \eta_u'^2 \bar{\omega}^2}{2K_u^2} \right), \quad (3.23)$$

$$\bar{s}_{03,4} \approx \pm \eta'_u \bar{\omega} - K_u \left( 1 - \frac{\xi_u^2 - \eta_u'^2 \bar{\omega}^2}{2K_u^2} \right) = -\bar{s}_{01,2},$$

тобто для розглянутої неконсервативної системи частотні діаграми, на відміну від лінійних залежностей (3.11), мають вигляд симетричних щодо осі частот парабол (рисунок 3.4). Графіки мають спотворений вигляд, так як ціна розподілу по осях суттєво відрізняється. Демпфіруюча і гіроскопічна сили в ущільненнях малі в порівнянні з сумарною силою жорсткості валу, тому не чинять істотного впливу на власні частоти.

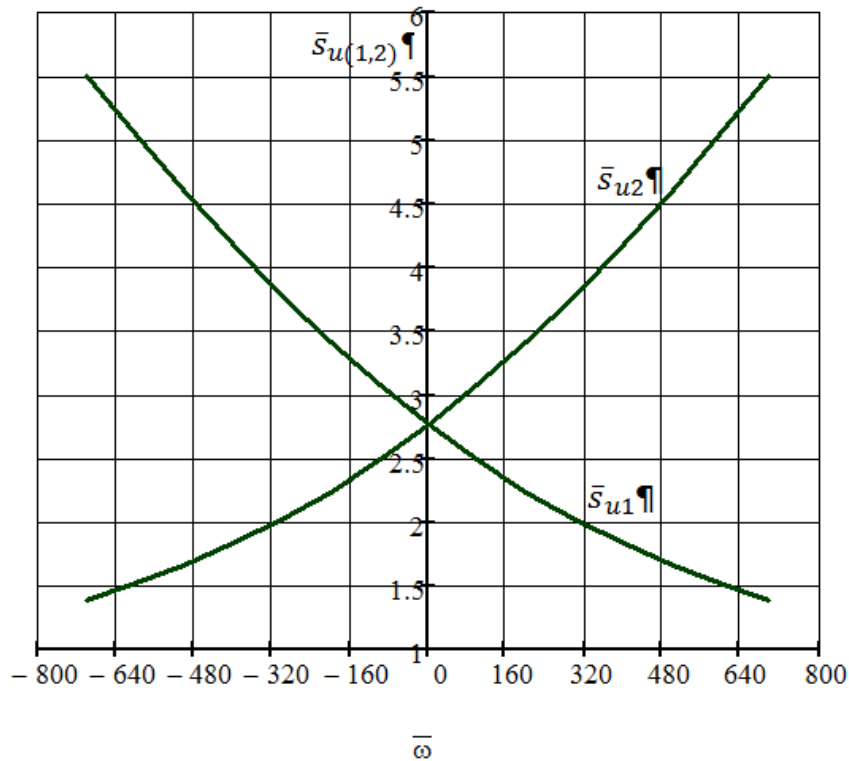


Рисунок 3.4 – Частотна діаграма неконсервативної системи

### 3.3.4 Критичні частоти коливань

Якщо частота  $\omega_f$  відцентрової сили нерівноваженої маси  $F = m\omega^2 e^{i\omega t}$  співпаде з однією із власних частот  $s_i$ , то настає резонанс, що супроводжується недопустимим ростом динамічних прогинів вала. Тому частота  $\omega_{*i} = \omega_f = s_i$  називається критичною. Графічно вона визначається як точка перетину прямої  $\omega_f(\omega) = 1 \cdot \omega$  з кутовим коефіцієнтом  $k = 1$  і прямою  $s_i(\omega) = const$ .



На рисунку 3.5 графічно визначені критичні частоти консервативної моделі. Коефіцієнт гіроскопічної сили на рисунку 3.5 б) збільшений в 50 разів по відношенню до його реальної величини, задля більшої наочності. Теоретичні значення критичних частот можна отримати з рівностей:

$$\bar{s}_{1,3}(\bar{\omega}_{u^*1,3}) = \bar{\omega}_{u^*1,3} = \pm(-\eta'_u \bar{\omega}_{u^*1,3} + K_u), \quad (3.24)$$

$$\bar{s}_{2,4}(\bar{\omega}_{u^*2,4}) = \bar{\omega}_{u^*2,4} = \pm(\eta'_u \bar{\omega}_{u^*2,4} + K_u).$$

Розв'язуючи (3.24) відносно  $\bar{\omega}$ , отримаємо вирази для знаходження безрозмірних критичних частот:

$$\bar{\omega}_{u^*1} = \frac{K_u}{1 + \eta'_u}, \quad \bar{\omega}_{u^*3} = -\frac{K_u}{1 - \eta'_u}, \quad \bar{\omega}_{u^*2} = \frac{K_u}{1 - \eta'_u}, \quad \bar{\omega}_{u^*4} = -\frac{K_u}{1 + \eta'_u}, \quad (3.25)$$

$$\bar{\omega}_{u^*1} = -\bar{\omega}_{u^*4}, \quad \bar{\omega}_{u^*2} = -\bar{\omega}_{u^*3}.$$

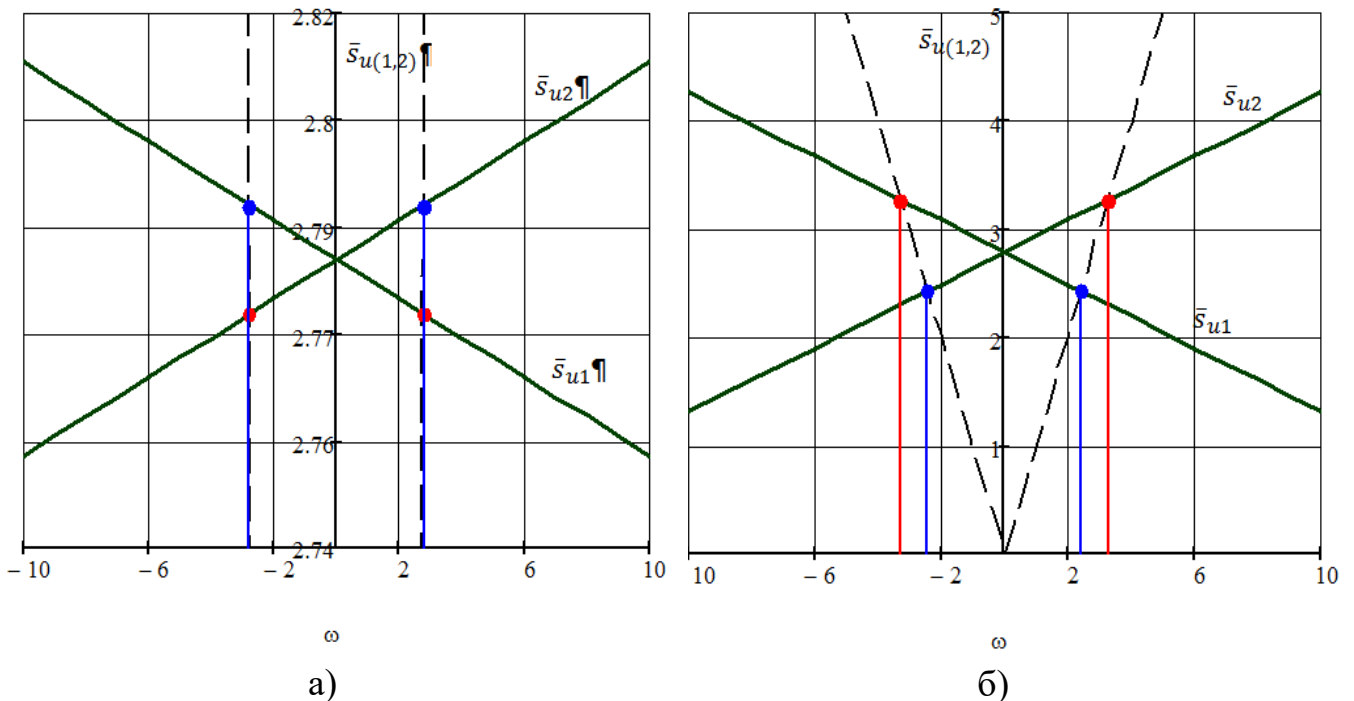


Рисунок 3.5 – Визначення критичних частот обертання

а)  $\eta'_u = 2.9 \cdot 10^{-3}$ ; б)  $\eta'_u = 50 \cdot 2.9 \cdot 10^{-3}$

Розрахунок за формулами (3.25) дав наступні результати:

$$\bar{\omega}_{u^*1} = -\bar{\omega}_{u^*4} = 2.78; \bar{\omega}_{u^*2} = -\bar{\omega}_{u^*3} = 2.79 \quad (3.26)$$

Якщо розглядати неконсервативну модель, то критичні частоти можна знайти розв'язуючи наступні квадратні рівняння:

$$\bar{s}_{u1,3}(\bar{\omega}_{u^*1,3}) = \pm \bar{\omega}_{u^*1,3} = A\bar{\omega}_{u^*1,3}^2 - B\bar{\omega}_{u^*1,3} + C, \quad (3.27)$$

$$\bar{s}_{u2,4}(\bar{\omega}_{u^*2,4}) = \pm \bar{\omega}_{u^*2,4} = A\bar{\omega}_{u^*2,4}^2 + B\bar{\omega}_{u^*2,4} + C,$$

де  $A = \eta_u'^2 / 2K_u$ ,  $B = \eta_u'$ ,  $C = K_u - \xi_u^2 / 2K_u$ .

Розрахунок критичних частот неконсервативної моделі та відповідні формули для їх знаходження наведені в таблиці 3.5.

Таблиця 3.5 – Критичні частоти неконсервативної системи

Критична частота	Розраховане значення	Критична частота	Розраховане значення
$\bar{\omega}_{u^*1,3} =$ $= \frac{B \pm 1}{2A} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4AC}{(B \pm 1)^2}} \right]$	$\bar{\omega}_{u^*1} = 2.75,$ $\bar{\omega}_{u^*3} = -2.77$	$\bar{\omega}'_{u^*1,3} =$ $= \frac{B \pm 1}{2A} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4AC}{(B \pm 1)^2}} \right]$	$\bar{\omega}'_{u^*1} =$ $= 6.43 \cdot 10^5$ $\bar{\omega}'_{u^*3} =$ $= -6.39 \cdot 10^5$
$\bar{\omega}_{u^*2,4} =$ $= -\frac{B \mp 1}{2A} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4AC}{(B \mp 1)^2}} \right]$	$\bar{\omega}_{u^*2} = 2.77,$ $\bar{\omega}_{u^*4} = -2.75$	$\bar{\omega}'_{u^*2,4} =$ $= -\frac{B \mp 1}{2A} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4AC}{(B \mp 1)^2}} \right]$	$\bar{\omega}'_{u^*2} =$ $= 6.39 \cdot 10^5$ $\bar{\omega}'_{u^*4} =$ $= -6.43 \cdot 10^5$

За модулем критичні частоти практично не відрізняються від власних частот, відповідної консервативної моделі без урахування гіроскопічних сил: впливом демпфірування і гіроскопічних сил можна знехтувати. Критичні частоти  $\bar{\omega}'_{u^*1} \approx -\bar{\omega}'_{u^*4} \approx \bar{\omega}'_{u^*2} \approx -\bar{\omega}'_{u^*3} \approx 6.4 \cdot 10^5$ . При цьому розмірні частоти виявляються практично недосяжні  $\omega'_{u^*1} = \omega'_{u^*2} = 6.4 \cdot 10^5 \Omega_{u0} = 1.4 \cdot 10^8$  і

виходять далеко за межі використовуваних робочих частот обертання роторів стаціонарних відцентрових машин і їх можна не брати до уваги.

Для знаходження критичних частот у випадку залежності перепаду тиску на ущільненнях від частоти обертання:  $\Delta p_0 = B\omega^2$ , де  $B$  – узагальнений параметр, що характеризує геометрію проточної частини та зберігає постійне значення на різних частотах обертання ротора  $B = \frac{\Delta p_n}{\omega_n^2} \approx 16.7$ , скористаємося спрощеною формулою, так як безрозмірні коефіцієнти гіроскопічної та циркуляційної сил малі в порівнянні з одиницею ( $\eta'_u = 2.95 \cdot 10^{-3}$ ,  $\zeta'_u = 0,026$ ):

$$\bar{s}_u \approx K_u = \sqrt{(1 + a'_{31}\bar{\omega}_{u*}^2)/a_1} = \pm \bar{\omega}_{u*} \quad (3.28)$$

Де коефіцієнти рівнянь руху в залежності від частоти обертання описуються формулами, приведеними в таблиці 3.6.

Таблиця 3.6 – Коефіцієнти рівнянь руху в залежності від частоти обертання ротора

Коефіцієнт в залежності від $\omega$	Константа, що входить до залежності	Значення константи
$q_0 = \left[ \frac{4\Delta p_0 H^3}{\rho C l} \left( \frac{2\rho}{\mu} \right)^n \right]^{\frac{1}{2-n}} = q'_0 \omega^{\frac{2}{2-n}}$	$q'_0 = \left[ \frac{4BH^3}{\rho C l} \left( \frac{2\rho}{\mu} \right)^n \right]^{\frac{1}{2-n}}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$
$\lambda_0 = \frac{C}{\text{Re}_0^n}$	$\Lambda'_0 = \frac{C}{8} \left( \frac{2\rho q'_0}{\mu} \right)^{1-n}$	1.25
$\text{Re}_0 = \frac{2\rho q_0}{\mu}$	$K'_i = \frac{12q'_0}{Hl(2-n)}$	2.89
$\Lambda_0 = \frac{\lambda_0}{8} \text{Re}_0 = \Lambda'_0 \omega^{\frac{1-n}{2-n}}$	$k'_p = \frac{k_{pn}}{\omega_n^2} = \frac{\pi R_0 l}{2Hm} B$	3.27
$K_i = \frac{12q_0}{Hl(2-n)} = K'_i \omega^{\frac{2}{2-n}}$	$k'_d = \mu \frac{\pi R_0 l^3}{12H^3 m} \Lambda'_0$	$2.45 \cdot 10^{-4}$
$k_p = k'_p \omega^2$	$a'_{31} = 2k'_p(\theta_0 + N\chi_m)$	3.93

$k_d = \mu \frac{\pi R_0 l^3}{12 H^3 m} \Lambda_0 = k'_d \omega^{2 \frac{1-n}{2-n}}$	$a'_4 = k_g \kappa$	$6.14 \cdot 10^{-3}$
$a_2 = a_{20} + a_{21}$	$a'_5 = k'_d \kappa$	$7.34 \cdot 10^{-5}$
$a_{21} = 2(k_d + k_g K_i \theta_0) = 2k'_d \omega^{2 \frac{1-n}{2-n}} + 2k_g \theta_0 K'_i \omega^{2-n}$	-	-
$a_3 = \Omega_{u0}^2 + a_{31}$	-	-
$a_{31} = 2k_p (\theta_0 + N \chi_m) = a'_{31} \omega^2$	-	-

Продовження таблиці 3.6

Коефіцієнт в залежності від $\omega$	Константа, що входить до залежності	Значення константи
$a_4 = k_g \kappa \omega = a'_4 \omega,$	-	-
$a_5 = k_d \kappa \omega = a'_5 \omega^{2-n}$	-	-

Показник степені  $n$  узагальненої формули Блазіуса ( $\lambda_0 = C/Re_0^n$ ) у формулах таблиці 3.6 дорівнює 0 (автомодельна область турбулентної течії). [5]

З рівності (3.28) отримуємо:

$$\bar{\omega}_{u^*}^2 = \frac{1}{a_1(1 - a'_{31}/a_1)}, \quad \bar{\omega}_{u^*1,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{a_1(1 - a'_{31}/a_1)}} \quad (3.29)$$

де  $\bar{\omega}_{u^*1,3}$  – безрозмірні критичні частоти відповідно прямої та зворотної прецесії.

За формулами таблиці 3.6 та враховуючи, що  $\frac{a'_{31}}{a_1} = \frac{a_{31}}{a_1 \omega^2} = \frac{\Delta \Omega_u^2}{\omega^2}$ , вираз (3.29)

набуває вигляду:

$$\bar{\omega}_{u^*1,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{a_1(1 - \Delta \Omega_u^2 / \omega^2)}} \quad (3.30)$$

Критичні частоти які є дійсними числами існують при умові, якщо підкореневий вираз у формулі (3.30) набуває додатного значення:

$$\frac{a'_{31}}{a_1} = \frac{\Delta\Omega_u^2}{\omega^2} < 1 \quad a_1 > a'_{31} = 2k'_p(\theta_0 + N\chi_m)$$

$$\theta_0 > a_1/2k'_p - N\chi_m \quad (3.31)$$

Для значень параметра конусності (3.31) критичних частот не існує, ротор жорсткішає. Підрахунок за формулою (3.31) показав, що для конусності  $\theta_0 > 1.4$  критичних частот не існує, а так як  $\theta_0 < 1$  ( $\theta_0 = 0.3$ ), то дана умова виконується.

Якщо брати до уваги демпфіруючі та циркуляційні сили, то замість спрощеної формули (3.28) використаємо формулу (3.22) у вигляді:

$$\bar{s}_{u1} + \eta_u = \sqrt{K_u^2 - \xi_u^2 + \eta_u^2}, \quad \bar{s}_{u2} - \eta_u = \sqrt{K_u^2 - \xi_u^2 + \eta_u^2} \quad (3.32)$$

Якщо (3.32) піднести до квадрату, отримаємо:

$$\bar{s}_u^2 \pm 2\bar{s}_u\eta_u - K_u^2 + \xi_u^2 = 0 \quad (3.33)$$

Коефіцієнти рівняння руху і безрозмірних величинах в залежності від частоти обертання приведені в таблиці 3.7.

Таблиця 3.7 – Безрозмірні коефіцієнти рівнянь руху в залежності від частоти обертання ротора

Коефіцієнт в залежності від $\bar{\omega}$	Константа, що входить до залежності	Значення константи
$\xi_u = \xi_{u0} + \xi_{u1}$	$\xi'_{u1} = \frac{k'_d + k_g\theta_0 K'_i}{a_1\Omega_{u0}}$	$7.72 \cdot 10^{-5}$
$\xi_{u1} = \xi'_{u1}\bar{\omega}$	$\zeta'_u = \frac{a'_5}{2a_1}$	$3.52 \cdot 10^{-5}$
$\varsigma_u = \frac{a'_5 \omega^2}{2a_1\Omega_{u0}^2} = \zeta'_u \bar{\omega}^2$	-	-

Приймаючи  $\bar{s}_u = \pm\bar{\omega}_{u*}$  та підставляючи безрозмірні коефіцієнти у (3.33), отримаємо:

$$\left(1 + \xi_{u1}'^2 - a_{31}'/a_1 \pm 2\eta_u'\right)\bar{\omega}_{u*}^2 + 2\xi_{u0}\xi_{u1}'\bar{\omega}_{u*} - 1/a_1 + \xi_{u0}^2 = 0 \quad (3.34)$$

Нехтуючи впливом гіроскопічної ( $\eta_u' = 2.95 \cdot 10^{-3}$ ) сили та приймаючи  $A = 1 + \xi_{u1}'^2 - a_{31}'/a_1$ ,  $B = 2\xi_{u0}\xi_{u1}'$ ,  $C = \xi_{u0}^2 - 1/a_1$ , розв'язок (3.34) запишеться у вигляді:

$$\bar{\omega}_{u*1,3} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}} \quad (3.35)$$

Додатність підкореневого виразу забезпечує існування дійсних критичних частот. Тому умова їх існування набирає вигляду:

$$B^2 \leq 4AC,$$

чи підставляючи вирази для  $A, B, C$ :

$$\xi_{u0}^2 \xi_{u1}'^2 \leq \left(1 + \xi_{u1}'^2 - a_{31}'/a_1 - 2\eta_u'\right) \left(\xi_{u0}^2 - 1/a_1\right) \quad (3.36)$$

Якщо не враховувати зовнішнє демпфірування ( $a_{20} = \xi_{u0} = 0$ ), формула (3.36) дещо спрощується:

$$a_{31}'/a_1 + 2\eta_u' - \xi_{u1}'^2 \geq 1 \quad (3.37)$$

Підрахунки, показали, що умова (3.37) виконується:

$$a_{31}'/a_1 + 2\eta_u' - \xi_{u1}'^2 = 3.78,$$

### 3.4 Аналіз стійкості коливань

Для стійкості коливань необхідно та достатньо щоб реальні частини всіх коренів характеристичного рівняння були від'ємними. [6, 7]

За постійного перепаду тиску на ущільненні коефіцієнти гіроскопічної та циркуляційної гідродинамічних сил[8] залежить від частоти обертання ротора (таблиця 3.4). Умова від'ємності показників затухання (3.19) має вигляд:

$$\xi_u K_u \sqrt{1 - \frac{\xi_u^2 - \eta_u'^2 \bar{\omega}_{u1,2}^2}{K_u^2}} > \mp (\xi_u \eta_u' - \zeta_u') \bar{\omega}_{u1,2} \quad (3.38)$$

Піднесемо вираз (3.38) до квадрату:

$$\xi_u^2 K_u^2 \left( 1 - \frac{\xi_u^2}{K_u^2} \right) > (\zeta_u'^2 - 2\xi_u \eta' \zeta_u') \bar{\omega}_{u1,2}^2$$

Відношенням  $\xi_u^2 / K_u^2$  можна знехтувати, так як для використаних параметрів розрахунку  $\xi_u^2 / K_u^2 = 0.017$ . Таким чином, останній вираз набуде вигляду:

$$\xi_u^2 K_u^2 > (\zeta_u'^2 - 2\xi_u \eta' \zeta_u') \bar{\omega}_{u1,2}^2, \quad \xi_u K_u > \pm \bar{\omega}_{u1,2} \sqrt{(\zeta_u'^2 - 2\xi_u \eta' \zeta_u')}$$

Звідки безрозмірні частоти, що обмежують область стійкості:

$$\bar{\omega}_{u1\otimes} < \frac{K_u \xi_u / \zeta_u'}{\sqrt{1 - 2\xi_u \eta' / \zeta_u'}}, \quad \bar{\omega}_{u2\otimes} > -\frac{K_u \xi_u / \zeta_u'}{\sqrt{1 - 2\xi_u \eta' / \zeta_u'}} \quad (3.39)$$

Межі області стійкості (3.39) в розмірному вигляді мають вигляд:

$$\omega_{u1\otimes} < \frac{a_2 \Omega_u}{a_5' \sqrt{\left( 1 - \frac{a_2 a_4'}{a_1 a_5'} \right)}}, \quad \omega_{u2\otimes} > -\frac{a_2 \Omega_u}{a_5' \sqrt{\left( 1 - \frac{a_2 a_4'}{a_1 a_5'} \right)}} \quad (3.40)$$

Розрахунок дав наступні результати:

– безрозмірні межі

$$\bar{\omega}_{u1*} < 40.3, \quad \bar{\omega}_{u2*} > -40.3$$

– розмірні межі

$$\omega_{u1*} < 9000 \text{ c}^{-1}, \quad \omega_{u2*} > -9000 \text{ c}^{-1}$$

З формули (3.40) видно, що сумарна жорсткість ( $\Omega_u$ ), демпфірування ( $a_2$ ) та гіроскопічна сила ( $a_4$ ) розширюють область стійкості, а циркуляційна сила ( $a_5$ ) дестабілізує ротор.

Умовою стійкості за Раусом-Гурвіцем є додатність всіх діагональних мінорів наступного визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 & 0 \\ 0 & A_0 & A_2 & A_4 \end{vmatrix},$$

де  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  – коефіцієнти характеристичного полінома (3.8):

$$A_0 = a_1^2, \quad A_1 = 2a_1a_2, \quad A_2 = a_2^2 + 2a_1a_3 + a_4^2$$

$$A_3 = 2(a_2a_3 + a_4a_5), \quad A_4 = a_3^2 + a_5^2$$

Тобто умова стійкості має вигляд:

$$A_1A_2A_3 > A_0A_3^2 + A_1^2A_4, \quad (3.41)$$

яка після підстановки виразів для коефіцієнтів характеристичного полінома набуде вигляду:

$$a_2(a_2a_3 + a_4a_5) - a_1a_5^2 > 0 \quad (3.42)$$

Для випадку, коли дроселюючий на ущільненнях перепад тиску залежить від частоти обертання ротора, межі стійкості можна отримати після підстановки у (3.42) співвідношень таблиці 3.6 та розв'язання (3.42) відносно частоти:

$$\omega_{u\otimes}^2 < \frac{a_{21}'^2 \Omega_{u0}^2}{a_1 a_5'^2 - a_{21}'^2 a_{31}' - a_{21}' a_4' a_5'} \quad (3.43)$$

З рівності видно, що основним дестабілізуючим фактором є циркуляційна сила, що характеризується коефіцієнтом  $a_5'$ ; демпфірування  $a_{21}'$ , гіроскопічна сила  $a_4'$  та згинальна жорсткість вала  $\Omega_{u0}$  стабілізують ротор.

Чисельна оцінка результатів за формулою (3.43) показала, що права частина виразу набуває від'ємного значення ( $\omega_{u*}^2 < -1.276 \cdot 10^4$ ), тобто ротор не втрачає стійкості на усій області робочих частот.

### 3.5 Амплітудні та фазові частотні характеристики

Вимушені коливання описуються частинним розв'язком рівняння (3.6) з гармонічною правою частиною. Частинний розв'язок рівняння має вигляд  $u = u_a e^{i(\omega t + \varphi_u)}$ . Після підстановки даного розв'язку до рівняння та скорочення на  $e^{i\omega t}$  отримаємо рівняння з комплексними коефіцієнтами:

$$\left[ -a_1 \omega^2 + a_3 + a_4 \omega + i(a_2 \omega - a_5) \right] u_a e^{i\varphi_u} = \omega^2 |a^*|, \quad (3.44)$$



де квадратна скобка – власний оператор системи  $D(i\omega) = U + iV$  – комплексне число в якому  $U = -a_1\omega^2 + a_3 + a_4\omega$ ,  $V = a_2\omega - a_5$ .

Для постійного перепаду тиску на ущільненнях, вирази для дійсної та уявної частини власного оператора згідно з таблицями 3.2 та 3.3, набудуть вигляду:

$$U = \Omega_{u0}^2 + a_{31} - (a_1 - a'_4)\omega^2, \quad V = (a_{20} + a_{21} - a'_5)\omega, \quad (3.45)$$

Відношення реакції до зовнішнього гармонічного впливу дає частотну передаточну функцію:

$$W(i\omega) = \frac{u_a}{\omega^2 |a^*|} e^{i\varphi_u} = A_{u^*}(\omega) e^{i\varphi_u(\omega)} = \frac{1}{U(\omega) + iV(\omega)}; \quad A_{u^*} = \frac{u_a}{\omega^2 |a^*|}. \quad (3.46)$$

Домножуючи чисельник та знаменник частотної передаточної функції на комплексне число, спряжене до знаменника, та виділяючи в отриманому виразі дійсну та уявну частину, отримаємо:

$$A_{u^*}(\omega) e^{i\varphi_u} = U_1(\omega) + iV_1(\omega), \quad (3.47)$$

$$U_1 = U / (U^2 + V^2), \quad V_1 = -V / (U^2 + V^2).$$

Амплітуда та фаза комплексного числа (3.47) представляють собою амплітудну та фазову частотні характеристики. В якості амплітудної характеристики можна використати модифікований коефіцієнт динамічності – безрозмірне відношення  $A_u = u_a / |a^*|$ . Тоді з (3.47):

$$A_u(\omega) = \omega^2 \sqrt{U_1^2 + V_1^2} = \frac{\omega^2}{\sqrt{U^2 + V^2}}, \quad (3.48)$$

$$\varphi_u(\omega) = \arctg \frac{V_1}{U_1} = -\arctg \frac{V}{U};$$

$$A_u(\bar{\omega}) = \frac{u_a}{|a^*|} = \frac{\bar{\omega}^2 / a_1}{\sqrt{\left[ \frac{1}{a_1} \left( 1 + \frac{a_{31}}{\Omega_{u0}^2} \right) - (1 - a'_4/a_1) \bar{\omega}^2 \right]^2 + \left[ (a_2 - a'_5)/a_1 \Omega_{u0} \right]^2 \bar{\omega}^2}}, \quad (3.49)$$

$$\varphi_u(\bar{\omega}) = -\arctg \frac{[(a_2 - a'_5)/a_1 \Omega_{u0}] \bar{\omega}}{\frac{1}{a_1} \left( 1 + \frac{a_{31}}{\Omega_{u0}^2} \right) - (1 - a'_4/a_1) \bar{\omega}^2}$$

Отримані вирази можна привести до безрозмірного вигляду, використовуючи позначення з таблиць 3.3 та 3.4:

$$A_u = \frac{\bar{\omega}^2 / a_1}{\sqrt{\left[ \frac{1}{a_1} \left( 1 + \frac{a_{31}}{\Omega_{u0}^2} \right) - (1 - 2\eta'_u) \bar{\omega}^2 \right]^2 + [2(\xi_u - \zeta'_u) \bar{\omega}]^2}}, \quad (3.50)$$

$$\varphi_u = -\arctg \frac{2(\xi_u - \zeta'_u) \bar{\omega}}{\frac{1}{a_1} \left( 1 + \frac{a_{31}}{\Omega_{u0}^2} \right) - (1 - 2\eta'_u) \bar{\omega}^2}.$$

На рисунку 3.6 представлені частотні характеристики, побудовані за формулами (3.50).

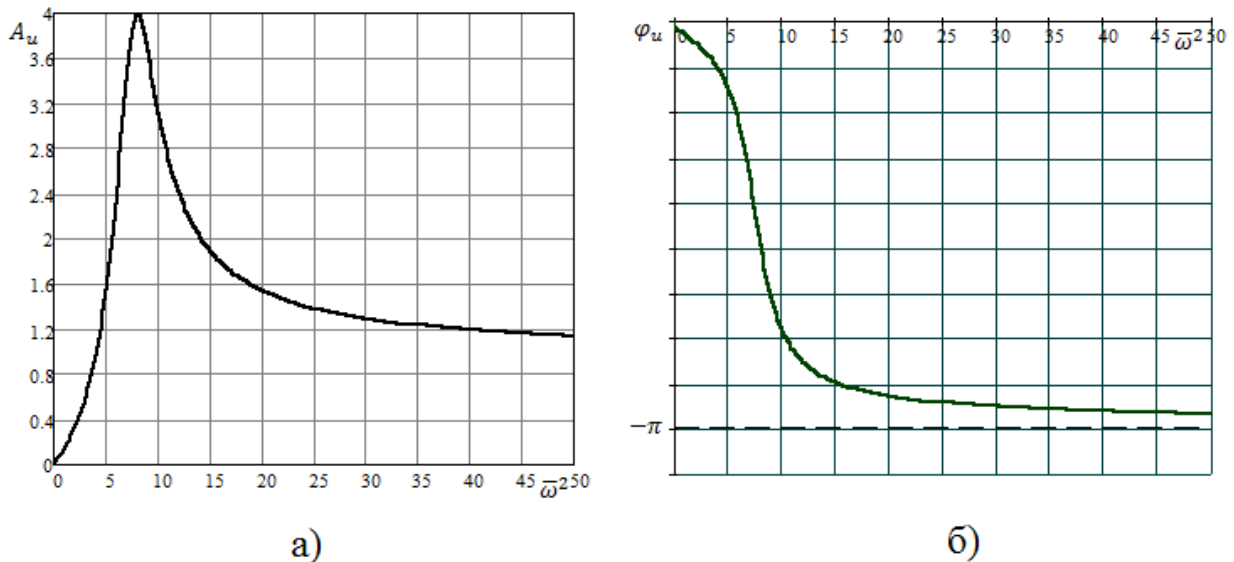


Рисунок 3.6 – Амплітудна (а) та фазова (б) частотні характеристики

Якщо перепад тиску на ущільненнях пропорційний квадрату частоти обертання ротора, то із врахуванням виразів наведених у таблиці 3.6, то дійсна та уявна частини (3.45) набудуть вигляду:

$$U = \Omega_{u0}^2 [1 - (a_1 - a'_{31} - a'_4) \bar{\omega}^2]$$

$$V = \Omega_{u0}^2 \bar{\omega} \left[ \frac{a_{20}}{\Omega_{u0}} + (a'_{21} - a'_5) \bar{\omega} \right].$$

В безрозмірному вигляді із врахуванням коефіцієнтів таблиць 3.3 та 3.4:

$$A_u(\bar{\omega}) = \frac{\bar{\omega}^2 / a_1}{\sqrt{\left[ \frac{1}{a_1} - \left( 1 - \frac{a'_{31}}{a_1} - 2\eta'_u \right) \bar{\omega}^2 \right]^2 + 4\bar{\omega}^2 [\xi_{u0} + (\xi'_{u1} - \zeta'_u) \bar{\omega}]^2}} \quad (3.51)$$

$$\varphi_u(\bar{\omega}) = -\arctg \bar{\omega} \frac{2[\xi_{u0} + (\xi'_{u1} - \zeta'_u) \bar{\omega}]}{\frac{1}{a_1} - \left( 1 - \frac{a'_{31}}{a_1} - 2\eta'_u \right) \bar{\omega}^2}$$

Амплітудна характеристика не має резонансного піку за умови  $1 - a'_{31}/a_1 - 2\eta'_u < 0$ , за якої знаменник у формулі (3.51) монотонно зростає зі збільшенням частоти обертання. Дана умова співпадає з (3.32), якщо  $\xi_{u1}^2 \approx 0$ .

На рисунку 3.7 наведені амплітудна [13] та фазова частотні характеристики, побудовані за формулами (3.51).

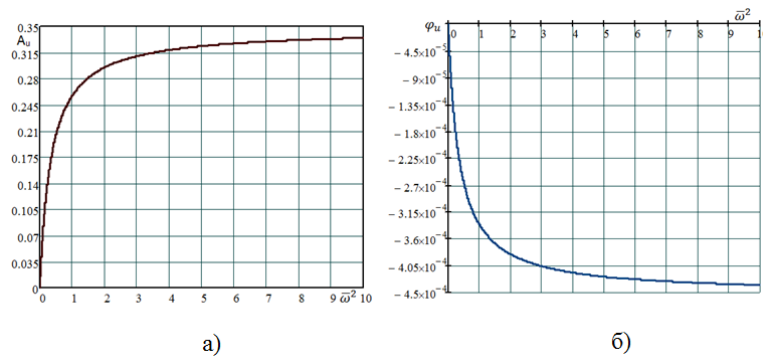


Рисунок 3.7 – Амплітудна (а) та фазова (б) частотні характеристики для випадку залежності дроселюючого перепаду тиску від частоти обертання

### 3.6 Висновок

В результаті аналізу динаміки ротора в повітрі була визначена власна частота недемпфированих коливань ротора. Дана частота є критичною частотою за вимушених коливань ротора під дією неврівноваженої сили інерції. На рисунку 3.3 можна простежити вплив зовнішнього демпфірування, навіть незначний вплив якого значно зменшує амплітуду коливань ротора. За графіком фазової частотної характеристики легко бачити, що вектор прогину відстає від вектора відцентрової сили неврівноваженої маси. За відсутності демпфірування, фаза стрибкоподібно змінюється від 0 до  $-\pi$  коли частота обертання ротора співпадає з власною частотою  $\omega_0$ .

Аналіз радіальних коливань ротора в жорстких ущільненнях дозволив виявити найбільш важливі закономірності руху ротора, оцінити вплив гідродинамічних характеристик використаних ущільнень на власні та на критичні частоти парціальної системи, на її стійкість та на амплітуду вимушених коливань.

Розрахунок власних частот консервативної системи показав, що гіроскопічна сила є достатньо малою в порівнянні з сумарною силою жорсткості вала та ущільнень, тому власні частоти консервативної системи можна вважати постійними  $s_1 \approx s_2 \approx -s_3 \approx -s_4 \approx \Omega_u = 622.6$ . Тобто гідростатична жорсткість ущільнень майже в 3 рази збільшує власну частоту ротора, що доводить здатність даних ущільнень позитивно впливати на вібраційні характеристики ротора.

Розрахунок власних частот неконсервативної системи, яка окрім консервативних пружних, гіроскопічних та інерційних сил містить неконсервативну силу в'язкого опору та циркуляційну силу, показав, що остання не впливає на власні частоти. Гіроскопічна та циркуляційна сили діють у сторону зменшення вили в'язкого опору. Циркуляційна сила, що входить до виразу приведенного показника затухання, виконує роль сили від'ємного опору і при відсутності в'язкого опору викликає ріст амплітуди вільних коливань за експоненціальним законом. Тобто якщо не враховувати дисипативні сили, то рух

ротора під дією потенціальних, гіроскопічних та циркуляційних сил є нестійким. Побудова частотної діаграми дозволила зробити висновок, що демпфіруюча та гіроскопічна сили в ущільненнях малі в порівнянні з сумарною силою жорсткості вала, тому не чинять суттєвого впливу на власні частоти.

Були знайдені критичні частоти обертання, тобто частота обертання, за якої частота одного із зовнішніх збуджень дорівнює одній з власних частот коливань ротора. За постійного перепаду тиску на ущільненнях, чисельні підрахунки представлені в таблиці 3.5:  $\bar{\omega}_{u*1} \approx -\bar{\omega}_{u*4} \approx \bar{\omega}_{u*2} \approx -\bar{\omega}_{u*3} \approx 2.8$ . Якщо ж перепад тиску залежить від частоти обертання, то критичні частоти існують лише за умови  $a'_{31}/a_1 + 2\eta'_u - \xi'^2_{u1} \leq 1$ , яка не виконується, тобто ротор стає жорсткішим – критичні частоти обертання стають недосяжними. Із отриманої умови випливає, що гідростатична та гіроскопічна сили сприяють цьому, тоді як демпфіруючі сили чинить зворотній вплив.

Були встановлені межі стійкості для випадку постійного перепаду тиску на ущільненнях, які склали  $\bar{\omega}_{u1*} < 40.3$ ,  $\bar{\omega}_{u2*} > -40.3$ . При зменшенні циркуляційної сили діапазон розширюється. Дифузорність каналу зменшує демпфірування та гідростатичну жорсткість, що призводить до порушення умов стійкості. Основний дестабілізуючий вплив чинить циркуляційна сила, яка в свою чергу пропорційна коефіцієнту закрутки, тобто середній колівій швидкості рідини в кільцевому каналі. Якщо перепад тиску залежить від частоти обертання, то ротор не втрачає стійкості на всьому діапазоні робочих частот.

Були побудовані амплітудні та фазові частотні характеристики. Для випадку залежності перепаду тиску від частоти обертання, амплітудна характеристика не має резонансного піку, що підтверджується відсутністю критичних частот обертання.

## ВИСНОВКИ

1. Ущільнення з плаваючими кільцями представляє собою сукупність кільцевого та торцевого дроселів. Якщо гідродинамічна сила, що виникає в кільцевому зазорі більша за силу тертя на торцевій поверхні, то кільце здатне само центруватися відносно вала та забезпечувати безконтактну роботу. Контактний тиск визначається коефіцієнтом завантаженості  $k = S_1 / S_c$ . Кільце пов'язане з валом системою гідродинамічних сил та моментів, що виникають в кільцевому зазорі та здійснює коливання під дією кінематичного збудження зі сторони вала.

2. Статичний розрахунок кільця полягає у записі рівнянь рівноваги системи сил та моментів, що діють на кільце. Умова самоцентрування описується формулою (2.8) та для розрахункових параметрів ущільнення виливається в нерівність  $\varepsilon_{min} \geq 0.47$ , тоді як значення допустимого ексцентриситету лежать в межах  $\varepsilon_* \leq 0.5 \div 0.7$ . Відносний ексцентриситет не може перевищувати значення 0.7. Якщо остання умова не виконується, то гідродинамічні сили не здатні центрувати кільце. Умовою статичної стійкості є додатність коефіцієнту статизму (2.10), котра не виконується, тобто кільце не здатне працювати без розкриття торцевого стику. При роботі насоса процес розкриття та закриття торцевого стику носить періодичний характер, що може призводити до втомних руйнувань. Тому необхідно вживати додаткових заходів для виконання умов статичної стійкості.

3. Побудова амплітудних та фазових частотних характеристик дає наочне уявлення про радіальні зміщення кільця під дією радіальних та кутових зміщень вала. Аналіз динамічної стійкості показав, що перекіс  $\theta_1$  та дифузорність  $\theta_2 < 0$  звужують область динамічної стійкості, тоді як конфузорність, радіальна та кутова гідростатична жорсткість та коефіцієнти демпфірування стабілізують кільце.

4. В результаті аналізу динаміки ротора в повітрі, була визначена власна частота недемпфіруваних коливань ротора, яка склала  $\omega_0 = 223.7 \text{ c}^{-1}$ .

Були побудовані амплітудна та фазова частотні характеристики: зовнішнє демпфірування значно зменшує амплітуди коливань; вектор прогину відстає за фазою від вектора відцентрової сили неврівноваженої маси. В результаті аналізу динаміки ротора в жорстких ущільненнях були виявлені власні частоти консервативної та неконсервативної (враховувався вплив сили в'язкого опору та циркуляційної сили). Для випадку консервативної системи гіроскопічна сила є достатньо малою в порівнянні з сумарною силою жорсткості вала та ущільнень, тому власні частоти консервативної системи можна вважати постійними  $s_1 \approx s_2 \approx -s_3 \approx -s_4 \approx \Omega_u = 622.6$ . Тобто гідростатична жорсткість ущільнень майже в 3 рази збільшує власну частоту ротора. Для неконсервативної системи: демпфіруюча та гіроскопічна сили в ущільненнях малі в порівнянні з сумарною силою жорсткості вала, тому не чинять суттєвого впливу на власні частоти, циркуляційна сила не впливає на власні частоти. Остання за відсутності в'язкого опору викликає ріст амплітуди вільних коливань за експоненціальним законом. Тобто якщо не враховувати дисипативні сили, то рух ротора під дією потенціальних, гіроскопічних та циркуляційних сил є нестійким. Були знайдені критичні частоти обертання: за постійного перепаду тиску на ущільненнях, чисельні підрахунки представлені в таблиці 4.5:  $\bar{\omega}_{u*1} \approx -\bar{\omega}_{u*4} \approx \bar{\omega}_{u*2} \approx -\bar{\omega}_{u*3} \approx 2.8$ . Якщо перепад тиску залежить від частоти обертання, то критичні частоти існують лише за умови  $a'_{31}/a_1 + 2\eta'_u - \xi_{u1}'^2 \leq 1$ , яка не виконується, тобто ротор стає жорсткішим – критичні частоти обертання стають недосяжними. Із отриманої умови випливає, що гідростатична та гіроскопічна сили сприяють цьому, тоді як демпфіруючі сили чинить зворотній вплив. Були встановлені межі стійкості для випадку постійного перепаду тиску на ущільненнях, які склали  $\bar{\omega}_{u1*} < 40.3$ ,  $\bar{\omega}_{u2*} > -40.3$ . При зменшенні циркуляційної сили діапазон розширюється. Дифузорність каналу зменшує демпфірування та гідростатичну жорсткість, що призводить до порушення умов стійкості. Основний дестабілізуючий вплив чинить циркуляційна сила. Якщо перепад тиску залежить від частоти обертання, то ротор не втрачає стійкості на

всьому діапазоні робочих частот. Були побудовані амплітудні та фазові частотні характеристики. Для випадку залежності перепаду тиску від частоти обертання, амплітудна характеристика не має резонансного піку, що підтверджується відсутністю критичних частот обертання.



## Список літератури

1. Amoser M. Strömungsfelder und Radikalkräfte in Labyrinthdichtungen hydraulischer Strömungsmaschinen: Doctoral Thesis: Zürich, 1995.  
<https://doi.org/10.3929/ethz-a-001494894>
2. Amoser M., Staubli T. Three-dimensional flow phenomena in labyrinth seals. The Ninth Conference on Fluid Machinery: Budapest. 1991 P. 1-9.
3. Athavale M.M., Hendricks R.C. A small perturbation CFD method for calculation of seal rotordynamic coefficients. International Journal of Machinery. 1996 .Vol. 2, No. 3. P. 167-177
4. Beda A., Simonowsky V. Analysis of a nonlinear elastic force in a relatively long annular seal and its impact on the dynamics of the rotor. App. Mech. Mater. 2014. 630, P. 240–247.
5. Black H.F. Effects of Fluid-Filled Clearance Spaces on Centrifugal Pump and Submerged Motor Vibrations. In Eighth Turbomachinery Symposium, College Station: Texas, Texas A&M University. 1979. P. 29-34.
6. Black H.F. Effects of Hydraulic Forces in Annular Pressure Seals on the Vibrations of Centrifugal Pump Rotors. Journal of Mechanic Engineering Science. 1969.11, P. 206-213.
7. Black H.F., Allaire, P., and Barret, L. Inlet Flow Swirl in Short Turbulent Annular Seal Dynamics. In Ninth International Conference on Fluid Sealing. Noordwijkerhout, Netherlands. 1981. P. 141-152
8. Brennen E. Ch., K.-D., Hydrodynamics of Pumps. Concepts ETI and Oxford Science Publications. 1994. P.300
9. Bullock J. The Effects of Imposed Pre-swirl on the Static and Rotordynamic Performance for Smooth Annular liquid Seals. M.S. Thesis in Mechanical Engineering: Texas, A&M University in College Station, TX. 2019. P. 162.
10. Chen W.C., Jackson E.D. Eccentricity and Misalignment Effects on the Performance of High. Pressure Annular Seals ASLE Trans. 1985. Vol. 28, 1. P. 104-110.

11. Childs D. W., Jordan L. T. The Multiple Contributions of Jørgen Lund's Ph.D. Dissertation, Self-Excited, Stationary Whirl Orbits of a Journal in Sleeve Bearings, RPI, 1966, Engineering Mechanics. 2003. Journal of Vibration and Acoustics, 125(4), 445. doi:10.1115/1.1605766
12. Childs D. W., Bullock, J. Static performance of smooth liquid annular seals in the transition and turbulent regimes. Paper presented at the Proceedings of the ASME Turbo Expo. 2021. 10 p. doi:10.1115/GT2021-58543
13. Moreland A. Influence of Pre-swirl and Eccentricity in Smooth Stator/Grooved Rotor Liquid Annular Seals, Measured Static and Rotordynamic Characteristics. M.S. Thesis: Texas A&M University, College Station, Texas. 2016. P.116