

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Факультет технічних систем та енергоефективних технологій
Кафедра комп'ютерної механіки імені Володимира Марцинковського

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

магістра

на тему

**Створення математичної моделі динаміки ротора на основі
обчислення дробового порядку**

Виконав: студент групи КМ.м-11
спеціальності 131 Прикладна механіка
ОПП «Комп'ютерна механіка»
Вікторія ЯКОВЧУК

Керівник проф. Іван ПАВЛЕНКО

Рецензент

Суми – 2022 р.

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра: 59 с., 9 рис., 2 табл., 24 джерела.

ОБЧИСЛЕННЯ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ, ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ,
СИЛА ДЕМПФУВАННЯ, КРИТИЧНА ЧАСТОТА, АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ.

Об'єкт дослідження: вільні та вимушені коливання роторних систем.

Предмет дослідження: стійкість руху з урахуванням сил дробового порядку у підшипниках і ущільненнях.

Мета роботи: розробка та обґрунтування науково-методичного підходу до забезпечення вібраційної надійності роторних машин з урахуванням дробового порядку демпфіруючої сили.

Методи дослідження. На теоретичному рівні застосовувались методи розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь дробового порядку Рімана–Ліувілля та Грюнвальда–Летнікова для функцій комплексних змінних. Чисельні дослідження, у тому числі для реалізації перетворень Лапласа і Капуто проводились із застосуванням системи комп'ютерної алгебри. Динамічний аналіз роторних систем здійснювався із застосуванням методу комплексних амплітуд. Динамічна стійкість системи досліджувалась за критерієм Гурвца–Рауса, а також із застосуванням методу Еванса для полюсів передаточної функції у комплексній площині.

Розглянуто традиційну модель динаміки одномасового гнучкого ротора і визначено, що для забезпечення динамічної стійкості механічної системи всі корені характеристичного узагальненого комплексного рівняння динаміки ротора повинні мати від'ємні дійсні частини.

У третьому продемонстровано результати проведених розрахунків. А саме: коефіцієнт демпфування, амплітудна і фазочастотна характеристики, втрата стійкості та ідентифікація параметрів моделі дробового порядку.

Зміст

Вступ.....	4
1 Огляд літератури.....	6
1.1 Означення дробової похідної.....	6
1.1.1 Дробова похідна Рімана-Ліувілля.....	7
1.1.2 Дробова похідна Грюнвальда-Летнікова.....	22
1.1.3 Дробова похідна Капуто.....	23
1.2 Динамічні характеристики ротора.....	27
1.2.1 Підшипники з масляним демпфіруванням.....	27
1.2.2 В'язкопружні матеріали у системі ротор-підшипник.....	31
1.2.3 Роторна система з похилою тріщиною.....	33
1.3 Висновки до першого розділу.....	38
2 Матеріали та основні методи досліджень.....	39
2.1 Традиційна модель.....	39
2.2 Модель дробового порядку.....	41
2.3 Динамічна стійкість.....	41
2.4 Висновки до другого розділу.....	42
3 Аналіз та узагальнення результатів досліджень.....	44
3.1 Коефіцієнт демпфування.....	44
3.2 Амплітудна і фазочастотна характеристики.....	44
3.3 Втрата стійкості.....	47
3.4 Дослідження ня стійкості методом Еванса.....	48
3.5 Ідентифікація параметрів моделі дробового порядку.....	52
3.6 Висновки до третього розділу.....	55
Висновки.....	56
Перелік джерел посилання.....	57

ВСТУП

Фундаментальну роль у роботі обладнання та терміні його служби відіграє вібрація, оскільки вона може призвести до поломок. Надійність і довговічність будь-якого механізму – одне з основних завдань, яке ставлять перед їх розробниками.

Так, як параметри роторних машин мають тенденцію постійно зростати, підвищення їх вібраційної надійності є однією із найважливіших проблем сучасного машинобудування. Саме тому ідентифікація параметрів механізму вібровідповіді є цінною для технічної діагностики та прогнозного обслуговування роторних машин [15]. Сучасна промисловість залежить від точності вибору вібраційного стану ротора, адже це може забезпечити вібраційну надійність роторних машин [16]. А також не слід забувати про динамічну стійкість руху ротора, яка також є суттєвим фактором забезпечення вібраційної надійності роторної машини [17].

Метою роботи є розробка та обґрунтування науково-методичного підходу до забезпечення вібраційної надійності роторних машин з урахуванням дробового порядку демпфіруючої сили.

Перед дослідженням були поставлені наступні завдання:

1. Традиційна модель динаміки для одномасового гнучкого ротора повинна бути розширена шляхом розгляду демпфіруючої сили дробового порядку. Цю модель слід узагальнити та представити у вигляді єдиного безрозмірного комплексного диференціального рівняння дробового порядку.
2. Слід визначити вираз для коефіцієнта демпфування дробового порядку. Він також повинен задовольняти подібність фізичних розмірів.
3. Амплітудна і фазо-частотна характеристики поворотної системи повинні бути визначені аналітично. Слід також визначити вплив дробового порядку на амплітуду та фазу вимушених коливань.

4. Слід перевірити динамічну стійкість ротора, враховуючи дробове походження амортизаційної сили.

Крім того, слід розробити єдиний підхід для оцінки як дробового порядку, так і коефіцієнта демпфування. Цифрове дослідження також має підтвердити це. Нарешті, надійність запропонованої моделі повинна бути обґрунтована її зведенням до іншого типу існуючих надійних рішень.

Об'єкт дослідження – вільні та вимушені коливання роторних систем.

Предмет дослідження – стійкість руху з урахуванням сил дробового порядку у підшипниках і ущільненнях.

Методи дослідження. На теоретичному рівні застосовувались методи розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь дробового порядку Рімана–Ліувілля та Грюнвальда–Летнікова для функцій комплексних змінних. Чисельні дослідження, у тому числі для реалізації перетворень Лапласа і Капуто проводились із застосуванням системи комп'ютерної алгебри. Динамічний аналіз роторних систем здійснювався із застосуванням методу комплексних амплітуд. Динамічна стійкість системи досліджувалась за критерієм Гурвца–Рауса, а також із застосуванням методу Еванса для полюсів передаточної функції у комплексній площині.

Робота складається з 3 розділів.

У першому розділі дано означення дробової похідної та розглянуто декілька її варіацій, а також сфери застосування.

У другому розділі розглянуто традиційну модель динаміки одномасового гнучкого ротора і визначено, що для забезпечення динамічної стійкості механічної системи всі корені характеристичного узагальненого комплексного рівняння динаміки ротора повинні мати від'ємні дійсні частини.

У третьому розділі продемонстровано результати проведених розрахунків. А саме: коефіцієнт демпфування, амплітудна і фазочастотна характеристики, втрата стійкості та ідентифікація параметрів моделі дробового порядку.

1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Означення дробової похідної

Дробове числення є надзвичайно корисним інструментом для осмислення складного світу, що нас оточує. У багатьох роботах сучасних науковців доведено, що значення дробового числення є надзвичайно переконливим у різних явищах, таких як процеси дифузії, взаємодії на великій відстані, в'язкопружності, матеріалах тощо. Виявляється, дробове числення надає велику кількість переваг, які пропонують цікаві рішення для системного моделювання та керування, машинного навчання розробки та алгоритмів оптимізації.

Відомим є той факт, що багато фізичних процесів описуються динамічними системами, в яких враховуються похідні дробового порядку. Область застосовності диференціальних рівнянь дробового порядку значно ширша ніж диференціальних рівнянь з цілочисловим диференціюванням, оскільки останні є їх частковим випадком [1].

Підвищений інтерес до диференціальних рівнянь дробового порядку обомовлено їх фізичною інтерпретацією. Показано, що перехід до похідної дробового порядку за часом дозволяє враховувати ефекти пам'яті системи. Це дозволяє отримувати принципово нові результати, більш глибоко осмислити відомі результати, створити нові адекватні кількісні моделі досліджуваних явищ. Числення дробового порядку має такі переваги:

1. Дробове числення має глобальну кореляцію та може краще відображати залежний від часу процес розвитку системних функцій. Однак обчислення цілого порядку має локальність і не підходить для опису процесу, що залежить від часу.

2. У порівнянні з традиційною нелінійною моделлю, фізичне значення дробової моделі більш чітке, а вираз більш стислий, коли модель дробового числення використовується для опису складних фізичних і механічних проблем.

Також відомо, що апарат диференціального та інтегрального числення дробового порядку дозволяє якнайкраще будувати адекватні математичні моделі у фізиці і техніці, хімії, біології, фінансовій справі та ін. Найбільш інтенсивно дробовий аналіз застосовується у сферах зв'язаних з лінійною в'язкопружністю (наприклад, [1, 2, 3]) завдяки здатності моделювати спадкові явища з довгою пам'яттю. Ефективним є також використання дробових похідних у моделях аномальної дифузії [5, 6], теорії керування [1], електродинаміки, нелінійної гідроакустики, для обробки багатовимірних сигналів у радіофізиці та радіолокації тощо [1].

У застосуваннях дробового інтегро-диференціювання найчастіше використовують три широко схвалені визначення дробової похідної, включаючи визначення Рімана–Ліувілля, визначення Грюнвальда–Летнікова і визначення Капуто. Нагадаємо деякі означення та зв'язок між ними [1].

1.1.1 Дробова похідна Рімана–Ліувілля

Дробова похідна Рімана–Ліувілля є лівооберненою до дробового інтеграла Рімана–Ліувілля, який є природним узагальненням формули Коші для n -кратної первісної функції y . Щодо задач початкового значення для дробових диференціальних рівнянь із дробовими похідними у розумінні Рімана–Ліувілля, вони повинні бути задані як початкові значення дробового інтеграла $J^{n-\alpha}y$ та його похідних цілого порядку $k = 1, 2, \dots, m - 1$ [7]

Нагадаємо наступну формулу Коші:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x - x_n)^{n-1} f(x_n) dx_n ,$$

доведення якої відбувається за допомогою метода математичної індукції. Зауважимо, що $(n-1)! = \Gamma(n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Інтеграли

$$(I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a, \quad (1)$$

$$h(I_{b+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, x < b \quad (2)$$

де $\alpha > 0$, називають інтегралами дробового порядку α . Інтеграли (1), (2) прийнято називати також дробовими інтегралами Рімана-Ліувілля, лівостороннім та правостороннім відповідно. Для інтегралів (1), (2) справджуються наступні властивості:

- 1) $I^{\alpha}(f + g) = I^{\alpha}f + I^{\alpha}g$,
- 2) $I^{\alpha}(Cf) = CI^{\alpha}f$,
- 3) $I^{\alpha}I^{\beta}f = I^{\beta}I^{\alpha}f = I^{\alpha+\beta}f$.

Доведемо, наприклад, третю властивість. Маємо:

$$\begin{aligned} (I^{\alpha}I^{\beta}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (I^{\beta}f)(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-z)^{\beta-1} f(z) dz \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(z) dz \int_z^x (x-t)^{\alpha-1} (t-z)^{\beta-1} dt = [t-z = y] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(z) dz \int_0^{x-z} (x-z-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy = [y = (x-z)w] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(z) (x-z)^{\alpha+\beta-1} dz \int_0^1 w^{\beta-1} (1-w)^{\alpha-1} dw \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x f(z) (x-z)^{\alpha+\beta-1} dz = (I^{\alpha+\beta}f)(x) \end{aligned}$$

Що стосується дробового диференціювання, то його природно ввести, як операцію, обернену дробовому інтегруванню. Для функції $\varphi(x)$, заданої на відрізку $[a; b]$, вирази [7]

$$(D_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad (3)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{\alpha}}, \quad (4)$$

називатимемо дробовою похідною порядку α , $0 < \alpha < 1$, лівосторонньою та правосторонньою відповідно. Дробові похідні (3), (4) називають похідними Рімана-Ліувілля. Розглянемо основні властивості дробової похідної. Формула

зв'язку між похідною та інтегралом Рімана-Ліувілля має вигляд:

$$D^\alpha \varphi = \frac{d}{dx} (I^{1-\alpha}) \Rightarrow (D_{a+}^\alpha \varphi) = \frac{d}{dx} I_{a+}^{1-\alpha}, (D_{b+}^\alpha \varphi) = \frac{d}{dx} I_{b+}^{1-\alpha}$$

Тому, властивості похідної дробового порядку, є властивостями похідної першого порядку і інтеграла Рімана-Ліувілля.

- 1) $D^\alpha (f - g) = D^\alpha f - D^\alpha g$,
- 2) $D^\alpha C f = C D^\alpha f$,
- 3) $D^\alpha (D^\beta f) \neq D^\beta D^\alpha f$,
- 4) $D^\alpha (D^\beta f) \neq D^{\alpha+\beta} f$.

Доведемо властивості 3) та 4). Для цього запишемо дробову похідну від конкретної функції. Наприклад $f(x) = x^\nu$ [7].

Тоді, $D^\alpha x^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} x^{\nu-\alpha}$. Візьмемо $\nu = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$ та отримаємо:

$$D^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} x^0 = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad D^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(0)} x^{-1} = 0,$$

$$D^{\frac{3}{2}} \left(D^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\pi} x^{-\frac{3}{2}}}{2 \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \neq D^{\frac{1}{2}} \left(D^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right) = 0,$$

$$D^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} = D^2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{3}{2}} = -\pi x^{-\frac{3}{2}} \neq D^{\frac{1}{2}} \left(D^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right) = 0$$

Загальні дробові похідні та загальні дробові інтеграли типу Рімана-Ліувілля з ядрами Соніна k та κ , відповідно, є узагальненням дробового інтеграла Рімана-Ліувілля та дробової похідної Рімана-Ліувілля, що відповідають випадку степеневих ядер $k(t) = h_{1-\alpha}(t)$ і $\kappa(t) = h_\alpha(t)$ з $\alpha \in (0, 1)$. Таким чином, «узагальнені порядки» загальної дробової похідної та загальних дробових інтегралів з будь-якими ядрами Соніна k та κ обмежені інтервалом $(0, 1)$ [7]. Однак відомо, що як дробовий інтеграл Рімана-Ліувілля, так і дробова похідна Рімана-Ліувілля визначені для будь-якого невід'ємного дійсного порядку α :

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(t) := (h_{\alpha} * f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0, \alpha > 0, \quad (5)$$

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(t) := \frac{d^n}{dt^n} (h_{n-\alpha} * f)(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_{0+}^{\alpha} f)(t),$$

$$t > 0, n \in N, n - 1 \leq \alpha < n. \quad (6)$$

Для визначення загальної дробової похідної та загального дробового інтегралу довільного невід'ємного дійсного порядку в [8] умова Соніна розширена до такого вигляду:

$$(k * k)(t) = \{1\}^{(n)}(t), n \in N, t > 0, \quad (7)$$

де

$$\{1\}^{(n)}(t) := (\{1\} * \dots * \{1\})(t) = h_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Проте сама по собі умова (7) не забезпечує суттєвої вимоги до ядра k будь-якої дробової похідної, а саме умови, що це ядро має мати сингулярність на початку координат. У роботі [8] введено важливий клас ядер, що задовольняють умову (7) та мають на початку координат інтегровну сингулярність степеневого типу.

Означення 1 ([8]). Нехай функції k і k задовольняють умову (7) з $n \in N$ і виконуються включення $k \in C_{-1}(0, +\infty)$ та $k \in C_{-1,0}(0, +\infty)$, де

$$C_{-1}(0, +\infty) := \{f: f(t) = t^p f_1(t), t > 0, p > -1, f_1 \in C[0, +\infty)\}, \quad (8)$$

$$C_{-1,0}(0, +\infty) = \{f: f(t) = t^p f_1(t),$$

$$t > 0, -1 < p < 0, f_1 \in C[0, +\infty)\} \quad (9)$$

Множину пар (k, k) таких ядер позначимо \mathcal{L}_n .

Означення 2 ([8]). Нехай (k, k) — пара ядер з \mathcal{L}_n . загальний дробовий інтеграл з ядром k визначається формулою

$$(I_{(k)}f)(t) := (k * f)(t) = \int_0^t k(t - \tau)f(\tau)d\tau, \quad t > 0. \quad (10)$$

Загальна дробова похідна типу Рімана–Ліувілля визначається як набір похідної n -го порядку та загального дробового інтегралу з ядром k :

$$(D_{(k)}f)(t) := \frac{d^n}{dt^n} (k * f)(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_{(k)}f)(t), \quad t > 0. \quad (11)$$

Загальна дробова похідна типу Капуто є регуляризованою формою загальної дробової похідної у розумінні Рімана–Ліувілля:

$$({}_*D_{(k)}f)(t) := \left(D_{(k)}(f(\cdot) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0)h_{j+1}(\cdot)) \right)(t), \quad t > 0. \quad (12)$$

Зауваження 1. Варто зазначити, що включення $(k, k) \in \mathcal{L}_n$ можна інтерпретувати як твердження, що загальний дробовий інтеграл (10) з ядром k та загальна дробова похідна (11) та (12) з ядром k мають «узагальнений порядок» з простору $(n - 1, n)$. Наприклад, для $\alpha \in (n - 1, n)$, $n \in \mathbb{N}$ ядра $k = h_\alpha$ та $k = h_{n-\alpha}$ задовольняють умову (7):

$$(h_\alpha * h_{n-\alpha})(t) = h_n(t) = \{1\}^{(n)}(t).$$

Крім того, виконуються включення $h_\alpha \in C_{-1}(0, +\infty)$ та $h_{n-\alpha} \in C_{-1,0}(0, +\infty)$. У такий спосіб, $(h_\alpha, h_{n-\alpha}) \in \mathcal{L}_n$ і загальний дробовий інтеграл (10) і загальна дробова похідна (11) зводяться до дробового інтеграла Рімана–Ліувілля (5) та дробової похідної Рімана–Ліувілля (6) довільного невід’ємного порядку, відповідним чином [7].

У праці [8] наведені такі властивості загального дробового інтегралу (18) довільного порядку на просторі $C_{-1}(0, +\infty)$:

$$I_{(k)}: C_{-1}(0, +\infty) \rightarrow C_{-1}(0, +\infty) \text{ (властивість відображення),} \quad (13)$$

$$I_{(k_1)}I_{(k_2)} = I_{(k_2)}I_{(k_1)} \text{ (закон комутативності),} \quad (14)$$

$$I_{(k_1)}I_{(k_2)} = I_{(k_1 * k_2)} \text{ (закон індексу).} \quad (15)$$

Що стосується загальної дробової похідної (11) довільного порядку, то

це лівий зворотний оператор до загального дробового інтегралу (10).

Теорема 1 ([8]). Нехай виконується включення $(\kappa, k) \in \mathcal{L}_n$. Тоді загальна дробова похідна (11) є лівим оберненим оператором до загального дробового інтегралу (10) на просторі $C_{-1}(0, +\infty)$:

$$(D_{(k)}I_{(\kappa)}f)(t) = f(t), \quad f \in C_{-1}(0, +\infty), t > 0. \quad (16)$$

Тут ми зазначимо, що твердження, сформульоване в теоремі 1, переважно називають першою фундаментальною теоремою дробового числення для загальної дробової похідної (11) довільного порядку.

Крім того, просто помітити, що загальна дробова похідна (11) довільного порядку також є правим оберненим оператором до загального дробового інтегралу (10) на просторі

$$C_{-1,(\kappa)}^1(0, +\infty) := \{f: f(t) = (I_{(\kappa)}\phi)(t), \phi \in C_{-1}(0, +\infty)\}, \quad (17)$$

тобто відношення

$$(I_{(\kappa)}D_{(k)}f)(t) = f(t), t > 0 \quad (18)$$

відповідає дійсності. Справді, функцію $f \in C_{-1,(\kappa)}^1(0, +\infty)$ можна представити у вигляді $f(t) = (I_{(\kappa)}\phi)(t)$, $\phi \in C_{-1}(0, +\infty)$, отже, маємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned} (I_{(\kappa)}D_{(k)}f)(t) &= \left(I_{(\kappa)} \frac{d^n}{dt^n} (\kappa * f) \right) (t) = \left(I_{(\kappa)} \frac{d^n}{dt^n} (k * (\kappa * f)) \right) (t) = \\ &= \left(I_{(\kappa)} \frac{d^n}{dt^n} (\{1\}^{(n)} * \phi) \right) (t) = (I_{(\kappa)}\phi)(t) = f(t). \end{aligned}$$

Доцільно зазначити, що формула (26) передбачає нульові початкові умови для будь-яких дробових диференціальних рівнянь із загальною дробовою похідною (11), визначеною на просторі $C_{-1,(\kappa)}^1(0, +\infty)$, через те що, його нульовий простір складається лише з функції, яка тотожно дорівнює нулю для $t > 0$.

$$C_{-1,(k)}^{(1)}(0, +\infty) = \{f \in C_{-1}(0, +\infty) : D_{(k)}f \in C_{-1}(0, +\infty)\}. \quad (19)$$

Очевидно, включення $C_{-1,(k)}^1(0, +\infty) \subset C_{-1,(k)}^{(1)}(0, +\infty)$, виконується за теоремою 1. У випадку похідної n -го порядку простору $C_{-1,(k)}^{(1)}(0, +\infty)$, відповідає простір n -кратно неперервно диференційовних функцій, а простір $C_{-1,(k)}^1(0, +\infty)$ складається з усіх функцій, які можна представити як n -кратні інтеграли від неперервних функцій. Варто зауважити, що простори $C_{-1,(k)}^0(0, +\infty)$ та $C_{-1,(k)}^{(0)}(0, +\infty)$ можна інтерпретувати як простір $C_{-1,(k)}(0, +\infty)$ [7].

Далі також використовується інший підпростір простору $C_{-1}(0, +\infty)$:

$$C_{-1}^n(0, +\infty) = \{f \in C_{-1}(0, +\infty) : f^n \in C_{-1}(0, +\infty)\}. \quad (20)$$

Щоб сформулювати природні початкові умови для дробових диференціальних рівнянь з загальною дробовою похідною довільного порядку в сенсі Рімана-Ліувілля, визначених у просторі $C_{-1,(k)}^{(1)}(0, +\infty)$, нам потрібен опис його нульовий простір, що забезпечується наступною теоремою [7]:

Теорема 2. Нехай (κ, k) — пара ядер із \mathcal{L}_n і виконується включення $\kappa \in C_{-1}^{n-1}(0, +\infty)$.

Тоді загальна дробова похідна (11), визначена на просторі $C_{-1,(k)}^{(1)}(0, +\infty)$, має такий n -вимірний нульовий простір:

$$\text{Ker}D_{(k)} = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^{n-1-i}_{\kappa}}{dt^{n-1-i}}, a_0, \dots, a_{n-1} \in R \right\}. \quad (21)$$

Доведення. Рівняння

$$(D_{(k)}f)(t) = \frac{d^n}{dt^n}(I_{(k)}f)(t) = 0, \quad t > 0$$

має на увазі

$$(I_{(k)}f)(t) = P_{n-1}(t) = a_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + a_{n-2} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + a_0,$$

$$t > 0, a_0, \dots, a_{n-1} \in R$$

які можна переписати у формі

$$(k * f)(t) = a_{n-1}\{1\}^{(n)}(t) + a_{n-2}\{1\}^{(n)}(t) + \dots + a_0\{1\}, t > 0. \quad (22)$$

Розглянемо тепер згортку рівняння (22) з ядром k , пов'язаним з ядром k $D_{(k)}$. Виходячи з умови (7), ліва частина рівняння набуває вигляду n -кратного визначеного інтегралу:

$$(k * (k * f))(t) = ((k * k) * f)(t) = (\{1\}^{<n>} * f)(t), t > 0.$$

Праву частину рівняння можна представити так:

$$(k * (a_{n-1}\{1\}^{<n>} + a_{n-2}\{1\}^{<n-1>} + \dots + a_0\{1\}))(t) =$$

$$(a_{n-1}k * \{1\}^{<n>})(t) + (a_{n-2}k * \{1\}^{<n-1>})(t) + \dots + (a_0k * \{1\})(t).$$

Тоді ми приходимо до рівняння

$$(\{1\}^{<n>} * f)(t) = (\{1\}^{<n>} * a_{n-1}k)(t) + (\{1\}^{<n-1>} * a_{n-2}k)(t) + \dots +$$

$$+(\{1\} * a_0k)(t), t > 0.$$

Внаслідок включення $k \in C_{-1}^{n-1}(0, +\infty)$ при $t > 0$ можна продиференціювати останнє рівняння n разів і таким чином отримати представлення [7]

$$f(t) = a_{n-1}k + a_{n-2} \frac{dk}{dt} + \dots + a_0 \frac{d^{n-1}k}{dt^{n-1}}, t > 0$$

що завершує доказ теореми.

У випадку дробової похідної Рімана–Ліувілля (6) порядку α , $n - 1 < \alpha < n, n \in N$, функція k є степеневою функцією $h_{n-\alpha}$, а пов'язане з нею ядро k є функцією h_α . Завдяки очевидному співвідношенню $\frac{d}{dt} h_\alpha = h_{\alpha-1}$, $t > 0$, формула (21) з теореми 2 набуває відомого вигляду:

$$\text{Ker}D_{0+}^{\alpha} = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{t^{\alpha-n+i}}{\Gamma(\alpha-n+i+1)}, a_0, \dots, a_{n-1} \in R \right\}. \quad (23)$$

Опис нульового простору загальної дробової похідної (11) довільного порядку, сформульований у теоремі 2, тепер використовується для доказу наступної важливої теореми:

Теорема 3 [7] Друга фундаментальна теорема дробового числення для загальної дробової похідної довільного порядку в розумінні Рімана–Ліувілля. Нехай (κ, k) — пара ядер з \mathcal{L}_n та $\kappa \in C_{-1}^{n-1}(0, +\infty)$.

Для функції $f \in C_{-1,(\kappa)}^{(1)}(0, +\infty)$, формула

$$(I_{(\kappa)}D_{(k)}f)(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{d^i}{dt^i} I_{(k)}f \right) (0) \frac{d^{n-1-i}\kappa}{dt^{n-1-i}}, t > 0 \quad (24)$$

є вірною.

Доведення. Спочатку ми визначаємо допоміжну функцію наступним чином:

$$\psi(t) := (I_{(\kappa)}D_{(k)}f)(t), t > 0 \quad (25)$$

Для функції $f \in C_{-1,(\kappa)}^{(1)}(0, +\infty)$, включення $\psi \in C_{-1,(\kappa)}^1(0, +\infty) \subset C_{-1,(\kappa)}^{(1)}(0, +\infty)$, є вірною. Отже, с (11) функції ψ існує і належить простору $C_{-1}(0, +\infty)$. З теореми 1 випливає співвідношення

$$(D_{(k)}\psi)(t) = (D_{(k)}I_{(\kappa)}D_{(k)}f)(t) = (D_{(k)}f)(t), t > 0$$

це означає, що функція $\psi - f$ належить ядру загальної дробової похідної $D_{(k)}$. Відповідно до теореми 2 отримуємо представлення

$$\psi(t) - f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^{n-1-i}}{dt^{n-1-i}}, t > 0 \quad (26)$$

з деякими сталими $a_0, \dots, a_{n-1} \in R$. Щоб визначити ці константи, застосуємо загальний дробовий інтеграл $I_{(\kappa)}$ до представлення (26) і використаємо умову (7) для ядер $(\kappa, k) \in \mathcal{L}_n$ і включення $\kappa \in C_{-1}^{n-1}(0, +\infty)$, щоб

отримати наступні рівняння [7]:

$$\begin{aligned} (I_{(k)}(\psi - f))(t) &= (I_{(k)}\psi)(t) - (I_{(k)}f)(t) = \left(k * \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^{n-1-i} \kappa}{dt^{n-1-i}}\right)(t) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^{n-1-i}}{dt^{n-1-i}} (k * \kappa)(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \{1\}^{<i+1>}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{t^i}{i!}. \end{aligned}$$

Комбінуючи цю формулу з поданням

$$(I_{(k)}\psi)(t) = (I_{(k)}I_{(\kappa)}D_{(k)}f)(t) = (\{1\}^{<n>} * D_{(k)}f)(t),$$

приходимо до виразу

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{t^i}{i!} = (\{1\}^{<n>} * D_{(k)}f)(t) - (I_{(k)}f)(t). \quad (27)$$

Внаслідок включення $(D_{(k)}f) \in C_{-1}(0, +\infty)$, функція $g(t) = (\{1\}^{<n>} * D_{(k)}f)(t)$ належить простору $C^{n-1}([0, +\infty))$ і $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$ (див. [10]). Підставляючи $t = 0$ у (27), отримуємо формулу для коефіцієнта a_0 :

$$a_0 = -(I_{(k)}f)(0). \quad (28)$$

Диференціювання (27) за змінною t призводить до співвідношення

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = (\{1\}^{<n-1>} * D_{(k)}f)(t) - \frac{d}{dt}(I_{(k)}f)(t). \quad (29)$$

Підставляючи $t = 0$ у (29), отримуємо формулу для коефіцієнта a_1 :

$$a_1 = -\frac{d}{dt}(I_{(k)}f)(0). \quad (30)$$

Повторюючи ту саму операцію $(n - 1)$ разів, визначаємо всі коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_{n-1} :

$$a_i = -\frac{d^i}{dt^i}(I_{(k)}f)(0), i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (31)$$

Формула (24) безпосередньо впливає з формул (26) і (31) і використовуючи представлення (25) допоміжної функції ψ .

Зауваження 2. Теорему 3 можна переформулювати в термінах оператора проектора загальної дробової похідної типу Рімана–Ліувілля так [7]:

У просторі $C_{-1,(k)}^{(1)}(0, +\infty)$, оператор проектора F загальної дробової похідної типу Рімана–Ліувілля набуває вигляду [7]

$$(Ff)(t) := f(t) - (I_{(k)}D_{(k)}f)(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{d^i}{dt^i} I_{(k)}f \right) (0) \frac{d^{n-1-i}k}{dt^{n-1-i}}, t > 0. (32)$$

Права частина формули (32) вказує природні початкові умови, які повинні бути задані при роботі з початковими значеннями для дробових диференціальних рівнянь з загальної дробової похідної довільного порядку в розумінні Рімана–Ліувілля. Варто зазначити, що функція Ff завжди належить до ядра загальної дробової похідної $D_{(k)}$:

$$\begin{aligned} (D_{(k)}(Ff))(t) &= (D_{(k)}f)(t) - (D_{(k)}I_{(k)}D_{(k)}f)(t) = \\ &= (D_{(k)}f)(t) - (D_{(k)}f)(t) = 0, t > 0. \end{aligned}$$

Зауваження 3. Для загальної дробової похідної (11) “узагальненого порядку” з інтервалу $(0, 1)$ (випадок ядер $(k, k) \in \mathcal{L}_n$ теорему 3 сформульовано та доведено в [11]. У цьому випадку співвідношення (24) набуває вигляду

$$(I_{(k)}D_{(k)}f)(t) = f(t) - (I_{(k)}f)(0)k(t), t > 0. (33)$$

Зауваження 4. Як зазначено у зауваженні 1, пара функцій $k(t) = h_\alpha(x)$, $n - 1 < \alpha < n$, $n \in N$ та $k(t) = h_{n-\alpha}(x)$ належить до набір ядер \mathcal{L}_n . У цьому випадку загальний дробовий інтеграл (10) та загальна дробова похідна (11) зводяться відповідно до дробового інтегралу Рімана–Ліувілля I_{0+} та дробової похідної Рімана–Ліувілля D_{0+}^α порядку α , а формула (24) приймає форму [12-13]:

$$\begin{aligned} (I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha f)(t) &= f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{d^i}{dt^i} I_{0+}^{n-\alpha} f \right) (0) h_{\alpha-n+i+1}(t) = \\ &= f(t) - \sum_{j=1}^n (D_{0+}^{\alpha-j} f)(0) \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, t > 0 \end{aligned} (34)$$

У дробовому численні однією з важливих тем дослідження є послідовні дробові похідні та диференціальні рівняння з цими похідними. m -кратний загальний дробовий інтеграл та m -кратна послідовна загальна дробова похідна як типу Рімана–Ліувілля, так і типу Капуто [7].

Означення 3. Нехай $(\kappa, k) \in \mathcal{L}_n, n \in \mathbb{N}$, m -кратний загальний дробовий інтеграл визначається як композиція m загальний дробовий інтеграл з ядром κ

$$(I_{(\kappa)}^{<m>} f)(t) := \left(\underbrace{I_{(\kappa)} \dots I_{(\kappa)}}_{m \text{ times}} f \right) (t) = (\kappa^{<m>} * f)(t), \quad t > 0, \quad (35)$$

де ступінь згортки $g^{(m)}, m \in \mathbb{N}_0$, функції g визначається виразом

$$g^{<m>}(t) := \begin{cases} 1, & m = 0, \\ g(t), & m = 1, \\ \left(\underbrace{g * \dots * g}_{m \text{ times}} \right) (t), & m = 2, 3 \dots \end{cases} \quad (36)$$

m -кратна послідовна загальна дробова похідна у сенсі Рімана–Ліувілля визначається наступним чином [7]:

$$(D_{(k)}^{<m>} f)(t) := \left(\underbrace{D_{(k)} \dots D_{(k)}}_{m \text{ times}} f \right) (t), \quad t > 0. \quad (37)$$

Для $m = 0$ ми визначимо оператори $I_{(\kappa)}^{<0>}$ та $D_{(k)}^{<0>}$ як оператор тотожності Id . У формулі (35) ядро $\kappa^{<m>}, m \in \mathbb{N}$ належить простору $\mathcal{C}_{-1}(0, +\infty)$, таким чином, m -кратний загальний дробовий інтеграл зводиться до загальний дробовий інтеграл з ядром $\kappa^{<m>}$

$$(I_{(\kappa)}^{<m>} f)(t) = (\kappa^{<m>} * f)(t) = (I_{(\kappa)}^{<m>} f)(t), \quad t > 0. \quad (38)$$

m -кратна послідовна загальна дробова похідна (37) є узагальненням послідовної дробової похідної Рімана–Ліувілля на випадок інтегро-диференціальних операторів з ядрами з \mathcal{L}_n . Повторно застосовуючи теорему 1 для загального дробового інтегралу (10) та загальної дробової похідної (11),

отримуємо такий результат [7]:

Теорема 4 (Перша фундаментальна теорема дробового числення для m -кратної послідовної загальної дробової похідної довільного порядку). Нехай $(\kappa, k) \in \mathcal{L}_n, n \in \mathbb{N}$.

Тоді m -кратна послідовна загальна дробова похідна (37) у сенсі Рімана–Ліувілля є лівим оберненим оператором до m -кратного загального дробового інтегралу (35) на просторі $C_{-1}(0, +\infty)$,

$$(D_{(k)}^{<m>} I_{(\kappa)}^{<m>} f)(t) = f(t), \quad f \in C_{-1}(0, +\infty), \quad t > 0. \quad (39)$$

На певному підпросторі $C_{-1}(0, +\infty)$, m -кратна послідовна загальна дробова похідна (37) довільного порядку також є правим оберненим оператором до m -кратного загального дробового інтегралу (35).

Теорема 5. [7] Нехай $(\kappa, k) \in \mathcal{L}_n, n \in \mathbb{N}$. Тоді m -кратна послідовна загальна дробова похідна (37) у сенсі Рімана–Ліувілля є правим оберненим оператором до m -кратного загального дробового інтегралу (43) на просторі

$$C_{-1,(\kappa)}^m(0, +\infty) := \{f: f(t) = (I_{(\kappa)}^{<m>} \phi)(t), \quad \phi \in C_{-1}(0, +\infty)\}, \quad (40)$$

тобто відношення

$$(I_{(\kappa)}^{<m>} D_{(k)}^{<m>} f)(t) = f(t), \quad f \in C_{-1,(\kappa)}^m(0, +\infty), \quad t > 0 \quad (41)$$

є вірним. Крім того, на цьому просторі m -кратна послідовна загальна дробова похідна (37) може бути представлена як загальна дробова похідна з ядром $k^{<m>}$:

$$(D_{(k)}^{<m>} f)(t) = (D_{(k)^{<m>}} f)(t), \quad f \in C_{-1,(\kappa)}^m(0, +\infty), \quad t > 0. \quad (42)$$

Доведення. Для функції $f \in C_{-1,(\kappa)}^m(0, +\infty)$ маємо представлення $f(t) = (I_{(\kappa)}^{<m>} \phi)(t), \phi \in C_{-1}(0, +\infty)$, що за теоремою 4 призводить до наступних рівнянь [7]:

$$(I_{(k)}^{<m>} D_{(k)}^{<m>} f)(t) = (I_{(k)}^{<m>} D_{(k)}^{<m>} I_{(k)}^{<m>} \phi)(t) = (I_{(k)}^{<m>} \phi)(t) = f(t).$$

Це доводить співвідношення (41).

Щодо формули (42), ми обчислюємо її ліву та праву частини для функції $C_{-1,(k)}^m(0, +\infty)$ з використанням теорем 1, 4 та представлення (38) [7]:

$$(D_{(k)}^{<m>} f)(t) = (D_{(k)}^{<m>} I_{(k)}^{<m>} \phi)(t) = \phi(t), t > 0$$

та

$$(D_{(k)}^{<m>} f)(t) = (D_{(k)}^{<m>} I_{(k)}^{<m>} \phi)(t) = (D_{(k)}^{<m>} I_{(k)}^{<m>} \phi)(t) = \phi(t), t > 0$$

що завершує доказ теореми.

Звичайно, формула (41) не справедлива для m -кратної послідовної загальної дробової похідної (37), визначеної в її природній області

$$C_{-1,(k)}^{(m)}(0, +\infty) = \{f \in C_{-1}(0, +\infty) : D_{(k)}^{<i>} \in C_{-1}(0, +\infty), i = 1, \dots, m\}.(43)$$

Для пари ядер $(\kappa, k) \in \mathcal{L}_n, n \in N$ простір $C_{-1,(k)}^m(0, +\infty)$, визначений рівнянням (40), є підпростором простору $C_{-1,(k)}^m(0, +\infty)$ через теорему 4. Про простір k оператор проектора m -кратної послідовної загальної дробової похідної (37) приймає форму, описану в наступній теоремі [7].

Теорема 6. Нехай $f \in C_{-1,(k)}^{(m)}(0, +\infty)$

Оператор проектора F_m m -кратної послідовної загальної дробової похідної (37) можна представити наступним чином:

$$(F_m f)(t) := f(t) - (I_{(k)}^{<m>} D_{(k)}^{<m>} f)(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(I_{(k)}^{<i>} (F(D_{(k)}^{<i>} f)) \right) (t), t > 0, (44)$$

де F – оператор проектора (32) загальної дробової похідної $D_{(k)}$ типу Рімана–Ліувілля.

Доведення. На просторі $C_{-1,(k)}^{(m)}(0, +\infty)$, оператор тотожності Id можна представити таким чином:

$$\begin{aligned}
Id &= (Id - I_{(k)}D_{(k)}) + (I_{(k)}D_{(k)} - I_{(k)}^{<2>}D_{(k)}^{<2>}) + \dots + \\
&\quad + (I_{(k)}^{<m-1>}D_{(k)}^{<m-1>} - I_{(k)}^{<m>}D_{(k)}^{<m>}) = \\
&= (Id - I_{(k)}D_{(k)}) + (I_{(k)}(D_{(k)} - (I_{(k)}D_{(k)})D_{(k)})) + \dots + \\
&\quad + (I_{(k)}^{<m-1>}(D_{(k)}^{<m-1>} - (I_{(k)}D_{(k)})D_{(k)}^{<m-1>})) + I_{(k)}^{<m>}D_{(k)}^{<m>} = \\
&= F + (I_{(k)}F(D_{(k)})) + \dots + (I_{(k)}^{<m-1>}F(D_{(k)}^{<m-1>})) + I_{(k)}^{<m>}D_{(k)}^{<m>}.
\end{aligned}$$

Формула (44) безпосередньо впливає з останнього подання. Очевидно, що функція $(F_m f)(t)$ належить до ядра m -кратної послідовної загальної дробової похідної (37):

$$\begin{aligned}
(D_{(k)}^{<m>}(F_m f))(t) &= (D_{(k)}^{<m>}f)(t) - (D_{(k)}^{<m>}I_{(k)}^{<m>}D_{(k)}^{<m>}f)(t) = \\
&= (D_{(k)}^{<m>}f)(t) - (D_{(k)}^{<m>}f)(t) = 0.
\end{aligned}$$

З іншого боку, включення

$$Ker D_{(k)} \subset \dots \subset Ker D_{(k)}^{<m>}$$

впливають безпосередньо з визначення m -кратної послідовної загальної дробової похідної (37) [7].

Хоча дробові похідні типу Рімана–Ліувілля демонструють великі переваги, вони не застосовуються у всіх ситуаціях. Похідна Рімана–Ліувілля має певні недоліки при спробі моделювати явища реального світу за допомогою дробових диференціальних рівнянь. Похідна Рімана–Ліувілля від константи не дорівнює нулю. Крім того, якщо довільна функція є константою в початку координат, її дробова похідна має сингулярність у початку координат для миттєвої експоненціальної функції. Ці недоліки звужують область застосування дробової похідної Рімана–Ліувілля.

Похідна Капуто вимагає вищих умов регулярності для диференційованості : щоб обчислити дробову похідну функції в розумінні Капуто , ми повинні спочатку обчислити її похідну. Похідні Капуто визначені

лише для диференційованих функцій, тоді як функції, які не мають похідної першого порядку, можуть мати дробові похідні всіх порядків, менших за одиницю в розумінні Рімана–Ліувілля.

1.1.2 Дробова похідна Грюнвальда–Летнікова

Метод Грюнвальда–Летнікова був заснований 1867 року німецьким математиком Антоном Карлом Грюнвальдом та незалежно від нього російським математиком Олексієм Васильовичем Летніковим, котрі були не задоволені обмеженістю застосування підходу, запропонованого Ліувіллем.

Метод Грюнвальда–Летнікова діє ітераційно, але сума в схемі стає все довшою, що відображає ефект пам'яті. Цей підход забезпечує інтерполяцію між похідними цілого порядку. Коефіцієнти визначені рекурсивно та демонструють дуже гладкі властивості, наприклад, вони додатні та демонструють сильний ефект демпфування.

Розглянемо дробову похідну Грюнвальда–Летнікова ${}_a D_t^p f(t)$ степеневій функції

$$f(t) = (t - a)^v$$

де v - дійсне число.

Почнемо з розгляду від'ємних значень p , що означає, що ми почнемо з обчислення дробового інтеграла порядку $-p$.

$${}_a D_t^p f(t - a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} (\tau - a)^v d\tau, \quad (45)$$

і нехай для збіжності інтеграла $v > -1$. Виконуючи в (45) заміну $\tau = a + \xi(t - a)$, а потім використовуючи означення бета-функції, отримуємо [1]:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t - a)^v &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t - a)^{v-p} \int_0^1 \xi^v (1 - \xi)^{-p-1} d\xi = \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p, v + \\ 1) (t - a)^{v-p} &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t - a)^{v-p}, \quad (p < 0, v > -1), \end{aligned} \quad (46)$$

Тепер розглянемо випадок $0 \leq m \leq p < m + 1$. Тоді маємо:

$${}_a D_t^p f(t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} d\tau, \quad (47)$$

оскільки всі нецілі доданки дорівнюють 0.

Беручи до уваги

$$\frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} = v(v-1) \dots (v-m)(\tau-a)^{v-m-1} = \frac{\Gamma(v+1)}{v-m} (\tau-a)^{v-m-1}$$

і виконавши заміну $\tau = a + \xi(t-a)$ отримаємо [1]:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t-a)^v &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} (\tau-a)^{v-m-1} d\tau = \\ &= \frac{\Gamma(v+1)\Gamma(-p+m+1, v-m)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} (t-a)^{v-p} = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+v+1)} (t-a)^{v-p}. \end{aligned} \quad (48)$$

Зауваживши, що вираз (48) формально ідентичний виразу (46), можна зробити висновок, що дробова похідна Грюнвальда-Летнікова степеневій функції $f(t) = (t-a)^v$ задається формулою

$${}_a D_t^p f(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+v+1)} (t-a)^{v-p}, \quad (49)$$

$$(p < 0, v > -1) \text{ або } (0 \leq m \leq p < m + 1, v > m), \quad (50)$$

З теоретичної точки зору клас функцій, для яких визначено розглянуте Грюнвальдом-Летніковим визначення дробової похідної $((m+1)$ - кратно безперервно диференційовних функцій), дуже вузький. Однак у більшості прикладних задач, що описують безперервні фізичні, хімічні та інші процеси, ми маємо справу з такими дуже однорідними функціями [1].

1.1.3 Дробова похідна Капуто

Визначення дробового диференціювання типу Рімана-Ліувілля зіграло важливу роль у розвитку теорії дробових похідних та інтегралів і для її

застосування в чистій математиці.

Проте вимоги сучасної техніки вимагають певного перегляду усталеного чисто математичного підходу. З'явилася низка робіт, особливо в теорії в'язкопружності та в механіці твердого тіла, де дробові похідні використовуються для кращого опису властивостей матеріалу. Математичне моделювання на основі вдосконалених реологічних моделей природно призводить до диференціальних рівнянь дробового порядку — і до необхідності формулювання початкових умов для таких рівнянь.

Прикладні задачі вимагають визначення дробових похідних, що дозволяє використовувати фізично інтерпретовані початкові умови, які містять $f(a)$, $f'(a)$, тощо.

Підхід, розроблений М. Капуто, дозволяє сформулювати початкові умови для задач початкового значення для диференціальних рівнянь дробового порядку у формі, що включає лише граничні значення похідних цілого порядку на нижньому терміналі (початковий час) $t = a$, такий як $y'(a)$, $y''(a)$ тощо. Існує невелика різниця між похідною Рімана–Ліувілля та похідною Капуто. Але визначення Капуто має переваги для проблем початкового значення. М. Капуто був першим, хто дав застосування дробового числення до механіки, особливо до лінійних моделей в'язкопружності [1].

Визначення Капуто можна записати так

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1 < \alpha < n). \quad (51)$$

У природних умовах на функцію $f(t)$ для $\alpha \rightarrow n$ похідна Капуто стає умовною n -ю похідною функції $f(t)$. Дійсно, припустимо, що $0 \leq n-1 < \alpha < n$ і що функція $f(t)$ має $n+1$ неперервних обмежених похідних у $[a, T]$ для кожного $T > a$. Потім

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) = f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Це говорить про те, що, подібно до підходів Грюнвальда-Летнікова та Рімана-Ліувілля, підхід Капуто також забезпечує інтерполяцію між похідними цілого порядку.

Основна перевага підходу Капуто полягає в тому, що початкові умови для дробових диференціальних рівнянь з похідними Капуто набувають такого ж вигляду, як і для диференціальних рівнянь цілого порядку, тобто містять граничні значення похідних цілого порядку невідомих функцій $t = a$.

Щоб підкреслити різницю у формі початкових умов, які повинні супроводжувати дробові диференціальні рівняння через похідні Рімана-Ліувілля та Капуто, наводяться відповідні формули Лапласа для випадку $a = 0$.

Формула для перетворення Лапласа дробової похідної Рімана-Ліувілля має вигляд

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \{ {}_0D_t^{\alpha} f(t) \} dt = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) |_{t=0}, \quad (52)$$

$$(n - 1 \leq \alpha < n)$$

тоді як формула Капуто вперше отримана в [18], для перетворення Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \{ {}_0^C D_t^{\alpha} f(t) \} dt = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (53)$$

$$(n - 1 < \alpha \leq n)$$

Бачимо, що перетворення Лапласа дробової похідної Рімана-Ліувілля дозволяє використовувати початкові умови типу

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) = b_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) = b_2,$$

$$\dots,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-n} f(t) = b_n,$$

що може викликати проблеми з їх фізичною інтерпретацією. Перетворення Лапласа похідної Капуто дозволяє використовувати початкові

значення класичних похідних цілого порядку з відомими фізичними інтерпретаціями. Щоб вибрати відповідну формулу перетворення Лапласа, дуже важливо розуміти, який тип визначення дробової похідної потрібно використовувати.

Інша відмінність між визначенням Рімана-Ліувілля і визначенням Капуто полягає в тому, що похідна Капуто від константи дорівнює 0, тоді як у випадках кінцевого значення нижнього терміналу a дробова похідна Ліувілля від константи C не дорівнює 0, але

$${}_0D_t^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (54)$$

Цей факт привів, наприклад, Охмана і Макарова до використання визначення Рімана-Ліувілля з $a = -\infty$. оскільки, з одного боку, з фізичної точки зору їм потрібна дробова похідна константи, що дорівнює нулю, а з іншого боку, формула дає 0, якщо $a \rightarrow -\infty$. Фізичний сенс цього кроку полягає в тому, що час початку фізичного процесу встановлено на $-\infty$. У такому випадку минулі ефекти неможливо вивчити. Однак прийняття $a = -\infty$. є необхідною абстракцією для розгляду стаціонарних процесів, наприклад, для вивчення реакції динамічної системи дробового порядку на періодичний вхідний сигнал, поширення хвилі у в'язкопружних матеріалах, тощо [1].

Розмістивши $a = -\infty$ в обох визначеннях і вимагаючи розумної поведінки $f(t)$ та його похідних для $t \rightarrow -\infty$, приходимо до формули [1]

$${}_{-\infty}D_t^\alpha f(t) = {}_{-\infty}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (55)$$

$$(n-1 < \alpha < n)$$

яка показує, що для дослідження стаціонарних динамічних процесів визначення Рімана-Ліувілля та визначення Капуто повинні давати адекватні результати.

Існує ще одна відмінність між підходами Рімана-Ліувілля та Капуто, а

саме, для похідної Капуто ми маємо [1]

$$\begin{aligned} {}_a^c D_t^\alpha ({}_a^c D_t^m f(t)) &= {}_a^c D_t^{\alpha+m} f(t), \\ (m = 0, 1, 2, \dots; n - 1 < \alpha < n) \end{aligned} \quad (56)$$

тоді як для похідної Рімана-Ліувілля

$$\begin{aligned} {}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) &= {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \\ (m = 0, 1, 2, \dots; n - 1 < \alpha < n) \end{aligned} \quad (57)$$

Переміна операторів диференціювання у формулах (56) і (57) допускається за різних умов:

$$\begin{aligned} {}_a^c D_t^\alpha ({}_a^c D_t^m f(t)) &= {}_a^c D_t^m ({}_a^c D_t^\alpha f(t)) = {}_a^c D_t^{\alpha+m} f(t), \\ f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = n, n + 1, \dots, m \\ (m = 0, 1, 2, \dots; n - 1 < \alpha < n) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} {}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) &= {}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t), \\ f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, m \\ (m = 0, 1, 2, \dots; n - 1 < \alpha < n) \end{aligned} \quad (59)$$

На відміну від підходу Рімана-Ліувілля, у випадку похідної Капуто немає обмежень на значення $f^{(s)}(0)$, ($s = 0, 1, \dots, n - 1$) [1].

1.2 Динамічні характеристики ротора

1.2.1 Підшипники із масляним демпфіруванням

Зі швидким розвитком промисловості та енергетичної промисловості було розроблено та застосовано в практиці машинобудування безліч обертових машин із більшим крутним моментом, вищою швидкістю обертання та більшою гнучкістю [19, 20]. Однак ці зміни призвели до нестабільних вібрацій у роботі обертових механізмів, і типовою формою вібрації є вібрація з самозбудженням, спричинена взаємодією між ротором і

навколишньою рідиною [21]. Крім того, сила ущільнення та сила масляної плівки є двома основними силами, викликаними рідиною, які можуть призвести до сильної вібрації ротора, удару тертя між ротором і статором і навіть тріщини валу зрештою. Тому важливо вивчити динамічні характеристики ущільнення та підшипника масляної плівки для обертових машин під дією сили ущільнення та сили масляної плівки. До цього часу багато дослідників інтенсивно вивчали динамічні характеристики ущільнення та підшипника масляної плівки для обертових машин з різних точок зору. На початку вчені досліджували динамічні характеристики ущільнення та підшипника масляної плівки, використовуючи головним чином лінійне демпфування та коефіцієнти жорсткості. Однак багато експериментальних результатів довели, що лінійна модель не може добре працювати, і нелінійний характер ущільнення та підшипника масляної плівки також виявлено з багатьох спостережуваних явищ [21].

У світлі наведеного вище аналізу можна виділити три основні особливості. По-перше, в попередніх роботах в основному використовувався метод зосереджених мас, який не є точним для моделювання системи ротор-підшипник-ущільнення. Крім того, більшість із них представили лише деякі області стабільності та нестабільності системи підшипник-ущільнення ротора на основі нелінійного динамічного аналізу, але проігнорували, як зручно ідентифікувати та діагностувати несправності ущільнення та масляної плівки підшипника в реальному проектуванні. Нарешті, ці роботи базувалися на вузькому численні цілого порядку, яке описувало лише локальний характер системи. Навпаки, дробове числення підкреслює властивість глобальної системи та має особливу характеристику пам'яті, яка була успішно застосована в багатьох областях. Зокрема, моделювання в'язкопружних систем є типовим застосуванням. На підставі наведеного вище аналізу, порівняно з попередніми роботами, є три переваги для наших досліджень. По-перше, дробове числення введено в моделювання сили ущільнення обертових

машин. По-друге, змішана матриця мас і змішана матриця жорсткості використовуються в цьому дослідженні для більш точного моделювання системи ротор-підшипник-ущільнення. По-третє, детально обговорюються динамічні характеристики системи ротор-підшипник-ущільнення зі змінами фракційного порядку ущільнення, швидкості обертання, ексцентриситету маси ротора, зазору ущільнення та перепаду тиску ущільнення [21].

Швидкість обертання (ω) є однією з ключових змінних, що впливають на динамічні характеристики системи ротор-підшипник-ущільнення. Спочатку біфуркаційні діаграми абсцис цапфи (x_1) і ротора (x_3) зі збільшенням швидкості обертання показані на рис. 1.1. З рис. 1.1 можна виявити, що динамічні еволюції абсцис цапфи (x_1) і ротора (x_3) із зростаючою частотою обертання є синхронними. Зокрема, обидва зберігають стабільні періодичні коливання в діапазоні $0 \text{ рад/с} < \omega < 388 \text{ рад/с}$, але амплітуди коливань у них мають очевидне збільшення, коли $0 \text{ рад/с} < \omega < 202 \text{ рад/с}$. . Потім при $\omega = 388 \text{ рад/с}$ з'являється очевидне явище квазіперіодичності, яке продовжується. По-друге, оскільки частотні характеристики абсцис цапфи (x_1) і ротора (x_3) зі зміною швидкості обертання подібні, частотні характеристики абсцис ротора (x_3) аналізуються лише нижче. Коли $\omega < 388 \text{ рад/с}$, існує лише одна частотна складова ($f-1-1$) для абсцис ротора (x_3). При $\omega = 388 \text{ рад/с}$ з'являється нова частотна складова ($f-2-1$), яка є синхронною з початковою точкою руху квазіперіодичності, зображеною на рис. 1.1. Іншими словами, частотна складова ($f-2-1$) являє собою помилку квазіперіодичності для цієї системи ротор-підшипник-ущільнення, якій необхідно приділити більше уваги при фактичному проектуванні.

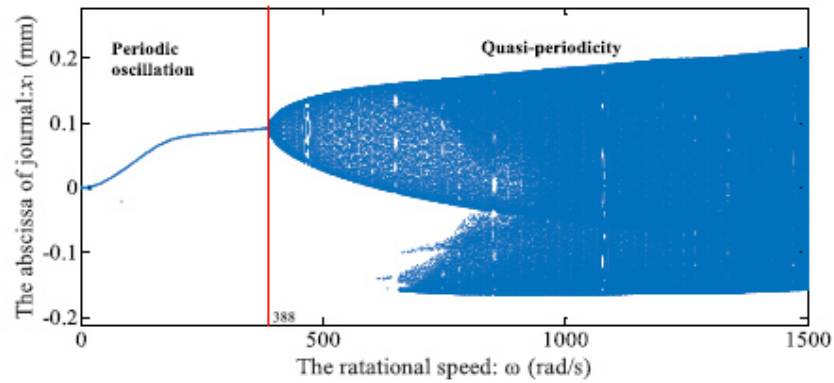
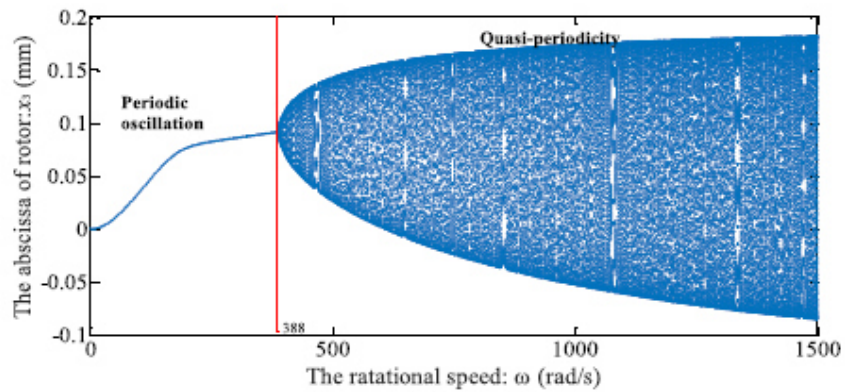
(a) The abscissa of journal: x_1 .(b) The abscissa of rotor: x_3 .

Рис. 1.1. Біфуркаційні діаграми цапфи і ротора при зростанні швидкості обертання [21].

Після цього з'являються нові частотні компоненти при $\omega = 466$ рад/с (f-3-1), $\omega = 497$ рад/с (f-1-2, f-2-2 і f-3-2), $\omega = 631$ рад/с (f-4-1) і $\omega = 733$ рад/с (f-4-2) відповідно. Однак ці частотні компоненти не можуть викликати нову динамічну поведінку. І амплітуди їх дуже малі, тому їх важко ідентифікувати в реальній техніці. Отже, ці частотні складові несуттєві для ідентифікації несправності. Крім того, особлива частотна складова (f-1-2) з'являється, коли $\omega = 497$ рад/с, яка має дві важливі особливості, включаючи низьку частоту та високу амплітуду, тоді як квазіперіодичний рух також явно не змінюється цим. Підсумовуючи, частотна складова (f-2-1) є найбільш ключовим показником порушення квазіперіодичності, який може бути застосований як ефективний критерій ідентифікації порушення квазіперіодичності в процесі зміни

швидкості обертання. Нарешті, оскільки біфуркаційні діаграми не можуть показати більше деталей квазіперіодичності руху, графіки часової області та фазові діаграми будуть застосовані для опису більш детальних характеристик руху системи ротор-підшипник-ущільнення [21].

1.2.2 В'язкопружні матеріали у системі ротор-підшипник

В'язкопружні матеріали широко використовуються для контролю вібрації та шуму динамічних роторів, щоб збільшити зону стабільності завдяки їхній високій здатності розсіювати вібраційну енергію. Широко поширеною моделлю, яка використовується для опису реальної динамічної поведінки цього класу матеріалів, є модель дробової похідної. Вдаючись до методу скінченних елементів, можна здійснити моделювання динамічних роторів з гнучкими підшипниками за рахунок використання в'язкопружних матеріалів.

Система ротора, що моделюється, в основному складається з вала, одного або кількох дисків і кількох гнучких підшипників, що містять шари в'язкопружного матеріалу. Сила, що діє на систему ротора, може бути викликана незбалансованими масами (синхронне збудження, $\Omega = \Omega_{rpm}$), нестабільністю гідродинамічних підшипників [22].

Вал характеризується потенціальною і кінетичною енергіями. Вираз для кінетичної енергії валу є результатом розширення кінетичної енергії диска. Враховуючи симетрію осі ($I_x = I_z = I$) і нехтуючи впливом осьових сил, вираз для потенційної енергії визначається як:

Диск вважається жорстким і характеризується лише його кінетичною енергією. Його рух задано через інерціальну систему координат $R_0 (X, Y, Z)$ і систему координат $R (x, y, z)$, зафіксовану в центрі диска і спочатку збігається з R_0 .

Підшипники складаються з двох частин: самого підшипника та в'язкопружних шарів. В'язкопружні шари можна додати між зовнішнім шаром роликового підшипника та корпусом підшипника або під корпусом

підшипника, як показано на рис. 1.2а та рис. 1.2с. У першому випадку інерцією підшипника можна знехтувати, а в другому її необхідно враховувати. На рисунках 2b і 2d показано спрощене представлення обох ситуацій, згаданих вище. У поточній роботі використовувався лише другий варіант (рис. 1.2с) з шарами в'язкопружного матеріалу та без них. Через велику різницю в демпфіруванні між в'язкопружними шарами та роликовими підшипниками, коли було введено в'язкопружний матеріал, демпфіруванням роликового підшипника знехтували. Однак, коли в'язкопружний матеріал не на місці, це вважалось невеликим в'язким демпфуванням лише для того, щоб відгук не наближався до нескінченності при резонансі. В'язкопружні шари та підшипники розміщені послідовно. Через це та враховуючи, що жорсткість роликових підшипників набагато вища за жорсткість в'язкопружних шарів, результуюча еквівалентна жорсткість буде жорсткістю в'язкопружних шарів. Модель, яка використовується для опису реальної динамічної поведінки в'язкопружного матеріалу, що використовується в шарах, є моделлю дробової похідної чотирьох параметрів [22].

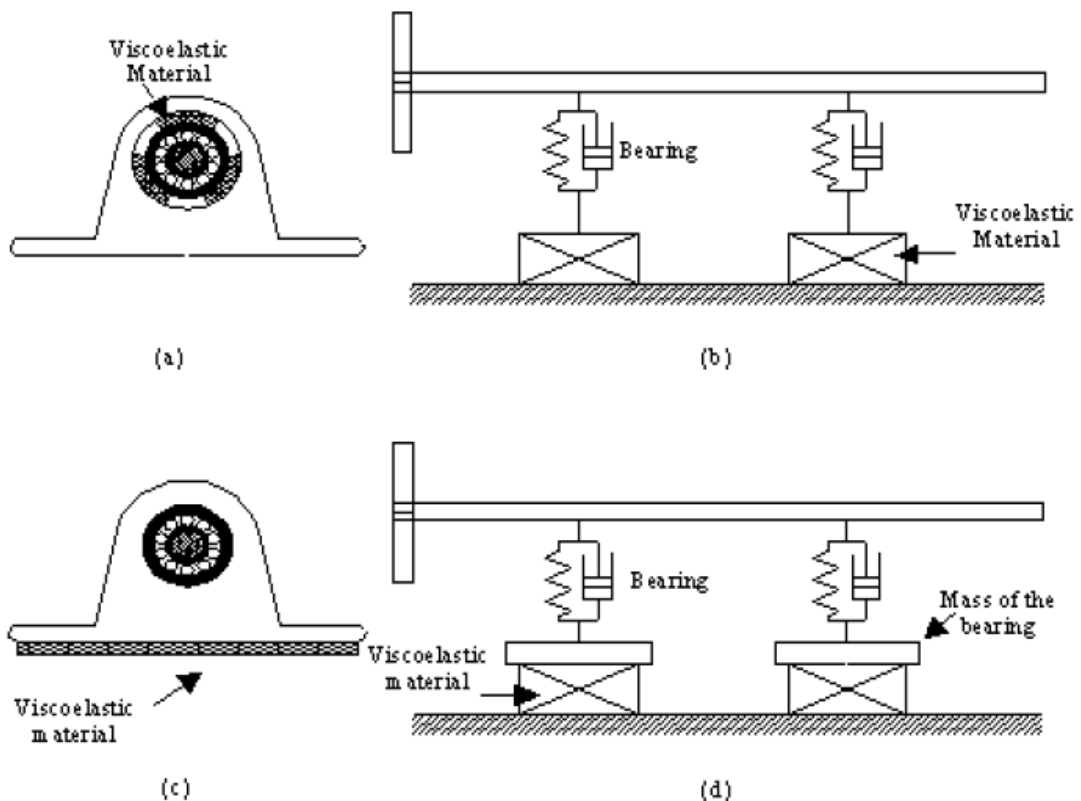


Рисунок 1.2. Моделі підшипників з в'язкопружним матеріалом [22].

У моделі, розробленій тут, де в'язкопружний матеріал додається під підшипники (див. рис. 1.2с), розглядатимуться лише xx та zz компоненти жорсткості та демпфування. У напрямку X жорсткість буде представлена модулем зсуву, а в Z — модулем пружності. Без урахування жорсткості, пов'язаної з обертаннями ψ і θ підшипників кочення (у напрямках Z і X відповідно), матриця жорсткості в'язкопружних шарів буде задана як:

Було представлено просту, нову та точну методологію визначення остаточної діаграми Кемпбелла динамічної роторної системи з підшипниками, що містять в'язкопружні шари. На відміну від попередніх робіт, в'язкопружний матеріал, який використовується в підшипниках, був представлений за допомогою моделі дробової похідної чотирьох параметрів, яка, як доведено, точно описує динамічні характеристики цього класу матеріалів. Завдяки характеристикам матриці жорсткості цієї системи, яка залежить від частоти, фактично потрібно було зібрати дві діаграми Кемпбелла, одну в одній, щоб покращити загальну динамічну поведінку роторної системи. Для випадку збудження дисбалансу можна встановити спрощену процедуру. Для застосування та перевірки спрощеної процедури було виконано числовий приклад. Окрім досягнення цієї мети, було також показано, що використання в'язкопружних матеріалів у підшипниках може бути дуже ефективним для контролю вібрації та шуму. Тому вважається, що методологія, запроваджена в цій роботі, має першочергове значення для керування діями контролю вібрації та шуму на роторних системах шляхом використання в'язкопружних матеріалів [22].

1.2.3 Роторна система з похилою тріщиною

Традиційний метод моделювання роторної системи з похилою тріщиною розглядає лише числення цілого порядку. Однак модель роторної системи, заснована на обчисленні цілого порядку, може просто описувати

локальні характеристики, а не історично залежний процес. Поява числення дробового порядку лише компенсує недолік числення цілого порядку. Тому у роботі [23] було запропоновано нову динамічну модель з похилою тріщиною на основі дробового затухання, у якій жорсткість роторної системи з косою тріщиною вирішується методом нульового коефіцієнта інтенсивності напружень.

Запропоновані вище моделі роторної системи з косою тріщиною базуються на численні цілого порядку. Однак у цих динамічних моделях роторних систем з косою тріщиною вплив характеристик дробового порядку демпфування в роторній системі ігнорується. Тому в моделювання роторної системи з косою тріщиною необхідно ввести дробове демпфування. У порівнянні з численням цілого порядку числення дробового порядку має такі переваги [23].

1. Дробове числення має глобальну кореляцію та може краще відображати залежний від історії процес розвитку системних функцій. Однак обчислення цілого порядку має локальність і не підходить для опису процесу, що залежить від історії.

2. Модель дробового числення усуває серйозний недолік, тобто теорія погано узгоджується з експериментальними результатами в класичній диференціальній моделі цілого порядку, і може використовувати менше параметрів для отримання хороших результатів.

3. У порівнянні з традиційною нелінійною моделлю, фізичне значення дробової моделі більш чітке, а вираз більш стислий, коли модель дробового числення використовується для опису складних фізичних і механічних проблем.

При однаковій глибині тріщини та однаковій швидкості ми обговорюємо вплив дробового порядку на нелінійні динамічні характеристики роторної системи з похилою тріщиною на основі затухання дробового порядку. Тут

глибина тріщини встановлена на $a = d/2$, швидкість обертання встановлена на $\Omega = 300$ об/хв.

Дробовий порядок має великий вплив на динамічні характеристики роторної системи з косою тріщиною. Коли дробовий порядок дорівнює $r = 0,2$, орбіта вала роторної системи має типову внутрішню форму 8-типу. У поперечному спектрі є лише перша гармонійна складова, викликана незбалансованістю, і друга гармонічна складова, викликана тріщиною. В осьовому напрямку є гармонічна складова $1/2$ порядку, яка є відносно слабкою, ніж перша гармонічна складова. Оскільки вал з похилою тріщиною піддається крученню, розтягу та згинальним моментам, жорсткість вала відбуватиметься зв'язком розтягнення-згинання, згинання-кручення та зв'язком розтягування-кручення, частотні компоненти зв'язку відбуватимуться в поперечному напрямку. Внутрішнє коло на орбіті вала роторної системи поступово стає меншим, оскільки дробовий порядок поступово збільшується. На діаграмі поперечного спектру частотні компоненти зв'язку стають все більш очевидними, а їх амплітуди поступово збільшуються. Однак амплітуда першої та другої гармонійної складової стає меншою. Амплітуда спектра в осьовому напрямку також поступово зменшується.

При однаковій глибині тріщини та тому ж фракційному порядку ми обговорюємо вплив швидкості обертання на динамічні характеристики роторної системи з косою тріщиною на основі дробового демпфування. Тут глибина тріщини встановлена як $a = d/2$, дробовий порядок встановлений як $r = 0,4$. Швидкість обертання має великий вплив на динамічні характеристики роторної системи з косою тріщиною. Коли швидкість обертання близька до критичної швидкості або докритичної швидкості, нерівномірні динамічні характеристики роторної системи з косою тріщиною дуже очевидні. Коли швидкість обертання відносно низька, орбіта валу має типову внутрішню 8-типову форму. У поперечному спектрі перша гармоніка і друга гармоніка є

основними компонентами. Амплітуда другої гармоніки більша, ніж першої гармоніки, характерна частота тріщини очевидна. Однак інші компоненти множення частоти зв'язку не помітні. В осьовому спектрі гармонічна складова $1/2$ порядку є головною, однак перша гармоніка слабка. Форма орбіти валу в роторній системі з косою тріщиною поступово змінюється від внутрішньої 8-подібної до еліпсоподібної зі збільшенням швидкості обертання. Оскільки вал з похилою тріщиною піддається впливу жорсткості зчеплення, форма еліпса в орбіті вала не перекривається разом. У поперечному спектрі амплітуда першої гармоніки поступово зростає. Однак амплітуда другої гармоніки поступово зменшується або навіть зникає. Крім того, зміна амплітуди інших компонентів множення частоти зв'язку майже очевидна. На діаграмі осьового спектру амплітуди кожної частоти поступово зменшуються [23].

За однакового дробового порядку та тієї самої швидкості обертання обговорюється вплив глибини тріщини на динамічні характеристики роторної системи з косою тріщиною на основі дробового демпфування. Тут дробовий порядок встановлено на $r = 0,4$, швидкість обертання встановлена на $\Omega = 300$ об/хв. Поява тріщини спричинить зміну жорсткості вала, глибина тріщини визначає ступінь зміни жорсткості вала. Тому глибина тріщини має великий вплив на динамічні характеристики роторної системи з косою тріщиною. Коли глибина тріщини невелика, тріщина мало впливає на жорсткість вала, а інформація про тріщину майже очевидна. Крім того, орбіта вала роторної системи має форму еліпса. На діаграмі поперечного спектру перша гармонічна складова, спричинена дисбалансом, є головною. Друга гармоніка та інші частотні компоненти зв'язку є відносно слабкими. На осьовій спектральній діаграмі гармоніка $1/2$ порядку є основним компонентом, однак перша гармоніка є відносно слабкою. Вплив тріщини на жорсткість вала стає все більш очевидним зі збільшенням глибини тріщини. Форма фігурної орбіти поступово змінюється від форми еліпса до внутрішньої форми 8 типу. На діаграмі поперечного спектру амплітуди першої гармоніки та інших

компонентів частоти зв'язку майже незмінні. Однак амплітуда другої гармоніки зростає. На осьовій спектральній діаграмі амплітуда другої гармоніки також зростає, однак це зростання відбувається відносно повільно.

У роботі [23] були отримані наступні результати:

1. Зміна дробового порядку має великий вплив на динамічні характеристики роторної системи з косою тріщиною. Частота, викликана торсійним збудженням, і частоти зв'язку значно зростають із збільшенням дробового порядку. Таким чином, коли встановлено динамічну модель роторної системи з косою тріщиною, ми можемо налаштувати інший фракційний порядок, щоб запропонувати більш реалістичну роторну систему з косою тріщиною, щоб краще вивчити косі тріщини.

2. Коли швидкість обертання близька до критичної швидкості або докритичної швидкості, динамічні характеристики роторної системи з похилою тріщиною дуже очевидні. Можна проаналізувати динамічні характеристики поблизу критичних швидкостей $1/3$ порядку або $1/2$ порядку та отримати інформацію про несправність роторної системи з косою тріщиною. Коли ротор працює на низькій швидкості, друга гармоніка є основною складовою в спектрі роторної системи з косою тріщиною. Амплітуда першої гармоніки поступово збільшується зі збільшенням швидкості обертання. Однак амплітуда другої гармоніки та інші частотні компоненти зв'язку є майже незмінними. Орбіта валу поступово змінюється від внутрішньої 8-подібної форми до форми еліпса без перекриття.

3. Через виникнення тріщин змінюється жорсткість вала. Глибина тріщини визначає ступінь зміни жорсткості вала. Зі збільшенням глибини тріщини амплітуда коливань у поперечному напрямку зростає, а амплітуда другої гармоніки значно зростає. Частотні компоненти, спричинені торсіонним збудженням, та інші зв'язані частоти також виникають.

1.3 Висновки до першого розділу

Область застосовності диференціальних рівнянь дробового порядку значно ширша ніж диференціальних рівнянь з цілочисловим диференціюванням. Підвищений інтерес до диференціальних рівнянь дробового порядку обомовлено їх фізичною інтерпретацією. Показано, що перехід до похідної дробового порядку за часом дозволяє враховувати ефекти пам'яті системи. Також відомо, що апарат диференціального та інтегрального числення дробового порядку дозволяє якнайкраще будувати адекватні математичні моделі у фізиці і техніці, хімії, біології, фінансовій справі та ін.

У застосуваннях дробового інтегро-диференціювання найчастіше використовують три широко схвалені визначення дробової похідної. Визначення R-L і визначення Капуто є вдосконаленнями порівняно з визначенням G-L. Порівнюючи визначення R-L з визначенням Капуто, найбільша різниця полягає в тому, що визначення Капуто підкреслює вибір вихідних значень. Крім того, визначення Капуто більше підходить для наукових та інженерних досліджень.

2. Матеріали та основні методи досліджень

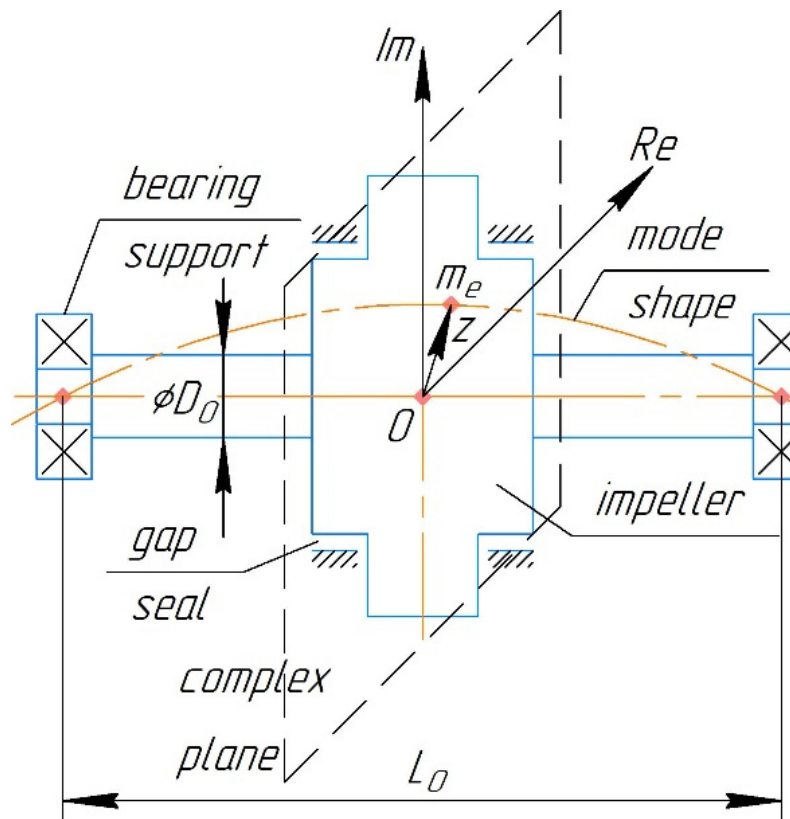
2.1 Традиційна модель

Традиційна модель динаміки одномасового гнучкого ротора описується наступним комплексним диференціальним рівнянням [24]:

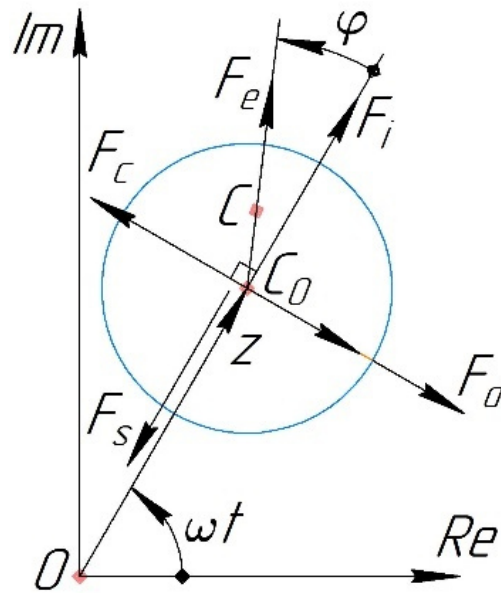
$$m_e \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + b_0 \frac{dz(t)}{dt} + (c_e + c_0)z(t) - iq_0 z(t) = D_e \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (60)$$

де i – уявна одиниця; t – час, с; $z(t)$ – комплексне переміщення центру мас, м; m_e – еквівалентна маса ротора, кг; b_0 – коефіцієнт демпфування зазору, Н·с/м; c_e – еквівалентна жорсткість на вигин двохопрного ротора, Н/м; c_0 – жорсткість ущільнення зазору, Н/м; q_0 – сила циркуляції в ущільненні зазору, Н/м; D_e – допустимий залишковий дисбаланс через ексцентриситет, кг·м; ω – робоча частота, рад/с; φ – фазовий зсув дисбалансу, рад.

Відповідна розрахункова схема представлена на рис. 2.1 [14].



a)



б)

Рисунок 2.1. Розрахункова схема динаміка ротора: а – одномасовий гнучкий двохопорний ротор; б – переміщення центру мас і зовнішніх сил у комплексній площині [14].

Рівняння (60) описує рух центру мас C робочого колеса в комплексній площині. Його перші три члени представляють від'ємну силу інерції F_i , демпфування F_{di} , сили жорсткості F_s відповідно. Останній член у лівій частині відповідає негативній циркуляційній силі F_c , що викликає втрату стійкості. Права частина представляє силу інерції Даламбера F_e , обумовлену ексцентриситетом C_0C , де C_0 – геометричний центр робочого колеса.

Коефіцієнти цього рівняння можна наближено оцінити так [14]:

$$b_0 = \frac{\pi d_0 l_0^3}{24 h_0^3} \mu_0; \quad c_e = \frac{\pi d_0 l_0}{4 h_0} \Delta p_0; \quad c_0 = \frac{3 \pi D_0^4}{16 L_0^3} E; \quad q_0 = \frac{\pi d_0 l_0^3}{48 h_0^3} \mu_0 \omega = \frac{1}{2} b_0 \omega, \quad (61)$$

де d_0, l_0, h_0 – діаметр, довжина і зазор в ущільненні, м; μ_0 – динамічна в'язкість рідини/газу в зазорі, Па·с; Δp_0 – різниця тиску в зазорі, Па; D_0, L_0 – діаметр і довжина валу, м; E – модуль Юнга матеріалу валу, Н/м².

Для подальшого ретельного розгляду динаміки та стабільності ротора перше рівняння можна переписати в безрозмірній формі:

$$\frac{d^2 \zeta(t)}{dt^2} + \beta_0 \frac{d \zeta(t)}{dt} + (\omega_0^2 - i \theta_0) \zeta(t) = \varepsilon_e \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (62)$$

де $\zeta(t)$ – комплексне безрозмірне переміщення центру мас; β_0 – питомий коефіцієнт демпфування, с^{-1} ; ω_0 – критична частота ротора, с^{-1} ; θ_0 – питомий коефіцієнт циркуляційної сили, с^{-2} :

$$\zeta(t) = \frac{z(t)}{\varepsilon_e}; \beta_0 = \frac{b_0}{m_e}; \omega_0 = \sqrt{\frac{c_e + c_0}{m_e}}; \theta_0 = \frac{q_0}{m_e} = \frac{1}{2}\beta_0\omega. \quad (63)$$

2.2 Модель дробового порядку

Примітно, що процес демпфування в ущільненні зазору повинен залежати не тільки від положення, а й від попереднього руху в'язкопружної системи. У зв'язку з цим дробова похідна Рімана–Ліувілля [7] порядку $\alpha \in (0, 2)$ слід використовувати в рівнянні (60) замість похідної першого порядку.

У цьому випадку узагальнене комплексне рівняння динаміки ротора дробового порядку набуває вигляду [14]:

$$\frac{d^2\zeta(t)}{dt^2} + \beta(\alpha)\frac{d^\alpha\zeta(t)}{dt^\alpha} + (\omega_0^2 - i\theta_0)\zeta(t) = \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (64)$$

де $\beta(\alpha)$ – узагальнений питомий коефіцієнт демпфування, $\text{с}^{\alpha-2}$.

Примітно, що в традиційній моделі $\alpha = 1$, а коефіцієнт затухання $\beta = \beta_0$. Однак вираз для визначення параметра β для будь-якого значення дробового порядку α досі залишається невідомим. Тому далі слід враховувати, що коефіцієнт демпфування $\beta(\alpha)$ залежить від параметра α .

2.3 Динамічна стійкість

Рівняння (64) має таке характеристичне рівняння [14]:

$$s^2 + \beta(\alpha)s^\alpha + \omega_0^2 - i\theta_0 = 0, \quad (65)$$

де $s = \lambda + \mu i$ – комплексне число; λ, μ – дійсна та уявна частини.

Для забезпечення динамічної стійкості механічної системи всі корені s цього характеристичного рівняння повинні мати від'ємні дійсні частини. Отже, межа області стійкості визначається з умови $\lambda = 0$. У цьому випадку з

урахуванням комплексного рівноправного перетворення $(i\mu)^\alpha = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$, останнє рівняння переписеться так:

$$-\mu^2 + \beta(\alpha)\mu^\alpha \left[\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] + \omega_0^2 - i\theta_0 = 0. \quad (66)$$

Отже, отримуємо таку систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} -\mu^2 + \beta(\alpha)\mu^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \omega_0^2 = 0; \\ \beta(\alpha)\mu^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \theta_0 = 0. \end{cases} \quad (67)$$

З другого рівняння уявну частину можна виразити таким чином:

$$\mu = \left[\frac{\theta_0}{\beta(\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (68)$$

Оскільки $\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) > 0 \forall \alpha \in (0, 2)$, то $\mu \in \mathbb{R}$.

Після підстановки останнього виразу в перше рівняння системи (68) отримаємо рівняння:

$$\left[\frac{\theta_0}{\beta(\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \right]^{\frac{2}{\alpha}} - \theta_0 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \omega_0^2 = 0. \quad (69)$$

Примітно, що для традиційного прикладу ($\beta(1) = \beta_0$, $\theta_0 = \frac{1}{2}\beta_0\omega$), критичне значення питомого співвідношення циркуляційної сили $\theta_0 = \frac{1}{2}\beta_0\omega$. Після розгляду останнього виразу (63) ця умова показує, що динамічна стійкість втрачається на робочій частоті $\omega = 2\omega_0$. Цей факт цілком відповідає традиційній моделі динаміки ротора. Проте довільний параметр α змінює це критичне значення.

Примітно, що останнє рівняння все ще не має аналітичного розв'язку для довільного значення параметра $\alpha \neq 1$. Це питання буде вирішено у наступному розділі.

2.3 Висновки до другого розділу

Визначено, що процес демпфування в ущільненні зазору повинен залежати не тільки від положення, а й від попереднього руху в'язкопружної

системи. Для забезпечення динамічної стійкості механічної системи всі корені характеристичного узагальненого комплексного рівняння динаміки ротора повинні мати від'ємні дійсні частини. Отже, межа області стійкості визначається з умови $\lambda = 0$.

3. Аналіз та узагальнення результатів досліджень

3.1 Коефіцієнт демпфування

Розв'язання рівнянь (64) і (69) вимагає знання аналітичного формулювання коефіцієнта демпфування $\beta(\alpha)$.

Для цього повинні бути виконані такі вимоги. По-перше, коефіцієнт демпфування $\beta(\alpha)$ має бути пропорційним традиційному параметру β_0 . По-друге, для значення $\alpha = 1$ значення $\beta(1)$ має дорівнювати β_0 .

Крім того, коефіцієнт демпфування $\beta(\alpha)$ повинен бути пропорційним робочій частоті ω в питомій потужності. Нарешті, розмір результуючого коефіцієнта демпфування β має бути $s^{\alpha-2}$.

Усім цим вимогам задовольняє наступна залежність:

$$\beta(\alpha) = \beta_0 \omega^{1-\alpha}. \quad (70)$$

3.2 Амплітудна і фазочастотна характеристики

Враховуючи цей вираз для коефіцієнта демпфування, комплексне рівняння динаміки ротора дробового порядку набуває вигляду [14]:

$$\frac{d^2\zeta(t)}{dt^2} + \beta_0 \omega^{1-\alpha} \frac{d^\alpha\zeta(t)}{dt^\alpha} + (\omega_0^2 - i\theta_0)\zeta(t) = \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (71)$$

Для визначення амплітудно-частотної характеристики застосовано метод комплексних амплітуд. Відповідно до цього методу комплексне зміщення центру мас розглядається у вигляді:

$$\zeta(t) = \zeta_0(\omega) e^{i\omega t}, \quad (72)$$

де ζ_0 – комплексна амплітуда динамічного відгуку.

Підстановка цього виразу в попереднє рівняння з послідовними рівноправними перетвореннями дозволяє отримати наступну залежність для комплексної амплітуди:

$$\zeta_0(\nu) = \frac{\nu^2 e^{i\varphi}}{1 - \nu^2 + i\nu \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\nu \left[\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - k\right]}, \quad (73)$$

введено наступні безрозмірні співвідношення для частоти ν , коефіцієнта демпфування ψ та циркуляційної сили k відповідно:

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0}; \psi = \frac{\beta_0}{\omega_0}; k = \frac{\theta_0}{\omega_0^2}. \quad (74)$$

Амплітудно-частотна характеристика динамічної системи дорівнює модулю комплексної функції ζ_0 :

$$A(\nu) \equiv |\zeta_0(\nu)| = \frac{\nu^2}{\sqrt{\left[1 - \nu^2 + \psi\nu \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]^2 + (\psi\nu)^2 \left[\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - k\right]^2}}. \quad (75)$$

Також фазово-частотна характеристика динамічної системи дорівнює аргументу комплексної функції ζ_0 , рад:

$$\varphi(\nu) \equiv \arg[\zeta_0(\nu)] = \text{atan} \left\{ \frac{\psi\nu \left[\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - k\right]}{1 - \nu^2 + \psi\nu \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \right\}. \quad (76)$$

Вплив різних значень дробового порядку α та безрозмірного коефіцієнта демпфування ψ на ці відгуки представлено на рис. 3.1.

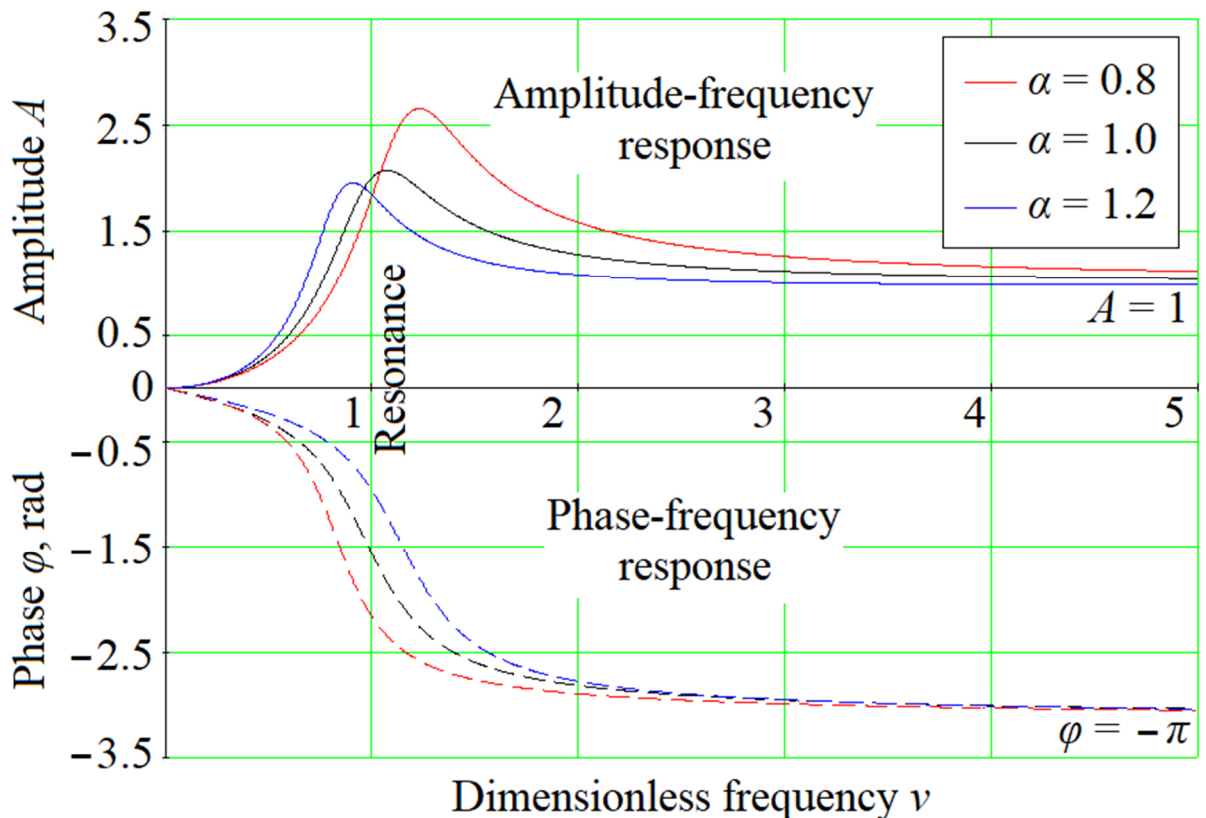


Рисунок 3.1. Амплітудно-частотна характеристика ($\psi = 1,0$; $k = 0,5$)

[14].

При $\alpha = 1$ ці відгуки відповідають традиційній моделі [24]. Цей факт доводить надійність запропонованої моделі дробового порядку.

Резонансну частоту можна визначити з умови $\varphi(\nu) = \frac{\pi}{2}$. Іншими словами, знаменник у формулі (75) повинен дорівнювати нулю:

$$\nu^2 - \psi\nu \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - 1 = 0. \quad (77)$$

Єдиним розв'язком, який задовольняє фізичний зміст поставленої задачі ($\nu > 0$), є такий:

$$\nu = \frac{\psi}{2} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \sqrt{1 + \frac{\psi^2}{4} \cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}. \quad (78)$$

Зокрема, при $\alpha = 1$ безрозмірне значення $\nu = 1$. Тому резонансна частота $\omega = \omega_0$. Цей факт також доводить надійність запропонованої моделі дробового порядку.

Проте довільний параметр α істотно змінює це критичне значення (рис. 3.2).

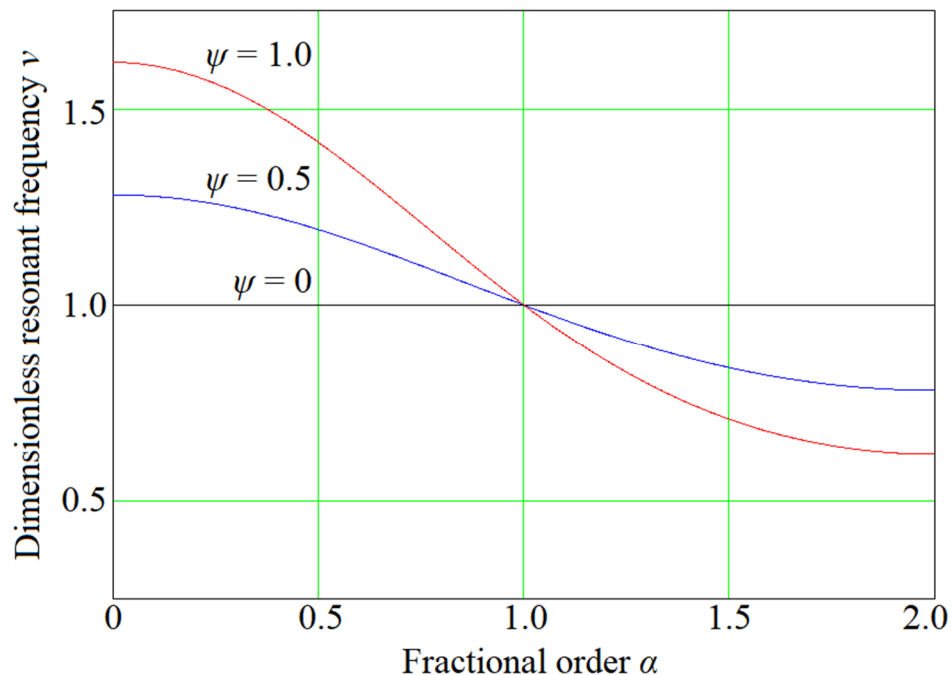


Рисунок 3.2. Безрозмірна резонансна частота [14].

Дробовий порядок $\alpha < 1$ зсуває резонансну частоту вправо. Збільшення коефіцієнта жорсткості підтверджує цей факт. Проте збільшення дробового порядку $\alpha > 1$ зменшує резонансну частоту через фактор інерції.

Крім того, через наступне обмеження:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} A(\nu) = 1, \quad (79)$$

виникає ефект самоцентрації. Цей факт також виправдовує надійність запропонованої моделі дробового порядку. При цьому амплітуда дорівнює ексцентриситету ε_e і інваріантна до дробового порядку α .

3.3 Втрата стійкості

Після розгляду безрозмірних факторів (74) разом із виразами (63) трансцендентне рівняння (69) щодо питомого відношення циркуляційної сили θ_0 стає квадратичним через безрозмірну робочу частоту ν [14]:

$$\frac{\nu^2}{\left[2 \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]^{\frac{2}{\alpha}}} - \frac{\psi}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \nu - 1 = 0. \quad (80)$$

Єдиним розв'язком, який задовольняє фізичний зміст поставленої задачі ($\nu > 0$), є такий:

$$\nu(\alpha, \psi) = \left[2 \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ \frac{1}{4} \psi \left[2 \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \sqrt{1 + \frac{1}{16} \psi^2 \left[2 \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]^{\frac{2}{\alpha}} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \right\} \quad (81)$$

Проте вплив довільних значень дробового порядку α та безрозмірного коефіцієнта демпфування ψ на зміну критичного значення безрозмірної робочої частоти ν представлено на рис. 3.3.

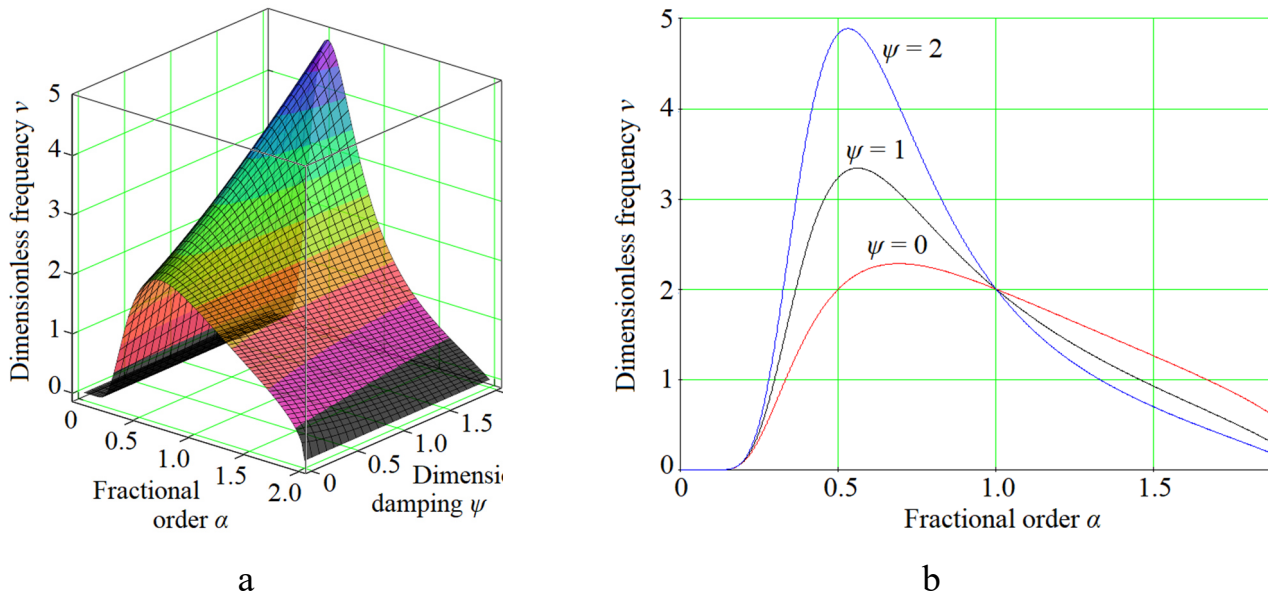


Рисунок 3.3. Безрозмірна критична частота: а – просторова поверхня; б – плоскі криві [14].

Для дробового порядку $\alpha = 1$ критична частота $\nu = 2$ показує, що динамічна стійкість втрачається на робочій частоті $\omega = 2 \omega_0$. Причому ця величина не залежить від коефіцієнта демпфування. Цей факт доводить надійність моделі стабільності одномасового ротора, запропонованої в традиційному прикладі.

Примітно, що для дробового порядку $\alpha < 1$ збільшення безрозмірного фактора ψ збільшує критичне значення робочої частоти за рахунок збільшення коефіцієнта жорсткості динамічної системи.

Крім того, для дробового порядку $\alpha > 1$ збільшення безрозмірного фактора ψ зменшує критичне значення робочої частоти за рахунок збільшення коефіцієнта інерційності динамічної системи.

3.4 Дослідження стійкості методом Еванса

Геометричне місце коренів характеристичного полінома (65) визначається шляхом розв'язання наступного рівняння, поданого в безрозмірному вигляді [14]:

$$\sigma^2 + \psi \nu^{1-\alpha} \sigma^\alpha + 1 - ik\psi\nu = 0. \quad (82)$$

Це також дозволяє ідентифікувати області стійкості. Для його побудови комплексний параметр цього безрозмірного характеристичного рівняння подається в експоненціальній формі як $\sigma = \sigma_0 e^{i\varphi}$, де σ_0 – величина, φ – аргумент. У зв'язку з цим характеристичне рівняння набуває такого вигляду:

$$\sigma_0^2 e^{2i\varphi} + \psi v^{1-\alpha} \sigma_0^\alpha e^{i\alpha\varphi} + 1 - ik\psi v = 0, \quad (83)$$

або в тригонометричному вигляді:

$$\sigma_0^2 [\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)] + \psi v^{1-\alpha} \sigma_0^\alpha [\cos(\alpha\varphi) + i \sin(\alpha\varphi)] + 1 - ik\psi v = 0. \quad (84)$$

Це рівняння дорівнює такій системі:

$$\begin{cases} \sigma_0^2 \cos(2\varphi) + \psi v^{1-\alpha} \sigma_0^\alpha \cos(\alpha\varphi) + 1 = 0; \\ \sigma_0^2 \sin(2\varphi) + \psi v^{1-\alpha} \sigma_0^\alpha \sin(\alpha\varphi) - k\psi v = 0. \end{cases} \quad (85)$$

Після множення першого рівняння на $\sin(\alpha\varphi)$, а другого – на $\cos(\alpha\varphi)$, подальшого віднімання та рівних перетворень можна отримати такий вираз:

$$\sigma = e^{i\varphi} \sqrt{\frac{\sin(\alpha\varphi)}{\sin[(2-\alpha)\varphi]} [1 + k\psi v \operatorname{ctg}(\alpha\varphi)]}. \quad (86)$$

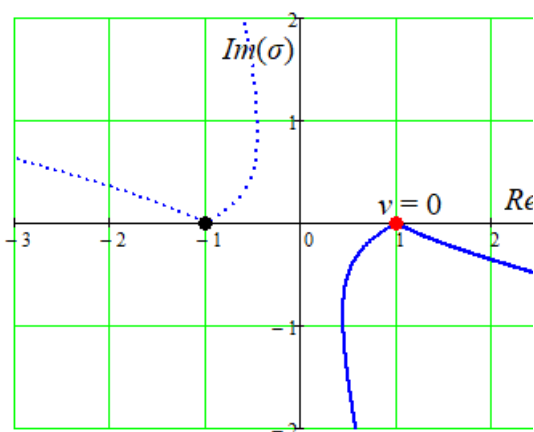
Зокрема, для недробових прикладів ($\alpha = \{0, 1, 2\}$) геометричне місце коренів характеристичного полінома визначається аналітично таким чином:

$$\sigma = \begin{cases} \pm \sqrt{(ik-1)\psi v - 1}, \alpha = 0; \\ -\frac{\psi}{2} \pm \sqrt{\frac{\psi^2}{4} - 1 + ik\psi v}, \alpha = 1; \\ \pm \sqrt{\frac{(ik\psi v - 1)v}{\psi + v}}, \alpha = 2. \end{cases} \quad (87)$$

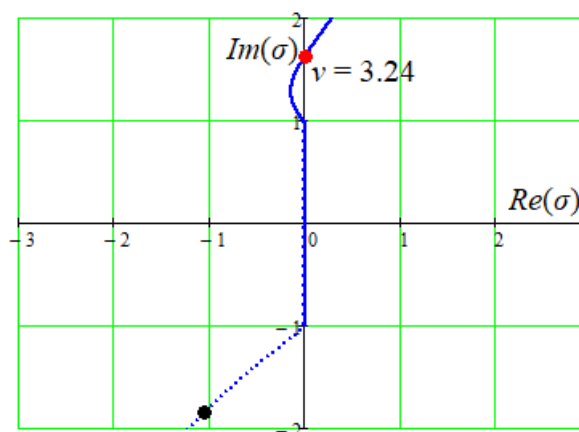
Після поділу на дійсну та уявну частини ця залежність набуває такого вигляду:

$$\sigma = \begin{cases} \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\psi v)^2 + (k\psi v)^2} + 1 + \psi v}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\psi v)^2 + (k\psi v)^2} - 1 - \psi v}{2}} \right], & \alpha = 0; \\ -\frac{\psi}{2} \pm \left[\sqrt{\frac{\left(\frac{\psi^2}{4} - 1\right)^2 + (k\psi v)^2 + \frac{\psi^2}{4} - 1}{2}} - i \sqrt{\frac{\left(\frac{\psi^2}{4} - 1\right)^2 + (k\psi v)^2 - \frac{\psi^2}{4} + 1}{2}} \right], & \alpha = 1; \\ \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{1 + (k\psi v)^2} - 1}{2\left(1 + \frac{\psi}{v}\right)}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (k\psi v)^2} + 1}{2\left(1 + \frac{\psi}{v}\right)}} \right], & \alpha = 2. \end{cases} \quad (88)$$

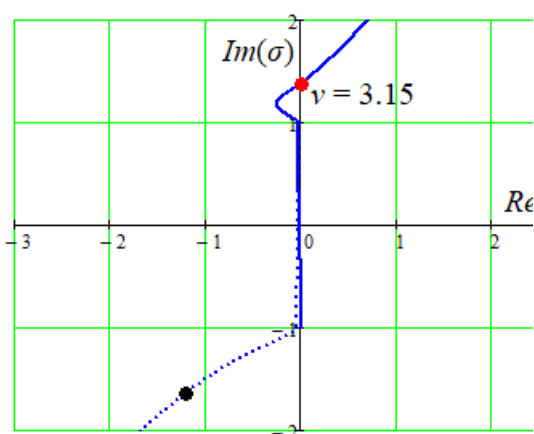
Варіації геометричного місця коренів характеристичного полінома для різних цілих і дробових порядків α представлені на рис. 3.4.



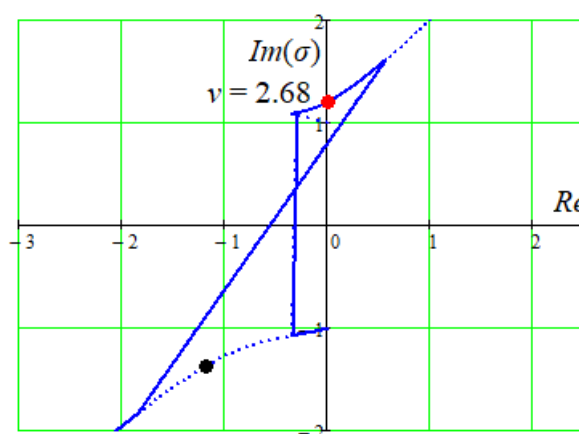
а



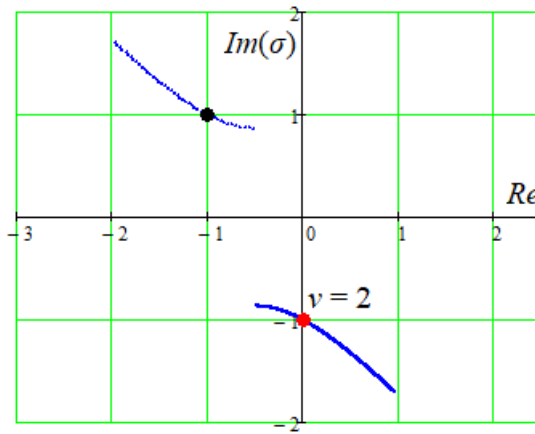
б



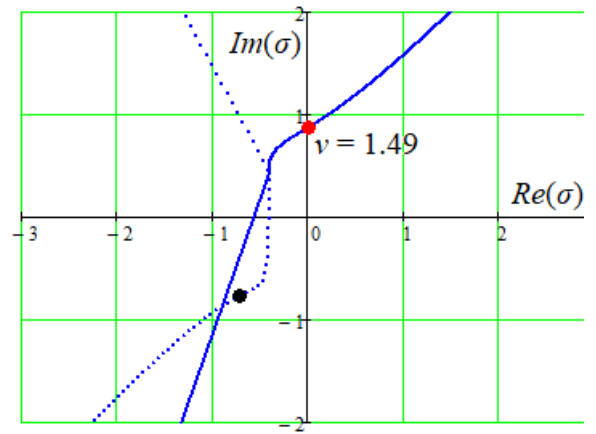
в



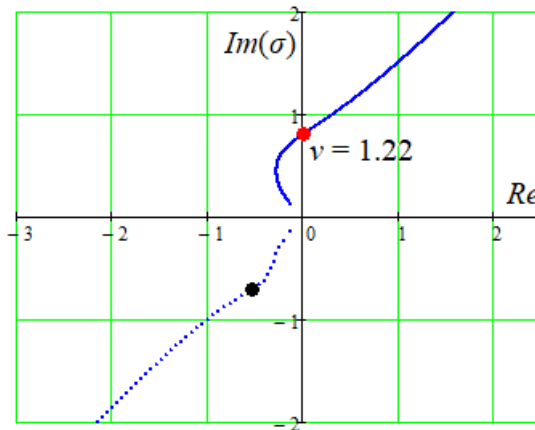
г



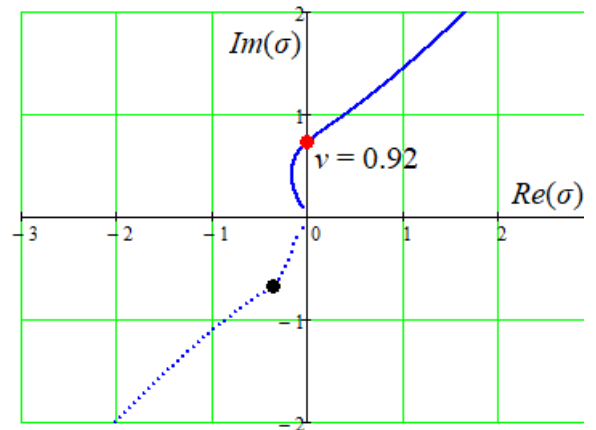
д



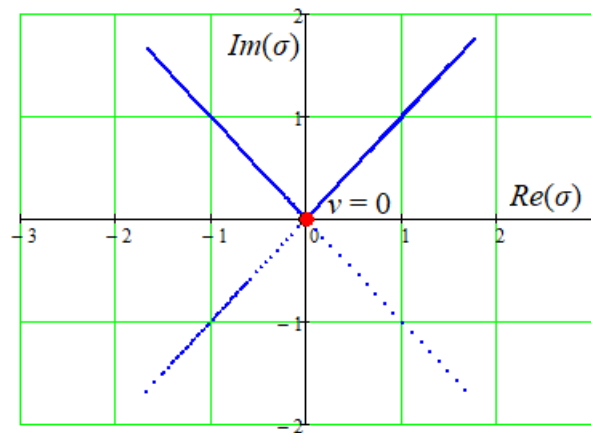
е



е



ж



з

Рисунок 3.4. Геометричне місце коренів для коефіцієнта циркуляційної сили $k = 0,5$, коефіцієнта демпфування $\psi = 1,0$ та різного дробового порядку α : а – 0; б – $1/2$; в – $2/3$; г – $4/5$; д – 1; е – $6/5$; є – $4/3$; ж – $3/2$; з – 2 (лінії – коріння; пари точок – втрата стійкості) [14].

Для кожного кореня характеристичного полінома динамічна система є стійкою, коли характерна точка в комплексній площині знаходиться в лівій

півплощині: $Re(\sigma) < 0$. Зокрема, динамічна система є нестійкою для випадків $\alpha = 0$ і $\alpha = 2$. Цей факт підтверджується відсутністю демпфіруючого члена $\psi v^{1-\alpha} \sigma^\alpha$ в характеристичному рівнянні (82).

У випадку $\alpha = 1$ стійкість динамічної системи забезпечується за умови:

$$-\frac{\psi}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{\psi^2}{4} - 1\right)^2 + (k\psi v)^2 + \frac{\psi^2}{4} - 1}{2}} > 0. \quad (89)$$

Цікаво, що ця нерівність стає інваріантною до параметра ψ , оскільки після рівних перетворень вона зводиться до нерівності $kv < 1$.

Отже, критичне значення робочої частоти $\omega = \omega_0 / k$. Цей результат повністю відповідає отриманому раніше значенню $\omega = 2 \omega_0$ для коефіцієнта циркуляційної сили $k = 0,5$, а також формулі (81).

Оцінені критичні значення безрозмірної робочої частоти v (рис. 3.4) зведені в табл. 1. Усі ці значення повністю відповідають даним, графічно представленим на рис. 3.3.

Таблиця 1. Критичні значення безрозмірної робочої частоти ($k = 0,5$; $\psi = 1,0$).

Дробовий порядок α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
Частота v	0	3.24	3.15	2.68	1/k	1.49	1.22	0.92	0

3.5 Ідентифікація параметрів моделі дробового порядку

Для оцінки дробового порядку α та коефіцієнта демпфування ψ пропонується наступний підхід нелінійної регресії. В першу чергу він базується на найкращій відповідності даних експериментальних результатів амплітудно-частотної характеристики (75). Для цього загальну квадратичну похибку слід мінімізувати:

$$R(\alpha, \psi) = \sum_{p=1}^N [A(v_p) - \bar{A}_p]^2 = \sum_{p=0}^N \left\{ \frac{v^2}{\sqrt{[1-v^2+\psi v \cos(\frac{\pi\alpha}{2})]^2 + (\psi v)^2 [\cos(\frac{\pi\alpha}{2})-k]^2}} - \bar{A}_p \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (90)$$

де p – кількість експериментальних точок ($p = \overline{1, N}$); N – загальна кількість набору експериментальних даних безрозмірних частот v_p та амплітуд $\bar{A}_p > 0$.

Для практичної реалізації цього підходу використано числовий набір безрозмірних амплітуд, представлений у табл. 2. Результати числового розрахунку за формулою (88) представлені на рис. 6.

Таблиця 2. Ідентифікація параметрів моделі дробового порядку.

Експериментальна точка p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота v_p	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
Експериментальна амплітуда \bar{A}_p	0.063	0.301	0.824	1.699	1.836	1.555	1.494	1.312	1.298	1.225
Оцінена амплітуда $A(v_p)$	0.064	0.294	0.838	1.698	1.839	1.600	1.426	1.317	1.247	1.199
Відносна похибка $\varepsilon_p, \%$	2.0	2.3	1.7	0.1	0.2	2.9	4.6	0.4	3.9	2.1

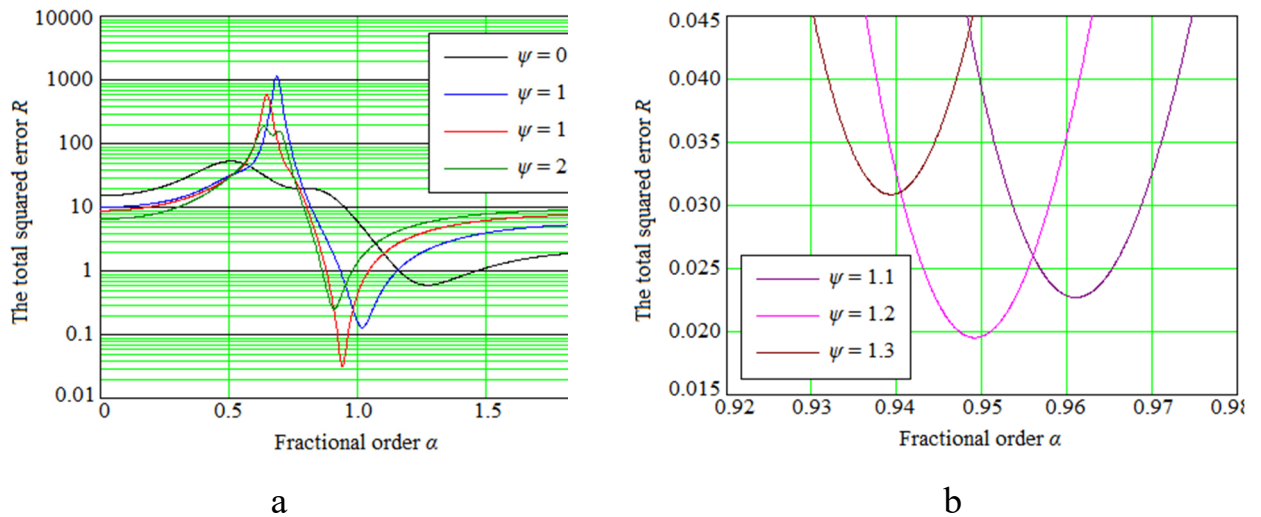


Рисунок 6. Результати нелінійного підходу ідентифікації параметрів: а – плоскі криві в логарифмічному масштабі; б – оцінювані параметри в збільшеному масштабі [14].

У результаті було оцінено параметри моделі дробового порядку: дробовий порядок $\alpha = 0,95$ та безрозмірне згасання $\psi = 1,2$.

Апроксимаційна крива АЧХ представлена на рис. 7.

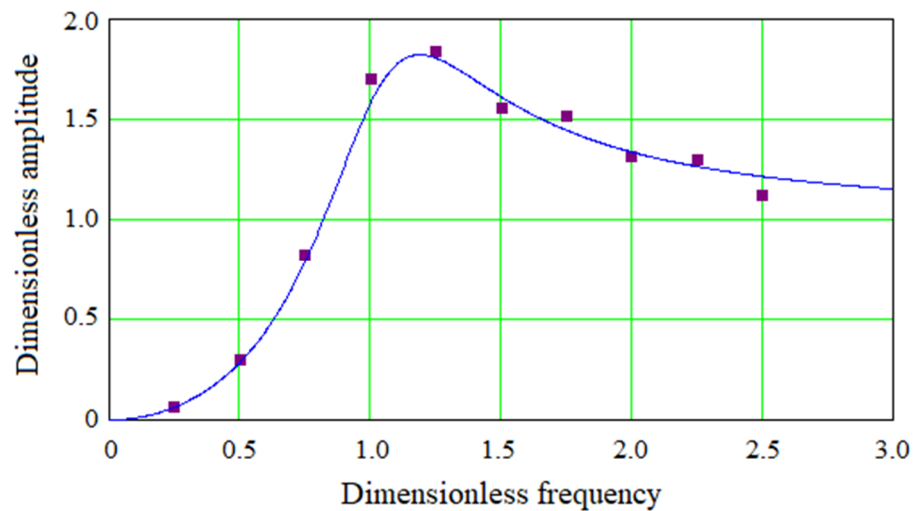


Рисунок 7. АЧХ: точки – набір даних безрозмірних амплітуд; лінія – апроксимуюча крива [14].

Надійність запропонованого підходу визначається відносними похибками (табл. 2):

$$\varepsilon_p = \left| \frac{A(v_p) - \bar{A}_p}{\bar{A}_p} \right| \cdot 100\%. \quad (91)$$

Для розглянутого прикладу максимальне значення відносної похибки дорівнює 4,6%.

3.6 Висновки до третього розділу

Дані результатів свідчать про те, що початкова одномасова модель вимушених коливань і стійкості гнучкого ротора повинна бути суттєво вдосконалена врахуванням дробового походження сили зовнішнього тертя. Спочатку вважалося, що коефіцієнт демпфування дробового порядку також залежить від дробового порядку. За допомогою даного припущення розв'язано рівняння (69) аналітично.

В результаті зведення запропонованої моделі до традиційної [24] отримано, що кейс для $\alpha = 1$ призводить до резонансної частоти $\omega = \omega_0$. Крім того, на робочій частоті $\omega = 2\omega_0$ втрачається динамічна стійкість. Ці факти підтверджують запропоновану модель дробового порядку та дозволяють враховувати довільний параметр α при зміні цих критичних швидкостей.

Зокрема, динамічна система є нестійкою для випадків $\alpha = 0$ і $\alpha = 2$. Цей факт підтверджується відсутністю затухального члена в характеристичному рівнянні (82). Однак гіпотезу щодо незмінності амплітуди коливань відносно внутрішнього тертя дробового порядку необхідно додатково довести або спростувати.

Крім того, в рамках ретельного аналізу отриманих результатів, зазначених вище, можна констатувати, що розроблена методологія суттєво посилює попередні науково-методичні підходи до динаміки та стійкості роторних машин. По-друге, застосовані підходи узгоджуються з наявними методами аналізу стійкості систем керування роторними машинами дробового порядку.

ВИСНОВКИ

Дробове числення надає велику кількість переваг, які пропонують цікаві рішення для системного моделювання та керування, машинного навчання розробки та алгоритмів оптимізації. Вібраційна надійність роторних машин забезпечується надійною математичною моделлю руху ротора. Критичні фактори, що призводять до втрати стабільності, - одна із найважливіших складових в сучасній техніці.

Ця робота описує комплексний підхід моделювання для дослідження вимушених коливань одномасового ротора та перевірки його динамічної стійкості з урахуванням дробового походження сили демпфування. Відповідна методика базується на безрозмірних складних диференціальних рівняннях дробового порядку з подальшим аналізом дійсних частин для їх коренів.

Застосовано метод комплексних амплітуд для визначення амплітудної та фазочастотної характеристик. Аналіз місця розташування полюса динамічної системи також був застосований для визначення умов втрати стабільності. У результаті модель одномасового гнучкого ротора була розширена шляхом врахування сили демпфування дробового порядку. Оцінено аналітичну залежність для визначення коефіцієнта демпфування дробового порядку. Визначено також вплив дробового порядку на амплітуду та фазу вимушених коливань. Нарешті, визначено межі втрати динамічної стійкості з урахуванням демпфіруючої сили дробового порядку.

Результати даної роботи дали змогу розробити та обґрунтувати більш узагальнений науково-методичний підхід до забезпечення вібраційної надійності роторних машин.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic press, 1999.
2. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. 247 p.
3. Kilbas A., Srivastava H. M., Trujillo J. Theory and application of fractional differential equation. Elsevier, 2006.
4. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models. Imperial College, London, 2010
5. Mendes R. V., Vazquez L. The dynamical nature of a backlash system with and without fluid friction. Nonlinear Dynam. 2007. Vol. 47. P. 363–366.
6. Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley & Sons, New York, 1993.
7. Luchko, Y. Fractional differential equations with the general fractional derivatives of arbitrary order in the Riemann–Liouville sense. Mathematics 2022, 10(6), 849. <https://doi.org/10.3390/math10060849>
8. Luchko, Y. General Fractional Integrals and Derivatives of Arbitrary Order. Symmetry 2021, 13, 755.
9. Rudolf Hilfer, Yury Luchko, Zivorad Tomovski Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives. In: Fract. Calc. Appl. Anal. -2009. -№ 12. -P. 299-318.
10. Luchko, Y.; Gorenflo, R. An operational method for solving fractional differential equations. Acta Math. Vietnam. 1999, 24, 207–234.
11. Luchko, Y. Convolution series and the generalized convolution Taylor formula. Fract. Calc. Appl. Anal. 2022, 25.

12. Luchko, Y.; Srivastava, H.M. The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus. *Comput. Math. Appl.* 1995, 29, 73–85.
13. Samko, S.G.; Kilbas, A.A.; Marichev, O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*; Gordon and Breach: New York, NY, USA, 1993.
14. Pavlenko, I., Verbovyi, A., Neamtu, C., Ivanov, V., Ivchenko, O. (2022). Fractional-order mathematical model of single-mass rotor dynamics and stability. *Applied Mathematical Modelling* [in press].
15. Yang, J.; Wang, T.; Yang, F.; Chen, J. The vibration response mechanism of a blade disk rotor system under the coupling effects of cracks and aerodynamic forces. *Scientific Reports* 2022, 12, 1520. <https://10.1038/s41598-022-05543-x>
16. Jimenez-Guarneros, M.; Morales-Perez, C.; Rangel-Magdaleno, J.D.J. Diagnostic of combined mechanical and electrical faults in ASD-powered induction motor using MODWT and a lightweight 1-D CNN. *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 2022, 18(7), 4688–4697. <https://doi.org/10.1109/TII.2021.3120975>
17. Wu, J.; Long, J.; Zhang, C. Torsional vibration test and analysis of an internal combustion engine power assembly by RLV-5500. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* 2021, 804(4), 042046. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/804/4/042046>
18. M.Caputo, Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent - II. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, vol. 13. 1967, pp. 529 539.
19. Yan DL, Chen QJ, Zheng Y, Wang WY, An YC. Dynamic evolution of a bulb hydroelectric generating unit considering effects of the blades. *Energy Conv Manag* 2019;185:183–201. doi: 10.1016/j.enconman.2019.02.002 .

20. Sinou JJ. Experimental response and vibrational characteristics of a slotted rotor. *Commun Nonlinear Sci Numer* 2009;14(7):3179–94. doi: 10.1016/j.cnsns.2008.10.024 .
21. Yan, D.; Wang, W.; Chen, Q. Fractional-order modeling and nonlinear dynamic analyses of the rotor-bearing-seal system. *Chaos, Solitons and Fractals* 2020, 133, 1096460. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109640>
22. Bavastri, C.A.; Ferreira, E.M.D.S.; De Espíndola, J.J.; Lopes, E.M.D.O. Modeling of dynamic rotors with flexible bearings due to the use of viscoelastic materials. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 2008, 30(1), 22–29. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782008000100004>
23. Li, Z.; Li, Y.; Wang, D.; Peng, Z.; Wang, H. Dynamic characteristics of rotor system with a slant crack based on fractional damping. *Chinese Journal of Mechanical Engineering* 2021, 34, 24. <https://doi.org/10.1186/s10033-021-00543-w>
24. Pavlenko, I.; Simonovskiy, V.; Verbovyi, A.; Ivchenko, O.; Ivanov, V. (2022). Rotor Dynamics and Stability of the Centrifugal Pump CPN 600-35 for Nuclear Power Plants. In *Advances in Design, Simulation and Manufacturing V. DSMIE 2022*, Poznan, Poland, 7–10.06.2022; Ivanov et al., Eds.; *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer: Cham, Switzerland, 2023; Volume 2, pp. 33–46. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-06044-1_4