



Сумський
державний
університет

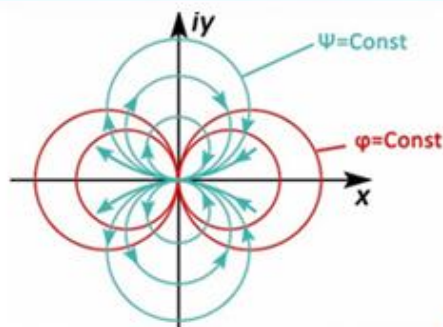
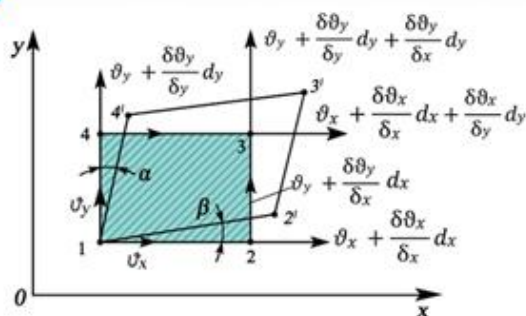
Кафедра
прикладної
гідроаеромеханіки



І. О. Ковальов,
О. В. Ратушний, Е. В. Колісніченко

ІНТЕГРАЛЬНИЙ КУРС МЕХАНІКИ РІДИНИ Й ГАЗУ

Навчальний посібник



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет



Ковальов І. О., Ратушний О. В., Колісніченко Е. В.

ІНТЕГРАЛЬНИЙ КУРС МЕХАНІКИ РІДИНИ Й ГАЗУ

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету



Суми
Сумський державний університет
2023

УДК 621.22:532+533(075.8)

К 56

Рецензенти:

М. Г. Хмельнюк – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри холодильних установок і кондиціонування повітря Одеського національного технологічного університету;

В. І. Складінський – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри хімічної інженерії Сумського державного університету

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 13 від 23 червня 2022 року)*

Ковальов І. О.

К 56

Інтегральний курс механіки рідини й газу : навчальний посібник / І. О. Ковальов, О. В. Ратушний, Е. В. Колісніченко. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – 401 с.

ISBN 978-966-657-930-3

У навчальному посібнику комплексно висвітлено основні відомості з механіки рідини й газу. Матеріал зведено в розділи: «Механіка рідини й газу», «Спеціальні розділи механіки рідини й газу» та окремого розділу «Вихрові течії».

Рекомендований студентам закладів вищої освіти III–IV рівнів акредитації, які навчаються за профілем гідромашинобудування, зокрема, спеціальності 131 «Прикладна механіка» (освітня програма «Гідравлічні машини, гідроприводи та гідропневмоавтоматика») денної та заочної форм навчання, а також може бути корисним аспірантам, науковцям та фахівцям-насособудівникам.

УДК 621.22:532+533(075.8)

© Сумський державний університет, 2023

© Ковальов І. О., Ратушний О. В.,

ISBN 978-966-657-930-3

Е. В. Колісніченко, 2023

ЗМІСТ

	С.
Пам'яті професора І. О. Ковальова	9
Частина І Механіка рідини й газу	11
1 Вступ до механіки рідини й газу	12
1.1 Предмет і методи механіки рідини й газу	12
1.2 Історичний нарис механіки рідини й газу	13
Перелік питань до розділу 1	15
2 Кінематика рідини	17
2.1 Основні поняття.....	17
2.1.1 Реальна рідина та її моделі.....	17
2.1.2 Два методи вивчення руху рідини	18
2.1.3 Поле швидкості та основні характеристики...19	
2.2 Теорема Коші – Гельмгольца (про розкладання швидкості рідкої частинки)	23
2.3 М. Є. Жуковський про наявність деформаційного руху.....	32
2.4 Диференціальне рівняння нерозривності (суцільності).....	34
Перелік питань до розділу 2	37
3 Кінематика вихрового руху	39
3.1 Основні поняття.....	39
3.2 Друга теорема Гельмгольца (про інтенсивність вихора вздовж вихрової струминки).....	43
3.3 Теорема Томсона (про незмінність циркуляції вздовж рухомого контура).....	46
3.4 Теорема Стокса (про циркуляцію навкруги профілю й вихори на кінці профілю)	52
3.5 Поле швидкостей, індуковане вихорами. Формула Біо – Савара.....	55
Перелік питань до розділу 3	61

4 Кінематика потенціального руху.....	62
4.1 Основні характеристики.....	62
4.2 Приклади просторових потенціальних течій.....	68
4.2.1 Паралельна течія.....	68
4.2.2 Просторовий стік та витік.....	70
4.2.3 Метод накладання течій. Просторовий диполь.....	72
4.2.4 Обтікання кулі прямолінійною течією.....	76
Перелік питань до розділу 4	82
5 Кінематика плоскої потенціальної течії.....	84
5.1 Використання функцій комплексного аргументу для плоских потенціальних течій	85
5.1.1 Спряжена комплексна швидкість.....	86
5.1.2 Відрахування комплексної швидкості.....	87
5.2 Приклади кінематичних розрахунків плоских потенціальних течій.....	88
5.2.1 Плоскопаралельна течія.....	89
5.2.2 Плоский стік і витік	92
5.2.3 Плоский потенціальний вихор.....	94
5.2.4 Вихростік або вихровитік.....	96
5.2.5 Течія всередині кута	98
5.2.6 Течія двох витоків.....	101
5.2.7 Плоский витік і стік. Плоский диполь.....	105
5.2.8 Циркуляційне обтікання циліндра.....	109
5.2.9 Безциркуляційне обтікання циліндра плоско- паралельною течією.....	112
5.2.10 Обтікання циліндра плоскопаралельною течією із циркуляцією	117
Перелік питань до розділу 5	122
6 Гідродинаміка ідеальної рідини.....	125
6.1 Рівняння руху ідеальної рідини	126
6.1.1 Рівняння руху ідеальної рідини у формі Ейлера.....	126

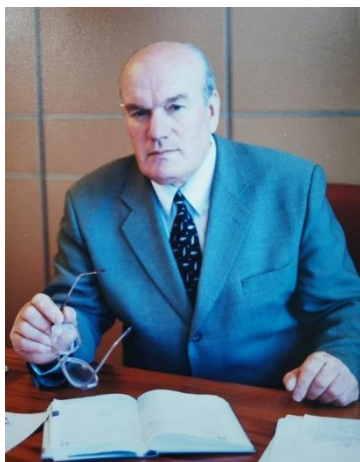
6.1.2 Рівняння руху ідеальної рідини у формі Громеко.....	128
6.2 Приклади інтегрування рівнянь руху ідеальної рідини.....	130
6.2.1 Течія потенціальна й нестала	130
6.2.2 Стала вихрова течія	134
Перелік питань до розділу 6	137
7 Гідродинаміка в'язкої рідини.....	138
7.1 В'язкість рідини й газу	138
7.2 Рівняння руху в'язкої рідини в напругах.....	142
7.3 Властивості дотичних і нормальних напруг.....	144
7.3.1 Парність дотичних напруг.....	144
7.3.2 Тензор напружень	146
7.3.3 Нормальні напруження у в'язкій рідині.....	146
7.3.4 Узагальнений закон Ньютона. Рідини ньютонівські й реологічні	149
7.4 Рівняння руху в'язкої рідини (Нав'є – Стокса)...	150
7.5 Інтегрування рівняння Нав'є – Стокса	154
7.5.1 Загальні підходи до інтегрування	154
7.5.2 Ламінарна течія в круглій циліндричній трубі (течія Хайзена – Пуазейля)	155
7.5.3 Ламінарна течія між двома паралельними стінками	160
7.5.4 Течія Куетта.....	163
Перелік питань до розділу 7	165
8 Турбулентна течія	167
8.1 Основні підходи й характеристики	167
8.2 Диференціальні рівняння руху турбулентної течії (рівняння Рейнольдса).....	170
8.3 Напівемпірична теорія турбулентності на прикладі течії в трубі.....	175
Перелік питань до розділу 8	184
9 Сили взаємодії рідини й твердої поверхні	186
9.1 Класифікація сил взаємодії.....	186

9.2 Умови безвідривного обтікання твердої поверхні	188
9.3. Сила взаємодії течії та стінок криволінійного каналу.....	192
9.4 Сила взаємодії струменя на нерухомому й рухомому стінку.....	195
9.5 Реакція від витікаючого струменя.....	198
9.6 Теорема М. Є. Жуковського про силову взаємодію потенціальної течії та твердого тіла.....	199
9.7 Теорема Жуковського –Чаплигіна про результуючу силу тиску	206
9.8 Формула Чаплигіна про момент результуючої сили тиску.....	209
Перелік питань до розділу 9	212
10 Основи теорії подібності й моделювання	214
10.1 Значення та методи моделювання	214
10.2 Дві задачі теорії подібності і подібність течій...216	
10.3 Критерії подібності за домінуючими силами....219	
Перелік питань до розділу 10	224
11 Основи теорії профілю	226
11.1 Типи профілів. Основні геометричні характеристики.....	226
11.2 Гідродинамічні характеристики профілю	230
11.3 Профілі теоретичні. Конформні перетворення..232	
11.4 Огляд теоретичних профілів. Профілі практичні.....	242
11.5 Швидкість і циркуляція в перетвореній течії.....244	
11.6 Постулат Чаплигіна – Жуковського.....246	
Перелік питань до розділу 11	250
Частина II Спеціальні розділи механіки рідини й газу.....	251
12 Основи теорії граничного шару	252
12.1 Граничний шар та його основні ознаки.....252	
12.2 Рівняння руху ламінарного граничного шару....260	

12.3	Граничний шар на криволінійній поверхні. Точка відриву	265
12.4	Інтегральне співвідношення для динамічного граничного шару	267
12.5	Методи розрахунків граничного шару	270
12.6	Керування граничним шаром.....	274
	Перелік питань до розділу 12	275
13	Електромагнітна гідромеханіка.....	277
13.1	Предмет електромагнітної гідромеханіки.....	277
13.2	Рідина чи газ в електромагнітному полі.....	278
13.3	Два принципи використання пондеромоторних сил.....	281
13.4	Основні рівняння електромагнітної гідромеханіки.....	284
13.5	Подібність електромагнітогідродинамічних явищ.....	287
	Перелік питань до розділу 13	290
14	Гідромеханіка багатофазних течій	291
14.1	Огляд і характеристики багатофазних течій.....	291
14.2	Поняття про гідравлічну крупність	294
14.3	Критерії подібності багатофазних течій.....	296
14.4	Перенесення твердих частинок основною фазою.....	297
14.5	Порядок розрахунку пульпопроводу	304
14.6	Використання класичних рівнянь гідромеханіки для багатофазних течій	307
	Перелік питань до розділу 14	312
15	Гідродинаміка рідини у вузьких шпаринах.....	313
15.1	Ламінарна течія рідини в зазорі між двома паралельними пластинами	314
15.2	Осьовий рух поршня в циліндрі	320
15.3	Основи гідродинамічної теорії змащування.....	322
	Перелік питань до розділу 15	332
	Частина III Вихрові течії	333

16 Вихрові течії в природі та техніці.....	334
16.1 Огляд вихрових течій у природі та техніці.....	334
16.2 Основні поняття й характеристики вихрового руху рідини	337
16.3 Основні теореми кінематики вихрового руху ..	345
16.4 Огляд вихрових течій у природі та техніці	348
16.5 Основні рівняння для розрахунку вихрових течій	353
16.6 Генерація вихрових ниток у вихрових течіях ..	358
16.7 Установки для створення вихрових течій	362
16.8 Приклади використання вихрових течій у техніці.....	367
16.8.1 Циклонні сепаратори	367
16.8.2 Циклонні камери згоряння	371
16.8.3 Вихрові топки (ТЕС).....	376
16.8.4 Спалення шкідливих промислових і побутових відходів.....	379
16.8.5 Енергорозподільвач. Труба Ранка – Хілша	383
16.8.6 Камери згоряння газотурбінних двигунів...	386
16.8.7 Камери згоряння двигунів внутрішнього згоряння.....	388
16.8.8 Вихрові гідромашини	393
16.8.9 Інші приклади використання вихрових течій у техніці	395
Перелік питань до розділу 16	396
Список літератури	398

ПАМ'ЯТІ ПРОФЕСОРА І. О. КОВАЛЬОВА



Видання присвячене пам'яті професора Ковальова Ігоря Олександровича (1941–2021), видатного організатора освіти й науки на Сумщині, директора Сумської філії ХПІ, ректора СФТІ та СумДУ (1972–2004), завідувача кафедри прикладної гідроаеромеханіки (1979–1991, 2012–2021).

Обіймаючи керівні посади, Ігор Олександрович завжди приділяв особливу увагу роботі зі студентами. Фундаментально, з глибоким розумінням володіючи математичним апаратом, маючи багатий практичний досвід, професор Ковальов із неперевершеною доступністю й чіткістю, якісно й послідовно викладав складні базові теоретичні дисципліни, що є фундаментом та основою підготовки фахівця-насособудівника. Серед яких курси «Механіка рідини й газу», «Спеціальні розділи механіки рідини й газу», «Вихрові течії», що були проаналізовані й викладені в авторській редакції Ігоря Олександровича з урахуванням традицій та особливостей підготовки спеціалістів насособудівної галузі в Сумах.

У цьому навчальному посібнику зведені напрацювання професора Ковальова з означених дисциплін. Ідея саме такого компонування – у логічній єдності навчального матеріалу від базових знань про властивості рідин та їх руху до принципів дії різноманітних гідравлічних машин. Серед них згадані й вільновихрові насоси – клас машин, піонером у розробленні яких є

кафедра прикладної гідроаеромеханіки та особисто Ігор Олександрович.

Він завжди підкреслював нерозривну єдність теоретичних знань про рідке перекачуване середовище й гідравлічні машини, що виконують ці функції; їх взаємну обумовленість.

На лекціях, які довгі роки читав Ігор Олександрович, навчене не одне покоління сумських насособудівників-професіоналів, визнаних далеко за межами України. Усі вони зі щирою вдячністю згадують професора Ковальова, який без перебільшення заклав основи їх успішного буття та розвитку в обраній галузі.

ЧАСТИНА І
МЕХАНІКА РІДИНИ Й ГАЗУ

1 ВСТУП ДО МЕХАНІКИ РІДИНИ Й ГАЗУ

1.1 Предмет і методи механіки рідини й газу

Механіка рідини й газу (гідроаеромеханіка) вивчає закономірності руху рідких матеріальних середовищ та їх взаємодію з твердими тілами.

На відміну від гідравліки, що також вивчає аналогічні питання, але методом спостережень, вимірювань та експериментальних досліджень, гідроаеромеханіка вивчає ці питання на базі основних законів теоретичної механіки з використанням добре розробленого математичного апарату обчислення нескінченно малих величин і теорії неперервних функцій. Тобто, основним методом механіки рідини й газу є теоретичний метод із подальшою перевіркою експериментальним методом.

Сама механіка як розділ фізики (науки про основні властивості матеріальних середовищ), вивчає одну з основних властивостей матерії – здатність рухатися рівномірно чи прискорено (або знаходитися у відносному спокої) та здійснювати силову взаємодію з іншими матеріальними тілами. Тому до гідроаеромеханіки як складової механіки автоматично перейшла необхідність виконання всіх основних законів природи – збереження матерії та енергії, збереження імпульсу та принципу мінімізації енергії під час виконання будь-якої природної роботи.

Основні уявлення про сьогодишню гідроаеромеханіку та її окремі складові можна скласти завдяки схемі, репрезентованій на рисунку 1.1.



Рисунок 1.1 – Складові гідроаеромеханіки

1.2 Історичний нарис механіки рідини й газу

На відміну від гідравліки, знання в якій накопичувалися із самого початку контактів стародавніх людей з повітрям і водою, від перших спостережень, аналізу та наукових узагальнень Аристотеля (384–322 р. до н. е.) й Архімеда (277–212 р. до н. е.) до експериментів Леонардо да Вінчі, Стевіна, Галілея, Паскаля та Гюйгенса – механіка рідини і газу як наука бере початок лише в XVIII столітті завдяки працям академіків М. В. Ломоносова (1711–1765 р.), Леонарда Ейлера (1707–1783 р.) і Данієля Бернуллі (1700–1782 р.).

Зокрема, М. В. Ломоносов першим сформулював закон збереження матерії, який у гідроаеромеханіці посів чинне місце як рівняння нерозривності; описав конвективний рух повітря в шахтах; звернув увагу на пружність повітря, що дало початок теорії аеропружності; розробив і побудував прилад для вимірювання швидкості й напрямку повітря; створив «аеродрольну» машину – прообраз нинішнього гелікоптера.

Леонард Ейлер одержав диференціальні рівняння рівноваги та руху рідини й газу, вказав на деякі інтеграли цих рівнянь, дослідив деякі питання в галузі кораблебудування й гідравлічних машин, зокрема його широковідоме рівняння для лопатевих гідромашин.

Даніель Бернуллі першим увів сам термін «гідромеханіка», установив залежність між питомими енергіями в перерізах течії, дослідив задачу про силу тиску струменя рідини на пластину.

Ісаак Ньютон (1642–1726) разом із роботами щодо розвитку математики й механіки, залишив цілий ряд фундаментальних досліджень і в гідромеханіці. Зокрема у своїх «Началах» він наводить теоретичний доказ квадратичного закону опору. Ньютон увів залежність дотичної напруги від в'язкості та градієнта швидкості, обґрунтував правочинність і доцільність уведення моделей «суцільне рідке середовище», «ідеальна рідина» й використання неперервних функцій для дослідження руху суцільних рідких середовищ.

Подальший етап у розвитку механіки рідини й газу (кінець XVIII – початок XIX ст.) характеризується математичним розробленням гідродинаміки ідеальної рідини. Маються на увазі праці французьких математиків Лагранжа (1736–1813 р.) і Коші (1789–1857 р.), присвячені потенціальним плоским течіям. У цей самий час поступово почали розроблятися питання гідродинаміки в'язкої рідини. У результаті французький учений Нав'є (1785–1836 р.) і англійський фізик і математик Стокс (1819–1903 р.) розробили рівняння руху в'язкої рідини – знамениті рівняння Нав'є – Стокса. У подальшому теорія руху в'язкої рідини заволоділа основною увагою дослідників. Серед них потрібно назвати Д. І. Менделєєва (1834–1904 р.), який першим дав уявлення про граничний шар,

М. С. Жуковського (1849–1921 р.), Л. Прандтля (1875–1953 р.), Т. Кармана (1881–1963 р.).

Саме в цей період з'явилися основні знання про фізику природи опору та втрат енергії, рівняння руху турбулентної течії (рівняння Рейнольдса), рівняння руху в граничному шарі (рівняння Прандтля) та інтегральне співвідношення для граничного шару, а також фундаментальна монографія Шліхтинга «Теорія граничного шару».

Отже, потужний розвиток гідроаеромеханіки ХІХ – першої половини ХХ століття дав можливість створити сучасну енергетику, морський та авіаційний транспорт, розпочати космічні дослідження. Усе це визначило облік ХХ століття загалом та продовжує домінувати на початку ХХІ століття.

Сучасний період подальшого розвитку гідроаеромеханіки характеризується використанням багатьох методів дослідження на базі новітньої комп'ютерної техніки та програмних комплексів, уточненням і поглибленням знань у зв'язку із сучасним розвитком економіки, нових галузей енергетики й машинобудування, проблемами екології та вичерпаності енергетичних і мінеральних ресурсів.

Перелік питань до розділу 1

1 Предмет і методи механіки рідини й газу (гідроаеромеханіки).

2 Фізика, механіка й гідроаеромеханіка. Їх взаємозв'язок.

3 Гідравліка й гідроаеромеханіка – їх спільні риси й відмінності. Основні періоди їх виникнення та розвитку.

4 Приклади вкладу основних світових і вітчизняних вчених у розвиток науки про рух рідких матеріальних середовищ.

5 Роль гідроаеромеханіки у формуванні обличчя ХХ-го століття.

6 Сучасний період розвитку науки «Механіка рідин і газів» та його зв'язок із сучасними вимогами цивілізації.

2 КІНЕМАТИКА РІДИНИ

2.1 Основні поняття

Перед тим, як почати вивчення основних теорем кінематики, коротко нагадаємо основні поняття кінематики, які частково вивчалися в курсі «Гідравліка».

2.1.1 Рідина реальна та її моделі

Кінематика – це розділ механіки, у якому вивчають геометричні характеристики руху матеріальних тіл незалежно від причин, які цей рух викликають. У механіці рідини й газу вивчають характеристики руху елементарного об'єму рідини (іноді вживають термін «рідка частинка»), водночас пояснюючи, що це об'єм, лінійні розміри якого значно більші за довжину вільного пробігу молекул рідини чи газу й значно менший за будь-який лінійний розмір течії чи твердого тіла. Іншими словами це означає, що течію розглядають як суцільне рідке середовище, що складається з таких елементарних об'ємів без зазорів між молекулами. Це перша модель реальної рідини, для якої всі її характеристики (швидкість, тиск, в'язкість, густина тощо) розглядають як неперервні функції координат і часу, тобто $v = f_1(x, y, z, t)$, $p = f_2(x, y, z, t)$. Це дає право здійснювати із цими функціями будь-які математичні операції – диференціювати, інтегрувати, розкладати в ряди тощо.

Нагадаємо, що в певних випадках реальну рідину можна розглядати не лише як суцільне матеріальне середовище, а і як середовище без в'язкості, для якого $\tau = 0$. Це друга модель реальної рідини, яку називають «ідеальною рідиною». Основою для введення такої моделі є гіпотеза І. Ньютона

$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dn}, \quad (2.1)$$

де τ – дотична напруга;
 μ – динамічний коефіцієнт в'язкості;
 $\frac{dv}{dn}$ – градієнт швидкості.

Із (2.1) видно, що течію з малим градієнтом швидкості (наприклад, парабола ступеня 1/7 ...1/10 для турбулентного руху) можна вважати ідеальною.

2.1.2 Два методи вивчення руху рідини

Рух рідини можна вивчати двома способами – методом Ейлера та методом Лагранжа.

Використовуючи метод Ейлера в течії фіксують точку $M(x, y, z)$ і визначають швидкість у ній (заміряють експериментально або розраховують). Якщо декілька таких точок будуть розташовані на одній лінії (наприклад, на радіусі круглої труби), то ми одержимо епюру розподілення швидкості по радіусу. Якщо точки будуть лежати на площі перерізу течії S , то одержимо закон зміни по площі перерізу

$$dQ = v dS.$$

Проінтегрувавши всі значення швидкостей у цих точках, будемо мати величину витрати рідини через цей переріз S

$$Q = \int_S v dS = v_{сеп} S.$$

Потрібно зазначити, що в разі несталої течії швидкість в обраній точці буде змінною по часу.

Метод Лагранжа полягає в дослідженні руху окремих обраних частинок рідини, початкові координати

яких фіксуються. Наприклад, ми обрали частинку рідини в точці M , початкові координати якої (x_0, y_0, z_0, t_0) . Подальше переміщення цієї частинки за час dt характеризується пройденим шляхом dS зі швидкістю

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Сукупність переміщень ds за час t дає траєкторію руху окремої частинки, а сукупність траєкторій різних частинок буде характеризувати течію в цілому.

Необхідно зазначити, що метод Лагранжа супроводжується значними труднощами, пов'язаними з визначенням функціонального зв'язку координат x, y, z із початковими координатами x_0, y_0, z_0

$$\begin{aligned}x &= f_1(x_0, y_0, z_0, t), \\y &= f_2(x_0, y_0, z_0, t), \\z &= f_3(x_0, y_0, z_0, t).\end{aligned}$$

Тому метод Лагранжа використовують лише в особливих ситуаціях.

2.1.3 Поле швидкості та основні характеристики

Кожна точка рухомого об'єму рідини або течії характеризується своїм вектором швидкості $\vec{v} = f(x, y, z, t)$, тому цей об'єм будемо називати векторним полем швидкості. Причому, воно може бути полем абсолютної швидкості \vec{v} (стосовно Землі), відносної швидкості \vec{w} (стосовно рухомих стінок каналу, наприклад,

міжлопатевого в робочому колесі насоса) й переносної швидкості \vec{u} (швидкість стінок каналу стосовно Землі).

Залежно від обраної системи координат будемо розрізняти компоненти швидкості v_x, v_y, v_z – у декартовій, v_r, v_u, v_z – у циліндричній, v_{q1}, v_{q2}, v_{q3} – у криволінійній та v_n і v_L – по нормалі до поверхні й по контуру L .

У полі швидкості, як і притаманно векторному полю, будемо розрізняти поняття, подані нижче.

1 Векторна лінія течії, це лінія в кожній точці якої вектори швидкості на даний момент часу дотичні й диференціальне рівняння якої має вигляд

$$\frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy} = \frac{v_z}{dz}. \quad (2.2)$$

Але для практичних потреб і геометричного репрезентування форми ліній течії лише її диференціального рівняння недостатньо й потрібно мати ще її алгебраїчне рівняння. Одержимо його для випадку плоскої течії $v = f(x, y)$. Диференціальне рівняння лінії течії в цьому разі буде

$$\frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy}, \text{ або } v_x dy - v_y dx = 0.$$

Алгебраїчне рівняння отримаємо після його інтегрування. Для цього введемо допоміжну функцію $\psi(x, y)$, наклавши на неї вимогу

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тоді рівняння лінії течії набуде вигляду

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0$$

або

$$d\psi = 0; \int d\psi = const.$$

Тобто функція $\psi = const$ є алгебраїчним рівнянням сім'ї ліній течії. У подальшому будемо називати її функція течії $\psi(x, y)$.

2 Траєкторія – це лінія, по якій рухалася одна частинка рідини за певний час при сталому русі. Зауважимо, що лінія течії співпадає з траєкторією лише в разі сталої течії.

3 Поверхня течії – це поверхня, утворена сукупністю ліній течії, що проходять через точки контура L .

4 Трубка течії – це поверхня течії, утворена лініями течії, що проходять через певний замкнений контур L .

5 Струминка течії – це об'єм рідини, обмежений трубкою течії. Для цієї рідини характерною є компонента швидкості $v_n = 0$ (умова непротікання через поверхню течії).

6 Витрата струминки течії – це потік вектора швидкості через переріз струминки

$$dQ = \bar{v} \cdot dS; Q = \int_S \bar{v} \cdot dS. \quad (2.3)$$

Звідси $[Q] = \left[\frac{m}{c} \right] \cdot [m^2] = \left[\frac{m^3}{c} \right]$ – це об'єм рідини, що

пройшов через переріз S за одиницю часу.

7 Осереднена швидкість за площею або часом.

Осереднена швидкість за площею S

$$Q = \int_S \bar{v} \cdot dS = \bar{v}_{cep} \cdot S.$$

Звідси

$$\bar{v}_{cep S} = \frac{1}{S} \int \bar{v} \cdot dS. \quad (2.4)$$

Осереднена швидкість за часом за період $t_2 - t_1$

$$\int_{t_2}^{t_1} \bar{v} \cdot dt = \bar{v}_{cep t} (t_2 - t_1).$$

Звідси

$$\bar{v}_{cep t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_2}^{t_1} \bar{v} \cdot dt; \quad (2.5)$$

8 Види течій:

$v = f(x, y, z, t)$ – тримірна, просторова, неусталена течія;

$v = f(x, y, z)$ – просторова, усталена течія;

$v = f(x, y)$ – двомірна, плоска, усталена течія;

$v = f(r, \varphi)$ – двомірна, осесиметрична течія, $v_z = 0$;

$v = f(x)$ – одномірна течія.

9 Прискорення рідкої частинки, враховуючи, що координати частинки x, y, z самі залежать від t

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}(x, y, z, t)}{dt} = \frac{d\bar{v}[x(t), y(t), z(t), t]}{dt} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ – локальне прискорення (прискорення частинки на даному місці за час dt);

$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ – конвективні прискорення (зміна швидкості через переміщення частинки в інше місце за час dt).

Тобто

$$\bar{W} = \bar{W}_{\text{лок}} + \bar{W}_{\text{конв}}. \quad (2.7)$$

Відповідно, компоненти прискорення мають вигляд

$$\begin{cases} \bar{W}_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \bar{W}_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \bar{W}_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2 Теорема Коші – Гельмгольца (про розкладання швидкості рідкої частинки)

Мається на увазі розкладання за видами руху, а за напрямками.

Із теоретичної механіки відомо, що швидкість будь-якої точки твердого тіла визначається геометричною сумою швидкості поступального руху разом із деяким полюсом O та швидкості обертального руху навкруги миттєвої осі, що проходить через полюс O .

Тобто

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + (\bar{\omega} \times \bar{r}_0), \quad (2.9)$$

де r_0 – радіус-вектор точки;

ω – кутова швидкість обертання.

У рідкому середовищі розглянемо швидкість рідкої частинки, що знаходиться на початковий момент у точці P (рис. 2.1).

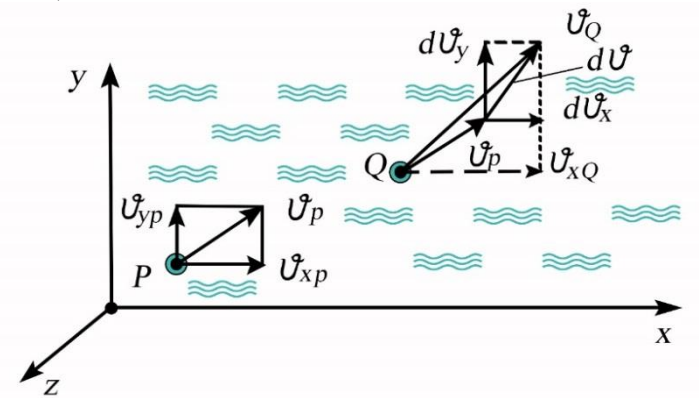


Рисунок 2.1 – Визначення компонент швидкості рідкої частинки

Під час переміщення частинки в сусідню точку Q швидкість її змінилася на величину dv

$$\bar{v}_Q = \bar{v}_P + d\bar{v}.$$

Відповідно

$$v_{xQ} = v_{xP} + dv_x.$$

Оскільки $\bar{v}_P = f_1(x, y, z)$, то і $dv_x = f_2(x, y, z)$, то

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \quad (2.10)$$

як повний диференціал.

Тоді

$$\bar{v}_{xQ} = \bar{v}_{xP} + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz, \quad (2.11)$$

$$\bar{v}_{yQ} = \bar{v}_{yP} + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz, \quad (2.12)$$

$$\bar{v}_{zQ} = \bar{v}_{zP} + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz. \quad (2.13)$$

Подальший розгляд проведемо лише для рівняння (2.11), а для осей y і z висновки зробимо за аналогією.

Проведемо для рівняння (2.11) перетворення Коші,

додавши та віднявши члени $\pm \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} dy + \frac{\partial v_z}{\partial x} dz \right)$

$$\begin{aligned} v_{xQ} &= v_{xP} + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} dy - \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} dz - \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} dz = \\ &= v_{xP} + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Установимо фізичний зміст членів рівняння (2.14) на прикладі елементарної рідкої частинки зі сторонами dx , dy , dz . Розглянемо рисунок 2.2.

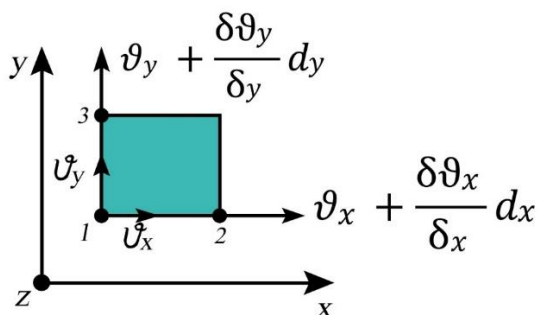


Рисунок 2.2 – Швидкості лінійної деформації

З рисунка 2.2 видно, що точка 2 в напрямку x має більшу швидкість, ніж точка 1 на величину $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx$. Тому ребро 1–2 буде розтягуватися, тобто наявна лінійна деформація рідкої частинки в напрямку x .

Під час проведення аналогічних перетворень для рівнянь (2.12) і (2.13) теж одержимо лінійні деформації рідкої частинки. Тому компоненти швидкості $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx$,

$\frac{\partial v_y}{\partial y} dy$ і $\frac{\partial v_z}{\partial z} dz$ являють собою швидкості лінійної деформації;

Установимо фізичний зміст членів рівняння (2.14) зі знаком «+». Розглянемо рисунок 2.3.

З рисунка 2.3 видно, що кожна з точок 2, 3, 4 стосовно до точки 1 рухається зі швидкістю, більшою від швидкості сусідньої точки на величину доданок по x та y .

Тому відповідні ребра рідкого елемента не лише подовжуються, а й повертаються на кути α і β . Це свідчить про те, що рідкий об'єм під час свого руху має, крім лінійної

деформації, ще й кутову деформацію зсуву, яка лише в площині xoy , що \perp осі Z дорівнює

$$Q_z = \alpha + \beta = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (2.15)$$

а лінійна швидкість цієї кутової деформації дорівнює

$$\varepsilon_z = Q_z \cdot dy = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy, \quad (2.16)$$

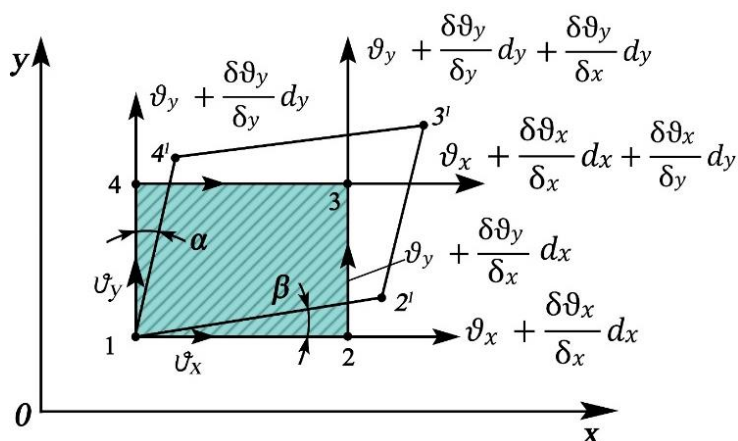


Рисунок 2.3 – Швидкості кутової деформації

Аналогічні деформації мають місце і в площинах xoz і yoz

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) dz, \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_y = \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx; \quad (2.18)$$

З'ясуємо фізичну сутність членів рівняння (2.14) зі знаком « \leftrightarrow ».

Для цього розглянемо поняття з векторного аналізу «вихор вектора» для вектора швидкості \bar{v}

$$\begin{aligned}\Omega = \text{rot}\bar{v} = \nabla \times \bar{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \\ &= \Omega_x \bar{i} + \Omega_y \bar{j} + \Omega_z \bar{k}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамільтона,

$\bar{\Omega}$ – вектор вихору,

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – спрямувальні орти.

З рівняння (2.19) видно, що компоненти вектора вихору дорівнюють

$$\begin{cases} \Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases}. \quad (2.20)$$

Отже, два члени в рівнянні (2.14) зі знаком « \leftrightarrow » являють собою два компоненти вихору. Фізична присутність вектора вихору в розкладанні вектора

швидкості свідчить про обертання елементарної рідкої частинки навколо відповідної осі.

Знайдемо кутову швидкість такого обертального руху. Виділимо для цього елементарний об'єм $\delta_x \cdot \delta_y \cdot \delta_z$ (рис. 2.4) та знайдемо швидкість його обертання навколо осі z (в площині xoy).

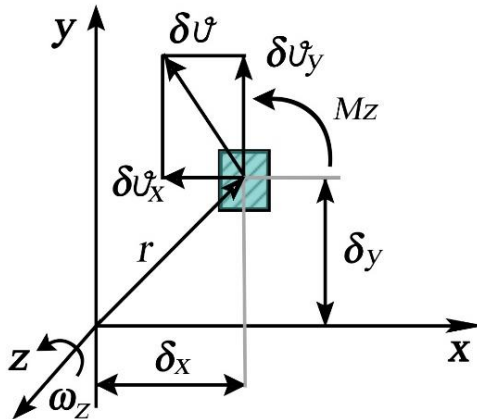


Рисунок 2.4 – До визначення швидкості обертального руху

Нехай δv – лінійна швидкість частинки, r – радіус-вектор обертання. З рисунка 2.4 видно, що $\omega_z = \frac{\delta v_y}{\delta x}$ і

$\omega_z = -\frac{\delta v_x}{\delta y}$. Якщо їх скласти, одержимо

$$2\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v_y}{\delta x} - \frac{\delta v_x}{\delta y} \right)$$

або

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v_y}{\delta x} - \frac{\delta v_x}{\delta y} \right) = \frac{1}{2} \Omega_z. \quad (2.21)$$

Аналогічно можна одержати

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v_z}{\delta y} - \frac{\delta v_y}{\delta z} \right) = \frac{1}{2} \Omega_x,$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v_x}{\delta z} - \frac{\delta v_z}{\delta x} \right) = \frac{1}{2} \Omega_x.$$

І, як висновок, одержимо

$$\bar{\Omega} = 2\bar{\omega}. \quad (2.22)$$

Нагадаємо, що вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$ – це вектор, спрямований перпендикулярно до площини обертання і напрям його залежить від напрямку обертання (рис. 2.5).

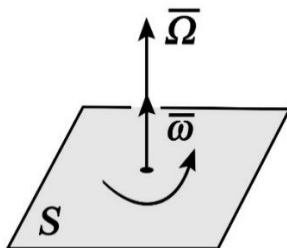


Рисунок 2.5 – До визначення напрямку обертання

Отже, аналізуючи складові вектора швидкості рідкої частинки, ми встановили, що швидкість руху будь-якої рідкої частинки складається зі швидкості квазітвердого руху (поступального та обертового) й швидкості деформації (лінійної та кутової).

Крім того, видно, що швидкість руху рідкої частинки визначається всіма її частинними похідними, що

відображають причини відповідних деформацій і напружень у рідині.

Цей висновок можна записати у вигляді матриці S-тензора швидкостей деформації

$$S = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2.23)$$

Властивості цієї матриці зображені на рисунку 2.6.

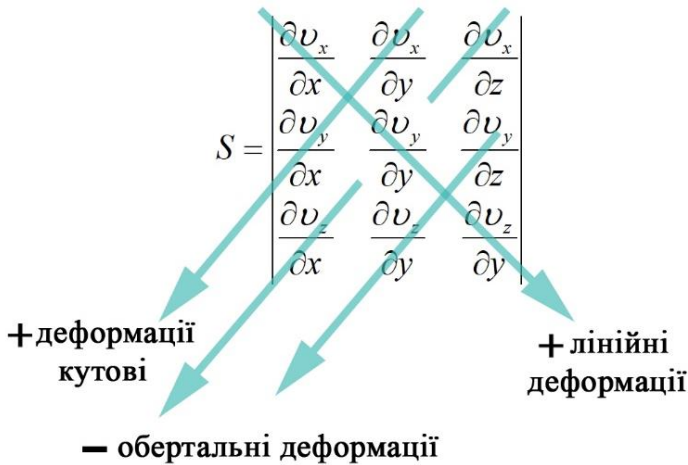


Рисунок 2.6 – Тензор швидкостей деформації

Насамкінець потрібно додати, що течії, у яких наявні всі складові швидкості (поступальну, деформаційну та обертову), називають вихровими. Течії, у яких відсутні

обертальні складові ($\Omega_x = 0$, $\Omega_y = 0$ і $\Omega_z = 0$) називають потенціальними безвихровими.

2.3 М. Є. Жуковський про наявність деформаційного руху

В одній зі своїх праць М. Є. Жуковський для переконливої ілюстрації особливості руху рідкої частинки розглянув рух частинки, форма якої на початковий момент t_{01} була сферою. Координати довільної точки M на її поверхні були x_1, y_1, z_1 .

Тому рівняння поверхні на той момент було

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2, \quad (2.24)$$

а швидкості цієї точки були v_{x1}, v_{y1}, v_{z1} .

Через нескінченно малий проміжок часу dt точка M зайняла нове місце з координатами x_2, y_2, z_2 , а компоненти її швидкості стали дорівнювати

$$\begin{cases} v_{x2} = v_{x1} + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 \\ v_{y2} = v_{y1} + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 \\ v_{z2} = v_{z1} + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 \end{cases} \quad (2.25)$$

Якщо помножити праву й ліву частини рівнянь (2.25) на час dt , одержимо відстань, яку пройшла точка M від свого початкового положення до нового

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 dt \\ y_2 = y_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 dt \\ z_2 = z_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 dt \end{cases} \quad (2.26)$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt} \\ y_1 = \frac{y_2}{1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt} \\ z_1 = \frac{z_2}{1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt} \end{cases} \quad (2.27)$$

Підставивши вирази для x_1 , y_1 і z_1 в рівняння сфери (2.24), одержимо

$$\frac{x_2^2}{a^2 \left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt\right)^2} + \frac{y_2^2}{a^2 \left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt\right)^2} + \frac{z_2^2}{a^2 \left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt\right)^2} = 1. \quad (2.28)$$

Вираз (2.28) є рівнянням поверхні еліпсоїда обертання

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2}.$$

Отже, нескінченно мала рідка куля, деформуючись під час руху (зокрема, рухаючись поступально разом зі всією течією та обертально), перетворюється на нескінченно малий еліпсоїд, осі якого спрямовані за головним осями деформації.

Цікаво знайти зміну об'єму первинної кульки

$$V_{кул} = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

$$V_{ел} = \frac{4}{3} \pi a^3 dt \left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt \right) \left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt \right) \left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt \right),$$

$$\Delta V = V_{ел} - V_{кул} = \frac{4}{3} \pi a^3 dt \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \quad (2.29)$$

Із виразу (2.29) видно, що ΔV буде дорівнювати нулю (тобто не стискуватися), коли

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.30)$$

Останнє рівняння можна назвати умовою, коли рідке середовище буде нестискуваним.

2.4 Диференціальне рівняння нерозривності (суцільності)

У курсі «Гідравліка» вже траплялося рівняння нерозривності в інтегральній формі

$$M_1 = M_2 = \text{const} \text{ або } Q_1 = Q_2 = \text{const}, \text{ коли } \rho = \text{const}.$$

У гідроаеромеханіці для численних випадків інтегрування диференціальних рівнянь руху рідини корисно мати ці рівняння в іншій, диференціальній формі.

У рухомій рідині виділимо елементарний об'єм зі сторонами dx , dy , dz та проаналізуємо зміну його маси.

На підставі закону збереження матерії, установленого М. В. Ломоносовим у 1748 році, запишемо

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

Маса цього об'єму дорівнює

$$m = \rho \cdot \Delta V = \rho dx dy dz,$$

де ρ – густина, ΔV – елементарний об'єм. Тоді

$$\frac{d(\rho \Delta V)}{dt} = 0. \quad (2.31)$$

Беручи до уваги, що $\rho = f(t)$ і $\Delta V = f(t)$, продиференціюємо (2.31) так:

$$\frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \frac{d(\Delta V)}{dt} = 0 \quad (2.32)$$

або перепишемо його в більш зручному вигляді

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = 0. \quad (2.33)$$

Звідси видно, що під час збільшення об'єму густина повинна зменшуватися й навпаки.

Знайдемо величину зміни об'єму за час dt . Розміри сторін виділеного об'єму були dx , dy і dz , а стали

$$dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt, \quad dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt \quad \text{і} \quad dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dt.$$

Тоді зміна об'єму буде дорівнювати різниці між новим об'ємом і початковим

$$\begin{aligned} d(\Delta V) &= \left(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt \right) \cdot \left(dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt \right) \cdot \left(dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dt \right) - dx \cdot dy \cdot dz = \\ &= dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Підставимо $d(\Delta V)$ у (2.33)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}{dt} = 0.$$

Після скорочення одержуємо

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.34)$$

або

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \cdot \bar{v}) = 0. \quad (2.35)$$

Рівняння (2.34) і (2.35) називають диференціальними рівняннями нерозривності (суцільності).

У випадку нестискуваної рідини $\rho = const$, тому $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Тоді рівняння (2.35) набуде вигляду

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (2.36)$$

або

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.37)$$

Перелік питань до розділу 2

- 1 Кінематика, як розділ механіки рідини.
- 2 Основні поняття кінематики рідини та основні механічні характеристики.
- 3 Елементарний об'єм рідини («рідка частинка рідини»).
- 4 Реальна рідина та дві її моделі.
- 5 Два метода вивчення руху рідини.
- 6 Поле швидкості та його основні геометричні характеристики.
- 7 Види руху рідини.
- 8 Лінія течії та її диференціальне рівняння.
- 9 Функція течії та зміст виразу $\Psi(x, y) = const$.
- 10 Компоненти швидкості та їх зв'язок із функцією течії.
- 11 Фізичний зміст виразу $v_n = 0$.
- 12 Поверхня, трубка, струминка й витрата течії.
- 13 Швидкості абсолютні, відносні й переносні. Швидкості осереднені за часом і площею.

14 Прискорення рідкої частинки – локальне й конвективне. Компоненти прискорення у векторній формі та в декартовій системі координат.

15 Фізичний зміст виразів $\frac{dv}{dt}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $u_x \frac{\partial v_x}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$,

де « n » – нормаль до лінії течії t .

16 Зміст теореми Коші – Гельмгольца про види руху елементарних об'ємів рідини.

17 Швидкості лінійної та кутової деформації.

18 Компоненти швидкості обертального руху через швидкості деформацій у площинах XOY , XOZ , YOZ .

19 Взаємозв'язок між векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{\Omega}$.

20 Тензор швидкостей деформацій.

21 Течія потенціальна й вихрова.

22 Приклад М. Є. Жуковського на деформаційний рух.

23 Рівняння нерозривності (суцільності) в інтегральній і диференціальній формах.

3 КІНЕМАТИКА ВИХРОВОГО РУХУ

3.1 Основні поняття

Як було встановлено раніше (див. п. 2.2), кожний рідкий елемент, рухаючись разом із течією, одночасно здійснює обертальний рух навколо власної осі. Крім того, у тонкому шарі рідини, що знаходиться поблизу твердої поверхні тіла, обов'язково створюються умови, які спонукають окремі елементарні об'єми обертатися. Також можна послатися на постійне утворення й руйнування так званих «поверхонь розриву» в течії рідкого середовища, що також зумовлює утворення окремих вихрових зон у течії та їх взаємодію між собою.

Такий вид руху в гідромеханіці називають вихровим, а самі поодинокі елементарні об'єми чи їх велику групу, що до того ж, обертаються навкруги їх спільної осі називають вихорами. Таку течію розглядають як накладену складову загальної течії або як самостійну, що характеризується вектором $\vec{\Omega}$ пов'язаним із вектором швидкості течії \vec{v} залежністю

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v}. \quad (3.1)$$

Будемо розрізняти мікрвихори, середні вихори й макрвихори, а також вихори вільні, приєднані та потенційні.

Під мікрвихорами розуміють окремі елементарні частинки, що обертаються навколо власних миттєвих осей, або невеликі об'єми, що обертаються навколо спільної осі.

Макрвихори – це найчастіше природні атмосферні чи океанічні вихори, що мають десятки й сотні кілометрів у діаметрі.

Приєднані вихори – це вихори, утворені впливом твердої поверхні тіла, що обтікається. Приєднані вихори знаходяться біля тіла.

Вільні вихори – це ті, що разом із загальним рухом рідини відійшли від твердого тіла й знаходяться в течії за ним.

У науці про вихоровий рух існує два значення терміна «вихор». Вихор фізичний – це реальні рідкі частинки чи їх сукупність, що обертаються навколо осей. Вихор математичний – це вектор $\vec{\Omega}$, що визначається залежністю (3.1) і дорівнює подвоєній величині кутової швидкості обертання об'ємів рідини, тобто

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}. \quad (3.2)$$

Об'єм рідини, у якому для кожної точки $M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$ існує вектор $\vec{\Omega}_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$, розглядають як векторне поле вихорів $\vec{\Omega} = f_2(x, y, z, t)$ так само, як і поле швидкостей $\vec{v} = f_1(x, y, z, t)$.

Вихровому полю $\vec{\Omega}$ притаманні такі самі кінематичні характеристики, як і для поля швидкостей \vec{v} , а саме:

1 Вихрова лінія – це лінія, в кожній точці якої вектор вихору дотичний, тому $\vec{\Omega} \times d\vec{L} = 0$. Диференціальне рівняння вихрової лінії аналогічне рівнянню лінії течії й має вигляд

$$\frac{\vec{\Omega}_x}{dx} = \frac{\vec{\Omega}_y}{dy} = \frac{\vec{\Omega}_z}{dz}. \quad (3.3)$$

2 Вихрова поверхня – це поверхня, утворена сукупністю вихрових ліній, що проходять через точки контура L .

3 Вихрова трубка – це вихрова поверхня, утворена сукупністю вихрових ліній, що пройшли через замкнений контур L (рис. 3.1)

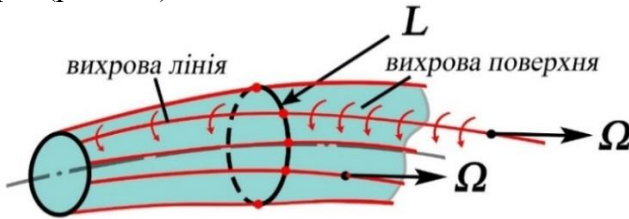


Рисунок 3.1 – Вихрова трубка

4 Вихрова струминка – це об’єм рідини, що знаходиться всередині вихрової трубки. Для вихрових трубки й струминки притаманна залежність $\vec{\Omega}_n = 0$.

5 Вихровий шар або вихрова доріжка – це вихрова струминка, поза якою течія не вихрова.

6 Вихрова поверхня – це поверхня, утворена вихровими лініями.

7 Вихротокова поверхня – це поверхня, яка утворена одночасно сукупністю вихрових ліній і ліній течії (рис. 3.2).

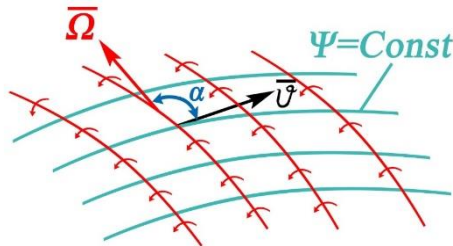


Рисунок 3.2 – Вихротокова поверхня

Кут α між векторами \vec{v} і $\vec{\Omega}$ може бути довільним, дорівнювати 90° або 0° (рис. 3.3).

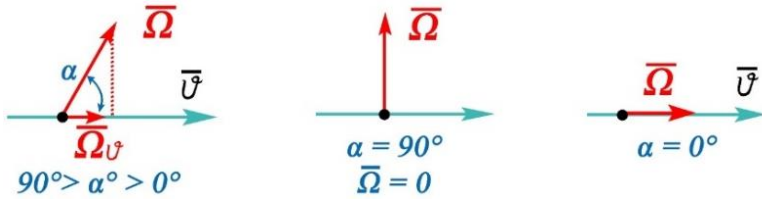


Рисунок 3.3 – Кути між векторами \vec{v} і $\vec{\Omega}$

Тоді течію, для якої $\alpha = 90^\circ$, будемо називати течією без вторинних течій. Течію, для якої $\alpha = 0^\circ$, будемо називати гвинтовою течією.

8 Інтенсивність вихору – це потік вектора $\vec{\Omega}$ через поверхню S :

$$I = \int_S \vec{\Omega} dS = \int_S \text{rot} \vec{v} dS. \quad (3.4)$$

Для елементарної вихрової струминки dS можна прийняти рівномірне розподілення вектора $\vec{\Omega}$ по dS , тоді інтенсивність вихору буде дорівнювати

$$I = \vec{\Omega} \cdot S, \quad (3.5)$$

аналогічно для поля швидкості

$$Q = \vec{v} \cdot S; \quad (3.6)$$

9 Компоненти вихору – $\vec{\Omega} = \Omega_x + \Omega_y + \Omega_z$.

$$\begin{cases} \bar{\Omega}_x = \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \\ \bar{\Omega}_y = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \\ \bar{\Omega}_z = \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \end{cases}$$

3.2 Друга теорема Гельмгольца (про інтенсивність вихору вздовж вихрової струминки)

Виділимо у вихровій струминці деякий об'єм, замкнений поверхнею $S = S_1 + S_2 + S_\sigma$ (рис. 3.4).

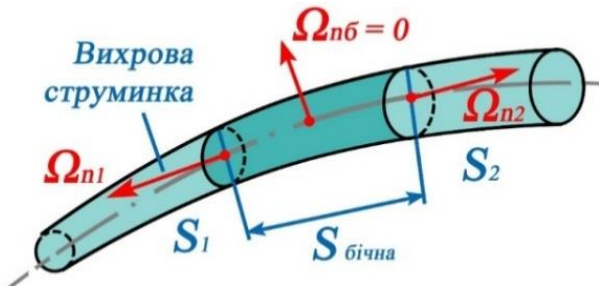


Рисунок 3.4 – До визначення інтенсивність вихору вздовж вихрової струминки

Будемо вважати всередині струминки вихрове поле соленоїдальним, тобто полем без особливостей. Тоді можна вважати, що $div \bar{\Omega} = 0$. Використаємо для даного поля теорему Остроградського – Гауса

$$\oint_S \bar{\Omega}_n dS = \int_V div \bar{\Omega} dV. \quad (3.7)$$

Але, як було вище зазначено, $\text{div}\vec{\Omega} = 0$ для соленоїдального поля, тому рівняння (3.7) набуває вигляду

$$\oint_S \vec{\Omega}_n dS = 0$$

або

$$\oint_S \Omega_n dS = \oint_{S_{\bar{\sigma}}} \Omega_{n\bar{\sigma}} \cdot dS_{\bar{\sigma}} + \oint_{S_1} \Omega_{n1} \cdot dS_1 + \oint_{S_2} \Omega_{n2} \cdot dS_2 = 0 \quad (3.8)$$

Оскільки $\oint_{S_{\bar{\sigma}}} \Omega_{n\bar{\sigma}} \cdot dS_{\bar{\sigma}} = 0$ (умова дотичності вектора

$\vec{\Omega}$ до поверхні струминки), то з (3.8) одержимо

$$\oint_{S_1} \Omega_{n1} \cdot dS_1 = \oint_{S_2} \Omega_{n2} \cdot dS_2. \quad (3.9)$$

Ураховуючи поняття «інтенсивність вихору», з (3.9) можна записати:

$$I_1 = I_2$$

або

$$I = \text{const} \quad (3.10)$$

Тобто потік вектора вихору крізь будь-який переріз вихрової струминки (інтенсивність вихору) на даний момент часу однаковий для всієї струминки.

У математичному вигляді це записують так:

$$\frac{dI}{dL} = 0. \quad (3.11)$$

Нагадаємо, що раніше для струминки течії було показано, що $Q = \int_S \nu \cdot dS = const$, $Q_1 = Q_2$. Тепер для вихрової струминки встановлено, що $I_1 = I_2$.

Іноді цю властивість записують через кутову швидкість

$$I = \oint_S \vec{\Omega}_n dS = 2 \oint_S \omega_n dS.$$

Два наслідки з теореми:

– площа перерізу вихрової трубки ніде не може дорівнювати нулю, так як в цьому випадку $\omega = \infty$, що фізично неможливо;

– вихрові трубки не можуть починатися або закінчуватися всередині рідини: вони або замикаються самі на себе, утворюючи вихрові кільця, або спірають на тверді чи вільні поверхні (рис. 3.5).

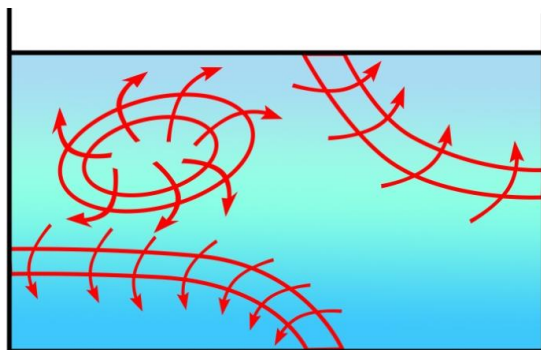


Рисунок 3.5 – Вихрові трубки

3.3 Теорема Томсона (про незмінність циркуляції вздовж рухомого контура)

Циркуляція швидкості Γ – це добуток величини швидкості \vec{v} на відстань L , [м²/с]

$$\Gamma = \vec{v} \cdot L$$

Циркуляція швидкості – один з основних параметрів течії в гідромеханіці. Її фізичний зміст – це робота вектора швидкості на шляху від однієї точки лінії до іншої

$$\Gamma = \int_a^b \vec{v} \cdot dL = \int_a^b v \cdot dL \cdot \cos(\nu \wedge L) = \int_a^b (v_x dx + v_y dy + v_z dz). \quad (3.12)$$

Циркуляція по замкненому контуру L

$$\Gamma = \oint_L v_L \cdot dL. \quad (3.13)$$

У разі обертального руху з радіусом r

$$\Gamma = 2\pi \cdot r \cdot v_u. \quad (3.14)$$

Теорема Томсона визначає основну властивість циркуляції швидкості по замкненому контуру у вихровій течії: якщо масові сили мають однозначний потенціал і рух ідеальної рідини баротропний, то циркуляція швидкості по замкненому рідкому контуру буде постійною й не змінюватиметься в часі.

Тобто

$$\Gamma(t) = \text{const}, \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (3.15)$$

Звернемо увагу, що ствердження теореми справедливо за таких умов:

- мається на увазі вихрова течія ідеальної рідини;
- рух рідини баротропний, що означає $\rho = f(p)$ (для води – завжди, для газу – лише під час ізотермічного та адіабатичного руху);
- справедливе лише для рідкого контура (контур, що під час свого переміщення за час $(t_2 - t_1)$ складається з одних первинних частинок рідини, змінюючи лише свою конфігурацію).

Виділимо в рухомій рідині рідкий контур L на момент часу t_1 , утворений частинками рідини a, b, c, d, \dots . Через проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ цей контур займе положення L_2 , але буде утворений тими самими частинками a, b, c, d, \dots .

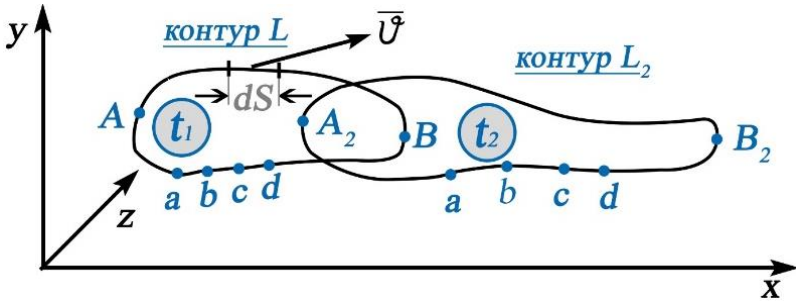


Рисунок 3.6 – До визначення незмінності циркуляції вздовж рухомого контура

Визначимо циркуляцію швидкості по контуру L .

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot dL = \oint_L (v_x dx + v_y dy + v_z dz),$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d}{dt} (v_x dx + v_y dy + v_z dz).$$

Визначимо окремі похідні

$$\frac{d}{dt} (v_x dx) = \frac{dv_x}{dt} dx + \frac{d(dx)}{dt} v_x = \frac{dv_x}{dt} dx + v_x dv_x,$$

де $\frac{dx}{dt} = v_x$. Аналогічно

$$\frac{d}{dt} (v_y dy) = \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{d(dy)}{dt} v_y = \frac{dv_y}{dt} dy + v_y dv_y,$$

$$\frac{d}{dt} (v_z dz) = \frac{dv_z}{dt} dz + \frac{d(dz)}{dt} v_z = \frac{dv_z}{dt} dz + v_z dv_z.$$

Тоді

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \left(\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz \right) + \oint_L (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \quad (3.16)$$

Визначимо вираз під знаком другого інтеграла

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = \frac{d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} = d\left(\frac{v^2}{2}\right). \quad (3.17)$$

Для визначення величини проєкцій прискорення $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$ і $\frac{dv_z}{dt}$, що під знаком першого інтеграла, скористаємося диференціальними рівняннями руху ідеальної рідини – рівняннями Ейлера

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases} \quad (3.18)$$

Скористаємося умовами, за яких правочинна теорема Томсона:

– масові сили мають однозначний потенціал $U(x, y, z)$, через який можуть бути визначені проєкції масових сил

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

– рух рідини є баротропним, тому $\rho = f(p)$,
 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$, де $P(x, y, z)$ – силова функція.

Тоді

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

З урахуванням виконання умов теореми Томсона рівняння (3.18) можна репрезентувати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases}. \quad (3.19)$$

Домножимо ліву й праву частину рівняння (3.19) на dx , dy , dz і складемо почленно:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) = \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} dx + \frac{\partial v_y}{\partial t} dy + \frac{\partial v_z}{\partial t} dz \right).$$

Сума трьох членів у дужках являє собою повний диференціал відповідних функцій, тому, враховуючи додатково (3.17), запишемо його в такому вигляді:

$$\begin{aligned} dU - dP &= d \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} dx + \frac{\partial v_y}{\partial t} dy + \frac{\partial v_z}{\partial t} dz \right) = \\ &= d \left[\frac{\partial}{\partial t} (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \right] = d \left(\frac{v^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Рівняння (3.16) з урахуванням виразу (3.20) набуває вигляду

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \left[dU - dP - d \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] = \oint_L \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right). \quad (3.21)$$

Вираз під знаком другого інтеграла є повним диференціалом суми однозначних функцій U , P і $\frac{v^2}{2}$. Як відомо з теорії однозначних функцій, їх інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулю. Тому

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0; \text{ і } \Gamma = \text{const}. \quad (3.22)$$

Тобто величина циркуляції під час виконання умов для теореми Томсона є постійною величиною.

Два наслідки з теореми Томсона:

– якщо рух рідкої течії починається зі стану спокою ($v = 0$ і $\Gamma = 0$), то рух і в подальшому залишається потенціальним;

– умова $\frac{d\Gamma}{dt} \neq 0$ виконується лише тоді, коли функції

$P(x, y, z, t)$ і $v(x, y, z, t)$ будуть у якомусь місці течії (первинного рідкого контура) мати розрив (рис. 3.7).

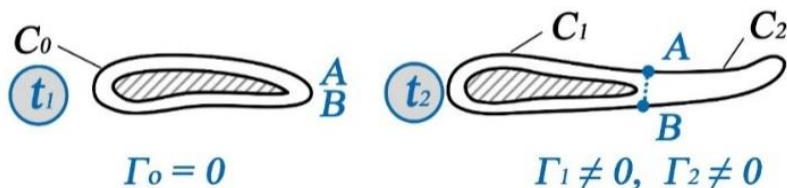


Рисунок 3.7 – Утворення приєданого вихору

На рисунку 3.7 C_0 , C_1 і C_2 – рідкі контури, точки A і B – точки розриву P і v .

Контур $(C_1 + C_2)$ – це той самий рідкий контур, що й C_0 , для якого $\Gamma_0 = 0$. Тому $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$, $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, C_1 – приєднаний вихор, C_2 – вільний вихор.

3.4 Теорема Стокса (про циркуляцію навкруги профілю й вихори на кінці профілю)

Зміст теореми такий: потік вектора вихору $\vec{\Omega}$ через довільну поверхню S (інтенсивність вихору), що спирається на замкнений контур L , дорівнює циркуляції швидкості по цьому контуру (рис. 3.8).

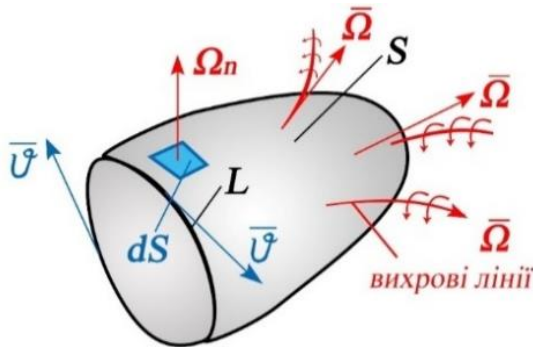


Рисунок 3.8 – До визначення теореми Стокса

На рисунку 3.8 зображено поверхню S , що спирається на контур L . Теорема стверджує

$$I_s = \int_S \vec{\Omega} dS = \int_S \text{rot} \vec{v} \cdot dS = \oint_L \vec{v} \cdot dL = \Gamma_L$$

або

$$\int_S \text{rot} \vec{v} \cdot dS = \oint_L \vec{v} \cdot dL. \quad (3.23)$$

Доведемо спочатку справедливості цієї теореми для елементарної площини $dS = dx \cdot dy$ (рис. 3.9).

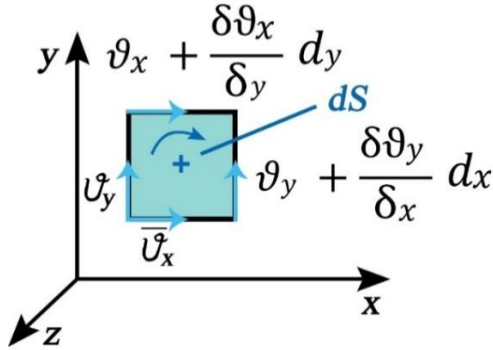


Рисунок 3.9 – Визначення циркуляції по нескінченно малому контуру

$$\begin{aligned}
 d\Gamma &= v_y dy + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) dx - \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right) dy - v_x dx = \\
 &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dx dy = -\vec{\Omega}_z dS = dI .
 \end{aligned}$$

Отже, циркуляція $d\Gamma$ по нескінченно малому контуру $2dx + 2dy$ дорівнює інтенсивності вихору $\vec{\Omega}_z$, що спирається на цей контур і пронизує цю поверхню, оскільки вектор вихору $\vec{\Omega}_z$ перпендикулярний осі z .

Для доведення справедливості теореми Стокса для площини кінцевих розмірів S розіб'ємо її сіткою з елементарних площин dS і прослідкуємо за напрямками швидкості за сторонами площин (рис. 3.10).

З рисунка 3.10 видно, що циркуляція за суміжними сторонами чотирьох елементарних площин взаємно скасовується й залишається лише циркуляція по зовнішній стороні $a-b-c-d$. Тому можна вважати, що й по всіх внутрішніх суміжних сторонах на площині кінцевих

розмірів S вона скасовується, і залишиться лише циркуляція по контуру L , на який спирається площина S .

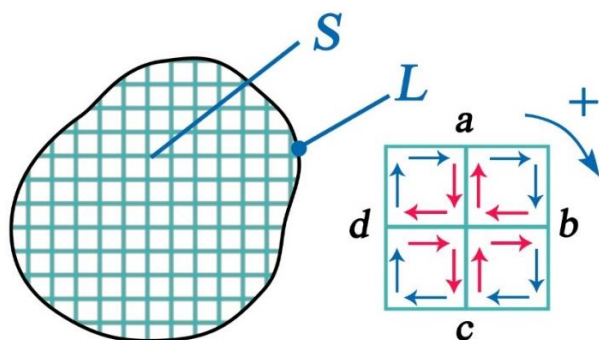


Рисунок 3.10 – Циркуляція по зовнішніх сторонах контура

Аналогічна ситуація буде й для просторової площини S (див. рис. 3.8).

Теорема Стокса пояснює причину виникнення вихорів на кінці крила літака й будь-якої лопаті, так званих кінцевих вихорів (рис. 3.11).

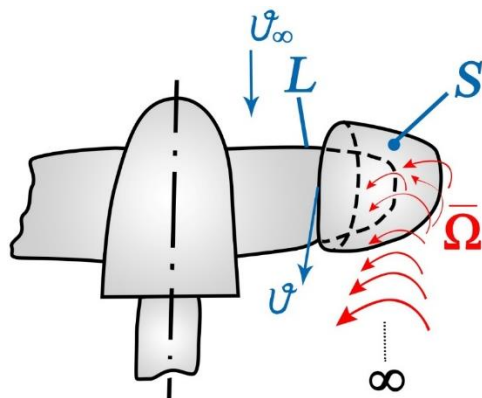


Рисунок 3.11 – Кінцеві вихори

Кінцеві вихори зменшують величину підйимальної сили лопаті, збільшують силу лобового супротиву й зумовлюють додаткову втрату енергії.

3.5 Поле швидкостей, індуковане вихорами. Формула Біо – Савара

Явище «індуктивність» як здатність одного векторного поля наводити (викликати) інше векторне поле добре відоме з фізики, особливо з роділу «Електромагнітна динаміка».

Це явище притаманне й гідромеханіці, де маємо справу з полем швидкості $v = f(x, y, z, t)$ і полем вихорів $\Omega = f(x, y, z, t)$.

За відомими компонентами швидкості v_x , v_y і v_z можна визначити компоненти вихорів Ω_x , Ω_y і Ω_z (див. 2.16 або п. 3.1). Тому розрахувати вихрове поле за лопаттю гідромашини або крила літака цілком можливо. Але зі свого боку вихрове поле за лопаттю індукує (створює) додаткову течію обтікання лопаті – так звану індуковану течію, вектор якої \vec{v}_i спрямований за нормаллю до течії обтікання \vec{v}_∞ та спотворює її, викликаючи зміну кута набігання й появу сили індукованого спротиву. Тому потрібно мати можливість заздалегідь розраховувати параметри індукованої течії та її вплив на параметри обтікання.

Цю задачу формулюють так: як за відомим полем вихорів Ω_x , Ω_y , Ω_z знайти компоненти індукованого поля швидкостей v_{xi} , v_{yi} і v_{zi} .

Спочатку наведемо розв'язання цієї задачі в загальному виді. Дано: у кожній точці об'єму відомі

компоненти вихору $\Omega_x = 2\omega_x$, $\Omega_y = 2\omega_y$ і $\Omega_z = 2\omega_z$.

Необхідно знайти: v_{xi} , v_{yi} і v_{zi} в кожній точці.

Уведемо для цього допоміжний вектор \vec{a} з компонентами a_x , a_y , a_z , що відповідає умовам $div\vec{a} = 0$, $rot\vec{a} = \vec{v}$ (за аналогією $rot\vec{v} = \vec{\Omega}$). Тоді

$$v_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, v_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, v_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (3.24)$$

Для компонент вихору (через \vec{a}) маємо

$$\vec{\Omega} = rot\vec{v} = rot \cdot rot \vec{a}. \quad (3.25)$$

Відповідно

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Сума в перших дужках дорівнює нулю згідно з умовами, накладеної на допоміжний вектор \vec{a} ($div\vec{a} = 0$). Тому

$$\Omega_x = - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right).$$

Провівши аналогічні операції для Ω_y і Ω_z , маємо

$$\begin{cases} \Omega_x = -\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right) \\ \Omega_y = -\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right) \\ \Omega_z = -\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right) \end{cases}. \quad (3.26)$$

Більш коректний математичний запис цих рівнянь із використанням оператора Лапласа має вигляд

$$\begin{cases} \Delta a_x = -\Omega_x \\ \Delta a_y = -\Omega_y \\ \Delta a_z = -\Omega_z \end{cases}, \quad (3.26)^*$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Отже, ми одержали зв'язок між відомими компонентами вихору й невідомими компонентами введеного допоміжного вектора \vec{a} . Рівняння (3.26) і (3.26)* відомі в математиці як рівняння Пуасона, а їх розв'язання має вигляд (3.27)

Запропоновану задачу можна вважати розв'язаною: при заданих значеннях Ω_x , Ω_y , Ω_z за (3.27) знаходять a_x , a_y , a_z , а за (3.24) знаходять компоненти індукованої швидкості v_{xi} , v_{yi} і v_{zi} .

$$\begin{cases} a_x = \frac{1}{4\pi} \int_V \Omega_x \frac{dV}{r} \\ a_y = \frac{1}{4\pi} \int_V \Omega_y \frac{dV}{r} \\ a_z = \frac{1}{4\pi} \int_V \Omega_z \frac{dV}{r} \end{cases}, \quad (3.27)$$

де V – об’єм, що займає вихор;
 r – відстань до точки розрахунку.

Використовуючи такий підхід, одержано формулу для визначення величини індукованої швидкості в точці $M(x, y, z)$, що знаходиться на відстані r від елемента dL довільного вихрового шнура (рис. 3.12):

$$dv_i = \frac{\Gamma}{4\pi \cdot r^2} \sin \alpha \, dL, \quad (3.28)$$

або

$$v_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha}{r^2} dL. \quad (3.29)$$

Вирази (3.28) і (3.29) є формулою Біо – Савара.

Розглянемо приклади використання формули Біо – Савара:

а) поле швидкості, що викликає відрізок АВ елементарної вихрової нитки (рис. 3.13).

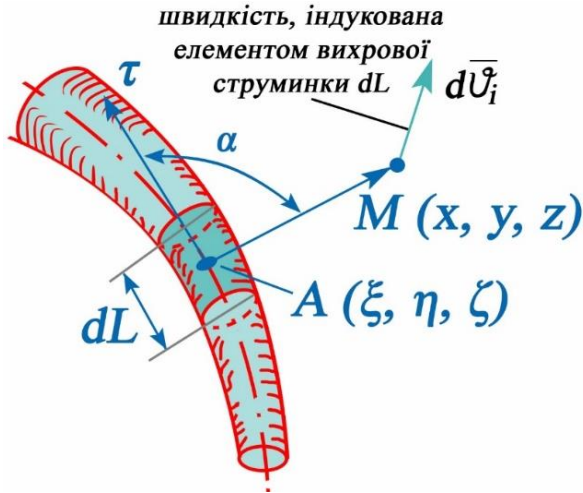


Рисунок 3.12 – До визначення індукованої швидкості

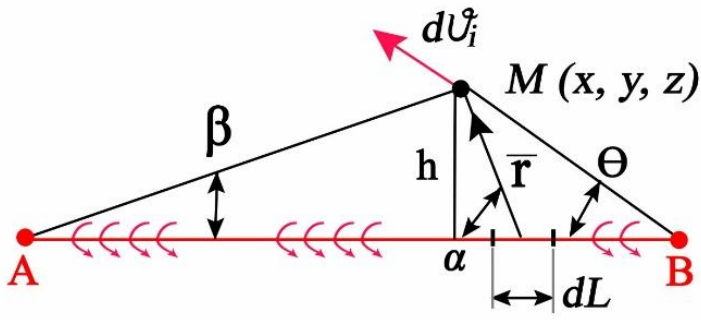


Рисунок 3.13 – До визначення поля швидкості, індукованого відрізком елементарної вихрової нитки

З рисунка 3.13

$$r = \frac{h}{\sin \alpha},$$

$$dL = d(h \cdot \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{h}{\sin^2 \alpha} d\alpha,$$

$$\begin{aligned} dv_i &= \frac{\Gamma}{4\pi \cdot r^2} \sin \alpha \cdot dL = \frac{\Gamma \cdot \sin^2 \alpha}{4\pi \cdot h^2} \sin \alpha \frac{h}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi \cdot h} \sin \alpha \cdot d\alpha. \end{aligned}$$

Тоді

$$v_i = \frac{\Gamma}{4\pi \cdot h} \int_{\theta}^{\pi-\beta} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi \cdot h} (\cos \theta + \cos \beta); \quad (3.30)$$

б) вихрова нитка нескінченної довжини.

У цьому разі $\theta = \beta = 0$ (див. рис. 3.13) і $\cos \theta = \cos \beta = 1$.

Тоді

$$v_i = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot h}; \quad (3.31)$$

в) вихровий промінь ($\theta = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$), тоді

$$v_i = \frac{\Gamma}{4\pi \cdot h}. \quad (3.32)$$

Перелік питань до розділу 3

- 1 Вихровий рух, його основна ознака.
- 2 Вихрове векторне поле та його основні геометричні характеристики.
- 3 Зв'язок між векторами \vec{v} і $\vec{\Omega}$
- 4 Вихор фізичний і математичний.
- 5 Мікротовори, середньорозмірні й макровихори.
- 6 Вихрові лінії, поверхні, струминка, доріжка й вихротокова поверхня.
- 7 Варіанти взаємного розміщення векторів \vec{v} і $\vec{\Omega}$ та характери течій у кожному з варіантів.
- 8 Поняття «інтенсивність вихору».
- 9 Компоненти вихору.
- 10 Друга теорема Гельмгольца про інтенсивність вихору та два наслідки з неї.
- 11 Поняття «циркуляція швидкості».
- 12 Два наслідки з теореми Томсона про приєднані й вільні вихори.
- 13 Теорема Стокса й причини утворення кінцевих вихорів на лопатях.
- 14 Поле швидкостей, індукованих вихорами. Постановка задачі.
- 15 Вирішення задачі про індуковані швидкості в загальному вигляді. Рівняння Пуасона.
- 16 Формула Біо – Савара та її використання для окремих вихорів.
- 17 Негативний характер індукованого поля швидкостей.

4 КІНЕМАТИКА ПОТЕНЦІАЛЬНОГО РУХУ

4.1 Основні характеристики

Потенціальний рух рідини – це рух під дією сил, що мають потенціал, і в якому відсутня складова обертального руху. Це означає, що проєкції масових сил можуть бути виражені через потенціал $U(x, y, z)$, тобто

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.1)$$

Другою ознакою потенціальної течії є виконання залежності

$$\Omega = \text{rot} v = 0, \quad (4.2)$$

із якої випливає

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = 0. \quad (4.3)$$

Тому

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \Omega_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \Omega_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Останні вирази (4.4) являють собою рівність навхрест лежачих похідних, що згідно з теоремою Коші – Рімана є необхідною та достатньою умовою того, щоб компоненти v_x , v_y і v_z були похідними деякої функції $\varphi(x, y, z)$. Тобто

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (4.5)$$

У подальшому функцію $\varphi(x, y, z)$ будемо називати потенціалом швидкості та вбачати в ній одну з основних особливостей потенціальної течії, а саме: у потенціальній течії проєкції швидкості на будь-який напрямок дорівнюють частинній похідній від потенціалу швидкості $\varphi(x, y, z)$ за відповідним напрямком.

$$\text{Тобто } v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial S}, v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}, v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, v_u = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \text{ тощо, а}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad} \varphi = \nabla \varphi, \quad (4.6)$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамільтона.

Справедливе зворотнє твердження – якщо для течії існує потенціал швидкості, то вихор в такій течії дорівнює нулю

$$\text{rot} \bar{v} = \bar{\nabla} \times \bar{v} = \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \varphi) = 0,$$

тому що вектори колінеарні ($\bar{\nabla} \uparrow \downarrow \bar{\nabla} \varphi$):

$$\text{rot grad} \varphi = 0. \quad (4.7)$$

У разі плоскої течії потенціал швидкості $\varphi(x, y)$ та функція течії $\psi(x, y)$ взаємно пов'язані

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Потенціальну течію нестискуваної рідини ($\rho = \text{const}$) описують рівнянням Лапласа.

Для доведення скористаємося диференціальним рівнянням нерозривності (2.37)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

тоді

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0.$$

Тобто

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \text{div} \vec{v} = 0 \quad (4.8)$$

або

$$\Delta \varphi = 0, \quad (4.9)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$ – оператор Лапласа.

Вирази (4.8) або (4.9) – рівняння Лапласа (порівняйте з рівнянням Пуасона (3.26)).

Циркуляція швидкості по будь-якому замкненого контуру в потенціальній течії дорівнює нулю

$$\Gamma = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_S v \cdot dS \cdot \cos(\nu, S) =$$

$$= \oint_S v \cdot dS [\cos(v, x)\cos(S, x) + \cos(v, y)\cos(S, y) + \cos(v, z)\cos(S, z)].$$

З урахуванням, що $\cos(v, x) = \frac{v_x}{v}$, $\cos(S, x) = \frac{dx}{S}$
(аналогічні вирази для y і z), одержимо

$$\Gamma = \oint_S (v_x dx + v_y dy + v_z dz). \quad (4.10)$$

Для потенціальної течії, скориставшись (4.5), можна записати

$$\Gamma = \int_A^B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B.$$

У разі замкненого контура

$$\Gamma = \oint d\varphi = \int_A^B d\varphi + \int_B^A d\varphi = (\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_A) = 0,$$

тому

$$\Gamma = \oint \bar{v} \cdot d\bar{S} = 0. \quad (4.11)$$

У потенціальній течії лінії течії $\psi(x, y)$ нормальні до еквіпотенціальних поверхонь $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ (рис. 4.1).

Тоді

$$\cos(v, T) = \cos(v, x) \cdot \cos(T, x) + \cos(v, y) \cdot \cos(T, y) + \cos(v, z) \cdot \cos(T, z).$$

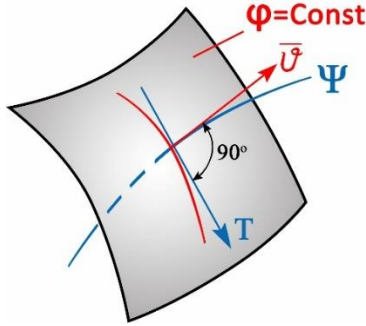


Рисунок 4.1 – Взаємне положення ліній течії та еквіпотенціальних поверхонь

Оскільки $v_x = v \cdot \cos(\nu, x)$ і $dx = dT \cdot \cos(T, x)$, тому

$$\cos(\nu, x) = \frac{v_x}{v} \text{ і } \cos(T, x) = \frac{dx}{dT}. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} \cos(\nu, T) &= \frac{v_x}{v} \cdot \frac{dx}{dT} + \frac{v_y}{v} \frac{dy}{dT} + \frac{v_z}{v} \frac{dz}{dT} = \\ &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz}{v \cdot dT} = \frac{d\varphi}{v \cdot dT} = 0. \end{aligned}$$

Оскільки на еквівалентній поверхні $d\varphi = 0$, тому $\cos(\nu, T) = 0$, а значить $\vec{v} \perp \vec{T}$ і як наслідок лінії $\Psi_{const} \perp \varphi_{const}$.

У жодній точці однозв'язаного об'єму потенціал не може мати максимуму чи мінімуму. Згідно з рівнянням нерозривності можна записати:

$$\oint v_n dS = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0.$$

Припустимо, що в точці A величина $\varphi = \varphi_{\max}$ (рис. 4.2).

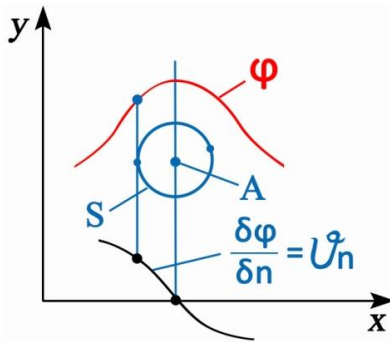


Рисунок 4.2 – До визначення безекстремності потенціалу швидкості

Якщо оточити точку A досить малою поверхнею S , будемо мати на цій поверхні $\frac{\partial \varphi}{\partial n} > 0$ або $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0$, і лише в точці A – $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Але тоді $\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS > 0$, що суперечить рівнянню нерозривності.

Ще раз зауважимо, що в жодній точці однозв'язаного об'єму потенціальної течії рідини швидкість не може мати максимуму чи мінімуму й розглянемо рисунок 4.3.

Допустимо, що швидкість у точці A максимальна й тоді

$$v_A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{\max}$$

Але $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ не може мати максимуму чи мінімуму (див вище). Із цього випливає важливий висновок.

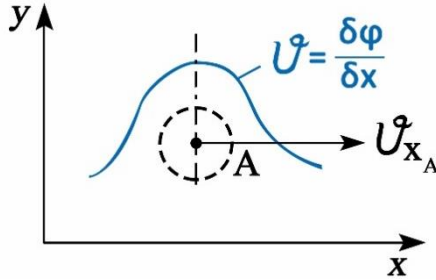


Рисунок 4.3 – До визначення безкстремності швидкості потенційної течії

В однозв'язаному об'ємі, обмеженому з усіх боків твердою поверхнею, потенціальна течія існувати не може. На поверхні такого об'єму рідини $v_n = 0$ (умова непроникності твердої поверхні). Тому рідина, якщо буде рухатися, то лише вздовж стінки, і лінії течії будуть замкнені самі на себе. А це – вихровий рух.

Якщо в однозв'язаному об'ємі рідини, частково обмеженому твердою поверхнею, а частково вільною, виникає потенціальний рух, то він обов'язково супроводжується зміною вільної поверхні, тобто на поверхні будуть утворюватися хвилі. Це положення можна поширити й на Світовий океан.

4.2 Приклади просторових потенціальних течій

4.2.1 Паралельна течія

Нехай потенціал течії задано рівнянням

$$\varphi = Ax + By + Cz, \quad (4.12)$$

де A, B, C – прості коефіцієнти, константи.

Спочатку перевіримо, чи відповідає цей потенціал рівнянню Лапласа.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \text{ або } \Delta \varphi = 0.$$

Запишемо (4.12)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = B; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = C.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

тобто

$$\Delta \varphi = 0.$$

Визначимо компоненти швидкості цієї течії:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = B; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = C;$$

$v = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \text{const}$, тобто це рівномірний рух рідини.

Визначимо конфігурацію ліній течії.

Диференціальне рівняння лінії течії $\frac{v_x}{\partial x} = \frac{v_y}{\partial y} = \frac{v_z}{\partial z}$ для цієї

ситуації має вигляд

$$\frac{A}{dx} = \frac{B}{dy} = \frac{C}{dz}.$$

$$\begin{aligned} \text{Звідси } \begin{cases} Bdx = Ady \\ Cdx = Adz \end{cases}, \begin{cases} Bx - Ay = C_1 \\ Cx - Az = C_2 \end{cases} \text{ або} \\ (B + C)x - Ay - Az = C_3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Тобто, лінії течії являють собою сім'я прямих ліній у просторі (x, y, z) , паралельних між собою. Більш наглядно це видно на прикладі двовимірної плоскої течії (x, y) , яку буде розглянуто в розділі 5.

4.2.2 Просторовий стік та витік

Нехай потенціал течії задано функцією

$$\varphi = \frac{A}{r}, \quad (4.14)$$

де A – коефіцієнт;

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – радіус-вектор.

Перевірку на відповідність рівнянню Лапласа для скорочення не будемо проводити.

Знайдемо компоненти швидкості:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{A}{r^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = -\frac{A}{r^3} x; \\ v_y = -\frac{A}{r^3} y; \quad v_z = -\frac{A}{r^3} z. \end{aligned}$$

Тоді швидкість

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\frac{A^2(x^2 + y^2 + z^2)}{r^6}} = \frac{A}{r^2}.$$

Знайдемо напрям швидкості (кут між радіусом \vec{r} і вектором швидкості \vec{v}).

$$\cos(v, r) = \cos(v, x) \cdot \cos(r, x) + \cos(v, y) \cdot \cos(r, y) + \cos(v, z) \cdot \cos(r, z)$$

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{v} = -\frac{Ax}{r^3} \cdot \frac{r^2}{A} = -\frac{x}{r} \quad \cos(r, x) = \frac{x}{r}.$$

Використавши аналогію, остаточно одержимо

$$\cos(v, r) = -\left(\frac{x}{r} \frac{x}{r} + \frac{y}{r} \frac{y}{r} + \frac{z}{r} \frac{z}{r}\right) = -1.$$

Отже, швидкість спрямована в напрямку, протилежному радіусу (рис. 4.4).

У разі $r = f(x, y, z)$ течія (стік або витік) буде просторовою, якщо $r = f(x, y)$ – плоскою. Знайдемо величину витрати для таких течій через сферичну поверхню $r = const$:

$$Q = v_r \cdot S = \frac{A}{r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot A. \quad (4.15)$$

Із (4.15) випливає, що величина витрати в цьому разі не залежить від радіуса поверхні, і це повністю відповідає закону збереження маси.

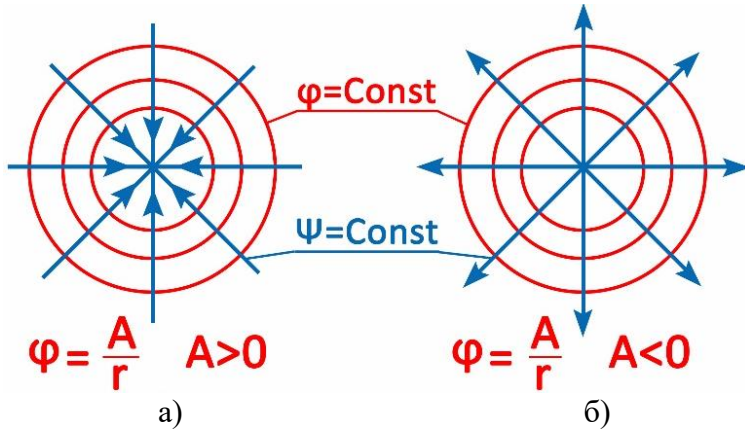


Рисунок 4.4 Стік (а) і витік (б)

Також із (4.15) можна одержати

$$A = \frac{Q}{4\pi} = \text{const}. \quad (4.16)$$

Тоді потенціал просторового стоку чи витіку можна репрезентувати в такому вигляді:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi \cdot r} \text{ – витік; } \varphi = -\frac{Q}{4\pi \cdot r} \text{ – стік.}$$

Величину Q , яка уявляє собою секундну витрату, називають потужністю стоку чи витіку.

4.2.3 Метод накладання течій. Просторовий диполь

Розглянемо метод накладання течій. Нехай дві течії задані своїми потенціалами φ_1 і φ_2 , що задовольняють

рівняння Лапласа: $\Delta\varphi_1 = 0$ і $\Delta\varphi_2 = 0$. Незавжно перекопатися, що повний потенціал φ , одержаний алгебраїчним складанням φ_1 і φ_2 , також задовольняє рівняння Лапласа:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \Delta\varphi = \Delta(\varphi_1 + \varphi_2) = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = 0.$$

Швидкості сумарної течії

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = v_{x_1} + v_{x_2};$$
$$v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = v_{y_1} + v_{y_2}.$$

Складання векторів швидкості повинно бути геометричним.

Аналогічно можна скласти функції течії ψ_1 і ψ_2 і одержати функцію течії нового потоку ψ .

Отже, накладання двох або більше течій зводиться до простої алгебраїчної суми потенціалів і функцій течії первинних, більш простих течій та одержання нової, більш складної течії.

Як приклад використання методу накладання течій одержимо нову течію, яку будемо називати **диполь**.

Диполь – це комбінація витоку потужністю $+Q$ та стоку потужністю $-Q$, розміщених на нескінченно малій відстані один від одного.

Схему комбінації стоку (φ_1) і витоку (φ_2) подано на рисунку 4.5.

Відповідно до рисунка 4.5 можна записати так:

$$\varphi_1 = \frac{-Q}{4\pi \cdot r_1}, \varphi_2 = \frac{+Q}{4\pi \cdot r_2}.$$

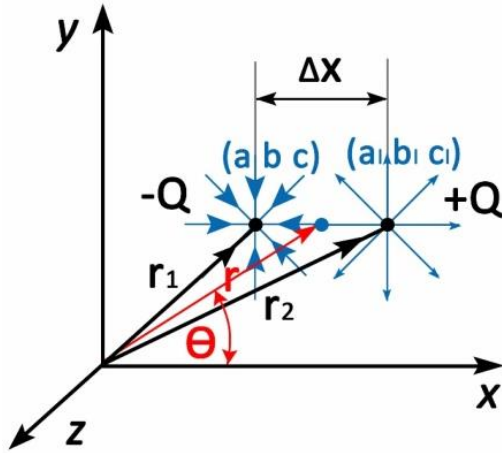


Рисунок 4.5 – Диполь

Назвемо добуток $M = Q \cdot \Delta x$ моментом диполя.

Тоді $Q = \frac{M}{\Delta x}$ і потенціал двох течій репрезентуємо в такому вигляді:

$$\varphi_1 = -\frac{M}{4\pi \cdot \Delta x} \cdot f(x, y, z),$$

де $f(x, y, z) = \frac{1}{r_1}$ – стік;

$$\varphi_2 = -\frac{M}{4\pi \cdot \Delta x} \cdot f(x + \Delta x, y, z),$$

де $f(x + \Delta x, y, z) = \frac{1}{r_2}$ – витік.

Тепер сума двох потенціалів буде мати такий вигляд:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{M}{4\pi} \left[\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \right],$$

а потенціал просторового диполя, згідно визначення, буде

$$\varphi_{\delta} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{M}{4\pi} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Необхідно звернути увагу на те, що останній вираз являє собою ліміт приросту функції (чисельник) до приросту аргументу (знаменник), що математично є похідною від функції по прирощеному аргументу. Тому:

$$\varphi_{\delta} = \frac{M}{4\pi} \cdot \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{M}{4\pi} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x},$$

де $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, а $\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^3}$.

Остаточно потенціал просторового диполя має вигляд

$$\varphi_{\delta} = -\frac{M(x-a)}{4\pi \cdot r^3}. \quad (4.17)$$

Якщо взяти до уваги, що $\frac{x-a}{r} = \cos\theta$, тоді

$$\varphi_{\delta} = -\frac{M}{4\pi \cdot r^2} \cos\theta.$$

Картину ліній течій та еквіпотенціальних ліній просторового диполя репрезентовано на рисунку 4.6.

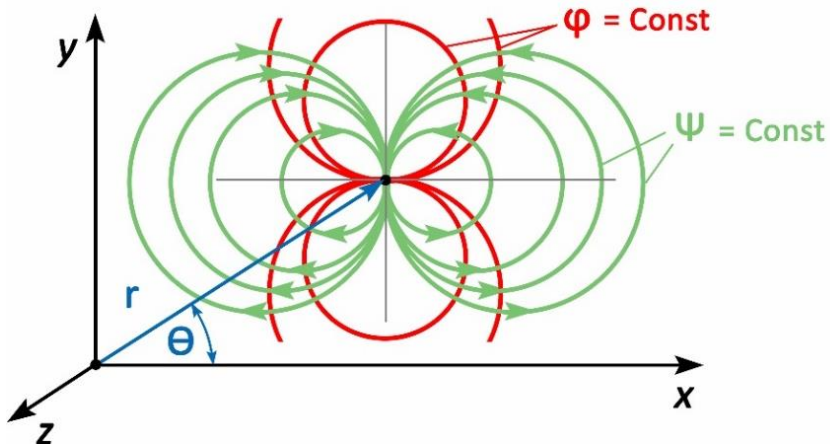


Рисунок 4.6 – Лінії течій та еквіпотенціальні лінії диполя

4.2.4 Обтікання кулі прямолінійною течією

Практичний приклад такої течії – обтікання атмосферним повітрям космічного апарата у формі кулі в разі його спуску на Землю під час проходження щільних шарів атмосфери (рис. 4.7) або обтікання сферичної краплини води під час її падіння в повітрі.

Реально картина обтікання створюється методом складання (накладання) просторової прямолінійної течії та просторового диполя (зі зворотним напрямом).

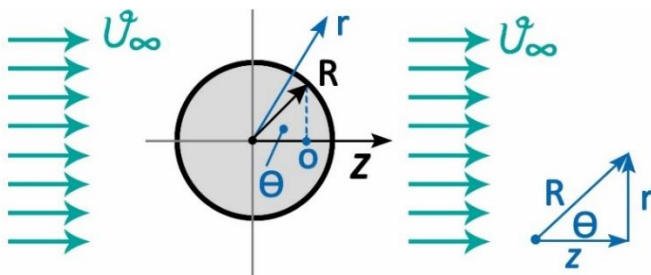


Рисунок 4.7 – Куля, що обтікається прямолінійною течією

Потенціал першої течії можна задати у вигляді

$$\varphi_n = A \cdot z = v_\infty \cdot z, \quad \psi_n = \frac{1}{2} v_\infty r^2 \quad (\text{так як } \partial\psi = v_\infty r dr), \quad (4.18)$$

де r – поточне значення радіуса простору у сферичній системі координат.

Просторовий диполь репрезентуємомо потенціалом у вигляді

$$\varphi_d = -\frac{M}{4\pi \cdot R^2} \cos\theta \quad \text{і} \quad \psi_d = \frac{M}{4\pi \cdot R^2} \sin^2 \theta, \quad (4.19)$$

де R – поточне значення радіусів ліній течії диполя.

Використасмо метод накладання цих течій. Тоді

$$\begin{aligned} \varphi &= v_\infty \cdot z + \frac{M}{4\pi \cdot R^2} \cos\theta = v_\infty R \cos\theta + \frac{M}{4\pi \cdot R^2} \cos\theta = \\ &= v_\infty R \left(1 + \frac{M}{4\pi \cdot R^3 v_\infty} \right) \cos\theta; \end{aligned}$$

$$\psi = \frac{1}{2} v_\infty r^2 - \frac{M}{4\pi \cdot R} \sin^2 \theta = \left(\frac{1}{2} v_\infty R^2 - \frac{M}{4\pi \cdot R} \right) \sin^2 \theta,$$

де φ і ψ – потенціал і функція сумарної течії.

Для нульової поверхні течії $\psi = 0$, тобто

$$\left(\frac{1}{2} v_\infty R^2 - \frac{M}{4\pi \cdot R} \right) \sin^2 \theta = 0.$$

Перший корінь цього рівняння відносно R буде за умови $\sin^2 \theta = 0$, тому $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

Другий корінь одержимо, якщо прирівняти вираз у дужках до нуля

$$\frac{1}{2} \nu_{\infty} R_0^2 = \frac{M}{4\pi \cdot R_0} ; \nu_{\infty} R_0^3 = \frac{M}{2\pi} ,$$

звідси

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{M}{2\pi \cdot \nu_{\infty}}} = const . \quad (4.20)$$

Замінивши кульову сферичну поверхню течії R_0 на тверду та відкинувши лінії течії диполя в середині поверхні $R_0 = const$, одержимо картину обтікання сфери (або кулі) паралельною течією ідеальної рідини (рис. 4.8).

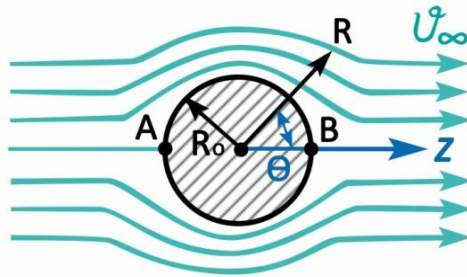


Рисунок 4.8 – Обтікання кулі паралельною течією ідеальної рідини

Із рисунка 4.8 одержимо момент диполя

$$M = 2\pi \cdot R_0^3 \nu_{\infty} \quad (4.21)$$

Його значення підставимо у вирази для φ і ψ сумарної течії

$$\varphi = v_{\infty} R \left(1 + \frac{2\pi \cdot R_0^3 v_{\infty}}{4\pi \cdot R^3 v_{\infty}} \right) \cos \theta = v_{\infty} R \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right] \cos \theta, \quad (4.22)$$

$$\psi = \left(\frac{1}{2} v_{\infty} R^2 - \frac{2\pi \cdot R_0^3 v_{\infty}}{4\pi \cdot R} \right) \sin^2 \theta = \frac{1}{2} v_{\infty} R^2 \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right] \sin^2 \theta. \quad (4.23)$$

Знайдемо проєкції швидкостей

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_{\infty} \cos \theta \frac{\partial}{\partial R} \left(R + \frac{R_0^3}{2} R^{-2} \right) = \\ &= v_{\infty} \cos \theta \left[1 + \frac{R_0^3}{2} (-2R^{-3}) \right] = v_{\infty} \cos \theta \left(1 - \frac{R_0^3}{R^3} \right) \end{aligned}$$

або

$$v_r = v_{\infty} \left(1 - \frac{R_0^3}{R^3} \right) \cos \theta; \quad (4.24)$$

$$v_u = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{R} v_{\infty} R \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right] (-\sin \theta)$$

або

$$v_u = -v_{\infty} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right] \sin \theta. \quad (4.25)$$

На основі виразів (4.24) і (4.25) можна зробити такі висновки:

а) на поверхні кулі ($R = R_0$) виконується умова $v_r = 0$ (вимога нерозривності), а також

$$v_u = -\frac{3}{2}v_\infty \cdot \sin\theta; \quad (4.26)$$

б) на нескінченності за кулею ($R = \pm\infty$) компоненти швидкості дорівнюють

$$v_r = v_\infty \cdot \cos\theta, \quad v_u = -v_\infty \sin\theta, \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_u^2} = v_\infty.$$

Тобто течія залишається паралельною;

в) за умови $\theta = 0$ і $\theta = \pi$ (точки A і B на рис. 4.8) швидкість $v = 0$ – критичні точки;

г) максимальне значення швидкості на поверхні кулі в точках $\theta = \frac{\pi}{2}$ і $\theta = \frac{3}{2}\pi$:

$$v_{\max} = \frac{3}{2}v_\infty = 1,5v_\infty. \quad (4.27)$$

Визначивши розподілення швидкості по поверхні кулі, можна знайти розподілення тиску по поверхні та сумарну силу, що діє на кулю з боку течії. Для цього використаємо рівняння Л. Ейлера для точок на нескінченності й по поверхні кулі

$$P_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} = P + \frac{\rho v^2}{2} = P + \frac{\rho}{2} \frac{9}{4} v_\infty^2 \sin^2 \theta.$$

Тоді різниця тисків буде

$$P - P_\infty = \frac{\rho v_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right), \quad (4.28)$$

а безрозмірний тиск

$$\bar{P} = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{\rho v_{\infty}^2}{2}} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta. \quad (4.29)$$

Максимальне значення тиску буде в точках A і B ($\theta = 0$ і $\theta = \pi$):

$$\bar{P}_{\max} = 1. \quad (4.30)$$

Мінімальний тиск буде в точках, де швидкість максимальна, тобто в точках $\theta = \frac{\pi}{2}$ і $\theta = \frac{3}{2}\pi$:

$$\bar{P}_{\min} = -\frac{5}{4} = -1,25. \quad (4.31)$$

Безрозмірний тиск буде дорівнювати нулю в точках, для яких $1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta = 0$ ($\sin^2 \theta = \frac{4}{9}$ і $\sin \theta = \frac{2}{3}$), тобто в точках, що лежать на кутах $\theta = \arcsin \frac{2}{3}$.

Закон розподілення безрозмірного тиску по поверхні кулі доречно репрезентувати графічно в такому вигляді (рис. 4.9).

Як бачимо, графік та епюри тиску абсолютно симетричні, тому й сумарна сила дії течії на кулю буде дорівнювати нулю. Це підтверджує так званий парадокс д'Аламбера: за умови рівномірного руху в ідеальній рідині тверде тіло будь-якої форми не відчуває сили супротиву.

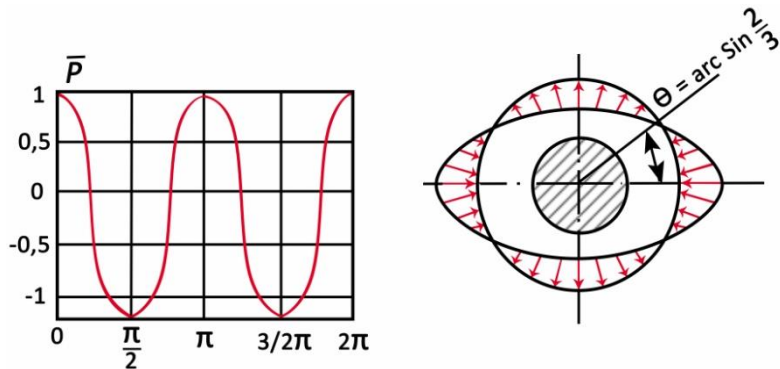


Рисунок 4.9 – Розподілення безрозмірного тиску по поверхні кулі

Перелік питань до розділу 4

- 1 Дві основні ознаки потенціального руху.
- 2 Вираз одиничних масових сил через потенціал.
- 3 Використання умови Коші – Римана для введення потенціалу швидкості $\varphi = (x, y, z)$.
- 4 Вираз компонент швидкості через потенціал швидкості.
- 5 Оператор Гамільтона й вираз через нього швидкості.
- 6 Доведіть, що $\text{rot grad}\varphi = 0$ і що це означає?
- 7 Рівняння нерозривності для нестискуваної рідини у формі рівняння Лапласа.
- 8 Чому дорівнює циркуляція швидкості по замкненому контуру в потенціальній течії.
- 9 Еквіпотенціальні лінії та поверхні в потенціальній течії.
- 10 Кут перетину лінії течії з еквіпотенціальною поверхнею.

11 Чи може існувати потенціальна течія в однозв'язаному замкненому об'ємі? Якщо не може, то чому?

12 Зв'язок між потенціалом течії та функцією течії в разі її двовірності.

13 Кінематичне дослідження течії, заданої потенціалом $\varphi = Ax + By + Cz$, де A , B і C – прості коефіцієнти.

14 Кінематичне дослідження течії, заданої потенціалом $\varphi = A/r$, де A – коефіцієнт, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Чому ця течія зветься просторовий стік, або виток?

15 Доведіть виконання умови нерозривності для такої течії через сферичну поверхню $r = \text{const}$.

16 Метод накладання течій і потенціал просторового диполя.

17 Обтікання нерухомої кулі прямолінійною течією ідеальної рідини. Парадокс д'Аламбера.

5 КІНЕМАТИКА ПЛОСКОЇ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ТЕЧІЇ

Плоска потенціальна течія – це течія виду $v = f(x, y)$ або $v = f(r, \theta)$ та $rot \bar{v} = 0$. Залежність параметрів течії від двох координат значно спрощує завдання розрахунків і досліджень таких течій. Плоскій течії притаманні всі характеристики, вказані раніше для всіх потенціальних течій.

Зокрема обов'язковою умовою для них є виконання рівняння нерозривності й рівняння Лапласа, яке в цьому разі буде мати такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Ця течія повністю визначається системою екіпотенціальних ліній $\varphi(x, y) = const$ і ліній течії $\psi = const$, що в цьому разі лежать в одній площині, утворюючи сітку течії. Основною властивістю такої сітки є взаємна ортогональність ліній $\varphi = const$ і $\psi = const$ (рис. 5.1).

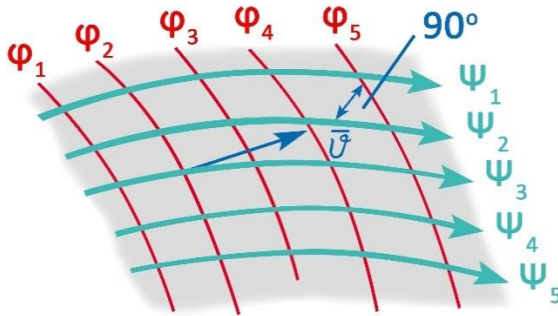


Рисунок 5.1 – Сітка течії

Така властивість сітки течії дає можливість її розраховувати й будувати графоаналітичними методами, що за умови заданої витрати Q дозволяє визначати величини швидкостей. У цілому ж завдання щодо розрахунку поля швидкості зводиться до вирішення рівняння Лапласа за заданих граничних умов.

Для розв'язання рівняння Лапласа існує цілий ряд аналітичних і графічних методів, а також методів аналогій. Водночас повинні бути задані значення самої функції φ на межі сітки (перша зовнішня задача Неймана), або значення її похідної (швидкості) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ (друга зовнішня задача Дирихле).

5.1 Використання функцій комплексного аргументу для плоских потенціальних течій

Раніше було показано, що дві аналітичні функції дійсного аргументу $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ пов'язані між собою так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{і} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.1)$$

Із курсу математики відомо, що якщо дві аналітичні функції дійсного аргументу пов'язані між собою так, що похідна від однієї з них по першому аргументу дорівнює похідній від другої функції по другому аргументу, то ці функції являються відповідно дійсною і уявною частинами деякої аналітичної функції комплексного аргументу, тобто

$$W(z) = \varphi + i\psi, \quad (5.2)$$

де $W(z)$ – комплексний потенціал плоскої потенціальної течії нестискуваної рідини;

$\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ – відповідно потенціал і функція течії;

z – комплексний аргумент

$$z = x + iy. \quad (5.3)$$

Отже, для досліджень плоскої потенціальної течії достатньо користуватися замість двох функцій φ і ψ дійсного аргументу однією функцією $W(z)$ комплексного аргументу.

Прослідкуємо за деякими властивостями такої функції.

5.1.1 Спряжена комплексна швидкість

$$\begin{aligned} dW(z) &= d(\varphi + i\psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + i \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + i \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = \\ &= v_x dx + v_y dy - i v_y dx + i v_x dy = dx(v_x - i v_y) + i dy(v_x - i v_y) = \\ &= (v_x - i v_y) \cdot (dx + i dy) = (v_x - i v_y) dz, \end{aligned}$$

оскільки $dz = d(x + iy) = dx + i dy$.

Тому $\frac{dW(z)}{dz} = v_x - i v_y = \bar{v}$ – спряжена комплексна

швидкість (рис. 5.2).

З рисунка 5.2

$$\left. \begin{aligned} v &= v_x + i v_y \\ \bar{v} &= v_x - i v_y \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

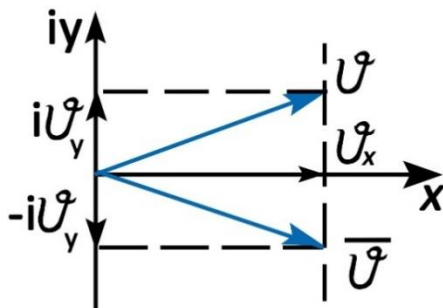


Рисунок 5.2 – Спряжена комплексна швидкість

Тоді

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |v|, \quad (5.5)$$

тобто, визначивши похідну від $W(z)$ по z й розділивши на дійсну та уявну частини, одержимо відразу компоненти швидкості v_x і v_y .

5.1.2 Відрахування комплексної швидкості

Визначимо значення виразу $\oint_L \frac{dW}{dz} dz$.

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{dW}{dz} dz &= \oint_L \bar{v} dz = \oint_L (v_x - i v_y)(dx + i dy) = \\ &= \oint_L (v_x dx + v_y dy) + \oint_L i(v_x dy - v_y dx). \end{aligned}$$

Перший інтеграл являє собою циркуляцію швидкості v по замкненому контуру L .

Другий інтеграл

$$i \oint_L (v_x dy - v_y dx) = i \oint_L \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = i \oint_L d\psi = iQ_S ,$$

тобто

$$\oint_L \frac{dW}{dz} dz = \Gamma_L + iQ_S . \quad (5.6)$$

Як бачимо, дійсна частина інтеграла по замкненому контуру L від комплексної швидкості $\frac{dW}{dz}$ є циркуляцією швидкості по цьому контуру, а уявна частина – це витрата рідини Q_S через площу, обмежену контуром L .

5.2 Приклади кінематичних розрахунків плоских потенціальних течій

Можливі дві постановки задачі щодо розрахунку кінематичних характеристик течій.

Перша задача – коли комплексний потенціал течії $W(z)$ є відомим.

Треба визначити величину й напрямок течії, побудувати сітку течії, визначити аналітично циркуляцію та витрату рідини.

Друга задача дещо складніша: по відомому контуру твердого тіла, що обтікається, і значенню швидкості v_∞ потрібно знайти комплексний потенціал обтікаючої течії та вже по ньому провести розрахунок течії в попередній постановці.

Спочатку розглянемо приклади розв'язання задачі в першій постановці (друга задача буде розглянута в розділі «Конформні перетворення»).

5.2.1 Плоскопаралельна течія

Подамо комплексний потенціал течії у вигляді

$$W(z) = a \cdot z, \quad (5.7)$$

де a – коефіцієнт (дійсний, уявний або комплексний):

а) нехай $a = a_1$ – дійсне число, тоді

$$W(z) = \varphi + i\psi = a_1 z = a_1(x + iy) = a_1 x + ia_1 y,$$

тому $\varphi = a_1 x$; $\psi = a_1 y$.

Еквіпотенціальні лінії мають вид $a_1 x = const$ – тобто це сім'я прямих ліній, які паралельні осі Y (рис. 5.3).

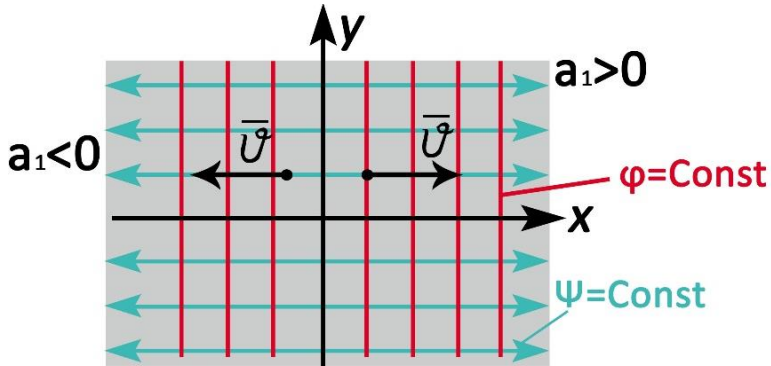


Рисунок 5.3 – Сім'я еквіпотенціальних ліній

Сім'я ліній течії $\psi = a_1 y = \text{const}$, $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_1$,
 $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $v = a_1$, що свідчить про те, що ця течія є
 рівномірною плоскопаралельною течією.

Неважко показати, що для такої течії $a = v_\infty$, тоді комплексний потенціал плоскопаралельної течії буде дорівнювати

$$W(z) = v_\infty \cdot z; \quad (5.8)$$

б) нехай $a = ia_1$ – уявне число, тоді

$$W(z) = a \cdot z = ia_1(x + iy) = ia_1x - a_1y = -a_1y + ia_1x.$$

Тоді $\varphi = -a_1y$, $\psi = a_1x$.

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -a_1.$$

Еквіпотенціальні лінії ($-a_1y = \text{const}$) паралельні осі x , лінії течії ($a_1x = \text{const}$) паралельні осі y (рис. 5.4). Із рисунка видно, що зміна значення коефіцієнту a призвела до повороту напрямку течії на 90° ;

в) нехай $a = a_1 + ia_2$, тобто число, a – комплексне, числа, a_1 і a_2 – дійсні, тоді

$$W(z) = a \cdot z = (a_1 + ia_2) \cdot (x + iy) = a_1x + ia_2x + ia_1y - a_2y = \\ = (a_1x - a_2y) + i(a_2x + a_1y).$$

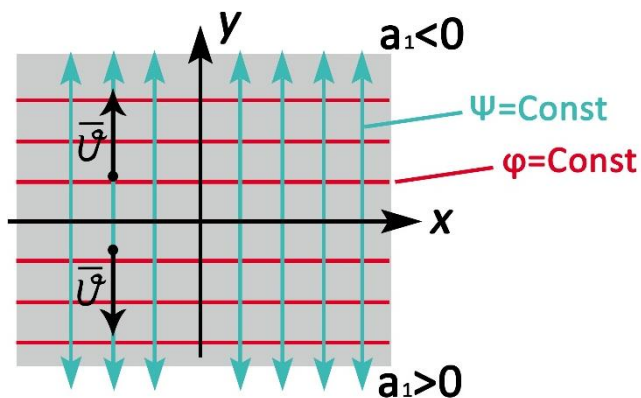


Рисунок 5.4 – Сім'я екіпотенціальних ліній

Звідси $\varphi = a_1x - a_2y$, $\psi = a_2x + a_1y$.

На рисунку 5.5 зображено сім'ю екіпотенціальних ліній – $a_1x - a_2y = const$, і сім'ю ліній течії – $a_2x + a_1y = const$.

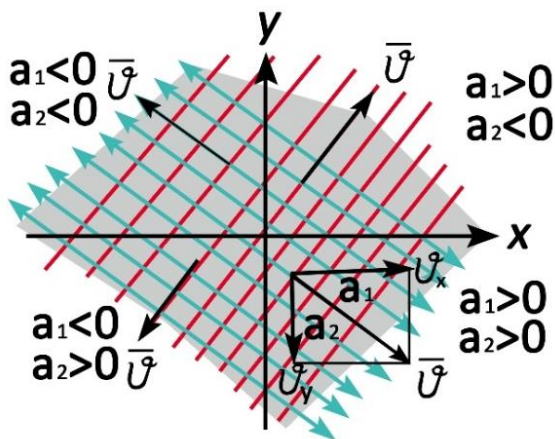


Рисунок 5.5 – Сім'я екіпотенціальних ліній

Кут нахилу залежить від відношення коефіцієнтів

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1}{a_2}.$$

Компоненти швидкості

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_1, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -a_2, \quad v = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Напрямок вектора швидкості залежить від значень a_1 і a_2 (рис. 5.5)

5.2.2 Плоский стік і витік

Подамо комплексний потенціал течії у вигляді

$$W(z) = a \ln z, \quad (5.9)$$

де $a = a_1$ – дійсне число.

У такому разі

$$\begin{aligned} W(z) &= a_1 \cdot \ln z = a_1 \cdot \ln(x + iy) = a_1 \ln(r \cdot e^{i\theta}) = \\ &= a_1 \ln r + a_1 \ln e^{i\theta} = a_1 \ln r + ia_1 \theta. \end{aligned}$$

Тоді $\varphi = a_1 \ln r$, $\psi = a_1 \theta$.

Еквіпотенціальні лінії – $a_1 \ln r = \text{const}$, звідки $r = \text{const}$ – концентричні кола. Лінії течії – $a_1 \theta = \text{const}$, звідси $\theta = \text{const}$. Картину течії для даного прикладу репрезентовано на рисунку 5.6.

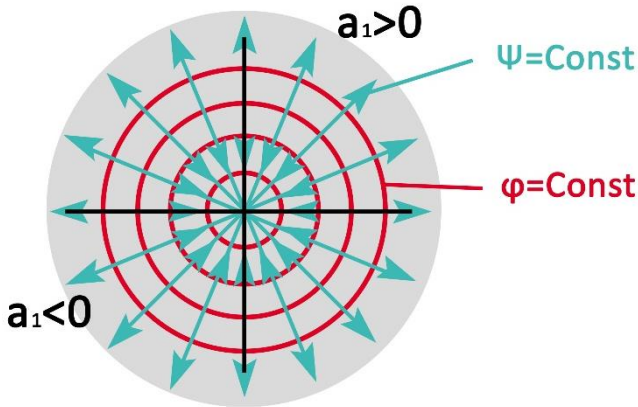


Рисунок 5.6 – Плоский стік і витік

Компоненти швидкості

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = a_1 \frac{1}{r} = \frac{a_1}{r},$$

$$v_u = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = 0.$$

Напрямок вектору швидкості залежить від знаку a_1 : якщо $a_1 > 0$ – витік, якщо $a_1 < 0$ – стік. Необхідно звернути увагу, що за умов $r=0$ (центр) швидкість $v = \infty$, що фізично неможливо.

Знайдемо величину витрати Q для стоку чи витіку (рис. 5.7).

$$Q = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a_1}{r} r d\theta = a_1 \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a_1.$$

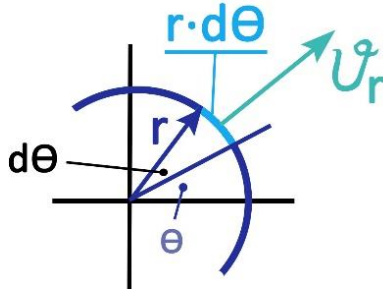


Рисунок 5.7 – До визначення величини витрати для стоку чи витоку

Звідки

$$a_1 = \frac{Q}{2\pi}.$$

Бачимо, що величина витрати Q через концентричну поверхню $r = \text{const}$ одиничної товщини не залежить від r .

Остаточно комплексний потенціал плоского стоку чи витоку матиме вигляд

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z. \quad (5.10)$$

5.2.3 Плоский потенціальний вихор

Аналогічно (5.9) репрезентуємо комплексний потенціал течії таким виразом

$$W(z) = a \cdot \ln z, \quad (5.11)$$

але тепер $a = ia_1$ – уявне число.

$$\begin{aligned}
 W(z) &= ia_1 \ln z = ia_1 \ln(re^{i\theta}) = ia_1 \ln r + ia_1 \ln e^{i\theta} = \\
 &= ia_1 \ln r - a_1 \theta,
 \end{aligned}$$

тоді $\varphi = -a_1 \theta$, $\psi = a_1 \ln r$.

Еквіпотенціальні лінії ($\varphi = -a_1 \theta = \text{const}$) – радіальні промені $\theta = \text{const}$, лінії течії ($\psi = a_1 \ln r = \text{const}, r = \text{const}$) – концентричні кола.

Картину течії подано на рисунку 5.8.

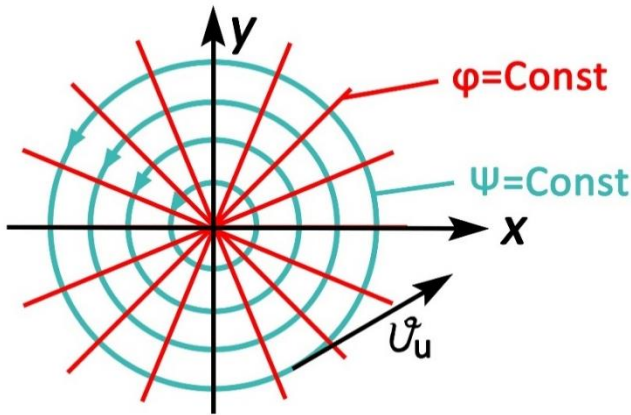


Рисунок 5.8 – Плоский потенціальний вихор

Компоненти швидкості даної течії

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,$$

$$v_u = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{a_1}{r}.$$

Напрямок швидкості v_u залежить від знаку a_1 .

Для встановлення фізичного змісту числа a_1 знайдемо циркуляцію швидкості v_u по круговому контуру L довільного радіуса r

$$\Gamma_L = \oint_L v_u dL = \oint_L v_u r d\theta = \int_0^{2\pi} v_u r d\theta = 2\pi \cdot r v_u = -2\pi \cdot r \frac{a_1}{r} = -2\pi \cdot a_1,$$

звідси

$$a_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}.$$

Тоді потенціал плоского вихору буде таким:

$$W(z) = a_1 i \ln z = -\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (5.12)$$

Закон розподілення швидкості в потенціальному вихорі

$$v_u \cdot r = -\frac{a_1}{r} \cdot r = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r} \cdot r = const.$$

Остаточно закон розподілення швидкості у потенціальному вихорі

$$v_u \cdot r = const. \quad (5.13)$$

5.2.4 Вихростік або вихровитік

Знову подамо комплексний потенціал течії у такому вигляді (5.9):

$$W(z) = a \cdot \ln z.$$

Але тепер нехай $a = a_1 + ia_2$ – комплексне число.

Тоді

$$W(z) = (a_1 + ia_2) \ln z = (a_1 + ia_2) \ln(r \cdot e^{i\theta}) = (a_1 + ia_2)(\ln r + i\theta) = (a_1 \ln r - a_2 \theta) + i(a_2 \ln r + a_1 \theta).$$

Тоді рівняння сім'ї еквіпотенціальних ліній матиме вигляд

$$\varphi = a_1 \ln r - a_2 \theta = \text{const}.$$

Рівняння сім'ї ліній течії матиме вигляд

$$\psi = a_2 \ln r + a_1 \theta = \text{const}.$$

Неважно помітити, що ці функції являють собою суму функцій φ і ψ для течій витоку й вихору:

$$\varphi_{\text{в.в.}} = \varphi_{\text{вит}} + \varphi_{\text{вих}} = a_1 \ln r - a_2 \theta,$$

$$\psi_{\text{в.в.}} = \psi_{\text{вит}} + \psi_{\text{вих}} = a_1 \theta + a_2 \ln r,$$

де $\varphi_{\text{в.в.}}$ і $\psi_{\text{в.в.}}$ – потенціал і функція течії вихровитоку.

Картину течії вихровитоку подано на рисунку 5.9.

Компоненти швидкості в такому разі мають вигляд

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{a_1}{r},$$
$$v_u = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{a_2}{r}.$$

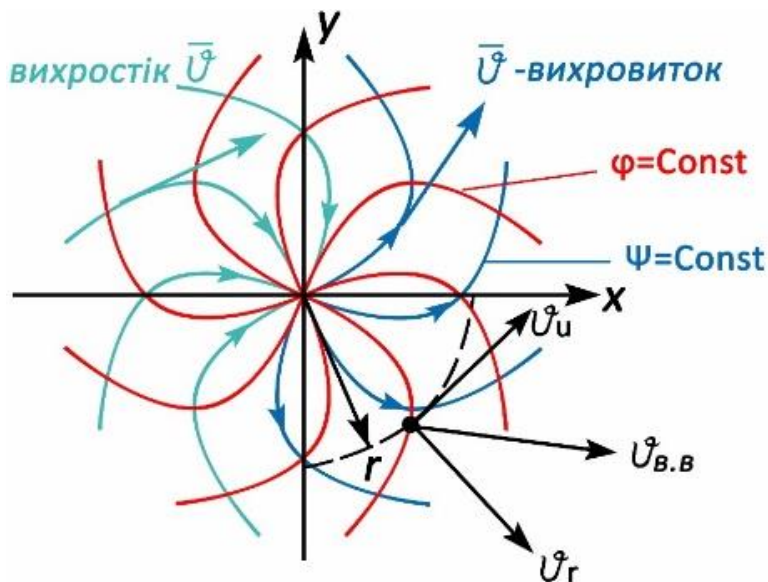


Рисунок 5.9 – Вихростік або вихровитік

Комплексний потенціал буде мати такий вигляд:

$$W(z)_{\text{в.в.}} = \frac{Q - \Gamma}{2\pi} i \cdot \ln z . \quad (5.14)$$

5.2.5 Течія всередині кута

Репрезентуємо комплексний потенціал течії степенною функцією

$$W(z) = z^n ,$$

де n – будь-яке число більше нуля.

Як завжди, розділимо цю функцію на дійсну та уявну частини:

$$\begin{aligned} W(z) = z^n &= (x + iy)^n = (r \cdot e^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta} = \\ &= r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \end{aligned}$$

Одержаний вираз є формулою Муавра.

Тоді рівняння сім'ї екіпотенціальних ліній матиме вигляд

$$\varphi = r^n \cos(n, \theta) = \text{const}.$$

Рівняння сім'ї ліній течії матиме вигляд

$$\psi = r^n \sin(n, \theta) = \text{const}.$$

Знайдемо нульову лінію течії ($\text{const} = 0$):

$$r^n \sin(n\theta) = 0.$$

Оскільки $r^n \neq 0$, тому $\sin(n\theta) = 0$, $n\theta = k\pi$.

Тобто

$$\theta = \frac{k\pi}{n}. \quad (5.15)$$

З рівняння (5.15) можна зробити висновок, що нульові лінії течії являють собою промені $\theta = \text{const}$, кількість яких залежить від числа n і які розбивають площу течії на $2n$ клиновидні області з кутами $\frac{\pi}{n}$, між якими розташовані всі інші лінії течії.

Проілюструємо це:

а) $W(z) = z^1$ ($n = 1$), $\theta = k\pi$, $\theta = 180^\circ$ – рисунок 5.10;

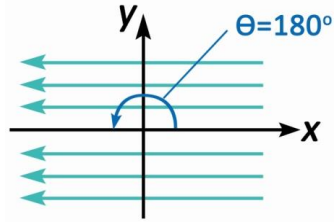


Рисунок 5.10 – Течія всередині кута 180°

б) $W(z) = z^2$ ($n = 2$), $\theta = k \frac{\pi}{2}$, $\theta = 90^\circ$ – рисунок 5.11;

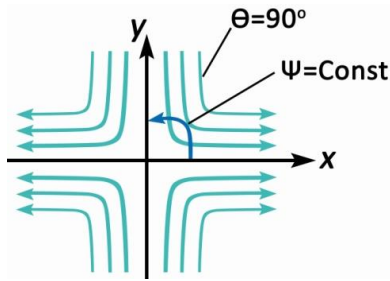


Рисунок 5.11 – Течія всередині кута 90°

в) $W(z) = z^3$ ($n = 3$), $\theta = k \frac{\pi}{3}$, $\theta = 60^\circ$ – рисунок 5.12;

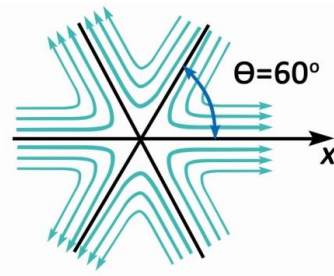


Рисунок 5.12 – Течія всередині кута 60°

$$\text{г) } W(z) = z^4 \quad (n = 4), \quad \theta = k \frac{\pi}{4}, \quad \theta = 45^\circ.$$

Отже, комплексний $W(z) = z^n$ є потенціалом течії в середині кута $\theta = \frac{\pi}{n}$. Тобто для будь-якого кута можна знайти відповідне значення n

$$\theta = \frac{180^\circ}{n}, \quad n = \frac{180^\circ}{\theta}.$$

Наприклад, для кута 120° – $n = 1,5$; для кута 240° – $n = 0,75$ (рис. 5.13).

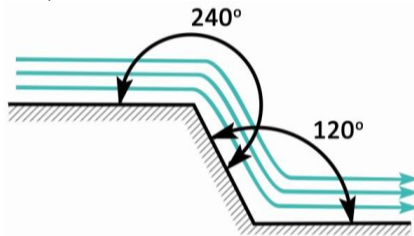


Рисунок 5.13 – Течія через два кути

5.2.6 Течія двох витоків

Для спрощення розглянемо випадок, коли обидва витоки мають однакову потужність і розташовані симетрично відносно початку координат (рис. 5.14).

Комплексні потенціали таких витоків будуть такі:

$$W_1(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - a),$$

$$W_2(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z + a).$$

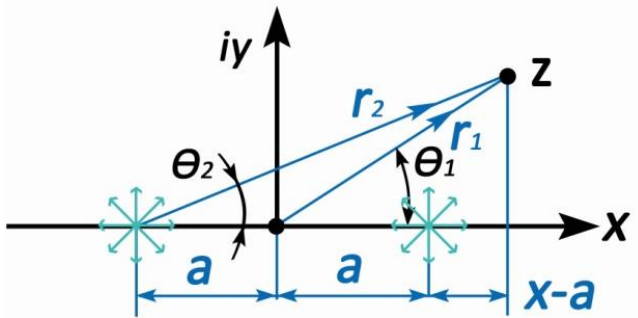


Рисунок 5.14 – До визначення параметрів течії двох вихорів

Потенціал сумарної течії після їх накладення буде

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} [\ln(z - a) + \ln(z + a)]$$

або

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{Q}{2\pi} [\ln(r_1 e^{i\theta_1}) + \ln(r_2 e^{i\theta_2})] = \\ &= \frac{Q}{2\pi} [(\ln r_1 + \ln(e^{i\theta_1})) + (\ln r_2 + \ln(e^{i\theta_2}))] = \\ &= \frac{Q}{2\pi} (\ln r_1 + \ln r_2) + i \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Звідси

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} (\ln r_1 + \ln r_2), \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2).$$

Компоненти швидкості

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (\ln r_1 + \ln r_2),$$

де $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, а $r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$,

тому

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \cdot \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \cdot \frac{2(x+a)}{2\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \right) = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{x-a}{r_1^2} + \frac{x+a}{r_2^2} \right); \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{y}{r_1^2} + \frac{y}{r_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Рівняння ліній течії буде таким:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2) = \text{const}. \quad (5.19)$$

Рівняння (5.19) задовольняють точки на координатних осях x і y (рис. 5.15).

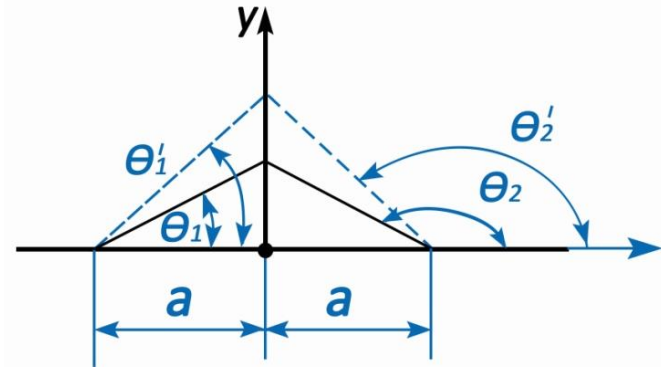


Рисунок 5.15 – До визначення сім’ї ліній течії

Неважко довести, що $\theta_1 + \theta_2 = \theta'_1 + \theta'_2 = 180^\circ$. Тому лінії координат являються першими лініями сумарної течії. Останні лінії течії отримуються шляхом з’єднання лініями точок, для яких виконується вимога $\theta_1 + \theta_2 = const$.

Зауважимо, що вісь y на практиці може бути твердою стінкою. Тоді картину течії від витoku, розміщеного біля стінки, можна розрахувати, розмістивши умовно симетрично другий виток однакової потужності Q (рис. 5.16).

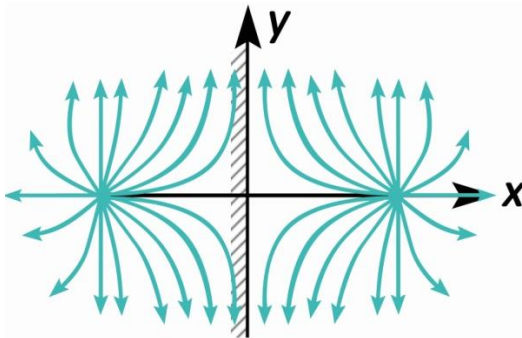


Рисунок 5.16 – Картина течії витoku біля стінки

5.2.7 Плоский витік і стік. Плоский диполь

Розглянемо дві течії – стік і витік, що розміщені на симетричній відстані один від одного й мають однакові потужності $+Q$ і $-Q$ (рис. 5.17).

Їх комплексні потенціали репрезентовані такими виразами:

$$W_1(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln(z - a) \text{ – витік,}$$

$$W_2(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z + a) \text{ – стік}$$

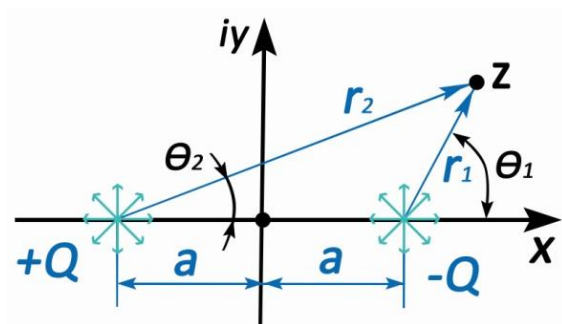


Рисунок 5.17 – До визначення параметрів течії витоку й стоку

Координати точки z в комплексній площині $(x + iy)$ представимо в такому вигляді:

$$z - a = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \quad \text{і} \quad z + a = r_2 \cdot e^{i\theta_2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \quad \text{і} \quad r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Комплексний потенціал сумарної течії після накладання двох указаних течій стоку й витоку буде

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} [\ln(z+a) - \ln(z-a)]$$

або

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}. \quad (5.20)$$

Розділимо на дійсну та уявну частини:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{Q}{2\pi} (\ln r_2 + \ln e^{i\theta_2} - \ln r_1 - \ln e^{i\theta_1}) = \\ &= \frac{Q}{2\pi} (\ln r_2 - \ln r_1) + i \frac{Q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1), \end{aligned}$$

тоді

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \right),$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} \right).$$

За відомим значенням φ можна визначити компоненти швидкості v_x і v_y за методикою, прийнятою в п. 5.2.6 для течії від двох витоків – формули (5.16 – 5.19), але з урахуванням знаків перед Q : замість схеми з $+Q$ і $+Q$ схема $+Q$ і $-Q$.

Картину течії репрезентовано на рисунку 5.18.

Розглянемо приклад, коли відстань між витоків і стоком $2a$ буде наближатися до нуля ($2a \rightarrow 0$), але так, що

добуток $2a \cdot Q$ буде постійною величиною, тобто $2a \cdot Q = M = const$.

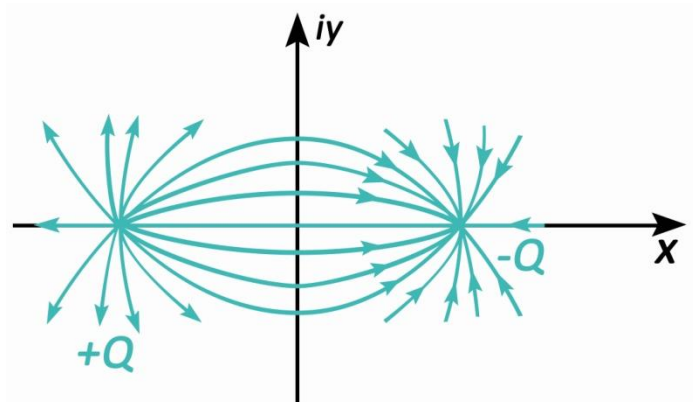


Рисунок 5.18 – Течія між витокком і стоком

Таку течію, утворену витокком і стоком однакової потужності, відстань між якими буде нескінченно малою, будемо називати плоским диполем, а величину M будемо називати моментом диполя.

Знайдемо його комплексний потенціал:

$$\begin{aligned}
 W(z)_0 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi} [\ln(z+a) - \ln(z-a)] = \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Q \cdot 2a}{2\pi} \cdot \frac{\ln(z+a) - \ln(z-a)}{2a} = \\
 &= \frac{M}{2\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(z+a) - \ln(z-a)}{(z+a) - (z-a)} = \frac{M}{2\pi} \frac{d}{dz} \ln z = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}.
 \end{aligned}$$

У цьому разі даному випадку ми маємо ліміт (*lim*) приросту функції (чисельник) до приросту аргументу

(знаменник), що за визначенням є похідною цієї функції. Тоді остаточно одержимо

$$W(z)_o = \frac{M}{2\pi z}. \quad (5.21)$$

Проведемо кінематичне дослідження $W(z)_o$

$$\begin{aligned} W(z)_o &= \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x+iy} = \frac{M}{2\pi} \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \\ &= \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Тому $\varphi_o = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2}$; $\psi_o = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2}$.

Рівняння сім'ї ліній течії матиме такий вигляд:

$$\psi = const, \text{ або } \frac{y}{x^2+y^2} = C.$$

Перетворимо останній вираз

$$y = (x^2 + y^2) \cdot C,$$

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{C} + \frac{1}{4C^2} = \frac{1}{4C^2},$$

звідси

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}. \quad (5.22)$$

Вираз (5.22) є рівнянням сім'ї кіл, центри яких зміщені по осі y і мають радіуси $\frac{1}{2C} = r$, тобто всі кола будуть дотичними між собою в центрі початку координат (рис. 5.19).

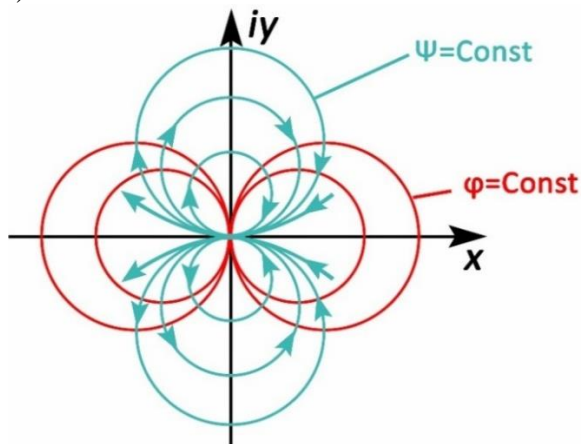


Рисунок 5.19 – Плоский диполь

Якщо проаналізувати форму екіпотенціальних ліній $\varphi = const$, одержимо аналогічний результат, лише кола $\varphi = const$ будуть мати центри на осі x , тобто повернуті на 90° відносно колам $\psi = const$

5.2.8 Циркуляційне обтікання циліндра

Розглянемо течію, комплексний потенціал якої

$$\begin{aligned}
 W(z) &= -\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z = -\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln(r \cdot e^{i\theta}) = -\frac{\Gamma}{2\pi} i (\ln r + i\theta) = \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r,
 \end{aligned}$$

тоді

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \text{ і } \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Сім'я ліній течії

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \text{const} \text{ або } r = \text{const}.$$

Тобто ця сім'я концентричних кіл із центром на початку координат (рис. 5.20).

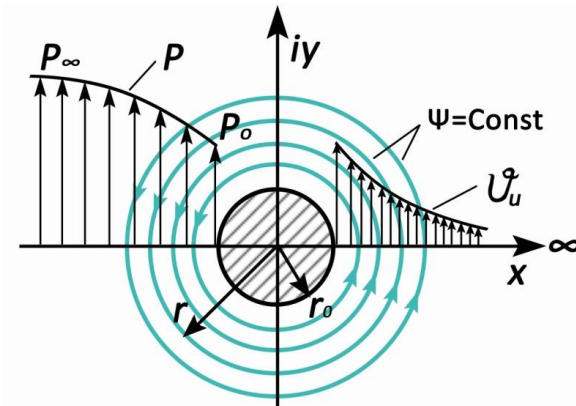


Рисунок 5.20 – Циркуляційне обтікання циліндра

Компоненти швидкості

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad v_u = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r}, \quad (5.23)$$

тоді

$$v_u \cdot r = \frac{\Gamma}{2\pi} = \text{const},$$

уже знайомий закон розподілення швидкості в плоскому потенціальному вихорі.

Нехай одна з ліній течії, радіус якої r_0 , – тверда поверхня. Це не змінить картину течії зовні цієї поверхні, оскільки рідину ми прийняли ідеальною, для якої $\tau = 0$. Із (5.23) видно, що максимальна швидкість обтікання буде на поверхні циліндра, тобто

$$v_{u_{\max}} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r_0}. \quad (5.24)$$

На рисунку 5.20 зображено картину суто циркуляційного обтікання циліндра із циркуляцією $\Gamma = 2\pi \cdot r \cdot v_u$. Тиск у будь-якій точці такої течії P визначають за допомогою рівняння Ейлера

$$Z_\infty + \frac{P_\infty}{\gamma} + \frac{v_\infty^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = C_{II}.$$

Якщо $r = r_\infty$, тоді $P = P_\infty$ і $v = v_\infty = 0$.

Визначимо величину C_{II} : $\frac{P_\infty}{\gamma} + \frac{v_\infty^2}{2g} = C_{II}$, звідси

$$C_{II} = \frac{P_\infty}{\gamma}. \text{ Тоді } \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{P_\infty}{\gamma}, \text{ звідси } P = P_\infty - \frac{\rho v^2}{2}.$$

Тиск на поверхні циліндра буде (рис. 5.20)

$$P_0 = P_\infty - \frac{\rho v_0^2}{2}. \quad (5.25)$$

5.2.9 Безциркуляційне обтікання циліндра плоскопаралельною течією

Розглянемо течію, що складається із плоскопаралельної течії та течії плоского диполя, тобто

$$W = W_{mn} + W_{n.d.},$$

$$\text{де } W_{mn} = v_{\infty} z, \quad W_{n.d.} = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

Знайдемо для сумарної течії потенціал $\varphi(x, y)$ і функцію течії $\psi(x, y)$

$$\begin{aligned} W &= v_{\infty} z + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} = v_{\infty} (x + iy) + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x + iy} = \\ &= v_{\infty} x + i v_{\infty} y + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Тому

$$\varphi = v_{\infty} x + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = v_{\infty} y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (5.26)$$

Рівняння нульової лінії течії матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad v_{\infty} y_0 - \frac{M}{2\pi} \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} &= 0, \\ y_0 \left(v_{\infty} + \frac{M}{2\pi \cdot r_0^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{де } r_0^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Перший корінь цього рівняння $y_0 = 0$ – вісь x .

Другий корінь – $v_\infty + \frac{M}{2\pi \cdot r_0^2} = 0$, звідси

$$M = 2\pi \cdot r_0^2 v_\infty \text{ і } r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi v_\infty}}. \quad (5.27)$$

На рисунку 5.21 зображено картину сумарної течії.

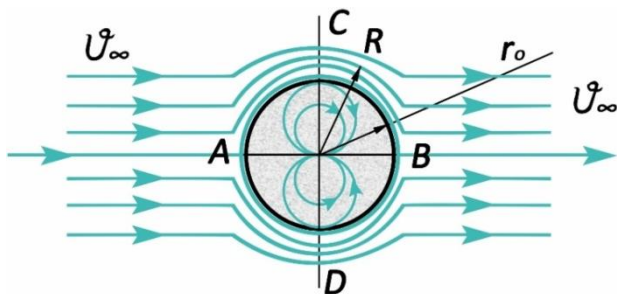


Рисунок 5.21 – Безциркуляційне обтікання циліндра плоскопаралельною течією

Нехай лінія течії радіуса r_0 – тверда поверхня, що не змінить картину течії зовні, і внутрішню течію, яка нагадує течію диполя, замінимо твердим тілом. У подальшому нас буде цікавити зовнішня течія з комплексним потенціалом

$$W(z) = v_\infty z + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}, \text{ що обтікає циліндр радіуса } r_0.$$

Знайдемо компоненти швидкості цієї течії. Для цього потенціал швидкості (ф. 5.27) перетворимо відповідно залежностей $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$ й

$$v_\infty = \frac{M}{2\pi \cdot r_0^2}, \text{ що були одержані раніше.}$$

Тоді

$$\varphi = \left(v_{\infty} + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) x = r \cdot \cos\theta \left(\frac{M}{2\pi \cdot r_0^2} + \frac{M}{2\pi \cdot r^2} \right) = \frac{M}{2\pi} r \cdot \cos\theta \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r^2} \right) = v_{\infty} r \cos\theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

Звідси

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_{\infty} \cos\theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (5.28)$$

$$v_u = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -v_{\infty} \sin\theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right). \quad (5.29)$$

На поверхні циліндра $r = r_0$, тому $v_r = 0$ (що співпадає з умовою непроникнення) й

$$v_u = -2v_{\infty} \sin\theta. \quad (5.30)$$

У разі $\theta = 0, \pi$ – $v_u = 0$, тобто точки A і B , що називають «мертвими точками». Якщо $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ – $v_u = -2v_{\infty} = v_{u_{\max}}$ (точки C і D).

Проаналізуємо розподілення тиску на поверхні циліндра, скориставшись рівнянням Ейлера

$$P_{\infty} + \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} = P + \frac{\rho v^2}{2}, \quad (5.31)$$

де P – тиск на поверхні циліндра.

Запишемо (5.31) у вигляді

$$P - P_{\infty} = \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}$$

або для відносного тиску

$$\bar{P} = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2} = 1 - \frac{v^2}{v_{\infty}^2}.$$

З урахуванням (5.30) у разі, якщо $v_r = 0$ одержимо

$$\frac{v^2}{v_{\infty}^2} = \frac{(-2v_{\infty} \sin \theta)^2}{v_{\infty}^2} = \frac{4 \sin^2 \theta \cdot v_{\infty}^2}{v_{\infty}^2} = 4 \sin^2 \theta.$$

Тоді

$$\bar{P} = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (5.32)$$

Якщо $\theta = 0, \pi$ відносний тиск $\bar{P} = 1$ (рис. 5.21, точки *A* і *B*). За умови, якщо $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ відносний тиск $\bar{P} = -3$ (рис. 5.21, точки *C* і *D*).

Знайдемо сумарну силу тиску на циліндр (рис. 5.22).

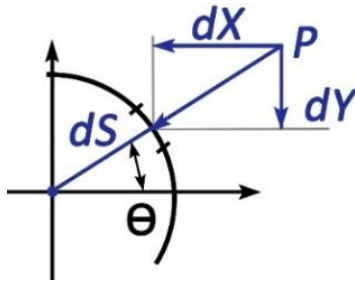


Рисунок 5.22 – До визначення сумарної сили тиску

Згідно з рисунком 5.22

$$dX = -P \cos \theta \cdot dS,$$

$$dY = -P \sin \theta \cdot dS,$$

$$dS = r_0 \cdot d\theta \cdot 1,$$

$$P = P_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta),$$

тоді

$$\begin{aligned} Y &= - \int_0^{2\pi} \left[P_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] \sin \theta \cdot r_0 \cdot d\theta = \\ &= r_0 P_\infty \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot d\theta - \frac{\rho v_\infty^2}{2} r_0 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot d\theta + \frac{4 \rho v_\infty^2 r_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cdot d\theta = 0, \end{aligned}$$

тому що кожний із трьох інтегралів дорівнює нулю (через $\sin \theta \cdot d\theta$ від 0 до 2π).

Аналогічно можна довести, що сила X дорівнює нулю ($X = 0$). Тобто циліндр, що обтікається ідеальною рідиною без циркуляції (лише плоскопаралельною течією), не відчуває сили тиску. Це явище має назву парадокс д'Аламбера.

Необхідно звернути увагу на те, що раніше, під час обтікання кулі плоскопаралельною течією ми одержали $v_{\max} = 1,5v_\infty$ і $\bar{P}_{\min} = -1,25$. Зараз за аналогічних умов для циліндра одиничної довжини ми одержали $v_{\max} = 2v_\infty$ і $\bar{P}_{\min} = -3$. Це свідчить про те, що циліндр викликає значно більше збурення течії, ніж куля.

5.2.10 Обтікання циліндра плоскопаралельною течією та циркуляцією

Два попередні варіанти обтікання циліндра рідиною потрібно розглядати складовими більш складної течії, яка б здійснювала силову взаємодію з твердим тілом, що відповідає реальній течії.

Тому розглянемо течію ідеальної рідини, комплексний потенціал якої складається з трьох потенціалів: плоскопаралельної течії $W_1(z)_{n.n.}$, течії плоского диполя $W_2(z)_o$ і течії вихору $W_3(z)_e$. Тобто

$$W(z) = v_\infty z + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \ln z. \quad (5.33)$$

Раніше було встановлено (5.27), що $r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi \cdot v_\infty}}$,

звідси $\frac{M}{2\pi} = r_0^2 \cdot v_\infty$. тому (5.33) матиме вигляд

$$W(z) = v_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \ln z,$$

що більш зручно для розділення на дійсну та уявну частини. Тоді

$$W(z) = v_\infty \left[(x + iy) + \frac{r_0^2(x - iy)}{x^2 + y^2} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \ln r + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} i\theta =$$

$$= v_{\infty} x + i v_{\infty} y + v_{\infty} \frac{r_0^2 x}{x^2 + y^2} - i v_{\infty} \frac{r_0^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln r,$$

звідси

$$\varphi = v_{\infty} x \left(1 + \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = v_{\infty} r \cos \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad (5.34)$$

$$\psi = v_{\infty} y \left(1 - \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = v_{\infty} \cdot r \cdot \sin \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (5.35)$$

Знайдемо компоненти швидкості

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_{\infty} \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (5.36)$$

$$v_u = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -v_{\infty} \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r}.$$

На поверхні циліндра ($r = r_0$) за умов безвідривного обтікання ($v_r = 0$)

$$v_u = -2v_{\infty} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \quad (5.37)$$

Рівняння сім'ї ліній течії матиме вигляд

$$v_{\infty} \cdot r \cdot \sin \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \text{const.}$$

Знайдемо критичні точки – $v_u = 0$.

Із (5.37) маємо

$$2v_\infty \cdot \sin \theta = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r_0}.$$

Звідси

$$\sin \theta_{кр} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r_0 \cdot v_\infty}. \quad (5.38)$$

Тобто для даного r_0 та обраної v_∞ положення критичних точок залежить від величини Γ .

Проаналізуємо можливі варіанти величини Γ :

а) якщо $\Gamma = 0$ – $\sin \theta_{кр} = 0$, $\theta_{кр} = 0, \pi$

Це приклад безциркуляційного обтікання циліндра плоскопаралельною течією, тому сили тиску на циліндр $X = 0$ і $Y = 0$ (див. п. 5.2.9);

б) у разі, якщо $\Gamma < 4\pi \cdot r_0 \cdot v_\infty$ – обидві критичні точки A та B будуть розташовуватися на циліндрі симетрично відносно осі Y на відріжку $0 < \theta_{кр} < \pi$ (рис. 5.23 а);

в) якщо $\Gamma = 4\pi \cdot r_0 \cdot v_\infty$ – критичні точки A та B збігаються в одну й розташовані на осі Y в точці $y = r_0$ (рис. 5.23 б). Тобто в результаті буде одна критична точка на поверхні циліндра;

г) за умови, якщо $\Gamma > 4\pi \cdot r_0 \cdot v_\infty$ – критичні точки A і B сходять і поверхні циліндра й розташовані на перетині однієї (рис. 5.23 в) або декількох ліній течії поза поверхнею циліндра ($y > r_0$).

Тобто лінії течії в усіх чотирьох прикладах симетричні відносно осі y і різко несиметричні відносно осі x . Тому під час обтікання циліндра плоскопаралельною течією та циркуляцією сумарна сила в напрямку осі x

відсутня – $X = 0$, а в напрямку осі y – обов'язково виникає, тобто $Y \neq 0$.

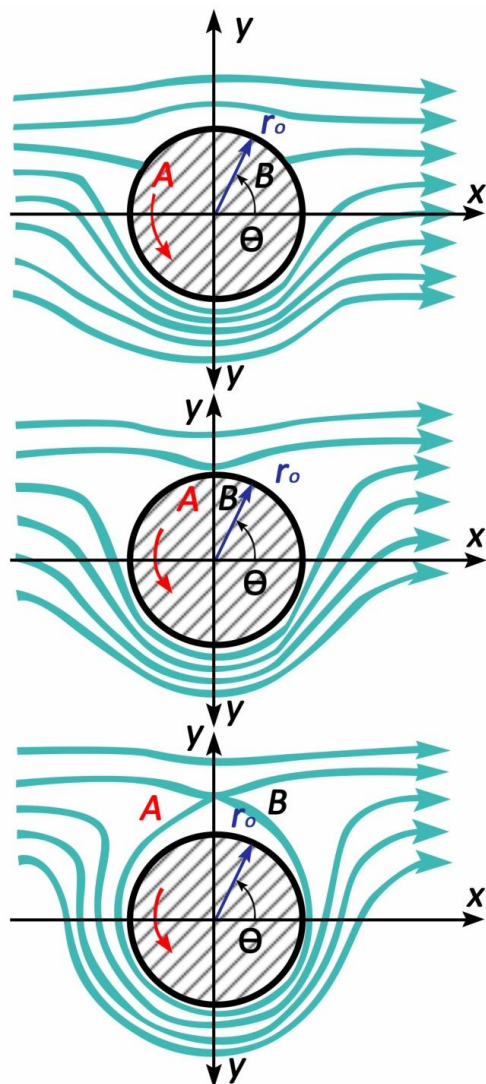


Рисунок 5.23 – Обтікання циліндра плоскопаралельною течією та циркуляцією

Це можна довести аналітично. Скористаємося рівнянням Бернуллі для нульової лінії течії

$$P_{\infty} + \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} = P + \frac{\rho v^2}{2} = P + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0} - 2v_{\infty} \sin \theta \right)^2.$$

Звідси

$$P = P_{\infty} + \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} - \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 v_{\infty}} - 2 \sin \theta \right)^2 = C + C_1 \sin \theta - C_2 \sin^2 \theta.$$

Тоді сила тиску

$$Y = -r_0 \int_0^{2\pi} P \cdot \sin \theta \cdot d\theta.$$

Підставивши значення P , одержимо

$$Y = -r_0 \int_0^{2\pi} (C + C_1 \sin \theta - C_2 \sin^2 \theta) \sin \theta \cdot d\theta. \quad (5.39)$$

Із курсу математики відомо, що інтеграл від першого й третього складових у дужках дорівнюють нулю, тоді

$$Y = -\frac{\rho \Gamma v_{\infty}}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot d\theta.$$

Визначимо величину інтегралу

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \left| \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi.$$

Тому остаточно одержимо

$$(Y = -\rho v_{\infty} \Gamma) . \quad (5.40)$$

Аналогічно друга складова – сила X , дорівнює

$$X = -r_0 \int_0^{2\pi} P \cos \theta \cdot d\theta .$$

Підставивши значення P та замінивши $\sin \theta$ на $\cos \theta$, одержимо

$$X = 0. \quad (5.41)$$

Це і є доказом того, що під час обтікання циліндра ідеальною рідиною сили лобового супротиву не виникає. У гідромеханіці цей ефект називають парадоксом Даламбера.

До розглянутого питання про особливості обтікання циліндра плоскопаралельною течією та циркуляцією додамо ще дещо. На основі картини течії про величину циркуляції $\Gamma = 4\pi \cdot r_0 \cdot v_{\infty}$, за якої утворюється лише одна критична точка, пізніше буде обґрунтований постулат Чаплигіна – Жуковського про оптимальний режим обтікання крилового профілю й будь-якої лопаті за умови мінімуму втрати енергії на вихроутворення.

Перелік питань до розділу 5

- 1 Приклади плоских потенціальних течій.
- 2 Особливості сітки течії для плоских потенціальних течій.
- 3 Рівняння Лапласа для таких течій та два варіанти граничних умов для його рішення(задача Неймана й задача Діріхле).

4 Комплексний потенціал $W(z)$ для плоских потенціальних течій та підстави для його введення.

5 Визначення потечіалу $\varphi(x,y)$ та функції течії $\Psi(x,y)$ через $W(z)$.

6 Спряжена комплексна швидкість за відомим комплексним потенціалом.

7 Визначення циркуляції по контуру L і величини витрати рідини Q через площу S за відомим комплексним потенціалом.

8 Дві постановки задачі щодо розрахунку плоскої потенціальної течії за відомим комплексним потенціалом.

9 Розрахунок плоскопаралельної течії за відомим комплексним потенціалом $W(z)=a \cdot z$, де a – дійсне, уявне або комплексне число.

10 Сітки течії та компоненти швидкості.

11 Кінематичний розрахунок плоскої течії, для якої $W(z)=a \cdot \ln z$ де a – дійсне, уявне або комплексне число.

12 Закон розподілення швидкості в потенціальному плоскому вихорі.

13 Довести виконання закону суцільності течії для плоского потенціального стоку й витоку.

14 Картини ліній течій при комплексному потенціалі $W(z)=z^n$ залежно від величини показника степеня n .

15 Течія від двох витоків, розташованих на осі X симетрично осі Y .

16 Плоский виток і стік. Плоский диполь.

17 Циркуляційне обтікання циліндра течією, комплексний потенціал якої $W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} i \cdot \ln z$. Закони розподілення швидкості й тиску.

18 Безциркуляційне обтікання циліндра плоскопаралельною течією. Розподілення швидкості й тиску по поверхні циліндра і прояв парадокса д'Аламбера.

19 Обтікання циліндра плоскопаралельною течією із циркуляцією.

20 Розподілення швидкості на поверхні циліндра й розташування мертвих точок за різних значень циркуляції.

21 Сили взаємодії циліндра під час його обтікання і з циркуляцією.

6 ГІДРОДИНАМІКА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

Ідеальна рідина – це модель реальної рідини, що, як і модель «суцільне матеріальне середовище» відповідає моделі «рідке суцільне середовище» й додатково має такі спрощення:

- абсолютно нестискувана й нерозширювана;
- має абсолютну рухомість елементарних частинок;
- не створює дотичних напружень у рідині й на твердій поверхні, із якою вона стикається (коефіцієнти в'язкості для неї дорівнюють нулю: $\mu = 0$ і $\nu = 0$).

Саме тому така рідина не створює сили супротиву для твердих тіл, які вона обтікає (ми переконалися в цьому в попередньому розділі).

Може виникнути питання про практичну доцільність усіх розрахунків і досліджень такої спрощеної моделі реальної рідини. Справа в тому, що реальна властивість рідини – в'язкість, проявляє лише тільки тоді, коли в течії реальної рідини є великий градієнт швидкості, що означає появу відносної швидкості одного шару рідини щодо сусіднього. Це відповідає відомій гіпотезі І. Ньютона про величину дотичних напруг

$$\tau = \pm \mu \frac{d\bar{v}}{dn} = \pm \mu \cdot \text{grad} \bar{v}. \quad (6.1)$$

На практиці досить часто трапляються течії, у яких великі області мають досить малий градієнт швидкості (наприклад, ступеневий закон розподілення швидкості в ядрі турбулентної течії, де показник ступеня $n = \frac{1}{7} \dots \frac{1}{10}$) і для цієї області течії можна знехтувати в'язкістю рідини, тобто розглядати її як ідеальну, що значно спрощує всі гідродинамічні розрахунки течії.

6.1 Рівняння руху ідеальної рідини

6.1.1 Рівняння руху ідеальної рідини у формі Ейлера

У рухомій рідині розглянемо елементарний об'єм у вигляді паралелепіпеда зі сторонами dx , dy , dz у декартовій системі координат (рис. 6.1).

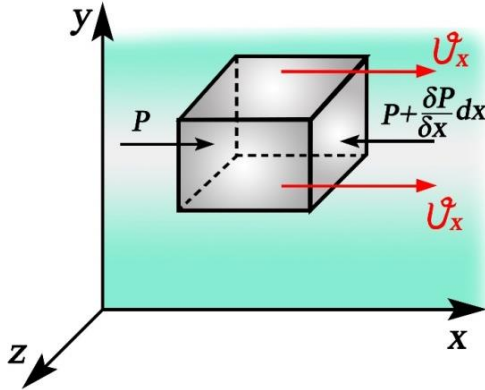


Рисунок 6.1 – До визначення рівняння руху ідеальної рідини у формі Ейлера

Рідина ідеальна, тому поверхневі сили лише від тиску: $Pdydz$ і $\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right)dydz$ – проєкції на вісь x (проєкції на осі y і z – на рисунку не показані).

Проєкція масової сили на вісь x : $X\rho dx dy dz$.

Проєкція сили інерції на вісь x : $-\rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt}$.

Згідно з принципом Даламбера, усі зовнішні сили (масові й поверхневі) повинні урівноважуватися силами інерції – умова динамічної рівноваги виділеного рухомого об'єму рідини.

Тоді

$$Pdydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dydz + \rho X dx dy dz = \rho \frac{dv_x}{dt} dx dy dz.$$

Після розкриття дужок і скорочення одержимо

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt}. \end{cases}$$

Два останні рівняння записані за аналогією, тобто із проєкцій сил на осі y і z . В одержаній системі невідомими є v_x, v_y, v_z і P . Система буде замкненою, якщо до неї додати диференціальне рівняння нерозривності. Тоді

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Вираз (6.2) є системою диференціальних рівнянь руху ідеальної рідини у формі Л. Ейлера. У векторній формі ці рівняння мають такий вигляд:

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (6.3)$$

або

$$F - \frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (6.3)^*$$

Тобто основне завдання гідродинамічного розрахунку течії – це визначення в кожній точці в кожний момент чотирьох таких функцій: $v_x = f(x, y, z, t)$, $v_y = f(x, y, z, t)$, $v_z = f(x, y, z, t)$ і $P = f(x, y, z, t)$.

6.1.2 Рівняння руху ідеальної рідини у формі Громеко

У 1881 році професор Казанського університету І. С. Громеко запропонував іншу форму запису рівнянь Л. Ейлера. Для цього він перетворив праву частину рівнянь так (покажемо на прикладі першого рівняння):

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Тобто повне прискорення він розгорнув на локальне й конвективне (див. (2.6) і (2.8)), потім додав і відняв від правої частини члени $v_y \frac{\partial v_y}{\partial x}$ і $v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}$, тоді

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).$$

Водночас тричлен у перших дужках дорівнює

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x},$$

а вирази в других і третіх дужках являють собою компоненти вихору $-\Omega_z$ і Ω_y (див. (2.16)).

Тоді перше (й за аналогією друге та третє) рівняння Л. Ейлера набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (v_z \Omega_y - v_y \Omega_z), \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (v_z \Omega_z - v_x \Omega_x), \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (v_y \Omega_x - v_x \Omega_y). \end{cases} \quad (6.4)$$

У векторній формі

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt} + \text{grad} \left(U - \frac{P}{\rho} - \frac{v^2}{2} \right) + (\bar{\Omega} \times \bar{v}) = 0 \right) \quad (6.5)$$

або

$$\left(\frac{dv}{dt} + \nabla \left(U - \frac{P}{\rho} - \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot} \bar{v} \times \bar{v}) = 0 \right), \quad (6.6)$$

де $U(x, y, z)$ – потенціал масових сил $X = \frac{\partial U}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$;

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Рівняння (6.4), (6.5), (6.6) – рівняння руху ідеальної рідини у формі Громеко. Їх особливість полягає в тому, що вони містять у явному вигляді члени з компонентами вихору. У разі, коли $(rot \bar{v} \times \bar{v}) = 0$, рівняння руху значно спрощують. Таке спрощення можливе в трьох ситуаціях, якщо:

- швидкість вторинної течії дорівнює нулю;
- вектори \bar{v} і $\bar{\Omega}$ паралельні (гвинтовий рух);
- вихор швидкості дорівнює нулю (безвихрова або потенціальна течія).

Граничними умовами для інтегрування рівнянь руху у формі Ейлера або Громеко є умова непроникнення рідини крізь тверду поверхню або умова безвідриного обтікання ($v_n = 0$ і $v_n = v_{n_{cm}}$).

6.2 Приклади інтегрування рівнянь руху ідеальної рідини

У загальному вигляді рівняння руху ідеальної рідини *не інтегруються*. Кожного разу, коли ставлять завдання щодо їх інтегрування, ретельно аналізують їх характеристики й параметри конкретної течії, для якої буде вирішуватися ця задача, і ці умови використовують для спрощення рівнянь. Приклади таких спрощень наведені нижче.

6.2.1 Течія потенціальна й нестала

Основними особливостями такої течії є умови

$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$, $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$. Для течії існує потенціал

$$\varphi(x, y, t), \text{ тому } v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Крім того, проведемо такі зміни в запису рівняння у формі Громеко:

$$\text{а) } \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \text{ – властивість похідної}$$

не залежить від порядку диференціювання. Тому

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right);$$

б) репрезентуємо числа $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ і $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ у вигляді

частинної похідної деякої функції $P(x, y, z)$, назвавши її силовою функцією. Тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} \end{array} \right.$$

Домноживши кожне із цих рівнянь на dx , dy , dz відповідно та склавши їх почленно, одержимо

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz.$$

Оскільки подані тричлени є повними диференціалами, то можна записати

$$\frac{1}{\rho} dp = dP,$$

звідси

$$P = \int \frac{dp}{\rho}. \quad (6.7)$$

Тобто введена нами силова функція $P(x, y, z)$ буде визначена, якщо відома функціональна залежність густини рідини від тиску ($\rho = f(p)$).

Оскільки в гідромеханіці завжди мають справу з баротропними процесами, для яких існує залежність ρ від p , то силова функція завжди може бути визначена;

в) аналогічно попередньому ствердженню можна вважати, що масові сили X , Y і Z мають потенціал $U(x, y, z)$, і тому в рівняннях можна провести підстановки

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Ураховуючи всі попередні обґрунтування замін, можна початкову систему рівнянь руху (6.4) замінити такою:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} \right) \end{cases}$$

І знову, домноживши на dx , dy , dz відповідно та склавши їх почленно, одержимо справа й зліва повні диференціали функції $U(x, y, z)$ і суми трьох функцій, що в правій частині

$$dU = d \left(P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Після інтегрування одержимо рішення

$$P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U + C_{II}(t)$$

або

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U + C_{II}(t), \quad (6.8)$$

де C_{II} – константа інтегрування, змінна в часі й притаманна для всіх точок течії.

Вираз (6.8) є інтегралом Лагранжа для несталої потенціальної течії ідеальної рідини.

Для нестискуваної несталої течії можна записати

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U + C_{II}(t). \quad (6.9)$$

Вираз (6.9) також зветься інтегралом Лагранжа для нестискуваної несталої течії.

Аналогічно для сталої потенціальної течії рівняння (6.9) спроститься до виду

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = U + C_{II}. \quad (6.10)$$

Вираз (6.10) має назву інтеграл Ейлера.

У разі випадку руху в полі тяжіння, де $U = -gz$, можна записати

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C_{II}$$

або

$$\left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C_{II} \right) \quad (6.11)$$

Вираз (6.11) є рівнянням Ейлера для потенціальної течії в полі сил тяжіння.

Необхідно зауважити, що відоме раніше з курсу «Гідравліка» рівняння Бернуллі та одержане зараз рівняння Ейлера зовні схожі, але мають істотно різний зміст.

Рівняння Бернуллі показує, що повна питома енергія є постійною лише вздовж лінії течії, а в рівнянні Ейлера константа C_{II} притаманна для всіх точок усього об'єму течії.

Водночас фізичний зміст членів рівнянь залишається однаковим – питомі механічні енергії положення, тиску й кінетична.

6.2.2 Стала вихрова течія

Для цього виду течії $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (течія стала) і $\Omega_x \neq 0$, $\Omega_y \neq 0$, $\Omega_z \neq 0$ (течія вихрова). Крім того, як і в попередньому прикладі, можна вважати, що масові сили мають потенціал $U(x, y, z)$, і тому в рівняннях можна провести підстановки $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$, а вирази $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ і $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ можна записати через силову функцію $P(x, y, z)$, тобто

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Тому початкові рівняння руху у формі Громеко з урахуванням перетворень, аналогічних п. 6.1, матимуть вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) = v_z \Omega_y - v_y \Omega_z \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) = v_x \Omega_z - v_z \Omega_x \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - P - \frac{v^2}{2} \right) = v_y \Omega_x - v_x \Omega_y \end{cases}$$

Домножимо ліву частину рівнянь відповідно на dx , dy , dz , а праву частину – відповідно на $v_x dt$, $v_y dt$ і $v_z dt$, водночас $dx = v_x dt$, $dy = v_y dt$ і $dz = v_z dt$.

Величини dx , dy , dz – це прирощення координат частинок у напрямку x , y , z , а $v_x dt$, $v_y dt$ і $v_z dt$ – це шлях,

пройдений частинкою рідини вздовж лінії течії, оскільки в разі сталого руху лінії течії та траєкторії співпадають.

Після домноження й почленного складання одержимо

$$d\left(U - P - \frac{v^2}{2}\right) = v_z \Omega_y v_x dt - v_y \Omega_z v_x dt + v_x \Omega_z v_y dt - v_z \Omega_x v_y dt + \\ v_y \Omega_x v_z dt - v_x \Omega_y v_z dt = 0.$$

Неважко помітити, що всі члени в правій частині попарно зникають, тому одержуємо

$$d\left(U - P - \frac{v^2}{2}\right) = 0,$$

звідси

$$U - P - \frac{v^2}{2} = C_{\mathcal{L}}, \quad (6.12)$$

де $C_{\mathcal{L}}$ – константа, притаманна лише лініям течії (оскільки це рішення одержане лише для умови $dx = v_x dt$, $dy = v_y dt$ і $dz = v_z dt$).

Таке рішення має назву інтеграл Бернуллі, що справедливий лише для лінії течії в сталій вихровій течії ідеальної рідини.

Для прикладу, коли $\rho = const$ (нестискувана рідина), а $U = -gz$ (рух у полі тяжіння), із (6.12) одержимо

$$-gz - \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2} = C_{\mathcal{L}}.$$

Остаточно

$$\left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C_{\text{Л}} \right) \quad (6.13)$$

Вираз (6.13) відомий як рівняння Д. Бернуллі.

Неважко помітити, що це рівняння тотожне з таким самим рівнянням для потенціальної течії. Різниця полягає в тому, що для потенціальної течії константа справедлива для всіх точок течії (тобто одна для всіх ліній течії), а для вихрової течії кожна лінія течії має свою константу, відмінну від сусідньої.

Перелік питань до розділу 6

1 Модель «ідеальна рідина» – її характеристики, правомочність і доцільність її введення. Роль градієнта швидкості в реальній рідині.

2 Гіпотеза І. Ньютона про величину дотичних напружень.

3 Поверхневі й масові сили в рідині та умови динамічної рівноваги рухомого матеріального тіла.

4 Рівняння руху ідеальної рідини у формі Л. Ейлера.

5 Рівняння руху ідеальної рідини у формі І. С. Громеко.

6 Можливості спрощення рівнянь руху ідеальної рідини.

7 Інтегрування рівнянь руху ідеальної рідини для течії потенціальної й несталої. Інтеграл Лагранжа та рівняння Л. Ейлера. Фізичний зміст константи Сп.

8 Інтегрування рівнянь руху ідеальної рідини для течії вихрової та сталої. Інтеграл і рівняння Д. Бернуллі. Фізичний зміст константи Сп.

9 Порівняння фізичного змісту рівнянь Л. Ейлера та Д. Бернуллі.

10 Фізичний зміст і математичне відображення понять «течія баротропна», «рідина нестискувана» й «масові сили мають потенціал».

7 ГІДРОДИНАМІКА В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

7.1 В'язкість рідини й газу

Молекулярна структура реальної рідини обумовлює одну з її основних фізичних характеристик – чинити опір зсувним зусиллям. Визначити цей опір можна з простого досліду (рис. 7.1).

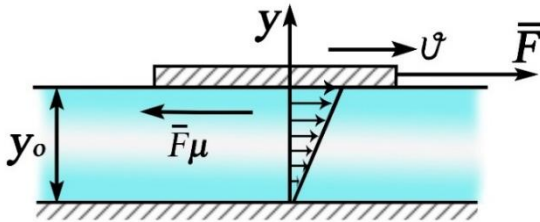


Рисунок 7.1 – До визначення в'язкості рідини й газу

На нерухомій нижній поверхні знаходиться шар рідини товщиною y_0 , а на вільній поверхні – легка пластина площею S . Якщо до цієї пластини докласти силу F , то вона почне переміщуватися й потягне за собою перший елементарний шар рідини, що зі свого боку приведе в рух сусідній шар, і так далі. Тільки останній шар, який безпосередньо прилягає до твердої нерухомої поверхні, залишиться нерухомим.

У результаті дії міжмолекулярних зв'язків між рухомими шарами рідини виникає внутрішня сила тертя F_μ , яку називають силою в'язкості.

Сама по собі в'язкість – це властивість рідини чи газу під час свого руху чинити опір відносному зсуву окремих частинок.

За гіпотезою Ньютона, закон внутрішнього тертя в рідині записують у вигляді, який пізніше запропонував М. П. Петров

$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dn}, \quad (7.1)$$

де μ – динамічний коефіцієнт в'язкості (основна кількісна характеристика в'язкості);

$\frac{dv}{dn}$ – градієнт швидкості в напрямку, нормальному до вектора швидкості;

τ – дотична напруга (сила тертя на одиниці площі).

Розмірність динамічного коефіцієнта в'язкості μ , згідно з ф. (7.1), буде такою:

$$- \text{у фізичній системі} - 1 \text{ пуаз} = 1 \frac{\text{дина} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2} = 1 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}$$

(або в сантипуазах, що в сто разів менше) й відповідає динамічній в'язкості води за умов 20,5 °С;

$$- \text{у технічній системі} - \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2};$$

$$- \text{у новій загальній системі СІ} - 1 \frac{\text{ньютон} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} \text{ або}$$

$\text{Па} \cdot \text{с}$, що дорівнює 1 000 сантипуазів.

На практиці часто застосовують кінематичний коефіцієнт в'язкості ν , який має таку назву тому, що до його розмірності не входять розмірності динамічних величин – маси та сили

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (7.2)$$

Розмірність кінематичного коефіцієнта в'язкості виражаються у $\frac{м^2}{сек}$ або $\frac{см^2}{сек}$; він має назву стокс.

Обидва коефіцієнти в'язкості (μ і ν) практично не залежать від тиску (за винятком дуже високих тисків), але дуже залежать від температури.

Графіки залежностей кінематичного коефіцієнта в'язкості від температури репрезентовані на рисунку 7.2. Значення динамічного коефіцієнта в'язкості наведені в таблицях 7.1 і 7.2.

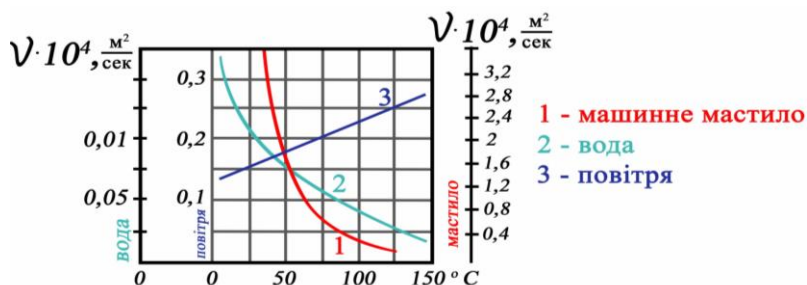


Рисунок 7.2 – Графіки залежностей кінематичного коефіцієнта в'язкості від температури

Таблиця 7.1 – Значення динамічного коефіцієнта в'язкості μ (Па · с) для деяких рідин

Рідина	Температура, °C	
	0	20
Вода	$17,9 \cdot 10^{-4}$	$10,1 \cdot 10^{-4}$
Ртуть	$17 \cdot 10^{-4}$	$15,7 \cdot 10^{-4}$
Гліцерин	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$0,87 \cdot 10^{-6}$
Машинне мастило	$0,64 \cdot 10^{-6}$	$0,17 \cdot 10^{-6}$
Бензин	$7,7 \cdot 10^{-4}$	–

Таблиця 7.2 – Значення динамічного коефіцієнта в'язкості μ (Па · с) для деяких газів

Газ	Температура, °С			
	-50	0	20	50
Повітря	1,708	1,840	1,954	2,180
Водяна пара	0,883	0,975	1,065	1,250
Вуглекислий газ, CO ₂	1,367	1,486	1,607	1,807

Більш детально значення коефіцієнтів в'язкості μ і ν наведені у відповідних довідниках фізичних величин.

Інколи для оцінювання значення коефіцієнта в'язкості можна користуватися емпіричними формулами, наприклад:

– для води – формулою Пуазейля

$$\mu = \mu_0 (1 + 0.0337t + 0.00032t^2)^{-1}, \quad (7.3)$$

де μ_0 – значення за температури $t_0 = 0$ °С;

– для газів – формулою Сатерленда

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + C}{T + C} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2}, \quad (7.4)$$

де C – постійна, що залежить від виду газу;

T – термодинамічна температура;

μ_0 – значення за температури $t_0 = 0$ °С. Наприклад, для повітря $\mu_0 = 17,2 \cdot 10^{-6}$ Па · с, $C = 111$.

7.2 Рівняння руху в'язкої рідини в напругах

У рухомій рідині виділимо елементарний об'єм зі сторонами dx , dy , dz і складемо умови його динамічної рівноваги, прирівнявши проєкції всіх зовнішніх і поверхневих сил до сил інерції (рис. 7.3).

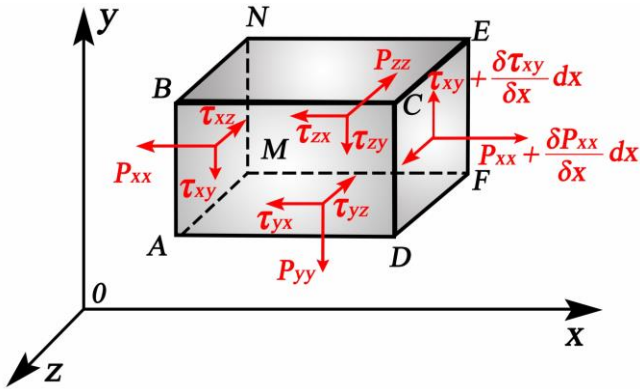


Рисунок 7.3 – До визначення рівняння руху в'язкої рідини в напругах

Урахуємо, що в реальній рідині по кожній грані діють не лише нормальні, а й дотичні напруги, репрезентовані на рисунку двома складовими.

Установимо, що перший індекс вказує на вісь, перпендикулярну грані, а другий – на вісь, на яку спроектована напруга.

Для скорочення математичних викладок проєкцію всіх сил запишемо лише для осі OX , а висновки для проєкцій на осі OY і OZ зробимо за аналогією. Для цього на рисунку 7.4 позначимо лише ті напруги, що дають проєкції на OX .

З рисунка 7.4 видно, що ребра AM, BN, CE, DF , як і вісь OZ , спроектувалися в точки, а відповідні грані – у прямі лінії AB, AD, BC і CD .

Сума проєкцій усіх позначених на рисунку 7.4 напруг, помножених на відповідні площі граней, тобто сума проєкцій сил, буде виглядати так:

$$-P_{xx} dydz + \left(P_{xx} + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \rho X dx dy dz = \rho \frac{dv_x}{dt} dx dy dz.$$

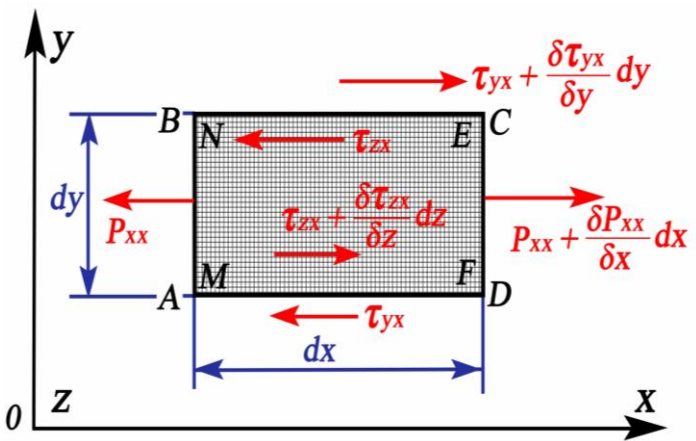


Рисунок 7.4 – До визначення рівняння руху в'язкої рідини в напругах у проєкціях

Після скорочення й розділення на dx, dy, dz і ρ , одержимо

$$\begin{cases} X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{dv_x}{dt}, \\ Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = \frac{dv_y}{dt}, \\ Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) = \frac{dv_z}{dt}. \end{cases} \quad (7.5)$$

Рівняння (7.5) – це диференціальні рівняння руху реальної рідини в напругах, записаних у декартовій системі координат. Із них перше рівняння одержане цілком коректно, а два останні – за аналогією.

Потрібно зауважити, що в цих рівняннях, якщо відомі зовнішні масові сили (наприклад, поля тяжіння) X , Y і Z , залишаються невідомими ще 12 параметрів.

7.3 Властивості дотичних і нормальних напруг

7.3.1 Парність дотичних напруг

Для встановлення цієї властивості визначимо момент діючих на паралелепіпед сил відносно осі OZ' , що проходить через центр грані dx , dy і паралельна осі OZ (рис. 7.5).

На рисунку 7.5 показані лише напруги, що створюють момент відносно осі OZ' . Масові сили не прикладені, бо момент від них буде величиною 4-го порядку меншості, яким можна знехтувати.

За цих умов сумарний момент, який повинен дорівнювати нулю за умови динамічної рівноваги виділеного об'єму рідини $dx dy dz$, запишемо так:

$$\begin{aligned}
 & -\tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} \\
 & + \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz \frac{dx}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

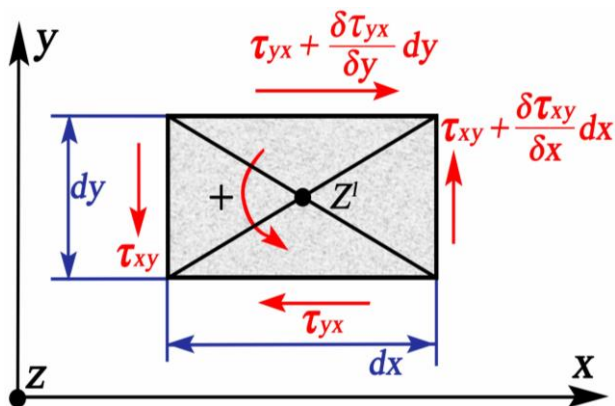


Рисунок 7.5 – До визначення парність дотичних напруг

Після скорочення подібних членів і знехтувавши величинами 4-го порядку малості одержимо вираз

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (7.6)$$

За аналогією можна стверджувати, що

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{і} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (7.7)$$

Тобто, дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних гранях за двома взаємно перпендикулярним напрямкам рівні між собою.

Отже залишилося шість напружень.

7.3.2 Тензор напружень

У цілому повне напруження в будь-якій точці рідини може бути виражене в матричній формі, що називається тензором напружень

$$P = \begin{vmatrix} P_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & P_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & P_{zz} \end{vmatrix} \quad (7.8)$$

Цей тензор потрібно порівняти почлено з тензором швидкості деформації (див. (2.19)) і зробити висновок, що в рідкому матеріальному середовищі кожна напруга супроводжується відповідною швидкістю деформації. І навпаки, кожна деформація викликає відповідну напругу.

7.3.3 Нормальні напруження у в'язкій рідині

В ідеальній рідині нормальні напруження

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = -P \quad (7.9)$$

У в'язкій рідині азом із тим, що виникають дотичні напруги, нормальні напруги змінюються на величину P_{xx} , P_{yy} і P_{zz} , що виникає як додаток на подолання сил в'язкості, в нормальному напрямку. Тому в реальній рідині

$$\begin{cases} P_{xx} = p + \Pi_{xx} \\ P_{yy} = p + \Pi_{yy} \\ P_{zz} = p + \Pi_{zz} \end{cases} \quad (7.10)$$

Установлено, що цей додатак зумовлено винятково силами в'язкості, пропорційний швидкості лінійної деформації $\frac{\partial V_n}{\partial n}$, причому коефіцієнт пропорційності цієї залежності дорівнює 2μ на відміну від коефіцієнта для дотичних напружень відповідно до гіпотези Ньютона.

Тому

$$\begin{cases} P_{xx} = p + 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \\ P_{yy} = p + 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} \\ P_{zz} = p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{cases}, \quad (7.11)$$

а дотичні напруги, відповідно V , набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = 2\mu \varepsilon_z = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yx} = 2\mu \varepsilon_y = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = 2\mu \varepsilon_z = \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \end{cases}. \quad (7.12)$$

Із рівнянь (7.12) у разі одномірної течії автоматично витікає вищезгадана гіпотеза Ньютона.

Із рівнянь (7.11) можна одержати

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = 3p + 2\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right),$$

де вираз у лапках дорівнює нулю у разі, якщо рідина не стискається. Тоді

$$P = \frac{P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}}{3} \quad (7.13)$$

Це означає, що гідродинамічний тиск у в'язкій нестисливій рідині можна розглядати як узятє зі зворотним знаком середнє арифметичне від нормальних напруг за довільними, взаємно перпендикулярним площинами, що проходять через спільну точку P (рис. 7.6)

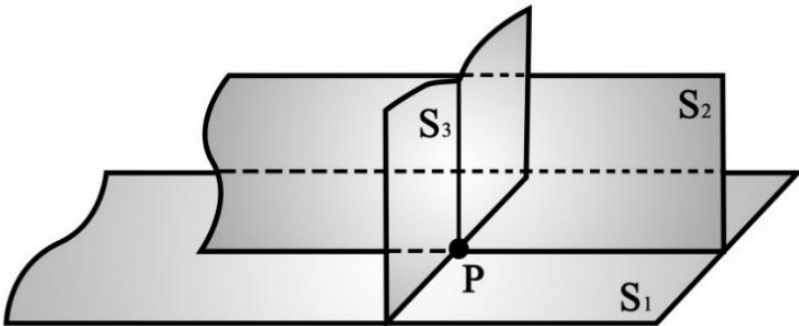


Рисунок 7.6 – Взаємно перпендикулярні площини, що проходять через спільну точку P

7.3.4 Узагальнений закон Ньютона. Рідини ньютонівські й реологічні

Одержані вище співвідношення між компонентами тензора напружень (7.8) і тензора швидкості деформацій (2.19) і (7.11) та (7.12) справедливі лише для в'язкої, але нестискуваної рідини (що для багатьох крапельних рідин, зокрема для води, прийнятно).

У разі стискуваної рідини (а це гази та крапельні рідини за високих тисків) закон Ньютона набуває вигляду

$$P_{ii} = -p + 2\mu \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial i} + \lambda \cdot \text{div} \bar{V}, \quad (7.14)$$

де λ – другий коефіцієнт в'язкості («друга в'язкість») – характеризує виникнення додаткових напруг під час стискання або розширенні об'єму рідини.

Рівняння (7.14) можна переписати

$$P_{xx} = -p + (2\mu + 3\lambda) \text{div} \bar{V},$$

і оскільки в цьому прикладі $\text{div} \bar{V} \neq 0$, то залишається, що $(2\mu + 3\lambda) = 0$ за умови, що в цілому другий член у виразі для P_{xx} дорівнює нулю.

Тоді одержимо, що $\lambda = \frac{2}{3}\mu$, а вирази (7.11) набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} P_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{V} \\ P_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{V} \\ P_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{V} \end{cases} \quad (7.15)$$

Для дотичних напружень вирази (7–12) для стискуваної та нестискуваної рідини залишаються без зміни.

Висновок. Вирази (7.11), (7.12) і (7.15) свідчать про той факт, що для великого класу рідин і газів компоненти тензора напружень і тензора швидкості деформацій пов'язані між собою лінійно, тобто на основі закону Гука $y = kx$.

У цьому і є зміст узагальненого закону Ньютона. Рідини, у яких виконується цей закон, мають назву «ньютонівські рідини». До них відносяться повітря, вода, спирти, рідкі мастила та багато інших.

Рух іншого класу рідин, у яких не виконується закон Гука, вивчають в іншій науці – реології. Такі рідини називають неньютонівськими. До них належать будь-які колоїдні суспензії, слабкі розчини полімерів, в'язко – пластичні рідини, деякі мультифазні рідкі суміші.

7.4 Рівняння руху в'язкої рідини (Нав'є – Стокса)

У раніше одержані рівняння в'язкої рідини в напругах (7.5) підставимо значення напруг згідно з (7.11) і (7.12). Для цього спочатку підставимо їх у перше рівняння й одержані результати за аналогією перенесемо на два інші рівняння в напругах

$$X - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

$$X + \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t},$$

$$X - \frac{1}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

Останнє рівняння вже є повним рівнянням Нав'є – Стокса для стискуваної рідини. Для нестискуваної рідини останній тричлен у ланках є рівнянням нерозривності й тому він дорівнює нулю. Остаточно для нестискуваної рідини запишемо

$$\left\{ \begin{array}{l} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (7.16)$$

Це і є система диференціальних рівнянь руху в'язкої нестискуваної рідини – рівняння Нав'є – Стокса (1845 р.) Для довідки: Нав'є – французький вчений (1785–1836), у 1821 році вперше вивів рівняння. Стокс – англійський фізик і математик (1819–1903), у 1845 році остаточно сформулював ці рівняння для різних прикладів.

Рівняння у векторній формі

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P + \nu \cdot \nabla^2 \cdot \bar{V} = \frac{d\bar{v}}{dt} \\ \text{div}\bar{V} = 0 \end{array} \right. \quad (7.17)$$

Система замкнена з чотирма невідомими P, V_x, V_y, V_z . Водночас поле масових сил X, Y, Z , а також ν і ρ повинні бути заданими.

Для стискуваної рідини система рівнянь має такий вигляд (без розгортання сил інерції):

$$\left\{ \begin{array}{l} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad (7.18)$$

або у векторній формі

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P + \nu \cdot \nabla^2 + \frac{\nu}{3} \text{grad} \cdot \text{div}\bar{V} = \frac{d\bar{v}}{dt}, \quad (7.19)$$

або в іншій формі

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P + \nu \cdot \nabla^2 \cdot \bar{v} + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{v}) = \frac{d\bar{v}}{dt} + \nu(\nu \cdot \nabla) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \bar{V}) = 0 \end{array} \right. \quad (7.20)$$

Необхідно зауважити, що в разі стисливої рідини система рівнянь Нав'є – Стокса незамкнена. Щоб її замкнути, необхідно ввести ще функції $\rho = f(p)$ й $v = f(t^0)$.

Інколи ці рівняння зводять до іншого виду, який залежно від вихідних даних більш пристосований для практичних потреб за аналогією з рівняннями у формі Громеко.

Для цього скористаємося відомою формулою із векторного аналізу

$\nabla^2 \cdot \bar{V} = \text{grad div} \bar{V} - \text{rot rot} \bar{V}$, що за умови $\text{div} \bar{V} = 0$ зводиться до виду $\nabla^2 \cdot \bar{V} = -\text{rot rot} \bar{V}$.

Скористаємося й іншою формулою

$$(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right).$$

Тоді, вважаючи, що масові сили мають потенціал U (що на практиці трапляються дуже часто), можна записати $F = -\text{grad} U$ та звести рівняння до іншої формули

$$-\text{grad} U - \frac{1}{\rho} \text{grad} P - v \cdot \text{rot rot} \bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right),$$

звідси

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} = -\text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) - v \cdot \text{rot rot} \bar{V}. \quad (7.21)$$

Остання форма запису в цілому ряді конкретних течій може бути значно спрощена.

Граничними умовами для інтегрування рівнянь Нав'є – Стокса є умови «прилипання до стінки» $V_{CT} = 0$ в разі нерухомої стінки, або $V_{CT} = U$ за умов рухомої зі швидкістю U твердій стінці, а також умови «непроникнення рідини» крізь стінку – $V_n = 0$ або $V_n = V_{n\text{ ст}}$ в разі рухомої.

7.5 Інтегрування рівняння Нав'є – Стокса

7.5.1 Загальні підходи до інтегрування

Рівняння руху в'язкої рідини є диференціальними рівняннями в частинних похідних, зокрема похідних другого порядку. Тому вони є рівняннями нелінійними й пошук їх точних розв'язків часто передбачає неподоланні математичні труднощі. Часто вони виникають через неможливість задати коректні граничні чи початкові умови, зумовлені недостатнім знанням самої природи турбулентності, закономірностями пульсацій швидкості й тиску, густини та в'язкості. Тому на практиці використовують методи чисельного інтегрування цих рівнянь із використанням тієї чи іншої моделі турбулентності.

І все ж таки є приклади течій, для яких можна одержати точні розв'язання рівнянь Нав'є – Стокса. Насамперед це течії, у яких квадратичні члени зникають самі собою.

Перша група таких течій – це ламінарні течії:

- течія Хагена – Пуазейля в круглій циліндричній трубі;
- плоска течія між двома нерухомими стінками;
- течія Куетта із однією рухомою стінкою;

- течія між двома коаксіальними циліндрами;
- плоскі течії поблизу критичної точки;
- течія поблизу диска, що обертається;
- течія в дифузорі й конфузорі;

Необхідно зауважити, що всі ці течії, крім суто академічного, мають широке практичне значення, особливо в техніці, де через малий зазор між стінками течія має ламінарний характер.

Друга група – це течії, що допускають приблизні рішення, за яких окремими членами можна знехтувати:

- течії за дуже малих чисел Re , коли можна відкинути всі інерційні члени, тобто сили інерції в таких течіях значно менші сил в'язкості. Серед них – обтікання циліндра й кулі, течія Хіл – Шоу, течія мастила в підшипниках ковзання та ін.;
- течії за дуже великих чисел Re , коли можна відкинути в'язкісні члени.

Нижче наведемо декілька прикладів прямого рішення рівнянь Нав'є – Стокса.

7.5.2 Ламінарна течія в круглій циліндричній трубі (течія Хайзена – Пуазейля)

Цю течію вже розглядали в курсі «Гідравліка», коли був одержаний закон розподілення швидкості в перерізі труби, і на його основі були виведені всі основні формули для знаходження величини витрати рідини, втрат напору, середня й максимальна швидкості, коефіцієнт Коріюліса.

Потрібно відзначити, що й закон розподілення швидкості, і всі подальші визначення параметрів цієї течії були одержані експериментальним й емпіричним способом. Тепер цікаво б було перевірити ці результати методом прямого інтегрування основних рівнянь руху реальної рідини – рівнянь Нав'є – Стокса.

Для цього розглянемо нескінченно довгу пряму циліндричну трубу й течію в ній в'язкої рідини в ламінарному режимі (рис. 7.7).

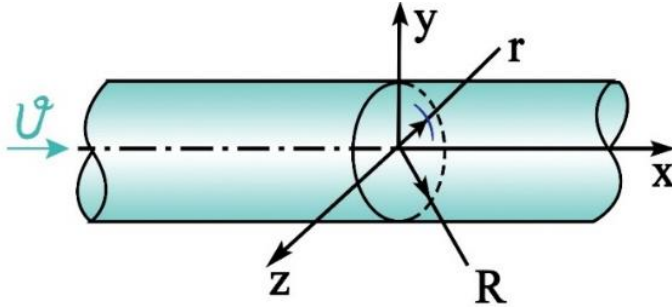


Рисунок 7.7 – До визначення течії Хайзена – Пуазейля

Течію розглянемо за таких умов:

- течія стала (тому члени $\frac{\partial V_x}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial V_y}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$);
- течія одномірна, тобто $V_x \neq 0$, $V_y = V_z = 0$.

Масовими силами X , Y , Z можна знехтувати.

Тепер запишемо рівняння Нав'є – Стокса й використаємо зазначені умови, а також зазначимо, що в наведеній нижче системі рівнянь усі підкресленні члени через зазначені вище умови, дорівнюють нулю. В останньому рівнянні два останні члени дорівнюють нулю через те, що $V_y = 0$ і $V_z = 0$, а тому й перший член дорівнює нулю.

$$\left\{ \begin{array}{l} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Тоді від системи залишилося (розділивши на ρ і замінивши $\frac{\partial p}{\partial x}$ на $\frac{dP}{dx}$)

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right). \quad (7.22)$$

Оскільки ліва частина цього рівняння є лише функцією x , а права – y і z , рівняння буде справедливим лише тоді, коли ліва й права його сторони будуть константами. Тому введемо таке співвідношення:

$$\frac{dp}{dx} = \text{const} = -\frac{\Delta P}{l}, \quad (7.23)$$

де $\Delta P = P_1 - P_2$ – перепад тиску на відрізку довжиною l за течією.

Знак « \leftarrow » означає зменшення тиску на напрямку x .

Тоді рівняння 7.22 перепишемо в такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = -\frac{\Delta P}{\mu \cdot l}. \quad (7.24)$$

Розв'язання цього рівняння має такий вигляд :

$$V_x = C \left(1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2} \right) = C \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

де R – радіус труби,

r – поточний радіус ($0 < r < R$).

Визначимо константу C

$$V_x = C - \frac{C \cdot y^2}{R^2} - \frac{C \cdot z^2}{R^2}; \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = -\frac{2C}{R^2}; \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = -\frac{2C}{R^2}.$$

тоді

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = -2 \frac{2C}{R^2} = \frac{-\Delta P}{\mu \cdot l}.$$

Звідси

$$C = \frac{\Delta P R^2}{4\mu \cdot l},$$

тоді

$$V_x = \frac{\Delta P R^2}{4\mu \cdot l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (7.25)$$

або

$$V_x = \frac{\Delta P}{4\mu \cdot l} (R^2 - r^2), \quad (7.26)$$

де r – поточне значення аргументу.

Обидва останні рівняння є законом розподілення швидкості в круглій циліндричній трубі за її ламінарної течії.

Як бачимо, швидкість рідини в цьому прикладі змінюється в перерізі по квадратичній параболі. Видно, що він повністю ідентичний закону, наведеному в курсі «Гідравліка».

Тепер, маючи цей закон, можна повторити всі подальші розрахунки течії – визначити V_{\max} , $V_{\text{ср}}$, Q , ΔP , τ , λ тощо. Але навряд це доцільно робити, оскільки ті, хто бажають, можуть знайти це в конспекті лекцій з гідравліки. Наведемо лише для довідки кінцеві результати, усебічно характеризуючи течію Хайзена – Пуазейля. Насамперед,

закон розподілення швидкості $V = \frac{\Delta P}{4\mu \cdot l} (R^2 - r^2)$ – парабола

другого ступеня, $V_{\max} = \frac{\Delta P}{4\mu \cdot l} R^2$ – на осі труби, $V_{\text{ср}} = \frac{V_{\max}}{2}$.

Витрата рідини $Q = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta P}{8\mu \cdot l} R^2$ – формула Хайзена

– Пуазейля (1839 р.).

Втрата енергії $\Delta h = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g}$ – формула Дарсі –

Вейсбаха, де $\frac{64}{\text{Re}} = \lambda$ – коефіцієнт втрати енергії на довжині.

$\tau = \frac{\Delta P}{2\mu \cdot l} r (y = kx)$ – закон розподілення дотичних

напружень.

Коефіцієнт Кориоліса $\alpha = 2$, що означає, що дійсна кінетична енергія рідини в круглій циліндричній трубі у 2 рази більша, ніж підрахована по $V_{\text{сеп}}$.

7.5.3 Ламінарна течія між двома паралельними стінками.

У попередньому розділі було показано, що рівняння Нав'є – Стокса для течії Хайзена – Пуазейля зведене до такого рівняння:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right),$$

або, якщо позначити

$$\frac{dp}{\partial x} = \text{const} = \frac{-\Delta P}{\mu \cdot l},$$

то одержимо лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \frac{-\Delta P}{\mu \cdot l}.$$

У разі течії між двома паралельними пластинами зміна швидкості буде відбуватися лише в напрямку, нормальному до пластини, тобто в напрямі за y (рис. 7.8).

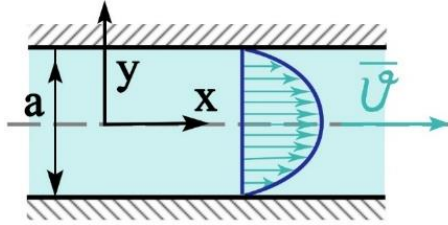


Рисунок 7.8 – Ламінарна течія між двома паралельними стінками

Тому попереднє рівняння може бути ще спрощене

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{-\Delta P}{\mu \cdot l} \quad (7.27)$$

Граничними умовами для такої течії будуть за $y = \pm \frac{a}{2}$, $V_x = 0$,

$$dV_x = -\frac{\Delta P}{\mu \cdot l} y dy,$$

тоді

$$V_x = -\frac{\Delta P}{2\mu \cdot l} y^2 + c,$$

$$0 = -\frac{\Delta P}{2\mu \cdot l} \frac{a^2}{4} + c, \text{ звідси } c = \frac{\Delta P}{2\mu \cdot l} \frac{a^2}{4}.$$

Отже, маємо

$$V_x = -\frac{\Delta P}{2\mu \cdot l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) \quad (7.28)$$

Останнє рівняння показує, що епурою швидкості ламінарної течії між двома паралельними й нерухомими пластинами є квадратична парабола.

Із неї неважко встановити, що за умови $y=0$,

$$V = V_{\max} = \frac{\Delta P \cdot a^2}{8\mu \cdot l},$$

що у два рази менша, ніж у круглій

циліндричній трубці за умови, якщо $R = a$.

Визначимо величини витрати Q через переріз шириною « b » (рис. 7.9)

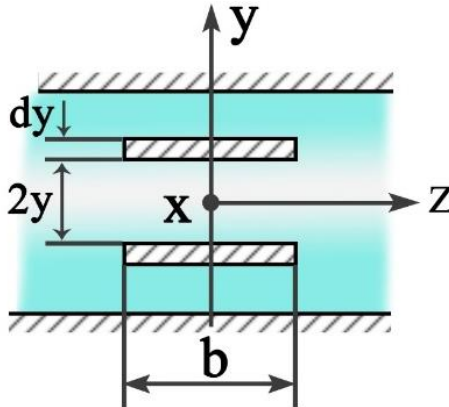


Рисунок 7.9 – До визначення витрати через переріз

$$Q = VdS = \frac{\Delta P}{8\mu \cdot l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) 2dy \cdot b.$$

$$Q = \frac{\Delta P \cdot b}{\mu \cdot l} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) dy = \frac{\Delta P \cdot b}{\mu \cdot l} \left(\frac{a^2}{4} \left| \frac{a}{2} \right. - \frac{y^3}{3} \right) = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} a^3 \cdot b.$$

Витрата на одиницю ширини $b = 1$

$$Q = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} a^3. \quad (7.29)$$

$$V_{\text{сеп}} = \frac{Q}{a} = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} a^2, \quad \text{або} \quad V_{\text{сеп}} = \frac{2}{3} V_{\text{max}}. \quad \text{У круглій}$$

циліндричній трубці $V_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} V_{\text{max}}.$

Втрати енергії в такій течії можна одержати з формули для $V_{\text{сеп}}$

$$\Delta P = \frac{12\mu \cdot b \cdot V_{\text{сеп}}}{a^2},$$

а падіння тиску на одиницю довжини (гідравлічний уклін) буде

$$\frac{dP}{dl} = \frac{12\mu}{a^2} V_{\text{сеп}}.$$

7.5.4 Течія Куетта

Течія Куетта – це плоска ламінарна течія між двома паралельними пластинами, одна із яких рухається в тому чи іншому напрямку відносно до течії протікання V зі швидкістю \bar{U} (рис. 7.10)

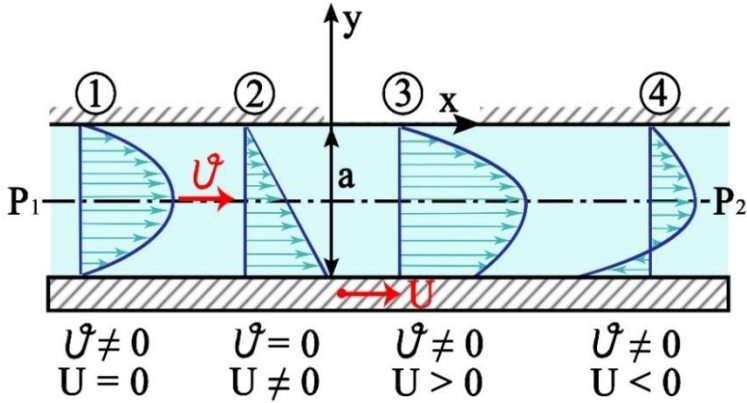


Рисунок 7.10 – Плоска ламінарна течія між двома паралельними пластинами (Куетта)

Диференціальне рівняння Нав'є – Стокса в цьому разі зводиться до одного диференціального рівняння (аналогічно попередній течії)

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2 V_x}{dy^2}. \quad (7.30)$$

Граничними умовами для такої течії будуть:
у разі $y = 0$ $V_x = 0$, якщо $y = -a$ $V_x = U$,
де U – швидкість руху пластини.

Розв'язання рівняння 7.30 для цих граничних умов має такий вигляд:

$$V_x = \frac{y}{a} U - \frac{a^2}{2\mu} - \frac{dP}{dx} \frac{y}{a} \left(1 - \frac{y}{a} \right). \quad (7.31)$$

У разі, коли $\frac{dP}{dx} = 0$, закон розподілення швидкості буде

$$V_x = \frac{y}{a} U . \quad (7.32)$$

Це так звана «фрикційна» течія (варіант 2 на рис. 7.10).

Навпаки, коли $U = 0$, а $\Delta P = P_1 - P_2 \neq 0$, буде так звана «напірна» течія (варіант 1 на рис. 7.10).

Зрозуміло, що складання напірної та фрикційної течій дає сумарну течію, закон розподілення швидкості репрезентовано на рисунку під номером 3.

Четвертий варіант течій, поданий під номером 4, буде тоді, коли $\Delta P > 0$, а напрям руху пластини буде проти швидкості протікання \bar{V} , тобто $-U$. На рисунку видно, що в цьому разі виникає зворотна течія в зоні, що прилягає до рухомої поверхні.

Течія Куетта з позитивним градієнтом тиску $\frac{dP}{dy} > 0$

в основних рисах схожа з течією мастила у вузькій щіліні між цапфою та підшипником і більш детально розглянута в розділі «Гідродинамічна теорія змащування».

Перелік питань до розділу 7

1 В'язкість, як властивість реальної рідини, якісні та кількісні характеристики.

2 Рівняння руху в'язкої рідини в напругах.

3 Властивість дотичних і нормальних напруг у реальній рідині.

4 Парність дотичних напруг.

5 Нормальні напруження в ідеальній і реальній рідинах. Причини виникнення додаткових нормальних напруг у стискуваній і нестискуваній реальних рідинах.

6 Тензор напружень.

7 Рідини ньютонівські й реологічні. Узагальнений закон Ньютона.

8 Рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є – Стокса) для нестискуваної та стискуваної рідини.

9 Загальні підходи до можливості інтегрування рівнянь Нав'є – Стокса. Випадки спрощення рівнянь.

10 Ламінарна течія в круглій циліндричній трубі (течія Хайгена – Пуазейля)

11 Ламінарна течія між двома паралельними стінками.

12 Течія напірна та фрикційна.

13 «В'язкі» й «конвективні» члени в рівняннях Нав'є – Стокса.

8 ТУРБУЛЕНТНА ТЕЧІЯ

8.1 Основні підходи й характеристики

Турбулентна течія характеризується насамперед неупорядкованим, хаотичним рухом окремих своїх елементарних частинок. Ці частинки, рухаючись у загальному напрямку течії, одночасно можуть додатково рухатись у будь-якому іншому напрямку, зокрема і в протилежному. Характерно, що ці додаткові рухи відбуваються з хаотичним переплетінням напрямків і пульсацій величини швидкості.

Тому будемо відрізняти швидкості окремих частинок рідини – істинні, миттєві v в даній точці від швидкостей пульсацій Δv_x , Δv_y , Δv_z і швидкостей осереднених за часом або площею \bar{v}_x , \bar{v}_y , \bar{v}_z .

$$\text{Тобто: } v = \bar{v} + \Delta v, \quad v_x = \bar{v}_x + \Delta v_x, \quad v_y = \bar{v}_y + \Delta v_y,$$

$$v_z = \bar{v}_z + \Delta v_z,$$

де v – повна, істинна або миттєва швидкість,

v_x , v_y , v_z – її компоненти,

\bar{v} , \bar{v}_x , \bar{v}_y , \bar{v}_z – осереднені а часом швидкості,

Δv , Δv_x , Δv_y , Δv_z – пульсації швидкості.

Аналогічно для тиску

$$P = \bar{P} + \Delta P.$$

Друга особливість турбулентної течії – вона завжди за істинною швидкістю – течія нестала, що значить, що в ній швидкість $v = f(x, y, z, t)$ і тиск $P = f(x, y, z, t)$. Але для більшості практичних потреб домовились її розглядати як

течію, що складається з течії осередненої за часом і течії пульсаційної.

Швидкість, осереднену за часом, визначають такою умовою (рис. 8.1):

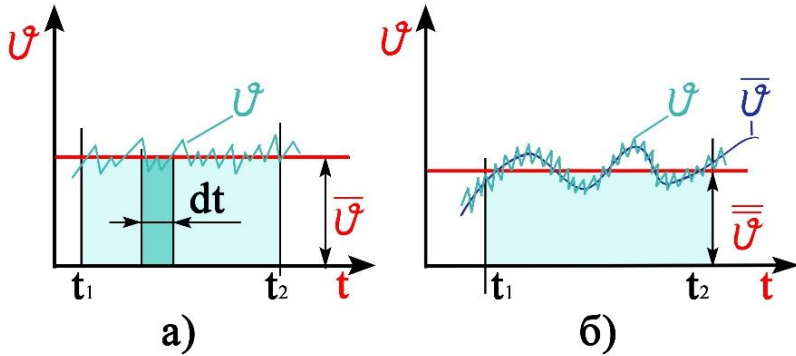


Рисунок 8.1 – Осереднення швидкості за часом

На рисунку 8.1 репрезентовані умовні записи істинної швидкості течії в точці за період $t_2 - t_1$. З умови однаковості площ під істинною кривою швидкості та осередненою запишемо (для «а»)

$$\bar{v}(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt.$$

Тоді

$$\bar{v} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt.$$

Інколи осереднення швидкості необхідно робити двічі, як показано на рисунку 8.1б, де вона позначена $\bar{\bar{v}}$.

Аналогічно осереднюються й компоненти швидкості,

$$\text{наприклад } \overline{v_x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v_x \cdot dt.$$

Турбулентну течію, у якої середня швидкість є сталою ($\overline{v} = const$), називають квазісталою, а саму осереднену течію – сталою.

Кінетична енергія осередненої течії $\frac{\overline{v}^2}{2g}$ й кінетична

енергія окремо пульсаційної течії $\frac{\Delta v^2}{2g}$ в сумі становлять

істинну кінетичну енергію турбулентної течії. Очевидно, що кінетична енергія пульсаційного руху пропорційна величинам $\overline{\Delta v_x^2}$, $\overline{\Delta v_y^2}$, $\overline{\Delta v_z^2}$, де кожна величина є середньою квадратичною пульсацією швидкості.

Якщо кінетична енергія всіх трьох пульсацій однакова, тобто

$$\overline{\Delta v_x^2} = \overline{\Delta v_y^2} = \overline{\Delta v_z^2},$$

то таку турбулентність називають ізотропною.

А якщо ця умова виконується в усіх точках турбулентної течії, то таку турбулентність називають однорідною та ізотропною.

Витрату рідини через живий переріз Q визначають за відомою залежністю $Q = v_{сеп} \cdot S$, але під швидкістю $v_{сеп}$ за турбулентної течії потрібно розуміти осереднену за часом, а потім осереднену за площею S .

8.2 Диференціальні рівняння руху турбулентної течії (рівняння Рейнольдса)

Турбулентна течія, незважаючи на її складність і невизначеність до кінця фізики турбулентності, усе одно описана загальними законами механіки в'язкої рідини, зокрема рівнянням Нав'є – Стокса. Водночас точна постановка задачі щодо інтегрування цих рівнянь для турбулентної течії не має сенсу, оскільки неможливо коректно задати граничні й початкові умови.

Іншими словами, в рівняннях Нав'є – Стокса потрібно оперувати істинними параметрами (швидкість і тиск), які насправді складаються з осереднених значень і пульсацій цих параметрів, про які сьогоденні знань недостатньо. Тому поки що вимушені замінювати в розрахунках істинні, миттєві параметри осередненими й виділяти окремо як додатки, пульсації.

Одержані в такий спосіб і рівняння руху турбулентної течії – рівняння Рейнольдса.

Для скорочення математичних викладок проведено всі перетворення лише з першим рівнянням Нав'є – Стокса й результати розповсюджено на друге й третє рівняння. Масовими силами знехтуємо.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

Підкреслимо, що до цього рівняння входять істинні, миттєві значення швидкостей і тиску. Підставимо замість кожного з них їх значення через осередненні й пульсаційні величини та проведемо операції осереднення.

Перед цим необхідно зазначити, що в математиці розроблені спеціальні методи проведення математичних операцій з осередненими функціями. Саме за цими

правилами зроблені перетворення членів рівняння Нав'є – Стокса.

Перепишемо вищенаведене рівняння так:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial(v_x \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_x \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_x \cdot v_z)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta^2 v_x.$$

Після проведення операції осереднення, одержимо

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_y})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_z})}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \Delta^2 \bar{v}_x.$$

Вважаючи течію квазісталою (а це означає, що осереднені члени стали сталими, і їх пульсації дорівнюють нулю), зробимо з одним із членів таке перетворення:

$$\begin{aligned} \overline{v_x \cdot v_x} &= \overline{(v_x + \Delta v_x)(v_x + \Delta v_x)} = \overline{\bar{v}_x \cdot \bar{v}_x + 2\bar{v}_x \Delta \bar{v}_x + \Delta \bar{v}_x^2} = \\ &= \bar{v}_x \cdot \bar{v}_x + 2\bar{v}_x \Delta \bar{v}_x + \Delta \bar{v}_x^2 \end{aligned}$$

Оскільки у квазісталий течії $\overline{\Delta v_x} = \bar{v}_x + \overline{\bar{v}_x}$, де останній член дорівнює нулю, остаточно одержимо

$$\overline{v_x \cdot v_x} = \bar{v}_x \cdot \bar{v}_x + \Delta \bar{v}_x^2 = \bar{v}_x \cdot \bar{v}_x + \overline{\Delta v_x \cdot \Delta v_x}.$$

Використовуючи цей результат і подібні йому результати для членів $(v_x \cdot v_y)$ і $(v_x \cdot v_z)$ і, підставивши їх у рівняння, одержимо

$$\frac{\partial(\bar{v}_x \cdot \bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_z})}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{v}_x - \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_x})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_y})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_z})}{\partial z}$$

а використавши осереднене рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0$$

будемо мати

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \Delta^2 \bar{v}_x - \frac{\partial (\overline{v_x \cdot v_x})}{\partial x} - \frac{\partial (\overline{v_x \cdot v_y})}{\partial y} - \frac{\partial (\overline{v_x \cdot v_z})}{\partial z}$$

В остаточному вигляді рівняння Рейнольдса в декартовій системі координат записують так:

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \Delta^2 \bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho \Delta v_x \Delta v_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho \Delta v_x \Delta v_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho \Delta v_x \Delta v_z}) \\ \rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \mu \Delta^2 \bar{v}_y + \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho \Delta v_y \Delta v_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho \Delta v_y \Delta v_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho \Delta v_y \Delta v_z}) \\ \rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \Delta^2 \bar{v}_z + \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\rho \Delta v_z \Delta v_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho \Delta v_z \Delta v_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho \Delta v_z \Delta v_z}) \end{aligned}$$

Розглянемо фізичний зміст членів рівнянь Рейнольдса.

Зліва – це питомі сили інерції або напруження, створені конвективними прискореннями. Сила інерції від локального прискорення $\frac{\partial v}{\partial t}$ відсутня, оскільки вважали рух квазісталим. Усі швидкості – осереднені.

Справа – це зовнішні сили (напруження), створені нормальним напруженням \bar{P} й дотичними напруженнями (говорять – «в'язкі члени») й дев'ять останніх членів – це поверхневі напруження, створені пульсаціями швидкості (турбулентні напруження – нормальні й дотичні). Масовими силами X , Y , Z було знехтувано, про що говорилося раніше.

Порівняємо рівняння Рейнольдса з рівняннями руху в'язкої рідини в напругах (одне з них запишемо для порівняння):

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}.$$

Видно, що

$$\begin{aligned} \overline{P_{xx}^T} &= -\overline{\rho \Delta v_x \Delta v_x}, & \overline{\tau_{xy}^T} &= \overline{\tau_{yx}^T} = -\overline{\rho \Delta v_x \Delta v_y}, \\ \overline{P_{yy}^T} &= -\overline{\rho \Delta v_y \Delta v_y}, & \overline{\tau_{xz}^T} &= \overline{\tau_{zx}^T} = -\overline{\rho \Delta v_x \Delta v_z}, \\ \overline{P_{zz}^T} &= -\overline{\rho \Delta v_z \Delta v_z}. & \overline{\tau_{yz}^T} &= \overline{\tau_{zy}^T} = -\overline{\rho \Delta v_y \Delta v_z}. \end{aligned}$$

Усі ці додаткові турбулентні напруги являють собою один тензор T – тензор турбулентних напруг

$$T = \begin{vmatrix} \overline{\rho \Delta v_x \Delta v_x} & \overline{\rho \Delta v_x \Delta v_y} & \overline{\rho \Delta v_x \Delta v_z} \\ \overline{\rho \Delta v_y \Delta v_x} & \overline{\rho \Delta v_y \Delta v_y} & \overline{\rho \Delta v_y \Delta v_z} \\ \overline{\rho \Delta v_z \Delta v_x} & \overline{\rho \Delta v_z \Delta v_y} & \overline{\rho \Delta v_z \Delta v_z} \end{vmatrix}.$$

Якщо врахувати значення напруг, раніше встановлених для ідеальної рідини, в'язкої рідини й додаткові турбулентні напруги, то повне значення нормальних і дотичних напруг будуть мати такий вигляд (за осередненими компонентами):

$$\begin{aligned}
 P_{xx} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - \rho(\overline{\Delta v_x \cdot \Delta v_x}), & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) - \rho(\overline{\Delta v_x \cdot \Delta v_y}), \\
 P_{yy} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} - \rho(\overline{\Delta v_y \cdot \Delta v_y}), & \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) - \rho(\overline{\Delta v_x \cdot \Delta v_z}), \\
 P_{zz} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - \rho(\overline{\Delta v_z \cdot \Delta v_z}), & \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) - \rho(\overline{\Delta v_y \cdot \Delta v_z}).
 \end{aligned}$$

Для того, щоб рівняння Рейнольдса були замкненою системою, необхідно ввести ще шість додаткових рівнянь, які пов'язували б турбулентні пульсації та напруги із осередненими швидкостями й осередненим тиском.

Беручи до уваги, що рівняння Рейнольдса сьогодні здебільшого інтегруються чисельними методами, проблему рівнянь, яких не вистачає, вирішують методом вибору й використання так званих «моделей турбулентності».

Це поняття означає сукупність емпіричних і напівемпіричних співвідношень на основі напівемпіричної теорії турбулентності.

На сьогодні розроблено достатньо моделей турбулентності диференціального й феноменологічного типів, що дає можливість обирати ту модель, яка найкраще підходить до того чи іншого фізичного процесу. Наприклад, для розрахунків гідродинамічних течій із великими швидкостями, найбільш підходить модель « $k-\varepsilon$ », що перевірено великою кількістю виконаних розрахунків та підтверджено експериментально.

8.3 Напівемпірична теорія турбулентності на прикладі течії в трубі

Оскільки більшість моделей турбулентності ґрунтуються на підходах напівемпіричної теорії

турбулентності Рейнольдса, зупинимося на деяких основних її уявленнях.

Спочатку зазначимо, що ця теорія постійно ґрунтується на експериментальні дані, на основі яких будують розрахункові моделі.

Саму течію розглянемо на прикладі турбулентної течії вздовж нескінченної плоскої або круглої труби (рис. 8.2)

$$\bar{v}_x \neq 0, \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0.$$

Течію будемо вважати квазісталою, тому $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} = 0$,

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \neq 0 \quad \bar{v}_x = f(y).$$

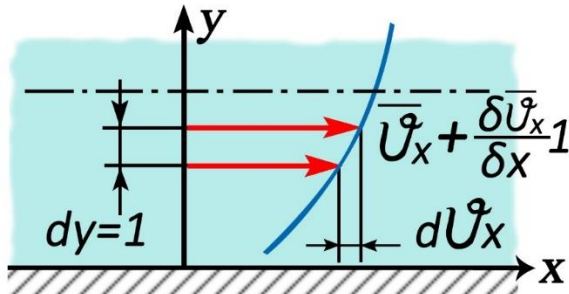


Рисунок 8.2 – Турбулентна течія вздовж нескінченної плоскої або круглої труби

У результаті пульсаційного руху частинки, рухаючись з осередненою швидкістю \bar{v}_x в напрямку x , за час dt перемістяться в поперечному напрямку на відстань l , яку в подальшому будемо вважати за шлях змішування.

Частинка, що мала до цього швидкість \bar{v}_x , через градієнт швидкості одержить добавку на величину

$$d\bar{v}_x = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} l.$$

У результаті в напрямку основного руху (по x) відбудеться зміна кількості руху, що зумовлює появу додаткового спротиву руху рідини. Це означає, що через деяку площу dS , спрямовану вздовж основної течії, за час dt пройде маса рідини

$$dm = \rho \cdot dS \Delta \bar{v}_y \cdot dt,$$

а зміна кількості руху в напрямку X цієї маси, що перемістилася на довжину l , буде

$$dm \cdot d\bar{v}_x = \rho \cdot dS \Delta \bar{v}_y \cdot dt \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} l.$$

Згідно з теоремою імпульсів зміна кількості руху маси dm за час dt дорівнює імпульсу сили за цей самий проміжок часу, тобто

$$dm \cdot d\bar{v}_x = F \cdot dt,$$

де F – сила, паралельна напрямку основної течії, а її питома величина (на одиниці площі) дорівнює

$$\frac{F \cdot dt}{dS \cdot dt} = \tau_T = \frac{\rho \cdot dS \Delta \bar{v}_y \cdot dt \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} l}{\partial y \cdot dt}.$$

Якщо допустити, що Δv_y і Δv_x – величини одного й того самого порядку, тобто $\Delta v_y \approx \Delta v_x$, то приблизно можна вважати, що

$$\tau_T = \rho(\Delta v_x)^2 = \rho \cdot l^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2,$$

(вважаючи, що $dy = l$)

τ_T – турбулентна додаткова напруга в турбулентній квазісталій течії. Причина її виникнення – поперечний рух частинок рідини (пульсації), у результаті чого в течії постійно відбувається обмін кількості руху елементарних мас.

Необхідно звернути увагу, що у формулі відсутній коефіцієнт в'язкості μ , що означає іншу причину виникнення напруги в напрямку течії без ньютонівської сили тертя.

Тоді повну дотичну напругу тепер можна репрезентувати як суму

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} + \rho \cdot l^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2,$$

або $\tau = \tau_L + \tau_T$.

Експериментально встановлено, що картина турбулентної течії істотно відрізняється від ламінарної (рис. 8.3).

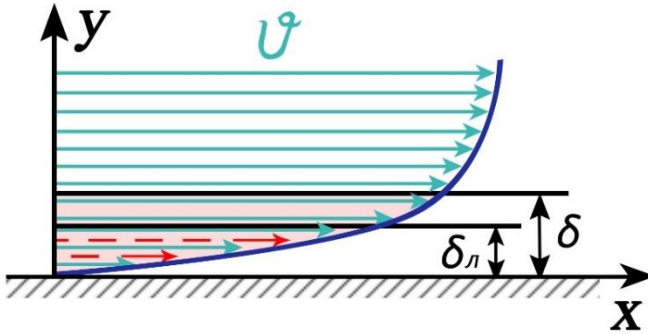


Рисунок 8.3 – Турбулентна та ламінарна течії

Видно, що біля твердої поверхні чітко виділяється граничний шар товщиною δ , течія в якому з великим градієнтом швидко наростає до значення 95–97% від швидкості в її ядрі.

У граничному шарі, у якому течія найчастіше всього турбулентна, можна виділити ще тонший шар, течія в якому ламінарна і саме в ньому через в'язкість відбувається силова взаємодія течії та твердої поверхні, утворюються вихори.

У турбулентному ядрі течія має дуже малий градієнт швидкості, в'язкість проявляє себе слабо й тому можна нею знехтувати.

У ламінарному підшарі найбільш чітко проявляє себе закон тертя Ньютона

$$\tau_{л} = \mu \frac{dv}{dn}$$

і виникає напруга τ_0 на твердій поверхні, що насамперед чергу важлива для практики.

Установимо порядок товщини $\delta_{л}$. На основі практичних досліджень установлено, що між $\delta_{л}$ і

фізичними константами рідини μ і ρ , а також величиною τ_o функціональна залежність має вигляд:

$$\delta_{л} = \alpha \cdot \mu^a \cdot \rho^b \cdot \tau_o^c,$$

де α – деяка безрозмірна константа,

а, b і c – поки що невідомі показники ступеня.

Для їх установлення використаємо відому залежність із теорії розмірностей, підставивши розмірності кожного з параметрів:

$$\begin{aligned} \delta_{л} [\text{М}], \mu \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right] &= \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right], \\ \rho \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right], \tau_o \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \right] &= \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} \right]. \end{aligned}$$

Тоді можна записати

$$[\text{М}] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right]^a \cdot \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]^b = \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} \right]^c.$$

Прирівнявши зліва й справа в рівнянні показники ступенів за умови м, кг і сек, одержимо такі рівняння:

$$[\text{М}] = [\text{кг}^a \cdot \text{м}^{-a} \cdot \text{с}^{-a}] \cdot [\text{кг}^b \cdot \text{м}^{-3b}] \cdot [\text{кг}^c \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}],$$

$$\text{за } [\text{М}]: \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = -a - 3b - c, \\ 0 = a + b + c, \\ 0 = -a - 2c. \end{array} \right.$$

$$\text{за } [\text{кг}]:$$

$$\text{за } [\text{с}]:$$

Система – замкнена, три рівняння й три невідомих величини. Склавши друге з третім рівнянням, одержуємо

$$b = c, \text{ а перше з другим, одержуємо } b = c = -\frac{1}{2}. \text{ Тоді } a = 1.$$

Тому

$$\delta_{\text{л}} = \alpha \frac{\mu}{\sqrt{\rho \cdot \tau_0}}.$$

Позначимо $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ й назвемо v_* – динамічною

швидкістю, оскільки неважко встановити її розмірність.

Тоді

$$\delta_{\text{л}} = \alpha \frac{v}{v_*}.$$

Експериментально виявилось, що константа α є однією з найбільш характерних констант, що визначають турбулентну течію в трубах, і її величина для нашого прикладу дорівнює $\alpha = 11,5$.

Оцінімо величину відносної товщини ламінарного підшару

$$\frac{\delta}{r_0} = \alpha \frac{v}{v_*} \frac{v_{\text{max}}}{r_0 v_{\text{max}}} = \frac{\text{const}}{Re_T},$$

вважаючи, що величини α , v_{max} , τ_0 і ρ – константи, а

$$Re_T = \frac{v_{\text{max}} \cdot r_0}{v}.$$

Можна зробити висновок, в разі великих чисел Re товщина ламінарного підшару становить дуже малу частку від радіуса труби. І це дає можливість вважати, що профіль швидкості в підшарку є прямолінійним.

Нехтуючи його товщиною, устанavimo закон розподілення швидкості v_x по перерізу труби й величину τ_0 .

Для цього, замінивши в загальновідомій формулі $\Delta P = \lambda \frac{l}{a} \frac{\rho \cdot v^2}{\nu}$ величину λ на $\frac{C_1}{\sqrt[4]{\text{Re}}}$, одержуємо формулу Прандтля

$$\Delta P = \frac{C_1}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \frac{l}{r_0} \rho \frac{v_{cep}^2}{2}$$

і, скориставшись другою відомою формулою

$$\Delta P = 2 \frac{l}{r_0} \tau_0,$$

та прирівнявши ΔP , одержуємо

$$\frac{C_1}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \frac{l}{r_0} \rho \frac{v_{cep}^2}{2} = 2 \frac{l}{r_0} \tau_0, \text{ звідси}$$

$$\tau_0 = \frac{C_1}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \cdot \rho \frac{v_{cep}^2}{4} = \frac{C_2}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \rho \cdot v_{cep}^2 = C_2 \cdot \rho \cdot v^{\frac{1}{4}} \cdot v_{cep}^{\frac{7}{4}} \cdot r_0^{-\frac{1}{4}}.$$

За аналогією з ламінарною течією в трубі (Хайгена – Пуазейля) зробимо допущення, що швидкість течії в трубі й під час турбулентного режиму підлягає також степеневому закону

$$v = v_{\max} \left(\frac{y}{r_0} \right)^n$$

Тоді, вважаючи, що максимальна швидкість пропорційна середній швидкості, запишемо

$$v_{\max} = C_3 \cdot v_{\text{сер}},$$

де C_3 – константа, звідки $v_{\text{сер}} = \frac{v_{\max}}{C_3} = \frac{v}{C_3} \left(\frac{r_0}{y} \right)^n$.

Підставивши $v_{\text{сер}}$, одержимо

$$\tau_0 = C_4 \cdot \rho \cdot v^{\frac{1}{4}} \cdot v^{\frac{7}{4}} \frac{r_0^{4n - \frac{1}{4}}}{y^{\frac{7}{4}n}}.$$

На основі практичних даних можна зробити припущення, що розміри труби не впливають на величину дотичного напруження на стінці τ_0 .

Тоді, прирівнявши показник ступеня n за r_0 нулю, одержимо

$$\frac{7}{4}n - \frac{1}{4} = 0, \text{ звідки } n = \frac{1}{7}.$$

Тому закон розподілення швидкості в ядрі турбулентної течії можна записати в такому вигляді:

$$v = v_{\max} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{\frac{1}{7}}.$$

Ураховуючи, що $y = r_0 - r$,

$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{7}}.$$

Цей закон одержав назву «Закон ступеня $\frac{1}{7}$ », тобто параболічний закон ступеня $\frac{1}{7}$.

Пізніші дослідження показали, що показник $n = \frac{1}{7}$ не є універсальним і залежить від діапазонів чисел Re (табл. 8.1)

Таблиця 8.1 – Залежність $n = f(Re)$

$Re \sim$	до 2 300	10^4	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6
n	—	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{v_{max}}{v_{сер}}$	2	1,264	1,235	1,194	1,173	1,156

Із таблиці видно, що чим більший ступінь турбулентності, тим менша різниця між середньою та максимальною швидкостями, тобто епюра швидкості в ядрі течії все більше наближається до епюри ідеальної рідини.

Із таблиці також видно, що за умови $n = \frac{1}{7}$ константа

$$C_3 = \frac{v_{max}}{v_{сер}} = 1,235. \text{ Підставивши її у формулу, одержуємо}$$

після перетворень

$$\tau_o = 0.0225\rho \cdot v^2 \left(\frac{v}{v \cdot y} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Можна також зробити висновок, що степеневий закон розподілення швидкості в ядрі турбулентної течії не є універсальним, але під час використання даних таблиці 1 він дає прийнятні для практики результати.

Необхідно також мати на увазі, що разом із ним існує універсальний закон розподілення швидкості, так званий «логарифмічний закон»

$$\frac{v}{v_*} = 5.75 \lg \frac{y \cdot v_*}{\nu} + 5.5,$$

що застосовують на практиці рідше.

На підставі продемонстрованого вище аналізу турбулентної течії в круглій циліндричній трубі методом використання підходів напівемпіричної теорії турбулентності можна скласти уявлення й про підходи до розроблення сучасних моделей турбулентності та їх вагомості в разі використання чисельних методів розрахунків турбулентних течій.

Перелік питань до розділу 8

- 1 Турбулентна течія – основні підходи і характеристики.
- 2 Течія «осереднена» й «пульсаційна», нестала й квазістала, турбулентність ізотропна та однорідна.
- 3 Напівемпірична теорія турбулентності на прикладі течії в трубі. Спосіб перемішування, обмін кількостями руху й виникнення турбулентних напруг.
- 4 Закони розподілення осередненої швидкості в турбулентній течії, їх залежність від числа Рейнольдса.

- 5 Граничний шар і ламінарний підшар у турбулентній течії, його відносна товщина й залежність від числа Рейнольдса й шорсткості.
- 6 Диференціальні рівняння руху турбулентності течії рівняння Рейнольдса.
- 7 Тензор турбулентних пульсаційних напруг.

9 СИЛИ ВЗАЄМОДІЇ РІДИНИ Й ТВЕРДОЇ ПОВЕРХНІ

9.1 Класифікація сил взаємодії

Взаємодія в'язкої рідини й твердого тіла завжди зводиться до головного вектора всіх сил \bar{R} і до головного моменту M .

Нормальна до напрямку руху тіла складова головного вектора $\bar{R}n$ в загальному випадку складається з трьох сил:

A – Архімедової сили;

U – сили Жуковського;

In – нормальної складової інерційного спротиву.

Складова головного вектора за напрямком руху твердого тіла є сила опору \bar{F} . Вона складається з двох основних аспектів

$$F = F_T + P,$$

де F_T – сила опору тертя;

P – сила опору тиску.

За своєю природою сила опору тертя складається із трьох аспектів

$$F_T = F_r + F_{зш} + F_{мш},$$

де F_r – опір від гладкої поверхні;

$F_{зш}$ – опір, обумовлений загальною шорсткістю поверхні;

$F_{мш}$ – опір, обумовлений місцевою шорсткістю.

Природа сили опору тиску ще більш різноманітна:

$$P = P_{\phi} + P_i + P_x + P_{in},$$

де P_{ϕ} – сила опору форми (або вихровий опір), обумовлена утворенням вихорів формою тіла й перепадом тиску по довжині;

P_i – сила індуктивного опору. Виникає через перетікання рідини з одного боку тіла на протилежний і відхиляє силу Жуковського;

P_x – сила хвильового опору. Виникає під час руху зануреного тіла на невеликій відстані від вільної поверхні або напівзануреного по поверхні;

P_{in} – складова сили інерційного опору. Обумовлена зміною гідродинамічного тиску по поверхні тіла через локальні прискорення частинок рідини.

Необхідно зазначити, що не всі сили опору зумовлені в'язкістю рідини, яку в цілому називають «в'язким опором».

Індуктивний, хвильовий та інерційний опір трапляються і в нев'язкій рідині і їх називають «нев'язким опором».

Для знаходження величин усіх зазначених сил існує велика кількість аналітичних залежностей і теоретичних методів обчислення (диференціальних та інтегральних), а також їх визначення експериментальними методами, методом продування в аеро- та гідродинамічних трубах, басейнах і каналах.

Часто абсолютні величини сил перераховують на їх питомі значення у вигляді коефіцієнтів λ , ζ , C_y , C_x стосовно до динамічного напору.

Характерною рисою цих коефіцієнтів (як і самих сил) є їх залежність від форми та якості твердої поверхні, і від числа Re .

На рисунку 9.1 показана залежність коефіцієнта опору C_x для тіл циліндричної форми від числа Рейнольдса.

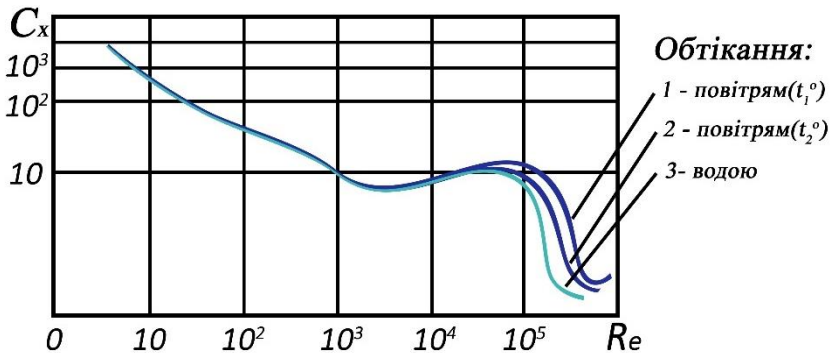


Рисунок 9.1 – Залежність коефіцієнта опору C_x для тіл циліндричної форми від числа Рейнольдса.

Видно, що зі збільшенням числа Re коефіцієнт C_x зменшується. Але характерно, що за значень $Re \approx 3 \cdot 10^5$ спостерігається різке падіння коефіцієнта опору. Це явище одержало назву «Криза опору» й зумовлене перебудовою точок відриву граничного шару.

9.2 Умови безвідривного обтікання твердої поверхні

Безвідривне обтікання твердої поверхні найбільш прийнятне з погляду забезпечення розрахункових значень сил взаємодії та мінімального опору руху в рідині. Для

забезпечення такого обтікання треба, щоб геометрична форма твердої поверхні й кінематичні параметри ліній течії співпадали.

Розглянемо виконання цієї умови для випадків нерухомої та рухомої поверхонь.

1 **Поверхня нерухома**, її рівняння $f(x, y, z) = 0$. Умовою безвідривного обтікання приймемо непроникливість стінки, тобто, щоб $\bar{v}_n = 0$, де \bar{v} – швидкість рідини, дотичної до поверхні.

Із цієї умови автоматично випливає, що $\cos(\bar{v}, \bar{n}) = 0$, де \bar{n} – нормаль до поверхні в даній точці.

Відомо, що

$$\cos(n, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{N},$$

тоді

$$\cos(n, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N} \text{ і } \cos(n, z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{N}.$$

Кут між вектором швидкості й нормаллю буде

$$\begin{aligned} \cos(v, n) &= \cos(v, x) \cdot \cos(n, x) + \cos(v, y) \cdot \cos(n, y) + \cos(v, z) \cdot \cos(n, z) = \\ &= \frac{v_x}{v} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{N} + \frac{v_y}{v} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N} + \frac{v_z}{v} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{N} = 0 \end{aligned}$$

Остаточно умова безвідривності буде мати такий вигляд:

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Як бачимо, аналітична умова безвідривності обтікання поверхні $f(x, y, z) = 0$ течією зі швидкістю $\vec{v}(x, y, z) = 0$ пов'язує параметри течії та поверхні в одне рівняння.

У разі обтікання потенційною течією можна переписати так:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0.$$

2 Поверхня рухома, нехай її рівняння буде $F(x, y, z, t) = 0$, рухається вона зі швидкістю $U(x, y, z, t) = 0$.

Умовою її безвідривного обтікання буде $\vec{v}_n = \vec{U}_n$, де \vec{U}_n – нормальна складова швидкості руху поверхні в точці М;

\vec{v}_n – нормальна складова швидкості течії в цій точці.

Розглянемо на поверхні точку М $(x, y, z, t) = 0$, яка за час dt перемістилася в інше місце – у точку М' $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Очевидно, що координати точки М', яка також лежить на поверхні, задовольняють рівняння поверхні $F(x + dx, y + dy, z + dz) = 0$.

Розкладемо цю функцію в ряд Тейлора й утримаємо лише ті члени, що містять перші похідні

$$F(x, y, z, t) + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0.$$

Згідно з попередньою умовою перший член дорівнює нулю. Тоді, розділивши всі члени на dt , одержимо

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

але $\frac{dx}{dt} = U_x$, $\frac{dy}{dt} = U_y$ і $\frac{dz}{dt} = U_z$.

Тоді

$$U_x \frac{\partial F}{\partial x} + U_y \frac{\partial F}{\partial y} + U_z \frac{\partial F}{\partial z} = - \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Із виразу для спрямувальних косинусів (див. для нерухомої поверхні) можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= N \cdot \cos(n, x), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N \cdot \cos(n, y), \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= N \cdot \cos(n, z). \end{aligned}$$

Крім того, візьмемо до уваги, що

$$U_x = U \cdot \cos(u, x), \quad U_y = U \cdot \cos(u, y), \quad U_z = U \cdot \cos(u, z).$$

Тоді

$$N \cdot U [\cos(U_x, x) \cdot \cos(n, x) + \cos(U_y, y) \cdot \cos(n, y) + \cos(U_z, z) \cdot \cos(n, z)] = - \frac{\partial F}{\partial t}$$

або $N \cdot U \cdot \cos(u, n) = - \frac{\partial F}{\partial t}$

і остаточно $N \cdot U_n = -\frac{\partial F}{\partial t}$ або

$$U_n = -\frac{\partial F / \partial t}{N}.$$

Отже, умовою безвідривного обтікання твердої поверхні, що рухається зі швидкістю U та обтікається рідиною, швидкість якої v , буде вираз

$$v_n = U_n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

У разі нерухомої поверхні $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ і тоді умова автоматично переходить у раніше одержану умову $v_n = 0$.

9.3. Сила взаємодії течії та стінок криволінійного каналу

Для вирішення цього завдання (рис. 9.2) виділимо контрольною поверхнею об'єм рідини (штрихова лінія) між твердими стінками й перерізами 1-1 і 2-2, та застосуємо до цього контрольного об'єму теорему про зміну кількості руху

$$d(\overline{mv}) = \overline{R} \cdot dt.$$

Для схеми на рисунку 9.2 перепишемо це рівняння так:

$$(\overline{m \cdot v_2} - \overline{m \cdot v_1}) = \rho \cdot Q(\overline{v_2} - \overline{v_1}) = \overline{R},$$

де \overline{R} – сила, що діє на потік рідини з боку стінок каналу.

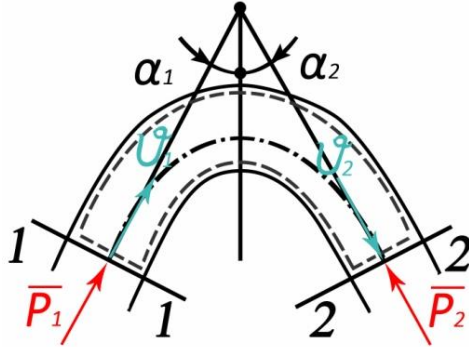


Рисунок 9.2 – До визначення сили взаємодії течії та стінок криволінійного каналу

У загальному вигляді $\overline{R} = \overline{R}_{ст} + \overline{R}_{дин}$ – статична й динамічна складові

$$\overline{R}_{ст} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{G},$$

де $\overline{P_1}$ і $\overline{P_2}$ – сили тиску, а \overline{G} – сила ваги.

$$\overline{R}_{дин} = \rho \cdot Q(\overline{v_2} - \overline{v_1}).$$

Напрямок сили $\overline{R}_{дин}$ краще визначати такою графічною побудовою (рис. 9.3):

а) – у разі, коли $|\overline{v_1}| = |\overline{v_2}|$ і $\alpha_1 = \alpha_2$.

б) – коли $|\overline{v_2}| > |\overline{v_1}|$ (течія конфузورها від 1-1 до 2-2) і коли $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Також потрібно мати на увазі, що на тверді стінки каналу від 1-1 до 2-2 діє сила $N_{дин}$, яка за величиною дорівнює $\bar{R}_{дин}$ і спрямована протилежно $\bar{R}_{дин}$.

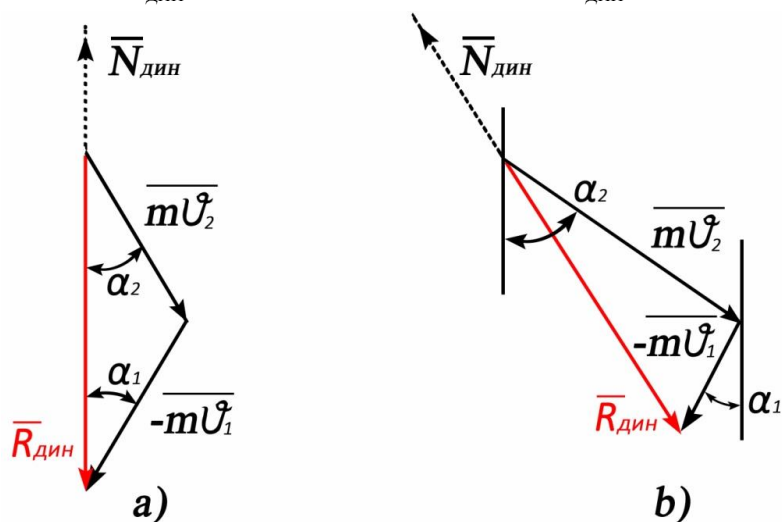


Рисунок 9.3 – Визначення напрямку сили $\bar{R}_{дин}$

У разі, коли криволінійний канал буде рухомим із швидкістю $\bar{v} = \bar{U} + \bar{W}$, величина динамічної сили буде

$$N_{дин} = -\rho \cdot Q(\bar{W}_1 - \bar{W}_2) + U_{ин} + U_{кор},$$

де $\bar{U}_{ин}$ і $\bar{U}_{кор}$ – сили інерції переносного руху й коріолісова, \bar{W}_1 і \bar{W}_2 – швидкості рідини відносно стінок каналу.

Звернемо увагу, що силу $N_{дин}$ використовують в техніці під час створення «реактивних» гідравлічних чи газових машин-турбін, насосів, компресорів.

9.4 Сила взаємодії струменя на нерухому й рухому стінку

1. Стінка нерухома (рис. 9.4).

$\bar{N}_{CT} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{G} = 0$, оскільки тиск в перерізах однаковий і дорівнює атмосферному, а силу ваги можна знехтувати

$$N_q = \rho \cdot Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1).$$

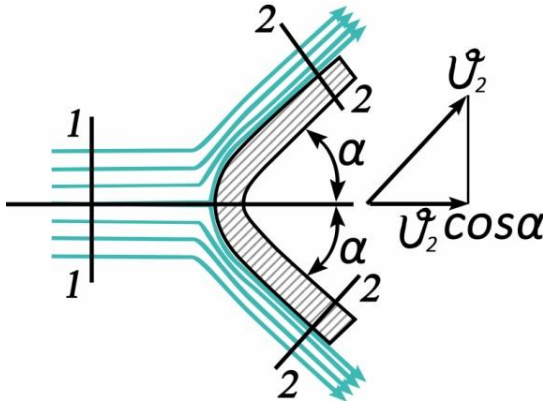


Рисунок 9.4 – До визначення сили взаємодії струменя на нерухому стінку

Оскільки тиск у перерізах 1-1 і 2-2 однаковий і дорівнює атмосферному, а перепадом висот z_1 і z_2 можна знехтувати, то із рівняння Бернуллі можна одержати $|\bar{v}_1| = |\bar{v}_2| = |\bar{v}|$, і можна переписати

$$N_q = \rho \cdot Q(\bar{v}_1 - \bar{v}_2 \cos \alpha) \text{ або } N_q = \rho \cdot Q \cdot \bar{v}(1 - \cos \alpha).$$

З останньої формули видно, що за умови $\alpha = 90^\circ$ (набігання струменя під кутом 90° до стінки) $N_q = \rho \cdot Q \cdot \bar{v}$, а якщо $\alpha = 180^\circ$, то сила взаємодії буде у два рази більшою – $N_q = 2\rho \cdot Q \cdot \bar{v}$ (рис. 9.5)

Потрібно зазначити, що «стінку» за схемою «б» використовують під час конструювання так званих «ковшових» або «активних» газових чи гідравлічних турбін, розташовуючи на диску лопаті у вигляді «ковшів» із кутом виходу рідини в 180° .

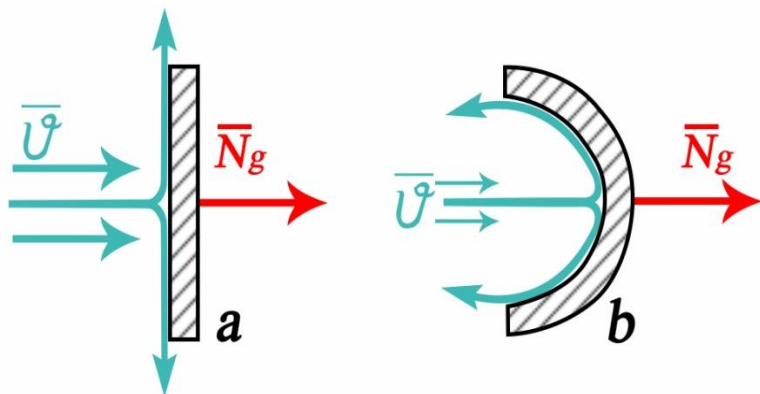


Рисунок 9.5 – Умови набігання струменя на стінку

2. Стінка рухома зі швидкістю \bar{U} .

У цьому разі рідина, що набігає на стінку зі швидкістю \bar{v} , після контакту зі нею, починає рухатися разом із її переносною швидкістю \bar{U} та відносною швидкістю \bar{W} , тому

$$\bar{v} = \bar{W} + \bar{U},$$

й сила їх взаємодій буде дорівнювати $\bar{N}_q = \rho \cdot Q \cdot \bar{W}$ (для кута 90°) і $\bar{N}_q = 2\rho \cdot Q \cdot \bar{W} = \bar{N}_{q\max}$ для кута взаємодії 180° .

Потужність, яку рідина передає стінці (для варіанту $\alpha = 90^\circ$) буде

$$P = N \cdot U = \rho \cdot Q \cdot W \cdot U = \rho \cdot Q(v - U) \cdot U = \rho \cdot Q \cdot v \cdot U - \rho \cdot Q \cdot U^2.$$

Видно, що коли тверда поверхня нерухома ($U = 0$), то і $P = 0$. Якщо $\bar{U} = \bar{v}$, то $N = 0$ і $P = 0$.

Визначимо оптимальне значення швидкості U , за якої величина потужності буде максимальною. Для цього похідну від функції прирівняємо до нуля.

$$\frac{\partial P}{\partial U} = \rho \cdot Q \cdot v - 2\rho \cdot Q \cdot U = 0.$$

Звідки $\rho \cdot Q \cdot v = 2\rho \cdot Q \cdot U = 0$ і $U = \frac{v}{2}$.

Тоді

$$P_{\max} = N \cdot U_{\text{opt}} = \rho \cdot Q \cdot v \frac{v}{2} - \rho \cdot Q \cdot v \frac{v^2}{4} = \frac{\rho \cdot Q \cdot v^2}{4}.$$

Запас кінетичної енергії струменя

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\rho \cdot Q \cdot v^2}{2} = 2P_{\max}.$$

Тобто, за умови оптимального значення швидкості руху стінки $U = \frac{v}{2}$ рідина зможе передати лише половину енергії, яку вона мала.

Цілком очевидно, що друга половина енергії втрачається разом із течією, яка сходиться від стінки після їх взаємодії.

9.5 Реакція від витікаючого струменя

Аналогічно попереднім прикладам, запишемо зміну кількостей руху об'єму рідини для перерізів 0-0 і 1-1 (рис. 9.6)

$$(mv)_0 - (mv)_1 = N,$$

звідки

$$N = -\rho \cdot Q = -\rho \cdot \omega_0 v,$$

де ω_0 – площа отвору.

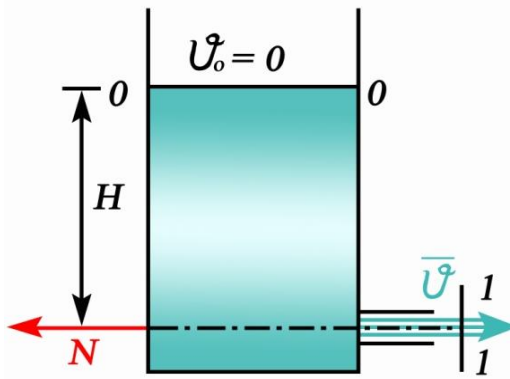


Рисунок 9.6 – До визначення сили реакції від витікаючого струменя

Відомо, що швидкість витікання дорівнює

$$v = \varphi \sqrt{2g \cdot H},$$

де H – розрахунковий напір,
 φ – коефіцієнт швидкості, який для примірних розрахунків можна прийняти за одиницю.

Тоді

$$N = -\rho \cdot \omega_0 \cdot 2g \cdot H = -2\omega \cdot \gamma \cdot H .$$

Остаточно

$$N = -2\omega \cdot \gamma \cdot H ,$$

де $\gamma \cdot H$ – величина гідростатичного тиску в центрі ваги площі перерізу струменя.

Тобто, реактивна сила спрямована в напрямку, протилежному швидкості струменя й у два рази більша від сили гідростатичного тиску на площу отвору, якби воно було закритим.

Зауважимо, що розглянута сила N є силою тяги реактивних двигунів літаків, ракет, водометних двигунів тощо.

9.6 Теорема М. Є. Жуковського про силову взаємодію потенціальної течії та твердого тіла

У 1906 році М. Є. Жуковський у своїй роботі «О присоединенных вихрях» уперше оприлюднив теорему про підіймальну силу крила літака, що стало значним внеском у розвиток теорії та практики вітчизняної, а також світової авіації.

Теорема має такий зміст: *силова взаємодія течії на циліндричне тіло будь-якої форми завжди зводиться до однієї сили, питома величина якої дорівнює добутку з густини рідини на циркуляцію швидкості по контуру*

навколо тіла й на швидкість натікаючої течії на нескінченності, тобто $X = 0$, $Y = \rho \cdot \Gamma \cdot v_\infty$.

Під питомою силою розуміють її величину, що діє на одиницю довжини циліндричної поверхні.

Схема обтікання для доведення теореми репрезентована на рисунку 9.7. Циліндричне тіло подано криловим профілем. До об'єму рідини, обмеженого поверхнею профілю й довільним замкненим контуром S навкруги профілю – застосуємо теорему імпульсів.

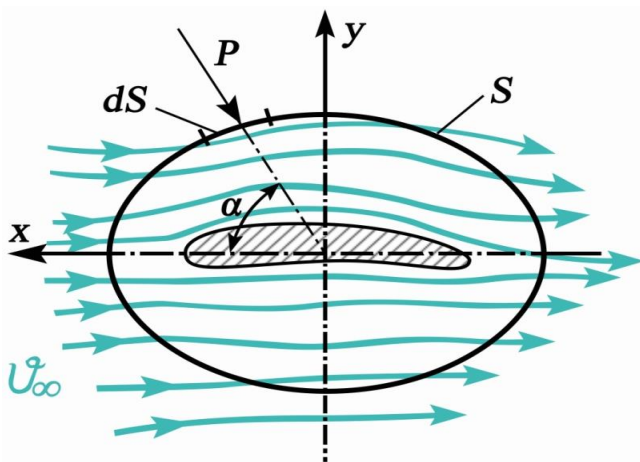


Рисунок 9.7 – Схема обтікання профілю

1 Проекції кількості руху рідин, що проходить за одиницю часу через контур S , можна записати так:

$$dK_x = -\oint_S v_x \cdot \rho \cdot v_n \cdot dS,$$

$$dK_y = -\oint_S v_y \cdot \rho \cdot v_n \cdot dS.$$

2 Проекції поверхневих сил, що діють по контуру S

$$dI_{px} = -\oint P \cdot dS \cdot \cos \alpha,$$

$$dI_{py} = -\oint P \cdot dS \cdot \sin \alpha.$$

3 На об'єм рідини, замкненим між контуром S і поверхнею твердого тіла з боку цього тіла діє сила $-F$ із проєкціями $-X$ і $-Y$ (беремо до уваги те, що на тіло з боку рідини діє сила F із проєкціями X і Y).

4 Силу ваги об'єму рідини й силу інерції цього об'єму можна з розрахунку виключити як неістотні.

Тоді теорему імпульсів для нашого об'єму рідини можна записати так:

$$\begin{cases} -\oint_S \rho \cdot v_n \cdot v_x \cdot dS = -x - \oint_S P \cdot dS \cdot \cos \alpha \\ -\oint_S \rho \cdot v_n \cdot v_y \cdot dS = -y - \oint_S P \cdot dS \cdot \sin \alpha \end{cases}.$$

Із рівнянням Ейлера $P_\infty + \frac{\rho \cdot v_\infty^2}{2} = P + \frac{\rho \cdot v^2}{2}$, прийнявши питому енергію течії на нескінченності за константу C , одержимо

$$P = C - \frac{\rho \cdot v^2}{2}$$

і підставимо в теорему імпульсів, виділивши сили X і Y , які ми хочемо знайти, а саме:

$$\begin{cases} X = -\oint_S \rho \cdot v_n \cdot v_x \cdot dS = C \int_S \cos \alpha \cdot dS + \oint_S \rho \frac{v^2}{2} \cos \alpha \cdot dS \\ Y = -\oint_S \rho \cdot v_n \cdot v_y \cdot dS = C \int_S \sin \alpha \cdot dS + \oint_S \rho \frac{v^2}{2} \sin \alpha \cdot dS \end{cases}.$$

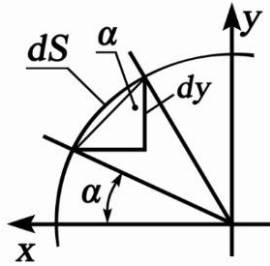


Рисунок 9.8 – Репрезентування перетворень

Урахуємо, що $\sin \alpha = \frac{dx}{dS}$ і $\cos \alpha = \frac{dy}{dS}$ (пояснення на схемі рис. 9.8), тоді

$$\oint_S \cos \alpha \cdot dS = \oint_S \frac{dy}{dS} dS = 0 \quad \text{і} \quad \oint_S \sin \alpha \cdot dS = \oint_S \frac{dx}{dS} dS = 0,$$

Оскільки під час проходження по замкненому контуру S змінні аргументи x і y повертаються до свого первинного значення.

Тоді інші інтеграли дорівнюють нулю й залишається

$$\begin{cases} X = \rho \oint_S \left(\frac{v^2}{2} \cos \alpha - v_n \cdot v_x \right) dS \\ Y = \rho \oint_S \left(\frac{v^2}{2} \sin \alpha - v_n \cdot v_y \right) dS \end{cases}.$$

Для розрахунку цих інтегралів потрібно знати закон розподілення швидкості v по контуру S . Оскільки течія, що обтікає тіло, є потенціальною та прямолінійно-

поступальною зі швидкістю v_∞ , то її потенціал виразимо формулою

$$\varphi = -v_\infty x + f(x, y),$$

де $f(x, y)$ – деякий додатковий до плоскопаралельної течії потенціал, що визначає всі зміни в кінематиці течії, які спричинило тверде тіло.

Тоді

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial f}{\partial y};$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_\infty^2 - 2v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

(тут і в подальшому членами $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$ і $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ будемо нехтувати як членами меншого порядку)

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \left(-v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x}\right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sin \alpha,$$

$$v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial S} = v_x \cdot \sin \alpha + v_y \cdot \cos \alpha =$$

$$= \left(-v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x}\right) \sin \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha,$$

$$v_n \cdot v_x = v_n \cdot v_\infty - v_\infty \frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha,$$

$$v_n \cdot v_y = -v_\infty \frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha,$$

$$\frac{v^2}{2} \cos \alpha = \frac{v_\infty^2}{2} \cos \alpha - v_\infty \frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha \text{ і}$$

$$\frac{v^2}{2} \sin \alpha = \frac{v_\infty^2}{2} \sin \alpha - v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} \sin \alpha.$$

Підставивши всі одержані величини в інтеграли, маємо:

$$\begin{aligned} X &= \rho \oint_S \left(\frac{v_\infty^2}{2} \cos \alpha - v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + v_n \cdot v_\infty + v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha \right) dS = \\ &= \rho \cdot v_\infty \oint_S v_n \cdot dS + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \oint_S \cos \alpha \cdot dS = 0, \end{aligned}$$

оскільки другий інтеграл по замкненому контуру завжди дорівнює нулю, а перший являє собою повну витрату рідини через замкнений контур S , у середині якого ніяких особливостей (стоків чи витоків) немає.

$$\begin{aligned} Y &= \rho \oint_S \left(\frac{v_\infty^2}{2} \sin \alpha - v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} \sin \alpha + v_\infty \frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha \right) dS = \\ &= \rho \oint_S \left[\frac{v_\infty^2}{2} \sin \alpha + v_\infty \left(v_\infty - \frac{\partial f}{\partial x} \right) \sin \alpha + v_\infty \frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha \right] dS = \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho \cdot v_\infty^2}{2} \oint_S \sin \alpha \, dS - \rho \cdot v_\infty \oint_S \left[\left(-v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \sin \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha \right] dS.$$

Перший інтеграл дорівнює нулю з тієї самої причини, що й була вказана вище для інтеграла із $\cos\alpha$. А вираз у квадратних дужках другого інтеграла дорівнює v_S .

Тому

$$Y = -\rho \cdot v_\infty \oint_S v_S \cdot dS = -\rho \cdot v_\infty \cdot \Gamma.$$

Проведемо аналіз одержаних результатів.

1 Будь-яке циліндричне тіло не відчуває опору з боку ідеальної рідини, про що свідчить $X = 0$.

2 Напрявленя підйимальної сили Y визначається методом повороту вектора \bar{v}_∞ на 90° проти напрямку циркуляції Γ .

3 Для обчислення циркуляції контур достатньо обирати по контуру самого тіла, як і рекомендував М. Є. Жуковський. Підставою до цього є властивість циркуляції залишатися однаковою для будь-яких контурів навкруги тіла.

4 У реальній течії навкруги твердого тіла Γ_K по тілу контура дорівнює нулю, оскільки $v_K = 0$ (прилипання). Тому ствердження пункті 3 справедливе для будь-якого контура, але якщо вони знаходяться поза ним, що обмежує граничний шар, який утворюється лише в реальній, в'язкій рідині.

Згідно з теоремою Стокса

$$\Gamma_S - \Gamma_K = \int_V \text{rot } \bar{v} \cdot dV = 2 \iint_\delta \bar{\omega} \cdot d\delta,$$

де $\Gamma_K = 0$,

δ – об'єм, зайнятий вихорами в граничному шарі,

$\bar{\omega} \cdot \delta$ – інтенсивність цих вихорів.

Тому $\Gamma_s = 2 \iint \bar{\omega} \cdot dS$, тобто циркуляція швидкості на межі граничного шару в реальній течії дорівнює подвоєній інтенсивності вихорів у граничному шарі.

А звідси висновок: змінюючи форму тіла або кути атаки, що спричиняє зміни інтенсивності та об'єму вихорів, можна впливати на величину підйімальної сили Y

5) Сила Y виникає лише в реальній течії, тому реальні вихори в граничному шарі замінені еквівалентною системою приєднаних вихорів, тобто це уявні вихори, уведені в течію ідеальної рідини, що разом дало майже реальну картину обтікання.

6) Теорема М. Є. Жуковського справедлива й для стиснутого газу за умови дозвукових швидкостей, що вперше було доведено академіком М. В. Келдішем.

9.7 Теорема Жуковського – Чаплигіна про результуючу силу тиску

Вивчаючи властивості плоскої потенціальної течії, що повністю визначаються комплексним потенціалом $W(z)$, ми зупинилися лише на кінематичних характеристиках течії – φ , ψ , сітці течії, Q і навіть Γ . Але водночас не порушували питання про результуючу силу тиску рідини на тверде тіло. Чи не можна її визначити по відомому комплексному потенціалу течії, що обтікає тверде тіло?

Уперше це завдання було вирішене М. Є. Жуковським і С. О. Чаплигіним у 1906–1910 роках.

Розрахункову схему репрезентуємо на рисунку 9.9.

Циліндричне тіло довільної форми обтікається плоскопаралельною потенціальною течією. Комплексний потенціал течії – $W(z)$. Обтікання будемо вважати безвідривним.

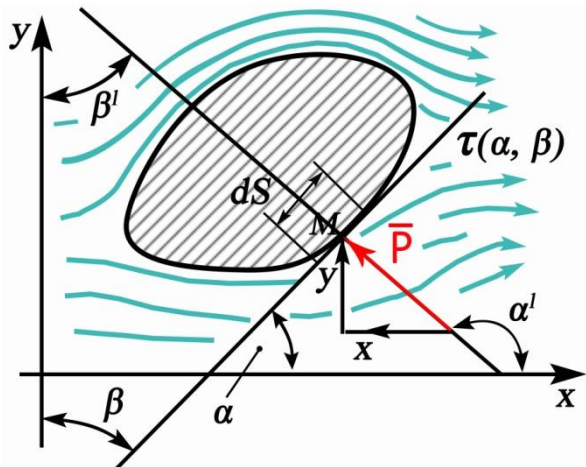


Рисунок 9.9 – Розрахункова схема до визначення результуючої сили тиску

На поверхні тіла в точці M тиск P визначимо з рівняння Ейлера

$$P = C - \rho \frac{v^2}{2}.$$

Проекції сили тиску на координатні осі будуть такі:

$$X = -\int_s P \cdot dS \cdot \sin \alpha, \quad Y = -\int_s P \cdot dS \cdot \cos \alpha,$$

$$Y + iX = \int P \cdot dS \cdot \cos \alpha - i \int P \cdot dS \cdot \sin \alpha,$$

або

$$Y + iX = \int_s \left(C - \frac{\rho v^2}{2} \right) (\cos \alpha - i \sin \alpha) dS,$$

$$\int_s C \cdot \cos \alpha \cdot dS = -C \cdot \sin \alpha \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_S C \cdot \sin \alpha \cdot dS = -C \cdot \cos \alpha \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Тоді залишаються

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_S v^2 (\cos \alpha - i \sin \alpha) dS.$$

Перетворимо це рівняння так: $v = \frac{d\varphi}{dS}$, звідки $d\varphi = v \cdot dS$. Маємо на увазі також, що $W(z) = \varphi + i\psi$.

Відповідно:

$$dW(z) = d(\varphi + i\psi) = d\varphi + id\psi,$$

де останній член $id\psi = 0$, оскільки поверхня тіла в разі безвідривного обтікання є лінією течії, для якої $\psi = const$, тоді

$$dW(z) = d\varphi = v \cdot dS.$$

Крім того,

$$\frac{dW}{dz} = v_x - i \cdot v_y = v \cdot \cos \alpha - i \cdot v \cdot \sin \alpha = v(\cos \alpha - i \cdot \sin \alpha).$$

Перемноживши між собою попередні рівняння, одержуємо підінтегральний вираз у:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_S v^2 (\cos \alpha - i \sin \alpha) dS.$$

тоді

$$Y + iX = \frac{\rho}{2} \int_S \frac{dW}{dz} dW.$$

Але оскільки

$$dW = \frac{dW}{dz} dz,$$

остаточно одержуємо

$$Y + iX = \frac{\rho}{2} \int_S \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz .$$

Як бачимо, ця формула дозволяє за відомим комплексним потенціалом течії $W(z)$, одержати комплексну функцію $f(z)$, у якій дійсна частина буде величиною сили Y , а уявна частина – сили X . Повну силу взаємодії цієї течії з твердим тілом поверхні S одержимо як

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \text{або} \quad \bar{R} = \bar{X} + \bar{Y} .$$

9.8 Формула Чаплигіна про момент результуючої сили тиску

Для практичних розрахунків важливо знати не лише величину сили тиску рідини, але й точку її прикладання, що називається центром тиску.

Формула Чаплигіна якраз і дає можливість за відомим комплексним потенціалом течії, що обтікає тверде тіло, знайти момент результуючої сили, за яким можна знайти плече моменту й саму точку прикладання $l = \frac{M}{R}$.

Нехай на одиницю довжини контура S діє сила $R = p \cdot ds$, проєкції якої X і Y . Видно з рисунка 9.10, що $X = -P \cdot \sin \alpha \cdot ds$, $Y = P \cdot \cos \alpha \cdot ds$.

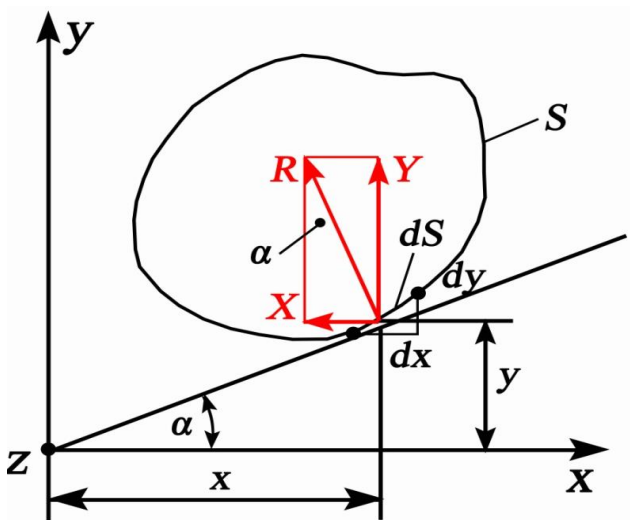


Рисунок 9.10 – До визначення моменту
результуючої сили тиску

Момент цих одиничних сил відносно осі Z (на схемі – точка)

$$Yx + Xy = P(x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) dS.$$

Як і в попередні рази, тиск P на поверхні визначимо з рівняння Ейлера $P_{\infty} + \frac{\rho \cdot v_{\infty}^2}{2} = P + \frac{\rho \cdot v^2}{2}$, звідки, прийнявши питому енергію на нескінченності від твердого тіла за константу C , одержимо

$$P = C - \frac{\rho \cdot v^2}{2}.$$

Тоді результуючий момент, що діє на тверде тіло від поверхневих сил тиску буде такий:

$$\begin{aligned}
 M &= -\int_S P(x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) dS = \\
 &= \int_S \left(C - \frac{\rho \cdot v^2}{2} \right) (x \cdot \cos \alpha - y \sin \alpha) dS = \\
 &= C \int_S (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) dS - \frac{\rho}{2} v^2 (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) dS.
 \end{aligned}$$

Неважко переконатися, що перший інтеграл дорівнює нулю.

Узявши $\cos \alpha = \frac{dx}{dS}$ і $\sin \alpha = \frac{dy}{dS}$ (рис. 9.10), можемо записати

$$\begin{aligned}
 \int_S (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) dS &= \int_S \left(x \frac{dx}{dS} - y \frac{dy}{dS} \right) dS = \\
 \int_S (x \cdot dx - y \cdot dy) dS &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$M = -\frac{\rho}{2} \int_S v^2 (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) dS.$$

Перетворимо це рівняння, спочатку визначивши, що

$$\begin{aligned}
 z \frac{dW}{dz} &= (x + i \cdot y)(v_x - i \cdot v_y) = (x \cdot v_x + y \cdot v_y) + i(y \cdot v_x - x \cdot v_y) = \\
 &= v(x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) + i \cdot v(y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)
 \end{aligned}$$

$W = \varphi + i \cdot \psi = \varphi$, оскільки обтікання вважаємо безвідривним і ψ на поверхні твердого тіла дорівнює нулю. І через це

$$v = \frac{d\varphi}{dS}, \quad d\varphi = v \cdot dS, \quad \frac{dW}{dz} dz = v \cdot dS.$$

Тоді

$$\begin{aligned} z \frac{dW}{dz} \cdot \frac{dW}{dz} dz &= z \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz = \\ &= v^2 (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) dS + i \cdot v^2 (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha) dS \end{aligned}$$

Порівнявши з $M = -\frac{\rho}{2} \int_s v^2 (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) dS,$

можемо записати так:

$$M = \text{д.ч.} - \frac{\rho}{2} \int_s z \left(\frac{dW}{dz^2} \right) dz,$$

де *д.ч.* – дійсна частина від інтеграла.

Перелік питань до розділу 9

- 1 Класифікація сил взаємодії рідини й твердого тіла.
- 2 Чи є сили взаємодії твердого тіла та ідеальної рідини?
- 3 Умови безвідривного обтікання твердої нерухомої й рухомої поверхні.
- 4 Теореми про зміну або збереження кількості руху й моменту кількості руху.
- 5 Сила взаємодії течії та стінок криволінійного каналу.
- 6 Сила взаємодії струменя на нерухому або рухому пластинку.

7 Реакція від витікаючого струменя.

8 Теорема М. Є. Жуковського про силову взаємодію потенціальної течії та твердого циліндричного тіла.

9 Роль і місце «приєднаного вихору» в теоремі М. Є. Жуковського.

10 Теорема Жуковського – Чаплигіна про результуючу силу взаємодії течії на тверде тіло за відомим комплексним потенціалом течії.

11 Формула С. О. Чаплигіна про момент результуючої сили й визначення центру тиску.

10 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ Й МОДЕЛЮВАННЯ

10.1 Значення й методи моделювання

Незважаючи на досить розвинену теоретичну базу науки про рух чи спокій рідких матеріальних середовищ остаточні висновки про достовірність і правильність результатів розрахунків дає лише експеримент. Багато фізичних явищ у природі та техніці зручніше й достовірніше вивчати в лабораторних умовах на моделях і вже потім переносити результати на натурні машини та процеси.

Але для того, щоб результати лабораторних досліджень можна було б переносити на майбутні натурні об'єкти, потрібно забезпечити подібність процесів натурних і модельних, додержуючись певних умов і правил. Іншими словами, під час постановки гідродинамічного експерименту одним з основних є питання про те, за якими правилами повинна бути виготовлена модель і за якими залежностями потрібно перераховувати дані експерименту, щоб одержати достовірне описання натурального гідродинамічного явища.

Саме на ці питання й дає відповідь розділ гідроаеромеханіки, що називається «Теорією подібності й моделювання», який фактично є теоретичною основою експерименту.

Насамперед уточнимо поняття «натура» й «модель». «Натура» – це течія в реальній машині або споруді, які будуть працювати в реальних умовах. «Модель» – це течія в копії натурної машини або споруди, спеціально виготовлених для зручності проведених на них лабораторних досліджень. Найчастіше «моделі» бувають

меншими за розмірами від «натури» , але інколи «натури» бувають значно менші за свої «моделі».

Для зручності в подальшому лапки біля цих термінів будемо опускати. Саме моделювання реальних процесів (гідромеханічних, теплових, масообмінних тощо.) може здійснюватися різними способами.

Фізичне моделювання – це моделювання, за якого зберігається сама природа фізичного процесу (течія, наприклад, води в натурі й моделі). Таке моделювання найбільш достовірне але й найбільш складне в здійсненні. Інколи для спрощення застосовують вираз «Фізична модель».

Математичне моделювання – «математична модель» – це комплекс основних математичних рівнянь, що описують основні риси того чи іншого фізичного процесу , і методом математичних чи розрахункових операцій проводять дослідження поведінки процесу (його кількісних чи якісних характеристик) за умови змін відповідних аргументів. Таке моделювання дозволяє значно розширити варіанти досліджень, прискорити пошук оптимального варіанта.

Аналогове або моделювання за аналогіями – це вивчення процесів, відмінних за фізичною природою від процесу натурального, але описаних рівняннями, однаковими за формулами, та різними за фізичним змістом членів. Прикладами таких процесів може бути потенційна течія рідини й потенційна течія електричних зарядів, гідромеханічні насосні трубопровідні системи та електричні мережі. Відомі методи досліджень на установках ЕГДА або МГДА (електро- або магнітногідродинамічна аналогія) тощо.

10.2 Дві задачі теорії подібності й подібність течій

У теорії подібності й моделюванні вирішуються два основні завдання, описані нижче.

1 Яким умовам повинні відповідати течії природи й моделі, щоб ці течії були подібні.

2 Як саме можна визначити величину N_H , якщо відома N_M (де N_H і N_M – відповідні параметри натурної течії та течії в моделі). Наприклад, швидкість v_M у моделі й v_H в природі, витрата Q_H і Q_M тощо.

3 Процеси (течії) називають подібними, якщо за характеристиками одного можна одержати характеристики другого методом простого перерахунку.

Мається на увазі, що перерахунок – це просте множення або ділення величини параметра природи на величину такого самого параметра моделі, тобто

$$P_{in} = m_i \cdot P_{im} \quad (10.1)$$

де m_i – масштаб подібності.

Оскільки параметри течії, це параметри геометричні, кінематичні й динамічні, то відповідно будемо розрізняти подібності геометричну, кінематичну й динамічну.

Течії будуть геометрично подібні, якщо всі лінійні розміри одну й ту саму кількість разів більші або менші від відповідних розмірів другої течії, тобто для всіх пар схожих розмірів виконується співвідношення

$$\frac{l_H}{l_M} = \lambda \text{ і } \alpha_H = \alpha_M, \quad (10.2)$$

де l_H , l_M – схожі лінійні розміри;

λ – масштаб геометричної подібності;
 α_H, α_M – відповідні кути.

Течії будуть кінематично подібні, якщо вони геометрично подібні й, до того ж, якщо час для здійснення якогось процесу в одну й ту ж саму кількість разів більший або менший часу для здійснення такого самого процесу в іншій течії, тобто

$$\frac{t_H}{t_M} = \tau \quad (10.3)$$

де t_H, t_M – час на здійснення якогось процесу;
 τ – масштаб кінематичної подібності.

Із (10.3) логічно випливає, що кінематична подібність визначається подібністю полів швидкості.

Течії будуть динамічно подібні, якщо вони геометрично й кінематично подібні й, до того ж, якщо сили, що діють в однакових точках і в схожі моменти часу, пропорційні між собою.

Відомо, що сили в рідині бувають і поверхневі. Поверхневі залежать від площі поверхні й напружень, а напруження – від градієнта швидкості та в'язкості. Масові залежать від маси, а вона, зі свого боку – від густоти. Тому вимагання пропорційності сил зводиться до вимоги пропорційності густини, тобто

$$\frac{\rho_H}{\rho_M} = r, \quad (10.4)$$

де r – масштаб динамічної подібності.

Отже, перерахунок параметрів подібних течій (із параметрів моделі на параметри природи або навпаки) проводять через три масштаби подібності – λ , τ , r .

Приклади таких перерахунків:

$$1) \text{ площа} - S : \frac{S_H}{S_M} = \frac{l_H^2}{l_M^2} = \lambda^2, S_H = S_M \cdot \lambda^2.$$

$$2) \text{ об'єм} - \frac{V_H}{V_M} = \frac{l_H^3}{l_M^3} = \lambda^3, V_H = V_M \cdot \lambda^3.$$

$$3) \text{ швидкість} - \frac{v_H}{v_M} = \frac{l_H/t_H}{l_M/t_M} = \frac{\lambda}{\tau}, v_H = v_M \cdot \frac{\lambda}{\tau}.$$

$$4) \text{ об'ємна витрата} - \frac{Q_H}{Q_M} = \frac{l_H^3/t_H}{l_M^3/t_M} = \frac{\lambda^3}{\tau}, Q_H = Q_M \cdot \frac{\lambda^3}{\tau}$$

$$5) \text{ маса} - \frac{m_H}{m_M} = \frac{\rho_H \cdot V_H}{\rho_M \cdot V_M} = \lambda^3 \cdot r, m_H = m_M \cdot \frac{\lambda^3}{r}.$$

$$6) \text{ прискорення} - W = \frac{l}{t^2}, W_H = W_M \cdot \frac{\lambda}{\tau^2}.$$

$$7) \text{ тиск} - P = \frac{F_H/S_H}{F_M/S_M} = \frac{r}{\lambda^2}, P_H = P_M \cdot \frac{r}{\lambda^2}.$$

8) сила інерції –

$$\frac{m_H \cdot W_H}{m_M \cdot W_M} = \frac{\rho_H \cdot V_H \cdot v_H/t_H}{\rho_M \cdot V_M \cdot v_M/t_M} = \lambda^3 \cdot r \cdot \frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{\lambda^4 \cdot r}{\tau^2},$$

$$F_{\text{и.н.}} = F_{\text{и.м.}} \cdot \frac{\lambda^4 \cdot r}{\tau^2}.$$

Отже, ми відповіли на друге питання теорії подібності – яким чином перерахувати параметри моделі на

параметри натури. Але такий перерахунок буде мати сенс лише тоді, коли течія моделі буде подібна до течії натури.

10.3 Критерії подібності за домінуючими силами

Моделювання різних фізичних процесів можливе лише тоді, коли ці процеси будуть подібними. Процеси (течії) будемо називати *подібними*, якщо за характеристиками одного процесу можна одержати характеристику другого процесу методом простого перерахунку.

Вище (10.2) було встановлено, що перерахунок здійснюють методом використання масштабів подібності λ , τ , r . Тепер дамо відповідь на перше питання теорії подібності, тобто встановимо умови, за яких течії натури й моделі будуть подібними.

Спочатку встановимо критерій *повної* динамічної подібності двох течій. З огляду на те, що процес руху рідини здійснюється за рахунок дії зовнішніх сил (масових та поверхневих) і динамічна рівновага течії настає тоді, коли їх сума дорівнює сумі сил інерції (згідно з принципом Даламбера), для подібності двох течій потрібно вимагати пропорційності саме сил інерції.

Цю умову реалізуємо так:

$$\frac{F_{IH.H}}{F_{IH.M}} = \frac{m_H \cdot W_H}{m_M \cdot W_M} = \frac{\rho_H \cdot l_H^3 \cdot V_H \cdot t_H^{-1}}{\rho_M \cdot l_M^3 \cdot V_M \cdot t_M^{-1}} = \frac{\rho_H \cdot l_H^2 \cdot V_H^2}{\rho_M \cdot l_M^2 \cdot V_M^2}.$$

Звідки

$$\frac{F_H}{\rho_H \cdot l_H^2 \cdot V_H^2} = \frac{F_H}{\rho_M \cdot l_M^2 \cdot V_M^2}. \quad (10.5)$$

Рівняння (10.5) показує рівність двох безрозмірних чисел (комплексів), до складу яких входять параметри двох течій. Тому такий безрозмірний комплекс може бути прийнятим за умову забезпечення пропорційності сил інерції в цих двох течіях. У гідроаеромеханіці його називають критерієм повної динамічної подібності – критерієм Ньютона:

$$Ne = \frac{F}{\rho \cdot l^2 \cdot v} \quad (10.6)$$

і тоді умовою подібності течій природи й моделі буде

$$N_{eM} = N_{eH} \quad (10.7)$$

Проте практика показала, що забезпечити подібність течій за цим критерієм часто дуже важко і, як виявилось, не потрібно. Достатньо забезпечити подібність а якоюсь основною, домінуючою силою, що визначає характеристики тієї чи іншої течії.

Наприклад, течії в трубопроводах, проточних частинах гідромашини та взагалі напірні течії у стіснених каналах здебільшого обумовлені силами в'язкості. Природні течії, такі як течії в річках, водопадах, умови плавання, температурний рух повітря й води в морях та океанах, багатофазні течії (в них основну роль грають сили тяжіння). Течії рідини (найчастіше – мастил) у гідросистемах, гідравлічних пресах, циліндрах тощо, де швидкості малі, а тиск великий, основну роль відіграють сили тиску.

Існують різні способи одержання домінуючих критеріїв подібності. Ми виберемо найбільш наочний та

обґрунтований метод на базі основних диференціальних рівнянь руху в'язкої рідини – рівнянь Нав'є – Стокса.

Запишемо перше з них у декартовій системі координат для течії моделі

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ & = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \\ & + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Очевидно, що для подібної течії природи структура цього рівняння не зміниться, а зміняться *лише масштаби* величин, які входять до нього.

Допустимо, що під час переходу від течії моделі до течії природи всі лінійні розміри течії змінилися в L разів, час змінився в T разів, швидкість – у V разів, прискорення масових сил – у G разів, тиск – у P разів, густина – в R разів, кінематичний коефіцієнт в'язкості – в N разів.

Тоді для течії природи можна записати рівняння руху (через параметри моделі та вказані вище коефіцієнти пропорційності):

$$\begin{aligned} & \frac{V}{T} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{V^2}{L} = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = GX - \frac{P}{RL} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{NV}{V^2} \left[\left(\nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (10.9)$$

Для зменшення кількості масштабних комплексів розділимо рівняння на $\frac{V^2}{L}$ і після цього поставимо вимогу, щоб ці комплекси були однакові між собою, щоб після їх скорочення рівняння (10.9) перетворилося на рівняння (10.7), що є умовою подібності течій моделей і натури.

Ці умови набули такого вигляду:

$$\frac{L}{VT} = \frac{GL}{V^2} = \frac{P}{RV^2} = \frac{N}{LV}. \quad (10.10)$$

Аналіз показує, що ці безрозмірні компоненти є відношенням різних домінуючих сил, що формують ті чи інші течії, до сил інерції і тому їх можна вважати критеріями подібності за цими домінуючими силами.

Якщо перейти від масштабів до відповідних параметрів течії, то ці критерії можна записати так:

$$S_h = \frac{l}{v \cdot t} \text{ – критерій Струхаля – критерій подібності}$$

по періодичності. Являє собою відношення локальної сили інерції до конвективної.

$$F_r = \frac{v^2}{l \cdot q} \text{ – критерій Фруда – критерій подібності за}$$

силами ваги. Являє собою відношення сил інерції до сил ваги.

$$E_u = \frac{P}{\rho \cdot v^2} \text{ – критерій Ейлера – критерій подібності}$$

за стискуваністю. Являє собою відношення сили тиску до сил інерції.

$$R_e = \frac{v \cdot l}{\nu} \quad - \quad \text{критерій Рейнольдса} \quad - \quad \text{критерій}$$

подібності за силами в'язкості. Являє собою відношення сил інерції до сили в'язкості.

Тепер можна сформулювати відповідь на перше питання теорії подібності. *Дві течії будуть подібними тоді, коли відповідний критерій подібності «однієї течії» дорівнює такому самому критерію другої течії, тобто умовою подібності» буде виконання умови*

$$K_H = K_M . \quad (10.11)$$

У технічних системах, а особливо в гідромашинобудуванні найчастіше актуальні течії, у яких основну роль відіграють сили в'язкості. Тому умовою подібності течій натури й моделі в них буде

$$R_{eH} = R_{eM} . \quad (10.12)$$

Зазначимо, що критерій Рейнольдса (часто говорять число Рейнольдса) для різних конфігурацій течій визначають по-різному, залежно від вибору характерного лінійного розміру течії та відповідної йому характерної швидкості.

Наприклад, для течії в круглій циліндричній трубі його визначають за формулою

$$R_e = \frac{v \cdot d}{\nu} . \quad (10.13)$$

Для течії у вузькій щілині товщиною δ – шпаринні ущільнення, підшипник ковзання, пластинчаті теплообмінники

$$R_e = \frac{U \cdot \delta}{\nu} . \quad (10.14)$$

де U – лінійна швидкість обертання.

Для течії у відцентровому насосі про характер течії говорить число R_e , обраховане за формулою

$$R_e = \frac{U_2 \cdot D_2}{\nu} . \quad (10.15)$$

де U_2 – лінійна швидкість на виході з робочого колеса, діаметр якого D_2 .

У разі, коли течії природи й моделі здійснюються однаковими за в'язкістю рідинами (наприклад водою), то вимога однаковості чисел Рейнольдса приводить до таких залежностей:

$$\frac{\nu_H}{\nu_M} = \frac{l_M}{l_H} . \quad (10.16)$$

Питання до розділу 10

1 Роль і місце експериментальних досліджень у гідроаеромеханіці.

2 Використання теорії подібності й моделювання. Моделі «натури» й «моделі».

3 Дві задачі теорії подібності.

4 Подібність геометрична, кінематична й динамічна. Масштаби подібності.

5 Приклади перерахування параметрів «моделі» на аналогічні параметри «натури» й навпаки за допомогою масштабів подібності.

6 Основна вимога до течій «натури» й «моделі».

7 Критерій повної динамічної подібності – критерій Ньютона.

8 Приклади течій за домінуючими силами.

9 Критерії подібності по домінуючим силам (Фруда, Струхалія, Ейлера, Рейнольдса) та їх фізичний зміст.

10 Умови подібності для течій у трубах і проточних частинах динамічних машин.

11 Критерій Рейнольдса для течій у круглих циліндричних трубах, відкритих каналах, вузьких циліндричних шпаринах та у відцентрових насосах.

12 Співвідношення лінійних розмірів і швидкостей для подібних течій за критерієм Рейнольдса за однакових рідинах «моделі» й «натури».

13 Моделі фізичні, математичні й аналогові.

11 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРОФІЛЮ

Силова взаємодія течії та твердого тіла в техніці найчастіше відбувається між плоскопаралельною або спеціально сформованою течією, а також твердим тілом особливої форми, що називають лопаттю або лопаткою. В авіації це крило літака, у морській справі – підводні крила човнів. В енергетичних машинах (турбіни, насоси, компресори, вентилятори) – це рухомі лопаті робочих коліс або нерухомі лопатки напрямних апаратів.

Тому лопаттю будемо називати робочий елемент машини, що входить у безпосередній контакт із рідиною або газом і здійснює з нею потрібну силову взаємодію (енергопередачу).

Поперечний переріз лопаті називають профілем. Саме від конфігурацій і геометричних характеристик профілю залежать основні його гідроаеродинамічні характеристики.

11.1 Типи профілів. Основні геометричні характеристики

Основні типи профілів, що використовуються на практиці, репрезентовані на рисунку (11.1):

1 Симетричний профіль постійної товщини.

2 Симетричний профіль змінної товщини – «руль Жуковського».

3,4 Найпоширеніші профілі змінної товщини, несиметричні вигнуті, «Криловий профіль»

5 Товстий, сильно вигнутий профіль, несиметричний. Частіше за все використовують у соплових апаратах парових та газових турбін, гідротрансформаторах.

6,7 Профілі надзвукового обтікання.

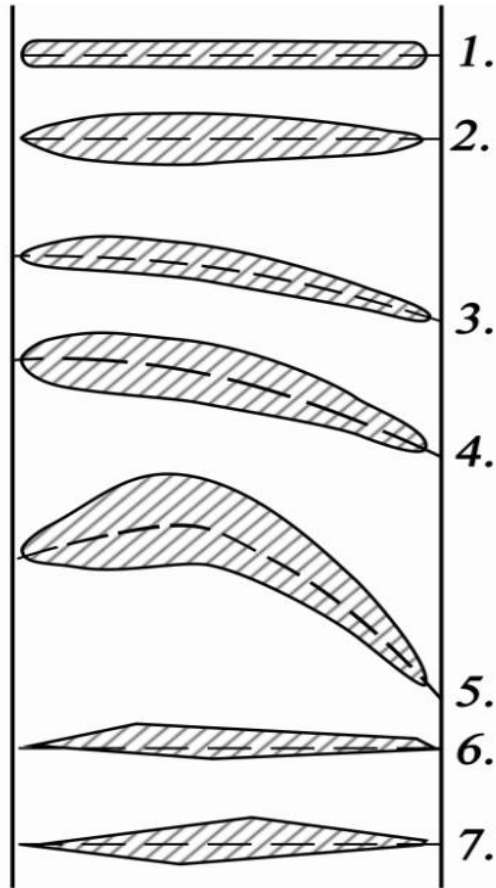


Рисунок 11.1 – Основні типи профілів

Кожний профіль характеризується комплексом геометричних та аеродинамічних характеристик. Геометричні – містять розміри й параметри форми, основні з них подані на рисунку (11.2)

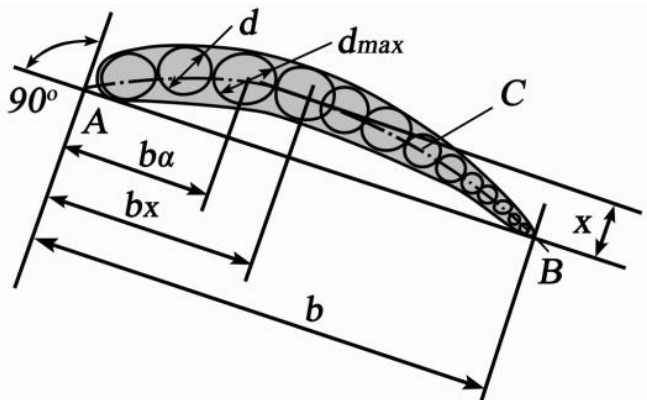


Рисунок 11.2 – Геометричні характеристики профілю

- A і B – передня й задня кромки профілю;
- b – хорда профілю ;
- c – скелетна лінія – лінія, що з’єднує центри вписаних кіл;
- b_a – положення максимальної товщини;
- d_{max} – максимальна товщина;
- x – стріла прогину профілю;
- b_x – положення максимального прогину.

У каталогах профілів усі лінійні розміри задають у безрозмірній формі (як частину від хорди)

$$\bar{d} = \frac{d}{b}, \quad \bar{f} = \frac{f}{b}, \quad \bar{b}_d = \frac{b_d}{b}, \quad \bar{b}_f = \frac{b_f}{d}.$$

Повну геометричну форму профілю задають або набором радіусів кривизни за умов обов’язкового виконання правил спряження кривих різних радіусів, або в табличній формі (рис. 11.3).

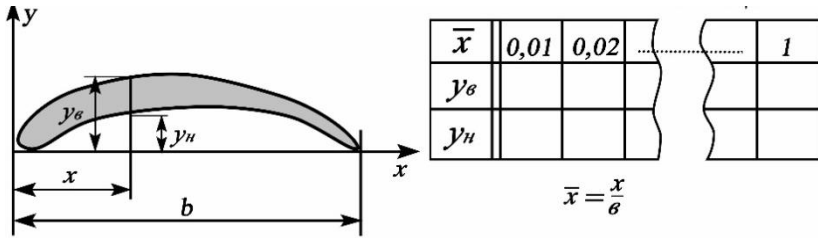


Рисунок 11.3 – Задання геометричної форми профілю

Положення профілю відносно течії, що набігає, характеризується геометричним кутом атаки – це кут між вектором швидкості \vec{v}_∞ і геометричною хордою «b», або аеродинамічною хордою (рис.11.4).

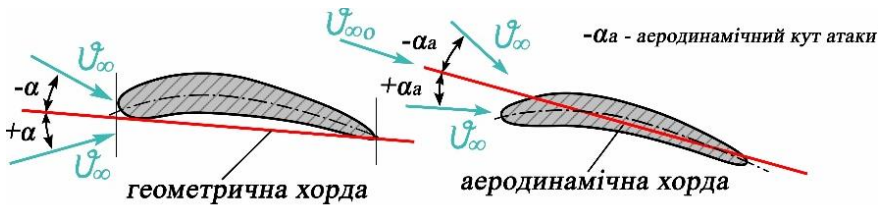


Рисунок 11.4 – Визначення положення профілю

Аеродинамічна хорда – це напрямок набігання течії v_∞ , за якого підймальна сила дорівнює нулю. Кут атаки називають позитивним, якщо під час його збільшенні збільшується й підймальна сила V .

Зміна аеродинамічного кута атаки з позитивного на негативний або навпаки супроводжується зміною напрямку дії підймальної сили.

11.2 Гідродинамічні характеристики профілю

Гідродинамічні характеристики профілю – це сукупність параметрів, що характеризують динамічні сили взаємодії профілю (лопати) й течії, яка його обтікає, а також залежність цих сил від кутів атаки.

У загальній постановці сила взаємодії течії та профілю зводиться до головного вектора зовнішніх сил \bar{R} і його моменту M (рис. 11.5).

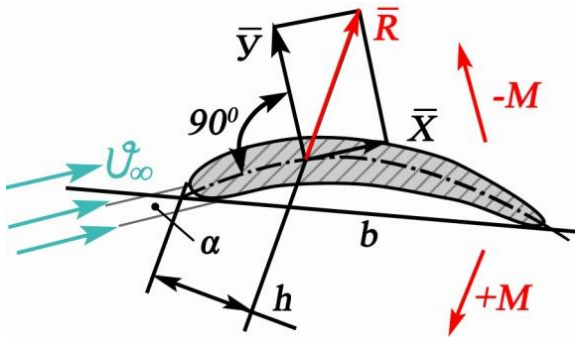


Рисунок 11.5 – Визначення сила взаємодії течії та профілю

\bar{R} – повна сила взаємодії течії та лопаті;

\bar{X} – сила лобового опору;

\bar{Y} – підймальна сила;

M – гідродинамічний момент: «+» – кабрирувальний; «-» – пікірувальний.

Позитивний момент $M = Rh$ – це момент, спрямований у бік збільшення кута атаки та в результаті в бік збільшення підймальної сили Y .

Негативний момент спрямований у бік зменшення величин підймальної сили.

Усі сили й момент, що діють на лопать, зазвичай подають у безрозмірному вигляді

$$C_x = \frac{X}{S \frac{\rho \cdot V_\infty^2}{2}}, C_y = \frac{Y}{S \frac{\rho \cdot V_\infty^2}{2}}, C_m = \frac{R \cdot h}{S \cdot b \frac{\rho \cdot V_\infty^2}{2}} \quad (11.1)$$

і коефіцієнтом гідродинамічної якості профілю

$$K = \frac{Y}{X} = \frac{C_y}{C_x} \quad (11.2)$$

Зрозуміло, що чим ближче K до 1, тим краща якість профілю.

Теоретично та експериментально доведено, що чим більший кут атаки α тим більша величина підйімальної сили. Але водночас швидко зростає й сила лобового опору. Цю залежність зазвичай відображають графічно, у вигляді поляри I-го й II-го роду (рис. 11.6).

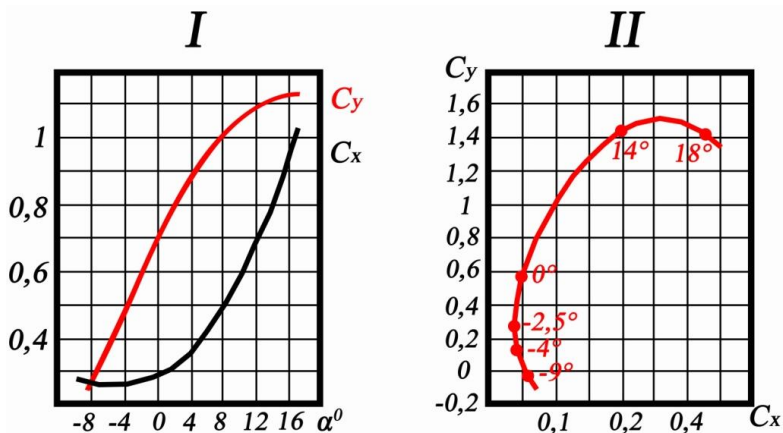


Рисунок 11.6 – Поляри I-го й II-го роду

Такі характеристики у більшості прикладів одержують методом експериментальних продувок профілів в аеро- або гідродинамічних трубах і після цього профілю присвоюють номер і його геометричні й гідродинамічні характеристики заносять у каталог профілів.

11.3 Профілі теоретичні. Конформні перетворення

Теоретичні профілі – це профілі, отримані методом аналітичних розрахунків. Водночас можна заздалегідь задавати необхідні геометричні параметри: товщину профілю, стрілу прогину, швидкість обтікання на нескінченності.

Найбільш поширеними серед таких розрахунків є метод конформних відображень (перетворень) геометричних фігур і течій. Цього наразі застосовують під час проектування тривимірної лопаті відцентрових робочих коліс. Його основу описано далі.

Обираємо дві площини комплексних чисел z і ζ . Будемо вважати, що у фізичній площині $z = x + iy$ розташований майбутній профіль, конфігурація якого поки що невідома. Він обтікається течією, комплексний потенціал якої $W(z)$ теж невідомий і тому розраховувати всі його кінематичні й гідродинамічні показники поки що неможливо.

Але ми можемо обрати другу, допоміжну площину $\zeta = \xi + i\eta$, у якій розташований циліндр радіуса r_0 та із центром на початку координат, що обтікається плоскопаралельною течією із циркуляцією, комплексний потенціал якої $W_1(\zeta)$ нам відомий (6.2.10).

Обидві площини репрезентовані на рис (11.7)

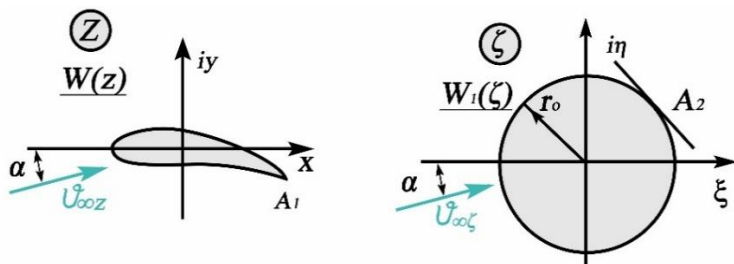


Рисунок 11.7 – Конформне перетворення

Тоді, призначивши функцію зв'язку між цими двома площинами

$$z = f(\zeta) \quad (11.3)$$

так, щоб геометрична фігура в площині ζ відобразилась у криловий профіль у площині z та одночасно комплексний потенціал обтікання циліндра із циркуляцією $W_1(\zeta)$ (який нам відомий), перетворився на комплексний потенціал $W(z)$ течії, що обтікає профіль у площині z

$$W(z) = W_1[f(\zeta)].$$

Отже, у допоміжній площині ζ ми розмістили відому нам фігуру – коло, що імітує циліндр і течію, яка його обтікає з відомим нам потенціалом $W_1(\zeta)$.

Тепер покажемо, як різні види функції $z = f(\zeta)$ перетворюють фігури в площині ζ на фігури в площині z . Спочатку прослідкуємо найпростіші перетворення.

1 Перетворення переносу початку координат.

У цьому прикладі функція зв'язку $z = f(\zeta)$ має такий вигляд:

$$z = \zeta + a. \quad (11.4)$$

Ураховуючи, що $z = x + iy$, а $\zeta = \xi + i\eta$, до того ж, число a в більш загальному вигляді може бути комплексним $a = a_1 + ia_2$, одержимо

$$z = x + iy = (\xi + i\eta) + (a_1 + ia_2) i.$$

Розкривши дужки й згрупувавши дійсні та уявні члени, будемо мати

$$x = \xi + a_1 \quad \text{і} \quad y = \eta + a_2.$$

Отже, коло із центром на початку координатної в площині ζ відобразилось у площині z теж у коло такого самого радіуса, але центр якого змістився на величини a_1 та a_2 по осях x і y (рис 11.8).

Рівняння кривої (кола) в площині z буде

$$(x + a_1)^2 + (y + a_2)^2 = R^2.$$

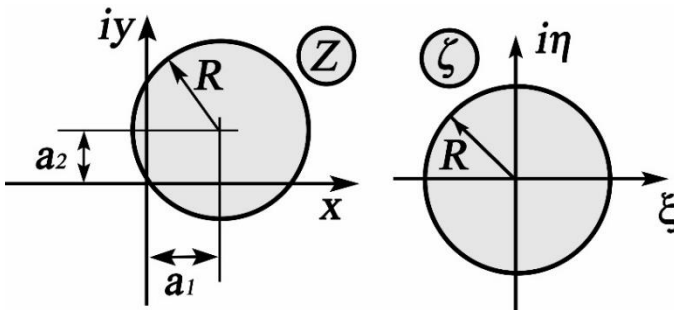


Рисунок 11.8 – Перетворення переносу початку координат

2 Перетворення лінійної деформації та повороту:

$$z = a\zeta. \quad (11.5)$$

Якщо a – комплексне число, то $z = (a_1 - ia_2)(\xi + i\eta) = x + iy$ і тоді

$$x = a_1 - a_2\eta \quad \text{і} \quad y = a_1\eta + a_2.$$

Якщо комплексні числа ζ і a подані в полярній системі координат як $\zeta = R \cdot e^{i\varphi}$ і $a = a_1 \cdot e^{i\alpha}$, то тоді

$$z = R \cdot e^{i\varphi} \cdot a_1 \cdot e^{i\alpha} = a_1 \cdot R \cdot e^{i(\varphi+\alpha)},$$

де $Q = \alpha + \varphi$ – повний полярний кут для числа Z .

Як бачимо, перетворення за формулою (11.5) перетворює коло радіуса R в площині ζ на коло з радіусом $\rho = a_1 \cdot R$ в площині Z , водночас усі точки цього кола повернуті навколо центра на кут α (рис. 11.9).

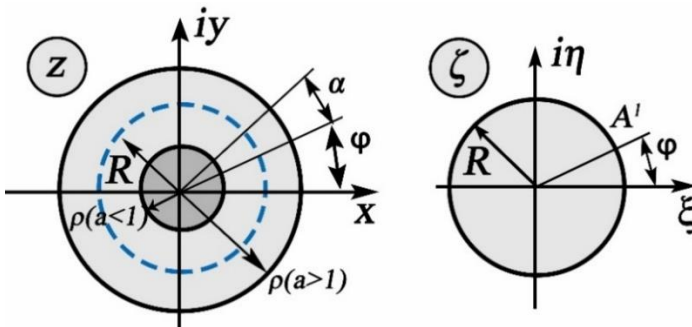


Рисунок 11.9 – Перетворення лінійної деформації та повороту

З Третє перетворення візьмемо у вигляді, який називають перетворенням інверсії

$$z = \frac{a^2}{\zeta}, \quad (11.6)$$

де a – дійсне число.

Рівняння (11.6) можна переписати так:

$$\zeta = \frac{a^2}{z}.$$

Оскільки $z = x + iy$, то

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{a^2}{x + iy} = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} - i \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Звідси

$$\xi = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \quad \text{і} \quad \eta = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Рівняння кола в площині ζ загалом виді має вигляд

$$A(\xi^2 + \eta^2) + B\xi + C\eta + D = 0. \quad (11.7)$$

Якщо підставити сюди значення ξ і η , то одержимо

$$Aa^4 \left[\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] + \frac{Ba^2 x}{x^2 + y^2} - \frac{Ca^2 y}{x^2 + y^2} + D = 0,$$

або, домноживши на $(x^2 + y^2)$ та виконавши елементарні перетворення, одержимо

$$Aa^4 + Ba^2 x - Ca^2 y + D(x^2 + y^2)^2 = 0. \quad (11.8)$$

Це рівняння є рівнянням кола в площині Z . І саме це коло буде обтікатися плоскопаралельною течією із циркуляцією $W_1(\zeta)$, раніше відомою (6.2.10).

Розташування цього кола залежить від значень коефіцієнтів для кола в площині ζ . Наприклад, коли коло в площині ζ проходить через початок координат, то коефіцієнт $D = 0$ в площині ζ . Тоді коло відобразиться в площині Z в пряму лінію, рівняння якої буде

$$Aa^4 + Ba^2x - Ca^2y = 0. \quad (11.9)$$

Взагалі, в теорії конформних відображень аналогічно доводять теорему, подану нижче.

Перетворення інверсії перетворює кола та прямі в одній комплексній площині на кола або прямі в іншій комплексній площині.

Це дозволяє використовувати зазначене перетворення в більш складних функціях зв'язку для розв'язання багатьох технічних задач. Прикладом цього може бути перетворення М. Є. Жуковського для одержання в площині Z крилового профілю та знаходження комплексного потенціалу течії, що його обтікає.

4 Перетворення М. Є. Жуковського.

Функція зв'язку $z = f(\zeta)$ в цьому разі являє собою суму двох розглянутих вище перетворень – інверсії та деформації, а саме

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) \quad (11.10)$$

де число a в нашому прикладі буде радіусом кола в площині ζ із центром на початку координат. У подальшому будемо називати його колом інверсії.

1 Спочатку переконаємось, що за допомогою цього перетворення саме коло інверсії в площині ζ перетворюється на відрізок прямої довжиною $2a$, що імітує плоску пластину, що обтікається плоскопаралельною течією.

Подамо точки кола інверсії як точки, що відповідають виразу:

$$\zeta = a \cdot e^{i\theta}.$$

Тоді підставивши (11.10), будемо мати

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \left(a \cdot e^{i\theta} + \frac{a^2}{a \cdot e^{-i\theta}} \right) = \frac{a}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \\ &= \frac{a}{2} [\cos\theta + i \sin\theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = \\ &= \frac{a}{2} (\cos\theta + i \sin\theta + \cos\theta - i \sin\theta) = a \cdot \cos\theta. \end{aligned}$$

Оскільки $\cos\theta$ змінюється від $-a$ до a , то в площині z це буде відрізок прямої довжиною $2a$ (рис. 11.10)

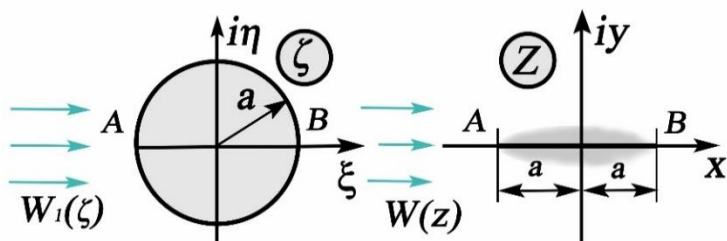


Рисунок 11.10 – Перетворення Жуковського

2 Тепер розмістимо в площині ζ коло із центром на початку координат, радіус якого $R > a$.

Рівняння цього кола буде

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2. \quad (11.11)$$

Функцію зв'язку (11.10) перетворимо так:

$$z = x + iy = \frac{1}{2} \left[(\xi + i\eta) + \frac{a^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{ia^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2} \right].$$

Звідси

$$x = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{a^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2} \right); \quad y = \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{a^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2} \right),$$

або

$$x = \frac{\xi}{2} \left(1 + \frac{a^2}{R^2} \right); \quad y = \frac{\eta}{2} \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right).$$

Звідси

$$\xi^2 = \frac{x^2}{\left(\frac{R^2 + a^2}{2R^2} \right)^2}; \quad \eta^2 = \frac{y^2}{\left(\frac{R^2 - a^2}{2R^2} \right)^2}.$$

Позначивши знаменники відповідно a_1 і a_2 , і підставивши значення ξ^2 і η^2 в рівняння (11.11), одержуємо рівняння відображення в площині z

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 1. \quad (11.12)$$

Одержане рівняння (11.12) в площині z є рівняння еліпса із напівосями $a_1 = \frac{R^2 + a^2}{2R^2}$ і $b_1 = \frac{R^2 - a^2}{2R^2}$ (рис.11.11).

З Далі, якщо розмістимо в площині ζ коло з радіусом $R > a$, але із центром на уявній осі $i\eta$, які показано на рисунку (11.12), то в площині z ми одержимо дугу кола з кінцями, що спираються на вісь x у точці A і B , причому відстань від вершини дуги f до осі ξ (стріла прогину) буде дорівнювати величині зміщення центра кола радіуса R в площині ζ .

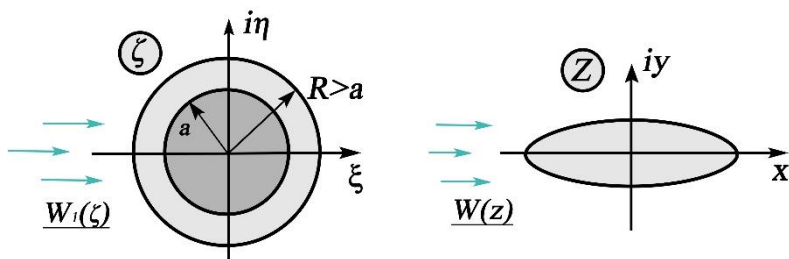


Рисунок 11.11 – Перетворення Жуковського

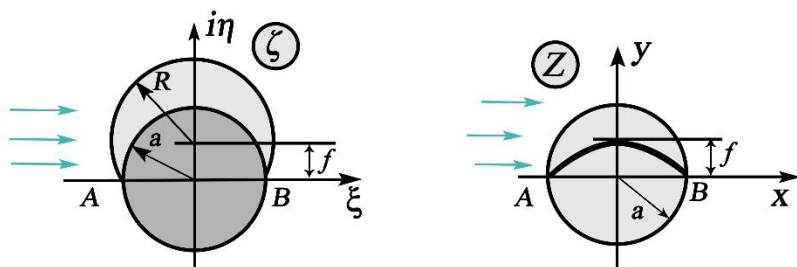


Рисунок 11.12 – Перетворення Жуковського

4 Якщо ж коло радіуса $R > a$ розмістити в площині ζ , а центр змістити по дійсній осі ξ , то на фізичній площині Z за допомогою функції Жуковського (11.10) ми одержимо симетричний профіль змінної товщини, так званий «Руль Жуковського (рис. 11.13а)»

Для економії площини Z і ζ на цьому рисунку суміщені.

5 Нарешті розмістимо в площині ζ коло радіуса $R > a$, а центр змістимо й за віссю ξ , і за віссю η , (як показано на рис. 11.13 б), ми одержимо зігнутий криловий профіль змінної товщини з гострим заднім пружком та стрілою прогину.

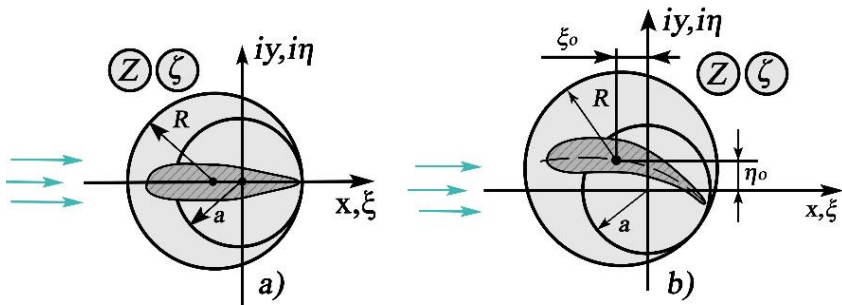


Рисунок 11.13 – Одержання профілю Жуковського

Отже, за умов заданих значень величини «а» у формулі (11.10), радіуса відображеного кола « R » і координат його центра ξ_0 і η_0 , що впливають на геометрію профілю, можна одержати в площини Z теоретичний профіль крилової форми, який називають профілем Жуковського.

11.4 Огляд теоретичних профілів. Профілі практичні

Вище було розглянуто конформний метод одержання одного з видів теоретичних профілів – профілю Жуковського, досягнуто методом інверсії кола. Маючи велике значення як метод теоретичних розрахунків обтікання профілів, для практичного застосування такий профіль мав істотний недолік – гострий задній пружок лопаті. Тому в подальшому, використовуючи цей метод, були одержані цілі групи теоретичних профілів за допомогою інверсії інших типів кривих у допоміжній площині.

I група профілів (1906–1908 рр) одержана методом інверсії параболи. Але і в цих профілях позбавитися гострого пружка не вдалося.

II група, що бере початок в 1911 р – це профілі Жуковського типу Акуанет та узагальнені профілі типу Антуанет і які були названі «узагальненими профілями Жуковського». Їх одержували методом відображення двох колових дуг, що пересікалися. Ці профілі відразу показали свої гарні аеродинамічні характеристики й стали широко використовуватися в авіації. Характерно, що за кордоном такі профілі були одержані у 1918 році й мали назву «профілі Кармана – Тріфтця».

III група – 1922 рік, запропонована С. О. Чаплигінім, учнем М. Є. Жуковського являє собою узагальненням попередньої групи, її одержували методом інверсії еліпса. Профілі надійно мали закруглений задній пружок, але, як виявилось пізніше, мали недостатню аеродинамічну остійність.

IV група – профілі А. І. Некрасова, як спроба покращити попередню групу методом уведення нової функції зв'язку, що мала вигляд

$$\zeta = z + \frac{K_1}{z} + \frac{K_2}{z^2} + \dots + \frac{K_n}{z^n},$$

де K – корегувальні коефіцієнти.

Але повністю ліквідувати недоліки попередньої групи профілів не вдалося.

V група – 1942 рік, профілі САЧ (Сергій Олексійович Чаплигін). Запропонована ним перетворювальна функція мала три довільні параметри, зміною яких можна було корегувати стрілу прогину, товщину профілю й заднього пружка.

Саме ці профілі стали широко використовувати під час створення військової авіації в період Великої вітчизняної війни 1941 року.

Помер С. О. Чаплигін у жовтні 1942 року, залишивши після себе, крім цієї групи, ще й групу, що стала пізніше групою профілів для підводних крил надводних і підводних човнів.

Підкреслюючи важливість методу теоретичних профілів, С. О. Чаплигін писав, що «переваги теоретичних профілів перед практичними полягають у тому, що ми заздалегідь можемо знати розподілення тиску на крилі й передбачити його основні характеристики. Водночас розрахунок розподілення тиску методом конформних відображень дає надійні результати».

У сьогоденнішньому розумінні, практичні профілі – це профілі, одержані на основі емпіричних залежностей та експериментальних досліджень, «відпрацювань», «доведень» – найчастіше в аеро- або гідродинамічних трубах.

Найбільш відомі дві групи практичних профілів, зведених в атласи – профілі НАСА та профілі ВИГМ (Всесоюзний інститут гідромашинобудування).

11.5 Швидкість і циркуляція в перетвореній течії

Не будемо забувати, що в разі конформного перетворення функція зв'язку між фізичною площиною Z і допоміжною ζ .

$$Z = f(\zeta)$$

відіграє подвійну роль. По-перше, вона повинна конформно перетворити нам геометричну фігуру, рівняння якої відомо в площині ζ , у криловий профіль у площині Z . І цьому питанню присвячено місце в попередньому тексті (11.3 і 11.4).

По-друге, ця функція повинна перетворювати комплексний потенціал відомої нам течі, що обтікає відому нам фігуру в площині ζ на комплексний потенціал течії, що обтікає одержаний контур крилового профілю в площині Z . Тому настав час зайнятися й цим питанням.

Нехай у фізичній площині Z розташовано одержаний раніше профіль, що обтікається зі швидкістю обтікання $v_{\infty z}$ та циркуляцією Γ_z по контуру, що обіймає профіль. У площині ζ розміщені коло й течія, комплексний потенціал якої нам відомий:

$$W_1(\zeta) = W_{nm} + W_q + W_\epsilon. \quad (11.13)$$

Відома також функція зв'язку $Z = f(\zeta)$, наприклад, у формі (8.10).

Можемо записати так:

$$W(z) = W[f(\zeta)] = W_1(\zeta), \quad (11.14)$$

де $W_1(\zeta)$ – відомий комплексний потенціал течії в площині ζ ,

$W(z)$ – комплексний потенціал течії, що обтікає профіль у площині Z (його потрібно знайти, використавши функцію зв'язку).

Зв'язок між спряженими комплексними швидкостями \bar{V}_ζ і \bar{V}_z може бути репрезентований так:

$$\bar{V}_\zeta = \frac{dW_1(\zeta)}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \bar{V}_z \frac{dz}{d\zeta}.$$

Зазначимо, що для однозначності перетворення $Z = f(\zeta)$ необхідно, щоб при цьому нескінченно віддалена точка в площині Z переходила в нескінченно віддалену точку в площині ζ і щоб швидкості V_∞ в цих точках були однакові для обох площин, тобто

$$\bar{V}_{\zeta_\infty} = \left(\frac{dW}{dz} \right)_\infty \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_\infty = V_{z_\infty} \cdot m_\infty,$$

де $m_\infty = \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_\infty$ – повинна бути завжди позитивною величиною, щоб напрямлення швидкостей не змінювалось.

За цих умов маємо право записати так:

$$V_\zeta = V_z \frac{dz}{d\zeta}. \quad (11.15)$$

Тепер розглянемо, як співвідносяться циркуляції у разі конформного перетворенні течій. Раніше було встановлено (8.6):

$$\oint \frac{\partial W}{\partial z} dz = \oint \bar{V} \cdot dz = \Gamma + iQ.$$

Відповідно до цього

$$\Gamma_{\zeta} = \partial.ч. \oint \bar{V}_{\zeta} \cdot d\zeta = \partial.ч. \oint \bar{V}_z \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \partial.ч. \int V_z \cdot dz = \Gamma_z.$$

Остаточоно

$$\Gamma_{\zeta} = \Gamma_z. \quad (11.16)$$

Тобто, у разі конформного відображення циркуляція по будь-якому замкненому контуру, що охоплює профіль, не зміниться.

11.6 Постулат Чаплигіна – Жуковського

Раніше, під час обтікання циліндра плоскопаралельною течією із циркуляцією було встановлено, що характер обтікання й положення критичних точок залежить від величини циркуляції.

$$\Gamma = 4\pi \cdot V_{\infty} \cdot R \cdot \sin \theta.$$

Тепер ми маємо криловий профіль у площині Z, що обтікається плоскопаралельною течією із циркуляцією і яка конформно пов'язана з течією, що обтікає циліндр у площині ζ . Тому залежність характеру обтікання профілю від циркуляції автоматично передалась і до площини Z.

Із цього видно, що якщо не накласти обмеження на величину Γ , то критичні точки можуть розташовуватися в довільних точках профілю.

Із функції зв'язку встановлено, що

$$V_z = V_\zeta \frac{d\zeta}{dz} = \frac{V_\zeta}{\frac{dz}{d\zeta}}, \quad (11.17)$$

і там, де $\frac{dz}{d\zeta} = 0$, там швидкість на профілі повинна дорівнювати ∞ .

Установимо розташування такої точки. Із функції зв'язку

$$Z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right)$$

одержуємо

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right).$$

Але із (11.17) видно, що $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{V_\zeta}{V_z}$.

Тоді $\frac{2V_\zeta}{V_z} = 1 - \frac{a^2}{\zeta^2}$, тобто

$$V_z = \frac{2V_\zeta}{1 - \frac{a^2}{\zeta^2}}. \quad (11.18)$$

Беручи до уваги, що $\zeta = \pm a$, тоді знаменник в (11.18) стане нулем, а V_z необхідне значення ∞ . Це можна не допустити, якщо в точці на колі (а це точка A_2 на рис. 11.7), що відповідає точці A_1 на профілі (задній пружок) (рис 11.7) швидкість буде дорівнювати 0. А це – мертва точка на колі.

З огляду на неможливість існування на профілі точки зі швидкістю $V_z = \infty$, Чаплигін і Жуковський запропонували постулат, наведений нижче.

Практично прийнятним можна вважати лише таке обтікання профілю, за якого течія плавно та з кінцевою швидкістю сходиться із заднього пружка профілю.

За якої ж умови буде виконуватись цей постулат? Ми бачимо, що в точках A_1 і A_2 , які відповідають одна одній, порушується конформність відображення (відсутня рівність кутів). Тому в таких точках

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{A_2} = \infty, \text{ або } \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{A_1} = 0.$$

Оскільки

$$V_\zeta = V_z \frac{dz}{d\zeta} = mV_z, \quad (11.19)$$

а комплексний потенціал обтікання циліндра (5.32)

$$W_1(\zeta) = \bar{V}_{\zeta_\infty} \cdot \zeta + \frac{\bar{V}_{\zeta_\infty} \cdot a^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \ln \zeta,$$

то можна записати (з урахуванням 11.19)

$$W_1(\zeta) = m_\infty \cdot \bar{V}_{\infty z} \cdot \zeta + \frac{m_\infty \cdot \bar{V}_{\infty z} \cdot a^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \ln \zeta, \quad (11.20)$$

звідси

$$\bar{V}_{A_2} = \left[\frac{dW_1(\zeta)}{d\zeta} \right]_{A_2} = m_\infty \cdot \bar{V}_{\infty z} - \frac{m_\infty \cdot \bar{V}_{\infty z} \cdot a^2}{\zeta_{A_2}^2} + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \frac{1}{\zeta_{A_2}} = 0.$$

Оскільки координати ζ_{A_2} можна виразити через полярний кут ε_o точки A_2 на колі, тобто $\zeta_{A_2} = a \cdot e^{i \cdot \varepsilon_o}$, а швидкість на нескінченності через $V_{z\infty} = |V_{z\infty}| e^{i\varepsilon_o}$, остання умова набуде вигляду

$$m_\infty |V_{z\infty}| e^{-i\theta} - m_\infty |V_{z\infty}| e^{i(\theta-2\varepsilon_o)} + \Gamma \frac{e^{-i\varepsilon_o}}{2\pi \cdot a \cdot i} = 0.$$

Звідси величина циркуляції буде

$$\Gamma = -4\pi \cdot a \cdot m_\infty |V_{z\infty}| \frac{e^{-i(\theta-\varepsilon_o)} - e^{-i(\theta-\varepsilon_o)}}{2i} = 0,$$

де θ – кут між векторами $V_{z\infty}$ та віссю x .

Використавши рівняння

$$\frac{e^{ix} - V}{2i} = \sin \alpha,$$

де $\alpha = \theta - \varepsilon_o$, остаточно одержимо значення циркуляції, що відповідає постулату Жуковского – Чаплигіна

$$\Gamma = -4\pi \cdot a \cdot m_\infty |V_{z\infty}| \sin \alpha. \quad (11.21)$$

Потрібно додати, що в разі $a = 0$, або $\theta = \varepsilon_0$ – буде безциркуляційне обтікання профілю. Тому кут α – це кут між векторами швидкості набігаючої течії та напрямом безциркуляційного обтікання профілю, а це – напрямом аеродинамічної хорди. Кут α часто називають теоретичним кутом атаки.

Перелік питань до розділу 11

- 1 Визначення понять «лопать», «лопатка» та «профіль».
 - 2 Типи профілів.
 - 3 Основні характеристики крилового профілю.
 - 4 Основні динамічні характеристики профілю.
 - 5 Способи графічного задання форми профілю.
 - 6 Хорди геометрична та аеродинамічна.
 - 7 Кути атаки геометричний та аеродинамічний.
 - 8 Насосний і турбінний режими обтікання профілю.
- Режим нульової під'ємної сили.
- 9 Визначення напрямку підйімальної сили Y .

ЧАСТИНА II
СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МЕХАНІКИ
РІДИНИ Й ГАЗУ

12 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАНИЧНОГО ШАРУ

12.1 Граничний шар та його основні ознаки

Граничний (або пристінний) шар течії рідини або газу – це шар, що безпосередньо прилягає до твердої поверхні а в якому швидкість v швидко змінюється від 0 (коли поверхня нерухома) до значення швидкості в основному ядрі течії, відрізняючись на 2–5 % від максимального її значення.

Тому картина обтікання твердого тіла (наприклад, профілю) має такий вигляд, як репрезентовано на рисунку 12.1.

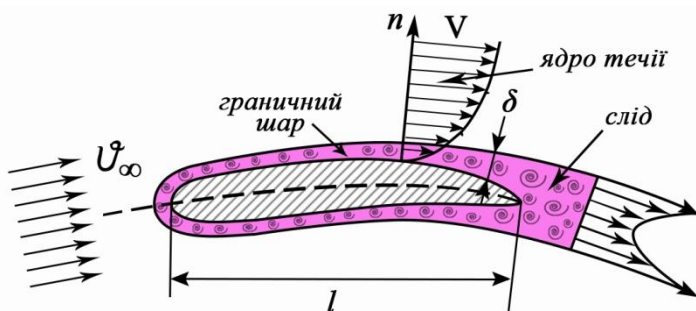


Рисунок 12.1 – Картина обтікання твердого тіла (профілю)

Одним із перших на таку картину обтікання вказав Д. І. Менделєєв. Пізніше багато уваги вивченню граничного шару приділили Прандтль, Карман, Польгаузен, Мілікен, Блазіус, Кочіна, Лойцяньський та інші. Саме вони заклали основи теорії граничного шару, викладені в об'ємній монографії Шліхтінга «Теорія граничного шару».

Залежно від форми твердої поверхні, що обтікається, граничний шар може бути одномірним $-v = f(x)$,

двовірним (плоским) – $v = f(x, y)$ або $v = f(r, \theta)$ і тривірним (просторовим) – $v = f(x, y, z)$ або $v = f(r, \theta, z)$.

Течія рідини в граничному шарі завжди вихрова на відміну від віддаленої течії, яку можна вважати потенціальною безвихровою.

За характером течія в граничному шарі може бути ламінарною, перехідною та турбулентною, що визначають за критерієм Рейнольдса Re . Потрібно також мати на увазі, що навіть у турбулентному граничному шарі існує більш тонкий прошарок біля самої поверхні, де течія завжди має ламінарний характер. Товщину його позначають δ_l і називають, власне, «ламінарний прошарок». Нагадаємо, що саме за товщиною δ_l порівняно з шорсткістю твердої поверхні Δ визначають поверхні «гідравлічно гладку» – $\delta_l > \Delta$ або «гідравлічно шорстку» – $\delta_l < \Delta$.

У теорії граничного шару зазвичай літерою v (v_x, v_y, v_z) позначати швидкість у самому шарі, V – швидкість на зовнішній границі шару і v_∞ – швидкість течії за достатньої відстані від твердої поверхні, де її вплив на течію не відчувається. Вважають, що $V = (0,95 - 0,98)v_\infty$.

Чому таку увагу в гідромеханіці приділяють саме цьому порівняно тонкому шару рідини? Тому що саме в ньому проявляє себе така властивість реальної рідини, як в'язкість. Нагадаємо, що згідно з гіпотезою Ньютона

$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dn}, \quad (12.1)$$

де τ – дотична напруга;

μ – динамічний коефіцієнт в'язкості;

$\frac{dv}{dn}$ – градієнт швидкості.

Тобто в'язкість помітно проявляє себе там, де в течії відбувається велика зміна швидкості на одиницю нормалі до її напрямку. Як видно з рисунка 12.1, саме такий градієнт з'являється в граничному шарі, де швидкість зростає від 0 на поверхні тіла майже до значення швидкості в ядрі течії. Тому течію в граничному шарі завжди розглядають як течію в'язкої рідини, на відміну від течії в ядрі, де градієнт швидкості невеликий і в'язкістю можна знехтувати, тобто розглядати течію як потенціальну ідеальної рідини.

Тобто наявність граничного шару зумовлює силову взаємодію течії та твердого тіла, бо, як відомо, ідеальна рідина такої взаємодії не створює.

Абсолютну товщину граничного шару будемо позначати літерою δ . Відносну товщину граничного шару, яку використовують частіше, позначимо $\bar{\delta}$:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{l}.$$

Дослідник Л. Прандтль ще в 1904 році помітив, що величина $\bar{\delta}$ залежить від швидкості течії в граничному шарі, тобто від числа Рейнольдса Re : за малих чисел $Re - \bar{\delta} \gg 1$, за великих чисел $Re - \bar{\delta} \ll 1$.

Дві основні ознаки граничного шару:

– за $n = 0$ $v = v_{cm}$ (умова «прилипання» до стінки, гіпотеза Прандтля);

– $grad_n v \gg 1$ (це зумовлює великі значення τ).

Розглянутий вище й зображений на рисунку 12.1 граничний шар називають динамічним граничним шаром (у

подальшому для спрощення будемо називати просто граничним шаром).

Але потрібно мати на увазі, що під час теплопередавання від течії рідини або газу вздовж твердої поверхні виникає аналогічний температурний граничний шар із великим градієнтом зміни температури, товщину якого будемо позначати δ_T , або $\bar{\delta}_T$ ($\bar{\delta}_T = \frac{\delta_T}{l}$). Для температурного граничного шару також справедливі залежності від температурного числа Рейнольдса Re_T :

– за малих значень $Re_T - \bar{\delta}_T \gg 1$;

– за великих значень $Re_T - \bar{\delta}_T \ll 1$.

Так само за дифузійного масопередавання від контакту рідкого розчину з твердим тілом виникає дифузійний граничний шар товщиною δ_δ , або $\bar{\delta}_\delta$ ($\bar{\delta}_\delta = \frac{\delta_\delta}{l}$) та аналогічними для нього характеристиками.

Необхідно наголосити, що вказані товщини граничних шарів δ , δ_T і δ_δ не є строгими, оскільки вважають, що їх параметри на декілька відсотків відрізняються від параметрів основної течії. Тому в сучасній теорії граничного шару використовують більш чіткі й фізично обґрунтовані товщини – товщину витіснення δ^* і товщину втрати імпульсу δ^{**} , а також їх відношення H : $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$.

Товщина витіснення – це відстань, на яку відсторонюється зовнішня лінія течії реального граничного шару від її положення в разі течії ідеальної рідини (рис. 12.2).

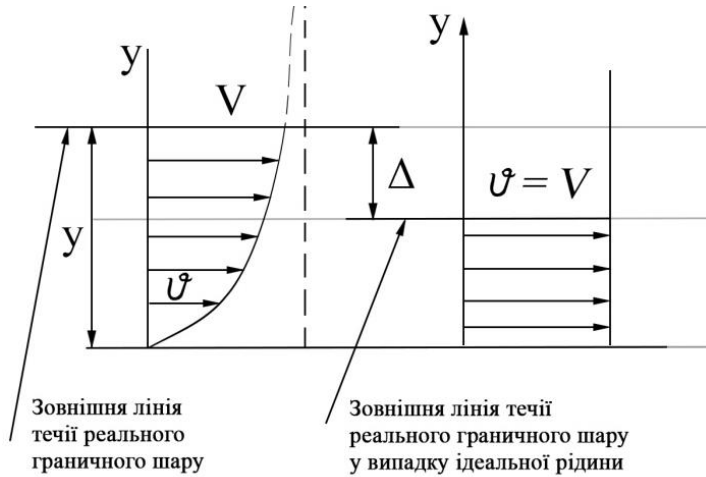


Рисунок 12.2 – До визначення товщини витіснення

За умови, що витрати рідини через переріз граничного шару ідеальної й реальної рідин будуть однаковими, можна одержати залежності

$$Q_p = \int_0^y v \cdot dy, \quad Q_{i0} = V \cdot (y - \Delta).$$

Але $V(y - \Delta) = V \int_0^y dy - V \cdot \Delta$, тоді

$$V \cdot \Delta = \int_0^y (V - v) dy \quad \text{і} \quad \Delta = \int_0^y \left(1 - \frac{v}{V}\right) dy.$$

Очевидно що максимальне значення величини відсторонення (зсуву) Δ_{\max} буде, якщо $y = \delta$, тому одержимо

$$\Delta_{\max} = \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v}{V}\right) dy. \quad (12.2)$$

Другу характерну товщину граничного шару δ^{**} визначають з аналізу динамічного впливу на тверде тіло в'язкої та ідеальної рідин.

Різниця цього впливу полягає в тому, що ід час обтіканні ідеальною рідиною на тіло діє лише одна сила М. Є. Жуковського Y , спрямовано нормально до напрямку обтікання $v_{\infty} \approx V$. Тому зміни кількості руху $m \cdot v_{\infty}$ до тіла й після нього не буде. Під час обтікання реальною рідиною через гальмівну дію твердого тіла виникає додаткова сила супротиву X в напрямку швидкості v_{∞} і призводить до зміни кількості руху до та після твердого тіла. Визначивши цю різницю, можна одержати величину δ^{**} .

Розрахункову схему обтікання подано на рисунку 12.3.

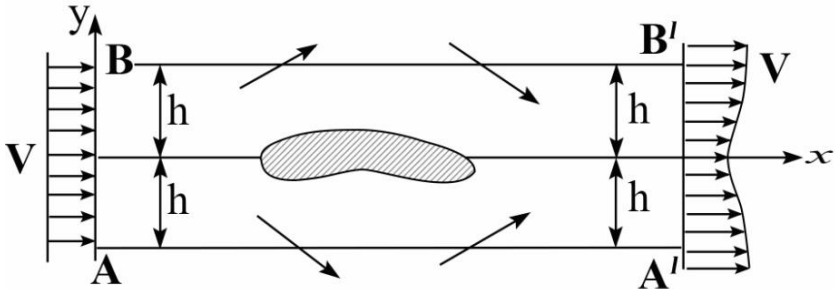


Рисунок 12.3 – Розрахункова схема обтікання

Навкруги твердого тіла, що обтікається реальною рідиною (рис. 12.3), визначено замкнений контур $ABB'A'$ й надано епюри швидкостей до та після контакту рідини з твердим тілом. Епюра швидкості після обтікання твердого тіла змінилася і, внаслідок цього змінилася кількість руху. Це дозволяє використати теорему імпульсів, згідно з якою зміна кількості руху дорівнює імпульсу сили.

Кількість руху рідини, що пройшла через переріз AB , становить

$$k_1 = 2\rho hV^2.$$

Нагадаємо, що вважаючи площу, через яку пройшла рідина в перерізі AB , рівною $2h \cdot 1$, одержимо

$$k_1 = m \cdot V = \rho \cdot Q \cdot V = \rho \cdot V \cdot 2h \cdot V = 2\rho hV^2.$$

Припускаючи, що кількість рідини, яка пройшла через переріз AB , приблизно дорівнює кількості рідини, що вийшла через переріз $A'B'$, можна записати

$$2\rho hV = \int_{-h}^h \rho v dy,$$

тому

$$k_1 = \rho \cdot V \int_{-h}^h v dy.$$

Відповідно кількість руху рідини, що вийшла через переріз $A'B'$, буде

$$k_2 = \rho \int_{-h}^h v^2 dy.$$

Тоді різниця кількості руху $k_1 - k_2$ буде

$$X = k_1 - k_2 = \rho V \int_{-h}^h v dy - \rho \int_{-h}^h v^2 dy + k',$$

де X – сила супротиву течії (лобового опору), спрямована проти течії;

k' – кількість руху рідини, що пройшла через бічні стінки замкненого контура AA' і BB' .

Якщо величину h (вибрану довільно) спрямувати в нескінченність, де тверде тіло вже не викривляє лінії течії v_∞ , то величина k' буде наближатися до нуля. Тоді остаточно одержимо

$$X = \rho V \int_{-\infty}^{\infty} v \left(1 - \frac{v}{V}\right) dy.$$

Силу супротиву течії X зазвичай подають у безрозмірному вигляді як коефіцієнт C_x :

$$C_x = \frac{X}{\rho \frac{V^2}{2} b} = \frac{2}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{V} \left(1 - \frac{v}{V}\right) dy = \frac{2\delta^{**}}{b}, \quad (12.3)$$

де δ^{**} – лінійна величина, що характеризує динамічний вплив в'язкості та називається товщиною втрати імпульсу:

$$\delta^{**} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{V} \left(1 - \frac{v}{V}\right) dy. \quad (12.4)$$

У граничному шарі на поверхні тіла, що обтікається, величину втрати імпульсу визначають за формулою

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{v}{V} \left(1 - \frac{v}{V} \right) dy. \quad (12.5)$$

У теорії граничного шару важливе значення має відношення товщини витіснення й товщини втрати імпульсу H

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}.$$

Для теплового та дифузійного граничних шарів використовують аналогічні характерні товщини та їх відношення.

12.2 Рівняння руху ламінарного граничного шару

Течія рідини в граничному шарі підпорядковується загальним рівнянням руху в'язкої рідини (Нав'є – Стокса) та методом оцінювання порядку кожного з членів рівнянь можна одержати рівняння руху для ламінарного шару. В основу аналізу покладено очевидне твердження, що лінійні розміри та швидкості в граничному шарі в поздовжньому й поперечному напрямку істотно різні: $\bar{\delta} \ll 1$, $\delta \ll l$. Ураховуючи, що сили інерції та в'язкості в шарі одного порядку (через великі швидкості течії v_x і великий градієнт швидкості), а їх порядки для сил в'язкості й сил інерції дорівнюють відповідно $\mu \frac{V}{\delta^2}$ і $\rho \frac{V^2}{l}$, одержимо

$$\mu \frac{V}{\delta^2} : \rho \frac{V^2}{l} \sim 1, \text{ або } \frac{\mu V b}{\rho \delta^2 V^2} \sim 1.$$

Звідси

$$\frac{\delta^2}{l^2} \sim \frac{\nu}{V \cdot l} = \frac{1}{Re}.$$

Тоді одержимо дуже важливе для граничного шару співвідношення

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}. \quad (12.6)$$

Це підтверджує раніше зазначене твердження Л. Прандтля про функціональну залежність відносної товщини граничного шару й числа Рейнольдса, причому чим більше Re , тим менше товщина $\bar{\delta}$.

Для встановлення рівнянь руху граничного шару оберемо як найпростіший випадок плоскої та сталої течії, а також знехтуємо масовими силами, як неістотними для граничного шару. Тоді рівняння Нав'є – Стокса набудуть такого вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (12.7)$$

Скористаємося вищезазначеним принципом оцінювання порядку кожного з членів рівнянь.

На зовнішній стороні шару $v_x \rightarrow V$, $\delta \ll l$, тому $\frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{V}{\delta}$.

Із рівняння нерозривності $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$, тому $\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{V}{l}$ і $v_y = \int_0^y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \sim \frac{V}{b} \delta$.

Порядок других похідних буде таким:

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \frac{V \cdot \delta}{l^3}; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{V}{l \cdot \delta}; \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{V}{l^2}; \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{V}{\delta^2}.$$

Цими величинами можна знехтувати як значно малими через лінійні розміри в знаменниках.

Тоді перше рівняння системи (12.7) набуде вигляду

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

у якому всі члени матимуть однаковий порядок.

Аналогічний аналіз порядку членів другого рівняння дозволяє знехтувати її чотирма членами, крім $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$. Тому остаточно систему (12.7) можна записати в такому вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (12.8)$$

Потрібно звернути увагу на друге рівняння в системі (12.8), із якого випливає важливий висновок:

$$P(y) = \text{const}. \quad (12.9)$$

Тобто, величина тиску за товщиною граничного шару не змінюється й тому тиск на твердій поверхні тіла дорівнює величині, яку розраховано для течії в ядрі, де її можна прийняти як потенціальну течію для ідеальної рідини.

Для потенціальної течії притаманні рівняння Д. Бернуллі

$$P + \frac{\rho V^2}{2} = C,$$

звідси

$$\frac{dP}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx}. \quad (12.10)$$

Тоді система рівнянь руху буде мати такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = V \frac{dV}{dx} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{dP}{dy} = 0. \end{array} \right. \quad (12.11)$$

Граничні умови для інтегрування цієї системи:

- за $y = 0 - v = 0$ (на поверхні за нерухомої стінки);
- при $y = \delta - v_x = V(x)$, де $V(x)$ визначають із розрахунку потенціальної течії.

Рівняння (12.8) і (12.11) мають назву рівняння Л. Прандтля та являють собою перші рівняння, на базі яких пізніше стали одержувати рівняння руху рідини в граничних шарах більш складної структури.

Необхідно звернути увагу, що ці рівняння одержані для найпростішого варіанта граничного шару – руху сталого, ламінарного, двомірного (причому $dV/dx = 0$, а тому $dP/dx = 0$). Для реальних течій, де $dP/dx \neq 0$, розрахунки граничного шару істотно ускладнені й часто їх можна вирішити чисельними методами з використанням комп'ютерної техніки.

Аналогічно одержують рівняння для теплового й дифузійного граничних шарів

$$V \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (12.12)$$

$$V \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (12.13)$$

де T – температура течії;

a – коефіцієнт теплопровідності;
 C – концентрація речовини;
 D – коефіцієнт дифузії.

12.3 Граничний шар на криволінійній поверхні. Точка відриву

Розглянемо уважніше рівняння (12.10) –
 $\frac{dP}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx}$, та перепишемо його в такому вигляді:

$$\frac{dP}{dx} + \rho V \frac{dV}{dx} = 0, \quad (12.14)$$

де x – це криволінійна координата в напрямку течії рідини в граничному шарі.

Із рівняння (12.14) можна зробити висновок: якщо швидкість течії буде зростати в напрямку течії, тобто за напрямом обтікання твердої поверхні ($\frac{dV}{dx} > 0$), то інший

член рівняння ($\frac{dP}{dx}$) повинен спадати. Це нагадує течію рідини в конфузорі. Для течії в граничному шарі навпаки можлива дифузорна зона, де тиск буде зростати за умови зменшенні швидкості течі. На рисунку 12.4 репрезентовано схему такої течії по криволінійній поверхні.

На рисунку 12.4 видно, що точки A і B знаходяться в конфузорній зоні, де відрив течії неможливий, оскільки $\frac{dV}{dx} > 0$, а тиск за напрямом течії зменшується. Тому тиск у кожній точці буде меншим, ніж у попередній. Такий

градієнт тиску буде сприяти руху рідини в граничному шарі.

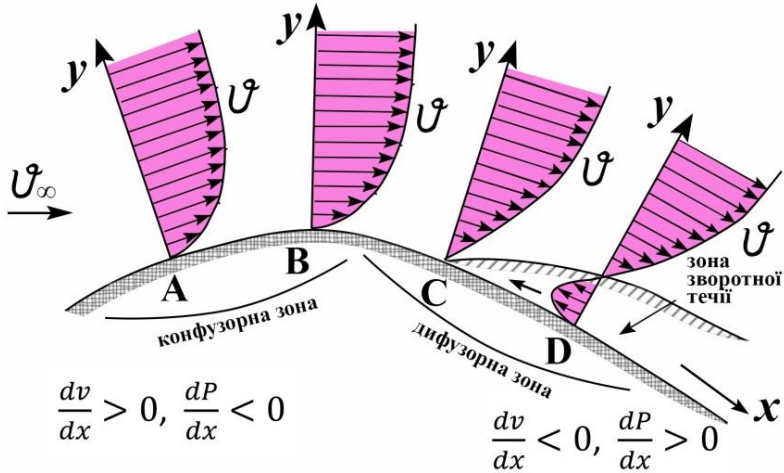


Рисунок 12.4 – Визначення точки відриву

У дифузорній частині $\frac{dV}{dx} < 0$ і $\frac{dP}{dx} > 0$, тому тиск на стінці зростає і в кожній наступній точці він буде більшим, ніж у попередній. Такий градієнт тиску не сприяє течії, і зрештою в якійсь точці швидкість стане дорівнювати нулю (точка C) і після проходження цієї точки з'являться сприятливі умови для організації зворотної течії та відриву граничного шару від твердої поверхні.

Точку відриву (точка C) визначається як точку, у якій тертя на стінці дорівнює нулю, тобто

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \text{ або просто } \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Тому розрахунок законів розподілення швидкості й тиску вздовж граничного шару та знаходження точки відриву є однією із задач розрахунку граничного шару.

12.4 Інтегральне співвідношення для динамічного граничного шару

В інтегральних розрахунках переважно використовують методи не на основі рівнянь Л. Прандтля, а на основі інтегральних співвідношень, які можна одержати або методом спеціального перетворення цих рівнянь, або за допомогою безпосереднього використання для граничного шару законів кількості руху та збереження енергії.

Розглянемо елементарний об'єм рідини, виділений у граничному шарі перерізами AB і CD та його поверхнею BC (рис. 12.5).

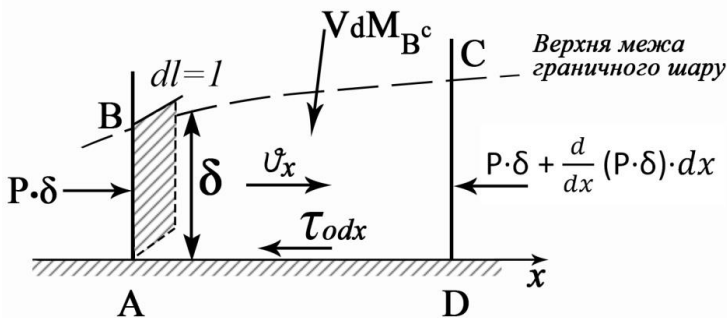


Рисунок 12.5 – До визначення інтегрального співвідношення для динамічного граничного шару

На рисунку 12.5: $ABCD$ – контрольна поверхня об'єму товщиною $dl = l$; $P \cdot \delta$ – сила тиску на поверхню AB ; $P \cdot \delta + \frac{d}{dx}(P \cdot \delta) \cdot dx$ – сила тиску на поверхні CD ; $\tau_0 \cdot dx$

– сила тертя на поверхні AD ; v_x – осереднена швидкість перенесення кількості руху.

Для маси рідини в об'ємі $ABCD$ використаємо рівняння кількості руху

$$\int_S \rho \cdot v_n \cdot v \cdot dS = P_{нов}, \quad (12.15)$$

де $P_{нов}$ – головний вектор поверхневих сил, що діють на виділений об'єм (при цьому масовими силами знехтувано).

Визначимо потік кількості руху через контрольну поверхню $ABCD$ у проєкціях на вісь X

$$\int_{S_{ABCD}} \rho \cdot v_n \cdot v_x \cdot dS = - \int_0^\delta \rho \cdot v_x^2 dy + \int_0^\delta \rho \cdot v_x^2 dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho \cdot v_x^2 dy \right) dx + V dM_{BC}$$

де dM_{BC} – маса рідини, що пройшла через поверхню BC за одиницю часу.

Рух вважаємо сталим, тому маса в об'ємі $ABCD$ залишається постійною, а маса, що пройшла через CD , відрізняється від маси, що пройшла через AB лише за рахунок її проходження через BC . Тоді

$$dM_{BC} = - \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho \cdot v_x dy \right) dx.$$

Ураховуючи це, можна спростити попереднє рівняння:

$$\int_{S_{ABCD}} \rho \cdot v_n \cdot v_x dS = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho \cdot v_x^2 dy \right) dx - V \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho \cdot v_x dy \right) dx.$$

Визначимо проєкцію основного вектора сил тиску на вісь X . У перерізі AB тиску дорівнює P , тому сила тиску дорівнює $p\delta$ (при $dl = 1$). У перерізі CD сила тиску буде

$$p\delta + \frac{d}{dx} (p\delta) dx = p\delta + p \frac{d\delta}{dx} dx + \delta \frac{dp}{dx} dx.$$

На поверхні BC тиск беремо середнім між P і $P + P \frac{dP}{dx} dx$. Тоді проєкція від такого тиску буде

$$\left(P + \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} dx \right) \frac{d\delta}{dx} \approx P \frac{d\delta}{dx} dx.$$

На поверхні AD сила від тертя буде $\tau_0 dx$. Тоді проєкція всіх сил на вісь X буде

$$p\delta - \left(p\delta + p \frac{d\delta}{dx} dx + \delta \frac{dp}{dx} dx \right) + p \frac{d\delta}{dx} dx - \tau_0 dx = -\delta \frac{dp}{dx} dx - \tau_0 dx$$

і рівняння кількості руху (1.15) матиме такий вигляд:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho \cdot v_x^2 dy - V \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho \cdot v_x dy = \delta \frac{dp}{dx} - \tau_0, \quad (12.16)$$

його називають інтегральним співвідношенням Кармана, або рівнянням імпульсів для плоского граничного шару.

Тиск p у цьому рівнянні можна виключити, якщо використати рівняння Д. Бернуллі для лінії течії за аналогією з (12.10)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho \cdot v_x^2 \cdot dy - V \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho \cdot v_x dx = \rho \delta V \frac{dV}{dx} - \tau_0 \quad (12.17)$$

Недоліком форм інтегральних співвідношень (1.16) і (12.17) є те, що в них використовується кінцева товщина граничного шару δ .

Тому методом відповідних перетворень і використання більш строгих товщин δ^* і δ^{**} (формули 12.2 і 12.5) одержують інші форми запису інтегральних співвідношень

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{dV}{dx} \frac{\delta^{**}}{V} \left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) = \frac{\tau_0}{\rho V^2} \quad (12.18)$$

Якщо позначити через H співвідношення δ^*/δ^{**} та ввести коефіцієнт сили тертя $C_f = 2\tau_0 / \rho V^2$, то (12.18) набуде вигляду

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{dV}{dx} \frac{\delta^{**}}{V} (2 + H) = \frac{C_f}{2}. \quad (12.19)$$

Необхідно зауважити, що існують інші форми запису цього співвідношення залежно від методів його рішення (наприклад, форма академіка Л. С. Лейбензона через баланс енергії в граничному шарі, форма проф. В. В. Голубева тощо).

12.5 Методи розрахунків граничного шару

Метою розрахунків граничного шару є знаходження залежностей $v_x = f(y)$, $P = f(x)$, $\tau_0 = f(x)$ і на цій основі

визначення товщин $\delta, \bar{\delta}, \delta^*, \delta^{**}$, а також втрати енергії за довжиною поверхні, коефіцієнтом втрати C_f і положенням точок відриву й переходу ламінарного граничного шару в турбулентний.

Методи розрізняють на розрахунки ламінарного плоского й просторового шару, окремо – розрахунки турбулентного шару. Основою для розрахунків є диференціальні рівняння типу рівнянь Л. Прандтля а частіше інтегральні співвідношення.

Для найпростішого прикладу випадку плоского граничного шару напівнескінченної пластини вирішення одержав у 1908 році Блазіус. Схему обтікання наведено на рисунку 12.6.

$$\text{Блазіус показав, що для коефіцієнта } C_f = \frac{\tau_0}{\rho v^2 / 2}$$

розв'язання має вигляд

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

а для відносної товщини

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

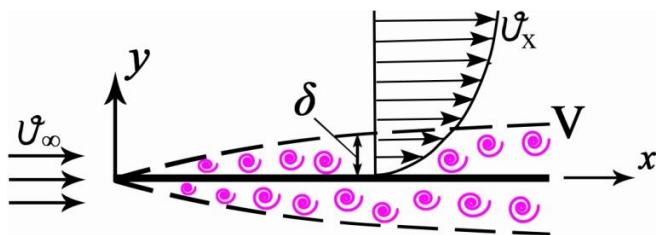


Рисунок 12.6 – Плоский граничний шар. Схема обтікання

Значення дотичної напруги на поверхні твердого тіла

$$\tau_0 = 0,332\rho\sqrt{\frac{\nu W^3}{x}}.$$

Було підтверджено, що течія в граничному шарі на пластині дифузійна, тому в її напрямку спостерігається тормозна дія твердої поверхні та зростає втрата енергії.

У 1921 році Польгаузен розробив зручний практичний метод розрахунку ламінарного шару на основі інтегрального співвідношення.

У вітчизняній практиці найбільшим попитом користується метод Лойцяньського, що згідно з експериментальними перевірками, дає гарні результати для ламінарного шару та є основою для поширення методу для турбулентного шару.

На сьогодні не існує точного методу розрахунку турбулентного граничного шару через занадто складну теорію турбулентності. На основі рівнянь для турбулентного руху (рівнянь Рейнольдса) можна одержати рівняння руху для турбулентного граничного шару, але розв'язати ці рівняння навіть для простих ситуацій неможливо, оскільки не уявляється можливим одержати замкнену систему рівнянь і встановити зв'язок між компонентами тензора турбулентних напруг та осередненими швидкостями руху.

Тому поки що використовують чисельні експериментальні коефіцієнти разом з емпіричними формулами. Зокрема, а аналогією зі степеневим законом руху рідини (відомим як закон ступеня 1/7) для швидкості користуються формулою

$$v_x = V \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}},$$

а зміну товщини шару δ по довжині x оцінюють за формулою

$$\frac{7}{72} \rho v_x^2 d\delta = \tau_0 dx,$$

або за формулою

$$\tau_0 = 0,045 \left(\frac{\rho v_x^2}{2} \right) \left(\frac{v_x \delta}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}},$$

з якої після інтегрування можна одержати формулу для визначення товщини турбулентного шару

$$\delta = 0,37 \left(\frac{y}{v_x} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}}.$$

Наведені залежності – лише окремі приклади емпіричних формул.

Оцінювання характеру течії в граничному шарі проводять за аналогією з круглими трубами за числом Рейнольдса Re , яке в цьому разі визначають за формулою

$$Re_{\delta} = \frac{V \cdot \delta}{\nu},$$

але труднощі виникають через те, що товщина δ є величиною змінною за x .

Вважають, що перехід ламінарного шару в турбулентний відбувається за умови $Re_{\delta} = Re_{кр} = 3 \cdot 10^5$.

12.6 Керування граничним шаром

Розроблення методів зниження втрат енергії під час обтікання рідиною твердих поверхонь як зовнішніх (крило, кораблі, ракети тощо), так і внутрішніх (труби, енергетичні лопатеві машини, реактори тощо), завжди було актуальним завданням. Тим більше це стає першочерговим завданням у наш час, коли постійно збільшуються потужності й швидкості протікання та обтікання, а більшість практично важливих течій відбувається за великих чисел Рейнольдса.

Розуміючи, що втрати енергії здебільшого відбуваються в граничному шарі, де реальна рідина найбільш інтенсивно проявляє свою основну властивість – в'язкість, вирішення задачі зниження втрат енергії дослідники вбачають методом впливу на граничний шар.

Дослідник Л. Прандтль показав, що в'язкість найбільш істотно проявляє себе не по всій товщині турбулентного граничного шару, а лише в його невеликій внутрішній частині, що безпосередньо прилягає до твердої поверхні та становить 10–15 %. Підтвердженням цього є приклади істотного зниження гідродинамічного опору (до 60–80 %) методом уведення в течію невеликої кількості розчину полімерів. На жаль, широкого використання цього методу не потрібно чекати, не завжди його можна здійснити.

У наш час більш широкого використання набувають такі методи, як наддув або підсос граничного шару. Для цього на поверхні, що обтікається, через систему малих отворів або щілин уводять (або відводять) невеликі порції рідини чи газу. Цей метод широко використовують в авіації та ракетобудуванні, насамперед на крилах та в соплах реактивних двигунів. Інколи цю ідею втілюють у лопатевих гідромашинах і компресорах у вигляді щілинних лопатей для ліквідації вихрових зон на лопатях за режиму

недовантаженості. На доцільність такого рішення вказував ще С. О. Чаплигін у 1902 році. Відомі також розвинені системи механізації крил літаків (предкрилки, закрилки, елерони тощо).

Вплив на характер течії в граничному шарі часто здійснюють за рахунок змін (варіацій) кутів набігання рідини чи газу на лопаті турбін, насосів, компресорів. Збільшення об'єму рідини в граничному шарі для збільшення сумарної інтенсивності вихорів призводить до збільшення сили М. Є. Жуковського – і це широко використовують в авіації.

Не потрібно забувати й відому рекомендацію про існування так званих ламіризованих профілів, де здійснюється подовження зони ламінарної течії в граничному шарі та зменшення (або повна ліквідація) турбулентної зони.

Інколи для того щоб точку відриву граничного шару «затягнути» подалі в турбулентну зону, на твердій поверхні спеціально організують виступ, що відіграє роль штучного турбулізатора й забезпечує істотне зменшення коефіцієнта C_f .

У зв'язку з цим видається необхідним обговорення питання про недоцільність забезпечення високої чистоти твердої поверхні, що обтікається, по всій довжині граничного шару.

Перелік питань до розділу 12

1 Що таке граничний шар і які його дві основні ознаки?

2 Яка відмінність між швидкостями v_∞, v, V ?

3 Яка відмінність між товщинами граничного шару $\delta, \bar{\delta}, \delta_n, \delta^*, \delta^{**}, \bar{\delta}_T, \bar{\delta}_0$?

4 Що таке градієнт швидкості та який його зв'язок із дотичною напругою?

5 Чому дорівнює товщина граничного шару під час обтікання твердого тіла ідеальною рідиною?

6 Поясніть, що таке динамічний граничний шар і які ще граничні шари вам відомі?

7 Поясніть, що таке товщина витіснення?

8 Поясніть, що таке товщина втрати імпульсу?

9 Поясніть фізичний зміст виразів

$$Q_p = \int_0^y v dy \text{ і } Q_{i0} = V(y - \Delta).$$

10 Поясніть фізичний зміст виразів

$$k_1 = 2\rho h V^2 \text{ і } k_2 = \rho \int_{-h}^h v^2 dy.$$

11 Поясніть фізичний зміст виразу $X = k_1 - k_2$.

12 Покажіть і поясніть особливості граничного шару на криволінійній поверхні.

13 Точка відриву граничного шару. Причина

14 Рівняння Л. Прандтля.

15 Поясніть, чому дорівнює зміна тиску за товщиною граничного шару $P(y)$?

16 Інтегральне співвідношення для граничного шару.

17 Методи управління граничним шаром.

18 Мета розрахунку граничного шару.

19 Ламінарний і турбулентний граничні шари. У якому разі втрати енергії більші?

20 Що таке τ_0 ?

13 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ГІДРОМЕХАНІКА

13.1 Предмет електромагнітної гідромеханіки

Електромагнітна гідромеханіка вивчає закони руху рідини й газів в електромагнітному полі під дією пондеромоторних сил – сил електромагнітного походження. Виникла ця нова галузь знань на стику гідромеханіки та електродинаміки й останнім часом знаходить усе ширше використання під час вирішення технічних завдань.

Електромагнітну гідромеханіку можна розділити на дві окремі частини (рис 13.1).



Рисунок 13.1 – Частини електромагнітної гідромеханіки

Магнітна гідромеханіка вивчає рух електропровідних рідин і газів в електромагнітному полі.

Електрогідромеханіка вивчає рух непровідних рідин і газів під дією електричного поля.

В обох випадках рух рідкого середовища здійснюється за рахунок раніше відомих механічних сил (масових та поверхневих) і додаткових сил електромагнітного походження (пондеромоторних).

Дисципліна ця зародилася як наука про рух провідних газових середовищ космічного простору. Але

пізніше виявилось, що такі середовища існують також на Землі та можуть широко використовуватися в техніці.

Плазмові двигуни для космічних кораблів, пряме перетворення теплової енергії на електричну, транспортування й вимірювання параметрів течії електропровідних рідин чи газів, електромагнітні засоби розділення й збагачення корисних копалин, електромагнітні фільтри, управління термоядерними й хімічними реакціями, додаткове прискорення руху різноманітних матеріальних середовищ та окремих тіл – ось неповний перелік проблем, для вирішення яких інженерові потрібні знання законів електромагнітної гідромеханіки.

13.2 Рідина чи газ в електромагнітному полі

Відомо, що в просторі між макроскопічними та мікроскопічними тілами масою m_1 і m_2 , розташованих на відстані r , діють об'ємні сили взаємного тяжіння, величина яких дорівнює

$$F_{zp} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

де γ – гравітаційний коефіцієнт.

Течію рідини в полі сил тяжіння називають гравітаційною.

Аналогічно між двома зарядженими тілами виникає електричне поле, і на рідину, розміщену в цьому полі, діє пондеромоторна об'ємна сила, подібна гравітаційній. Це поле буде електростатичним, якщо заряджені тіла будуть нерухомі.

Між рухомими зарядженими тілами виникає електромагнітне поле.

Якщо в електромагнітне поле помістити рідину-діелектрик, то її електрично нейтральні молекули (наприклад, H_2O) під дією електростатичного поля лише повернуться в напрямку, протилежному зарядам, утворять упорядковану молекулярну структуру. У цьому разі нерухома чи рухома рідина проводить електричний струм не буде.

Якщо помістити в це поле рідину-провідник (водні розчини солей, кислот тощо, що принесуть у воду іони), то іони одержують упоряджений рух, тобто через таку рідину буде проходити електричний струм. Причому рухомі іони примусять рухатися всю рідину.

Якщо така рідина буде рухатися в магнітному полі (що між полюсами N і S), то в ній унаслідок електромагнітної індукції виникає електричний струм. Взаємодія між цим током і зовнішнім магнітним полем викликає появу об'ємних сил електромагнітної природи (пондеромоторних).

Необхідно зауважити, що ділення рідин і газів на діелектрики й провідники умовне. У дійсності будь-яке середовище проводить електрику й діелектриком вважають лише таку, для якої провідністю можна знехтувати. Наприклад, за кімнатної температури й атмосферного тиску більшість рідин технічних гідросистем (вода, нафтове масло, керосин тощо), оточуюче повітря й гази можна вважати діелектриками.

Однак за певних умов нейтральні молекули (диполі) можуть стати іонами й діелектричне середовище може стати електропровідним. Наприклад, іонізації навіть дистильованої води, а тим більше технічної, досягають додаванням до неї розчинених солей, кислот чи лугів або дрібних порошоків електропровідних матеріалів (наприклад, заліза, алюмінію тощо). Помічено також, що технічна вода становиться провідною під час проходження зони кавітації

чи місць із великими градієнтами швидкості, високочастотної пульсації тиску та подібних умов для руйнації молекул.

Іонізація повітря та інших газів відбувається ід час електричних розрядів, опромінювання чи нагріванні до високих температур. За умови повної іонізації газ називають плазмою.

Вплив магнітного поля на потік електропровідної рідини чи газу оцінюють пондеромоторною силою, питома величина якої (на одиницю об'єму) дорівнює

$$\bar{F}_n = \rho_e \cdot \bar{E} + \bar{I}_e \times \bar{B}, \quad (13.1)$$

де ρ_e – густина електричних зарядів у рідині;

\bar{E} – напруження електричного поля;

\bar{I}_e – густина електричного струму в рідині;

\bar{B} – магнітна індукція.

Величину \bar{I}_e визначають за законом Ома

$$\bar{I}_e = \rho_e \cdot \bar{v} + \sigma_e \cdot (E + \bar{v} \times \bar{B}), \quad (13.2)$$

де \bar{v} – швидкість руху рідини;

σ_e – питома електрична провідність рідини.

У разі малої густини електричних зарядів вираз (2.1) спрощується до виду

$$\bar{F}_n = \bar{I}_e \times \bar{B}, \quad (13.3)$$

де

$$\bar{I}_e = \sigma_e \cdot (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \quad (13.4)$$

Отже, якщо помістити провідну або іонізовану рідину в магнітне поле й викликати в неї електричний струм, ми одержуємо пондеромоторну силу, за допомогою якої можна ефективно впливати на течію рідини додатково до відомих механічних впливів.

13.3 Два принципи використання пондеромоторних сил

Залежно від причин руху електропровідної рідини можна визначити два різних режими роботи електромагнітних установок.

У першому прикладі течію рідини крізь магнітне поле зумовлюють зовнішні сили (гравітаційні, тиску, енергії, одержаної від насоса чи компресора). Тоді під час перетину магнітних силових ліній в електропровідній рідині виникає електричний струм, який можна за допомогою спеціальних контактів, занурених у рідину, зняти й використати в зовнішній електричній мережі. Такі установки, що використовують зовнішню енергію для протікання рідини крізь магнітне поле й створюють (генерують) електричний струм, мають назву «генератори» та працюють відповідно в генераторному режимі. Прикладом таких установок є магнітогідродинамічні генератори (МГД-генератори), що працюють сьогодні.

У другій ситуації рух провідної рідини зумовлений винятково пондеромоторними силами, що виникають в електромагнітному полі, через яке рухається рідина. У цьому разі електричне й магнітне поля спеціально створюють із заданими параметрами. Режим роботи таких установок будемо називати насосним – зовнішня енергія (магнітна й електрична) передається енергії течії рідини. За цим принципом працюють індукційні насоси.

У разі, якщо рідини не провідні (електрогідромеханіка), також можна організувати роботу установок у генераторному й насосному режимах.

Так, у генераторному режимі діелектричні рідкі середовища, що проходять через електричне поле, свою кінетичну енергію перетворюють на електричний струм (електрогідродинамічний генератор ЕГД). Зворотній ЕГД-генератор являє собою ЕГД-насос.

Розглянемо принципові схеми таких установок. На рисунку 13.2 зображено схему МГД-генератора.

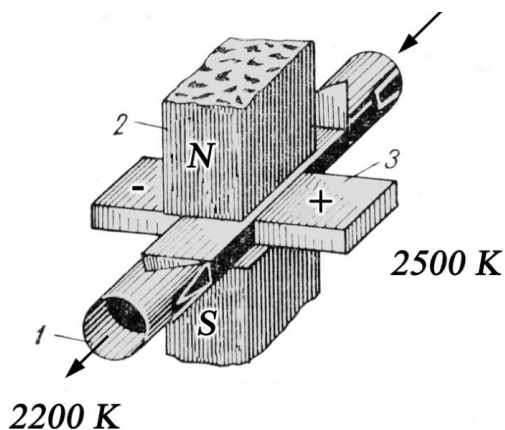


Рисунок 13.2 – МГД-генератора

До входу в канал генератора (найчастіше це сопло Лавалю) паливо (нафтопродукт, природний газ тощо) спалюється в спеціальній камері, а продукти згоряння (газ) розігрівають до 2 500 K. За такої температури газ іонізується і стає електропровідним. Сопло, через яке під тиском пролітає розпечений газ, пронизується потужним магнітним полем NS , створеним здебільшого електромагнітами. Водночас у товщі газового потоку індукується електричний струм, який за допомогою

електродів A і B , розміщених під прямим кутом до напрямку магнітних силових ліній, відводиться в зовнішню електромережу. Отже, кінетична й теплова енергії іонізованого газу безпосередньо перетворюється на електричну. На жаль, не вся, а лише енергія 200–300 К, тобто ККД МГД-генератора низький. Тому зазвичай гарячий газ на виході з температурою 2 200–2 300 К спрацьовується спочатку газовою турбіною, а потім – паровою зі своїми електрогенераторами. У результаті, ККД такої комбінованої установки сягає понад 55 %.

На рисунку 13.3 показана схема індукційного насоса, призначеного для перекачування провідних рідин (електролітів) і розплавлених металів за допомогою магнітного й електричного полів.

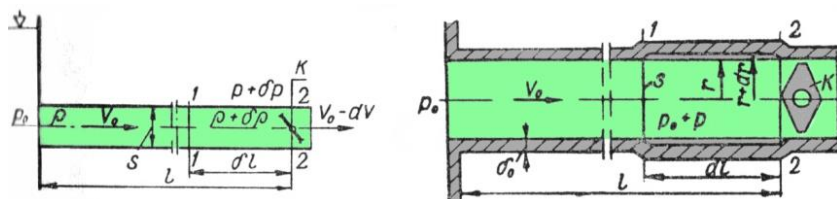


Рисунок 13.3 – Індукційний насос

Як видно, рисунки 13.2 і 13.3 дуже подібні. Але, на відміну від попереднього, на рисунку 13.3 електрична енергія не відведена від контактів A і B , а підведена для створення електричного поля. Насос, побудований за такою схемою, може перекачувати також діелектричну рідину, але для цього рідину перед входом у нього попередньо іонізують (наприклад, опромінюванням або електричним розрядом).

Необхідно зауважити, що в цьому азі, крім іонів, утворюються вільні електрони, які через свою високу рухомість поглинаються анодом. У подальшому очищена в

такий спосіб рідина разом з іонами й нейтральними диполями потрапляє в електричне поле, яке її пересікає та здійснює вже відомий електрогідродинамічний ефект.

Насоси такого типу мають внутрішній ККД до 50 %, їх називають іонно-конвекційними.

Неважко помітити (і це видно навіть із рисунків) установки, що працюють у генераторному або насосному режимі, є взаємно оберненими, як і традиційні гідравлічні машини – насоси й турбіни.

13.4 Основні рівняння електромагнітної гідромеханіки

Основою електромагнітної гідромеханіки є закони руху рідини й електромагнетизму.

Якщо лінії течії в'язкої електропровідної рідини перетинають силові лінії магнітного та електричного полів, то така течія може бути описана сукупністю двох систем рівнянь. Перша з них повинна визначати закономірність руху самої рідини, друга – закон зміни електромагнітного поля.

Першу систему рівнянь можна одержати завдяки системі рівнянь Нав'є – Стокса:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = \rho \cdot \bar{F}_0 - \nabla \bar{P} + \mu \Delta \bar{v} + \bar{F}_n, \quad (13.5)$$

де \bar{F}_0 – зовнішня масова сила механічного походження;

\bar{F}_n – пондеромоторна сила.

Ураховуючи відому залежність для \bar{F}_n (13.1), останнє рівняння можна записати в такому вигляді:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = \rho \cdot \bar{F}_0 - \nabla \bar{P} + \mu \Delta \bar{v} + \rho_e \bar{E} + \bar{I}_e \times \bar{B} \quad (13.6)$$

Проте ця система буде незамкненою через появу додаткових членів, що описують магнітогідродинамічну течію. Для їх визначення використаємо відомі з теорії електромагнетизму рівняння Максвелла для магнітного поля в однорідній електропровідній течії, що рухається зі швидкістю $v \ll c$

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \frac{1}{\eta} (\nabla \times \bar{B}) = \bar{I}_e, \\ \nabla \cdot \bar{D} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \end{cases} \quad (13.7)$$

де η – магнітна проникність середовища;

$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ – електрична індукція;

$\bar{B} = \eta \bar{H}$ – магнітна індукція.

У більшості практичних задач густину, в'язкість, електричну ε та магнітну η проникність рідини можна вважати незалежними від напруженості електричного поля \bar{E} та напруженості магнітного поля \bar{H} .

Крім того, у рівняннях Максвелла (13.7) за умов малої густини зарядів ρ_e вводять перевірені практикою такі спрощення:

а) струмом зміщення $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ і струмом конвекції $\rho_e \bar{E}$

можна знехтувати;

б) густина електричного струму \bar{I}_e відповідає закону Ома у вигляді (13.4).

Тоді із сумісного рішення першого й другого рівнянь Максвелла за умов малої густини ρ_e і заміні \bar{I}_e згідно з (13.4) одержимо таке рівняння індукції для течії рідини:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} (\nabla \times \bar{B}) = \sigma_e (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \quad (13.8)$$

Друге рівняння Максвелла перетворимо до вигляду

$$\bar{I}_e = \frac{1}{\eta} (\nabla \times \bar{B}) = \sigma_e (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \quad (13.9)$$

Підставляючи \bar{I}_e по (13.9) у перше рівняння системи (13.6) і приєднуючи до неї (13.8), одержимо систему рівнянь магнітної гідромеханіки

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = \rho \bar{F}_0 - \nabla \bar{P} + \mu \Delta \bar{v} + \frac{1}{\eta} [(\nabla \times \bar{B}) \times \bar{B}], \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{v} \times \bar{B}) + \frac{1}{\eta \sigma_e} \nabla \bar{B}, \\ \nabla \cdot \bar{v} = 0, \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0. \end{array} \right. \quad (13.10)$$

Підкреслимо, що система рівнянь (13.10) є сумісною системою основних рівнянь гідродинаміки в'язкої нестисливої рідини а рівнянь електромагнетизму за умови,

що течія рідини й електричні та магнітні поля взаємопов'язані.

Її можна конкретизувати в більш знайомій системі рівнянь Нав'є – Стокса.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \bar{v} \\ \operatorname{div} \bar{v} = 0 \end{cases}, \quad (13.11)$$

де $\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_n = \bar{F}_0 + \bar{F}_e + \bar{F}_m$ – сумарна масова сила, що складається з механічної масової сили \bar{F}_0 , сили електричного \bar{F}_e й магнітного \bar{F}_m походження, які в сумі становлять одну пондеромоторну силу \bar{F}_n .

Крім того, система рівнянь (13.10) дає можливість одержати окремі формули для сил \bar{F}_e і \bar{F}_m для різних умов практичних розрахунків, зокрема для умов протікання електропровідної рідини (задачі магнітної гідромеханіки) і для протікання діелектричних рідин чи газів (задачі електрогідромеханіки). Наводити ці формули в межах цього курсу недоречно.

14.4 Подібність електромагнітогідродинамічних явищ

Як відомо, за допомогою відповідних безрозмірних критеріїв можна виділити подібні течії. У гідродинаміці такі критерії були одержані методом аналізу розмірності величин, що входять у рівняння Нав'є – Стокса.

Рух електропровідної рідини в електромагнітному полі описується більш складною системою (13.10). Перше

рівняння цієї системи відрізняється від рівняння Нав'є – Стокса додатковим членом, що враховує наявність пондеромоторних сил, які залежать від чотирьох основних показників електромагнітного поля.

Спочатку проведемо аналіз розмірності величин, що характеризують вплив електромагнітного поля.

Визначивши розмірність величини $\left[\frac{1}{\eta\sigma_e} \right] = \text{м}^2/\text{с}$,

помічаємо, що вона має розмірність кінематичної в'язкості,

тому величину $\frac{1}{\eta\sigma_e}$ в магнітній гідродинаміці називають

магнітною в'язкістю ν_m

$$\nu_m = \frac{1}{\eta\sigma_e}. \quad (13.12)$$

За аналогією зі звичайним числом Рейнольдса

$\text{Re} = \frac{\nu \cdot l}{\nu}$ безрозмірне співвідношення $\frac{V_0 \cdot L_0}{\nu_m}$ називають

магнітним числом Рейнольдса Re_m

$$\text{Re}_m = \frac{V_0 L_0}{\nu_m}, \quad (13.13)$$

де V_0 – характерна швидкість течії;

L_0 – характерний розмір течії.

Число Re_m визначає динамічні особливості магнітогідродинамічної течії та являє собою відношення

швидкості V_0 течії рідини до швидкості $V_m = \frac{V_m}{L_0}$, з якою магнітне поле поширюється в цьому середовищі.

Другим характерним критерієм подібності для електромагнітної течії є безрозмірне число Хартмана Ha

$$Ha = L_0 B_0 \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}}, \quad (13.14)$$

де B_0 – магнітна індукція зовнішнього поля;

μ – динамічна в'язкість рідини.

μ

Число Ha показує співвідношення між силами магнітної в'язкості та звичайними (механічними) силами в'язкості. Якщо число Ha звести до другого степеня й розділити на число Re , то одержимо число M (магнітне число для течії)

$$M = \frac{Ha^2}{Re} = \frac{\sigma_e L_0 B_0^2}{\rho V_0}, \quad (13.15)$$

Число M показує співвідношення між пондеромоторними силами й конвективними силами інерції. Якщо $M \ll 1$, то пондеромоторні сили малі порівняно з конвективними силами інерції й ними можна знехтувати, а під час розв'язання задач користуватися звичайними рівняннями гідродинаміки для в'язкої рідини.

Інколи користуються ще одним критерієм – магнітним числом Прандтля:

$$P_{rm} = \frac{Re_m}{Re} = \sigma \mu_0 \nu = \frac{\nu}{\nu_m} \quad (13.16)$$

Число Прандтля характеризує відношення дисипації механічної енергії (за рахунок в'язкості) до дисипації електромагнітної енергії (за рахунок наявності магнітної в'язкості).

Необхідно зазначити, що залежно від обраних масштабів і параметрів гідродинамічної течії та електромагнітних полів можна одержати цілий ряд інших критеріїв, що будуть характеризувати відношення відповідних сил.

Перелік питань до розділу 13

- 1 Предмет електромагнітної гідромеханіки.
- 2 Яка різниця між магнітною гідромеханікою та електрогідромеханікою?
- 3 Рідини електропровідні й діелектрики.
- 4 Пондеромоторні сили.
- 5 Що означає вираз $\vec{F}_n = \rho_e \cdot \vec{E} + \vec{I}_e \times \vec{B}$?
- 6 Електропровідні рідини в магнітному полі.
- 7 Чотири вектори електромагнітного поля.
- 8 Два принципи використання пондеромоторних сил.
- 9 МГД-генератор. Індукційний насос.
- 10 Основні рівняння електромагнітної гідромеханіки. Їхні зв'язки із рівняннями Нав'є – Стокса.
- 11 Сумарна масова сила в рівняннях Нав'є – Стокса.
- 12 Критерії подібності. Магнітне число Рейнольдса, його фізичний зміст.

14 ГІДРОМЕХАНІКА БАГАТОФАЗНИХ ТЕЧІЙ

14.1 Огляд і характеристики багатофазних течій

У природі та техніці можна спостерігати рух рідини чи газових середовищ, що складаються з різних компонентів і які в подальшому будемо називати багатофазними течіями, оскільки компоненти, із яких вони складаються знаходяться часто в різних фазах – твердотільні, рідинні чи газові.

Прикладами багатофазних течій є:

- рух повітря (вітер) із частинками пилу, піску, краплин дощу, снігу тощо;
- течія води в річці з перенесенням цьому піску та утворенням заносів;
- рух по трубах чи каналах різноманітних сумішей у разі організації гідро- або пневмотранспорту;
- подавання в камери згоряння котлів чи теплових двигунів подрібненого твердого палива разом з окислювачем (краплі бензину в потоці повітря, водовугільне паливо теплових електростанцій, паливні суміші газотурбінних та ракетних двигунів, тощо);
- течія нафти зі свердловини, до якої часто приєднуються вода, газ і пісок у різних пропорціях.

Незважаючи на те, що такі течії мають велике господарське значення, їх гідромеханіка та основні закономірності вивченні недостатньо й часто ґрунтуються на рекомендаціях, одержаних для якоїсь однієї галузі чи виду техніки. Наприклад, для парових турбін чи систем гідротранспорту. Тому немає навіть єдиної взаємоузгодженої термінології для багатофазної течії.

Доцільно із самого початку домовитися, що «сумішшю» ми будемо називати суму всіх матеріальних складових, з яких складається ця течія. Кожна з них буде

мати свою «фазу» – тверду, рідку чи газову. Зазвичай, одну із цих фаз будемо розглядати як основну, домінуючу за енергетичними критеріями.

Усі складові суміші будемо розділяти на тверді й легкі фази. Серед сумішей будемо окремо виділяти «суспензії», що відрізняються тонкодисперсними включеннями розміром від 50 мкм до 100–150 мкм і які інколи можна розглядати як реологічні рідини.

До гідродинамічних характеристик сумішей належать такі:

а) швидкість зрушення – це середня мінімальна швидкість течії основної фази, із якої починається рух твердої частинки;

б) критична швидкість – це швидкість течії гідросуміші, що передуює осадженню твердих частинок. Зазвичай, ця швидкість на 10–20 % більша від мінімальної швидкості, за якої можливе переміщення частинок цієї крупності;

в) об'ємні співвідношення фаз.

$$\eta_{T_o} = \frac{V_T}{V_c} = \frac{F_T \cdot L}{(F_T + F_l) \cdot L} = \frac{F_T}{F_c}, \quad (14.1)$$

де η_{T_o} – об'ємна концентрація твердої фази;

V_T і V_c – об'єми твердої фази та в цілому суміші;

F_T , F_l і F_c – площі в перерізі течії, що займають окремо тверда фаза, легка та вся суміш;

L – довжина виділеного об'єму течії;

г) масові співвідношення фаз.

$$\eta_{T_m} = \frac{V_T \cdot \rho_T}{V_T \cdot \rho_T + V_l \cdot \rho_l} = \frac{F_T \cdot \rho_T}{F_c \cdot \rho_c}, \quad (14.2)$$

де η_{T_m} – масова концентрація твердої фази;

ρ_T, ρ_l, ρ_c – густини твердої фази, легкої та суміші.

Істинні об'ємну φ_{T_o} та масову φ_{T_m} концентрації фаз визначають за формулами

$$\varphi_{T_o} = 1 - \eta_{T_o}, \quad (14.3)$$

$$\varphi_{T_m} = 1 - \eta_{T_m}; \quad (14.4)$$

д) швидкості суміші та фаз.

Позначимо як v_T, v_l і v_c середні швидкості твердої фази, легкої та суміші відповідно.

Зв'язок між ними визначають такими співвідношеннями:

$$F_c \cdot v_c = F_T \cdot v_T + F_l \cdot v_l, \quad (14.5)$$

що являє собою рівняння нерозривності, яке може бути репрезентовано в такому вигляді:

$$v_c = \eta_{T_o} \cdot v_T + \eta_{l_o} \cdot v_l = v_l - \eta_{T_o} (v_l - v_T). \quad (14.6)$$

Зазвичай

$$v_l > v_c > v_T, \quad (14.7)$$

але, як встановлено експериментально, за малих концентрацій фаз можна вважати, що

$$v_l = v_c = v_T. \quad (14.8)$$

У такому разі вважають, що основна фаза (основна складова течії) пасивна стосовно до інших складових. Тоді для розрахунків можна використовувати формули для чистої води.

14.2 Поняття про гідравлічну крупність

Гідравлічною крупністю W називають швидкість рівномірного падіння частинки в нерухомій рідині.

Умовою рівномірного падіння є виконання рівняння

$$G = F,$$

де G – вага частинки;

F – сила супротиву з боку рідини.

Величину G визначають за формулою

$$G = \frac{1}{6} \pi D^2 g (\rho_1 - \rho), \quad (14.9)$$

де D – діаметр частинки;

ρ_1 – густина частинки;

ρ – густина води.

Величину F визначають за формулою Стокса

$$F = 3\pi\mu DW \quad (14.10)$$

де W – гідравлічна крупність частинки.

Прирівнюючи (14.9) і (14.10), одержимо

$$W = gD^2 \frac{\rho_1 / \rho - 1}{18\mu}. \quad (14.11)$$

За умови турбулентного режиму обтікання частинки й числа Рейнольдса $Re > 400$ для $D > 2$ мм

$$W = 0,875 \sqrt{gD \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1 \right)}. \quad (14.12)$$

За умови, якщо $1 < Re < 30$ і $0,1 < D < 0,6$ мм

$$W^{3/2} = \frac{gD^{3/2}}{11,2\sqrt{\nu}} \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1 \right). \quad (14.13)$$

У разі, якщо $30 < Re < 400$ і $0,6 < D < 1,2$ мм

$$W^{1,8} = \frac{gD^{1,2}}{4,4\nu^{0,2}} \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1 \right). \quad (14.14)$$

Наведені вище формули для підрахунку гідравлічної крупності підтверджують той факт, що W залежить від Re та розмірів твердих частинок.

За наявності в суміші декількох різних твердих фракцій гідравлічну крупність визначають як середньозважену за формулою

$$W_{сеп} = \frac{\sum W_i P_i}{100}, \quad (14.15)$$

де P_i – процентний склад кожної фракції.

Інколи гідравлічну крупність визначають як середньоарифметичну

$$W = \frac{W_1 + W_2}{2}, \quad (14.16)$$

або середньгеометричну

$$W = \frac{W_1 + W_2 + \sqrt{W_1 \cdot W_2}}{3}, \quad (14.17)$$

де W_1 і W_2 – крупність для крайніх розмірів даної фракції.

У подальшому буде показано, що величина гідравлічної крупності W є основною характеристикою багатофазної течії, і тому вона входить до багатьох розрахункових формул.

14.3 Критерії подібності багатофазних течій

Незважаючи на велику складність багатофазних течій, до них, як і до простих течій, можна застосувати методи моделювання й визначити масштабні критерії подібності, зокрема загальновідомий критерій Рейнольдса

$Re_c = \frac{v_c \cdot D}{\nu}$, де індекс «с» означає, що параметри

притаманні суміші в цілому.

Але для багатофазних течій критерій Re_c не є головним. Сили в'язкості та інерції в таких течіях головні для визначення умови падіння частинок на дно течії. Тому головним критерієм під час забезпечення подібності є критерій Фруда

$$Fr = \frac{v_c^2}{gD}, \quad (14.18)$$

який визначає відношення сил інерції до сил тяжіння, тому що саме сили тяжіння є причиною осадження твердих фаз на дно.

У деяких ситуаціях можна використати й ряд других критеріїв, наприклад, критерій Етвіна

$$E_T = \frac{g(\rho_T - \rho_L) \cdot D^2}{\sigma}, \quad (14.19)$$

що показує відношення сил тяжіння до сил поверхневого натягу; або критерій Вебера

$$W_B = \frac{\rho_c v_c^2 D}{\sigma}, \quad (14.20)$$

який показує відношення сил інерції до сил поверхневого натягу.

У кожному разі, обираючи критерій (або декілька критеріїв) подібності, ретельно аналізують основні параметри течії суміші й поведінку кожної з фаз. Інколи доцільно буде застосувати критерії Галілея або Струхалія.

14.4 Перенесення твердих частинок основною фазою

Уперше механізм зависання, перенесення й осадження частинок у течії дослідив і пояснив М. Є. Жуковський у роботі «О снежных заносах и заиливании рек». Він назвав дві головні причини піднімання й зависання частинок у потоці. Перша – несиметричне обтікання твердої частинки основною течією, появою в результаті циркуляції швидкості навкруги частинки і в результаті виникнення підйимальної сили Y .

Друга – турбулентна структура течії та виникнення в ній вихрових шнурів.

На рисунку 14.1 показані сили, що діють на тверду частинку з твердої фази збоку рідини як основної фази: G – сила тяжіння, F_A – сила лобового тиску, Y – підіймальна сила Жуковського.

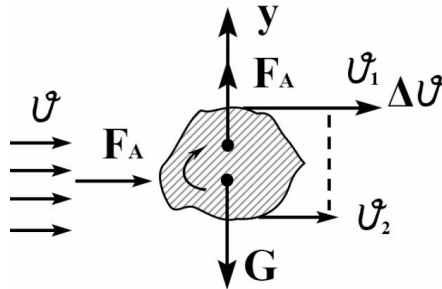


Рисунок 14.1 – Сили, що діють на тверду частинку в рідині

Якщо частинка знаходиться на повороті течії, то на неї буде діяти відцентрова сила.

Для того, щоб частинка була у зваженому стані, необхідно виконання умови $v_y > W$. Перехід частинки в такий стан починається за швидкості

$$v_{нз} = 0,24 + Bh, \quad (14.21)$$

де $v_{нз}$ – швидкість незамулювання;

h – глибина течії;

B – коефіцієнт, що залежить від W .

Із вихрової природи течії відомо, що максимальна вертикальна складова швидкості спостерігається на дні течії та дорівнює нулю на її поверхні. Тому найбільш дрібні частинки знаходяться біля поверхні, а більш важкі – біля

дна й лише інколи спливають і рухаються стрибками (рис. 14.2).

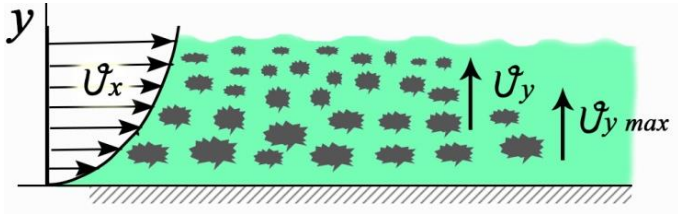


Рисунок 14.2 – Розподілення твердих частинок у потоці

Тому можна виділити два види руху важких частинок – потяг і зваження. Причинами такого руху є підймальна сила й сила лобового тиску.

Для початку руху частинок у придонній зоні необхідна швидкість розмивання v_o , визначена за формулою Леві

$$v_o = 1,4 \sqrt{g D_{cep}} \cdot \ln \frac{h}{7 D_{cep}} \cdot \left(\frac{D_{max}}{D_{cep}} \right)^{1/7}, \quad (14.22)$$

або за формулою Гончарова

$$v_o = 1,4 \sqrt{g D_{cep}} \cdot \lg \frac{8,8h}{d_k}, \quad (14.23)$$

де h – глибина течії;

D_{cep} – середня крупність частинок;

d_k – крейсерська крупність (90 %).

Перехід важких частинок зі стану потяга до зваженого стану відбувається за дещо більшої швидкості,

визначеної за формулою (14.20), або за формулою Є. А. Замаріна

$$v_{из} = \sqrt{\frac{\rho W_o \sqrt{W_{сер}}}{0,022 \sqrt{R \cdot I}}}, \quad (14.24)$$

де ρ – мутність течії, кг/м³;

R – гідравлічний радіус перерізу течії;

I – гідравлічний уклін;

$W_{сер}$ – середня гідравлічна крупність;

W_o – умовна гідравлічна крупність (взята з довідника).

За умови, якщо $W_{сер} = 0,002 \div 0,008$ м/с – $W_o = W_{сер}$.

За умови, якщо $W_{сер} = 0,0004 \div 0,002$ м/с – $W_o = 0,002$.

Коли відомо, що швидкість течії близько $v = 1,2v_{из}$, можна визначити мутність ρ і відповідно витрату зважених частинок

$$\rho = 0,002 \frac{v}{W_o} \sqrt{\frac{R \cdot v}{W_{сер}}}, \quad \text{кг/м}^3 \quad (14.25)$$

Деякі висновки зі спостережень течії:

1) під час транспортування пульпи (подрібненої руди) спостерігається як зваженість, так і потяг частинок;

2) у разі повної зваженості частинок усі гідравлічні характеристики течії зберігаються як і для течії чистої води. Спостерігається пасивна присутність частинок. Додаткової енергії для їх транспортування не потрібно;

3) у разі зменшення швидкості від нижче значення $v_{из}$ починається випадіння частинок на тверду поверхню, а також їх рух по поверхні у вигляді волочіння (потягу).

Таке переміщення твердих частинок супроводжується гідроабразивним зношуванням твердої поверхні. Інколи цей процес використовують для гідроабразивного очищення поверхонь після литва.

Потрібно пам'ятати, що швидкість гідроабразивного руйнування поверхонь v_{ga} пропорційна кубу швидкості волочіння

$$v_{ga} \sim v_6^3; \quad (14.26)$$

4) швидкість, за якої почнеться випадіння твердих частинок ($v_{кр}$, м/с), можна оцінити за формулою В. С. Кнороза

$$v_{кр} = 3 \left[\sqrt{gD_{cep}} \cdot \lg \frac{R}{4D_{cep}} + W_{cep} \cdot P^{0,25} \left(\frac{R}{D_{cep}} \right)^{0,4} \right], \quad (14.27)$$

де P – вагова концентрація твердих частинок.

Зі свого боку,

$$P = 100 \frac{\gamma_n - \gamma_6}{\gamma_T - \gamma_n} \cdot \frac{\gamma_T}{\gamma_6}, \%$$

де γ_T , γ_n , γ_6 – питома вага відповідно до твердої фракції, пульпи й води.

Величину $v_{кр}$ також можна оцінити за формулою Г. М. Роера

$$v_{кр} = 11,2 \cdot \frac{h_{кр}^{0,473} [(\gamma_n - \gamma_e) W_{кр}]^{0,326}}{(1 + 2\eta)^{0,147}} \cdot \frac{\gamma_T^{0,0814}}{\Delta^{0,17}} \cdot \left(\frac{D_{сеп}}{D_{макс}} \right)^{0,2}, \quad (14.28)$$

де $h_{кр}$ – глибина суміші в каналі;

$D_{сеп}$ і $D_{макс}$ – середній і максимальний діаметри частинок;

Δ – висота виступів шорсткості стінок.

На рисунках 14.3–14.7 надано схематично деякі особливості течії суміші з твердими частинками.

Зокрема, на рисунку 14.3 і 14.4 надані лінії течії води (як основної фази) й траєкторії руху твердих частинок (червоні криві). Як видно, існує відхилення цих траєкторій від напрямку течії води в бік твердої поверхні. Особливо це проявляється під час транспортування суміші по криволінійному каналу.

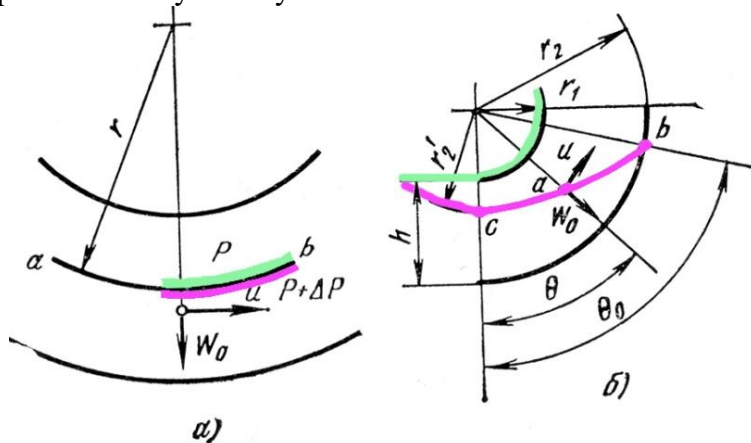


Рисунок 14.3 – Лінії течії рідкої фази й траєкторії руху твердих частинок

На рисунку 14.5 надано розподілення швидкості руху суміші v , густини (або концентрації) твердих частинок

P й дотичної напруги τ по перерізу течії в круглій циліндричній трубі.

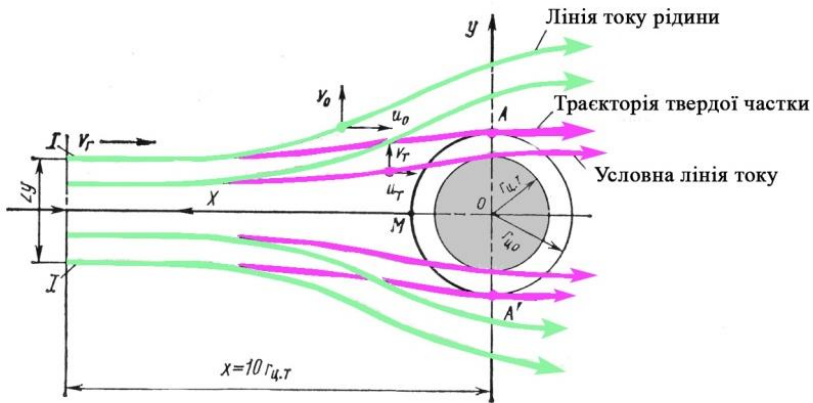


Рисунок 14.4 – Схема обтікання циліндра гідросумішшю з великими частинками

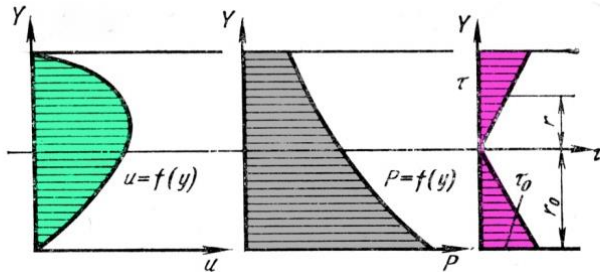


Рисунок 14.5 – Розподілення напружень, концентрації твердих частинки і швидкості під час перебігання суміші в циліндричній трубі

На рисунку 14.6 і 14.7 надано залежність втрати енергії ΔP від швидкості руху суміші v витрати Q для чистої води й суміші.

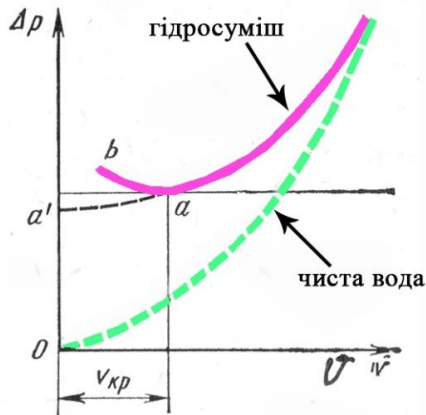


Рисунок 14.6 – Залежність утрати тиску від швидкості течії для гідросуміші (суцільна лінія) та однорідної рідини (штрихова лінія)

Потрібно зауважити, що мінімальна втрата енергії спостерігається за швидкості $v_{кр}$, тобто коли тверді частинки лише почали випадати.

14.5 Порядок розрахунку пульпопроводу

Спочатку визначають гідравлічний уклін пульпопроводу за формулою Шезі

$$v = c\sqrt{R \cdot I}, \quad (14.29)$$

де I – гідравлічний уклін: $I = \Delta P/L$;

R – гідравлічний радіус;

c – коефіцієнт, що розраховують за формулою

Павловського $c = \frac{1}{n} R^y$ або обирають за довідником.

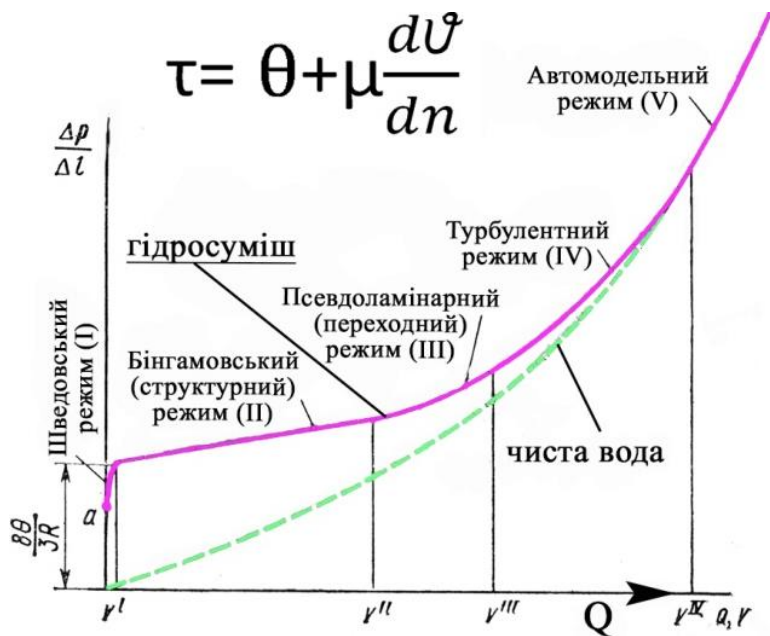


Рисунок 14.7 – Залежність утрати тиску від витрати для гідросуміші (суцільна лінія) та однорідної рідини (штрихова лінія)

Обравши декілька варіантів нахилів, для кожного беруть величину швидкості суміші за формулами (14.27) або (14.28) і покладають $v = v_{кр}$.

Тоді з використанням, формули (14.27) одержимо об'ємну витрату пульпи Q_n , м³/с

$$Q_n = S \cdot v_{кр} = 3S \left[\sqrt{gD_{cep}} \cdot \lg \frac{R}{4D_{cep}} + W_{cep} \cdot P^{0,25} \left(\frac{R}{D_{cep}} \right)^{0,4} \right] \quad (14.30)$$

Обираючи потрібні D_{cep} , W_{cep} і P , одержимо залежність $Q_n = f(R)$, за допомогою якої для заданої витрати знаходимо $R_{кр}$ й остаточно обираємо форму та розміри перерізу течії (рис. 14.8).

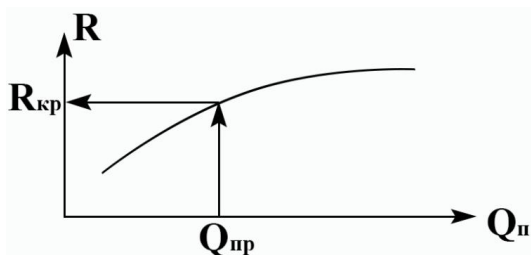


Рисунок 14.8 – Залежність $Q_n = f(R)$

Остаточно за формулами (14.22) або (14.23) визначаємо швидкість початку руху твердих частинок v_o , перевіряємо співвідношення $v_o = (0,3 \div 0,4) v_{кр}$ і з формули (14.27) визначаємо консистенцію гідросуміші

$$P = \left[\frac{1}{W_{cep}} \left(\frac{v_{кр}}{3} - \sqrt{gD_{cep}} \cdot \lg \frac{R}{4D_{cep}} \right) \cdot \left(\frac{D_{cep}}{R} \right)^{0,4} \right]^4. \quad (14.31)$$

Неважко помітити, що запропонований порядок розрахунку ведуть методом послідовного наближення.

Для підвищення надійності роботи пульпопроводу рекомендують підвищити швидкість $v_{кр}$ на 10–15 %. Також неважко помітити, що всі робочі формули з розрахунку пульпопроводу є емпіричними, але, як свідчить практика, вони дають надійні результати.

14.6 Використання класичних рівнянь гідромеханіки для багатофазних течій

Вище було показано, що для практичних розрахунків багатофазних течій існує безліч міркувань стосовно кінематики й динаміки течії та багато емпіричних формул для практичних розрахунків. Але рекомендацій щодо застосування рівнянь класичної гідромеханіки й гідравліки майже немає, хоча такі спроби в ряду авторів можуть траплятися. Проте це зовсім не означає, що ці рівняння принципово не прийнятні для аналізу таких течій.

Не викликає сумніву, що й двофазні, і багатофазні рідкі течії відповідають усім законам механіки – законам збереження маси, енергії, імпульсу тощо. Тому для таких течій притаманні й рівняння нерозривності, і рівняння Д. Бернуллі, і рівняння руху.

Але, якщо за умови чистої рідини ми маємо право вважати, що розподілення параметрів рідини по перерізу течії рівномірний і безперервний, то для багатофазної течії в перерізі обов'язково будуть стрибки, точки з різними параметрами густини, питомої маси, швидкості тощо, причому закони їх розподілення по площі перерізу несталі та невідомі. Тому потрібно або шукати методи усереднення параметрів і враховувати силову чи енергетичну взаємодію кожного елемента однієї фази з іншою, або складати рівняння для кожного елемента кожної фази й потім узгоджувати їх між собою.

Проілюструємо це на прикладі складання рівняння Д. Бернуллі для струминки суміші. Тобто для рідини, що несе певну кількість твердих частинок за умов, якщо:

- а) рух рідини будемо вважати сталим;
- б) трубка течії, по якій тече струминка, нерухома;

в) лінія течії рідини й траєкторії частинок не виходять за межі стінок трубки течії. Це означає, що швидкості рідини й частинок є дотичними до стінок трубки;

г) розміри частинок порівняно з розміром течії настільки малі, що зміни тиску рідини вздовж діаметра частинки можна вважати лінійними.

Остання умова означає, що якщо в точці, де знаходиться частинка, градієнт тиску вздовж її траєкторії є $\partial P / \partial S$, то проєкція сумарної сили, що діє на поверхню частинки з боку рідини (сили тиску), на дотичну до її траєкторії дорівнює $(\partial P / \partial S) \cdot \Delta S \cdot \phi_0$ (де ΔS – проєкція довжини частинки на дотичну до траєкторії її руху, ϕ_0 – площа міделевого перерізу частинки).

Оскільки $\Delta S \cdot \phi_0 = q$ (де q – об'єм частинки), то проєкція сумарної сили, що діє на частинку з боку рідини, на дотичну до траєкторії руху дорівнює $q \cdot (\partial P / \partial S)$.

Через те, що вздовж струминки рухаються одні й ті самі тверді частинки й рідина, витрати твердих частинок Q_T і рідини Q_P в будь-яких перерізах будуть однаковими. Розглянемо два перерізи струминки 1–1 і 2–2 (рис. 14.9). Допустимо, що тверді частинки рухаються зі швидкістю v_T , а рідина – зі швидкістю v_P .

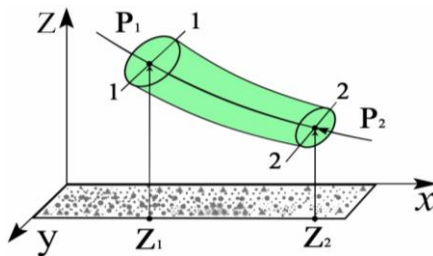


Рисунок 14.9 – Використання класичних рівнянь гідромеханіки для багатофазних течій

Під час переміщення суміші від перерізу 1-1 до 2-2 відбуваються такі процеси:

а) змінюється потенціальна енергія суміші й для перерізів 1-1 і 2-2 будуть виконуватися рівняння

$$\begin{aligned} Q_T \cdot \rho_T \cdot g \cdot z_1 + Q_p \cdot \rho_p \cdot g \cdot z_1 &= Q_c \cdot \rho_c \cdot g \cdot z_1, \\ Q_T \cdot \rho_T \cdot g \cdot z_2 + Q_p \cdot \rho_p \cdot g \cdot z_2 &= Q_c \cdot \rho_c \cdot g \cdot z_2, \end{aligned}$$

де індексом «с» позначено відповідний параметр суміші;

б) змінюється кінетична енергія суміші, і вона в перерізах 1-1 і 2-2 буде дорівнювати відповідно

$$Q_T \cdot \rho_T \cdot \frac{v_{T1}^2}{2} + Q_p \cdot \rho_p \cdot \frac{v_{p1}^2}{2} \text{ і } Q_T \cdot \rho_T \cdot \frac{v_{T2}^2}{2} + Q_p \cdot \rho_p \cdot \frac{v_{p2}^2}{2}$$

в) під час переміщення рідини та твердих частинок із перерізу 1-1 в переріз 2-2 сили тиску рідини виконують роботу, що буде дорівнювати $Q_p \cdot (P_1 - P_2)$.

Під час переміщення твердої частинки вздовж елемента її траєкторії dS робота, яку виконують сили тиску, буде дорівнювати

$$q \cdot (\partial P / \partial S) \cdot dS = q \cdot dP.$$

Тому робота, виконана під час переміщення однієї частинки в течії суміші від перерізу 1-1 до перерізу 2-2,

дорівнює $\int_{P_2}^{P_1} q dP = q(P_1 - P_2)$, а в разі переміщення всіх

твердих частинок становить $Q_T(P_1 - P_2)$;

г) під час протікання суміші виконується робота сил в'язкості, яка цілком витрачається на нагрівання суміші від

температури t_1 в перерізі 1–1 до температури t_2 в перерізі 2–2.

Тепер, визначивши всі складові енергії в перерізах 1–1 і 2–2, використаємо рівняння збереження енергії, згідно з яким повна енергія в обох цих перерізах повинна бути однаковою. Тому сумарна механічна та внутрішня енергія струминки в кожному з двох перерізів буде становити

$$Q_T \cdot \rho_T \cdot \frac{v_{T1}^2}{2} + Q_p \cdot \rho_p \cdot \frac{v_{p1}^2}{2} + Q_c \cdot \rho_c \cdot g \cdot z_1 + C_v \cdot Q_c \cdot g \cdot \frac{t_1}{A},$$

$$Q_T \cdot \rho_T \cdot \frac{v_{T2}^2}{2} + Q_p \cdot \rho_p \cdot \frac{v_{p2}^2}{2} + Q_c \cdot \rho_c \cdot g \cdot z_2 + C_v \cdot Q_c \cdot g \cdot \frac{t_2}{A},$$

де C_v – питома теплоємність суміші;

t – температура суміші;

A – механічний еквівалент теплоти.

Далі потрібно врахувати, що під час течії суміші від перерізу 1–1 до перерізу 2–2 було виконано роботу силами тиску. У той самий час було виконано роботу щодо подолання сил тертя (в'язкості) T_{mp} , яка перетворилася на теплоту T/A , де T – теплота, яку передано рідині під час виконання роботи силами в'язкості. Теплота T підвищила температуру рідини від t_1 до t_2 . Цей процес можна описати рівнянням

$$T_{mp} = \frac{T}{A} = C_v \cdot Q_p \cdot \rho_p \cdot g \cdot \frac{(t_2 - t_1)}{A}. \quad (14.32)$$

З урахуванням (14.32) рівняння збереження енергії набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}
& Q_T \cdot \rho_T \cdot \frac{v_{T1}^2}{2} + Q_p \cdot \rho_p \cdot \frac{v_{p1}^2}{2} + Q_c \cdot \rho_c \cdot g \cdot z_1 + \\
& + C_v \cdot Q_c \cdot g \cdot \frac{t_1}{A} - T_{mp} + \frac{T}{A} + Q_c (P_1 - P_2) = \\
& = Q_T \cdot \rho_T \cdot \frac{v_{T2}^2}{2} + Q_p \cdot \rho_p \cdot \frac{v_{p2}^2}{2} + \\
& + Q_c \cdot \rho_c \cdot g \cdot z_2 + C_v \cdot Q_c \cdot \rho_c \cdot g \cdot \frac{t_2}{A}.
\end{aligned} \tag{14.33}$$

Рівняння (14.33) є рівнянням балансу енергії в перерізах струминки і його з повною впевненістю можна назвати рівнянням Д. Бернуллі для вказаних вище умов. Проте, неважко переконатися, яке воно громіздке. І це лише для струминки, а не для всієї течії, до того ж, це тільки двофазна течія (рідина та тверді частинки).

Правда, рівняння (14.33) можна спростити, розділивши праву й ліву частину на $Q_c \cdot \rho_c \cdot g$ та одержавши роботу сил в'язкості, віднесено до одиниці ваги гідросуміші (а аналогією із класичною формою рівняння Д. Бернуллі):

$$\begin{aligned}
(1 - K) \frac{v_{p1}^2}{2} + K \frac{v_{T1}^2}{2} + z_1 + \frac{P_1}{\rho_c g} = \\
= (1 - K) \frac{v_{p2}^2}{2} + K \frac{v_{c2}^2}{2} + z_2 + \frac{P_2}{\rho_c g} + h_w
\end{aligned} \tag{14.34}$$

де $K = \frac{Q_T \cdot \rho_T}{Q_p \cdot \rho_p}$; $1 - K = \frac{Q_p \cdot \rho_p}{Q_c \cdot \rho_c}$; $h_w = \frac{T_{mp}}{Q_c \cdot \rho_c \cdot g}$.

Зауважимо, що рівняння (14.33) і (14.34) за своїм фізичним змістом цілком можна репрезентували як рівняння Д. Бернуллі. Вони одержані за реальних умов течії

двофазного рідкого середовища, де швидкості рідини та твердої фази навіть у межах одного перерізу різні. Якщо взяти їх однаковими (що інколи можна допускати за невеликої концентрації твердої фази), то рівняння (3.34) набуде такого вигляду:

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\rho_c g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\rho_c g} + h_w. \quad (14.35)$$

Тобто гідросуміш у цьому разі тече як однорідна рідина з густиною суміші ρ_c .

Перелік питань до розділу 14

- 1 Приклади багатофазних течій у природі та техніці.
 - 2 Поняття «суміш», «фаза», «суспензія», «основна фаза», «включення».
 - 3 Гідродинамічні характеристики суміші.
 - 4 Поняття про гідродинамічну крупність.
 - 5 Сили, що діють на тверду частинку в течії суміші.
- Причини виникнення підйімальної сили М. Є. Жуковського.
- 6 Види руху твердих частинок у суміші.
 - 7 Взаємовідносини між швидкостями u_T , u_L , u_C . Два приклади.
 - 8 Режим пасивної присутності включень.
 - 9 «Швидкість зрушення» й «критична швидкість».
 - 10 Масові та об'ємні співвідношення фаз.
 - 11 Прийнятність основних законів механіки до багатофазних сумішей.
 - 12 Поясніть принцип складання рівняння Д. Бернуллі для двофазної течії струминки.

15 ГІДРОДИНАМІКА РІДИНИ У ВУЗЬКИХ ШПАРИНАХ

У техніці дуже багато прикладів, коли між двома твердими плоскими або циліндричними поверхнями треба забезпечити протікання рідини чи газу для одержання того чи іншого технологічного процесу.

Часто між цими поверхнями невеликий зазор, поверхні можуть бути нерухомими чи одна з них рухома та ще й із великою швидкістю. Усе це передбачає специфічні умови на гідродинаміку рідини в такій проточній частині, що проявляється в режимі течії, поведінці граничних шарів, великому градієнті швидкості за зазором тощо.

Багато особливостей таких течій існує у разі, коли одна поверхня (плоска або циліндрична) утворює невеликий кут з іншою поверхнею. Це проявляється так:

- виникнення явища, що одержало назву «гідродинамічний клин»;

- особливий характер зміни тиску в рідині $\Delta P/l$;

- силова взаємодія твердих поверхонь між собою.

Необхідно додати, що на використанні цих особливостей ґрунтується сучасна гідродинамічна теорія змащування, що бере початок від перших досліджень М. П. Петров, а оприлюднених ще в 1883 році.

Прикладами течій у вузьких шпаринах можуть слугувати течії між пластинами теплообмінників, дисками вентиляторів і дискових насосів, бічні пазухи між нерухомим корпусом і рухомими поверхнями роторів гідравлічних і пневматичних машин. Особлива увага таким течіям приділяється під час створення радіальних та осьових рідинних або газових опор (підшипників), шпаринних ущільнень із нерухомою захисною гільзою та валом багатоступеневих роторних машин. Останнім часом

усе більше приділяють уваги створенню гідравлічних та пневматичних підвісок для транспортних машин, зокрема для залізничного транспорту.

Тому розуміння та знання особливостей течії рідини чи газу у вузьких щпаринах є невід’ємною складовою знань сучасного інженера-дослідника.

15.1 Ламінарна течія рідини в зазорі між двома паралельними пластинами

Проаналізуємо характеристики простої течії рідини між двома паралельними нерухомими пластинами. Виділимо в течії елемент довжиною l , товщиною $2y$ і шириною $b = 1$. Відстань між пластинами – a , швидкість руху – v . Будемо вважати, що $Re = \frac{v \cdot a}{\nu} < 1$, тобто характер течії ламінарний. Розрахункова схема подана на рисунку 15.1.

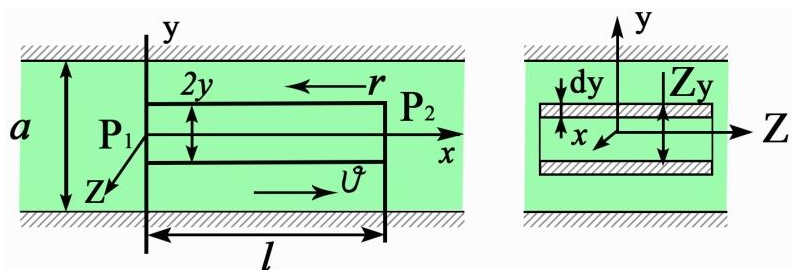


Рисунок 15.1 – Течія рідини в зазорі між двома паралельними нерухомими пластинами

Умова рівноваги виділеного об’єму за $b = 1$ має такий вигляд:

$$2y \cdot \Delta P = -\mu \frac{dv}{dy} \cdot 2l. \quad (15.1)$$

Маючи на увазі, що $\tau = -\mu \frac{dv}{dy}$ і $\tau \cdot s = \tau \cdot 2l \cdot 1$, із (15.1) дістаємо

$$dv = -\frac{\Delta P}{\mu \cdot l} y dy.$$

Після інтегрування

$$v = -\frac{\Delta P}{2\mu \cdot l} y^2 + C.$$

Константу інтегрування C знайдемо з граничних умов умов прилипання: за $y = a/2$ $v = 0$. Тому

$$C = \frac{\Delta P}{2\mu \cdot l} \cdot \frac{a^2}{4}.$$

Після підстановки константи C одержимо закон розподілення швидкості в зазорі

$$v = -\frac{\Delta P}{2\mu \cdot l} \cdot \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) \quad (15.2)$$

Бачимо, що епюра швидкості в зазорі має вигляд параболи другого ступеня.

Максимальна швидкість буде там, де $y = 0$:

$$v_{\max} = \frac{\Delta P}{8\mu \cdot l} a^2. \quad (15.3)$$

Витрата на одиницю ширини b

$$dQ = v \cdot ds = \frac{\Delta P}{2\mu \cdot l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) \cdot 2dy.$$

Звідси

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\Delta P}{\mu \cdot l} \int_0^{a/2} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) dy = \frac{\Delta P}{\mu \cdot l} \left(\frac{a^2}{4} y \Big|_0^{a/2} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^{a/2} \right) = \\ &= \frac{\Delta P}{\mu \cdot l} \left(\frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a^3}{3 \cdot 8} \right) = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} a^3. \end{aligned}$$

Остаточню

$$Q = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} \cdot a^3. \quad (15.4)$$

Витрата Q через середню швидкість матиме вигляд

$$Q = v_{\text{сеп}} \cdot a \cdot l = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} \cdot a^3.$$

Звідси

$$v_{\text{сеп}} = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} \cdot a^2. \quad (15.5)$$

Неважко помітити, що $v_{\text{сеп}} = \frac{2}{3} v_{\max}$.

Ураховуючи, що $Q = v_{\text{ср}} \cdot a = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} \cdot a^3$, одержимо

$$\Delta P = \frac{12\mu \cdot l}{a^2} \cdot v_{\text{ср}}. \quad (15.6)$$

Усі одержані в такий спосіб параметри були виведені за умови, що обидві пластини нерухомі. Течія відбувалася через наявність перепаду тиску ΔP згідно з (15.6). Таку течію будемо називати напірною.

Уявимо собі, що одна з пластин рухається в напрямку x зі швидкістю u . Розрахункову схему подано на рисунку 15.2.

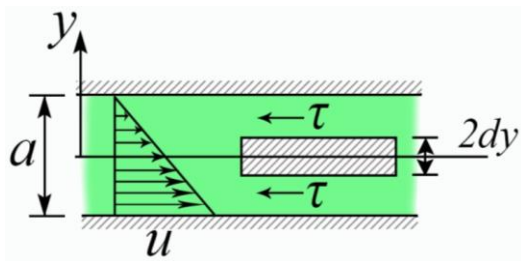


Рисунок 15.2 – Течія рідини в зазорі між двома паралельними пластинами, одна з яких рухається

Згідно з гіпотезою Ньютона, оскільки градієнт швидкості $\frac{dv}{dy}$ у нашому випадку є постійним:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy} = c, \quad (15.7)$$

інтегруючи вираз (15.7), одержуємо

$$v = -\frac{c}{\mu}y + C_1.$$

Знайдемо постійні інтегрування з граничних умов:

якщо $y = \frac{a}{2}$, тоді $v = 0$; якщо $y = -\frac{a}{2}$, тоді $v = u$.

Використовуючи першу умову, одержимо

$$0 = -\frac{c}{\mu} \cdot \frac{a}{2} + C_1.$$

Тоді

$$C_1 = \frac{c \cdot a}{2\mu}.$$

Використовуючи другу умову, одержуємо

$$u = \frac{c}{\mu} \cdot \frac{a}{2} + C_1.$$

Тоді

$$C_1 = u - \frac{c \cdot a}{2\mu}.$$

Прирівнюючи вирази для C_1 , одержимо

$$\frac{c \cdot a}{2\mu} = u - \frac{c \cdot a}{2\mu}.$$

Звідси $c = \frac{u \cdot \mu}{a}$ і $C_1 = \frac{u}{2}$.

Після підстановки констант і перегрупування одержимо

$$v = \frac{u}{2a}(a - y). \quad (15.8)$$

Таку течію будемо називати фрикційною, оскільки вона підтримується лише за рахунок сил в'язкості. Закон розподілення швидкості в цьому разі лінійний (епюра наведена на рис. 15.2).

Якщо $y = 0$, швидкість $v = \frac{u}{2} = v_{\text{сеп}}$. Тоді величина витрати рідини на одиницю ширини буде

$$Q = v_{\text{сеп}} \cdot a \cdot 1 = \frac{u \cdot a}{2}. \quad (15.9)$$

Якщо в зазорі між пластинами течія є одночасно фрикційною й напірною, закон розподілення швидкості буде

$$v = \frac{\Delta P}{\mu \cdot l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) \pm \frac{u}{2a}(a - y). \quad (15.10)$$

Залежно від напрямку руху однієї зі стінок може бути сформовано епюру течії, зображену на рисунку 15.3.

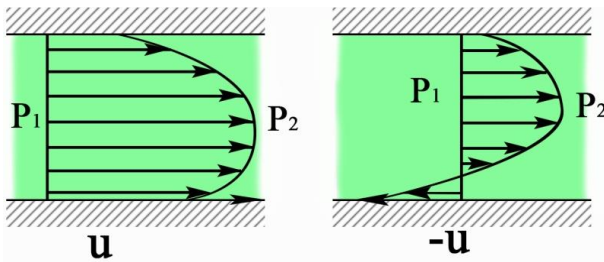


Рисунок 15.3 – Епюри течії за наявності рухомої стінки

Величина витрати в цьому разі буде дорівнювати

$$Q = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} a^3 \pm \frac{u \cdot a}{2}. \quad (15.11)$$

У науковій літературі така течія має назву течія Куєтта.

15.2 Осьовий рух поршня в циліндрі

Розглянемо течію рідини в кільцевому зазорі між поршнем і гільзою. Їх взаємне розташування в ідеалі буде повністю співпадати. Але на практиці вони завжди будуть розташовані з певним (для простоти – паралельним) зміщенням осей. Величину зміщення будемо називати ексцентриситетом. Схеми обох прикладів репрезентовані на рисунку 15.4.

Позначимо R і r – радіуси циліндрів, a_0 і a – величини зазорів між циліндрами, e – ексцентриситет (див. рис. 15.4). Для першого прикладу розмір зазору a_0 є величиною постійною по довжині окружності, для другого випадку зазор a є величиною змінною.

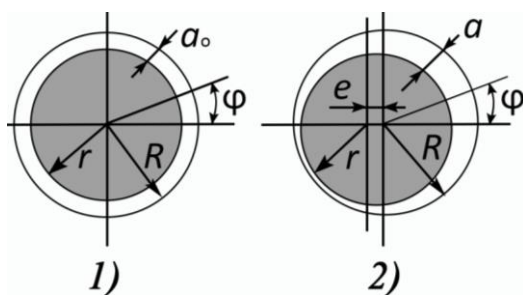


Рисунок 15.4 – Кільцеві зазори між поршнем і гільзою

Із рисунка 15.4 видно, що

$$a_0 = R - r \sin \alpha = R - r + e \cdot \cos \varphi = a_0 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{\cos \varphi} \right),$$

де $\varepsilon = \frac{e}{a_0}$ – відносний ексцентриситет.

Мету розрахунку течії обмежимо лише визначенням величини витрати рідини в осьовому напрямку, що відповідає практичній задачі. Будемо вважати, що плунжер або нерухомий, або може переміщуватися в осьовому напрямку, але не обертатися. Розрахункову схему репрезентовано на рисунку 15.5.

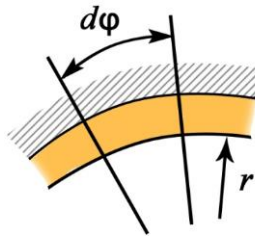


Рисунок 15.5 – Розрахункова схема течії

Поверхню внутрішнього циліндра будемо вважати рухомою з осьовою швидкістю $\pm u$. Величину витрати рідини dQ через елементарну площину $r \cdot d\varphi \cdot a$ визначимо для швидкості (15.5), вважаючи, що в межах $r \cdot d\varphi$ тверді поверхні паралельні.

$$dQ = v \cdot r d\varphi = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} a^3 r d\varphi = \frac{\Delta P}{12\mu \cdot l} a_0^3 (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3 r d\varphi.$$

Інтегруючи останній вираз по всій довжині від 0 до 2π , одержимо

$$Q = \frac{\Delta P \cdot a_0^3}{12\mu \cdot l} r \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3 d\varphi = Q_0 \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon^3 \right), \quad (15.12)$$

де $Q_0 = \frac{\pi \cdot r \cdot a_0^3}{6\mu \cdot l} \Delta P$ – витрата через співвісний циліндр.

Неважко помітити, що для максимального ексцентриситету ($\varepsilon = 1$) величина витрати буде

$$Q = 2,5Q_0. \quad (15.13)$$

Наведений спрощений розрахунок використовують лише для оціночного аналізу можливої витрати рідини через вказаний зазор за наявності паралельного ексцентриситету.

Насправді на практиці ексцентриситет часто буває не паралельним (у разі непаралельності осей обох циліндрів). Це значно ускладнює розрахунок течії в зазорі. Наявність ексцентриситету робить канал несиметричним по довжині окружності циліндра $2\pi r$, а непаралельність осей циліндрів робить канал несиметричним по довжині циліндра z . Зрозуміло, що це зумовлює велику різноманітність швидкостей і тисків у рідині, що зі свого боку викликає невірноваженість радіальних та осьових сил і значно ускладнює гідродинамічні розрахунки.

Докладніше із цим питанням можна ознайомитися в монографіях професора СумДУ В. А. Марцинковського.

15.3 Основи гідродинамічної теорії змашування

Одним із найважливіших прикладів течії в техніці є ламінарний рух рідини (мастила) в зазорі між шийкою вала та вкладишем підшипника під час обертання з

ексцентриситетом. Течію розглядають як ламінарну, незважаючи на те, що колова швидкість поверхні шийки u_u велика, бо частота обертів сучасних машин сягає трьох і більше тисяч. Число Re для таких течій обраховують за формулою

$$Re = \frac{u \cdot \delta}{\nu}$$

За умов великого значення u через малу величину зазору δ течію можна вважати ламінарною.

Засновник теорії змащування М. П. Петров ще в першій роботі довів, що основну роль у підшипнику грає внутрішнє тертя в мастильному шарі. Перше теоретичне вирішення він здобув для прикладу відсутності ексцентриситету, де було доведено, що підіймальну силу мастильний шар у цьому разі не створює. Усі подальші роботи були присвячені течії в ексцентричному зазорі та створенню підіймальної сили, що не дає валу опуститися на вкладиш без змащування. На рисунку 15.6 наведена схема такої течії та її розрахункові параметри.

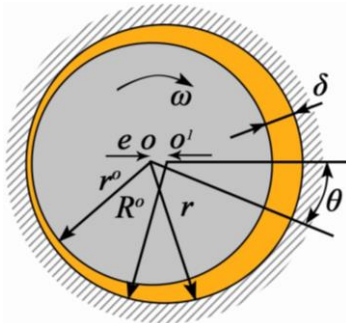


Рисунок 15.6 – До визначення основних характеристик змащення

Для подальших розрахунків зробимо припущення:

а) оскільки товщина мастильного шару мала, можна з достатньою точністю припустити, що $v_r = 0$ і $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$;

б) у зв'язку з першим прикладом можна також припустити, що масові сили в мастильному шарі малі порівняно із силами в'язкості, зокрема відцентрові сили, якими можна знехтувати.

Течію мастила по відрізку дуги $d\theta$ будемо розглядати як течію Куетта, для якої в напрямку осі x виконується залежність

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Для нашого випадку доцільно перейти до полярної системи координат, тому ця залежність буде мати вигляд

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2},$$

де r змінюється від r_0 до $r_0 + \delta$. Причому $\delta \ll r_0$, тому у вищенаведеному рівнянні величину $\frac{1}{r}$ можна замінити на

$\frac{1}{r_0}$. Тоді

$$\frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}.$$

Для врахування характеру зміни швидкості не лише за координатою θ , а й за товщиною мастильного шару введемо координату y (рис. 15.7).

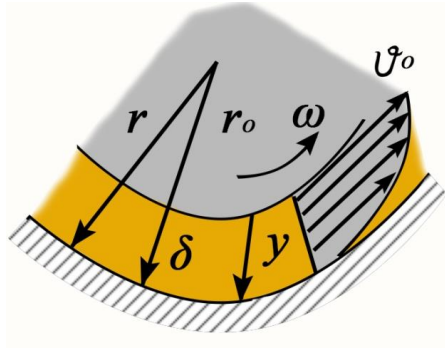


Рисунок 15.7 – Товщина мастильного шару

Із рисунка видно, що

$$r = r_0 + y,$$

де r і y – змінні величини по θ .

Тому попереднє рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2}. \quad (15.14)$$

Помічаємо, що ліва частина рівняння (15.14) не залежить від y та його інтегрування дає вже відому формулу

$$v_\theta = \frac{1}{2r_0\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (15.15)$$

Використаємо граничні умови: якщо $y=0$, то $v_\theta = v_0$; якщо $y=\delta$, то $v_\theta = 0$.

Після знаходження констант вираз для швидкості набуває остаточного вигляду

$$v_{\theta} = \frac{1}{2r_0\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) y(y - \delta) + \frac{v_0(\delta - y)}{\delta}. \quad (15.16)$$

Із рівняння (15.16) видно, що швидкість мастила в шарі залежить від $\frac{\partial P}{\partial \theta}$ (напірна течія). Якщо $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$, тоді

$$v_{\theta} = \frac{v_0(\delta - y)}{\delta} \text{ (фрикційна течія).}$$

Товщину мастильного шару в місці, де $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ позначимо δ_0 та визначимо величину витрати мастила через одиницю довжини в осьовому напрямку:

$$Q_0 = \int_0^{\delta_0} v_{\theta} \cdot dy \cdot 1 = \int_0^{\delta_0} \frac{v_0(\delta - y)}{\delta} dy = \frac{v_0 \cdot \delta_0}{2} \quad (15.17)$$

Витрата рідини через будь-який переріз течії повинна бути однаковою, тому

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\delta} v_{\theta} \cdot dy = \int_0^{\delta} \left[\frac{1}{2r_0\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) y(y - \delta) + \frac{v_0(\delta - y)}{\delta} \right] dy = \\ &= -\frac{1}{2r_0\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \frac{\delta^3}{6} + \frac{v_0\delta}{2}. \end{aligned}$$

Звідси, використавши (15.17), одержимо

$$\frac{v_0\delta}{2} - \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\delta^3}{12\mu \cdot r_0} = \frac{v_0\delta_0}{2}. \quad (15.18)$$

Середню швидкість визначимо як $\frac{Q}{S} = \frac{Q}{\delta \cdot 1}$, тобто поділивши всі члени рівняння (15.18) на δ :

$$v_{\text{сеп}} = \frac{v_0}{2} - \frac{\delta^2}{12\mu r_0} \frac{\partial P}{\partial \theta}. \quad (4.19)$$

Аналізуючи (15.19), можна зробити висновок, що середня швидкість є змінною по довжині й залежить як від величини й знака $\frac{\partial P}{\partial \theta}$, так і від величини зазору $\delta = f(\theta)$.

Тепер із (15.18) визначимо, як змінюється тиск мастильної течії по довжині від θ до 2π .

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{6\mu \cdot r_0 (\delta - \delta_0) v_0}{\delta^3}.$$

Інтегруючи в межах від θ до θ , одержимо

$$P(\theta) = P_0 + 6\mu \cdot r_0 \cdot v_0 \left[\int_0^\theta \frac{d\theta}{\delta^2} - \delta_0 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\delta^3} \right].$$

Оскільки мастильний шар є замкнутим по кільцю, то $P(0) = P(2\pi)$, тобто

$$P(2\pi) = P_0 + 6\mu \cdot r_0 \cdot v_0 \left[\int_0^r \frac{d\theta}{\delta^2} - \delta_0 \int_0^r \frac{d\theta}{\delta^3} \right].$$

Звідси, скоротивши $P(2\pi)$ і $P(0)$ і розділивши на $6\mu \cdot r_0 \cdot v_0$, одержимо

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\delta^2} = \delta_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\delta^3}.$$

Звідки

$$\delta_0 = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\delta^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\delta^3}}. \quad (15.20)$$

Для обчислення цих інтегралів скористаємося геометричними співвідношеннями (рис. 15.8).

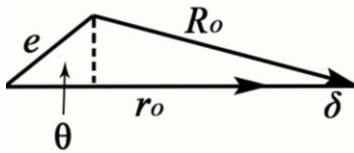


Рисунок 15.8 – Геометричні співвідношення для визначення параметрів змащення

Із рисунка 15.8

$$r_0 + \delta = e \cos \theta + R_0,$$

звідки

$$\delta = e \cos \theta + (R_0 - r_0) = e \cos \theta + h_0.$$

Для скорочення записів уведемо такі позначення:

$$\frac{\delta}{R_0 - r_0} = \frac{\delta}{h_0} = \alpha - \text{відносна товщина мастильного шару};$$

$$\frac{e}{R_0 - r_0} = \frac{e}{h_0} = \beta - \text{відносний ексцентриситет.}$$

Після обрахування інтегралів одержимо

$$P(\theta) - P(0) = \frac{6\mu \cdot r_0 \cdot v_0}{h_0^2} \cdot \frac{\beta \sin \theta (2 + \beta \cos \theta)}{(2 + \beta^2)(1 + \beta \cos \theta)^2}. \quad (15.21)$$

Звідси видно, що чим менше значення h_0 , тим більше прирощення тиску стосовно тиску в нульовому перерізі.

Крім того видно, що прирощення тиску $P(\theta) - P(0)$ розподіляється по колу симетрично відносно осі $00'$ (див. рис. 4.6):

– у разі зміни θ від 0 до π прирощення $\Delta P > 0$ – течія дифузорна;

– під час зміни θ від 0 до π прирощення $\Delta P < 0$ – течія конфузорна;

– за $\theta = 0$ і $\theta = \pi$ прирощення $\Delta P = P(\theta) - P(0) = 0$.

Розподілення прирощення тиску показано на рисунку 15.9.

Із рисунка 15.9 видно, що в точках $\theta = 0$ і $\theta = \pi$ приросту тиску немає. Від точки 0 до точки π починається приріст тиску, який у сумі діє на шийку вала в потрібному нам напрямку. Одночасно від точки π до точки 2π тиск на вал зменшується порівняно з тиском $P(0)$ і теж «допомагає» підніманню вала.

Потрібно також пояснити (та усвідомити), що на малюнку подано лише одномоментну позицію вала стосовно до нерухомого циліндра. Реально ж вісь вала (точка 0) під час його обертання рухається по траєкторії навкруги осі підшипника (точка $0'$). Ця траєкторія в ідеалі являє собою коло та зветься прецесією вала. Тому на вал діють зображені епюри тиску, створюючи результуючу підіймальну силу.

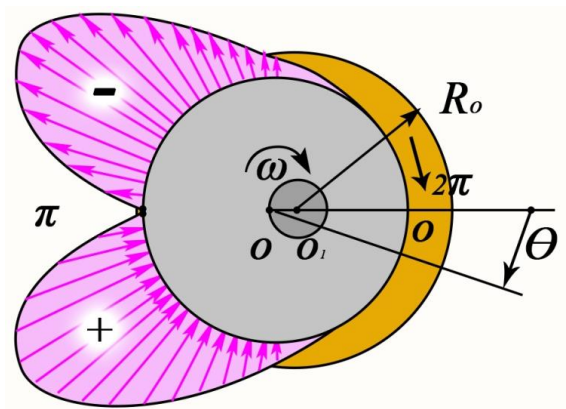


Рисунок 15.9 – Розподілення прирощення тиску

Крім тиску $P(\theta)$ у кожній точці шийки вала діє дотична напруга $\tau(\theta)$, спрямована проти ω та у вибраній системі координат має вигляд

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right). \quad (15.22)$$

Після відповідних перетворень остаточна формула має вигляд

$$(\tau_{r\theta})_{r=r_0} = -\frac{2\mu\omega_0}{h_0} \left[\frac{2}{1 + \beta \cos \theta} - \frac{3(1 - \beta^2)}{(r + \beta^2)(1 + \beta \cos \theta)^2} \right] \quad (15.23)$$

Для визначення сумарної сили, що діє на шийку вала, обираємо елементарну площину $r_0 d\theta \cdot l$ (де $l = l$ уздовж циліндра) й до неї прикладаємо напруги з урахуванням кута θ . Наприклад, $R = \int_0^{2\pi} P \cdot r_0 d\varphi \cdot \sin \theta$, а $M = -\int_0^{2\pi} \tau \cdot r_0^2 d\theta$.

У результаті одержимо остаточні формули для результуючих підйимальної сили R та результуючого моменту M .

Для результуючої підйимальної сили R остаточна формула має вигляд

$$R = \frac{12\delta_0\mu \cdot r_0^2 \cdot \nu_0}{h_0^2} \cdot \frac{\beta}{(2 + \beta^2)\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.24)$$

Із (15.24) видно, що величина R прямо пропорційна μ , ν_0 і r_0^2 та обернено пропорційна $h_0(R_0 - r_0)$.

Для результуючого моменту M остаточна формула має вигляд

$$M = \frac{4\pi \cdot \mu \cdot r_0^2 \cdot \nu_0}{h_0} \cdot \frac{(2\beta^2 + 1)}{(2 + \beta^2) \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.25)$$

Одержані формули дають можливість розрахувати момент тертя й радіальне навантаження (вантажопідйомність) у підшипнику, тому що величини μ , r_0 , ν_0 і h_0 обирають конструктивно.

Із розглянутої методики розрахунку течії мастила в зазорі радіального підшипника необхідно зробити висновок, що течія мастила спричинена не перепадом тиску, а винятково дією дотичних напружень, зумовлених обертальним рухом шийки вала.

Через ці дотичні сили мастилу, рідини або газу (для газових підшипників) передається енергія, і тим самим енергія шийки вала передається рідині. Зі свого боку мастильна рідина, рухаючись по замкненому контуру, формує закон розподілення тиску $P(\theta)$ та дотичних напружень $\tau(\theta)$, що виконують роботу утримання шийки

вала від дотику до нерухомої циліндричної поверхні гільзи або вкладишів.

Перелік питань до розділу 15

- 1 Приклади течій у вузьких шпаринах.
- 2 Ламінарна течія між двома пластинами:
 - а) пластини нерухомі;
 - б) одна з пластин рухається зі швидкістю u .
- 3 Течії фрикційна й напірна.
- 4 Закон розподілення швидкості між двома нерухомими й рухомими пластинами.
- 5 Витрата рідини для течії між двома нерухомими й рухомими пластинами.
- 6 Витрата рідини через зазор між двома циліндрами. Вплив ексцентриситету.
- 7 Епюри розподілення тиску в зазорі радіального підшипника.
- 8 Конфузорна й дифузорна зони течії в зазорі радіального підшипника.
- 9 «Гідравлічний клин» і причини виникнення сили взаємодії між поверхнями.
- 10 Різниця між гідростатичним і гідродинамічним підшипниками ковзання.
- 11 Дослідник М. П. Петров і його гідродинамічна теорія змащування.

ЧАСТИНА III
ВИХРОВІ ТЕЧІЇ

16 ВИХРОВІ ТЕЧІЇ В ПРИРОДІ ТА ТЕХНІЦІ

Вихрові течії належать до одного зі слабо вивчених розділів гідромеханіки. І це незважаючи на те, що вони є найбільш поширеними як у природі – в атмосфері й гідросфері Землі, космосі, Всесвіті, так і в техніці, коли рідина чи газ наявні як робочі тіла. Це можна пояснити надзвичайною складністю вихрових течій та їх величезною різноманітністю – від вихорів на мікрорівні до гігантських вихорів в атмосфері та Світовому океані, не говорячи вже про космічні простори, галактики тощо. До того ж, і сам механізм генерації вихорів дуже різноманітний і до кінця не зрозумілий.

Існує навіть думка, що й сама природа турбулентності тісно пов'язана з утворенням вихорів, тобто, що обидві ці проблеми взаємопов'язані.

Доречно нагадати, що в природі існує такий закон – будь-яку дію вона намагається виконати з найменшими затратами енергії. Чи не тому пилові маси закручуються в спіралі й утворюють галактики? Чи не тому вода витікає з воронки по спіралі, і вода в річці на повороті утворює вири? І дим із труби вилітає не прямими лініями? Мабуть, у природі у вихровій формі руху є щось таке цікаве для виконання вищезгаданого закону, якщо вона на кожному кроці демонструє свою симпатію до вихорів.

16.1 Огляд вихрових течій у природі та техніці

Для початку зробимо короткий огляд прикладів і спостережень вихрового руху.

У природі:

а) у Всесвіті – це вихори в атмосфері планет, на Сонце, так звані «чорні діри»;

б) в атмосфері Землі – це циклони, смерчі, рух великих мас повітря (вітер) та обтікання ними твердих предметів; підймальні та спадні маси повітря; дим і горючі гази на виході з труб; вихрові сліди за авіаційною та ракетною технікою; струмені ракетних двигунів тощо;

в) у гідросфері Землі – це постійний рух води в океанах, морях, річках та озерах, що виникає за різних причин (градієнти температур, геотермальна активність на дні, взаємодія з поверхневими повітряними масами, білі буруни вздовж берегової лінії, вихрові сліди за надводними та підводними кораблями й мешканцями підводного світу, наслідки різноманітних гідротехнічних споруд тощо);

У техніці можна без перебільшення стверджувати, що завжди, коли в технічних спорудах використовують рідину або газ, ми стикаємося з вихровими течіями. У багатьох ситуаціях ми намагаємося з ними боротися, бо на них витрачається енергія та збільшується сила супротиву. В інших ситуаціях ми спеціально створюємо вихрові структури, щоб організувати або підвищити ефективність тих чи інших технологічних процесів.

З використанням вихрових (закручених) течій організовуються та реалізуються такі процеси, як процес згоряння в котлах ТЕС і в усіх теплових двигунах; процеси висушування, нагрівання, сепарації, змішування, диспергації, генерації звуку, утримання плазми; більшість процесів гідротранспортування; елементи струминної техніки, буріння свердловин тощо.

У кожній із перелічених технологій є багато своїх особливостей, конструктивних рішень, параметрів і закономірностей, але скрізь наявні спеціально організовані вихрові течії, які й дозволяють здійснити робочий процес.

Як приклад, проаналізуємо наявність вихрових течій у нашої галузі – гідравлічних машинах, де «робочим тілом» є рідина, що через них протікає.

Не будемо зупинятися на вихорах у будь-яких місцевих опорах, що обумовлюють втрати енергії

$$\Delta h_m = \zeta_m \cdot \frac{v^2}{2g},$$

де ζ_m – коефіцієнт опору для даного місцевого опору;

Δh_m – механічна енергія рідини, що втрачається на утворення та підтримання вихорів.

На вході в насос (точніше, в робоче колесо) навіть за умови наших намагань забезпечити осьовий вхід, циркуляція найчастіше не дорівнює нулю й ми її повинні враховувати. Тим більше вона не дорівнює нулю на нерозрахункових режимах. Тобто осьовий вихор практично завжди присутній на вході в робоче колесо (рис 16.1).

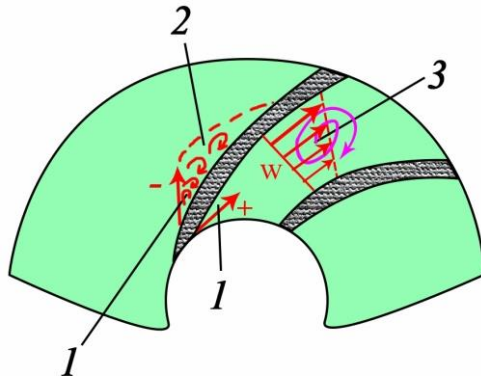


Рисунок 16.1 – Вихроутворення у відцентровому робочому колесі

Це зі свого боку зумовлює натікання рідини на лопать із певним кутом атаки й виникнення вихрової відривної зони (зона 1 на рис. 16.1). Часто наявність на робочому боці лопаті так званого осьового вихору (зона 3

на рис. 16.1) зумовлює вихрову зону й навіть зворотну течію на робочій стороні лопаті (зона 2 на рис. 16.1).

Крім того, потрібно відзначити вихрові структури в граничних шарах на всіх твердих поверхнях проточної частини, вихротокові поверхні за лопатями, кінцеві вихори (індукційні) на торцях лопатей. Аналогічні вихрові утворення існують у будь-якому типі відводів – каналному, спіральному, лопатовому чи кільцевому. Такі самі вихрові течії наявні в інших типах динамічних гідравлічних машин. Особливо необхідно відзначити вихрові течії у так званих вихрових насосах чи турбінах, де для енергопередавання створюються вихрові течії як енергоносії.

16.2 Основні поняття й характеристики вихрового руху рідини

У механіці твердого тіла обертовий рух – це обертання маси навкруги осі з кутовою ω або лінійною v швидкістю, пов'язаних між собою залежністю $v = \omega \cdot r$.

Рідка або газоподібна матерія відрізняється від твердого тіла дуже малими силами зчеплення між молекулами, і це проявляється в самому характері її руху. Згідно з теоремою Коші – Гельмгольца швидкість руху елементарного об'єму рідини складається зі швидкості квазітвердого тіла й деформаційного, тобто

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) + \bar{v}_\theta + \bar{v}_\varepsilon, \quad (16.1)$$

де $(\bar{\omega} \cdot \bar{r})$ – обертова складова швидкості;

\bar{v}_θ і \bar{v}_ε – відповідно швидкості кутової й лінійної деформації, що супроводжують обертовий рух.

Тобто кожна рідка частинка (елементарний об'єм) рідини постійно обертається навкруги свого центру маси та деформується. Одночасно велика група частинок найчастіше разом обертається навкруги спільної осі. Такий рух називають вихровим рухом. У гідродинаміці його вимірюють вектором $\vec{\Omega}$, що дорівнює

$$\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega}. \quad (16.2)$$

Розрізняють два поняття:

а) фізичний вихор – це коли одна, окремо взята рідка частинка обертається навколо власної осі.

Або це велика група рідких частинок, що одночасно обертається навколо спільної осі.

Усі фізичні вихори розподіляються за розмірами на «мікрОВихори» й «макрОВихори», що діляться на «дрібні», «великі» та «глобальні». Таке розподілення є умовним, але зрозуміло, що «глобальні вихори» діаметром до 300 км і більше в океані чи атмосфері відрізняються від вихорів за літаком, кораблем чи у вихровій камері;

б) математичний вихор – це аналітичний зв'язок між швидкістю течії \vec{v} і вектором $\vec{\Omega}$, що має вигляд

$$\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{v}.$$

Іншими словами, це математична операція *rot* над вектором \vec{v} .

У разі просторової течії вектор $\vec{\Omega}$ в декартовій системі координат має складові

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}. \quad (16.3)$$

Зі свого боку

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad \text{і} \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (5.4)$$

Взаємне розміщення векторів \vec{v} і $\vec{\Omega}$ може бути трьох видів (рис. 16.2).

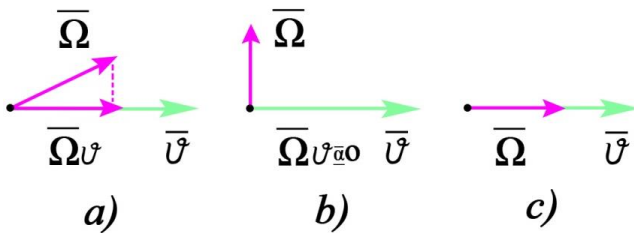


Рисунок 16.2 – Взаємне розміщення векторів \vec{v} і $\vec{\Omega}$

На рисунку 16.2:

- а) утворення вторинних течій від проєкції $\vec{\Omega}_v$;
- б) $\vec{v} \cdot \text{rot} \vec{v} = 0$ – вторинні течії відсутні;
- в) вектори \vec{v} і $\vec{\Omega}$ колінеарні, течія гвинтова.

Кожна точка об'єму обертової рідини може бути репрезентована своїм вектором $\vec{\Omega}$, тому такий об'єм будемо називати векторним полем $\Omega = f(r, \theta, z)$ у циліндричній системі координат. Для подальшого опису вихрової течії використовують властиві векторному полю елементи.

Вихрова лінія – це лінія у вихровому полі, в кожній точці якої на певний момент часу вектор $\vec{\Omega}$ дотичний (рис. 16.3).

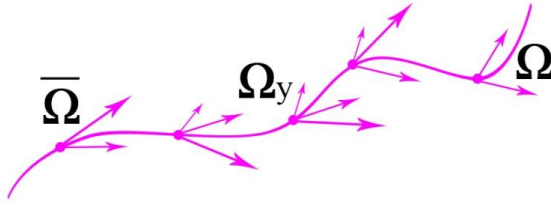


Рисунок 16.3 – Вихрова лінія

Рівняння вихрової лінії

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z} \quad (16.5)$$

Вихрова поверхня – це поверхня, утворена вихровими лініями, що проходять через контур S (рис. 16.4).

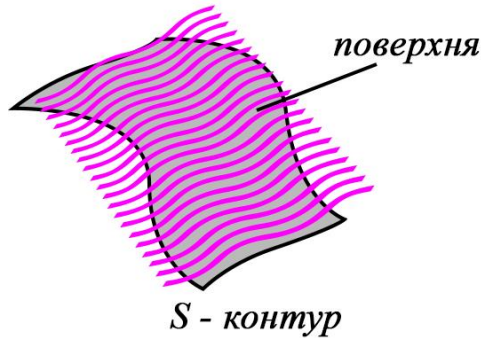


Рисунок 16.4 – Вихрова поверхня

Особливістю вихрової поверхні є виконання умови $\bar{\Omega}_{nS} = 0$.

Вихровою трубкою називають вихрову поверхню, якщо контур S замкнений.

Вихрова струминка – це об’єм рідини, оточений вихровою трубкою. Очевидно, що вийти за межі вихрової трубки рідина не може, тому що $\bar{\Omega}_n = 0$.

Вихровий шнур – це вихрова струминка, поза якою течія не вихрова. Інколи вихрової шнур називають вихровою доріжкою.

Вихрова нитка – це вихрова струминка нескінченно малого перерізу, що має початок і не має кінця.

Вихротокова поверхня – це поверхня, утворена одночасно вихровими лініями й лініями течії (рис. 16.5).

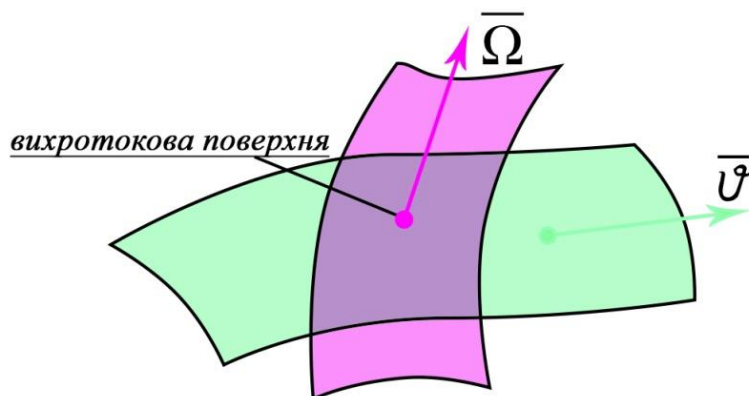


Рисунок 16.5 – Вихротокова поверхня

Для вихротокової поверхні характерне виконання умови $v_{nS} = 0$ і $\Omega_{nS} = 0$.

Інтенсивність вихору – це потік вектора вихору $\bar{\Omega}$ через поверхню S (рис. 16.6).

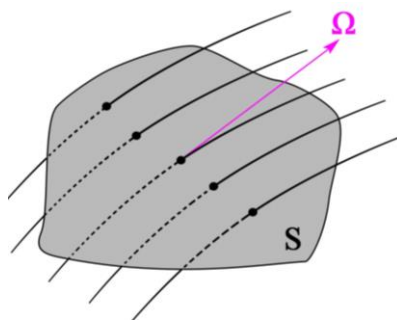


Рисунок 16.6 – Потік вектора вихору через поверхню

Інтенсивність вихору визначають за формулою

$$I = \int_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}. \quad (16.6)$$

Для елементарної вихрової струминки або для однорідного вихрового поля ($\Omega = const$)

$$I = \Omega \cdot S.$$

Вихори приєднані – це замкнені вихори, що прилягають до твердої поверхні або розміщені навколо твердого тіла.

Вихори вільні – це вихори, що зійшли з твердої поверхні, яку обтікали, і які йдуть у нескінченність (рис. 16.7). На них уже не діють тверді поверхні.

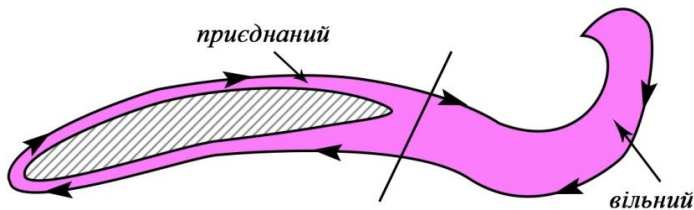


Рисунок 16.7 – Вихори приєднаній і вільний

Вихрова пелена, що згортається – це вихрова поверхня, утворена вільними вихорами різної інтенсивності, що призводить до її згортання (рис. 16.8).

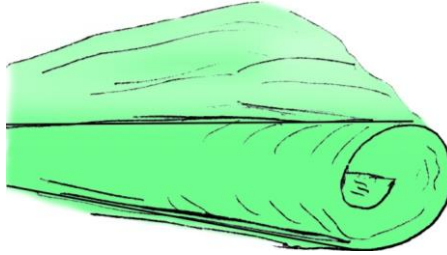


Рисунок 16.8 – Вихрова поверхня

Кільцеві вихори – це вихори, що мають тороподібну вихрову поверхню (рис. 16.9).

Найбільш поширені вихрові течії, що називають закрученими. Це течії, в яких частинки рухаються спіральними траєкторіями. Серед них просторові конусні або конічні (v_r, v_u, v_z), плоскі (лише v_u і v_r), циліндричні або гвинтові (v_u і v_z). Залежно від напрямку v_z їх можуть називати вихростік або вихровитік.

У техніці такі течії формуються в спеціальних пристроях – вихрових камерах.

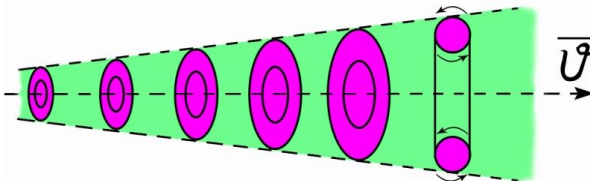


Рисунок 16.9 – Кільцеві вихори

Вихрова доріжка Кармана – це вихори, утворювані під час обтікання кулі або циліндра, які періодично зриваються й розміщуються в шаховому порядку (рис. 16.10).

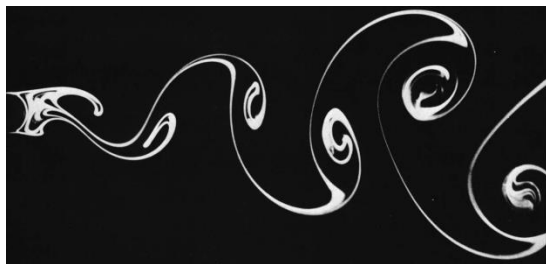


Рисунок 16.10 – Вихрова доріжка Кармана

Вихори Тейлора – це вихори, утворювані під час протікання рідини в осьовому напрямку через простір між двома циліндрами, один із яких обертається (рис. 16.11).

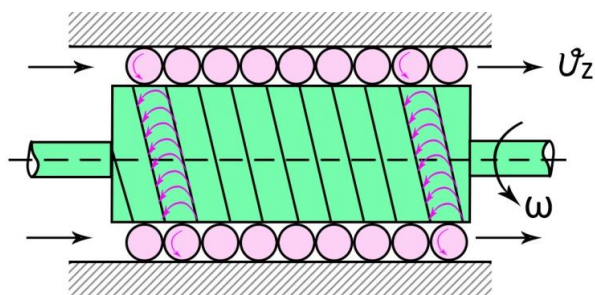


Рисунок 16.11 – Вихори Тейлора

Протитечійні вихори – це вихори, утворені двофазними рідинами й закручені в циліндричній чи конічній камері в протилежних напрямках, створюючи кращі умови для перемішування фаз і протікання хімічних

реакцій між ними (наприклад, газ H_2S і краплі води для створення H_2SO_4). Ці вихори використовують у масообмінних апаратах.

Поздовжні вихори в струмені рідини, що витікає з отвору в стінці – це вихори, що подрібнюють струминку на однакові кульки (рис. 16.12).

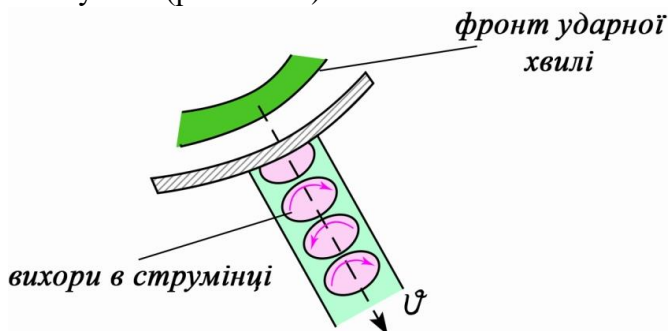


Рисунок 16.12 – Поздовжні вихори

Поздовжні вихори використовують у віброгрануляторах для хімічної промисловості.

16.3 Основні теореми кінематики вихрового руху

Теоретичне дослідження вихрового руху було розпочато в середині XIX століття в працях Стокса, Гельмгольца, Томсона. Саме тоді були сформульовані й визначені основні закономірності вихрових течій.

Ураховуючи, що основні теореми для вихрового руху вивчали раніше в базовому курсі «Механіка рідини і газу», в цьому курсі можна обмежитися лише їх нагадуванням і поясненням.

У відомій теоремі Гельмгольца «Про розкладання швидкості руху рідкої частинки» було теоретично доведено, що рідка частинка рухається, як і тверде тіло

(поступально та обертово), та водночас ще рухається деформаційно (з кутовою та лінійною швидкостями).

Друга теорема Гельмгольца «Про постійність інтенсивності вихору вздовж вихрової струминки» має вигляд

$$\frac{dI}{dl} = 0, \text{ або } I = \text{const}. \quad (16.7)$$

Два висновки з другої теореми Гельмгольца:

– площа перерізу вихрової струминки ніде не може дорівнювати нулю, оскільки в цьому разі $\omega = \infty$;

– вихрові струминки не можуть починатися й закінчуватися всередині об'єму рідини. Вони або замикаються самі на себе, утворюючи вихрові кільця, або спираються на стінки чи вільні поверхні.

Теорема Томсона «Про постійність циркуляції вздовж рухомого рідкого контура» має вигляд

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \text{ або } \Gamma_L = \text{const}. \quad (16.8)$$

Два висновки з теореми Томсона:

– якщо рух рідини починається зі стану спокою $v = 0 \rightarrow \Gamma = v \cdot L = 0$, то він і в подальшому залишається безвихровим (потенціальним) – $\vec{\Omega} = 0$. Нагадаємо ствердження Гельмгольца: «Ні одна частинка води не може почати обертатися, якщо до цього вона не оберталася»;

– залежність $\frac{d\Gamma}{dt} \neq 0$ виконується лише в разі, коли в якомусь місці течії тиск $P = f(x, y, z, t)$ або швидкість $v = f(x, y, z, t)$ будуть мати розрив.

Пропонуємо студентам самим переконатися, поперше, що $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, де Γ_1 – циркуляція по контуру профілю, Γ_2 – циркуляція по контуру за профілем. По-друге, чим більша підймальна сила Y , тим більша інтенсивність вихорів за профілем (лопаттю).

Теорема Стокса «Про зв'язок між циркуляцією по контуру лопаті та інтенсивністю вихорів за лопаттю» має вигляд

$$\int_S \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{L} \quad (16.9)$$

Залежність (16.9) пояснює, чому обов'язково виникають вихори на кінцях лопатей (кінцеві вихори).

Відомо, що вихрове поле, що утворюється за лопаттю, індукує в течії, яка обтікає лопать зі швидкістю v_∞ , додаткову течію зі швидкістю v_i . Причому $v_i \perp v_\infty$, тому індукована течія геометрично складається з основною течією, змінює її кут атаки й негативно впливає на сили взаємодії та втрати енергії.

Розрахунок цієї течії ведеться через допоміжний вектор \vec{a} , пов'язаний зі швидкістю v_i залежністю $v_i = \text{rot} \vec{a}$. Компоненти \vec{a} визначають із розв'язання рівнянь Пуассона:

$$\begin{cases} a_x = \frac{1}{4\pi} \int_V \Omega_x \frac{dV}{r} \\ a_y = \frac{1}{4\pi} \int_V \Omega_y \frac{dV}{r} \\ a_z = \frac{1}{4\pi} \int_V \Omega_z \frac{dV}{r} \end{cases}, \quad (16.10)$$

де $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ – відомі компоненти вихору;

V – об'єм, який займають ці вихори;

r – радіус-вектор до точки, у якій знаходиться швидкість v_i .

Потім через компоненти \vec{a} знаходять значення індукованої вихорами швидкості v_i .

Для довільного криволінійного вихрового шнура індуковану швидкість знаходять за формулою Біо – Савара

$$v_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\sin \alpha}{r^2} dL. \quad (16.11)$$

За допомогою цієї формули легко знайти індуковані швидкості для більш простих випадків. Наприклад, для відрізка вихрової нитки, обмеженого точками A і B , швидкість у точці M , що знаходиться на відстані h від нитки, дорівнює

$$v_i = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \theta - \cos \beta). \quad (16.12)$$

Для прикладу вихрового променя індуковану швидкість знаходять за формулою

$$v_i = \frac{\Gamma}{2\pi L}. \quad (16.13)$$

16.4 Основні рівняння для розрахунку вихрових течій

Незважаючи на велику фізичну складність кінематики й динаміки вихрових течій, вони, як і будь-яке

матеріальне середовище, підпорядковуються всім класичним законам механіки. Тому всі рівняння класичної гідромеханіки можуть бути використані для вихрових течій. Водночас необхідно пам'ятати, що часто цими рівняннями буде неможливо скористатися, оскільки через фізичну невизначеність вихрових течій неможливо буде коректним задати граничні чи початкові умови.

Рівняння для вихрового руху, як і в класичній гідромеханіці, диференціальні, часто в похідних другого порядку, нелінійні та потребують використання ЕОМ.

Найчастіше рівняння вихрового руху записують в інваріантній формі (векторній чи тензорній) або використовують циліндричну чи криволінійну систему координат.

Наприклад, скористаємося рівняннями Нав'є – Стокса для в'язкої нестискуваної рідини без урахування масових сил у векторній або тензорній формі.

У векторній формі

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P + \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \\ \text{div} \vec{v} = 0 \end{cases}, \quad (16.14)$$

у тензорній формі

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \end{cases}. \quad (16.15)$$

Після застосування операції *rot* і введення завихреності $\bar{\omega}$ ці рівняння перетворюються на рівняння Гамільтона

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{\omega} = (\bar{\omega} \cdot \nabla) \cdot \bar{v} + \nu \nabla^2 \bar{\omega} \\ \bar{\omega} = \text{rot} \bar{v} \end{cases} \quad (16.16)$$

У разі плоскої течії рівняння нерозривності можна записати у вигляді

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

що дозволяє ввести функцію течії $\psi(x, y)$, через яку

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Вектор $\bar{\omega}$ має в цьому разі єдину ненульову компоненту (це можна бачити на прикладі течії Хагена – Пуазейля)

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \Delta \psi. \quad (16.17)$$

Якщо підставити (16.17) в (16.14), то одержимо рівняння конвективної дифузії завихреності

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \nu \Delta \bar{\omega}. \quad (16.18)$$

Інколи наведені рівняння дозволяють якісно зрозуміти природу виникнення вихорів у рідині.

Згідно з класичними теоремами Лагранжа й Кельвіна в ідеальній рідині генерація вихорів неможлива. Як відомо, і вода, і повітря – масов’язкі середовища. Але повсякденні спостереження й спеціальні експерименти свідчать про занадто легке вихроутворення у воді та повітрі. Причина полягає у великому градієнті швидкості поблизу твердої поверхні. Саме там, у граничному шарі, виникають і генеруються первинні вихори. Далі вони рухаються, як вільні вихори, в основній течії, що є малов’язкою через малий градієнт швидкості.

Тому подальший рух вихорів в масов’язкій рідині можна розглядати як рух у ідеальній рідині й використовувати більш прості рівняння руху, наприклад, у формі Ейлера

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad}P, \quad (16.19)$$

або у формі Громеко

$$\frac{dv}{dt} + \text{grad}\left(U - \frac{P}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right) = \vec{v} \times \text{rot}\vec{v}, \quad (16.20)$$

де U – потенціал масових сил.

Можлива також більш коротка форма запису

$$\frac{dv}{dt} + \text{grad}H = \vec{v} \times \text{rot}\vec{v}. \quad (16.21)$$

У разі сталої течії (16.21) буде мати вигляд

$$\text{grad}H = \vec{v} \times \text{rot}\vec{v}. \quad (16.22)$$

У техніці існує багато течій, для яких масовими силами можна знехтувати, тоді

$$H = \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2}. \quad (16.23)$$

Під час руху рідини без вторинних течій ($\vec{v} \times \text{rot}\vec{v} = 0$) одержимо $H = 0$, або $\frac{P}{\gamma} = -\frac{v^2}{2g}$.

У разі плоскої течії $\omega = \omega(\psi)$ (16.17), але тоді і $H = f(\psi)$. Тобто динаміку течії вздовж лінії течії можна описати рівнянням Бернуллі

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = H(\psi). \quad (16.24)$$

Якщо порівняти вирази. (16.24) і (16.17), одержуємо

$$\omega = -\frac{dH}{d\psi}. \quad (16.25)$$

Звідси можна зробити висновок, що завихреність є функцією зміни енергії вздовж лінії течії.

У разі нестационарного руху аналогічну залежність завихреності описують інтегралом Лагранжа – Коші

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = H(t). \quad (16.26)$$

Потрібно також додати:

– крім наведених рівнянь, що характеризують рух вихорів, у повній мірі можуть бути використані закони збереження імпульсу, кількості руху й моменту кількості руху;

– вищенаведені рівняння належать лише до однофазних течій. У техніці вихрові течії часто є дво- та більше фазними. Рух фаз також може бути інертним або реагуючим, коли одна фаза вступає в реакцію з іншою. У цих ситуаціях потрібно залучити рівняння термодинаміки, молекулярної фізики та ін.

16.5 Фізичні моделі вихорів

У 1932 році Л. Прандтль запропонував першу модель плоского вихору (рис. 16.13).

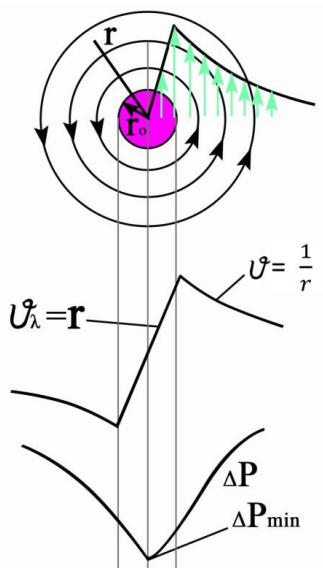


Рисунок 16.13 – Перша модель плоского вихору Прандтля

Модель вихору являє собою плоский потенціальний вихор із комплексним потенціалом

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi L} \ln z$$

і квазітвердим ядром, у якому лінійна швидкість

$$v_{\text{я}} = \omega \cdot r. \quad (16.27)$$

За ядром швидкість змінювалася за законом

$$v = \frac{1}{r}. \quad (16.28)$$

Максимальна швидкість була на поверхні ядра

$$v_{\text{я.max}} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \quad (16.29)$$

Для такої спрощеної моделі був розрахований закон зміни тиску всередині ядра

$$P = P_0 - \frac{\rho \Gamma^2 (2r_{\text{я}}^2 - r^2)}{8\pi^2 \cdot r_{\text{я}}^4}. \quad (16.30)$$

Але більшість вчених і сам Л. Прандтль розуміли, що така модель придатна лише для приблизних розрахунків і не зовсім відповідає реальній картині течії. Наприклад, закон $v_{\text{я}} = \omega \cdot r$ підтверджується лише в зоні, де $r_0 \rightarrow 0$.

Пізніше (у 40-х роках) вчені прийшли до висновку, що в реальній в'язкій рідині основною тенденцією є

вирівнювання завихреності частинок рідини й «розпливання» в часі вихрової струминки. Тому з'явилися нові, близькі між собою, моделі Ламба й Ротта. Швидкості в цих моделях підпорядковувалися таким законам:

– для моделі Ламба

$$v_u = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right), \quad (16.31)$$

– для моделі Ротта

$$v_u = \frac{\Gamma_\infty}{2\pi \cdot r} \left(1 - e^{-\frac{ar^2}{2\nu}} \right). \quad (16.32)$$

Картини течії для обох моделей були майже однакові. Одну з них подано на рисунку 16.14.

Особливості такої моделі полягають у:

- в цілому рух рідини уявляється як вихростік;
- сумарна швидкість рідини до центра $v = -a \cdot r$ (де a – параметр спіралі);
- ядро вихору більш розмите, умовне;
- колову компоненту швидкості v_u визначають за (16.32).

Потрібно зауважити, що така модель більш відповідала дійсній картині течії та була введена на підставі доведеної на той час теореми «Наявність стоку є необхідною умовою стійкості ізольованого вихору».

Але й ця модель не задовольняла експериментаторів, оскільки не пояснювала, куди дівається рідина, що прийшла до центра. Хоча саме вона підштовхнула вчених до наступної моделі, у якій проходить перерозподілення енергії від обертального руху до руху в осьовому напрямку

(v_z замість v_u). Схеми такої моделі та графіки перерозподілення енергії подані на рисунку 16.15.

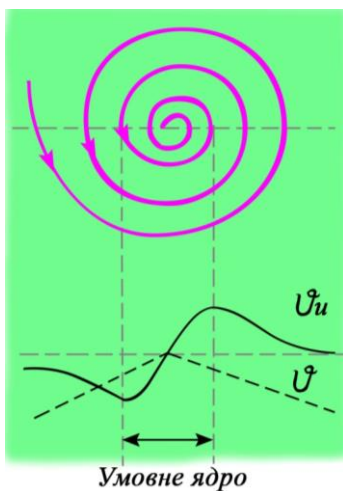


Рисунок 16.14 – Моделі Ламба й Ротта

На рисунку вказані зони розподілення швидкості: для зони 1 – $v = -\frac{1}{r}$; для зони 1' – $v = -r$; для зони 2 –

$$v_u = u = r^{1-\text{Re}}; \text{ для зони 2' – } v_u = \frac{a}{r} \left(1 - e^{-\frac{\text{Re} \cdot r^2}{2}} \right), \text{ де } \text{Re} = \frac{|v| \cdot r}{\nu}$$

; для зони 3 – $v = v_z$.

На рисунку 16.15 видно, що умовне ядро залишається і в ньому швидкість v_u швидко зменшується до нуля, але з'являється осьова швидкість v_z (зона 3).



Рисунок 16.15 – Модель енергії від обертального руху до руху в осьовому напрямку

Необхідно відзначити, що така модель знайшла підтвердження на практиці та використовується і в наш час. У макровсесвіті її підтвердженням є так звані «чорні діри». Водночас закономірно виникає питання: «На що витрачається маса, що проходить зі швидкістю v_z за низького тиску Δp ?» Є думка, що струмінь цієї маси, що вийшла за нормаллю до площини обертання вихору, створює за ним умови для виникнення нових вихрових структур.

16.6 Генерація вихрових ниток у вихрових течіях

У процесі поглиблення знань про вихрові течії (від середини XIX століття й до нашого часу) з'являються гіпотези щодо природи й характеру рідких течій у цілому. Ще з подачі Л. Прандтля затвердилася думка, що основною макроструктурою всіх макровихорів є «вихрові нитки», що генеруються в так званому «вільному шарі змішання» відповідно до механізму нестійкості Кельвіна – Гельмгольца.

В основі цього механізму лежить виникнення в течії так званих «поверхонь розділення», по різних боках яких різні енергетичні параметри течії. Будучи нестійкими, вони за будь-якого незначного збудження руйнуються, і виникають компоненти швидкості, які нормальні до цих поверхонь.

Ще в 1931 році вперше було оприлюднено думку про те, що ламінарний рух формується пов'язаними вихорами, а турбулентний – вільними (що зірвалися й пішли у вільну мандрівку. Тут ми пропонуємо студентам освіжити в пам'яті з курсу «Механіка рідини й газу» розділ, де доведено існування вихорів у течії Хагена – Пуазейля. Пропонуємо також узяти до уваги деякі спостереження за рухом рідких середовищ.

Перше спостереження – про роль градієнта швидкості. Наявність градієнта швидкості є першопричиною генерації первинних вихорів. Причому ці вихори будуть витягуватися в напрямку течії.

Друге спостереження – вихори різних масштабів не впливають один на одного, обмінюватися порціями енергії можуть лише вихори близьких розмірів.

Третє спостереження – з 50-х років минулого століття вихори стали уявляти як валики, що перекочуються

по твердій поверхні, відірвані один від одного або через в'язкість передають взаємне обертання.

Отже, поступово стала затверджуватися думка, що тенденція до закручування рідини є основною для всієї течії.

Цікаво, що група дослідників стенфордського університету в 70-ті роки довела наявність регулярної просторової течії у в'язкому прошарку граничного шару.

У монографії «Введення в турбулентність і її вимірювання», що вийшла в 1974 році, Бредшоу сформулював свої результати так: «Турбулентність – це переплетіння вихрових ниток або закручених вихрових шарів із середньою течією».

Отже, проблема вивчення природи турбулентності міцно переплелася з вивченням вихрових рухів, особливо мікротоворів.

Схему однієї з останніх фізичних моделей генерування вихорів подано на рисунку 16.16.

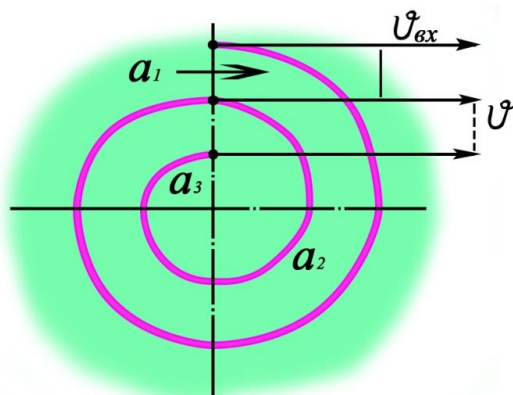


Рисунок 16.16 – Фізична модель генерування вихорів

На рисунку 16.16 зображено частку вихрової нитки, яку було згенеровано за механізмом нестійкості Кельвіна – Гельмгольца. У точці a_1 зливаються дві течії різного походження: v_{ex} – це швидкість, із якою рідина підійшла зі вхідного механізму закрутки рідини; u – це швидкість рідини, що прийшла в ту саму точку після повернення її на 360° .

Поверхня $a_1 a_2 a_3$ нестійка, якщо виконується умова

$$(v - v_{ex})^2 > \frac{\zeta}{k} \cdot \frac{\rho - \rho_{ex}}{\rho \cdot \rho_{ex}}, \quad (16.33)$$

де k – хвильове число;

ζ – коефіцієнт збурення.

За нульової різниці $\rho - \rho_{ex}$ усі збурення стають нестійкими й зростають за експоненційним законом. Тоді поверхня розділу згортається у вихрову пелену з утворенням вихрових ниток радіусом l_v , які потім скручуються (рисунки 16.17 і 16.18).

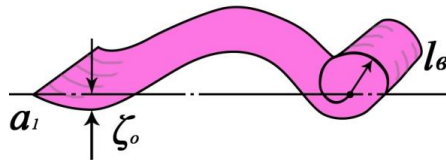


Рисунок 16.17 – Вихрова пелена

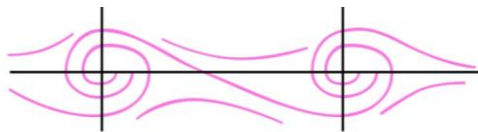


Рисунок 16.18 – Вихрові нитки

На рисунку 16.17 подано послідовність скручення поверхні розділу від точки a_1 , а на рисунку 16.18 – послідовність скручення двох поверхонь розділу, що продовжують рухатися в загальній течії зі швидкістю v .

Необхідно звернути увагу ще на один момент. На рисунку 16.19 показані дві сусідні поверхні розділу, що почали зкручуватися у вихрові нитки.

Із рисунка видно, що обертання обох сусідніх ниток підтримується внутрішніми напругами τ_{rr} , які називають ефективною в'язкістю μ_T

$$\tau_{rr} = \frac{2}{3} \mu_T \left(\frac{2\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \quad (16.34)$$

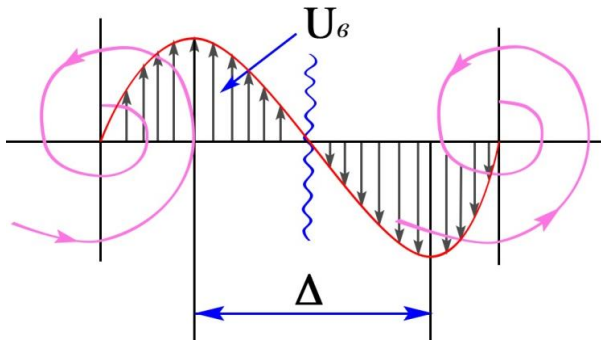


Рисунок 16.19 – Поверхні розділу, що почали зкручуватися у вихрові нитки

Ефективна в'язкість знаходиться в рівновазі з внутрішніми напругами основної течії

$$\tau \sim \mu \frac{2u_0}{\Delta}. \quad (16.35)$$

Порівнявши ці залежності, одержимо

$$\mu_T = 3\mu \frac{u_6}{\Delta} \cdot \frac{1}{2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}}. \quad (16.36)$$

16.7 Установки для створення вихрових течій

Для примусового створення закручених течій використовують спеціальні установки (вихрогенератори), що ґрунтуються на трьох типах:

- генератори з тангенціальним підведенням;
- генератори з лопатевою закруткою;
- генератори з використанням обертальної камери.

Перший тип установок найчастіше використовують для створення компактних і стійких струменів спеціального призначення (струменеве різання металу, гідроруйнування гірських порід – вугілля або руди, пожежогасіння тощо).

Лопатеві генератори найчастіше використовують у хімічних реакторах, у топках котлів ТЕС, перед камерами згоряння газотурбінних двигунів. Причому лопатеві решітки можуть бути однорежимними, рухомими багаторежимними.

Генератори третього типу використовують рідше, але відомі високошвидкісні конструкції з $n = 9500$ об/хв і конструкції з лопатевими решітками.

Різноманіття конструкцій вихрогенераторів має одну мету – одержати потрібну структуру вихрової течії й добитися максимальної ефективності того чи іншого технічного процесу. У результаті з'являється можливість активно впливати на такі технічні процеси:

- розподілення фаз (пиловловлювання, стратифікація, сепарація тощо):

- інтенсивне перемішування фаз (паливо й окислювач, слаботорозчинні рідини);
- інтенсифікація процесів сушки та відділення зайвої вологи;
- диспергація рідин на краплі;
- процеси збагачення (руди, вугілля, ядерного палива, розділення ізотопів);
- утримання плазми, захист відповідальних поверхонь від перегрівання;
- енергорозподілення низькотемпературних фаз.

На всі ці технологічні процеси впливає один з основних параметрів закручених течій – інтенсивність закручування s , що ґрунтується на співвідношенні

$$\frac{v_u}{v_r} \gg 1, \quad (16.37)$$

де v_u і v_r – лінійна колова й радіальна швидкості.

Інтенсивність закручування s – це безрозмірне відношення осьової компоненти швидкості (моменту кількості руху в осьовому напрямку) до добутку кількості руху та еквівалентного радіуса сопла, тобто

$$s = \frac{G_x}{G_\theta \cdot \frac{d}{2}}, \quad (16.38)$$

де G_θ – потік моменту кількості руху в осьовому напрямку з урахуванням турбулентного дотичного напруження

$$G_{\theta} = \int_0^{\infty} (\rho v_z v_u + (\bar{\rho} \bar{v}'_z \bar{v}'_u)) \cdot r^2 dr; \quad (16.39)$$

G_x – потік кількості руху в осьовому напрямку з урахуванням турбулентної пульсації та осьового потягу

$$G_x = \int_0^{\infty} [\rho v_z^2 + \bar{\rho} \bar{v}'_z + (P - P_{\infty})] \cdot r dr. \quad (16.40)$$

Альтернативні спрощені варіанти формул для визначення параметра s

$$s = \frac{G}{2 - G} \quad \text{або} \quad s = \frac{G}{4 - G^2}, \quad (16.41)$$

де $G = \left(\frac{v_u}{v_z} \right)_{\max}$.

Перший варіант (16.41) рекомендують для $G > 0,4$, другий – для $G < 0,4$.

На практиці часто оцінювання параметра закрутки, що створює лопатева решітка, проводять за спрощеною формулою

$$s = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \varphi \quad (16.42)$$

або вибирають із таблиці φ/s , де φ – кут установлення лопаті на виході:

φ°	15	30	45	60	70	80
s	0,2	0,4	0,7	1,2	2,0	4,0

Схема установлення лопатей вихрогенератора, що закручує, показана на рисунку 16.20, де вектор \vec{v}'_z – напрям швидкості після лопатєвого апарата, φ – кут установлення лопатей на виході.

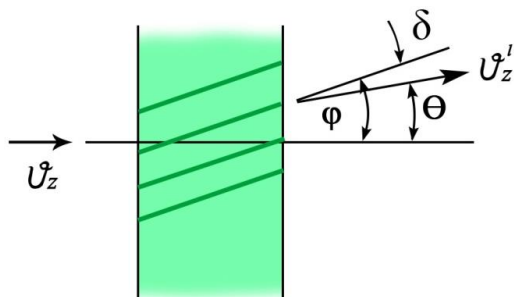


Рисунок 16.20 – Лопатєвий апарат із прямих пластин

На рисунку 16.20 репрезентовано спрощений варіант із прямих пластин, одним із недоліків якого є підвищені втрати енергії течії.

Для зменшення втрат енергії інколи лопатєвий апарат виконують із профільованих пластин (рис. 16.21).

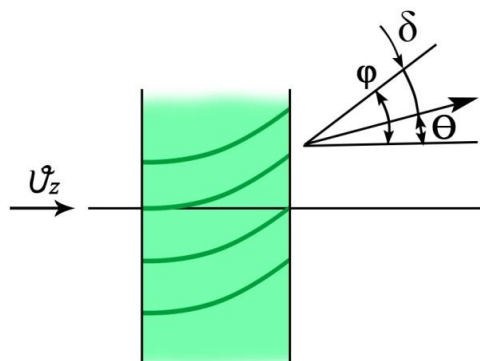


Рисунок 16.21 – Лопатєвий апарат із профільованих пластин

Для такого апарата використовують спеціальну формулу:

$$s = \sigma \frac{R}{2B} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right], \quad (16.43)$$

де $\sigma = \frac{v_u}{v_z}$;

R – зовнішній радіус решітки;

R_0 – радіус сопла.

Практика свідчить, лопатеві апарати, які закручують, забезпечують параметр закрутки s в широкому діапазоні. Слабким закручуванням вважають $s < 0,4$. Зазвичай за таких параметрів спостерігаються збільшення ширини вільної поверхні вихрового струменя, покращення процесів підмішування й перемішування двох фаз. Зміну тиску по радіусу для такого прикладу можна оцінювати за спрощеною формулою

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho \omega^2}{r}. \quad (16.44)$$

У разі більш високого параметра закручування $s \geq 0,6$ градієнти тиску $\frac{\partial P}{\partial r}$ і особливо $\frac{\partial P}{\partial z}$ швидко зростають і призводять до появи осьової рециркуляції – тороїдальної зони зворотної течії. Цей фактор завжди сприятливий і використовується там, де треба збільшити час і траєкторію компонентів, що реагують (наприклад, горіння суміші й палива), або зменшити довжину вихрової камери.

На рисунку 16.22 показано відмінності формування вихрової течії залежно від параметра закручування.

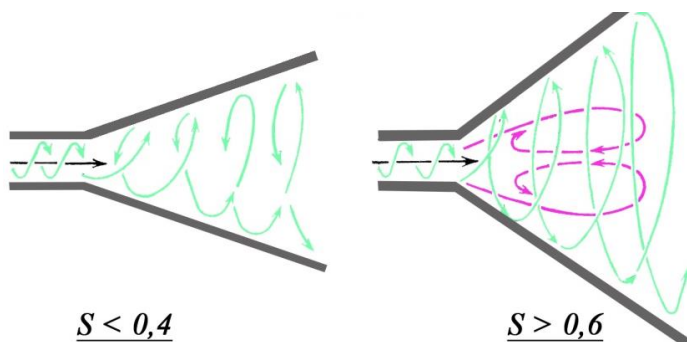


Рисунок 16.22 – Формування закручених течій

16.8 Приклади використання вихрових течій у техніці

16.8.1 Циклонні сепаратори

Циклонні сепаратори – це апарати для відділення однієї фази від іншої. Наприклад, повітря від пилу, крапель жиру в молоці від іншої рідкої фракції тощо.

В усіх циклонних сепараторах використовують штучно створене поле відцентрових сил ($F_{\text{вц}} = m\omega^2 R$). На відміну від інших, у таких машинах відцентрове поле створюється вихровою течією двофазної суміші за рахунок особливої геометричної форми (рис. 16.23).

З рисунка 16.23 видно, що формування течії спочатку задається в камері 2 з тангенціальним входом суміші 1, потім продовжується в конічній камері 3. Більш важкі частинки (тирса, пил тощо) відцентровими силами відкидаються на периферію і по внутрішній конічній поверхні через регульований отвір зсипаються в бункер. Очищений газ (повітря) виходить через верхню трубу діаметром D_i .

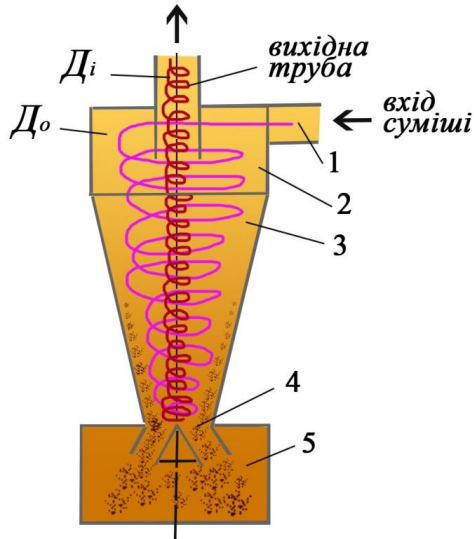


Рисунок 16.23 – Циклонний сепаратор

Параметр закручування такої конструкції обчислюють за формулою

$$s = \frac{\pi D_o D_i}{4 F_T}, \quad (16.45)$$

де F_T – площа тангенціального вхідного патрубка.

Особливості течії в такому апараті:

– вільний і вимушений вихори. У вільному вихорі

$$v_u = \frac{const}{r}, \text{ у вимушеному – } v_u = \omega r;$$

– конічна поверхня вимушує вихор зжиматися. Тим самим швидкість обертання збільшується й збільшуються відцентрові сили, що діють на частинки. Вони відкидаються

на стінки, здуваються швидкістю v_z і силами тяжіння та рухаються вниз до вихідного отвору

$$F_{ви} = C_1 d_r^3 (\rho_r - \rho_{нов}) \frac{\omega^2}{r}, \quad (16.46)$$

де d_r – діаметр частинки;

ρ_r – густина частинки;

C_1 – константа, що залежить від геометрії апарата.

Сила супротиву, що заважає рухатися частинкам до виходу

$$F_{супр} = C_2 d_r \mu v_r. \quad (16.47)$$

Але $F_{ви} > F_{супр}$, оскільки $F_{ви} \sim d_r^3$, а $F_{супр} \sim d_r$;

– тверді або рідкі частинки перебувають у течії приблизно в 15 – 20 разів довше, ніж у чисто осьовій течії, що значно підвищує ефект сепарації;

– у центральній зоні існує осьовий вихор, його ядро теж відкидає окремі частинки на периферію і тим самим додатково очищує основний потік;

– параметр закручування цих даних апаратів $s \geq 2$.

Ефективність сепарації оцінюють параметром z :

$$z = \sqrt{\frac{d_r^2 v_u \rho_r}{v \cdot d_0 \cdot \rho_{нов}}}. \quad (16.48)$$

Втрати тиску в циклоні становлять не більше 2,5 кПа, їх визначають за формулою

$$\Delta P = \frac{\zeta \cdot \rho_{сум} \cdot u^2}{2}, \quad (16.49)$$

де ζ – коефіцієнт втрат, залежить від відношення геометричних розмірів.

На рисунку 16.24 подано дві інші схеми циклонів циліндричної форми з лопатевими закрутками течії.

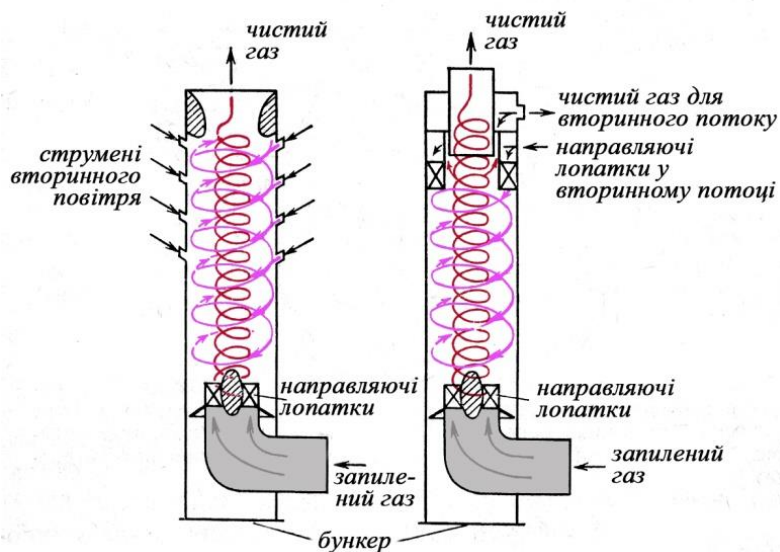


Рисунок 16.24 – Пилоочишувачі з лопатевими закрутками течії

Репрезентовані на рисунку 16.24 апарати мають дві незалежні регульовані подачі газу, наприклад, запиленого повітря. Забруднені гази проходять по центральному каналу через лопатевий завихрювач, що створює вимушений вихор. Чистий газ уводиться тангенціально у верхню частину апарата для створення в зовнішній області вихрової течії з параметрами вільного вихору. Як видно зі схем,

забруднений газ підводиться закрученим у центральну область вільного вихору, де відцентрові сили найбільші.

На відміну від звичайного циклона в цій схемі концентрація пилу не впливає на ефективність сепарації. Розмір сепарувальних частинок на порядок менший, ніж у звичайному циклоні. Але цей вигравш як очищення досягають збільшенням утрат енергії, необхідністю подавати чистий газ та ускладненням конструкції апарата.

16.8.2 Циклонні камери згоряння

Це камери, у які подається паливо у вигляді дрібних крапель (бензину, нафти, гасу тощо) або дрібно розпиленого твердого палива й окислювача, найчастіше просто повітря з окислювачем O_2 . Причому таке двофазне середовище подається у вигляді циклонного закрученого вихору.

На практиці розроблено дуже багато різних видів циклонних камер згоряння, три з них показані на рисунку 16.25.

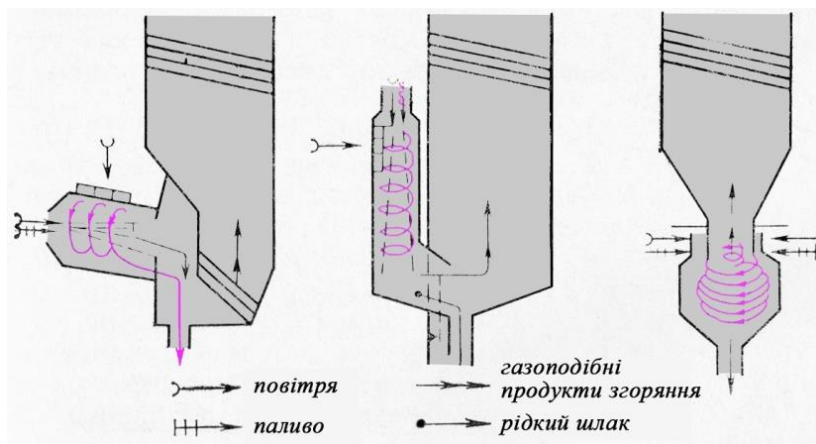


Рисунок 16.25 – Циклонні камери згоряння

Циклонні камери здебільшого використовують для спалення палива й матеріалів, які важко спалити з високим ККД звичайними методами. Наприклад, рослинні рештки, вугілля з високим вмістом золи, антрацит, нафта з високим вмістом сірки, низькокалорійні колошникові гази, деякі мінеральні руди.

Вимоги до структури вихрової течії в таких камерах:

- підвищений рівень турбулентності;
- рециркуляція та прецесія ядра вихору;
- підвищений термін перебування спалюваного матеріалу в камері.

Параметр закручування в таких камерах повинен бути в межах $3 < s < 20$, температура спалення – від 1 500 до 3 000°K.

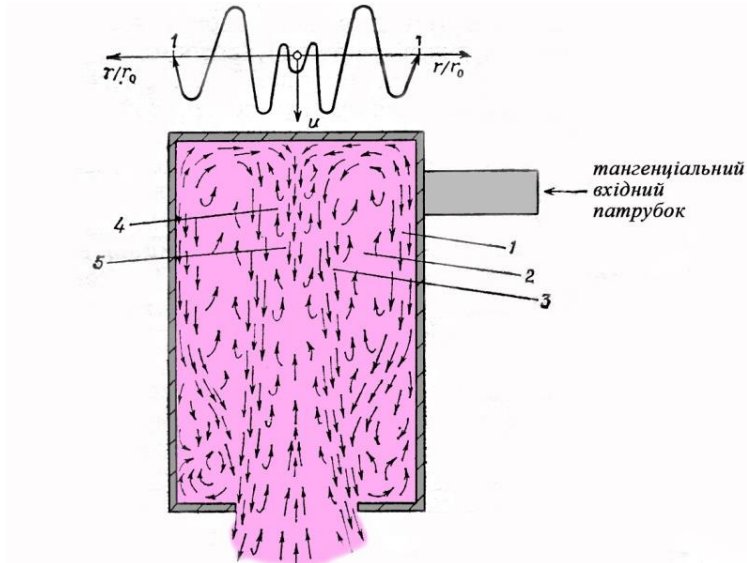
Переваги циклонних камер перед іншими типами такі:

- відмінне перемішування палива та окислювача;
- тепловиділення концентрується в зменшеному об'ємі (це велика теплонапруженість);
- робота за умов невеликого надлишку повітря, високий рівень температури в разі низькокалорійного палива;
- можливість спалювати частинки до 5 мм.

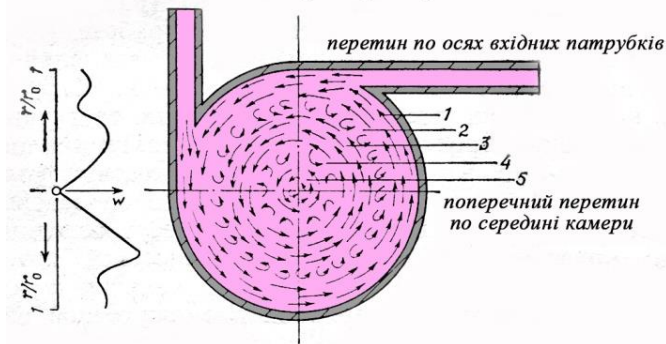
Усі види циклонних камер згоряння, що використовують у промисловості, можна поділити на п'ять основних типів (рисунки 16.26–16.30).

Тип I (рис. 16.26) використовують для палива високої калорійності, інколи з великою кількістю летючих складових. Під час їх спалення утворюються шлак і зола, відведення яких не викликає складнощів.

Тип II (рис. 16.27) добре працює за високих параметра закручування й використовується для палив із високим вмістом золи.



Профіль осьової швидкості в соплі і характер руху в осьовому напрямку



Профіль окружної швидкості і характер окружного руху

Рисунок 16.26 – Структура течії в циклонній камері типу I

Циклонну камеру типу III (рис. 16.28) було розроблено для генерації пари методом спалення овочевих відходів, попередньо осушених вихлопними газами.

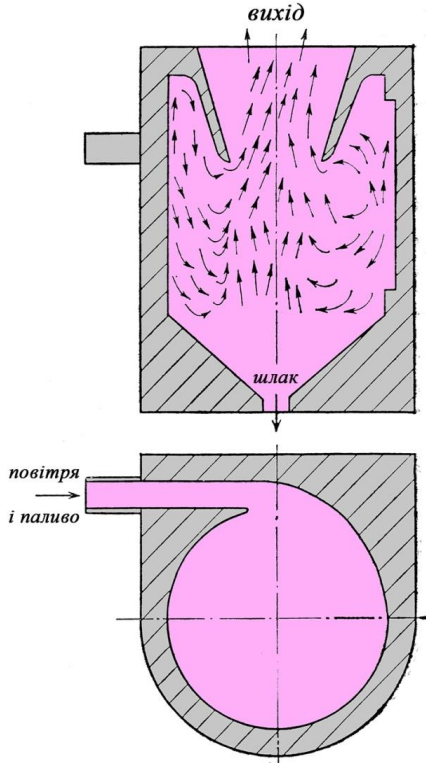


Рисунок 16.27 – Структура течії в циклонній камері типу II

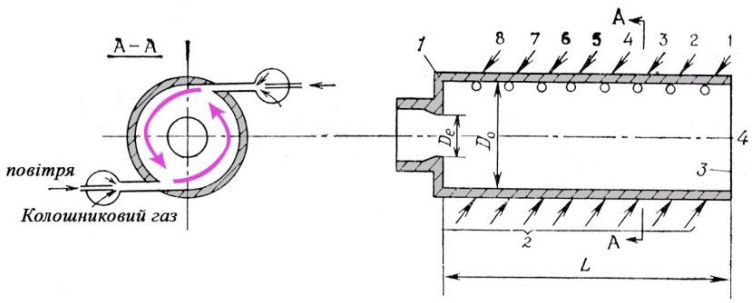


Рисунок 16.28 – Циклонна камера згоряння типу III з розподіленими входними патрубками

Камера типу (рис. 16.29) має будь-який вихровий генератор або комбінацію генератора й топки, у яких $s > 3$.

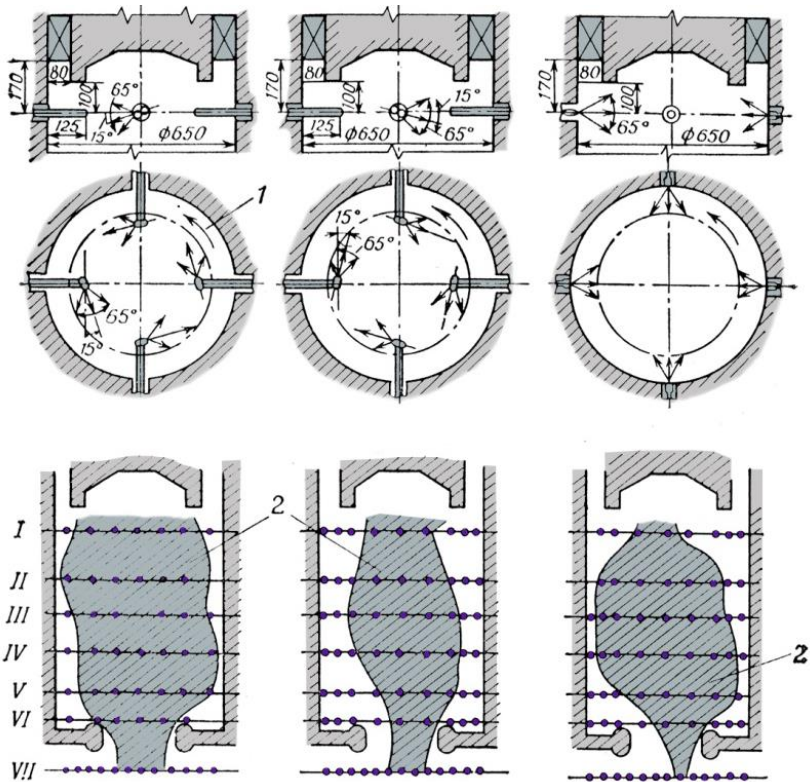


Рисунок 16.29 – Циклонна камера згоряння типу IV

Циклонну камеру типу V (рис. 16.30) розроблено для плавлення руди. Залежно від типу руди ці камери можуть бути лопатеві, трубчаті або жалюзійні.

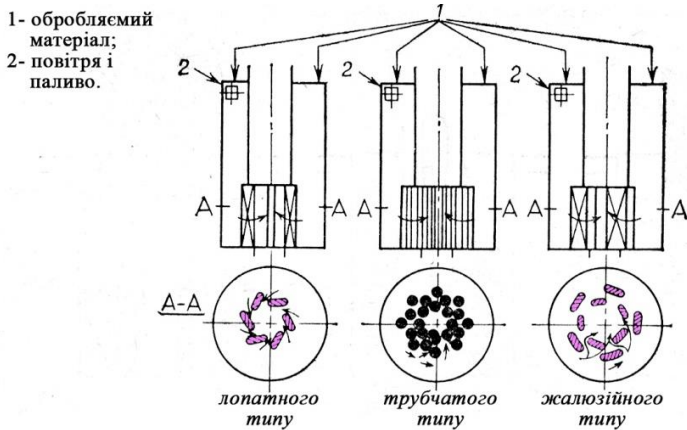


Рисунок 16.30 – Схеми технологічних циклонів типу V

16.8.3 Вихрові топки (ТЕС)

Вихрові топки з'явилися тоді, коли у 50–60-ті роки почали будуватися ТЕС потужністю 200, 300, 500 МВт і більше, у котлах яких потрібно було ефективно спалювати антрацити, бітумізоване вугілля, буре вугілля, нафту, газ у величезній кількості (наприклад, 220 тонн вугілля за годину або 88 вагонів за добу для блоку ТЕС в 300 МВт).

У перерізі ці топки мають квадратну або прямокутну форму зі сторонами 17 м і більше. Висота таких топок сягає від 33 м до 40 м.

На рисунку 16.31 репрезентовані схеми типових вихрових топок.

Із рисунка 16.32 видно, що в центрі топки формується ядро течії діаметром 10–20 % від розміру сторони камери. По кутах камери розташовані блоки пальників, орієнтовані за дотичним напрямком до ядра течії. Пальники щілинного типу зібрані в блоки три- або чотирирядної батареї (рис. 16.32).

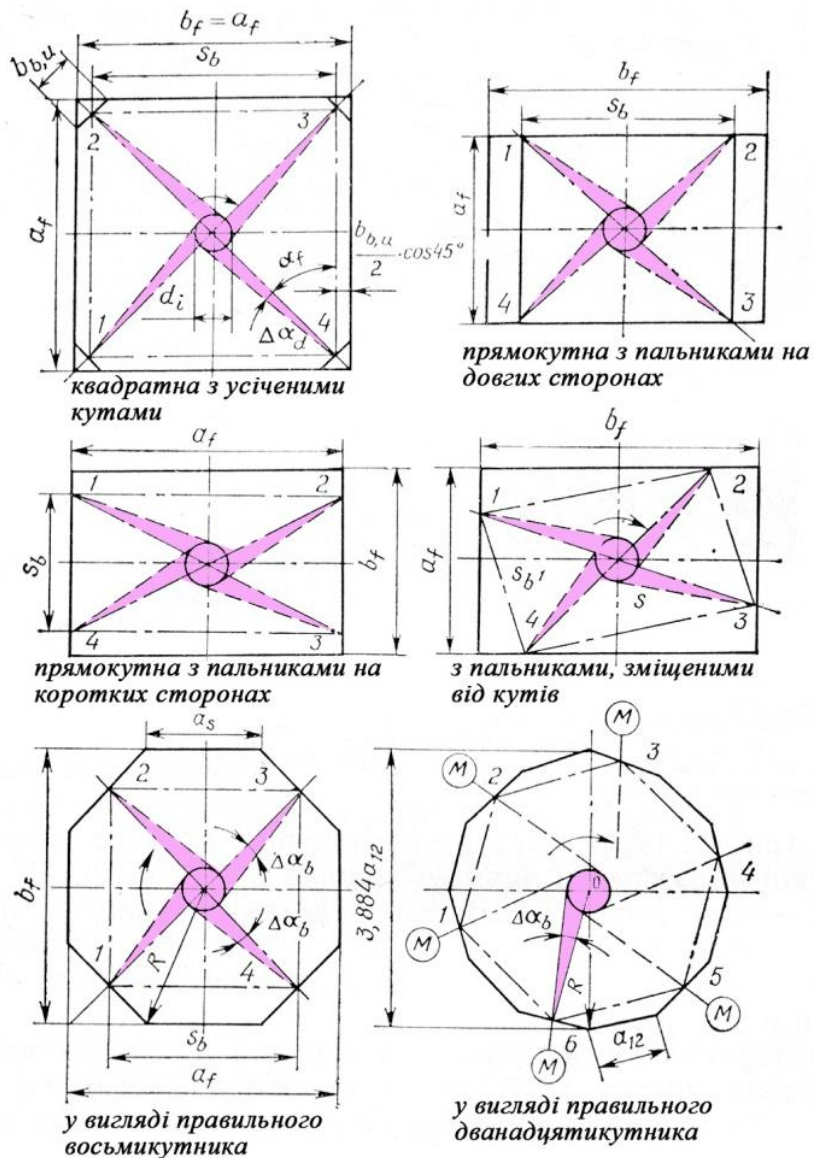


Рисунок 16.31 – Схеми типових вихрових топків

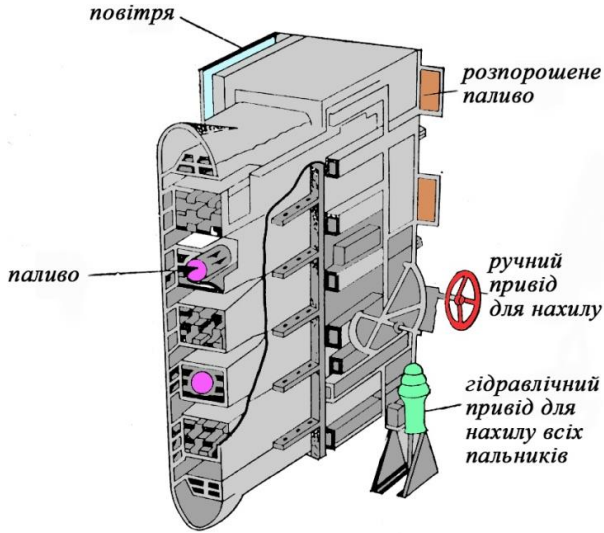


Рисунок 16.32 – Триярусна батарея пальників із горизонтальними щілинами

Таке розташування пальників за умов наявної швидкості суміші палива й повітря забезпечує заповнення всього об'єму топки рівномірною вихровою течією (рис. 16.33.)

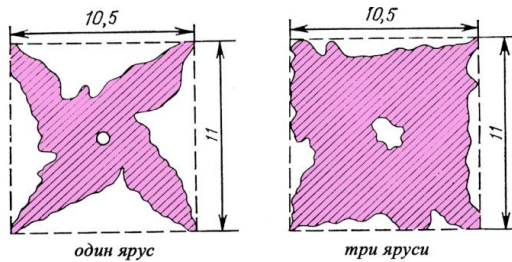


Рисунок 16.33 – Поліпшення заповнення порожнини вихрової топки під час заклучення трьох ярусів пальників

Між основними вихорами й кутами топки утворюються рециркуляційні вихори.

Важливим параметром для роботи топки є швидкість повітря на виході з пальника, яка для вугільних сумішей зазвичай становить 16–20 м/с (інколи – 24 м/с). Більші значення швидкості небажані, тому що більші частинки вугілля можуть відкидатися відцентровими силами з основної зони пальника.

Сьогодні все ширше для спалення вугілля стали використовувати водно-вугільні суміші, але даних про пальники таких топок поки ще немає.

У камерах згоряння, що працюють на нафтовому паливі, швидкість повітря на виході з пальника сягає 80 м/с.

На рисунку 16.34 надано схему нижньої частини вихрової топки із триярусними блоками пальників.

16.8.4 Спалення шкідливих промислових і побутових відходів

Аналогічні за принципом, але менші за розмірами вихрові топки використовують для спалення найрізноманітніших за складом шкідливих промислових і побутових відходів. Мета такої технології – термічним та піролізним способом утилізувати й знешкодити різноманітні непотрібні відходи.

Такий спосіб боротьби з відходами в усьому світі вважають прогресивним та ефективним, для його реалізації будують спеціальні заводи. На рисунку 16.35 репрезентовано сучасну універсальну установку для спалення твердих відходів і сміття без попереднього сортування й роздріблення з максимальним розміром окремих включень до одного метра.

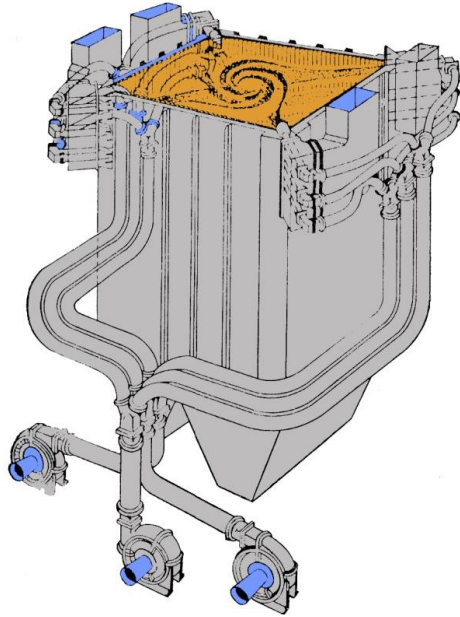


Рисунок 16.34 – Схема нижньої частини вихрової топки, що демонструє подавання розпорошеного вугілля з чотирьох кутів

Зображена установка дозволяє утилізувати сильно зволожені фракції відходів, що подаються поршневым насосом 1 у зону топки. У цю зону також подається підігріте до 600 °С повітря. Поєднання в зоні вихрової структури з повітрям і спалення в киплячому шарі забезпечує спалення твердих фракцій. Продукти згоряння із температурою 850 °С направляються в котел-утилізатор 5. Утворювана при цьому пара йде на потреби підприємства й частково на підсушування вологої твердої фракції. Гази, що відходять, проходять очищення від золи й токсичних домішок у скрубєрі 6. Потужність такої установки забезпечує спалення 62 т сухих залишків на добу.

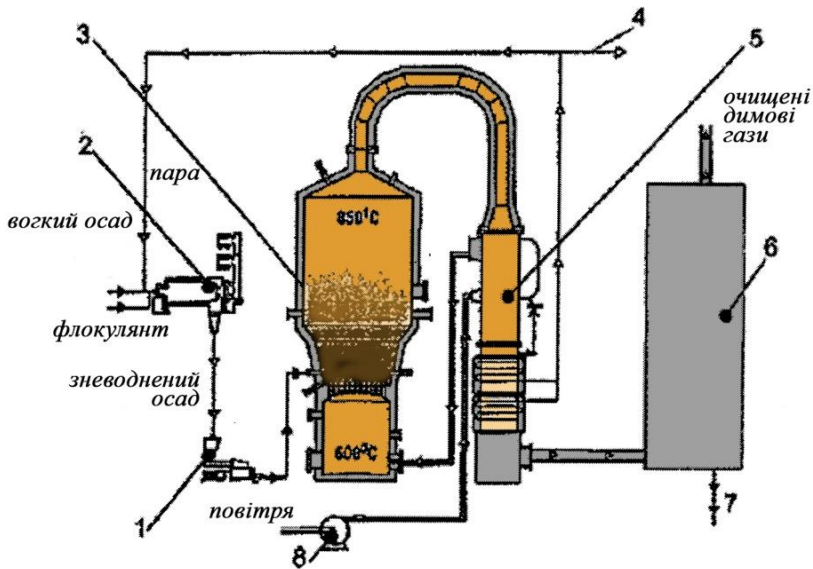


Рисунок 16.35 – Універсальна установка для спалення твердих відходів і сміття без попереднього сортування й подрібнення з максимальним розміром окремих включень до одного метра

За необхідності в установки можуть додавати відпрацьовані мастила, пластмаси, відходи хімлабораторії, нерозрізані автомобільні покришки й гумові вироби, мулові осади міських стоків.

На рисунку 16.36 наведено ще одну схему установки для спалювання твердих відходів і сміття.

Як бачимо, в установках утилізації важких сумішей відходів досягають управлінням режимами горіння й кінетикою процесів у топках методом управління аеродинамікою факелів.

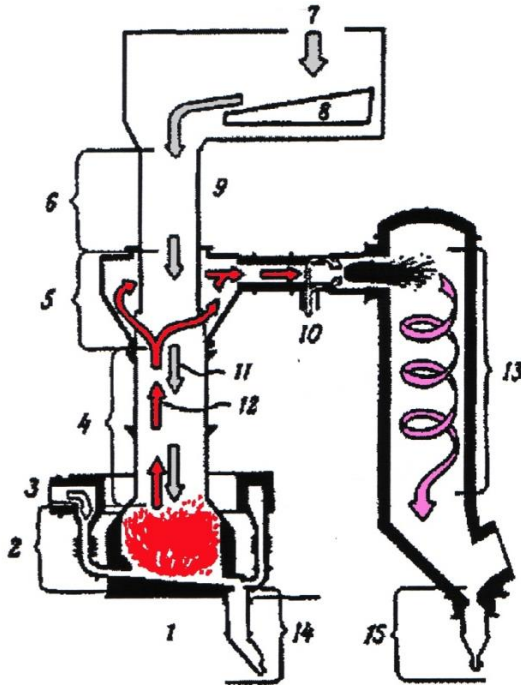


Рисунок 16.36 – Схема установки для спалювання твердих відходів і сміття

На рисунку 16.36: 1 – газифікатор; 2 – зона первинного горіння; 3 – подавання повітря із закручування; 4 – зона піролізу; 5 – зона підсушування; 6 – подавання відходів; 7, 8 – зони завантаження; 9 – газовідвід; 10 – подавання повітря; 11 – проходження й підсушування відходів; 12 – проходження горючих летючих газів; 13 – зона згоряння горючих газів; 14, 15 – зливання та відведення розплавлених шлаків. Необхідно зауважити, що зони 4 і 5 мають підкручування газів. Вологість спалюваних відходів становить 23 %, кількість інертних негорючих матеріалів і газів становить до 20 %.

16.8.5 Енергорозподілювач. Труба Ранка – Хілша

Енергорозподілювачі – це конструкції (прилади, апарати), можуть розділити масу m якогось рідкого чи газового середовища з тепловою енергією E на дві частинки m_1 і m_2 з тепловою енергією E_1 і E_2 відповідно в такий спосіб, що $m_1 + m_2 = m$, а $E_1 + E_2 = E$.

Найчастіше таким середовищем є вода або повітря. Наприклад, масу повітря m з температурою $20\text{ }^\circ\text{C}$ потрібно розділити на дві частини m_1 і m_2 , щоб температура першої частини була $5\text{ }^\circ\text{C}$ (холодна), а другої – $40\text{ }^\circ\text{C}$ (тепла). Тоді першу частину повітря можна направляти в приміщення, а другу – на вулицю, і такий апарат буде працювати як кондиціонер. Якщо потоки повітря направляти у зворотному напрямку – у приміщення теплу частину, на вулицю холодну, то апарат буде працювати як обігрівач приміщення.

Прикладом такого апарата є труба Ранка – Хілша (у нас її називають трубою Ренкіна), дві схеми якої a – протиточного типу й b – прямоточного типу зображені на рисунку 16.37.

Очевидно, що

$$m_x + m_z = m_{\text{ex}}$$

Основні габаритні розміри труби

$$L = (5 \div 5,5)D_0, \frac{d_0}{D_0} = 0,37.$$

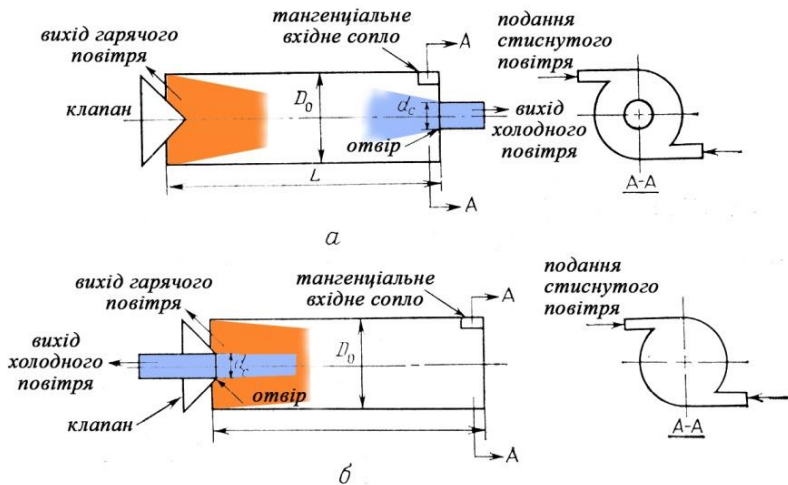


Рисунок 16.37 – Схеми труб Ранка – Хілша:
a – протитечійного типу й *б* – прямотечійного типу

Стиснуте повітря подається через тангенціальний вхід у камеру D_0 зі швидкістю 150–200 м/с ($M > 0,5$). Енергетичне розділення підведеного повітря відбувається через адіабатичне стиснення й розширення турбулентних вихорів у полі відцентрових сил із неадіабатичним розподіленням температури та змінною по радіусу осьовою швидкістю $v_z = f(r)$.

Така конструкція, співвідношення розмірів і витрати газу зумовлюють утворення зони рециркуляції та високий рівень турбулентності (~ 30 %).

На рисунку 16.38 репрезентовано залежність температур гарячого T_2 й холодного T_x потоків від відношення мас холодного m_x та вхідного m_{ex} потоків.

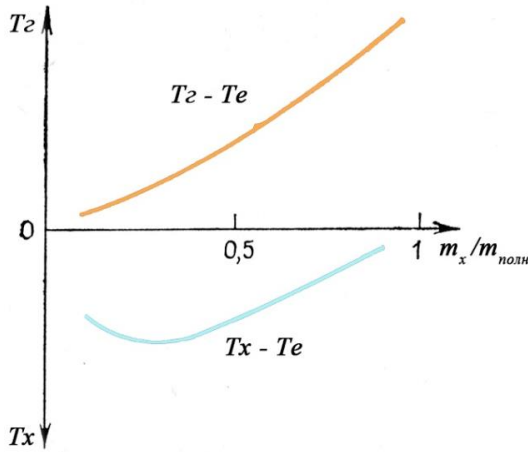


Рисунок 16.38 – Залежність температур гарячого й холодного потоків від відношення потоків мас

На графіках залежностей прийняті позначення:

T_2 – температура гарячого повітря;

T_x – температура холодного повітря;

T_{ex} – температура вхідного повітря;

m_{ex} – маса повітря на вході;

m_2 – маса гарячого повітря;

m_x – маса холодного повітря.

Із графіків рисунка 16.38 видно, що методом регулювання площі на виході можна регулювати масу гарячого й холодного повітря залежно від потреби.

У разі співвідношення $m_x / m_{ex} \approx 0,35$ холодне повітря буде мати максимально низьку температуру. За співвідношення $m_x / m_{ex} \approx 0,9$ ми будемо мати значно більшу масу охолодженого повітря, але з меншим ступенем охолодження. Чим менша частка повітря буде направлятися

до виходу з периферійної зони, тим вищою буде її температура.

Дослідження аеродинаміки течії в трубі Ранка – Хілша показує, потік, який проходить в циліндричний простір тангенціально й набуває форми вихору потрапляє в пристінкову зону, починаючи від $r / r_0 \approx 0,9$; максимальної колової швидкості досягає в зоні $(0,6 \div 1,0) r / r_0$; розігрівається й виходить через вузький канал відведення гарячого повітря. Решта повітря вимушена повернутися в радіальному напрямку до осі, утворюючи вимушений вихор із холодною температурою.

16.8.6 Камери згоряння газотурбінних двигунів

Найбільш важку та відповідальну роль вихрові (закручені) потоки газу й подрібненого палива відіграють у камерах згоряння газотурбінних двигунів (ГТД), схему яких подано на рисунку 16.39.

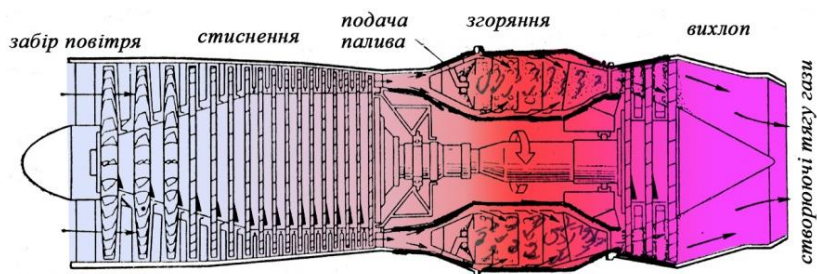


Рисунок 16.39 – Камери згоряння ГТД

Як видно з рисунка 16.39, ГТД складається з ротора, на якому розміщені газова турбіна й лопатевий компресор (спереду). Між турбіною й компресором розміщені декілька (5–6) камер згоряння, призначені для прийняття та спалення

палива й окислювача. Продукти згоряння створять потужний реактивний струмінь водночас пройдуть через лопаті турбіни, яка зі свого боку приведе в обертання компресор для подавання окислювача в камери.

Потужність ГТД сягає десятків МВт, тому неважко уявити, яку кількість палива й окислювача повинні сприйняти камери згоряння.

Крім того, ГТД використовують як стаціонарні (газоперекачувальні станції) та транспортні (авіація, кораблі, тепловози, важкі транспортні машини). Тому кожній ГТД залежно від призначення має різні вимоги до камер згоряння.

Перед ГТД завжди стоять жорсткі вимоги щодо радіальних та осьових габаритів, маси, повноти згоряння, мінімізації забруднювальних викидів і рівня шуму. Тому у світі розроблені декілька сотень різних конструкцій камер згоряння з дуже високими вимогами до технології їх виготовлення. Але всі ці конструкції об'єднує широке використання закручених течій для палива й окислювача. Найчастіше це багаторазове й багатоступеневе використання, зі зворотними та рециркуляційними вихорами з різними способами закручування.

Окислювачем переважно буває повітря. Один із варіантів його використання для потреб однієї камери подано на рисунку 16.40.

Потрібно зауважити, що вказані проценти від загального використання в чисельнику – первинне розподілення, у знаменнику – змінне з метою зменшення забруднення викидів.

На рисунку 16.41 репрезентовано схему двоярусної камери згоряння, а на рисунку 16.42 – приклад конструкції кільцевої двоярусної камери згоряння авіаційного ГТД.

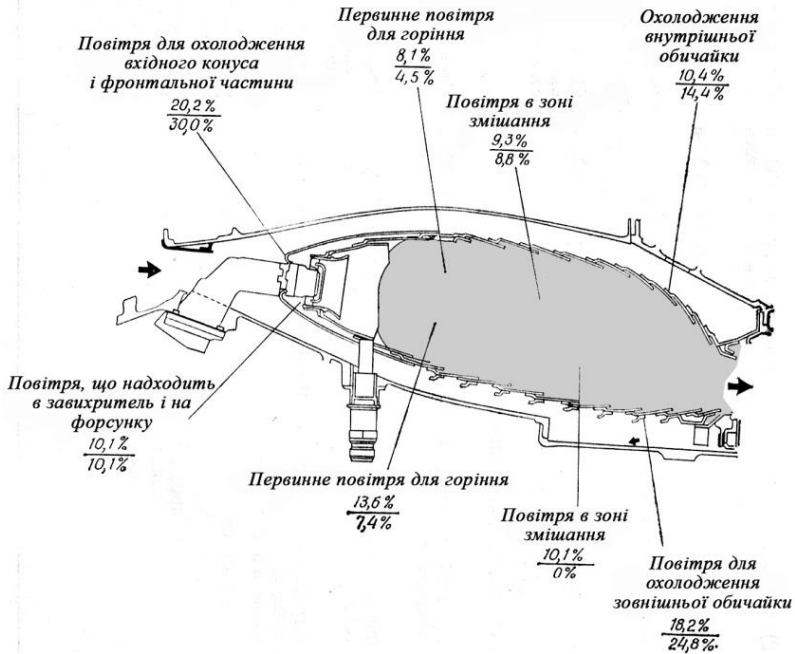


Рисунок 16.40 – Розподілення повітря в камері згоряння двигуна JT9D-7

16.8.7 Камери згоряння двигунів внутрішнього згоряння

Камери згоряння двигунів внутрішнього згоряння (ДВЗ) – це простір між нерухомою поверхнею головки циліндрів і верхньою поверхнею (дінцем) поршня.

Характерно, що об'єм такої камери є різко змінним залежно від положення поршня. В цьому разі нас будуть цікавити камери, коли поршень знаходиться майже у верхній мертвій точці.



Рисунок 16.41 – Двоюресна камера згоряння

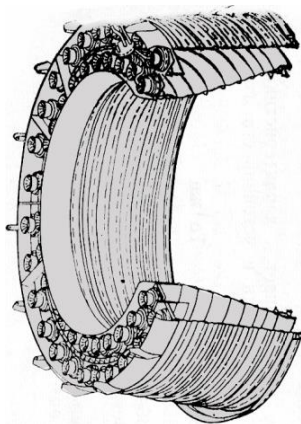


Рисунок 16.42 – Конструкція кільцевої двоюресної камери згоряння авіаційного ГТД

Як завжди для теплових двигунів основна вимога до камери згоряння – забезпечити більш повне згоряння

палива, яке попередньо потрібно добре перемішати й повністю сумішшю заповнити об'єм камери.

Усі ці вимоги забезпечують методом надання робочій суміші вихрової структури за умови, що всі можливості системи її приготування вже використані.

На рисунку 16.43 показані чотири такти роботи ДВЗ.

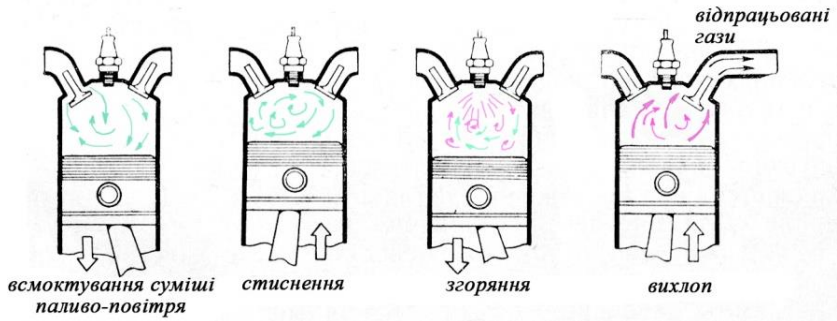
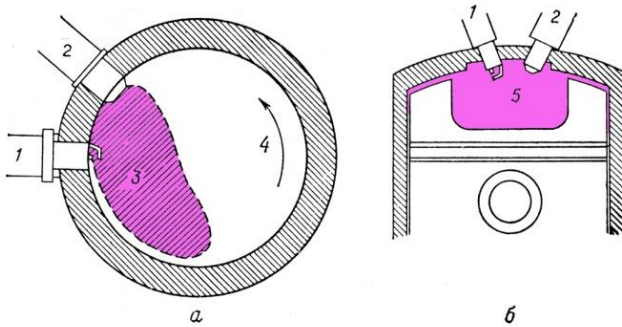


Рисунок 16.43 – Такти роботи ДВЗ

Під час першого такту робоча суміш починає потрапляти в циліндр і водночас перемішуватися. Завихреність виникає також під час проходження суміші через кільцеву щілину над клапаном, через турбулентне розширення та перемішування суміші. Цей процес продовжується й під час другого такту.

Проте конструктори різними способами намагаються покращити перемішування суміші та повніше заповнити об'єм камери згоряння вже на момент підходу поршня до верхнього положення. Крім того, вони намагаються створити додаткові вихрові ефекти, за рахунок яких заповнення по об'єму камери буде більш швидким. Таких заходів, конструкцій і патентів безліч. Для прикладу зупинимося на декількох.

На рисунку 16.44 репрезентовано схему робочої камери двигуна зі стратифікованим зарядом.

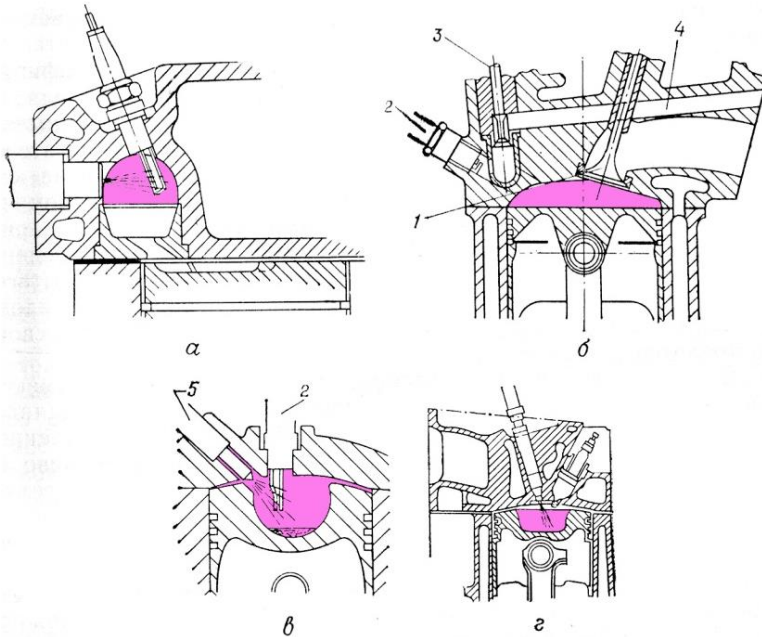


*а - розташування інжектора і свічки запалювання в двигуні стратифікованого заряду;
 б - використовуваній в двигуні стратифікованого заряду поршень з виїмкою, що створює рух "хлопання";
 1 - свічка запалювання; 2- форсунка; 3 - горюча суміш; 4 - направлення закрутки повітря; 5 - камера згоряння*

Рисунок 16.44 – Схема двигуна зі стратифікованим зарядом

У зоні 3 недалеко від форсунки та свічки спочатку знаходиться паливна суміш із великою концентрацією палива порівняно з повітрям. Але як тільки поршень наближається з великою швидкістю до ВМТ, повітря, яке він штовхає й надлишок якого знаходиться у виїмці поршня, одержить обертальний рух у напрямку стрілки і, змішуючись із «багатою» сумішшю в зоні 3, переносить її біля свічки і, підпаливши, змішує з «бідною» сумішшю по всьому діаметру камери. У результаті покращуються всі показники рівня двигуна.

На рисунку 16.45 репрезентовані ще чотири варіанти камер згоряння, у яких конструктивно вирішено питання створення додаткової завихреності суміші.



*а - двигун Comet з іскровим запалюванням фірми Richardo;
 б - двигун CVCC компанії Honda;
 в - двигун MAN-FM;
 г - двигун Proco компанії Ford;
 1 - основний випускний клапан; 2 - свіча запалювання; 3 - допоміжний впускний клапан; 4 - допоміжний впускний клапан; 5 - вприск палива.*

Рисунок 16.45 – Камери згоряння двигунів зі стратифікованим зарядом

Деякі з поданих схем знайомі як форкамери, тобто запалення суміші відбувається перед основною камерою згоряння.

Подібних прикладів можна навести багато, усі вони свідчать, що шлях до покращення показників ДВЗ конструктори вбачають саме в більш широкому використанні вихрових структур у камері згоряння.

16.8.8 Вихрові гідромашини

Робочий процес будь-якої гідравлічної гідромашини – це процес передавання енергії від твердого робочого органа (енергоносія) до рідини (насоси), або навпаки, від рідини як енергоносія до твердого робочого органа (турбіни, гідромотори, гідропривід).

Із фізичного погляду робочий процес здійснюється за рахунок силової взаємодії твердої поверхні (лопаті, поршня, поверхонь шестерні або гвинта тощо) з рідиною.

За принципом силової взаємодії добре відомі лопатеві та об'ємні робочі процеси. Останнім часом з'явився й поступово набуває визнання термін «вихровий робочий процес», що пояснює механізм передавання енергії в цілому ряді вже існуючих гідромашин, які раніше відносили просто до динамічних. Лопатеві машини теж відносять до динамічних, але вони зовсім не схожі на вихрові ні за конструктивними ознаками, ні за фізикою процесу силової взаємодії.

Гідромашини, що сьогодні називають «вихровими» й відносять також до динамічних, відрізняються від лопатевих лише їм притаманним робочим процесом. Проілюструємо це на насосному робочому процесі.

На валу насоса в корпусі знаходиться твердий робочий орган, що обертається й контактує з рідиною, яка потрапила з вхідного патрубка. У результаті їх взаємодії з'являється внутрішня течія q_1 , що має вихрову структуру у формі, притаманній цій гідромашині (кільцевій, вихровій, тороподібній, струминній тощо). Ця течія контактує з іншою, основною течією Q , віддає раніше одержану енергію від первинного енергоносія. Отже, течія q_1 , сформована твердим енергоносієм, є посередником між основною течією Q та твердим робочим органом і відіграє роль «рідкого робочого органа».

На рисунку 16.46 репрезентовано схему руху рідини у вільно-вихровому насосі.

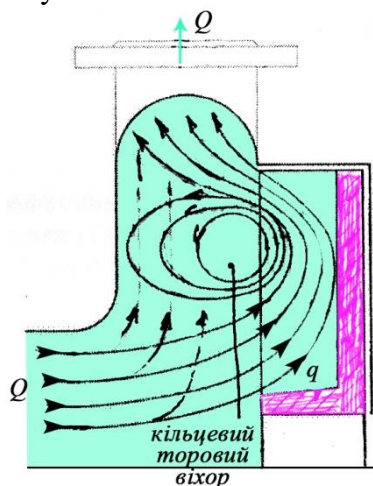


Рисунок 16.46 – Схема руху рідини в СВН типу «Turo»

Із рисунку 16.46 видно кільцевий тороподібний вихор, сформований робочим колесом, схованим у задній стінці корпусу. Така конструктивна особливість зумовлює ряд корисних технологічних властивостей вільновихрових насосів, зокрема можливість перекачувати сильно забруднені рідини з дрібними й великими твердими включеннями.

До гідромашин, у яких здійснюється вихровий робочий процес, можна віднести такі:

- вихрові насоси й вихрові турбіни в МДТУ ім. Баумана;
- вільновихрові насоси кафедри прикладної гідроаеромеханіки СумДУ;
- лабіринтно-вихрові насоси;
- черпакові насоси;

- дискові насоси й насоси тертя;
- гідромуфти й гідротрансформатори;
- струминні насоси;
- водометні двигуни.

Необхідно наголосити, що всі ці типи різноманітних за конструктивним ознаками гідромашин об'єднуються в один клас «динамічних вихрових» за спільною ознакою (активною участю вихрових течій) енергоносіїв у передаванні енергії основній течії.

16.8.9 Інші приклади використання вихрових течій у техніці

Використання вихрових течій у технічних апаратах і технологіях настільки широке й різноманітне, що дати його повний огляд неможливо. Тому до вищезгаданих течій можна було б додати багато вихрових течій у машинах та апаратах хімічних виробництв – реакторах, масообмінних апаратах, протитечійних апаратах і колонах тощо.

Заслуговують на увагу вихори в струминах віброгрануляторів конструкції СумДУ, що дозволяють вирішити проблему дроблення струменів на монодисперсні гранули у виробництві аміачної селітри, ядерного палива тощо.

Останнім часом з'явилися цікаві та перспективні роботи щодо створення фільтрів для тонкого й супертонкого очищення рідин із використанням закручених течій.

Цей перелік можна було б продовжити, тому не виникає сумніву в найширшому використанні вихрових течій у справі подальшого вдосконалення техніки й технологічних процесів.

Перелік питань до розділу 16

- 1 Приклади вихрових течій у природі.
- 2 Приклади вихрових течій у техніці.
- 3 Вихрові течії в гідромашинах.
- 4 Вихори фізичний і математичний.
- 5 Основні кінематичні характеристики вихрового руху.
- 6 Вихрова лінія й вихротокова поверхня.
- 7 Вихрова доріжка Кармана й вихори Тейлора.
- 8 Кінцеві вихори й вихори в струмені віброгранулятора.
- 9 Теорема Гельмгольца «Про розкладання швидкості.
- 10 Теорема Гельмгольца «Про інтенсивність вихору» та два її наслідки.
- 11 Теорема Томсона «Про циркуляцію швидкості» та два її наслідки.
- 12 Теорема Стокса «Про кінцеві вихори за лопаттю».
- 13 Причини утворення вихорів на кінці лопаті.
- 14 Швидкість, індукована вихорами, її вплив на підіймальну силу.
- 15 Формула Біо – Савара.
- 16 Рівняння Гамільтона й конвективне поширення вихорів.
- 17 Моделі вихорів Кармена, Ротта, «чорні діри».
- 18 Генерація вихорів і їх зв'язок із турбулентністю.
- 19 Нестійкі поверхні в течії та механізм нестійкості Кельвіна.
- 20 Вихрогенератори.
- 21 Вихори «вільні» та «приєднані».
- 22 Інтенсивність закручування та її вплив на структуру вихрової течії.
- 23 Вихори в граничному шарі.
- 24 Рециркуляційні вихори.

25 Циклонні сепаратори. Принцип роботи. Параметр оцінювання ζ .

26 Циклонні камери згоряння.

27 П'ять основних типів циклонних камер згоряння.

28 Вихрові топки ТЕС.

29 Топки для спалювання шкідливих відходів.

30 Енергорозподільвачі. Труба Ранка – Хілша.

31 Камери згоряння газотурбінних двигунів (ГТД).

Основні складнощі та вимоги.

32 Організація згоряння паливної суміші в камерах згоряння ГТД.

33 Двоюрусні камери згоряння ГТД. Дві зони горіння.

34 Організація вихрового перемішування й горіння в камері ДВЗ.

35 Вихровий робочий процес у гідромашинах.

36 Вихрові гідромашини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа : учебник / Л. Г. Лойцянский. – 7-е изд., испр. – Москва : Дрофа, 2003. – 840 с.
2. Повх И. Л. Техническая гидромеханика : учеб. пос. / И. Л. Повх. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ленинград : Машиностроение, 1976. – 504 с.
3. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика : учеб. для студ. вузов / Б. Т. Емцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Машиностроение, 1987. – 439 с.
4. Гольдштик М. А. Вихревые потоки / М. А. Гольдштик. – Новосибирск : Наука, 1981. – 365 с.
5. Гупта А. Закрученные потоки / А. Гупта, Д. Лилли, Н. Сайред. – Москва : Мир, 1987. – 588 с.
6. Спеціальні гідромашини : навч. посіб. / В. О. Панченко, О. В. Івченко, С. С. Мелейчук та ін. ; за заг. ред. В. О. Панченка. – Суми : СумДУ, 2021. – 229 с.
7. Герман В. Ф. Свободновихревые насосы : учеб. пос. / В. Ф. Герман, И. А. Ковалев, А. И. Котенко ; под общ. ред. А. Г. Гусака. – 2-е изд., доп. и перераб. – Сумы : СумГУ, 2013. – 159 с.

Навчальне видання

Ковальов Ігор Олександрович,

**Ратушний Олександр Валерійович,
Колісніченко Едуард Васильович**

ІНТЕГРАЛЬНИЙ КУРС МЕХАНІКИ РІДИНИ Й ГАЗУ

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки О. В. Ратушного

Редактор О. Ф. Дубровіна

Комп'ютерне верстання: О. А. Куліков, Т. М. Мішакова, О. В. Ратушний

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 23,25. Обл.-вид. арк. 22,95. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач

Сумський державний університет,

вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК 3062 від 17.12.2007.