

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Білоус О. А., Кравченко Ю. А.

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету



Суми
Сумський державний університет
2023

УДК 517(075.8)

Б 61

Рецензенти:

І. О. Шуда – доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу і методів оптимізації Сумського державного університету (м. Суми, Україна);
Т. Д. Лукашова – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики, фізики та методик їх навчання Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка (м. Суми, Україна)

*Рекомендовано до видання вченою радою
Сумського державного університету як навчальний посібник
(протокол № 9 від 10 лютого 2022 року)*

Білоус О. А.

Б 61 Прикладні задачі з вищої математики : навч. посіб. /
О. А. Білоус, Ю. А. Кравченко. – Суми : Сумський державний
університет, 2023. – 248 с.
ISBN 978-966-957-933-4

У навчальному посібнику наведено теоретичні положення та практичні рекомендації щодо розв'язання прикладних задач вищої математики. Видання містить прикладні завдання зі сфери інженерної діяльності, спрямовані на розвиток у студентів навичок математичного моделювання та дослідження моделей засобами математики. Комплекси завдань сформульовані у професійно значущому форматі для студентів відповідного напрямку підготовки і стосуються об'єктів їхньої майбутньої професійної діяльності. З метою організації самостійної роботи студентів у посібнику наведено відповідні завдання.

Посібник рекомендовано студентам інженерно-технічних спеціальностей університетів та інститутів, які вивчають курси «Вища математика» і «Математичний аналіз». Матеріал також буде цікавим аспірантам, викладачам ВНЗ і науковцям.

УДК 517(075.8)

ЗМІСТ

	С.
ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.....	9
1.1. Основні поняття та визначення.....	9
1.2. Практичне застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	11
РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.....	18
2.1. Основні поняття та визначення.....	18
2.1.1. Лінійні операції над векторами.....	18
2.1.2. Проекція вектора на вісь.....	20
2.2. Прямокутна система координат. Координати вектора та точки.....	21
2.3. Дії над векторами, заданими своїми координатами.....	22
2.3.1. Скалярний добуток.....	22
2.3.2. Векторний добуток.....	23
2.3.3. Мішаний добуток.....	25
2.4. Практичне застосування векторів.....	25
Задачі для самостійної роботи.....	30
РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.....	32
3.1. Лінії на площині.....	32
3.1.1. Пряма на площині та її основні рівняння.....	32
3.1.2. Криві другого порядку на площині.....	35
3.2. Практичне застосування ліній на площині.....	39
3.3. Пряма і поверхні в просторі.....	46
3.3.1. Площина в просторі.....	46
3.3.2. Пряма в просторі та її основні рівняння.....	49
3.3.3. Поверхні другого порядку.....	51
3.4. Практичне застосування поверхонь.....	54
Задачі для самостійної роботи.....	57
РОЗДІЛ 4. ВВЕДЕННЯ В МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ.....	62
4.1. Функції одного аргументу.....	62

4.2. Практичне застосування функцій.....	63
Задачі для самостійної роботи.....	64
РОЗДІЛ 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.....	67
5.1. Основні поняття та визначення.....	67
5.2. Практичне застосування похідної.....	73
Задачі для самостійної роботи.....	80
РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.....	83
6.1. Невизначений інтеграл і його властивості.....	83
6.2. Визначений інтеграл і його властивості.....	85
6.3. Практичне застосування визначеного інтеграла.	
Схеми застосування визначеного інтеграла.....	87
Задачі для самостійної роботи.....	92
РОЗДІЛ 7. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	95
7.1. Основні означення.....	95
7.2. Практичне застосування функцій	
багатьох змінних.....	98
Задачі для самостійної роботи.....	104
РОЗДІЛ 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	109
8.1. Основні поняття та означення.....	109
8.2. Практичне застосування	
диференціальних рівнянь.....	112
Задачі для самостійної роботи.....	123
РОЗДІЛ 9. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ.....	127
9.1. Подвійний інтеграл. Основні означення.....	127
9.1.1. Задача про масу плоскої пластинки.....	127
9.1.2. Означення подвійного інтеграла.....	128
9.1.3. Властивості подвійного інтеграла.....	129
9.2. Обчислення подвійного інтеграла.....	130
9.2.1. Обчислення подвійного інтеграла	
в декартових координатах.....	130
9.2.2. Заміна змінних у подвійному інтегралі.....	132
9.2.3. Подвійний інтеграл	
у полярних координатах.....	133
9.3. Практичне застосування подвійних інтегралів.....	134

Задачі для самостійної роботи.....	143
9.4. Потрійний інтеграл. Основні означення.....	146
9.5. Обчислення потрійного інтеграла.....	148
9.5.1. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.....	148
9.5.2. Циліндрична система координат.....	149
9.5.3. Сферична система координат.....	150
9.6. Практичне застосування потрійних інтегралів.....	152
Задачі для самостійної роботи.....	161
РОЗДІЛ 10. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ.....	164
10.1. Криволінійні інтеграли першого роду.....	164
10.1.1. Основні поняття та означення.....	164
10.1.2. Властивості криволінійних інтегралів першого роду.....	166
10.2. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду.....	167
10.3. Практичне застосування криволінійних інтегралів першого роду.....	170
Задачі для самостійної роботи.....	178
10.4. Криволінійні інтеграли другого роду.....	180
10.4.1. Основні поняття та означення.....	180
10.4.2. Механічний зміст криволінійного інтеграла другого роду.....	183
10.4.3. Властивості криволінійних інтегралів другого роду.....	183
10.5. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду.....	184
10.6. Практичне застосування криволінійних інтегралів другого роду.....	185
Задачі для самостійної роботи.....	192
10.7. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду.....	194

10.8. Формула Гріна – Остроградського. Незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування	196
Задачі для самостійної роботи.....	204
РОЗДІЛ 11. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.....	207
11.1. Поверхневі інтеграли першого роду. Основні поняття та означення	207
11.1.1. Задача про визначення маси неоднорідної оболонки.....	207
11.1.2. Властивості поверхневих інтегралів першого роду.....	209
11.1.3. Обчислення поверхневих інтегралів першого роду.....	210
11.1.4. Практичне застосування поверхневих інтегралів першого роду.....	215
Задачі для самостійної роботи.....	223
11.2. Основні поняття та означення поверхневих інтегралів другого роду.....	225
11.2.1. Задача про обчислення потоку рідини через поверхню.....	226
11.2.2. Властивості поверхневого інтеграла за координатами.....	230
11.2.3. Обчислення поверхневого інтеграла за координатами.....	231
11.2.4. Формула Остроградського – Гаусса.....	232
11.2.5. Практичне застосування поверхневих інтегралів другого роду.....	233
Задачі для самостійної роботи.....	242
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	246

ВСТУП

Математика є однією з найдавніших наук. Вона зародилася під впливом потреб практичної діяльності людства як прикладна наука. Мореплавання, землеустрій, будівництво, торгівля, державне управління вимагали розвитку арифметики і геометрії. Історичний розвиток математики перетворив її в логічно виважену систему, однак численні завдання природознавства і техніки ставлять перед математикою все нові завдання. У процесі їхнього виконання вона далі розвивається, зберігаючи свою прикладну суть. Багато математичних результатів зробили і далі роблять важливий внесок у науку і техніку. Серед них загально відомі такі: теорія реактивного руху ракет, формула для розрахунку підйимальної сили крила, методи розрахунку ядерних реакторів, теорія кумулятивного вибуху. Значення математики для інженерної діяльності величезне, тому майбутньому інженеру необхідно отримати математичну підготовку високої якості.

Мета навчання математики полягає в тому, щоб майбутні інженери отримали фундаментальну математичну підготовку і математичну культуру, а також навички математичного моделювання в галузі майбутньої професійної діяльності, зокрема із застосуванням інформаційних комп'ютерних технологій. Усі складові цієї мети принципово важливі. Однак їх нелегко досягти, якщо зміст навчання математики абстрактний і ізольований від специфіки інженерної роботи.

Дисципліна «Вища математика» часто постає виключно як сукупність абстрактних понять і теорем, і її прикладний характер у навчальному процесі розглядати майже неможливо. «Повернути» на заняття прикладну сутність математики, продемонструвати зв'язок досліджуваних понять і теорем з інженерною практикою можуть

прикладні математичні завдання. Якщо зміст такого завдання пов'язаний із роботою майбутнього інженера, то для нього це завдання – професійно спрямоване, тоді його пізнавальна активність зростає, підвищується якість фундаментальної математичної підготовки, формуються навички математичного моделювання. Кожна з прикладних задач створює проблемну ситуацію, у якій необхідно зрозуміти, з чого почати застосування математичних знань.

Для успішного одержання інженерних спеціальностей важливо знати закони фізики, економіки, хімії та інші наук. Усі ці науки використовують математику, яка є універсальною мовою для опису та вивчення предметного світу та формує мислення майбутніх інженерів. Специфіка математики така, що найважливішим засобом формування професійної компетентності майбутніх інженерів є виконання відповідно орієнтованих математичних завдань. Накопичуючи по крихтах досвід застосування математичних знань за межами предметного поля математики, майбутній інженер вчиться застосовувати їх у професійній діяльності, формується його математична компетентність. Автори вважають, що потрібно оптимально поєднувати фундаментальність і прикладну спрямованість навчання, використовувати ці завдання в поєднанні з традиційними математичними завданнями, широко поданими в збірниках завдань для студентів інженерних вузів. Підбираючи завдання відповідного професійного спрямування та оптимально «вкраплюючи» їх у зміст навчання, можна ефективно навчати майбутнього інженера застосовувати знання з основних розділів математики в професійній діяльності.

РОЗДІЛ 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Основні поняття та визначення

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь, або скорочено СЛАР, називають деяку множину, що містить m лінійних рівнянь, кожне з яких містить n невідомих

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.1)$$

У матричній формі систему (1.1) можна записати в такому вигляді:

$$A \cdot X = B. \quad (1.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

де A – матриця коефіцієнтів системи; X – матриця невідомих; B – матриця вільних членів.

У разі, якщо кожне значення матриці B дорівнює нулю, то СЛАР (1.2) буде називатися однорідною.

Будь-яка однорідна СЛАР має хоча б одне рішення – нульове, або по-іншому, тривіальне. Будь-яка СЛАР (1.2) буде вважатися сумісною, якщо вона має хоча б одне рішення, в іншому разі така система вважається несумісною. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.2) буде вважатися **визначеною** тільки в тому разі, якщо вона сумісна і має рівно одне рішення. В іншому разі, тобто в тому разі якщо

СЛАР (1.2) має безліч рішень, система (1.2) буде називатися *невизначеною*.

Системам лінійних рівнянь, взаємно однозначно, відповідають матриці коефіцієнтів.

Означення. Матрицею розміром $n \times m$ називається прямокутна таблиця чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$$

Означення. Матриці $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ називаються рівними (однаковими), якщо вони мають однакову кількість рядків і стовпців і всі їхні елементи, розташовані на однакових місцях, є рівними (тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх значень i та j).

Означення. Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ з однаковою кількістю рядків і стовпців називається матриця $C = A + B$,

$$\text{де } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n). \quad (1.4)$$

Означення. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число k називається матриця $B = k \cdot A$ вигляду $B = k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$.

Означення. Матриця називається квадратною, якщо кількість її рядків збігається з кількістю стовпців ($n = m$).

Означення. Квадратна матриця $E = (e_{ij})$ називається одиничною, якщо

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за умови } i = j, \\ 0 & \text{за умови } i \neq j, \end{cases}$$

тобто ця матриця має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Означення. Добутком матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ на

матрицю $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$ називається матриця

$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$, елементи якої обчислюються за

формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, p). \quad (1.6)$$

1.2. Практичне застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Історія розвитку математики протягом кількох століть доводить, що більшість розв'язків задач була пов'язана як із розв'язанням нерівностей і рівнянь, так із розв'язанням систем, що складаються з них. Вважають, що вміння розв'язувати системи нерівностей і рівнянь зародилося ще в Стародавньому Єгипті та Вавилоні. Основні правила роботи із системами лінійних рівнянь із відносно малою розмірністю були викладені в одній із перших книжок, присвячених математиці, – «Математика в дев'яти книгах».

Теорія матриць і систем лінійних рівнянь знаходить численне практичне застосування в задачах, пов'язаних

з електротехнікою, транспортом, механікою, обчислювальними системами тощо. Багато технічних об'єктів і виробничих процесів можна описати або подати у вигляді таблиць, елементами яких є числа або літерні вирази. Вивчення таких об'єктів ефективно здійснюється методами лінійної алгебри. Застосування лінійної алгебри дозволяє здійснювати: 1) компактний запис досліджуваного об'єкта або процесу за допомогою таблиць (матриць) і дій над ними; 2) математичні перетворення відповідних систем рівнянь і знаходити їхні рішення матричними методами; 3) наближені обчислення за формулами теорії матриць за програмної реалізації на комп'ютері.

Приклад 1.1. Матричні шифри. Системам лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x+2y=0, \\ x-y=0. \end{cases} \quad (1) \quad \text{і} \quad \begin{cases} x-0,1y+0,7z=1,6, \\ -2x+3y-0,5z=0,5, \\ 0,1x+y-2z=-0,9. \end{cases} \quad (2)$$

взаємно однозначним способом відповідають матриці коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -0,1 & 0,7 & 1,6 \\ -2 & 3 & -0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 1 & -2 & -0,9 \end{pmatrix},$$

складені з числових констант, причому в аналізованих прикладах матриця A виявилася квадратною матрицею другого порядку, а B – неквадратною матрицею розміру 3×4 . Зрозуміло, що в матрицях A та B міститься в зашифрованому вигляді вся інформація, необхідна та достатня для розв'язання систем (1) або (2). Для розв'язання систем із більшою кількістю невідомих і рівнянь залучають комп'ютерні програмні засоби. Інформацію, необхідну

для роботи комп'ютерних програм, подають лише в матричному вигляді.

Приклад 1.2. Комутаційна матриця. Розглянемо інший приклад, у якому матриця, складена з числових констант, є зручним інструментом для запису та подання інформації. На рисунку 1.1 зображений так званий n -полюсник, тобто складна електрична або електромеханічна схема з багатьма входами та виходами (клемами). Клеми пронумеровані від 1 до n . Якщо взяти будь-яку пару клем із номерами $i \in \overline{1, n}$ і $j \in \overline{1, n}$, то, аналізуючи схему, можна встановити, чи є зараз між ними безпосередній електричний зв'язок або такого зв'язку немає.

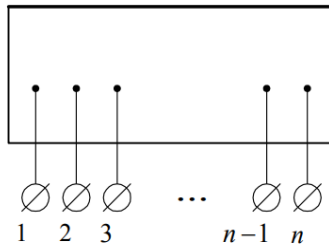


Рисунок 1.1 – Схема n -полюсника

Для графічного подання цієї інформації використовують квадратну матрицю n -го порядку, яка називається комутаційною матрицею або неорієнтованим графом зв'язності G . Матриця G складається з нулів та одиниць так, що за наявності зв'язку між i -ю і j -ю клемами елементи g_{ij} і g_{ji} отримують значення 1, якщо ж зв'язку немає, то вони дорівнюють 0. Так, наприклад, використовуючи це правило для пускового реле електродвигуна, можна отримати матрицю

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3. Проектують водопостачальну мережу, що складається з чотирьох пунктів відбору води. Виконати внутрішню розв'язку мережі, тобто спроектувати такий розподіл води по ділянках мережі, щоб виконувалися закони Кірхгофа: перший (коли алгебраїчна сума витрат води у вузлах мережі повинна дорівнювати нулю) і приблизно другий (коли алгебраїчна сума витрат напору води на будь-якому пункті повинна дорівнювати нулю).

Розв'язання. Ця задача зводиться до дослідження математичної моделі – розв'язку систем чотирьох лінійних рівнянь щодо поправочних витрат води x_1, x_2, x_3, x_4 , відповідно для чотирьох пунктів 1, 2, 3, 4 з конкретними даними

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему методом Крамера, встановлюємо поправочні витрати води: $x_1 = 10, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$.

Приклад 1.4. На Харківському (ХПЗ) та Черкаському приладобудівних заводах (ЧПЗ) виготовляють зарядні прилади (ЗП), побутові світильники (ПС) та ультразвукові

медичні прилади (УМП) низької, середньої і високої потужності. Кількість поставленої продукції кожним заводом характеризує таблиця 1.1. Який загальний випуск виробів за вказаними рівнями продуктивності?

Розв’язання. Кількість виробів, випущених Харківським приладобудівним заводом, можна розглянути як елементи матриці A , а Черкаським приладобудівним заводом – як елементи матриці B .

Таблиця 1.1 – Розподіл продукції

Потужність виробів	Готові прилади					
	Харківський приладобудівний завод			Черкаський приладобудівний завод		
	ЗП	ПС	УМП	ЗП	ПС	УМП
Висока	150	240	320	280	300	450
Середня	100	130	175	120	150	170
Низька	25	15	20	30	20	18

Матриці набувають вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 240 & 320 \\ 100 & 130 & 175 \\ 25 & 15 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 280 & 300 & 450 \\ 120 & 150 & 170 \\ 30 & 20 & 18 \end{pmatrix}.$$

Складаючи ці дві матриці, отримаємо матрицю C , що визначає загальну кількість виробів за вказаними рівнями продуктивності

$$C = \begin{pmatrix} 430 & 540 & 770 \\ 220 & 280 & 345 \\ 55 & 35 & 38 \end{pmatrix}.$$

Розрахунок складних електричних кіл методом вузлових потенціалів або вузлових напруг зводиться до розв'язання системи рівнянь, складених лише на основі першого закону Кірхгофа. З цих рівнянь визначають напруги у вузлах схеми електричного кола щодо деякого базисного вузла, потенціал якого беруть рівним нулю, а струми в гілках, що з'єднують вузли, знаходять за законом Ома.

Приклад 1.5. Розрахувати електричне коло постійного струму (рис. 1.2) методом контурних струмів, якщо $E_1 = 12\text{ В}$, $E_2 = 16\text{ В}$, $E_3 = 10\text{ В}$, $R_1 = 1\text{ Ом}$, $R_2 = 4\text{ Ом}$, $R_3 = 2\text{ Ом}$, $R_4 = 7\text{ Ом}$, $R_5 = 7\text{ Ом}$, $R_6 = 7\text{ Ом}$.

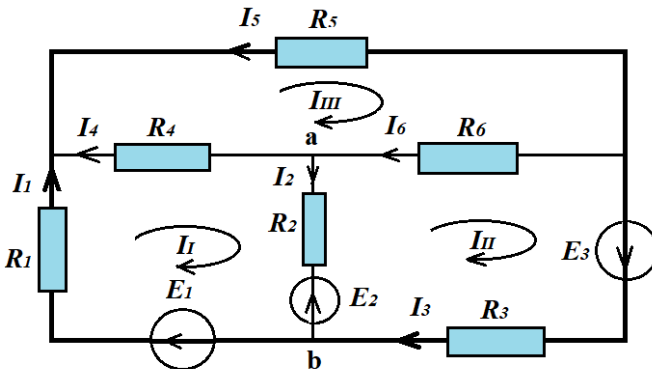


Рисунок 1.2 – Електричне коло постійного струму

Розв'язання. Вибрати незалежні контури, задати напрями контурних струмів і напрями обходу контурів, що збігаються з ними. За другим законом Кірхгофа скласти контурні рівняння для трьох незалежних контурів.

Після підстановки числових значень одержимо

$$\begin{cases} 12I_1 - 4I_2 - 7I_3 = -4, \\ -4I_1 + 13I_2 - 7I_3 = 26, \\ -7I_1 - 7I_2 + 21I_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язати цю систему рівнянь можна методом визначників (методом Крамера) за формулами

$$I_I = \Delta_1/\Delta, \quad I_{II} = \Delta_2/\Delta, \quad I_{III} = \Delta_3/\Delta.$$

Підрахувати головний визначник системи Δ та часткові $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -7 \\ -4 & 13 & -7 \\ -7 & -7 & 21 \end{vmatrix} = 1323,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_I & -R_{12} & -R_{13} \\ E_{II} & R_{22} & -R_{23} \\ E_{III} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -7 \\ 26 & 13 & -7 \\ 0 & -7 & 21 \end{vmatrix} = 2562,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_I & -R_{13} \\ -R_{21} & E_{II} & -R_{23} \\ -R_{31} & E_{III} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -7 \\ -4 & 26 & -7 \\ -7 & 0 & 21 \end{vmatrix} = 4746,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & E_I \\ -R_{21} & R_{22} & E_{II} \\ -R_{31} & -R_{32} & E_{III} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 13 & 26 \\ -7 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 2436.$$

Знайти контурні струми: $I_I = 2562/1323 = 1,94$ А,

$I_{II} = 4746/1323 = 3,58$ А, $I_{III} = 2436/1323 = 1,84$ А.

Знайти дійсні струми: $I_1 = I_I = 1,94$ А,

$I_2 = I_I - I_{II} = 1,94 - 3,58 = -1,64$ А, $I_3 = I_{II} = 3,58$ А,

$I_4 = I_{III} - I_I = 1,84 - 1,94 = -0,1$ А,

$I_5 = -I_{III} = -1,84$ А, $I_6 = I_{III} - I_{II} = 1,84 - 3,58 = -1,74$ А.

РОЗДІЛ 2 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Основні поняття та визначення

Вектором називається спрямований відрізок. Позначають вектор \vec{AB} , \vec{a} . Відстань між початком і кінцем вектора називається його **довжиною**, або **модулем**. Позначають модуль вектора $|\vec{AB}|$, $|\vec{a}|$. Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається **нульовим вектором** $\vec{0}$. $|\vec{0}| = 0$, а напрямком можна вважати будь-яким. Вектор, довжина якого дорівнює 1, називається **одичним вектором** (або **ортом**).

Вектори називаються **колінеарними**, якщо вони паралельні одній прямій. Якщо вектор \vec{a} колінеарний \vec{b} , то пишуть $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Вектори називаються **компланарними**, якщо вони паралельні одній площині.

Вектори називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, рівні за довжиною та однаково спрямовані.

2.1.1. Лінійні операції над векторами

Добутком вектора \vec{a} на число (скаляр) λ називають новий вектор, що має довжину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ і спрямований однаково з \vec{a} за умови $\lambda > 0$ або спрямований протилежно \vec{a} за умови $\lambda < 0$.

Під час додавання двох векторів \vec{a} і \vec{b} застосовують **правило паралелограма** або **правило трикутника** (рис. 2.1).

Для складання трьох некопланарних векторів застосовують **правило паралелепіпеда**.

Для складання будь-якого числа векторів застосовують правило багатокутника (рис. 2.2).

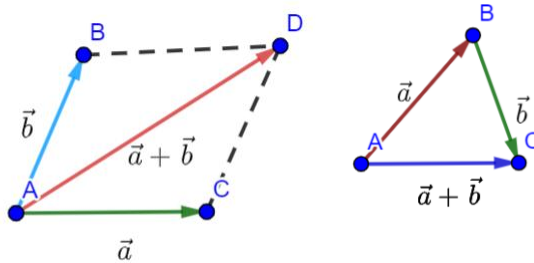


Рисунок 2.1 – Геометричне додавання векторів за правилом паралелограма та трикутника

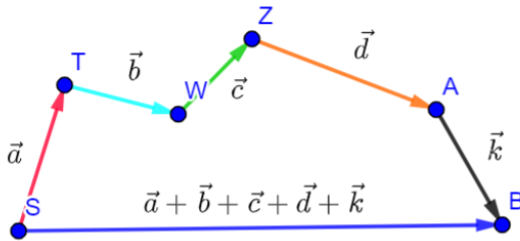


Рисунок 2.2 – Сума кількох векторів за правилом багатокутника

Різницю векторів \vec{b} і \vec{a} називається третій вектор \vec{c} ($\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$), який потрібно скласти з вектором \vec{a} , щоб одержати вектор \vec{b} (рис. 2.3).

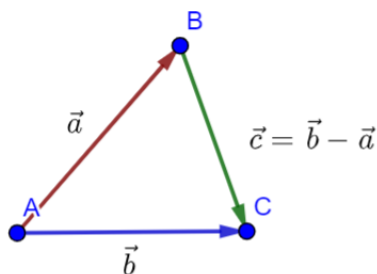


Рисунок 2.3 – Геометричне віднімання векторів

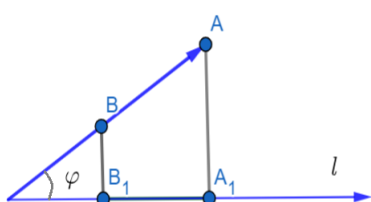
2.1.2. Проекція вектора на вісь

Будь-яка пряма, на якій зазначено напрям, називається **віссю**. **Кутом** між вектором і віссю називається кут між вектором і додатним напрямком осі.

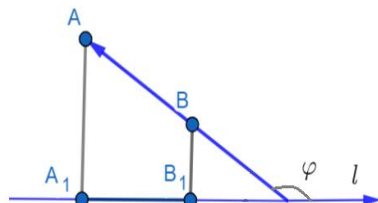
Проекцією вектора \overrightarrow{AB} на вісь l називається число, рівне добутку довжини цього вектора на косинус кута між вектором і віссю, тобто

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = \left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \cos \varphi. \quad (2.1)$$

Якщо кут φ – гострий, тоді $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} > 0$ (рис. 2.4), якщо φ – тупий, то $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} < 0$ (рис. 2.5).



$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} > 0$
Рисунок 2.4



$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} < 0$
Рисунок 2.5

Властивості проєкцій:

$$1) \text{пр}_l \lambda \vec{a} = \lambda \text{пр}_l \vec{a}, (\lambda = \text{const});$$

$$2) \text{пр}_l (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}.$$

2.2. Прямокутна система координат. Координати вектора та точки

Базисом тривимірного простору називається сукупність трьох взаємно перпендикулярних одиничних векторів (ортів) \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}, \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Ці вектори визначають відповідно до осі: Ox – *вісь абсцис*, Oy – *вісь ординат*, Oz – *вісь аплікат* (рис. 2.6).

Сукупність $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ початку координат і векторів базису називається *прямокутною декартовою системою координат*.

Означення. *Координатами точки M* називаються координати її радіус-вектора \vec{OM} . Пишуть $M(x; y; z)$ (рис. 2.7).

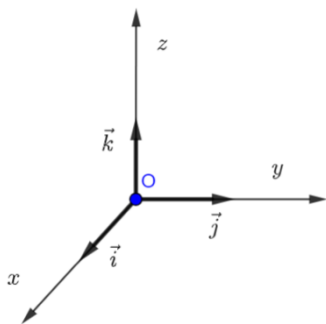


Рисунок 2.6

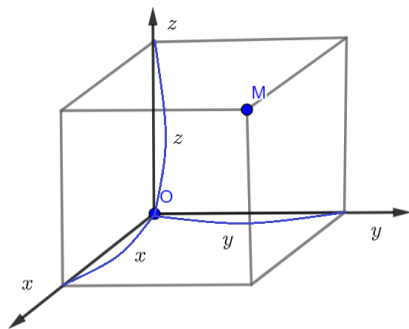


Рисунок 2.7

Наведемо деякі формули, якими користуватимемося надалі.

2.3. Дії над векторами, заданими своїми координатами

1) якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, тоді $\lambda \vec{a} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$, $\lambda = const$;

2) якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2);$$

3) умова рівності векторів

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2;$$

4) умова колінеарності векторів

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad (\vec{a} = \lambda \vec{b}) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2};$$

5) довжина вектора (модуль вектора)

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{a} = (x; y; z);$$

б) обчислення координат та довжини вектора через координати його початку та кінця

якщо $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, тоді

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A),$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2};$$

7) координати середини відрізка AB точки C

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

2.3.1. Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} називається число, що позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$ і дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (2.2)$$

де φ – кут між векторами \vec{a} і \vec{b} .

Властивості скалярного добутку векторів

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$.

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, тоді скалярний добуток дорівнює сумі добутків однойменних координат

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2).$$

5. Кут між векторами встановлюється за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (2.3)$$

6. Вектор проєкції вектора на напрямок іншого вектора.

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_b \vec{a}$, тоді

$$\text{пр}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}, \quad \text{пр}_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

2.3.2. Векторний добуток векторів

Означення. Векторним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} називають вектор \vec{c} , що позначається $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє такі три умови:

$$1) |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi;$$

$$2) \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b};$$

3) трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – права (коли під час спостереження з кінця вектора \vec{c} найкоротший перехід від \vec{a} до \vec{b} відбувається проти годинникової стрілки (рис. 2.8).

Властивості векторного добутку

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a});$$

$$2) (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b});$$

$$3) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

$$4) \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b};$$

5) $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, де S – площа паралелограма, побудованого на векторах (рис. 2.9).

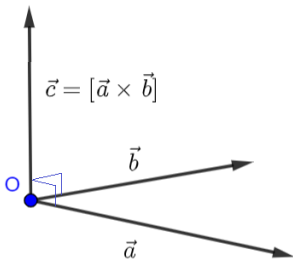


Рисунок 2.8

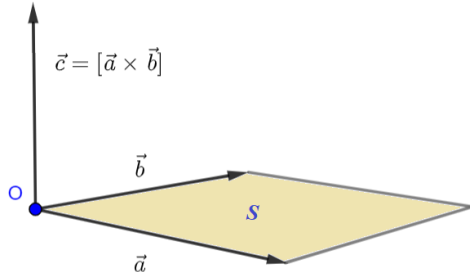


Рисунок 2.9

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, тоді векторний добуток обчислюється за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

2.3.3. Мішаний добуток векторів

Означення. Мішаним добутком трьох векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} називають число $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, тоді

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

2.4. Практичне застосування векторів

Одним із фундаментальних понять сучасної математики є вектор. Еволюція поняття вектора здійснювалася завдяки широкому використанню цього поняття в різних галузях фізики, механіки, а також у техніці. Поняття вектора виникає там, де доводиться мати справу з об'єктами, що характеризуються величиною та напрямком. Так, деякі фізичні величини, такі як сила, швидкість, прискорення та ін., характеризуються як числовим значенням, а й напрямком. Наприклад, під час вивчення процесів, що відбуваються в колах змінного струму, зручно користуватися методом векторного зображення величин, що синусоїдально змінюються. Векторні діаграми являють собою сукупність векторів, що зображують величини, які діють у даному електричному ланцюгу, синусоїдально. Вони дозволяють спростити розрахунок ланцюгів синусоїдального струму і зробити його наочним, застосувавши замість алгебраїчного складання або віднімання миттєвих значень струмів, напруг або е. р. с. складання або віднімання їхніх векторів.

Робота сили (механічний зміст скалярного добутку). Робота A сили \vec{F} у разі прямолінійного переміщення

тіла на вектор під дією сили дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad (2.6)$$

Приклад 2.1. Знайти роботу сили $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, якщо матеріальна точка, до якої вона прикладена, рухається прямолінійно з точки $A(2; -1; 3)$ до точки $B(6; 1; 5)$.

Розв'язання. Знайдемо вектор \vec{S} переміщення

$$\vec{S} = \vec{AB} = (6-2; 1+1; 5-3) = (4; 2; 2).$$

Тоді робота $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$.

Момент сили (механічний зміст векторного добутку). Нехай точка A твердого тіла закріплена, а до точки B прикладена сила \vec{F} (рис. 2.10). Тоді виникає обертальний момент $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$.

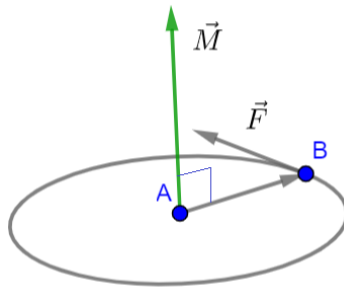


Рисунок 2.10 – Обертальний момент сили

Приклад 2.2. Знайти величину обертального моменту \vec{M} сили $\vec{F} = (3; 2; 1)$, яка прикладена до точки $A(-1; 2; 4)$ щодо початку координат.

Розв'язання. Координати вектора $\vec{OA} = (-1; 2; 4)$.
Момент сили знаходимо за формулою

$$\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 13\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Величина моменту

$$|\vec{M}| = \sqrt{(-6)^2 + (13)^2 + (-8)^2} \approx 16,4 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

Приклад 2.3. Під час монтажу приладів радіопередачі мобільного зв'язку виникло питання стійкості щогли. Записати умову рівноваги сил, що діють у навантаженій радіотехнічній щоглі.

Розв'язання. Сила \vec{P} , що являє собою вагу вантажу, яку піднімає щогла, за правилом паралелограма розкладається на дві сили \vec{P}_1 та \vec{P}_2 (рис. 2.11).

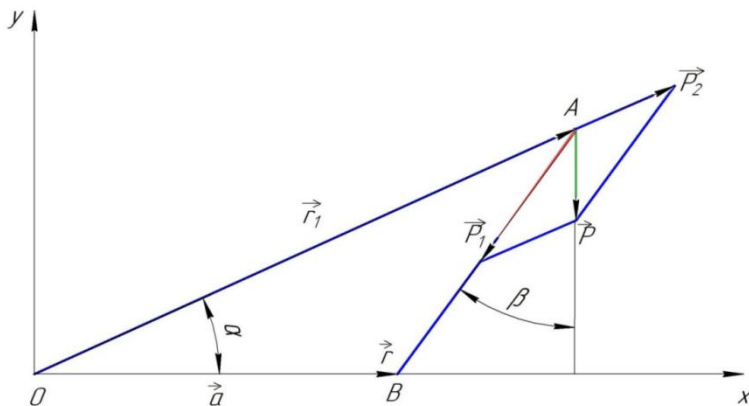


Рисунок 2.11 – Схема навантаження радіотехнічної щогли [7]

\vec{P}_1 – сила, що стискає щоглу (зусилля в щоглі); \vec{P}_2 – натяг троса (зусилля в тросі). Умова рівноваги вказаних сил може бути записана у вигляді векторного рівняння

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 - \vec{P} = 0.$$

Проектуючи векторне рівняння на осі координат, отримаємо умову рівноваги у скалярній формі

$$-|\vec{P}_1| \sin \beta + |\vec{P}_2| \cos \alpha = 0, \quad -|\vec{P}_1| \cos \beta + |\vec{P}_2| \sin \alpha - |\vec{P}| = 0.$$

Приклад 2.4. Знаючи величину вантажу, що піднімає щогла \vec{P} (рис. 2.11), кути α і β , знайти величини \vec{P}_1 – зусилля в щоглі та \vec{P}_2 – зусилля у тросі. Обчислити $|\vec{P}_1|$ та $|\vec{P}_2|$, якщо $|\vec{P}| = 10$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$, а кут $\beta = 10^\circ$.

Розв’язання. На основі аналізу рисунка 2.11 одержимо

$$|\vec{P}_1| = \frac{|\vec{P}| \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} \approx 11,30 \text{ кН}; \quad |\vec{P}_2| = \frac{|\vec{P}| \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta)} \approx 2,26 \text{ кН}.$$

Приклад 2.5. Опора щогли (рис. 2.12, точка B) приймає силу \vec{P}_1 , що стискає щоглу. Розкласти силу \vec{P}_1 за правилом паралелограма на вертикальну \vec{P}_3 , горизонтальну \vec{P}_4 та складові. Виразити величини \vec{P}_3 та \vec{P}_4 через знайдену в попередній задачі (приклад 2.4) величину \vec{P}_1 та кут β . Обчислити значення $|\vec{P}_3|$ та $|\vec{P}_4|$ за тих самих числових даних, що й у задачі 2.4.

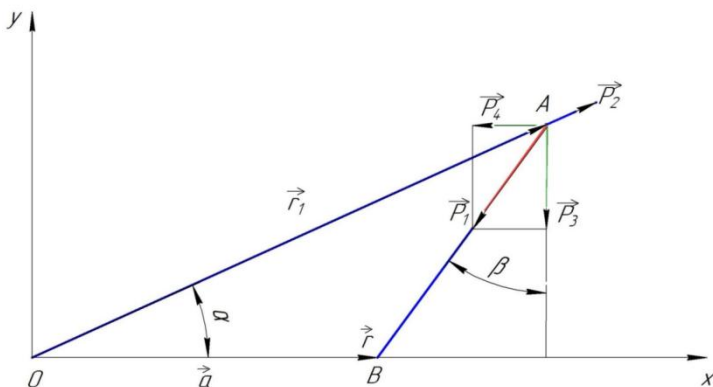


Рисунок 2.12 – Розташування сил під час монтажу вежі мобільного радіозв’язку [7]

Розв’язання

$$|\vec{P}_3| = |\vec{P}_1| \cos \beta \approx 11,13 \text{ кН}; \quad |\vec{P}_4| = |\vec{P}_1| \sin \beta \approx 1,96 \text{ кН}.$$

Приклад 2.6. Побудувати векторну діаграму для електричного кола, що складається з послідовно під’єднаних конденсатора, резистора та котушки. Напруга на котушці $U_L = 15 \text{ В}$, напруга на конденсаторі $U_C = 20 \text{ В}$, напруга на резисторі $U_R = 10 \text{ В}$, струм у ланцюгу $I = 3 \text{ А}$. Знайти загальну напругу.

Розв’язання. Котушка має індуктивний характер, отже, у ній напруга випереджає струм по фазі на 90° . Конденсатор має ємнісний характер, отже, струм у ньому випереджає по фазі напругу на 90° . Резистор має тільки активний опір, і напруга в ньому збігається по фазі зі струмом. Відкладемо вектор струму у відповідному масштабі. Масштаб струму 1 А/см (рис. 2.13). Відкладемо вектор напруги на котушці, масштаб для напруги – 5 В/см .

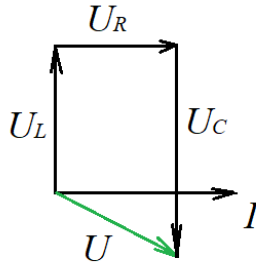


Рисунок 2.13 – Векторна діаграма електричного кола

Відкладаємо вектор активного опору, оскільки напруга в одній фазі зі струмом, то його відкладаємо з кінця вектора U_L паралельно вектору струму I . Далі відкладемо вектор напруги на конденсаторі, оскільки вона запізнюється на 90° , відкладемо його вертикально вниз із кінця вектора U_R . Останнім етапом відкладемо вектор загальної напруги з початку координат на кінець вектора U_C . Загальна напруга U дорівнює $2,23\text{ В}$, причому характер кола ємнісний, оскільки напруга відстає від струму.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти роботу сили \vec{F} за умови $|\vec{F}| = 15\text{ Н}$, якщо під дією цієї сили тіло переміщується на відстань 4 м під кутом $\varphi = \pi/3$ до напрямку дії сили.

Відповідь: $A = 30\text{ Дж}$.

2. Два трактори, що рухаються з постійною швидкістю вздовж берегів водного каналу, тягнуть баржу за допомогою двох канатів. Сили натягу канатів $|\vec{F}_1| = 800\text{ Н}$ і $|\vec{F}_2| = 960\text{ Н}$. Кут між канатами – 60° . Знайти опір води

$|\vec{P}|$, що відчуває баржа, якщо вона рухається паралельно берегам, та кути α і β між канатами і напрямом руху баржі.

Відповідь: $|\vec{P}| \approx 1530\text{Н}$, $\alpha \approx 33^\circ$, $\beta \approx 27^\circ$.

3. Для електрично нейтральної системи точкових зарядів виразити сумарний дипольний момент через радіус-вектори центрів мас підсистем її додатних і від'ємних зарядів.

4. Плавцю потрібно перепливти річку, швидкість течії якої дорівнює $2,4\text{ км/год}$. Плавець пливе зі швидкістю 4 км/год . Під яким кутом до берега потрібно пливати, щоб перетнути річку перпендикулярно до берега?

Відповідь: під кутом $\approx 127^\circ$.

5. Дано три сили $\vec{F}_1 = (1; -3; 5)$, $\vec{F}_2 = (2; -3; 1)$, $\vec{F}_3 = (-7; -3; -5)$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу рівнодійної цих сил, якщо точка рухається прямо-лінійно з положення $A(3; -1; -2)$ у положення $B(1; 0; 7)$.

Відповідь: $A = 8\text{ Дж}$.

6. Сила $\vec{F} = (3; 2; -4)$ прикладена до точки $A(2; -1; 1)$. Визначити моменти цієї сили щодо початку координат.

Відповідь: $\vec{M} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}$.

РОЗДІЛ 3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Лінії на площині

3.1.1. Пряма на площині та її основні рівняння

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k має вигляд

$$y = kx + b, \text{ або } y - y_0 = k(x - x_0), \quad (3.1)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, b – величина відрізка, що відтинає пряма на осі Oy , $M_0(x_0; y_0)$ – точка, що належить прямій (рис. 3.1).

Крім того, пряму l на площині можна задати вектором нормалі $\vec{n} = (A; B) \perp l$ і точкою $M_0(x_0; y_0) \in l$ (рис. 3.2 а).

Розглянемо інші рівняння прямої на площині:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – *рівняння прямої, яка задана точкою і вектором нормалі;*

$Ax + By + C = 0$ – *загальне рівняння прямої;*

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – *рівняння прямої у відрізках* (рис. 3.2 б).

Пряма l на площині також визначається напрямним вектором $\vec{s} = (m; n) \parallel l$ і точкою $M_0(x_0; y_0) \in l$ (рис. 3.1).

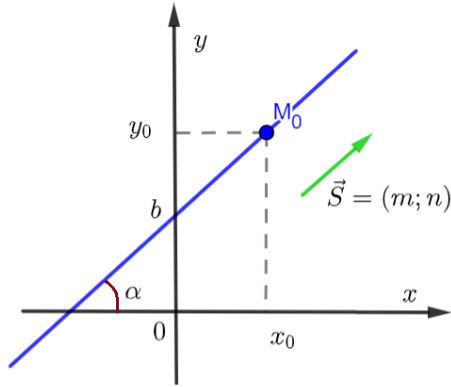


Рисунок 3.1 – Пряма на площині

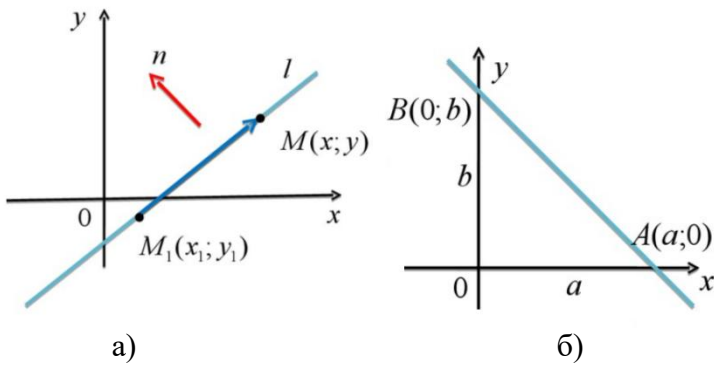


Рисунок 3.2 – Пряма на площині

Розглянемо деякі рівняння прямої на площині:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad \text{– канонічне рівняння прямої;}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases} \quad \text{– параметричне рівняння прямої;}$$

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$.

Кут ϕ між двома прямими, що задані рівняннями

$$l_1: y = k_1x + b_1 \text{ і } l_2: y = k_2x + b_2,$$

можна знайти за формулою

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2};$$

водночас $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$, або $k_1 = -\frac{1}{k_2}$,

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

Відстань d від точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.2)$$

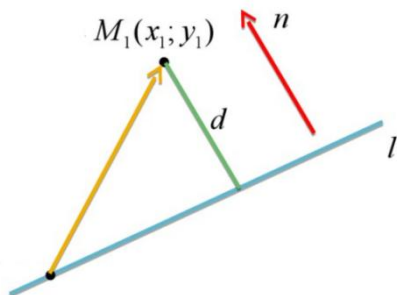


Рисунок 3.3 – Відстань від точки до прямої

3.1.2. Криві другого порядку на площині

Кривою другого порядку на площині називається лінія, рівняння якої в декартовій системі координат має вигляд

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (3.3)$$

де коефіцієнти A , B , C одночасно не перетворюються на нуль. За $A = B = C = 0$ рівняння (3.3) задає пряму, що називається *лінією першого порядку*. До ліній другого порядку належать *коло*, *еліпс*, *гіпербола* і *парабола*.

1. Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра). Якщо центр кола перенести в початок координат, тоді *канонічне рівняння кола* радіусом R має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3.4)$$

Якщо центр кола розташований у точці $O_1(x_0; y_0)$, тоді його рівняння записують у вигляді

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (3.5)$$

Це коло побудовано на рисунку 3.4.

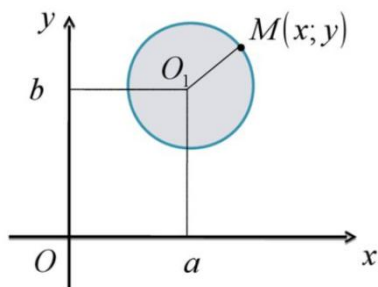


Рисунок 3.4 – Коло

2. Нехай на площині задані дві точки F_1 і F_2 , відстань між якими дорівнює $2c$, і задано число $a > c$.

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ (рис. 3.5).

Якщо систему координат вибрати так, як подано на рисунку 3.5, то **канонічне рівняння еліпса** запишемо у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.6)$$

де $b^2 = a^2 - c^2$, a – **велика напіввісь**, b – **мала напіввісь** еліпса (за умови $a > b$).

Фокуси еліпса розташовані в точках $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$.

Коло є частинним випадком еліпса за умови $a = b$.

3. Нехай на площині задані дві точки F_1 і F_2 , відстань між якими дорівнює $2c$, і задано число $a < c$.

Гіперболою називається множина точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величиною постійною і дорівнює $2a$.

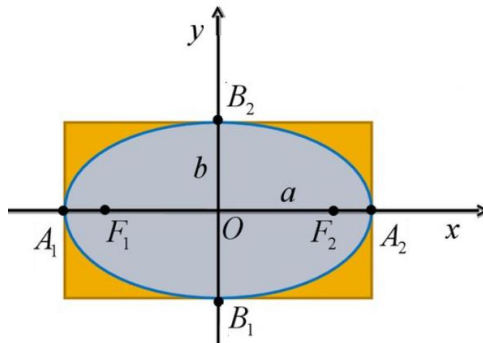


Рисунок 3.5 – Еліпс

Якщо систему координат вибрати так, як зазначено на рисунку 3.6, то канонічне рівняння гіперболи запишемо у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.7)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$, a – дійсна, b – уявна піввісі гіперболи.

Гіпербола складається із двох *гілок* і розташована симетрично щодо координатних осей. Водночас її гілки в разі віддалення в нескінченність як завгодно близько підходять до прямих $y = \pm \frac{b}{a}x$, які називають *асимптотами гіперболи*.

Під час побудови гіперболи спочатку будують *основний прямокутник* зі сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$. Потім через протилежні вершини цього прямокутника проводять прями, які є асимптотами гіперболи. *Вершини гіперболи* розташовані в точках із координатами $(-a; 0)$ і $(a; 0)$, а фокуси – у точках $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ (рис. 3.6).

Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (або $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) також задає гіперболу, *спряжену* із гіперболою $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Дійсна та уявна півосі цієї гіперболи відповідно рівні b і a .

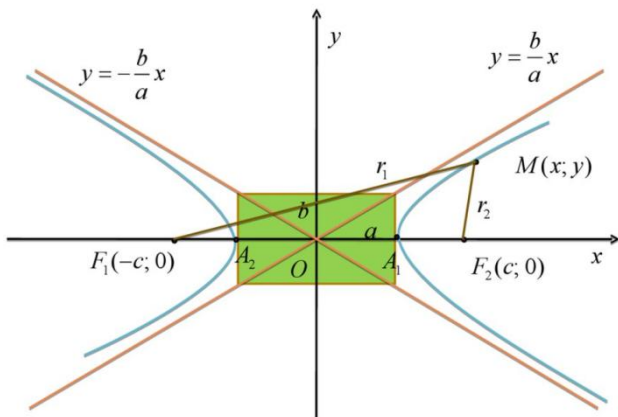


Рисунок 3.6 – Гіпербола

4. Нехай на площині задана точка F і пряма D , відстань між якими дорівнює p .

Параболою називається множина точок площини, рівновіддалених від цієї точки F (фокусу) і даної прямої D (директриси).

Якщо систему координат вибрати так, як зазначено на рисунку 3.7, то канонічне рівняння параболі можна записати у вигляді

$$y^2 = 2px. \quad (3.8)$$

Ця парабола симетрична щодо осі Ox . Директрисою є пряма $x = -\frac{p}{2}$, точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус параболі, p – **параметр параболі**. Якщо $p < 0$, парабола спрямована в протилежний бік.

Рівняння $x^2 = 2py$ задає параболу, симетричну щодо осі Oy .

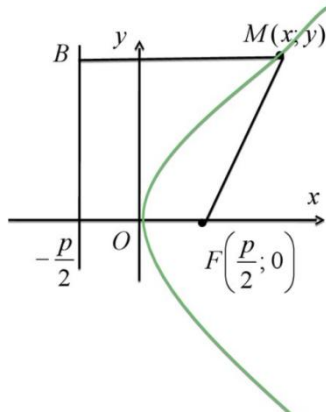


Рисунок 3.7 – Парабола

Щоб побудувати криву другого порядку, задану загальним рівнянням, рівняння кривої приводять до канонічного вигляду та переходять до нової системи координат.

3.2. Практичне застосування ліній на площині

Приклад 3.1. Два будівельних майданчики A та B розташовані біля підніжжя гори на рівні моря. Відстань між ними по прямій 6 км. Між ними розташований гірський перевал, на який від майданчиків ведуть майже прямолінійні автотраси. Від майданчика A ухил дороги (тангенс кута між дорогою і рівнем моря) становить $0,15$. Траса від B до перевалу має ухил $0,25$. На якій висоті над рівнем моря розташований перевал?

Розв’язання. Оберемо систему координат так, щоб її початок збігався з положенням майданчика A , а вісь Ox проходила через відрізок AB (припустимо, що об’єкт B розташований правіше, ніж майданчик A). Вісь Oy перпендикулярна осі Ox і спрямована вгору. Нехай перевал роз-

ташований у точці $C(x_1; y_1)$. Оскільки під час руху із A в C відбувається підйом, а в разі переміщення із C до B – спуск, то кутові коефіцієнти відповідних прямих дорівнюють $k_{AC} = 0,15$ і $k_{CB} = -0,25$. Тоді рівняння прямих подано у вигляді $y = 0,15x$ і $y = -0,25(x - 6)$. Знаходимо точку перетину прямих $0,15x = -0,25(x - 6)$, $x = \frac{15}{4}$. Тоді

$y = 0,15x = 0,15 \cdot \frac{15}{4} = 0,5625$ км. Отже, перевал розташований на висоті $0,5625$ км.

Приклад 3.2. Пішохідний перехід над теплотрасою має форму сегментної арки, яка має форму дуги кола. Скласти рівняння дуги цього кола, знайти положення його центра та радіус, а також центральний кут α , що стягується дугою цієї арки, довжину дуги, якщо проліт арки $L = 20$ м, а її підйом – $1/4$. (Підйом арки дорівнює відношенню її висоти до прольоту).

Розв’язання. Позначимо висоту арки через d . За умовою задачі $L = 20$ м.

Відомо, що $\frac{d}{L} = \frac{1}{4}$, тому $d = \frac{L}{4} = \frac{20}{4} = 5$ м. У вибраній системі координат (рис. 3.8) точки M, N, P мають координати $(-10; 0)$, $(10, 0)$ і $(0; 5)$ відповідно. Оскільки арка симетрична щодо осі Oy , центр кола, що ми досліджуємо, лежить на продовженні вниз осі Oy , тобто центр має абсцису, що дорівнює нулю, і від’ємну координату y_0 . Рівняння кола будемо шукати у вигляді

$$x^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

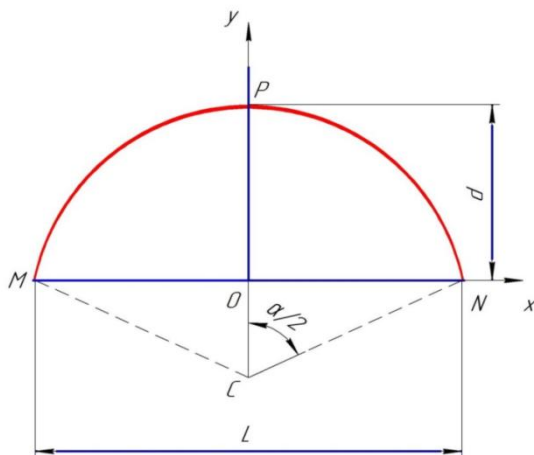


Рисунок 3.8 – Схема пішохідного переходу над теплотрасою [7]

На основі умови про проходження кола через точки M і P складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 100 + y_0^2 = R^2, \\ (5 - y_0)^2 = R^2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, знаходимо $R = 12,5$, а $y_0 = -7,5$. Отже, центр кола лежить у точці $C(0; -7,5)$, а радіус $R = 12,5$ м. Рівняння кола має вигляд

$$x^2 + (y + 7,5)^2 = 156,25.$$

Центральний кут α знайдемо із прямокутного трикутника CON

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{ON}{CN} = \frac{L}{2R} = \frac{10}{25} = 0,4, \quad \frac{\alpha}{2} = \arcsin 0,4 \approx 23^\circ, \quad \alpha \approx 46^\circ.$$

Довжину дуги арки знайдемо за формулою $l = \frac{\pi R \alpha^\circ}{180^\circ}$, одержимо $l \approx \frac{3,14 \cdot 12,5 \cdot 106^\circ}{180^\circ} \approx 23 \text{ м}$.

Приклад 3.3. Колінчастий вал двигуна OA обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 10 \text{ рад/с}$ і надає руху поршень B за допомогою шатуна AB , причому $OA = AB = 80 \text{ см}$ (рис. 3.9). Скласти рівняння траєкторії середньої точки M шатуна і зобразити траєкторію на рисунку.

Розв'язання. Виберемо систему координат, як подано на рисунку 3.9. Знаходимо $x = OM' = OA' + A'M'$.

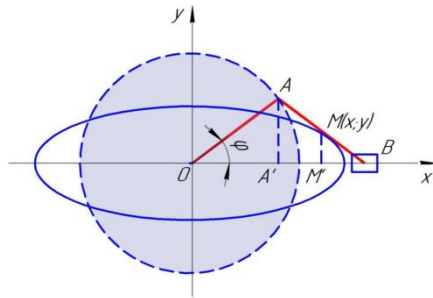


Рисунок 3.9 – Схема обертання колінчастого вала двигуна [7]

Оскільки $OA' = OA \cdot \cos \varphi$, $A'M' = AM \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} OA \cdot \cos \varphi$, тому $x = \frac{3}{2} OA \cdot \cos \varphi = 120 \cdot \cos \varphi$, $y = MM' = MB \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} OA \sin \varphi = 40 \sin \varphi$.

Кутова швидкість за рівномірного обертання $\omega = \frac{\varphi}{t}$, звідси $\varphi = \omega t$. Оскільки кутова швидкість колінчастого вала двигуна OA стала, то $\varphi = \omega t = 10t$, отже, $x = 120 \cos 10t$, $y = 40 \sin 10t$, де t – час. Отримані рівняння є параметричними рівняннями траєкторії точки M .

Виключаючи параметр t , запишемо рівняння траєкторії в канонічній формі

$$\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1.$$

Це рівняння еліпса з півосями $a = 120$ см, $b = 40$ см, зображеного на рисунку 3.9.

Приклад 3.4. Вважаючи, що натягнутий між точками O та A провід високовольтної лінії має форму дуги параболи, знайти за даними рисунка 3.10 рівняння цієї параболи. Записати рівняння параболи за умови $L = 100$ м, $h = 24$ м і $d = 1$ м.

Розв'язання. У вибраній на рисунку 3.10 системі координат натягнутий провід має форму дуги параболи з віссю симетрії, паралельною осі Oy та зміщеною щодо початку координат вершиною. Рівняння такої параболи має вигляд

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),$$

де x_0, y_0 – координати вершини; p – параметр параболи. Використовуючи умови проходження параболи через точки $O(0; 0)$ і $A(L; h)$ і зважаючи, що $y_0 = -d$, отримаємо систему рівнянь щодо x_0 і p

$$\begin{cases} x_0^2 = 2pd, \\ (L - x_0)^2 = 2p(h + d). \end{cases}$$

Розв'язуючи яку, знаходимо

$$x_0 = \frac{L}{h} \left(\sqrt{d^2 + hd} - d \right), \quad p = \frac{L^2}{2h^2 d} \left(\sqrt{d^2 + hd} - d \right)^2.$$

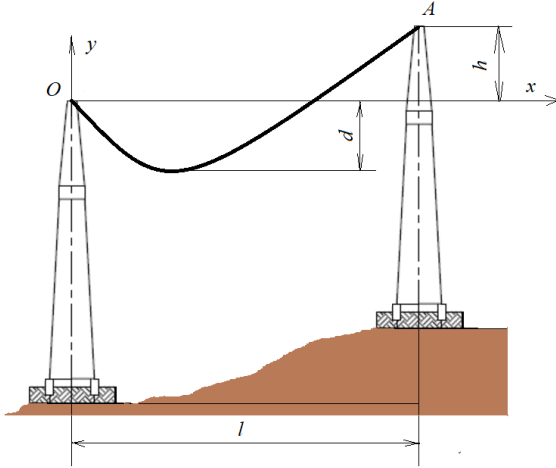


Рисунок 3.10 – Схема розташування високовольтної лінії

Підставляючи значення x_0 , y_0 і p у рівняння $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, отримаємо шукане рівняння параболи

$$\left(x - \frac{L}{h} \sqrt{d^2 + hd} + \frac{Ld}{h} \right)^2 = \frac{L^2}{2h^2 d} (\sqrt{d^2 + hd} - d^2)(y + d).$$

За умови $L = 100$ м, $h = 24$ м і $d = 1$ м останнє рівняння набуває вигляду $\left(x - \frac{50}{3} \right)^2 = \frac{2500}{9}(y + 1)$, або $y = 0,0036 x^2 - 0,12 x$.

Приклад 3.5. На залізничній лінії AB у точках A і B розташовані товарні станції. З точки N , що розташована неподалік станції B , вантаж на станцію A може передаватися двома способами: перший спосіб – по шосе до стан-

ції B , а потім до станції A залізницею, і другий спосіб – безпосередньо автотрасою до станції A . Установити геометричне місце точок, для якого перший спосіб доставки вантажу вигідніший, ніж другий.

Розв’язання. Позначимо $AB = l$, спрямуємо вісь Ox по прямій AB , за початок координат візьмемо точку O – середину відрізка AB (рис. 3.11). Тоді точка $A \left(-\frac{l}{2}; 0 \right)$, $B \left(\frac{l}{2}; 0 \right)$. Нехай p і q – відповідно тарифи перевезень залізницею та автотранспортом (вартість у гривнях перевезення l т вантажу на відстань l км), r (грн) – вартість навантаження та розвантаження l т вантажу на залізничній станції.

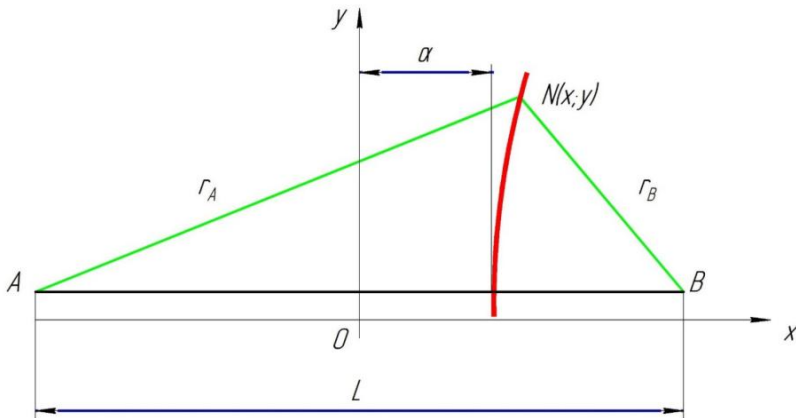


Рисунок 3.11 – Схема транспортних умов

Тоді вартість провезення l т вантажу першим способом (шляхом $NB + BA$)

$$S_1 = NBq + ABp + r = NBq + tq + r.$$

Другим способом (шляхом NA): $S_2 = qNA$.

$$S_1 - S_2 = (NB - NA)q + tq + r.$$

Якщо $S_1 = S_2$, тоді $NB - NA = \frac{q+r}{q}$ – стала величина,

тобто точка N лежить на гіперболі

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{r+tp}{2q}; \quad b^2 = \frac{t^2}{4} - a^2.$$

Шукане геометричне місце точок є множиною точок, що лежать усередині правої гілки гіперболи (що містить точку B).

3.3. Пряма і поверхні в просторі

3.3.1. Площина в просторі

Розглянемо площину P прямокутної декартової системи координат. Положення площини цілком визначається точкою $M_0(x_0; y_0; z_0) \in P$ і вектором нормалі $\vec{n} = (A; B; C) \perp P$ ($\vec{n} \neq 0$) (рис. 3.12).

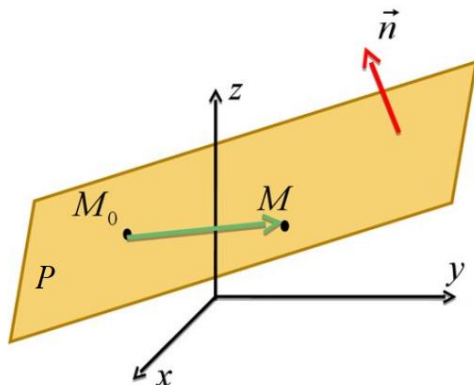


Рисунок 3.12 – Площина в просторі

Візьмемо довільну точку $M(x; y; z) \in P$ і побудуємо вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Оскільки $\vec{n} \perp \overline{M_0M}$, тоді скалярний добуток $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$,

$$\text{або } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.9)$$

Одержали рівняння площини, задане точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та вектором нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$. Якщо в рівнянні (3.9) розкрити дужки та позначити $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, тоді одержимо загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0). \quad (3.10)$$

Зауваження. Якщо в рівнянні (3.10) якийсь із коефіцієнтів A, B, C дорівнює нулю, то площина розташована паралельно тій осі, координата якої відсутня в рівнянні. Наприклад, за умови $A = 0$ площина $By + Cz + D = 0$ паралельна осі Ox ; за умови $A = B = 0$ площина паралельна до осей Ox і Oy , тобто площині xOy та ін.

Нехай у рівнянні (3.10) жоден із коефіцієнтів не дорівнює 0. Перепишемо рівняння (3.10) у вигляді $Ax + By + Cz = -D$, розділимо обидві частини цієї рівності на $-D$ і позначимо $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$. Одержимо **рівняння площини у відрізках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (3.11)$$

де a, b, c – це величини спрямованих відрізків, що відсікаються площиною на осях координат. Якщо три точки

$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ не лежать на одній прямій, тоді через ці точки проходить єдина площина (рис. 3.13). Рівняння *площини, що проходить через три точки*, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.12)$$

Нехай дані дві площини $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. *Кут φ між двома площинами* дорівнює куту між їхніми векторами нормалі. Косинус кута встановлюється за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.13)$$

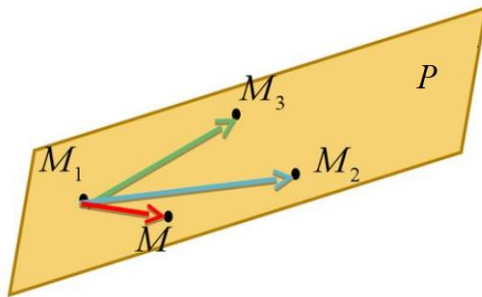


Рисунок 3.13 – Площина, що проходить через три задані точки

Відстань d від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ (рис. 3.14) визначається за такою формулою

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.14)$$

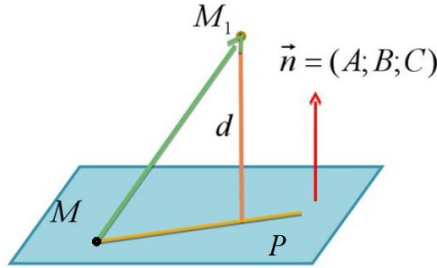


Рисунок 3.14 – Відстань від точки до площини

3.3.2. Пряма в просторі та її основні рівняння

Розглянемо пряму l у прямокутній декартовій системі координат. Положення прямої у просторі загалом визначається точкою $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$ та напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p) \parallel l$, ($\vec{s} \neq 0$). (рис. 3.15).

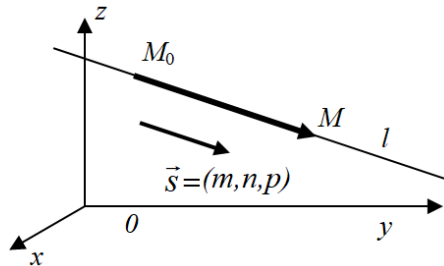


Рисунок 3.15 – Пряма в просторі

Оберемо довільну точку $M(x; y; z) \in l$ і побудуємо вектор $\overline{M_0M} \parallel \vec{s}$, з умови колінеарності цих векторів одержимо **канонічне рівняння прямої в просторі**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (3.15)$$

Позначимо в (3.15) коефіцієнт пропорційності через t і виразимо через t змінні x , y , z . Приходимо до **параметричного рівняння прямої в просторі**

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad (3.16)$$

де t – параметр.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.17)$$

Розглянемо дві площини P_1

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Якщо ці площини не паралельні, то вони перетинаються по прямій, що задає система рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Система (3.18) називається **загальними рівняннями прямої у просторі**. Кут φ між двома прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (3.19)$$

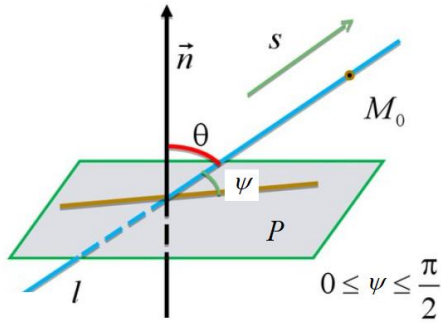


Рисунок 3.16 – Пряма і площина в просторі

Кут ψ між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ та площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою

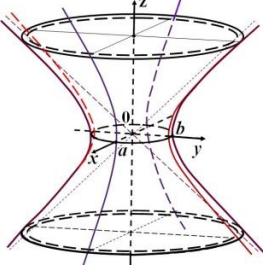
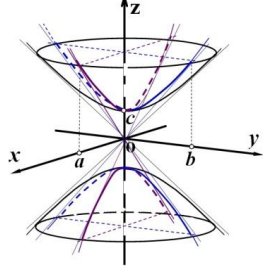
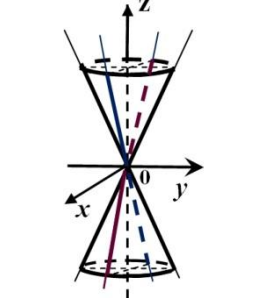
$$\sin \psi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (3.20)$$

3.3.3. Поверхні другого порядку

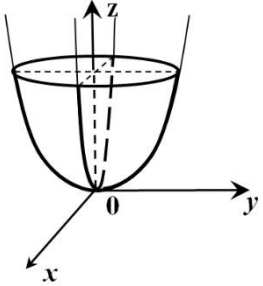
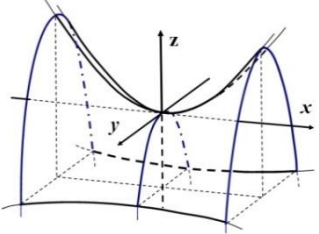
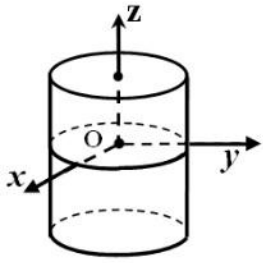
Таблиця 3.1

Назва поверхні	Канонічне рівняння	Вигляд поверхні
Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	

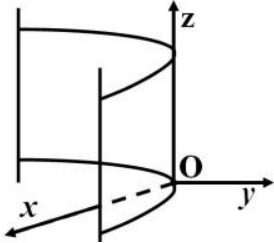
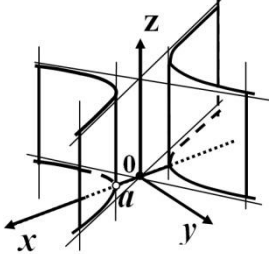
Продовження таблиці 3.1

Назва поверхні	Канонічне рівняння	Вигляд поверхні
Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Двопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Конічна поверхня	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	

Продовження таблиці 3.1

Назва поверхні	Канонічне рівняння	Вигляд поверхні
Еліптичний параболоїд	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	
Гіперболічний параболоїд	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	
Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	

Продовження таблиці 3.1

Назва поверхні	Канонічне рівняння	Вигляд поверхні
Параболічний циліндр	$y^2 = 2px$	
Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	

3.4. Практичне застосування поверхонь

Приклад 3.6. Звиси чотирисхилого даху ремонтного ангара утворюють прямокутник, сторони якого дорівнюють 12 м і 30 м . Скати мають один і той самий ухил $i = \frac{1}{2}$.

Вибравши систему координат, як подано на рисунку 3.15, скласти рівняння скатів, рівняння ребер і коника, записати рівняння ребер і коника в канонічній формі, знайти площу поверхні покрівлі.

Розв'язання. Звиси даху – відрізки прямих AC , CD , DF , AF ; скати – трикутники ABC , DEF і трапеції $BCDE$, $ABEF$; коник – відрізок прямий BE ; кут нахилу ската –

кут α , складений лінією ската BK з її горизонтальною проекцією; кут ската – тангенс кута нахилу $i = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Оскільки скати даху плоскі, то їхні рівняння знаходитимемо як рівняння площин, що проходять через три задані точки. Координати точок A, C, D, F у вибраній системі (рис. 3.17) такі: $A(6; 0; 0)$, $C(6; 0; 0)$, $D(6; 30; 0)$, $F(6; 30; 0)$. Знайдемо координати точок B та E . З трикутника $BO'K$ маємо $z_B = BO' = O'K \operatorname{tg} \alpha = O'K \cdot i = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ м. Із трикутника OBO' знаходимо $y_B = OO' = \frac{BO'}{i} = 3 : \frac{1}{2} = 6$ м. Отже, точка B має координати $(0; 6; 3)$.

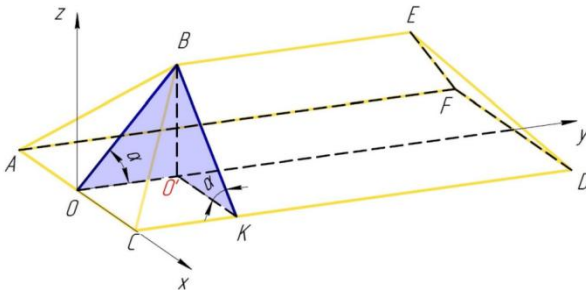


Рисунок 3.17 – Схема даху ремонтного ангара [7]

Можна бачити, що $z_E = z_B = 3$ м, $y_E = 30 - y_B = 24$ м, тому маємо $E(0; 24; 3)$. За відомими координатами точок знайдемо рівняння схилів, звернувшись до формули рівняння площини, що проходить через три точки

$$\text{рівняння схилу } ABC \begin{vmatrix} x+6 & y-0 & z-0 \\ 0+6 & 6-0 & 3-0 \\ 6+6 & 0-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } y - 2z = 0;$$

$$\text{рівняння схилю } DEF \left\{ \begin{array}{l} x-6 \quad y-30 \quad z-0 \\ 0-6 \quad 24-30 \quad 3-0 \\ -6-6 \quad 30-30 \quad 0-0 \end{array} \right\} = 0, \text{ або } y + 2z - 30 = 0;$$

$$\text{рівняння схилю } BCDE \left\{ \begin{array}{l} x-0 \quad y-6 \quad z-3 \\ 6-0 \quad 0-6 \quad 0-3 \\ 6-0 \quad 30-6 \quad 0-3 \end{array} \right\} = 0, \text{ або } x + 2z - 6 = 0;$$

$$\text{рівняння схилю } ABEF \left\{ \begin{array}{l} x+6 \quad y-0 \quad z-0 \\ 0+6 \quad 6-0 \quad 3-0 \\ 0+6 \quad 24-0 \quad 3-0 \end{array} \right\} = 0, \text{ або } x - 2z + 6 = 0.$$

Ребра AB , BC , DE , EF і коник BE являють собою лінії перетину відповідних площин. Загальні та канонічні рівняння цих ліній відповідно мають такий вигляд:

$$\text{ребро } AB \left\{ \begin{array}{l} y-2z=0, \quad \text{або } \frac{x+6}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}; \\ x-2z+6=0, \end{array} \right.$$

$$\text{ребро } BC \left\{ \begin{array}{l} y-2z=0, \quad \text{або } \frac{x}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-3}{-1}; \\ x+2z-6=0, \end{array} \right.$$

$$\text{ребро } DE \left\{ \begin{array}{l} y+2z-30=0, \quad \text{або } \frac{x-6}{-2} = \frac{y-30}{-2} = \frac{z}{1}; \\ x+2z-6=0, \end{array} \right.$$

$$\text{ребро } EF \left\{ \begin{array}{l} y+2z-30=0, \quad \text{або } \frac{x}{-2} = \frac{y-24}{2} = \frac{z-3}{-1}; \\ x-2z+6=0, \end{array} \right.$$

$$\text{коник } BE \left\{ \begin{array}{l} x+2z-6=0, \quad \text{або } \frac{x}{0} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-3}{0}. \\ x-2z+6=0, \end{array} \right.$$

Щоб знайти площу поверхні покрівлі, зауважимо, що вона складається із двох рівних трикутників ABC і DEF та двох рівних трапецій $BCDE$, $ABEF$. Висоти трикутників і трапецій рівні між собою $BO = BK = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$ м. Площа поверхні покрівлі

$$S = 2 \cdot \left(\frac{12 \cdot 3\sqrt{5}}{2} + \frac{30+18}{2} \cdot 3\sqrt{5} \right) = 180\sqrt{5} \approx 402,5 \text{ м}^2.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити ексцентриситет орбіти руху Землі навколо Сонця, якщо диск Сонця спостерігається $32'32''$ (близько 1 січня) у перигелії (перигелій – найближча до Сонця точка орбіти планети) і $31'28''$ в афелії (близько 1 липня) (афелій – найбільш віддалена від Сонця точка орбіти планети).

Відповідь: $\varepsilon = \frac{c}{a} \approx 0,017$.

2. На площині маємо два джерела світла нерівної сили. Визначити геометричне місце точок цієї площини, рівно освітлене цими джерелами.

Відповідь: шукане геометричне місце точок – коло з центром $\left(c \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}; 0 \right)$, з радіусом $R = \frac{2c\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha - \beta}$, де α і β – сили джерел світла, $2c$ – відстань між ними.

3. Установити рівняння орбіти штучного супутника Землі, якщо найвища точка орбіти над Землею – 5000 км, а найнижча – 300 км. Землю вважати кулею із радіусом 6370 км.

Відповідь: $\frac{x^2}{9020^2} + \frac{y^2}{2290^2} = 1$.

4. Між пунктами A і B проходить автомагістраль. На плані місцевості ці пункти мають координати $(2; 4)$ і $(16; 0)$ (розміри у км) відповідно. Завод із координатами $(10; 14)$ необхідно з'єднати найкоротшою дорогою з автомагістраллю на цьому самому плані місцевості. Установити на автомагістралі точку входження до неї дороги із заводу та довжину цієї дороги.

Відповідь: $x = \frac{358}{53}$; $y = \frac{140}{53}$; $L = 12$ км.

5. Механізм технічного оброблення деталей складається з чотирьох попарно з'єднаних ланок AB , AD , CD , CB , які шарнірно з'єднані між собою як подано на рисунку 3.18.

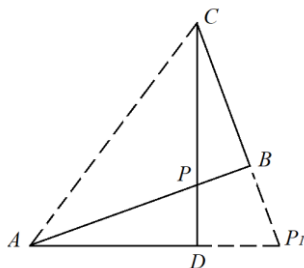


Рисунок 3.18 – Шарнірне з'єднання відрізків

Нехай ланка AB закріплена так, що ланки AD і CB обертаються навколо нерухомих центрів A і B . Визначити геометричне місце точок P і P_1 перетину малих ланок.

Відповідь: гіпербола з фокусами в точках A і B .

6. Промінь світла падає на поверхню води. Показник заломлення води $\frac{4}{3}$. Кут падіння променя дорівнює α . Взявши точку падіння за початок координат, а нормаль у ній до поверхні води за вісь ординат знайти рівняння упаданого та заломленого променів (вісь абсцис – в площині променів).

7. Для підготовки землепорядної документації необхідно відновити межі квадратної ділянки землі за трьома стовпами, що збереглися: одному – у центрі ділянки, і по одному на двох протилежних межах. Скласти рівняння

прямих, що відображають межі ділянки на площині, якщо на плані координати стовпів: $M(1; 6)$ – у центрі, $A(5; 9)$ і $B(3; 0)$ на сторонах.

Відповідь: $x + 2y - 23 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$,
 $2x - y - 6 = 0$, $2x - y + 14 = 0$.

8. Поверхня машинної фари утворена обертанням параболи навколо її осі симетрії. Діаметр дзеркала – 80 мм, глибина – 10 мм. Скласти рівняння поверхні обертання, обравши систему координат так, щоб її початок збігався з вершиною параболи, вісь ординат пройшла по дотичній до неї, а вісь абсцис – через фокус параболи в бік вершини.

9. Знайти висоту арки моста завдовжки 24 м, якщо арка має вигляд параболи, рівняння якої $x^2 = -48y$.

10. Викопано котлован параболічної форми з діаметром 80 м і глибиною 10 м. На якій відстані від нижньої точки котловану по центру розташований фокус параболи?

11. Аквалангіст перепливає річку шириною 100 м, постійно прямуючи на дерево, яке стоїть на іншому березі навпроти місця старту. Він пливе із швидкістю 3 м/с. Знайти рівняння траєкторії аквалангіста, якщо течія зносить його вниз по річці зі швидкістю 4 м/с.

12. Сталевий міст через річку має вигляд параболічної арки. Проліт арки – $29,9$ м, висота – 67 м. Скласти рівняння арки, взявши за вісь Ox дотичну у вершині, а за вісь Oy – вісь симетрії параболи. Побудувати фокус і директрису параболи.

Відповідь: $x^2 = 3,2y$; рівняння директриси $y = -0,4$ м.

13. Струмінь води витікає з конічного наконечника зі швидкістю \vec{v} під кутом α до горизонту. Скласти рівнян-

ня струменя, якщо початок системи координат розташовано на початку струменя, а напрям осі Ox – горизонтально.

Відповідь:
$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

14. Стальний трос підвішений за два кінці. Точки кріплення розташовані на однаковій висоті і відстань між ними – 20 м. Величина його прогину на відстані 2 м від точки кріплення по горизонталі – $14,4$ см. Установити величину прогину цього тросу всередині між точками кріплення, зважаючи, що трос має форму дуги параболи.

Відповідь: 40 см.

15. Джерело короткоінтервального звуку розташоване в невідомому пункті M . Звук досягає трьох спостережних пунктів неодноразомно: пункту A – на t_1 с пізніше, а пункту C на t_2 с пізніше, ніж пункту B . Установити місце знаходження пункту M , узявши швидкість звуку 330 м/с.

Відповідь: пункт M розташований на перетину правої гілки гіперболи $|AM| - |BM| = 330t_1$ м із фокусами A і B та лівої гілки гіперболи $|BM| - |CM| = -330t_2$ м із фокусами B і C .

16. У посудину налито рідину. Посудину разом із рідиною почали обертати навколо деякої осі з кутовою швидкістю ω . Установити форму поверхні рідини.

Відповідь: шукана поверхня – параболоїд обертання.

17. Дзеркальна поверхня прожектора утворена обертанням параболи навколо її осі симетрії. Діаметр дзеркала – 80 см, глибина – 20 см. На якій відстані від вершини параболи необхідно помістити джерело світла, якщо для відображення променів світла паралельним змутком він повинен розташуватися у фокусі параболи?

Відповідь: 40 см.

18. Ланцюг підвісного мосту має форму параболи $y = px^2$. Довжина цієї ділянки дорівнює 50 м, а прогин – 5 м. Установити величину кута α прогину в крайній точці мосту.

Відповідь: $\operatorname{tg}\alpha = 0,4$, $\alpha \approx 21^\circ 50'$.

19. Узявши форму Землі за еліпсоїд Красовського, визначити радіус 60 -ї паралелі.

Відповідь: $3189,122$ км.

20. Струмінь води досягає найбільшої висоти 4 м на відстані $0,5$ м від вертикалі, яка проходить через точку O виходу струменя. Знайти висоту струменя над горизонталлю на відстані $0,75$ м від точки O .

Відповідь: 3 м.

РОЗДІЛ 4 ВВЕДЕННЯ В МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

4.1. Функції одного аргументу

Унаслідок вимірювання таких фізичних величин, як час, довжина, об'єм, маса, швидкість, тиск, температура та ін. визначаються числові значення фізичних величин. Поняття змінної величини є основним поняттям диференційного та інтегрального числень.

Означення. *Змінною величиною* є величина, яка набуває різних числових значень. Величина, числові значення якої не змінюються, має назву сталої величини. Змінні величини зазвичай позначають буквами x , y , z , u , ... тощо. Сталі величини позначають буквами a , b , c , ... тощо. Величини, які зберігають своє значення в будь-якому явищі, зветься **абсолютними сталими**. Наприклад, відношення довжини кола до діаметра є абсолютно сталою величиною $3,14159\dots = \pi$.

Досліджуючи різні явища природи або розв'язуючи технічні проблеми, у математиці доводиться розглядати зміну однієї з величин залежно від зміни іншої величини.

Означення. Якщо кожному значенню змінної x , яке належить деякій області, відповідає одне визначене значення другої змінної y , то y є **функцією** від x , або у символічній формі $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ тощо.

Змінна x тут **незалежна змінна, або аргумент**. Буква f у символічній формі запису функціональної залежності $y = f(x)$ свідчить, що над змінною x треба виконати відповідні операції, щоб мати значення y .

Замість запису $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ іноді пишуть $y = y(x)$, $u = u(x)$. Тобто букви y , u тощо позначають і залежну змінну, і символ сукупності операцій над x . Запис $y = C$, де C – стала, позначає функцію, значення якої за будь-якого значення x одне й те ж саме і дорівнює C .

4.2. Практичне застосування функцій

Приклад 4.1. Башта водонапірної вежі має таку форму (рис. 4.1): на прямий круговий усічений конус із радіусами основ $2R$ (нижнього) і R (верхнього) та висотою R поставлений циліндр радіусом R і висотою $2R$; на циліндрі – півсфера радіусом R . Виразити площу S поперечного перерізу вежі як функцію відстані x перетину від нижньої основи конуса.

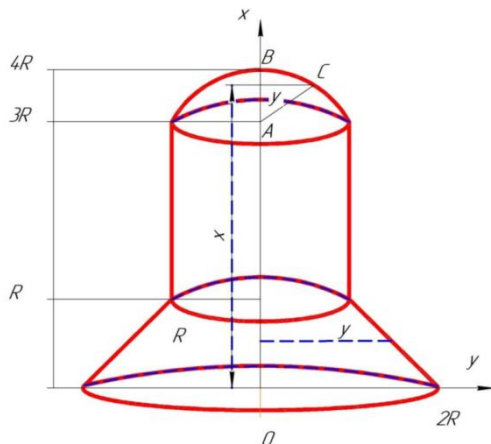


Рисунок 4.1 – Схема водонапірної вежі

Розв'язання. Поперечний переріз башти на будь-якій висоті є колом. Отже, площа S поперечного перерізу $S(x) = \pi r^2$. У разі змінних x від 0 до R маємо $S(x) = \pi (2R - x)^2$ (значення $r = y$ знаходимо з рівняння прямої $x + y = 2R$); за умови $R \leq x \leq 3R$ $S(x) = \pi r^2$, за умови $3R \leq x \leq 4R$, $S(x) = \pi [R^2 - (x - 3R)^2] = \pi(6Rx - x^2 - 8R^2)$.

Значення $r = y$ в останній рівності одержуємо з трикутника ABC : $BC^2 = AC^2 - AB^2$, де $BC = r = y$; $AC = R$; $AB = x - 3R$. Отже, сфера існування функції $S(x)$:

- 1) для усіченого конуса $0 \leq x \leq R$;
- 2) для циліндра $2R \leq x \leq 3R$;
- 3) для сфери $3R \leq x \leq 4R$.

Задачі для самостійної роботи

1. У геодезії існує припущення, що під час заглиблення на кожні $30,5$ м внутрішня температура Землі збільшується на 1 °С. Установити залежність глибини від температури, якщо на поверхні Землі температура дорівнює 10 °С, то на якій глибині вона досягне:

- 1) точки кипіння води (100 °С);
- 2) точки плавлення свинцю (334 °С);
- 3) точку плавлення заліза (1200 °С)?

Припускаючи, що ця залежність не змінюється до самого центру Землі, знайти температуру в центрі Землі, вважаючи, що радіус Землі дорівнює 6370 км.

Відповідь: 1) 2745 м; 2) $9,9$ км; 3) $36,3$ км. Температура в центрі Землі – $208\,852,5$ °С.

2. Два джерела світла з інтенсивністю I_1 та I_2 розташовані на відстані d один від одного. На якій відстані від першого джерела розташована точка, що лежить на прямій, яка з'єднує ці джерела і є однаково ними освітленою? Дослідити розв'язання для випадку $I_1 = I_2$, знайти залежність x

від $\frac{I_1}{I_2}$.

Відповідь: $\frac{I_1}{x^2} = \frac{I_2}{(d-x)^2}$; $x = kd \pm d\sqrt{k}$, де

$k = \frac{I_1}{I_2}$, $x = \frac{d}{2}$, за умови $I_1 = I_2$.

3. Перевезення вантажу від міста N до першого пункту, що розташований на відстані 100 км від N , коштуватиме 200 грн, а в інший пункт, що розташований вже на відстані 400 км – 350 грн. Установити залежність вартості перевезення у від відстані x , якщо вартість є лінійною функцією відстані (якість доріг не враховувати).

Відповідь: $x - 2y + 300 = 0$.

4. Електричний струм величиною I A розгалужується по двох дротах, опір яких R_1 і R_2 Ω відповідно. За яким законом повинно відбуватися розгалуження, щоб активна потужність, яка виділяється двома провідниками, була найменшою? Знайти цю потужність.

$$\text{Відповідь: } i_1 = \frac{IR_2}{R_1 + R_2}, i_2 = \frac{IR_1}{R_1 + R_2}, P_{\min} = \frac{I^2 R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

5. До вузла електричного кола підходять два струми: $i_1 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 45)$ і $i_2 = 14,1\sin(\omega t - 135)$. Знайти струм i_3 в нерозгалуженій частині кола.

$$\text{Відповідь: } i_3 = 0.$$

6. Струм в електричному колі формується від двох генераторів змінного струму. Величини струму в них визначаються

формулами $i_1 = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_1\right)$ і

$i_2 = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_2\right)$. Знайти: 1) моменти часу зникнення

сумарного струму; 2) моменти часу найбільшого (за абсолютною величиною) сумарного струму.

$$\text{Відповідь: } 1) t = \frac{T}{2} \left(k - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi} \right);$$

$$2) t = \frac{T}{2} \left(2k + \frac{1}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi} \right).$$

7. За температури 0 $^{\circ}C$ залізнична рейка має довжину $l_0 = 12,5$ м. У разі зростання температури відбувається теплове розширення рейки та її довжина, виражена в метрах, змінюється за законом $l(t) = l_0(1 + \beta \cdot t)$, де $\beta = 1,2 \cdot 10^{-5}$ (K^{-1}) – коефіцієнт теплового розширення; t – температура (у гра-

дусах Цельсія). За якої температури рейка подовжиться на 6 мм? Відповідь записати в градусах Цельсія.

Відповідь: $t = 40$ °C.

8. Знайти масу алюмінієвого дроту, з якого виготовлено лінію електропередачі довжиною 500 м, якщо за струму 15 А на кінцях лінії виникає різниця потенціалів 10 В.

Відповідь: $m = 28,35$ кг.

9. Для перевезення вантажу автомашині вантажопідйомністю 7,5 т довелося зробити 12 рейсів. Скільки рейсів потрібно зробити автомашині вантажопідйомністю 9 т для перевезення цього самого вантажу?

Відповідь: 10 рейсів.

10. Для стиснення пружини на 2 см треба докласти силу в 10 Н. Визначити енергію пружної деформації пружини в разі стискання на 4 см із недеформованого стану.

Відповідь: $E = 0,4$ Дж.

РОЗДІЛ 5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

5.1. Основні поняття та визначення

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x . Якщо змінна x отримає приріст Δx , то функція y отримає приріст $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , коли $\Delta x \rightarrow 0$, тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (5.1)$$

Для похідної функції $y = f(x)$ у точці x застосовують також позначення $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$. Функція, що має в даній точці кінцеву похідну, називається *диференційованою* в цій точці.

Геометричний зміст похідної. Побудуємо графік функції $y = f(x)$ та проведемо до нього дотичну через точку $M(x_0; f(x_0))$ (рис. 5.1). Позначимо α кут, утворений цією дотичною з віссю Ox , тоді $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, тобто похідна функції $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції в точці з абсцисою x_0 .

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M(x_0; f(x_0))$ має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (5.2)$$

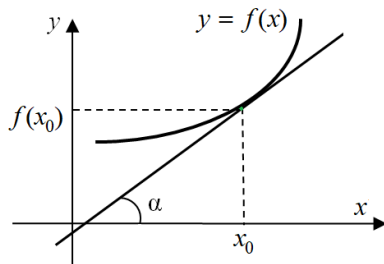


Рисунок 5.1 – Геометричний зміст похідної

Рівняння нормалі до кривої в цій самій точці записується у вигляді

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ за умови, що } f'(x_0) \neq 0.$$

Якщо $f'(x_0) = 0$, то рівняння дотичної $y = f(x_0)$, а рівняння нормалі $x = x_0$.

Механічний зміст похідної. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s = s(t)$. Тоді $v = s'(t)$, тобто похідна від шляху за часом є швидкістю руху точки.

Основні правила диференціювання

Якщо функції u і v диференційовані, тоді

1. $(cu)' = cu'$, $c = const$.

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

3. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$.

5. Якщо $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів, тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ теж диференційована і

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Це правило легко поширити на ланцюжок із будь-якого кінцевого числа функцій, що можна продиференціювати.

6. Якщо для функції, що диференціюється, $y = f(x)$ ($f'(x) \neq 0$), існує обернена функція $x = \varphi(y)$, тоді

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ або } x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

7. Якщо функція задана параметрично рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ тоді її похідна обчислюється за формулою

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ або } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

У таблиці 5.1, наведеною нижче: $c = const$; $\alpha \in R$; $a > 0, a \neq 1$; $u = u(x)$.

Таблиця 5.1

Похідні основних елементарних функцій	Похідні складних функцій
$c' = 0; x' = 1$	—
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

Продовження таблиці 5.1

Похідні основних елементарних функцій	Похідні складних функцій
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Зростання та спадання функції. Екстремум функції

Означення. Якщо для всіх точок інтервалу $(a; b)$ за умови $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то функція називається *зростаючою* (*спадною*) на $(a; b)$.

Ознаки зростання (спадання) функції

1. Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a; b)$ та зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для будь-яких $x \in (a; b)$.

2. Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a; b)$ і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), вона зростає (спадає) на $(a; b)$.

Означення. Точка x_0 називається точкою *максимуму* (*мінімуму*) функції, якщо існує такий окіл точки x_0 , що для будь-яких $x \neq x_0$ із цього околу $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Точки, у яких функція досягає максимуму або мінімуму, називаються *точками екстремуму* функції, а значення функції в цих точках називають *екстремальними*.

Функція, задана кривою на рисунку 5.2, у точках x_1 і x_3 досягає максимуму, а в точці x_2 – мінімуму.

Необхідна ознака екстремуму. У точці екстремуму похідна функції дорівнює нулю чи не існує.

Функція (рис. 5.2) у точках x_1 і x_2 має похідну, яка дорівнює нулю. Дотичні до кривої в цих точках паралельні осі. Але функція може досягати екстремуму й у точках, у яких похідної немає (точка x_3).

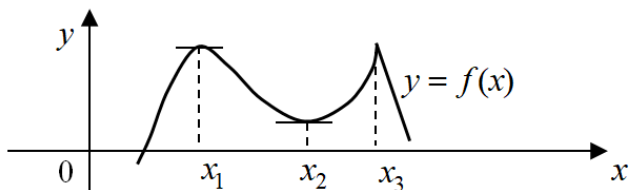


Рисунок 5.2 – Екстремум функції

Достатня ознака існування екстремуму. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на деякому інтервалі, що містить критичну точку x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 . Тоді, якщо в разі переходу через критичну точку похідна $f'(x)$:

- 1) змінює знак з $+$ на $-$, то в точці x_0 функція має максимум;
- 2) змінює знак з $-$ на $+$, то в точці x_0 функція має мінімум;
- 3) не змінює знак, то в точці x_0 немає екстремуму.

Схему дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної подано на рисунку 5.3.

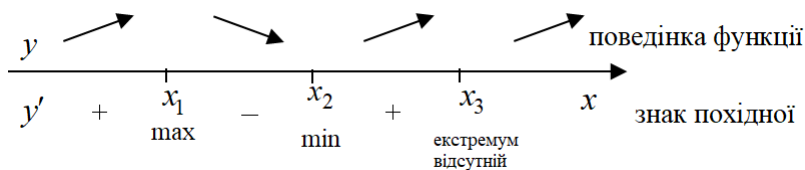


Рисунок 5.3 – Схема дослідження функції на екстремум

5.2. Практичне застосування похідної

Приклад 5.1. Установлено, що енергія, що віддає електричний елемент, визначається за формулою

$$W = \frac{E^2 R}{(r + R)^2},$$

де E – електрорушійна сила елемента; r – внутрішній опір; R – зовнішній опір. Яким має бути опір ланцюга, щоб енергія, яку віддає елемент W , була найбільшою?

Розв’язання. Оскільки нас цікавить опір ланцюга, то розглянемо функцію

$$W(R) = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}.$$

Зрозуміло, $R > 0$. Досліджуємо цю функцію на екстремум

$$W'(R) = \frac{E^2 r - E^2 R}{(r + R)^3}.$$

Отже, $W'(R) = 0$ за умови $R = r$. Визначимо знак другої похідної в цій точці

$$W''(R) = E^2 \left(\frac{2R - 4r}{(r + R)^4} \right), \quad W''(R) \Big|_{R=r} = E^2 \left(\frac{2r - 4r}{(2r)^4} \right) < 0.$$

Отже, за умови $R = r$ енергія, що віддає елемент, буде найбільшою.

Приклад 5.2. Електричне коло складається із двох паралельно з’єднаних опорів. За якого співвідношення між цими опорами опір всього ланцюга максимальний, якщо в разі послідовного з’єднання цих опорів він дорівнює R ?

Розв'язання. Нехай r – опір електричного кола, що складається із двох паралельно з'єднаних опорів x і y . Тоді

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{r}.$$

З іншого боку, з умови задачі маємо $x + y = R$. Подамо одну із змінних $y = R - x$. Отримали функцію

$$r(x) = \frac{x(R-x)}{R},$$

де $0 < x < R$.

Досліджуємо цю функцію на екстремум

$$r'(x) = \frac{R-2x}{R} = 0.$$

Отже, $x = \frac{R}{2}$.

Визначимо знак другої похідної в цій точці

$$r''(x) \Big|_{x=\frac{R}{2}} = -\frac{2}{R} < 0, \quad \frac{R}{2} \in (0; R).$$

Отже, $r(x)$ набуває максимального значення за умови $x = \frac{R}{2}$.

Приклад 5.3. Електронагрівальний прилад споживає потужність від джерела струму, E . Р. С. якого дорівнює E , а внутрішній опір і опір підвідних дротів у сумі дорівнюють r . Який опір R повинен мати прилад, щоб в ньому виділялася максимальна потужність?

Розв'язання. Згідно із законом Ома для повного кола струм дорівнює

$$I = \frac{E}{R+r},$$

а згідно із законом Джоуля – Ленца потужність, яка виділяється на опорі R , дорівнює

$$P(R) = I^2 R = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}.$$

Досліджуємо на екстремум

$$P'(R) = \frac{E^2 (r - R)}{(R + r)^3}.$$

Отже, $P'(R) = 0$ за умови $R = r$. Визначимо знак другої похідної в цій точці

$$P''(R) = \frac{-E^2 (4r - 2R)}{(R + r)^4} < 0$$

за умови $R = r$. Найбільше значення корисної потужності дорівнює

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4r}.$$

Приклад 5.4. Витрата пального легкового автомобіля (літр на 100 км) залежно від швидкості x (км/год) під час руху на четвертій передачі приблизно описує функція f

$$f(x) = 0,0017x^2 - 0,18x + 10,2; \quad x \geq 30.$$

За якої швидкості витрата пального буде найменшою? Яка найменша величина витрати?

Розв'язання. Досліджуємо витрату пального за допомогою похідної

$$f'(x) = 0,0034x - 0,18.$$

Отже, $f'(x) = 0$ за умови $x \approx 53$. Визначимо знак другої похідної в критичній точці $f''(x) = 0,0034 > 0$. Отже, витрата пального за швидкості 53 км/год буде найменшою.

$f(53) \approx 5,43$ л, тобто на 100 км буде потрібно $5,43$ літра бензину за руху зі швидкістю 53 км/год.

Приклад 5.5. Як із круглої колоди радіуса R випилити прямокутну балку так, щоб кількість відходів була найменшою (рис. 5.4).

Розв'язання. Кількість відходів визначається площею тієї частини в перетині колоди, яка не входить у прямокутник.

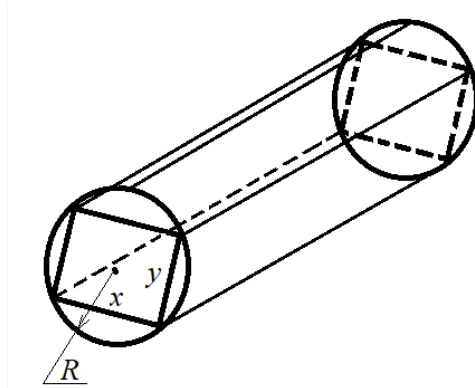


Рисунок 5.4

Тому завдання можна переформулювати: у коло радіуса R вписати прямокутник найбільшої площі. Якщо x і y – сторони прямокутника, S – площа прямокутника, то $S = xy$. Якщо прямокутник вписаний у коло, тоді

$$x^2 + y^2 = 4R^2.$$

Отже,

$$S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}, \text{ де } x > 0.$$

Знайдемо похідну $S'(x)$

$$S'(x) = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

Отже, $S'(x) = 0$ за умови $x = \sqrt{2}R$. Досліджуємо функцію в цій точці на екстремум, для цього визначимо знак другої похідної в цій точці

$$S''(x) = \frac{-12R^2x + 2x^3}{\sqrt{(4R^2 - x^2)^3}}, \text{ то } S''(\sqrt{2}R) < 0.$$

Отже, функція в цій точці досягає свого максимального значення. Отже, кількість відходів буде найменшою, якщо в перетині – квадрат.

Приклад 5.6. Консервна банка має форму прямого кругового циліндра. Яким має бути співвідношення між діаметром основи і висотою циліндра, щоб за даного об'єму V на виробництво банки пішла найменша кількість жерсті?

Розв'язання. Оптимізується величина S – площа повної поверхні циліндра. Подамо її як функцію радіуса r основи циліндра. Якщо H – висота циліндра, то з формули $V = \pi r^2 H$ одержимо

$$H = \frac{V}{\pi r^2}.$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r H = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Нам потрібно з'ясувати, за якого значення $r > 0$ функція

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

набуває найменшого значення. Для цього знайдемо похідну. Маємо

$$S'(r) = 2\pi \cdot 2r - 2V \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}.$$

Отже, $S'(r) = 0$ за умови $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Це єдина критична точка. Визначимо знак другої похідної в цій точці

$$S''(r) = \frac{4\pi r^3 + 4V}{r^3}, \quad S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0.$$

Отже, у цій точці функція досягає найменшого значення. Далі маємо

$$H = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{Vr}{\pi r^3} = \frac{Vr}{\pi \cdot \frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

Це означає, що висота циліндра дорівнює діаметру основи. Отже, за даного об'єму на виробництво банки піде найменша кількість жерсті, якщо банку виготовити у вигляді рівностороннього циліндра (циліндр називається рівностороннім, якщо його осьовий переріз – квадрат).

Приклад 5.7. Вікно має форму прямокутника, який завершений напівкругом (рис. 5.5). Периметр вікна дорівнює 15 м. За якого радіуса півкруга R вікно буде пропускати найбільшу кількість світла?

Розв'язання. Нехай R – радіус півкруга, сторону прямокутника AB позначимо за a , тоді сторона BC буде $2R$. Вікно буде пропускати найбільшу кількість світла, якщо його площа буде максимальною. Площа вікна складається із суми двох площ: площі прямокутника та площі півкруга, подана формулою $S = 2R \cdot a + \frac{1}{2} \pi R^2$.

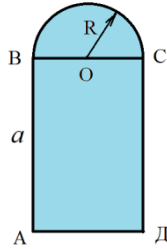


Рисунок 5.5 – Ескіз вікна

Периметр вікна подано формулою $P = 2R + 2a + \pi R$.

За умовою задачі периметр дорівнює 15 м, тоді

$$2R + 2a + \pi R = 15.$$

З цієї формули виразимо a і підставимо у формулу площі

$$a = 7,5 - R - \frac{\pi R}{2};$$

$$S = 2R \cdot \left(7,5 - R - \frac{\pi R}{2} \right) + \frac{1}{2} \pi R^2 = 15R - 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}.$$

Областю визначення одержаної функції буде $R \in \left(0; \frac{15}{2 + \pi} \right)$.

Крім того, необхідне виконання умови $S(R) > 0$, тобто

$$15R - 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2} > 0,$$

звідси $R \in \left(0; \frac{15}{2 + \frac{\pi}{2}} \right)$. Цей проміжок входить в область

визначення, тому остаточно $R \in \left(0; \frac{15}{2 + \pi} \right)$.

Знайдемо похідну функції S

$$S' = 15 - 4R - \pi R = 15 - (4 + \pi)R.$$

Похідна дорівнює нулю в точці $R_1 = \frac{15}{4 + \pi}$. Оскільки друга похідна від'ємна $S'' = -(4 + \pi)$, то точка R_1 є точкою максимуму функції S , водночас значення площі вікна набуває свого найбільшого значення. Тому вікно буде пропускати найбільшу кількість світла за умови

$$R = \frac{15}{4 + \pi} \approx 2,1 \text{ м.}$$

Задачі для самостійної роботи

1. Під час заряджання конденсатора зв'язок між його зарядом і напругою визначається виразом $q = 0,4 \cdot 10^{-6} u^4 - 10^{-12} \cdot u^2$, де q – заряд у кулонах; u – напруга конденсатора у вольтах. Знайти динамічну ємність конденсатора за напруги 50 кВ (динамічна ємність $c = \frac{dq}{du}$).

2. Верхній кінець сходів довжиною 6 м сповзає по вертикальній стіні. Знайти відношення швидкостей верхнього і нижнього кінців сходів, коли сходи утворюють зі стіною кут у 60° .

3. Насос подає воду в циліндричний бак діаметром 6 дм . Висота підйому води збільшується на 1 дм за секунду. Знайти швидкість заповнення бака.

4. Тіло масою $m = 5 \text{ кг}$ рухається за законом $S(t) = t^2 + 2t + 3$. Знайти імпульс сили через 2 хв від початку руху.

5. Напруга конденсатора змінюється за синусоїдальним законом $u = U_m \sin \omega t$. Обчислити величину зарядного струму i , що проходить через конденсатор, якщо $i = \frac{dq}{dt}$, $q = cu$, $c = \text{const}$, $U_m = \text{const}$.

6. Вагон наземної залізниці, що проходить на висоті 9 м над поверхнею землі, у цей момент розташований над вагоном трамваю, що рухається. Напрямки їхнього руху утворюють прямий кут. Швидкість першого вагона – 12 м/с, а другого – 6 м/с. З якою швидкістю буде збільшуватися відстань між вагонами через 6 с?

7. Дріт високовольтної лінії передачі електричного струму має проліт між опорами довжиною 80 м. Рівняння лінії провисання дроту $y = 0,01x^2$. Який кут утворюють між собою дроти біля кожної опори?

8. У разі неполяризованого первинного випромінювання інтенсивність рентгенівських променів, що розсіяні за напрямком під кутом 2α до первинного променя, визначається формулою Томсона (для одного електрона)

$$I = I_0 \frac{e^2}{m^2 c^2 r^2} \cdot \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2}$$
, де I_0 – інтенсивність первинних променів; e – заряд електрона; m – маса електрона; r – відстань від центра розсіювання до точки спостереження; c – швидкість світла. Визначити напрямок максимальної інтенсивності рентгенівських променів.

9. Струмопровідний коаксіальний кабель передавання інформації виготовлений із мідного дроту в ізоляції. Якщо через x позначити відношення радіуса мідного дроту до товщини ізоляції, то технічна швидкість передавання дискретних сигналів цього кабелю подана формулою

$v = Ax \cdot \ln \frac{1}{x}$ (A – коефіцієнт пропорційності). За якого x швидкість передавання інформації буде найбільшою?

10. Визначити, яким повинен бути опір електричного нагрівача r , що включений в електричний ланцюг з опором R для того, щоб у ньому виділилася найбільша кількість теплоти Q , якщо $Q = ri^2$, а $i = \frac{E}{R+r}$. Для розрахунку задані величини $E = 220 \text{ V}$, $R = 0,001 \text{ Ом}$ (i – величина електричного струму; E – напруга в електричній мережі).

11. Переріз шлюзового каналу має форму прямокутника, що завершується напівколом. Периметр перерізу дорівнює 45 м . За якого значення радіуса напівкруга R переріз каналу матиме найбільшу площу?

Відповідь: $R = \frac{45}{4 + \pi} \text{ м}$.

12. Знайти найменшу довжину стріли будівельного крану, що необхідний для проведення монтажу плит перекриття будівлі висотою H і шириною a , за умови, що кран може рухатися вздовж фасаду будівлі паралельно йому, висота основи стріли крана над землею h , проміжок між стіною будівлі і стрілою крана завжди не менше ніж m . Кран повинен подавати деталі так, щоб його гачок був точно над серединою будівлі. Розв'язати задачу загальною і зробити розрахунок за умови $H = 125 \text{ м}$, $m = 15 \text{ м}$, $a = 10 \text{ м}$, $h = 116 \text{ м}$.

Відповідь: $23,3 \text{ м}$.

РОЗДІЛ 6 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Невизначений інтеграл і його властивості

Первісною функцією для функції $f(x)$ на проміжку X називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює цій функції, тобто

$$F'(x) = f(x) \quad (6.1)$$

для будь-яких $x \in X$. Наприклад, $\sin x$ є первісною функцією для будь-якого дійсного x , оскільки $(\sin x)' = \cos x$, $\ln x$ є первісна функція $\frac{1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$, тому що

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\text{табл. 6.1}).$$

Якщо $F(x)$ і $\Phi(x)$ – дві первісні для однієї і тієї самої функції $f(x)$, тоді $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – стала.

Сукупність всіх первісних $F(x) + C$ функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (6.2)$$

Функцію $f(x)$ називають підінтегральною функцією, а $f(x)dx$ – підінтегральним виразом.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, або $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$, або $\int df(x) = f(x) + C$.
3. $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$ ($c = \text{const}$).
4. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

5. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, а $u = u(x)$ – диференційована функція, тоді $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблиця 6.1

№ пор.	Основні інтеграли	№ пор.	Основні інтеграли
1	$\int du = u + C$	2	$\int 0 du = C$
3	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	4	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C,$ $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
5	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,$ ($a > 0, a \neq 1$)	6	$\int e^u du = e^u + C$
7	$\int \sin u du = -\cos u + C$	8	$\int \cos u du = \sin u + C$
9	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	10	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
11	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$	12	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u+a}{u-a} \right + C$
13	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$	14	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
15	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln \left u + \sqrt{a^2 + u^2} \right + C$	16	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 - a^2} \right + C$
17	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C$	18	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
19	$\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$	20	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$

Заміна змінної в невизначеному інтегралі (Метод підстановки)

Під час обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної застосовують два типи підстановок $u = \phi(x)$ або $x = \psi(t)$, де $\phi(x)$ і $\psi(t)$ – деякі функції. Після підстановки отриманий інтеграл може бути простіше за вихідний. Частинним випадком методу заміни змінної є *метод підведення під знак диференціалу*, що ґрунтується на формулі

$$\phi'(x)dx = d\phi(x).$$

Наприклад, $\frac{1}{x}dx = d \ln x$, $x dx = d \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} dx^2$.

6.2. Визначений інтеграл і його властивості

Визначений інтеграл від функції $f(x)$ у межах від a до b позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

За умови $f(x) > 0$, то геометрично визначений інтеграл виражає площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x)$, віссю Ox і двома прямими $x = a$ і $x = b$. Ця фігура називається *криволінійною трапецією*.

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. 2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
3. $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$ ($c = const$).

$$4. \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ для будь-якого дій-$$

сного c .

6. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровані на відрізку $[a; b]$, де $a < b$, і $f(x) \leq \varphi(x)$ для всіх $x \in [a, b]$, тоді

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

7. Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a; b]$, тоді знайдеться хоча б одна точка $c \in [a, b]$, така, що

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Методи обчислення визначеного інтеграла

Якщо $F(x)$ – одна з первісних безперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$, то справедлива така формула *Ньютона – Лейбніца*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (6.3)$$

Заміна змінної в певному інтегралі здійснюється за формулою

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (6.4)$$

де $x = \varphi(t)$ має безперервну похідну, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

6.3. Практичне застосування визначеного інтеграла. Схеми застосування визначеного інтеграла

Нехай потрібно знайти значення будь-якої геометричної чи фізичної величини A (площа фігури, об'єм тіла, тиск рідини на вертикальну пластину тощо), пов'язаної з відрізком $[a; b]$ зміни незалежної змінної x . Передбачено, що ця величина A адитивна, тобто така, що в разі розбиття відрізка $[a; b]$ точкою $c \in (a; b)$ на частини $[a; c]$ та $[c; b]$ значення величини A , що відповідає всьому відрізку $[a; b]$, дорівнює сумі її значень, відповідних $[a; c]$ та $[c; b]$.

Для знаходження цієї величини A можна керуватися однією із двох схем: I схема (або *метод інтегральних сум*) і II схема (або *метод диференціалу*).

Перший метод ґрунтується на визначенні певного інтеграла. Алгоритм роботи за цією схемою такий:

1. Точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ розбити відрізок $[a; b]$ на n частин. Відповідно до цього величина A розіб'ється на n «елементарних доданків» ΔA_i ($i = 1, \dots, n$): $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$.

2. Подати кожен «елементарний доданок» у вигляді добутку певної функції (визначеної з умови завдання), обчисленої в довільній точці відповідного відрізка на його довжину: $\Delta A_i \approx f(c_i) \Delta x_i$.

Під час знаходження наближеного значення ΔA_i допустимі деякі спрощення: дугу на малій ділянці можна замінити хордою, що її стягують кінці; змінну швидкість на малому відрізку ділянки можна приблизно вважати постійною тощо.

Отримаємо наближене значення величини A у вигляді інтегральної суми

$$A \approx f(c_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i. \quad (6.5)$$

3. Шукана величина A дорівнює границі інтегральної суми, тобто

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.6)$$

Зазначений «метод сум», заснований на уявленні інтеграла як суми нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків.

Другий метод є дещо видозміненою схемою першого методу і називається «метод диференціала» або «метод відкидання нескінченно малих вищих порядків». Алгоритм такий:

1. На відрізку $[a; b]$ вибираємо довільне значення x і розглядаємо змінний відрізок $[a; x]$. У цьому відрізку величина A стає функцією x : $A = A(x)$, тобто вважаємо, що частина шуканої величини A є невідомою функцією $A(x)$, де $x \in [a; b]$ – один із параметрів величини A .

2. Знаходимо головну частину приросту ΔA за умови зміни x на малу величину $\Delta x = dx$, тобто знаходимо диференціал dA функції $A = A(x)$: $dA = f(x)dx$, де $f(x)$ визначається з умови завдання і є функцією змінної x (тут також можливі різні спрощення).

3. Вважаючи, що $dA \approx \Delta A$ за умови $\Delta x \rightarrow 0$, знаходимо шукану величину через інтегрування dA в межах від a до b

$$A(b) - A(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.7)$$

Для розв'язання фізичних задач цього розділу зручно застосовувати формули, подані в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2

Величина	Обчислення похідної	Обчислення інтеграла
A – робота; F – сила; N – потужність; x – переміщення; t – час	$F(x) = A'(x)$ $N(t) = A'(t)$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$ $A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$
m – маса тонкого стрижня; x – координата точки стрижня; ρ – лінійна густина	$\rho(x) = m'(x)$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$
q – електричний заряд; I – сила струму; t – час	$I(t) = q'(t)$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
S – переміщення; v – швидкість; t – час	$v(t) = S'(t)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

Приклад 6.1. Сила струму в ланцюзі з конденсатором змінюється за законом $I = I_0 \cos t$, де амплітуда струму $I_{max} = 10$ А. Знайти заряд, що накопичується на пластинках конденсатора з початкового моменту часу $t_0 = 0$ до моменту часу: а) $t = \frac{\pi}{2}$ (с); б) $t = \pi$ (с).

Розв'язання. За визначенням сила струму є похідною від величини заряду за часом. Щоб знайти заряд, потрібно знайти інтеграл

$$q = \int_0^t I dt.$$

Унаслідок цього заряд на пластинах конденсатора

$$\text{а) } q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 10 \cos t dt = 10 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 10K; \quad \text{б) } q = \int_0^{\pi} 10 \cos t dt = 10 \sin t \Big|_0^{\pi} = 0K.$$

Конденсатор першу чверть періоду заряджається, другу чверть періоду розряджається, і до кінця напівперіоду заряд дорівнює нулю.

Приклад 6.2. Електричний заряд e_0 , зосереджений у точці $x = 0$, відштовхує заряд e з точки $x = a$ в точку $x = b$. Обчисліть роботу сили відштовхування. Вказівка: згідно із законом Кулона сила взаємодії зарядів у вакуумі дорівнює

$$F = \frac{e_0 e}{x^2}, \text{ де } x \text{ – відстань між зарядами.}$$

$$\text{Розв'язання } A = e_0 e \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = -e_0 e \frac{1}{x} \Big|_a^b = e_0 e \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Приклад 6.3. Знайдіть роботу за проміжок часу $\left[0; \frac{2\pi}{\omega} \right]$ змінного струму, що змінюється за формулою $I = I_0 \sin \omega t$, якщо опір ланцюга дорівнює R .

Розв'язання. Потужність у разі постійного струму виражається формулою $W = I^2 R$. Тому за формулою з таблиці 6.2 маємо

$$A = I_0^2 R \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t dt = \frac{I_0^2 R \pi}{\omega}.$$

Отже, середня потужність змінного струму дорівнює

$$W_{cp} = \frac{A}{2\pi/w} = \frac{I_0^2}{2}.$$

Приклад 6.4. Оглядний колодезь для прокладання оптоволоконного кабелю, нижня частина якого має форму усіченого конуса, а верхня частина (люк) – форму циліндра, виготовлений із бетону з густиною матеріалу $2,45 \text{ т/м}^3$. Знайти об'єм колодезя і масу витраченого на його виготовлення бетону (розміри об'єкта подано на рисунку 6.1).

Розв'язання. Нижня частина колодезя являє собою тіло, що утворилося за допомогою обертання навколо осі Ox фігури, яка обмежена лініями

$$y_1 = 1,2 - 0,24x, \quad y_2 = 1,28 - 0,24x, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2,5.$$

Розміри для зручності обчислення подано в міліметрах.

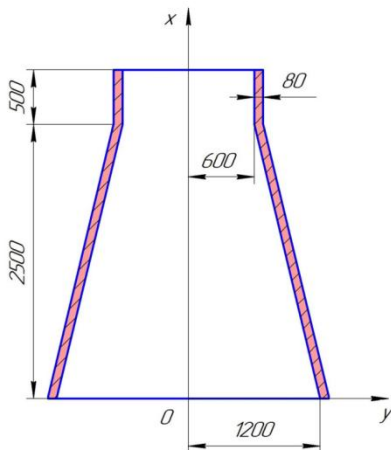


Рисунок 6.1 – Схема колодезя [7]

Об'єм цього тіла

$$V = \pi \int_0^{2,5} (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_0^{2,5} (0,1984 - 0,0384x) dx \approx 1,18 \text{ м}^3.$$

Об'єм верхньої частини (люка)

$$V_2 = \pi(0,68^2 - 0,6^2) \cdot 0,5 \approx 0,16 \text{ м}^3.$$

Сумарний об'єм колодязя

$$V = V_1 + V_2 \approx 1,34 \text{ м}^3.$$

Маса бетону, витраченого на будівництво колодязя,
 $m = V \cdot \rho = 1,34 \cdot 2,45 \approx 3,28 \text{ т}.$

Задача 6.5. Знайти роботу, яку необхідно витратити для розтягнення пружини на 10 см , якщо відомо що для її подовження на 1 см необхідно прикласти силу у $2 \cdot 10^3 \text{ Н}$.

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнт жорсткості пружини. За законом Гука $F = ks$ за умови $F = 2 \cdot 10^3 \text{ Н}$ та $s = 0,01 \text{ м}$ знаходимо $k = 2 \cdot 10^5$. Знайдемо роботу за відповідною формулою (див. табл. 6.2.)

$$A = 2 \cdot 10^5 \int_0^{0,1} x dx = 2 \cdot 10^5 \frac{0,1^2}{2} = 10^3 \text{ Дж}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Сила струму в провіднику змінюється за законом $I(t) = e^{-t} + 2t$. Який заряд пройде через поперечний переріз провідника за період часу від другої до шостої секунди?

Відповідь: $Q \approx 32,1 \text{ Кл}.$

2. Під час обертання рамки в однорідному магнітному полі виникає електрорушійна сила індукції, що змі-

нюється з часом за законом $\varepsilon_i(t) = 50 \cos \frac{\pi t}{120}$. Знайти значення магнітного потоку, що пронизує рамку в кінці першої хвилини обертання.

Відповідь: $\Phi = 600/\pi$ Вб.

3. Залізничний вагон масою 20 т рухається зі швидкістю $v = 8,5$ м/с до бар'єра з буфером. Він надає спротив, який є пропорційним стисканню, причому в разі стискання на 1 см необхідна сила 50 кН. На скільки сантиметрів стиснуться пружини буфера, поки вагон зупиниться?

Відповідь: $x = 38,4$ см.

4. Відро циліндричної форми, що повністю наповнено трансформаторним мастилом, було нахилено в такий спосіб, що позначилася половина його дна. Обчислити, скільки вилосося мастила, якщо радіус відра $R = 10$ см, а висота $h = 30$ см.

Відповідь: $V = 3\pi - 2 \approx 7,42$ дм³.

5. Рятувальний круг, поперечний переріз якого круг, можна розглянути як тіло, що отримано обертанням круга навколо деякої осі. Знайти площу поверхні рятувального круга, якщо його зовнішній діаметр 75 см, а діаметр поперечного перерізу 12 см.

Відповідь: $Q = 756$ см².

6. Дерев'яний циліндр із площею основи $S = 4000$ см² і висотою 50 см плаває на поверхні води. Яку роботу необхідно виконати, щоб витягнути циліндр з води, зберігаючи вертикальне положення осі? Питома густина дерева $\rho = 0,8$ г/см³.

Відповідь: $A \approx 314$ Дж.

7. Кінець порожньої труби, що повністю занурена горизонтально у воду, закритий заслінкою. Знайти силу тиску, що відчуває заслінка, якщо її діаметр дорівнює 2 см, а центр є на глибині 15 м від поверхні води.

Відповідь: $P = 150\,000\pi H$.

8. Резервуар для змішування бетону має форму параболоїда обертання з висотою $H = 2$ м і радіусом основи $R = 1$ м. Знайти місткість резервуара та площу його поверхні.

Відповідь: $V = 0,5\pi \cdot R^2 H = 3,14$ м³,

$$S = \frac{\pi R}{6H^2} \left(\sqrt{(4H^2 + R^2)^3} - R^3 \right) \text{ м}^2.$$

9. На резистор із постійним опором R подано змінну напругу $U = U_0 \sin \omega t$. Яку постійну напругу потрібно подати на резистор R , для того щоб кількість теплоти, яка виділилася протягом часу $T = 2\pi/\omega$, дорівнювала кількості теплоти, що виділяється під час подання змінної напруги на той самий резистор протягом такого самого часу?

Відповідь: $U_0/\sqrt{2}$.

10. Електричне коло має в початковий момент часу опір R Ом, який у подальшому рівномірно зростає зі швидкістю v Ом/с. У коло подано постійну напругу U В. Знайти заряд, що пройшов через коло за час t .

Відповідь: $q = \frac{U}{v} \ln \frac{R + vt}{R}$.

РОЗДІЛ 7 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

7.1. Основні означення

Змінна величина u називається *функцією двох змінних* x та y , якщо кожній сукупності їхніх значень $(x; y)$ із даної області відповідає єдине певне значення u . Змінні x та y називаються аргументами чи незалежними змінними. Функціональна залежність позначається

$$u = f(x, y) \text{ або } u = F(x, y). \quad (7.1)$$

Аналогічно визначаються функції трьох і більшої кількості аргументів.

Розглянемо функцію $u = f(x, y, z)$. Дамо приріст Δx аргументу x , тоді, вважаючи змінні y і z сталими, одержимо похідну

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = f'_x(x, y, z), \quad (7.2)$$

яка називається *частинною похідною функції u* за змінною x . Аналогічно визначаються частинні похідні функції u

за змінними y і z та позначаються $\frac{\partial u}{\partial y}$ і $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Для одержання частинних похідних можна скористатися звичайними формулами диференціювання.

Градiєнтом функції $u = f(x, y, z)$ у точці (x_0, y_0, z_0) називається вектор, проєкціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні цієї функції

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (7.3)$$

Напрямок градієнта функції в точці визначає напрямок максимальної швидкості зростання функції в цій точці.

Похідною функції $u = f(x, y)$ у точці M у цьому напрямку $l = \overrightarrow{MM_1}$ називається

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{|M_1M| \rightarrow 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|M_1M|}, \quad (7.4)$$

де $f(M)$ і $f(M_1)$ – значення функції в точках M і M_1 .

Якщо функція u диференційована, справедлива формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha, \quad (7.5)$$

де α – кут, утворений вектором l та віссю Ox (рис. 7.1).

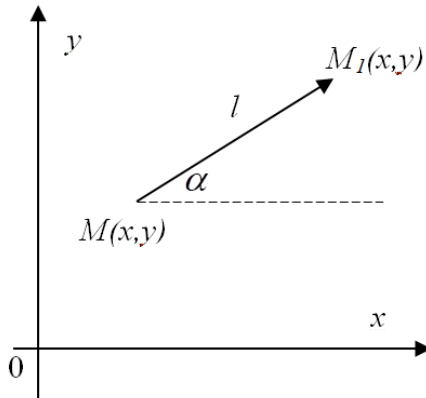


Рисунок 7.1

Аналогічно визначається похідна у цьому напрямі l для функції трьох аргументів $u = f(x, y, z)$. У цьому разі

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (7.6)$$

де α, β, γ – кути між напрямком l та відповідними координатними осями. Похідна функції в цьому напрямі характеризує швидкість зміни функції в цьому напрямі. Знак мінус свідчить, що функція в даній точці та в даному напрямку зменшується.

Частинними похідними другого порядку функції називаються частинні похідні від частинних похідних першого порядку. Для похідних другого порядку використовують позначення, наприклад

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y).$$

Аналогічно визначають і позначають похідні порядку, вищого за другий. Якщо частинні похідні, які підлягають обчисленню, безперервні, результат багаторазового диференціювання не залежить від порядку диференціювання.

Екстремум функції багатьох змінних. Нехай функція $u = f(x, y)$ визначена в деякій області D , точка $M(x_0, y_0) \in D$. Кажуть, що функція $f(x, y)$ має **максимум (мінімум)** у точці M , якщо для всіх відмінних від неї точок у досить малому околі точки (x_0, y_0) виконується нерівність $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (або $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ відповідно). Максимум або мінімум функції називається її **екстремумом**. Точки, у яких функція $f(x, y)$, що диференціюється, може досягати екстремуму (**стаціонарні точки**), знаходять за допомогою розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x; y) = 0, \\ f'_y(x; y) = 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Формули (7.7) є **необхідними умовами** існування екстремуму. Достатні умови екстремуму полягають у такому: нехай $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ і $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$. Складемо дискримінант

$$\Delta = AC - B^2. \quad (7.8)$$

Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $M(x_0, y_0)$, а саме максимум, якщо $A < 0$ (або $C < 0$), і мінімум, якщо $A > 0$ (або $C > 0$);

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $M(x_0, y_0)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то питання наявності екстремуму залишається відкритим (потрібне подальше дослідження).

Застосування повного диференціала функції до наближених обчислень. За досить малих $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$ існує наближена рівність $\Delta u \approx du$ і з повного приросту функції випливає, що

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \quad (7.9)$$

7.2. Практичне застосування функції багатьох змінних

Приклад 7.1. Канал, що підводить воду до турбіни, має в перерізі рівнобедрену трапецію, площа якої дорівнює Q . Визначити глибину каналу H і кут укосу α так, щоб його змочений периметр був найменшим. (Змочений периметр – лінія зіткнення води зі стінками каналу).

Розв'язання. Змочений периметр каналу (рис. 7.2) дорівнює

$$L = 2a + \frac{2H}{\sin \alpha}.$$

З формули для площі трапеції

$$Q = \frac{4a + 2H \operatorname{ctg} \alpha}{2} \cdot H = (2a + H \operatorname{ctg} \alpha) \cdot H$$

знаходимо a і, підставляючи знайдене значення у вираз для L , матимемо

$$L = \frac{Q}{H} - H \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2H}{\sin \alpha}.$$

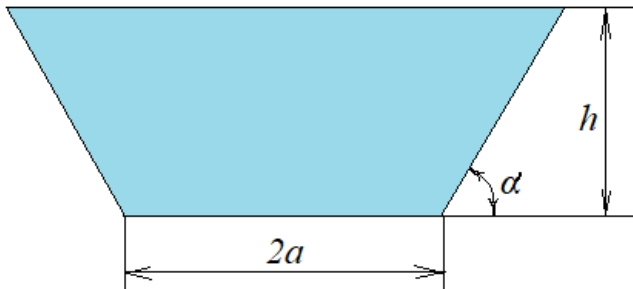


Рисунок 7.2 – Схематичне креслення перерізу каналу

Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial L}{\partial H} = -\frac{Q}{H^2} - \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{Q}{H^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = H \operatorname{cosec}^2 \alpha - \frac{2H \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{H(1 - 2 \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

і, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{Q}{H^2} = 0, \\ \frac{H(1 - 2 \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = 0. \end{cases}$$

Отримуємо $H = \sqrt[4]{Q}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Визначимо значення

похідних другого порядку для знайдених значень H та α .

Оскільки $\frac{\partial^2 L}{\partial H^2} = \frac{2Q}{H^3}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial H \partial \alpha} = \frac{1 - 2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$,

$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = \frac{2H(1 - \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^3 \alpha}$, то за умови $H = \sqrt[4]{Q}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$,

ці похідні відповідно мають вигляд

$$A = \frac{6}{\sqrt{Q} \cdot \sqrt[4]{3}}, \quad B = 0, \quad C = \frac{4}{3} \sqrt{Q} \sqrt[4]{3}.$$

Величина $\Delta = AC - B^2 = 8 > 0$, $A > 0$, отже, за знайдених значеннях H та α функція $L(H; \alpha)$ досягає мінімуму, тобто змочений периметр каналу є найменшим $L_{\min} = 2\sqrt{Q} \cdot \sqrt[4]{3}$.

Відповідь: $L_{\min} = 2\sqrt{Q} \cdot \sqrt[4]{3}$.

Приклад 7.2. Наскільки треба подовжити радіус променя радара кругового сектора огляду з радіусом $R = 30$ м і з центральним кутом $\varphi = 80^\circ$, щоб компенсувати зміну площі покриття в разі зменшення кута на $15'$?

Розв'язання. Площа кругового сектора виражається формулою $S = \frac{\pi R^2 \varphi}{360}$. Замінюючи збільшення площі ΔS її

повним диференціалом, одержимо $\Delta S \approx \frac{\partial S}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \Delta \varphi$.

За умовою задачі в разі зменшення центрального кута φ і збільшенні радіуса R величина $\Delta S = 0$, тобто

$$\frac{\partial S}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \Delta \varphi = 0.$$

Звідки $\Delta R = -\frac{(\partial S / \partial \varphi) \Delta \varphi}{\partial S / \partial R}$. Знаходячи частинні по-

хідні $\frac{\partial S}{\partial \varphi}$ і $\frac{\partial S}{\partial R}$ та підставляючи їхні значення у вирази для

ΔR , матимемо $\Delta R = -\frac{R \Delta \varphi}{2 \varphi}$.

Вважаючи $R = 30$ м, $\varphi = 80^\circ$, $\Delta \varphi = -15' = -(1/4)$, знайдемо $\Delta R = -\frac{30(-1/4)}{2 \cdot 80} = \frac{3}{64} \approx 0,05$ м.

Отже, щоб в разі зменшення центрального кута $\varphi = 80^\circ$ на $15'$ площа кругового сектора залишилася незмінною, необхідно його радіус $R = 30$ м подовжити на 5 см.

Відповідь: 5 см.

Приклад 7.3. Із прямокутного листа жерсті шириною a (рис. 7.3 а) необхідно виготовити жолоб призматичної форми в такий спосіб, щоб поперечний переріз жолоба мав найбільшу площу. Яка ширина нахиленої частини жолоба і кут нахилу?

Розв'язання. Поперечний переріз жолоба являє собою рівнобічну трапецію (рис. 7.3 б). Позначимо за S площу перерізу, за x – ширину нахиленої грані жолоба, через α – кут нахилу. Тоді нижня основа трапеції дорівнює $(a - 2x)$, а верхня – $(a - 2x + 2x \cdot \cos \alpha)$. Висота трапеції $(x \cdot \sin \alpha)$.

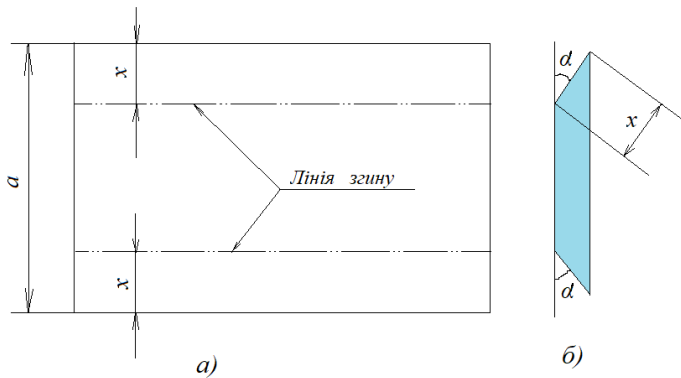


Рисунок 7.3 – Схема згинання листа жерсті

Водночас функцію площі поперечного перерізу подано у вигляді

$$S = ax \sin \alpha - 2x^2 \sin \alpha + x^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Маємо

$$S'_x = a \sin \alpha - 4x \sin \alpha + 2x \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$S'_\alpha = ax \cos \alpha - 2x^2 \cos \alpha + x^2 \cos 2\alpha.$$

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin \alpha (a - 4x + 2x \cos \alpha) = 0, \\ x(a \cos \alpha - 2x \cos \alpha + x \cos 2\alpha) = 0, \end{cases}$$

і знаходимо, що $x = \frac{a}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Отже, поперечний пере-

різ жолоба матиме максимальне значення за $x = \frac{a}{3}$,

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Відповідь: $x = \frac{a}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Приклад 7.4. Як зміниться повна поверхня закритого циліндричного паливного бака з радіусом основи 2 м та висотою 10 м , якщо радіус основи збільшити на 1 см , а висоту на 3 см ?

Розв'язання. Шукана зміна повної поверхні бака ΔS приблизно дорівнює повному диференціалу функції

$$S = 2\pi(R^2 + RH), \text{ тобто } \Delta S \approx \frac{\partial S}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial S}{\partial H} \Delta H.$$

$$\text{Оскільки } \frac{\partial S}{\partial R} = 2\pi(2R + H), \quad \frac{\partial S}{\partial H} = 2\pi R,$$

то $\Delta S \approx 2\pi((2R + H) \Delta R + R \Delta H)$.

Після підстановки значень $R = 2\text{ м}$, $H = 10\text{ м}$, $\Delta R = 0,01\text{ м}$, $\Delta H = 0,03\text{ м}$ одержимо

$$\Delta S \approx 2\pi(14 \cdot 0,01 + 2 \cdot 0,03) = 0,4\pi = 1,2566\text{ м}^2.$$

Отже, в разі збільшення радіусу основи на 1 см і висоти на 3 см повна поверхня закритого циліндричного бака збільшується приблизно на $1,2566\text{ м}^2$. Точне збільшення повної поверхні бака становить $1,2592\text{ м}^2$. Відносна похибка в разі заміни повного збільшення повним диференціалом становить приблизно $0,2\%$.

Відповідь: збільшується приблизно на $1,2566\text{ м}^2$.

Приклад 7.5. За яких розмірів прямокутного басейну даної місткості V на облицювання його стін і дна знадобиться найменша кількість матеріалу? Знайти площу облицювальної поверхні.

Розв'язання. Басейн має форму прямокутного паралелепіпеда. Позначимо його розміри через x , y , z . Оскільки об'єм $V = x \cdot y \cdot z$ задано, то $z = \frac{V}{xy}$. Площа поверхні басейну

$$S = 2(xz + yz) + xy = 2(x + y) \frac{V}{xy} + xy = 2V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + xy.$$

Завдання зводиться до знаходження мінімуму функції $S(x; y)$, причому за змістом задачі $x > 0$, $y > 0$.

$$\text{Розв'язуючи систему рівнянь} \quad \begin{cases} S'_x = -\frac{2V}{x^2} + y = 0, \\ S'_y = -\frac{2V}{y^2} + x = 0, \end{cases} \quad \text{знаходи-}$$

мо критичну точку $x = y = \sqrt[3]{2V}$. Перевіримо виконання

$$\text{достатніх умов екстремуму} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}.$$

Отже, $A = 2$, $B = 1$, $C = 2$, $\Delta = AC - B^2 = 3 > 0$, $A > 0$.

Функція S за умови $x = y = \sqrt[3]{2V}$ має мінімум. Водночас

$$z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \quad S_{\min} = 3\sqrt[3]{4V^2}.$$

Отже, басейн даної місткості, на облицювання якого потрібна мінімальна кількість матеріалу, має квадратне дно та глибину, удвічі меншу за сторону квадратного дна. Площа облицювальної поверхні

$$S = 3\sqrt[3]{4V^2} \text{ м}^2.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Індуктивність одношарової короткої котушки на низькій частоті приблизно визначається формулою

$$L = \frac{0,04\omega^2 r^2}{9r + 10l},$$

де r – радіус витків, l – довжина котушки, ω – число витків котушки. Зважаючи, що ω – постійна величина, побудувати область визначення індуктивності L .

2. В електричному колі під час проходження електричного струму по провіднику з опором R виділяється теплота за законом $Q = 0,24I^2 R t$. У кінці цього провідника

приєднані паралельно між собою ще три провідники, опір яких R_1, R_2, R_3 відповідно. Підібрати такі значення опорів R_1, R_2, R_3 , щоб струм, що надходить у цю систему, надавав мінімальні теплові втрати.

Відповідь: $I_1 + I_2 + I_3 = I - \text{const}$. Кількість теплоти, що виділяється, $Q = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$,

$$I_i = \frac{I}{R_i \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

3. Два центри розташування радіоелектронного обладнання розташовані в пунктах P_1 і P_2 , які відстоять від двох прямих, що перетинаються під прямим кутом (які зручно взяти за координатні осі Ox і Oy) на відстані $x_1 = a_1, y_1 = b_1, x_2 = a_2, y_2 = b_2$ (усі числа додатні). Між пунктами P_1 і P_2 прокладається оптоволоконно так, щоб спочатку з P_1 кабель прийшов у вузол Q_1 , від нього – у вузол Q_2 , а потім у пункт P_2 (рис. 7.4). Де на перпендикулярних прямих необхідно розташувати вузли Q_1 і Q_2 , щоб довжина оптоволоконного кабелю була найменшою?

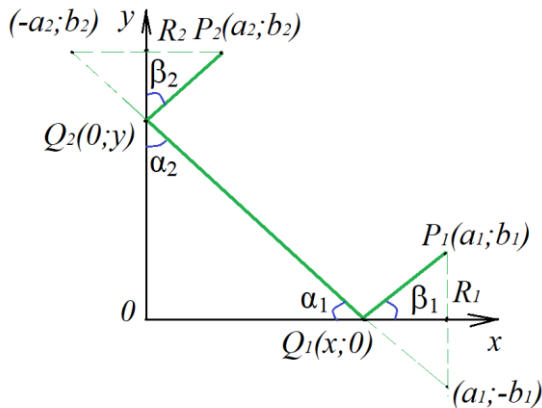


Рисунок 7.4 – Схема розташування оптоволоконного кабелю

Відповідь: $Q_1\left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1 - b_2}; 0\right)$, $Q_2\left(0; \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2}\right)$.

4. Для насипання піску виготовлено резервуар у формі конуса заввишки $H = 3$ м, радіусом основи 1 м. Як зміниться об'єм резервуару, якщо висоту збільшити на $0,3$ м, а радіус основи зменшити на $0,1$ м?

Відповідь: об'єм зменшиться на $0,1\pi$ м³.

5. Промінь світла, що виходить із точки P_1 деякого середовища зі швидкістю c_1 , після заломлення проходить через точку P_2 зі швидкістю c_2 . Водночас кут падіння α_1 і кут заломлення α_2 пов'язані співвідношенням $a_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + a_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = b$. Сформулювати закон заломлення, зауваживши, що світло поширюється в найкоротший час.

Відповідь: $t = \frac{a_1}{c_1 \cos \alpha_1} + \frac{a_2}{c_2 \cos \alpha_2}$; $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

6. Корабель розміщений у пункті O ; у пункті A , який розташований у 30 милях північніше від пункту O , і в пункті B , що в 30 милях на схід від пункту O , розміщено ще по одному кораблю. Вони повинні прибути в пункт P , що розташований північно-східніше від пункту O . Установити положення цього пункту в такий спосіб, щоб відстань, яку пройшли всі кораблі, була найменшою.

Відповідь: Якщо взяти точку O за початок системи координат, тоді координати точки P $(10; 10)$.

7. Вартість побудови 1 м² фасаду будівлі дорівнює a грн, усіх стін – b грн, а даху – c грн. Установити, за яких співвідношень довжини фасаду x , ширини будівлі – y , і висоти z за заданої кубатури V загальна вартість побудови всіх стін і даху (разом із перекриттям) будівлі що опису-

ється рівнянням $S = a\frac{V}{y} + b\frac{V}{y} + 2b\frac{V}{x} + cxy$, буде найменшою.

Відповідь: $x = \sqrt[3]{\frac{4b^2V}{c(a+b)}}; \quad y = \sqrt[3]{\frac{V(a+b)^2}{2bc}};$

$$z = \sqrt[3]{\frac{Vc^2}{2b(a+b)}}.$$

8. Горизонтальна складова H напруженості магнітного поля земного магнетизму визначається за формулою

$$H = \frac{A}{T\sqrt{\sin\varphi}},$$

де T – період коливання маятника; φ – кут відхилення його і A – деяка стала величина. Абсолютна похибка під час визначення тривалості одного коливання дорівнює 10^{-3} с. Кут відхилення можна встановити, беручи до уваги наведення та відлік із точністю до $0,5'$. Знайти спричинену цим похибку під час встановлення величини H . Знайти ΔH за умови: $\varphi = 25^\circ$; $T = 3,5^\circ$; $\Delta\varphi = 1' = 9 \cdot 10^{-5}$ рад.; $\Delta t = 10^{-3}$ с.

Відповідь: $\Delta H = \left| \frac{H}{T} \right| \Delta T + \frac{1}{2} |H \operatorname{ctg} \varphi| \Delta \varphi; \quad \Delta H = 10^{-3}$ од.

Гаусса.

9. В електронній теорії для простішого випадку атомів, які не впливають відчутно один на одного і мають достатньо мале згасання, можна записати

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi N \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \text{де} \quad E = E_0 \sin 2\pi\nu t; \quad x = A \sin 2\pi\nu t;$$

$$A = \frac{eE_0}{4m\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2)}; \quad \varepsilon - \text{діелектрична проникність; } E_0 - \text{амплітуда змушувальної гармонійної хвилі; } m - \text{маса електро-}$$

на; Ne – загальний заряд електронів в одиниці об'єму; v – частота коливань. Знайти $\varepsilon(v)$.

$$\text{Відповідь: } \varepsilon(v) = 1 + \frac{Ne^2}{m\pi(v_0^2 - v^2)}.$$

10. Для розташування обладнання електротехнічного призначення необхідно сформувати відкритий металічний прямокутний контейнер об'ємом $62,5 \text{ см}^3$. Установити розміри цього контейнера, за яких на його виготовлення буде витрачена найменша кількість матеріалу.

Відповідь: висота – $2,5 \text{ см}$, ширина – 5 см , довжина – 5 см .

РОЗДІЛ 8 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

8.1. Основні поняття та означення

Означення. Звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку називається співвідношення виду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (8.1)$$

де x – незалежна змінна; y – шукана функція змінної; $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – похідні шуканої функції; F – відома функція своїх аргументів.

Вважають, що похідна $y^{(n)}$ насправді входить у вираз (8.1), а величини $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ можуть і не входити до нього.

Означення. Порядком диференціального рівняння n , називається найвищий порядок похідної, що входить до цього рівняння.

Диференціальні рівняння із змінними, що розділяються. Диференціальне рівняння з розділеними змінними записують як

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0. \quad (8.2)$$

У цьому рівнянні один доданок залежить тільки від x , а другий – від y . Проінтегрувавши почленно це рівняння, отримуємо $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c$ – його загальний інтеграл.

Рівняння із змінними, що розділяються, має вигляд

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0. \quad (8.3)$$

Рівняння (8.3) легко звести до рівняння (8.2) за допомогою почленного ділення його на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$. Одержимо

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0,$$

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = c \text{ – загальний інтеграл.}$$

Однорідні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається однорідним, якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції одного порядку (вимірювання). Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією першого порядку (вимірювання), якщо під час множення кожного її аргументу на довільний множник λ уся функція помножитьься на λ , тобто $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$. Однорідне рівняння може бути зведено до вигляду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. За допомогою підстановки $\frac{y}{x} = u$ ($y = ux$) однорідне рівняння приводиться до рівняння із змінними, що розділяються, щодо до нової функції u .

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати як

$$y' + p(x) \cdot y = g(x). \quad (8.4)$$

Метод Бернуллі. Рішення рівняння шукають як добуток двох функцій, тобто за допомогою підстановки $y = u \cdot v$ ($y' = u'v + v'u$).

Рівняння Я. Бернуллі. Рівняння виду

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n, \quad (8.5)$$

де $n \neq 0, n \neq 1$, називається рівнянням Бернуллі. Це рівняння розв'язують за допомогою методу Бернуллі.

Однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння виду

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0, \quad (8.6)$$

де p і q сталі. Частинні рішення рівняння (8.6) шукатимемо у вигляді $y = e^{kx}$, де k – деяке число. Диференціюючи цю функцію двічі і підставляючи вирази для похідних y, y', y'' у рівняння (8.6), одержимо

$$\begin{aligned} k^2 \cdot e^{kx} + p \cdot k \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} &= 0, \\ e^{kx} (k^2 + p \cdot k + q) &= 0, \quad e^{kx} \neq 0, \\ k^2 + p \cdot k + q &= 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Рівняння (8.7) називається характеристичним рівнянням диференціального рівняння (8.6). Під час розв'язання характеристичного рівняння (8.7) можливі три випадки.

Випадок 1. Корені k_1 та k_2 рівняння (8.7) дійсні та різні: $k_1 \neq k_2$. У цьому разі рішенням рівняння є функції $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$. Отже, загальне рішення рівняння (8.7) має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}. \quad (8.8)$$

Випадок 2. Корені k_1 і k_2 рівняння (8.7) дійсні та рівні: $k_1 = k_2 = k$. У цьому разі рішенням рівняння є функції $y_1 = e^{kx}$ і $y_2 = x e^{kx}$. Отже, загальне рішення рівняння (8.7) має вигляд

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}. \quad (8.9)$$

Випадок 3. Корені k_1 і k_2 рівняння (8.7) комплексні: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. У цьому разі окремими рішеннями рівняння (8.7) є функції $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ і $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$. Отже, загальне рішення рівняння (8.7) має вигляд

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x). \quad (8.10)$$

Під час розв'язання багатьох інженерних задач, завдань фізики та техніки, хімії та біології, інших наук не завжди вдається знайти пряму залежність між величинами, що описують той чи інший еволюційний процес. Однак здебільшого можна встановити зв'язок між шуканими характеристиками досліджуваного явища (функціями) та швидкостями їхньої зміни щодо інших змінних, тобто знайти рівняння, до яких входять похідні невідомих функцій. Це диференціальні рівняння.

8.2. Практичне застосування диференціальних рівнянь

Здебільшого методика розв'язання прикладних задач із застосуванням звичайних диференціальних рівнянь зводиться до такого:

- 1) детальніший розгляд умови задачі та складання схеми або графічної ілюстрації, яка пояснює її зміст;
- 2) складання диференціального рівняння процесу, що розглядається;
- 3) інтегрування рівняння та встановлення загального розв'язку;
- 4) визначення частинного розв'язку задачі на основі заданих початкових умов;
- 5) визначення, за необхідності, додаткових параметрів (коефіцієнтів пропорційності) із застосуванням додаткових умов задачі;

б) установлення загального закону процесу, що досліджується, та знаходження числових значень відповідних величин;

7) аналіз відповіді і перевірка відповідності початкових умов задачі.

Розглянемо приклади, що ілюструють ефективність застосування цих математичних об'єктів до розв'язання прикладних технічних задач.

Приклад 8.1 (диференціальне рівняння сили змінного струму в разі, якщо в електричному ланцюгу є самоіндукція та омичний опір). В електричному ланцюгу опір дорівнює R , сила струму I збуджується електрорушійною силою E . Самоіндукція дорівнює L . Нехай відомо, що електрорушійна сила змінюється за законом $E = E_0 \sin \omega t$, де E_0 і ω – сталі величини. Необхідно визначити силу струму в ланцюгу в момент t за умови, що в початковий момент часу $t = 0$ сила струму $I_0 = 0$.

Розв'язання. Відомо, що для сили струму I та опору R втрата напруги дорівнює IR . Для ланцюга із самоіндукцією L втрата напруги дорівнює $L \frac{dI}{dt}$. Тому повна втрата напруги для всього ланцюга дорівнює

$$E = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Замінюючи електрорушійну силу E її значенням, можна бачити, що пошук сили струму I призводить до інтегрування лінійного диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \sin \omega t.$$

Розв'яжемо це рівняння методом підстановки Бернуллі. Нехай $I = uv$, де $u(t)$ і $v(t)$ є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L}v &= 0, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{E_0}{Lv(t)} \sin \omega t.\end{aligned}$$

Після розв'язку першого рівняння одержимо $v = e^{-\frac{R}{L}t}$. Підставляючи це значення у друге рівняння, одержимо рівняння для визначення $u(t)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{E_0}{L} \sin(\omega t) \cdot e^{\frac{R}{L}t}.$$

Провівши інтегрування, знаходимо

$$u = \frac{E_0}{L} \int \sin(\omega t) \cdot e^{\frac{R}{L}t} dt + C.$$

Тоді загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E_0}{L} \int \sin(\omega t) \cdot e^{\frac{R}{L}t} dt + C \right).$$

Але, оскільки

$$\int \sin(\omega t) \cdot e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{Le^{\frac{R}{L}t} (R \sin(\omega t) - L\omega \cos(\omega t))}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Тоді

$$I = \frac{E_0 (R \sin(\omega t) - L\omega \cos(\omega t))}{R^2 + \omega^2 L^2} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

За заданих початкових умов $t = 0$, $I_0 = 0$ знайдемо сталу C

$$C = \frac{E_0 L \omega}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Тому

$$I = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R \sin(\omega t) - L \omega \cos(\omega t) + L \omega e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

Подамо одержане рішення в більш зручному для проведення обчислення вигляді.

Нехай $\frac{L\omega}{R} = \operatorname{tg} \varphi$, де кут φ називають зміщенням фази. Одержимо

$R \sin(\omega t) - L \omega \cos(\omega t) = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t - \varphi)$, що приводить до

$$I = \frac{E_0 L \omega e^{-\frac{R}{L} t}}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{E_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Сила струму, як доводить ця рівність, складається із двох частин. Перша має характер згасання (множник $e^{-\frac{R}{L} t}$), а друга – періодичний характер (множник $\sin(\omega t - \varphi)$).

Приклад 8.2 (вентиляція виробничого приміщення).

Розглянемо вентиляцію виробничого приміщення об'ємом $V \text{ м}^3$, у якому проводиться технологічний процес із виділенням і накопиченням шкідливої речовини в кількості Z одиниць за годину. Обмін повітря протягом однієї години становить $M \text{ м}^3/\text{год}$, причому припливне повітря теж має шкідливі домішки концентрацією μ на 1 м^3 . Знайти концентрацію z (на 1 м^3) шкідливих речовин у приміщенні

через час t від початку роботи, якщо початкове значення z_0 (залишок забруднень у повітрі від роботи в попередню добу).

Розв'язання. За короткий період часу dt концентрація z збільшиться на dz . Загальна кількість шкідливих речовин становить Vdz . Вона складається із речовин, які нанесено припливним повітрям μMdt , та речовин, що були виділені під час технологічного процесу Zdt за винятком шкідливих домішок, що були видалені вентиляцією за проміжок часу dt у кількості $Mzdt$. Тому загальне рівняння вентиляції має вигляд

$$Vdz = M\mu dt + Zdt - Mzdt,$$

$$\frac{Vdz}{M\mu + Z - Mz} = dt.$$

Проведемо інтегрування, тоді одержимо

$$-V \int \frac{d(M\mu + Z - Mz)}{M\mu + Z - Mz} = \int dt + C_1,$$

або $\ln(M\mu + Z - Mz) = -\frac{M}{V}(t + C_1)$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння знаходимо у вигляді

$$M\mu + Z - Mz = Ce^{-\frac{M}{V}t}.$$

За початкових умов $t = 0$ і $z = z_0$ одержимо

$$C = M\mu + Z - Mz_0.$$

Знайдену сталу інтегрування підставляємо в загальний розв'язок і одержимо відповідь

$$z = \left(\mu + \frac{z}{M} \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{M}{V}t} \right) + z_0 e^{-\frac{M}{V}t}.$$

Приклад 8.3 (розподіл температури всередині огорожувальних поверхонь). Цегляна стіна товщиною 30 см має температуру на внутрішній поверхні $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, а на зовнішній – $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (рис. 8.1). Знайти залежність температури всередині стіни від відстані до її зовнішньої межі і кількість теплоти, яку віддає назовні 1 м^2 стіни протягом доби.

Розв'язання. Кількість теплоти, що проходить через одиницю поверхні за одиницю часу, дорівнює $k \frac{dt}{dx}$, де t – температура, k – коефіцієнт теплопровідності (для цегли – $0,2\text{ Ккал/м} \cdot \text{год} \cdot \text{град}$), x – відстань до зовнішньої межі.

Температурний градієнт $\frac{\partial t}{\partial x}$ характеризує інтенсивність зниження температури в напрямку теплового потоку перпендикулярно до поверхні стіни.

Нехай температура всередині стіни є функцією відстані до зовнішньої поверхні x , $t = t(x)$. Інтенсивність зниження температури по нормалі до поверхні стіни визначається похідною $\frac{\partial t}{\partial x}$. Візьмемо на відстані x від зовнішньої межі стіни шар товщиною dx з постійною (усередині цього елементарного шару) температурою t . Кількість теплоти Q_1 , що проходить крізь цей шар, буде постійною і визначатися за формулою

$$Q_1 = -k \frac{\partial t}{\partial x} S.$$

Оскільки поверхня $S = 1\text{ м}^2$, тоді $Q_1 = -k \frac{\partial t}{\partial x}$.

Загальне диференціальне рівняння має вигляд

$$t = -\frac{Q_1}{k} x + C.$$

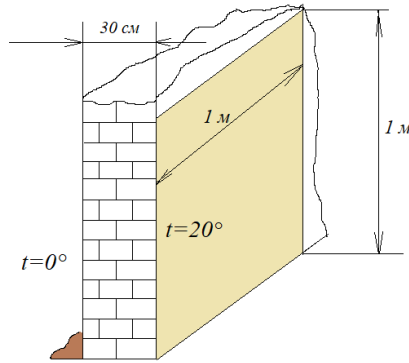


Рисунок 8.1

Початкові умови: $x = 0$, $t = 0$, звідки згідно з рівнянням $C = 0$.

Тоді залежність зміни температури всередині стіни можна подати як $t = -\frac{Q_1}{k}x$.

Додаткові умови $x = 0,3$ м, $t = 20$ °С, $k = 0,2$ Ккал/м · год · град дає можливість визначити з рівняння величину Q_1

$$Q_1 = -k \frac{t}{x} = -\frac{0,2 \cdot 20}{0,3} = -\frac{40}{3}.$$

Підставляючи знайдене значення Q_1 , одержимо залежність

$$t = \frac{40}{3 \cdot 0,2} x = \frac{200}{3} x.$$

Кількість теплоти, що виділяє ззовні 1 м² стіни протягом доби (24 години), установлюється як

$$Q = 24, Q_1 = -320 \text{ ккал.}$$

Приклад 8.4. Трубопровід теплової магістралі радіуса R_1 захищений спеціальною ізоляцією. Радіус ізольованої труби дорівнює R_2 (рис. 8.2), температура труби T_1 , температура зовнішньої оболонки T_2 ($T_2 < T_1$), коефіцієнт теплопровідності ізоляційного матеріалу λ . Знайти розподіл температури всередині ізоляції, а також кількість теплоти, що віддає один погонний метр трубопроводу магістралі.

Розв'язання. Оберемо циліндричну систему координат, як подано на рисунку 8.2. Труба та ізоляція перебувають у стаціонарному тепловому стані. Причому температура в кожній точці ізоляції є функцією, що залежить від віддалення від осі трубопроводу, від r , $T = f(r)$.

Згідно із законом теплопровідності Фур'є кількість теплоти, що надходить із зовні кожну секунду, описує залежність

$$Q = -\lambda S(r) \frac{dT}{dr} = \text{const},$$

де $S(r) = 2\pi r l$ – площа перерізу трубопроводу на відстані r (l – довжина труби). Підставляючи замість $S(r)$ його значення у вираз для Q і розділюючи змінні, одержимо рівняння

$$dT = -\frac{Q}{2\pi\lambda} \cdot \frac{dr}{r},$$

інтегруючи яке, приходимо до відповіді у вигляді

$$T = -\frac{Q}{2\pi\lambda} \cdot \ln|r| + C.$$

Сталу інтегрування C знайдемо на підставі умов $T = T_1$ за умови $r = R_1$.

$$C = T_1 + \frac{Q}{2\pi\lambda} \ln R_1.$$

Тоді

$$T = T_1 - \frac{Q}{2\pi d\lambda} \ln \frac{r}{R_1}.$$

Коефіцієнт $\frac{Q}{2\pi d\lambda}$ знайдемо з умови $T = T_2$ за умови

$$r = R_2. \text{ Маємо } \frac{Q}{2\pi d\lambda} = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Формула для T перетворюється до виду

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_1}.$$

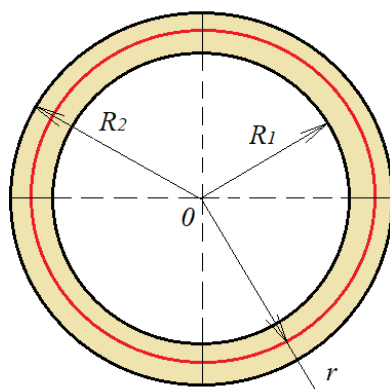


Рисунок 8.2 – Поперечний переріз труби теплової магістралі

Одержана формула являє собою закон розподілу температури всередині ізоляції. Використовуючи цю формулу, знайдемо кількість теплоти, яку віддає тепла магістраль за одну секунду

$$Q \Big|_{r=R_2} = \frac{2\pi\lambda(T_1 - T_2)}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Наприклад, якщо радіус труби дорівнює $R_1 = 0,1$ м, товщина ізоляції $0,1$ м ($R_2 = 0,2$ м), температура труби 180 °С, температура зовнішньої поверхні теплопроводу 10 °С, коефіцієнт теплопровідності ізоляційного матеріалу $\lambda = 0,05$ Вт/(м · К), тоді один погонний метр теплопроводу ($l = 1$ м) віддає за секунду кількість теплоти $Q \approx 77$ Дж. Кількість теплоти, що віддає один погонний метр теплопроводної магістралі протягом доби $Q \approx 6653$ кДж.

Приклад 8.5. Рідина під тиском p тече в теплопроводі, довжина якого l є великою щодо радіуса R поперечного перерізу ($l \gg R$). Знайти швидкість руху рідини.

Розв'язання. Розглянемо рух рідини, що встановився в теплопроводі. Швидкість руху v у міру віддалення від стінок теплопроводу і наближення до його осі збільшується (рис. 8.3).

Дослідимо всередині потоку рідини плоский майданчик, площиною S , що паралельний осі теплопроводу (рис. 8.3 а).

Верхні шари рідини над S діють прискорювально на нижні. Нижні пригальмовують рух верхніх.

За законом Ньютона, сила F , що діє на майданчик, дорівнює $kS \frac{dv}{dy}$, де k – коефіцієнт пропорційності.

Розглянемо далі потік рідини, що має форму порожнистого циліндра (рис. 8.3 б). Оскільки величина dr мала, то можна припустити, що швидкості частинок рідини в циліндрі однакові.

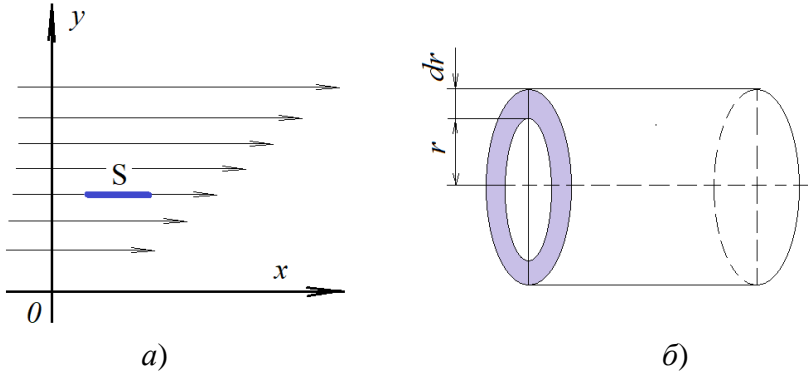


Рисунок 8.3 – Схема трубопроводу

Нехай довжина циліндра 1. Тоді на внутрішню поверхню площиною $2\pi r \cdot 1$ діє сила $2\pi r k \left(\frac{dv}{dr} \right)$. На зовнішню поверхню діє сила $-2\pi r k \left(\frac{dv}{dr} \right) - d \left(2\pi r k \frac{dv}{dr} \right)$. Сума цих сил дорівнює $-2\pi k d \left(r \frac{dv}{dr} \right)$.

Під час руху рідини сила тертя дорівнює силі, яка пересуває порожній циліндр вздовж його осі. Ця сила дорівнює різниці тиску p на кінцях порожнього циліндра довжиною 1. Отже,

$$-2\pi k d \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 2\pi p r dr.$$

Знайдемо диференціальне рівняння процесу у вигляді

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} = -\frac{p}{k}.$$

Це неповне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння із раціональними коефіцієнтами. Зробимо підстановку $z = \frac{dv}{dr}$.

Унаслідок цього отримаємо лінійне рівняння першого порядку

$$\frac{dz}{dr} + \frac{z}{r} = -\frac{p}{k}.$$

Його загальний розв'язок подамо у вигляді

$$z = \frac{dv}{dr} = -\frac{p}{2k}r + \frac{C_1}{r}.$$

Проведемо інтегрування ще раз і одержимо

$$v = -\frac{p}{2k}r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Стала інтегрування C_1 повинна дорівнювати нулю, оскільки швидкість течії рідини по осі труби не може бути нескінченно великою (за умови $r = 0$ швидкість обертається в нескінченність). Стала інтегрування C_2 визначається з початкової умови: за умови $r = R$ і $v = 0$ (швидкість течії навколо стінок труби дорівнює нулю). Звідки $C_2 = \frac{pR^2}{4k}$.

Отже, швидкість руху рідини встановлюється за формулою

$$v = \frac{p}{4k}(R^2 - r^2).$$

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти закон зміни яскравості світла після його проходження через скляну пластину, якщо під час проходження через шар скла товщиною $x_1 = 2,5$ мм яскравість

світла L_1 становить 30 кд/м^2 , а на поверхні шару ($x_1 = 0 \text{ мм}$) початкова яскравість становить $L_0 = 100 \text{ кд/м}^2$ (рис. 8.4). Промені падають на поверхню пластини під будь-яким кутом, а його зміна відображається на величині коефіцієнта k .

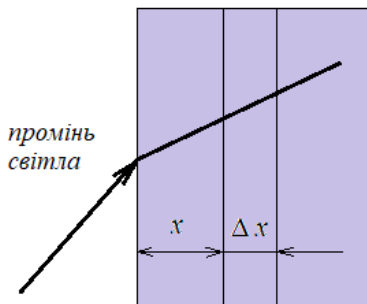


Рисунок 8.4

Відповідь: $I = 100e^{-0,481x}$.

2. Швидкість розпаду радію прямо пропорційна його масі. Установити, який процент маси m_0 радію розпадеться через 200 років, якщо відомо, що період напіврозпаду радію (період за який розпадеться половина наявної маси речовини) дорівнює 1590 років.

Відповідь: через 200 років розпадеться лише 8,5 % радію.

3. Ізольованому провіднику наданий заряд $Q_0 = 10 \text{ Кл}$. Унаслідок недосконалості ізоляції провідник поступово втрачає свій заряд. Швидкість втрати електричного заряду в цей момент пропорційна наявному заряду провідника. Який заряд залишиться в провіднику через 10 хв, якщо за першу хвилину втрачено 100 Кл?

Відповідь: через 10 хв у провіднику залишиться заряд $Q = 1000 \cdot 0,9^{10} \approx 348,7 \text{ Кл}$.

4. У резервуар глибиною 4 м, який має в поперечному перерізі форму квадрата зі стороною 6 м, стікає вода із швидкістю 10 м^3 за хвилину. Знайти час наповнення резервуара, якщо одночасно з нього витікає вода через квадратний отвір зі стороною $1/12 \text{ м}$, наявний на дні резервуара.

Відповідь: $t \approx 14,7 \text{ хв}$.

5. До 10 кг солі додали 90 л води і встановили, що через одну годину розчинилася половина кількості солі. Вважаючи концентрацію насиченого розчину солі рівною $1/3$, знайти кількість розчиненої солі протягом одного часу, якщо за цей час було влито 180 л води.

Відповідь: $m = 5,2 \text{ кг}$.

6. В електричному колі підтримується напруга $E = 300 \text{ В}$. Опір кола $R = 150 \text{ Ом}$. Коефіцієнт самоіндукції $L = 30 \text{ Гн}$. За який час із моменту замикання електричного кола електричний струм I , що виникає в ньому, досягне 99 % значення від своєї граничної величини?

Відповідь: $t = \frac{3}{150} \ln 100 \approx 0,92 \text{ с}$.

7. Електровоз рухається по горизонтальній залізничній колії зі швидкістю 72 км/год . Машиніст потяга вмикає гальма й опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 ваги електровоза. Знайти час від моменту увімкнення до повного зупинення електровоза і відстань, яку пройшов електровоз від початку гальмування до зупинення.

Відповідь: електровоз зупиниться після $10,2 \text{ с}$ від початку гальмування, подолавши відстань 102 м .

8. Швидкість тіла, яке рухається, зростає зворотно пропорційно пройденому шляху. У початковий момент часу тіло було на відстані 5 м від початку відліку шляху

і мало швидкість $V_0 = 20$ м/с. Установити пройдений тілом шлях і швидкість тіла через 10 с від початку руху.

Відповідь: $S = 45$ м, $V = \frac{20}{9}$ м/с.

9. Знайти кількість теплоти, яка необхідна для нагріву 1 кг заліза від 20 °С до 21 °С. Питома теплоємність заліза c визначається залежністю $c = 0,1053 + 0,000142t$, де t – температура.

Відповідь: $Q(21) - Q(20) \approx 0,11$ ккал.

10. На дні котла, що має форму півкулі радіусом $R = 1$ м і повністю заповненого водою, унаслідок технічної аварії утворилась щілина площиною $0,25$ см². Знайти час повного витоку води з котла.

Відповідь: час витоку – 7 год 19 хв 36 с.

РОЗДІЛ 9 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

9.1. Подвійний інтеграл. Основні означення

9.1.1. Задача про масу плоскої пластинки

Розглянемо плоску неоднорідну матеріальну пластинку, яка має форму області D . Густина матеріалу в області D задана як неперервна функція $\gamma(x, y)$, яка дозволяє визначити густину пластини в кожній конкретній точці M . Визначити масу m цієї пластини.

Розв'язання

1) довільно розіб'ємо пластину D на n довільних частин D_i , які не мають спільних внутрішніх точок (див. рис. 9.1);

2) площу кожної області візьмемо за ΔS_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

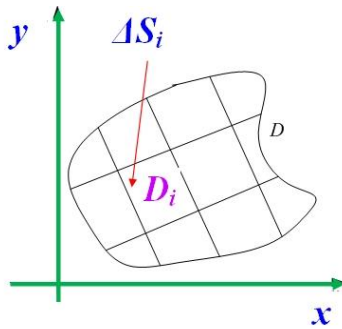


Рисунок 9.1

3) у кожній області D_i виберемо довільно m . $M(x_i, y_i)$ і знайдемо густину матеріалу $\gamma(x, y)$ у цій точці $\gamma|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \gamma(x_i, y_i)$.

Примітка

Якщо розміри кожної області D_i достатньо малі, то густина в кожній точці області мало відрізнятиметься від точки до точки. А отже, маса області D_i визначиться як

$$m_i = \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i; \quad (9.1)$$

4) знайдемо суму добутоків $\gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Отримаємо масу всієї плоско-паралельної пластинки m_n : $m_n = \sum_{n=1}^n \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Тоді

$$m = \lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^n \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i. \quad (9.2)$$

9.1.2. Означення подвійного інтеграла

На площині Oxy розглянемо деяку область D (див. рис. 9.1), яка є замкненою. Нехай у цій області задано функцію $z = f(x; y)$. Довільно область D розіб'ємо на n «елементарних частин». Одержимо n ділянок D_i , $i = 1, 2, \dots, n$, кожна з яких має площу ΔS_i .

За d_i позначимо відстань між двома максимально віддаленими точками області D_i . У кожній області D_i виберемо довільно m $M(x_i, y_i)$ і складемо суму добутоків

$$f(x_1; y_1) \cdot \Delta S_1 + f(x_2; y_2) \cdot \Delta S_2 + \dots + f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i + \dots + f(x_n; y_n) \cdot \Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i.$$

Назвемо цю суму інтегральною сумою функції $z = f(x; y)$ в області D .

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми, яка не залежить ні від розбиття області D на n довільних частин, ні від вибору точок M_i у кожній із одержаних областей, то цю границю називають *подвійним інтегралом* від функції $z = f(x; y)$ по області D і позначають

$$\iint_D f(x; y) dx dy. \quad (9.3)$$

Тобто подвійний інтеграл визначає рівність

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i, \quad (9.4)$$

де $f(x; y)$ – функція, яка обов’язково є інтегрованою в області D ; D – область, за якою ведеться інтегрування; $(x; y)$ – змінні інтегрування; $dx dy$ – елемент площі.

Теорема (необхідна умова інтегрованості функцій): для того щоб функція $f(x, y)$ була інтегрована в області D , необхідно, щоб $f(x, y)$ була обмежена на D .

Теорема (достатня умова інтегрованості функцій): якщо функція $z = f(x; y)$ неперервна в замкнутій області D , то в цій області вона інтегрована.

9.1.3. Властивості подвійного інтеграла

1. Сталий множник a можна виносити за знак подвійного інтеграла

$$\iint_D af(x; y) dx dy = a \iint_D f(x; y) dx dy.$$

2. Подвійний інтеграл від суми або різниці двох функцій, рівний сумі або різниці інтегралів від цих функцій

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy.$$

3. Нехай $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ (рис. 9.2)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

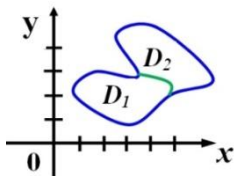


Рисунок 9.2

4. Якщо в області D виконується нерівність $f(x, y) \geq 0$, $\forall m. M(x, y) \in D$, то $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$.

5. Якщо $f(x, y) \geq g(x, y) \forall m. M(x, y) \in D$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

6. **Теорема (про середнє).** Нехай $f(x, y)$ – функція, неперервна в обмеженій замкненій зв'язній області D . Тоді існує $m. M_0(x_0; y_0)$ така, що

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) S_D,$$

де S_D – площа області D .

9.2. Обчислення подвійного інтеграла

9.2.1. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

Алгоритм обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах такий:

1) установимо, щодо якої із осей координат область інтегрування є правильною.

Означення. Нехай область інтегрування D обмежена прямими $x = a$; $x = b$ і кривими $y = \varphi_1(x)$; $y = \varphi_2(x)$, які є неперервними і задовольняють умову $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a; b]$.

Ця область є **правильною в напрямку осі Oy** , якщо будь-яка пряма, яка паралельна осі Oy , перетинає границю області не більше ніж у двох точках (див. рис. 9.3)

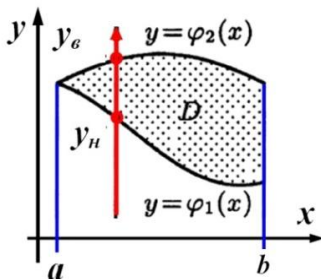


Рисунок 9.3

Означення. Нехай область інтегрування D обмежена прямими $y = c$; $y = d$ і кривими $x = \psi_1(y)$; $x = \psi_2(y)$, які є неперервними і задовольняють умову $\psi_1(y) \leq \psi_2(y) \quad \forall y \in [c; d]$. Ця область є **правильною в напрямку осі Ox** , якщо будь-яка пряма, яка паралельна осі Ox , перетинає границю області не більше ніж у двох точках;

2) перейдемо від подвійного інтеграла до повторного, скориставшись рисунком 9.4 та відповідними формулами:

а) область інтегрування D є правильною щодо осі Ox ;

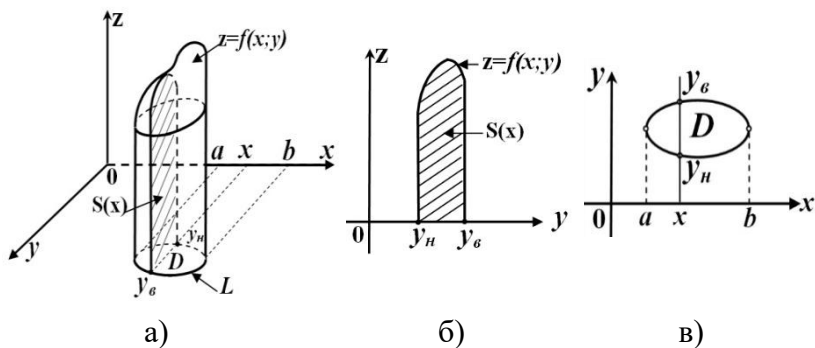


Рисунок 9.4

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_u}^{y_g} f(x; y) dy;$$

б) область інтегрування D є правильною щодо осі Oy

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_n}^{x_g} f(x; y) dx;$$

3) обчислюємо повторний інтеграл за допомогою послідовного обчислення двох визначених інтегралів: спочатку внутрішнього, а потім зовнішнього.

9.2.2. Заміна змінних у подвійному інтегралі

1) нехай у площині α задана прямокутна декартова система координат Oxy , а в площині β – прямокутна декартова система координат Ouv ;

2) у системі координат Oxy розглянемо деяку область D , а в системі координат Ouv область D^* (рис. 9.5).

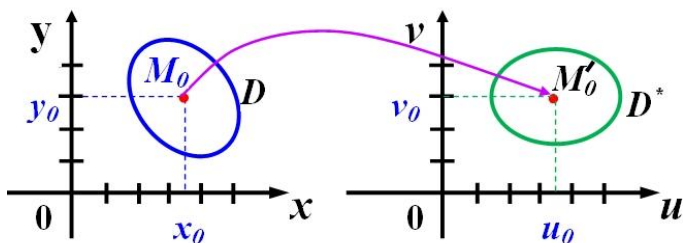


Рисунок 9.5

3) кожній $m. M_0(x_0, y_0) \in D$ за деяким законом

$$\begin{cases} x = \varphi(u; v) \\ y = \psi(u; v) \end{cases}, u = u(x; y); v = v(x; y) \text{ поставимо у відповід-}$$

ність $m. M'_0(u_0, v_0) \in D^*$.

Теорема. Якщо в деякій області D^* функції

$$\begin{cases} x = \varphi(u; v) \\ y = \psi(u; v) \end{cases}$$

мають неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля **визначник Якобі (Якобіан)**

$$I(u; v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (9.5)$$

то для функції $f(x, y)$, яка є неперервною в області D , справедлива формула заміни змінної

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\varphi(u; v); \psi(u; v)) \cdot \underbrace{|I(u; v)|}_{dx dy} du dv. \quad (9.6)$$

9.2.3. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Задача. У подвійному інтегралі $\iint_D f(x; y) dx dy$ здійснити заміну декартових координат x і y полярними ρ і φ .

Розв'язання. Урахуємо, що $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$. Тоді Яко-

біан переходу запишемо так:

$$I(\rho; \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Відповідь

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \underbrace{\rho d\rho d\varphi}_{dS}, \quad (9.7)$$

де D^* – область у полярній системі координат.

9.3. Практичне застосування подвійних інтегралів

1. Маса плоскої пластини.

Подвійний інтеграл по області D від невід'ємної функції $\gamma(x; y)$, яка задає густину матеріалу пластини в кожній точці цієї області, чисельно рівний масі m цієї пластини.

$$m = \lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^n \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i = \iint_D \gamma(x; y) dx dy.$$

2. Статичний момент пластини.

Означення. Статичним моментом M матеріальної точки маси m щодо деякої осі називають величину, яка дорівнює добутку маси цієї точки m на відстань d її від осі, тобто

$$M = md,$$

де d – відстань від матеріальної точки до відповідної осі.

Для плоскої пластини маємо:

$$1) \text{ щодо осі } Ox: M_x = \iint_{D_{Oxy}} y \cdot \gamma(x; y) dx dy; \quad (9.8)$$

$$2) \text{ щодо осі } Oy: M_y = \iint_{D_{Oxy}} x \cdot \gamma(x; y) dx dy. \quad (9.9)$$

3. Координати центра мас $C(x_c; y_c)$ пластини

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}. \quad (9.10)$$

4. Моменти інерції пластини.

Означення. Момент інерції I матеріальної точки щодо деякої осі дорівнює добутку маси m точки на квадрат її відстані d до цієї осі

$$I = md^2,$$

де d – відстань від матеріальної точки до відповідної осі.

Для плоскої пластини маємо:

$$1) \text{ щодо осі } Ox: I_x = \iint_{D_{Oxy}} y^2 \cdot \gamma(x; y) dx dy; \quad (9.11)$$

$$2) \text{ щодо осі } Oy: I_y = \iint_{D_{Oxy}} x^2 \cdot \gamma(x; y) dx dy. \quad (9.12)$$

5. Момент інерції щодо початку координат (полярний момент інерції).

Означення. Момент інерції матеріальної точки щодо початку координат дорівнює сумі моментів інерції цієї точки щодо початку координат

$$I_0 = \iint_{D_{Oxy}} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x; y) dx dy. \quad (9.13)$$

6. Електричний заряд пластини розподілений по області D із поверхневою густиною заряду $\sigma(x; y)$

$$Q = \iint_D \sigma(x; y) dx dy. \quad (9.14)$$

Приклад 9.1. Обчислити масу частини неоднорідної шайби, яка має форму області D , обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$. Густина матеріалу шайби від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y) = e^{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою маси плоскої пластини

$$m = \iint_D \gamma(x; y) dx dy = \iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy.$$

Зобразимо шайбу, обмежену областю D (рис. 9.6). Перейдемо до полярної системи координат

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2.$$

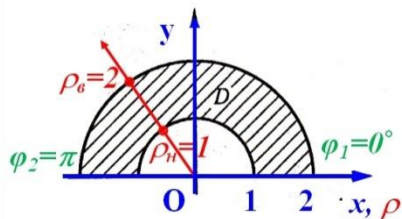


Рисунок 9.6

Тоді $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1, \quad e^{x^2+y^2} = e^{\rho^2},$
 $0 \leq \varphi \leq \pi.$

$$m = \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D^*} e^{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \left[D^* : \begin{array}{l} \rho \in [0; 1] \\ \varphi \in [0; \pi] \end{array} \right] = \\ = \int_0^\pi d\varphi \underbrace{\int_1^2 e^{\rho^2} \rho d\rho}_{1^*} = \frac{e^{\sqrt{2}} - e}{2} \int_0^\pi d\varphi = \frac{\pi(e^{\sqrt{2}} - e)}{2}.$$

$$1^* : \int_1^2 e^{\rho^2} \rho d\rho = \left[\begin{array}{l} \rho^2 = t \\ \rho d\rho = \frac{dt}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \rho_1 = 1 \Rightarrow t_1 = 1 \\ \rho_2 = 2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{2} \end{array} \right] = \\ = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} e^t dt = \frac{e^{\sqrt{2}} - e}{2}.$$

Відповідь: маса частини неоднорідної шайби визначається рівністю $m = \frac{\pi(e^{\sqrt{2}} - e)}{2}.$

Приклад 9.2. Знайти координати центра мас однорідної пластинки $(\gamma(x; y) = 1)$, обмеженої параболою $y = x^2$ та прямою $y = 2.$

Розв'язання

$$1) x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m};$$

2) завдяки симетрії пластини щодо осі Oy маємо $x_c = 0$ (рис. 9.7).

Область інтегрування, яка задає форму пластинки є правильною щодо осі Oy ;

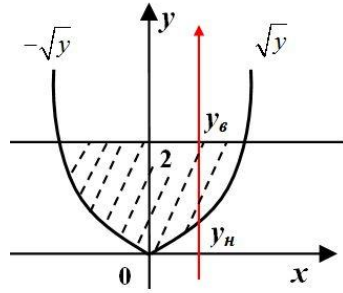


Рисунок 9.7

$$3) m = \iint_D \underbrace{\gamma(x; y)}_1 dx dy = \left[D: \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{y} \end{array} \right] = 2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} dx =$$

$$= 2 \int_0^2 \left(x \Big|_0^{\sqrt{y}} \right) dy = 2 \int_0^2 \sqrt{y} dy = \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3};$$

$$4) M_x = \iint_D y dx dy = \int_0^2 y dy \int_0^{\sqrt{y}} dx = 2 \int_0^2 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{4}{5} y^{\frac{5}{2}} \Big|_0^2 = \frac{16\sqrt{2}}{5};$$

$$5) y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{16\sqrt{2}}{5} : \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{6}{5}.$$

Відповідь: координати центра мас однорідної пластинки $\left(0; \frac{6}{5} \right)$.

Приклад 9.3. Обчислити момент інерції однорідної фігури $(\gamma(x; y) = \gamma_0 = const)$, обмеженої лінією кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \phi)$ щодо її осі симетрії.

Розв'язання

1) зробимо схематичний рисунок області D (рис. 9.8);

2) фігура симетрична щодо осі Ox , тому

$$I_x = \iint_{D_{Oxy}} y^2 (\gamma(x; y) dx dy) = \gamma_0 \iint_D y^2 dx dy [=].$$

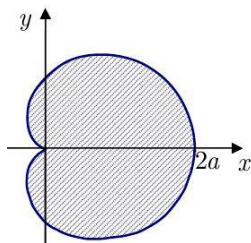


Рисунок 9.8

3) перейдемо в полярну систему координат

$$\begin{aligned} [=] \gamma_0 \iint_{D^*} \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho d\varphi &= \left[D^* : \begin{array}{l} \rho \in [0; a(1 + \cos \varphi)] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array} \right] = \\ &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{a(1 + \cos \varphi)} \rho^3 d\rho = \gamma_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{a(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \\ &= \frac{a^4 \gamma_0}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi = \\ &= \frac{a^4 \gamma_0}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot (1 + 4\cos \varphi + 6\cos^2 \varphi + 4\cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^4 \gamma_0}{4} \left\{ \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi}_1 + 4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi}_2 + 6 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}_3 + \right. \\ &\quad \left. + 4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi}_4 + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi}_5 \right\} = \\ &= \frac{a^4 \gamma_0}{4} \left\{ \pi + 4 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{\pi}{4} + 4 \cdot 0 + \frac{\pi}{8} \right\} = \frac{21}{32} \pi a^4 \gamma_0. \end{aligned}$$

Візьмемо окремо кожен із відмічених інтегралів:

$$1. \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

$$2. \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi =$$

$$= \left[\sin \varphi = t \quad \left| \begin{array}{l} \text{якщо } \varphi_1 = 0, \text{ то } t_1 = 0 \\ \varphi_2 = 2\pi, \text{ то } t_2 = 0 \end{array} \right. \right] = \int_0^0 t^2 dt = 0.$$

$$3. \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{8} \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

$$4. \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = 0$$

(див. випадок 2).

$$5. \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi}_{\frac{\pi}{4}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos 2\varphi d\varphi}_6 + \frac{1}{4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 2\varphi d\varphi}_7 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

$$6. \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi -$$

$$- \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8} \underbrace{\sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi}}_0 - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}. \\
7. \quad &\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) \cos^2 2\varphi d\varphi = \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos^2 2\varphi d\varphi - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos^3 2\varphi d\varphi = \left[\cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4} \right] = \\
&= \underbrace{\frac{1}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi}_{\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 6\varphi + 3 \cos 2\varphi}{4} d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{32} \left(\frac{1}{6} \sin 6\varphi + \frac{3}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $I_x = \frac{21}{32} \pi a^4 \gamma_0$.

Приклад 9.4. Обчислити момент інерції щодо початку координат неоднорідної пластини D , обмеженої лініями $y = 2x^2$; $y = 5x^2$; $x = 1$; $x = 3$, якщо поверхнева густина матеріалу в кожній її точці описана законом $\gamma(x; y) = x^2 y$.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок області D (рис. 9.9), яка задає форму плоскопаралельної пластини. Область інтегрування є неправильною щодо обох осей координат, тому для спрощення обчислень перейдемо в іншу систему координат (Ouv) . Отже,

$$I_0 = \iint_{D_{oxy}} (x^2 + y^2) x^2 y dx dy = I_0 = \iint_{D_{oxy}} (x^4 y + y^3 x^2) dx dy.$$

Застосуємо підстановку

$$\begin{aligned}
 y = 2x^2 &\Rightarrow u_1 = 2 \\
 \left[\begin{array}{l} y = ux^2 \\ yx = v \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{array}{l} y = 5x^2 \Rightarrow u_2 = 5 \\ xy = 1 \Rightarrow v_1 = 1 \\ xy = 3 \Rightarrow v_2 = 3 \end{array} \Rightarrow D^* : \begin{cases} 2 \leq u \leq 5 \\ 1 \leq v \leq 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Побудуємо область D^* (рис. 9.10).

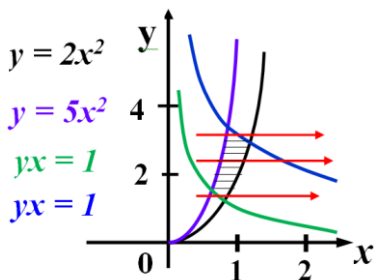


Рисунок 9.9

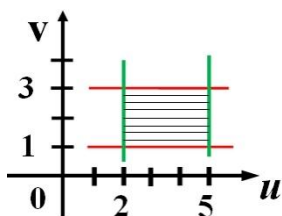


Рисунок 9.10

Знайдемо Якобiан переходу iз системи координат Oxy в систему Ouv . Для цього виразимо x i y через u та v

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} y = ux^2 \\ yx = v \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = ux^2 \\ y = \frac{v}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{v}{x} = ux^2 \Rightarrow x^3 = \frac{v}{u} \Rightarrow \\
 &x = u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо частиннi похiднi функцiї

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}};$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}};$$

$$I(u; v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} -$$

$$-\frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{9}u^{-1} - \frac{1}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3u}.$$

Тоді

$$1. |I(u; v)| = \frac{1}{3u}.$$

$$2. x^4 y + y^3 x^2 = \begin{cases} x = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} \\ y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \end{cases} = u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{4}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} + uv^2u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} = u^{-1}v^2 + u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{8}{3}}.$$

$$I_0 = \iint_{D_{xy}} (x^4 y + y^3 x^2) dx dy = \iint_{D'} \left(u^{-1}v^2 + u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{8}{3}} \right) |I(u; v)| du dv =$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{D'} \left(u^{-1}v^2 + u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{8}{3}} \right) \frac{1}{u} du dv = \frac{1}{3} \iint_{D'} \left(u^{-2}v^2 + u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{8}{3}} \right) du dv =$$

$$= \frac{1}{3} \int_2^5 du \int_1^3 \left(u^{-2}v^2 + u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{8}{3}} \right) dv = \frac{1}{3} \int_2^5 \left(u^{-2} \frac{v^3}{3} + \frac{3}{11} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{11}{3}} \right) \Big|_1^3 du =$$

$$= \frac{1}{3} \int_2^5 \left(9u^{-2} + \frac{3}{11} u^{-\frac{2}{3}} \frac{11}{3} - \frac{1}{3} u^{-2} - \frac{3}{11} u^{-\frac{2}{3}} \right) du =$$

$$= \frac{1}{3} \int_2^5 \left(\frac{26}{3} u^{-2} + \frac{81}{11} u^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{9} - \frac{3}{11} u^{-\frac{2}{3}} \right) du =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{26}{3} \cdot \left(-\frac{1}{u} \right) + \frac{27\sqrt[3]{3}}{11} u^{\frac{1}{3}} - \frac{9}{11} u^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_2^5 = \frac{13}{15} + \frac{9}{11} (27\sqrt[3]{9} - 1) (\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}).$$

Відповідь: $I_0 = \frac{13}{15} + \frac{9}{11} (27\sqrt[3]{9} - 1) (\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}).$

Приклад 9.5. Металічний диск має форму круга, який обмежений лінією кола $x^2 + y^2 = 1$. Поверхнева густина електричного заряду на диску від точки до точки диска змінюється за законом $\sigma(x; y) = 1 + x^2 + y^2$ (Кл/м²). Обчислити повний заряд диска.

Розв'язання

1. $Q = \iint_D \sigma(x; y) \, dx dy = \iint_D (1 + x^2 + y^2) \, dx dy.$

2. Перейдемо в полярну систему координат

$$\left\{ D^* : \begin{array}{l} \rho \in [0; 1] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array} \right\}.$$

3. $\iint_D (1 + x^2 + y^2) \, dx dy = \iint_{D^*} (1 + \rho^2) \rho d\rho d\varphi =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho + \rho^3) d\rho = 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} \pi \text{ (Кл).}$$

Відповідь: $Q = \frac{3}{2} \pi$ (Кл).

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити масу неоднорідної пластини D , яка обмежена лініями $y = x^2 - 1$, $x + y = 1$, якщо поверхнева густина матеріалу в кожній її точці змінюється за законом $\gamma(x; y) = 2x + 5y + 8$.

Відповідь: 45.

2. Неоднорідна пластинка має форму області D , яка обмежена лініями $2x + y = 1$, $2x + y = 3$, $x - y = -1$, $x - y = 2$. Обчислити масу такої пластинки, якщо поверхнева густина

матеріалу в кожній її точці змінюється за законом $\gamma(x; y) = x + y$.

Відповідь: $\frac{7}{3}$.

3. Знайти статичний момент однорідного прямокутника зі сторонами a і b щодо сторони a .

Відповідь: $\frac{ab^2}{2}$.

4. Знайти координати центра мас однорідної плоскої пластинки ($\gamma(x; y) = 1$), обмеженої верхньою половиною кола $x^2 + y^2 = 2x$ і відрізком осі Ox .

Відповідь: $x_c = 1; y_c = \frac{4}{3\pi}$.

5. Знайти координати центра мас однорідної плоскої пластинки ($\gamma(x; y) = 1$), обмеженої верхньою половиною еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ і його великою віссю.

Відповідь: $x_c = 0; y_c = \frac{8}{3\pi}$.

6. Знайти момент інерції квадрата зі стороною a щодо однієї з його вершин, якщо поверхнева густина матеріалу пропорційна y .

Відповідь: $I_0 = \frac{5ka^5}{12}$.

7. Знайти момент інерції однорідного круга ($\gamma(x; y) = 1$) радіуса R щодо його центра.

$$\text{Відповідь: } I_y = I_o = \frac{\pi R^4}{2}.$$

7. Знайти момент інерції однорідного круга ($\gamma(x; y) = 1$) радіуса R щодо його діаметра d .

$$\text{Відповідь: } I_d = I_x = \frac{\pi R^4}{4}.$$

8. Електричний заряд розподілений по площі металічної пластини, яка має форму області D , що обмежена лініями $y = x^2$, $y^2 = x$. Обчислити повний заряд пластини, якщо поверхнева густина електричного заряду від точки до точки змінюється за законом $\sigma(x; y) = 3x + 2y + 6 \left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right)$.

$$\text{Відповідь: } \frac{11}{4} \text{ Кл.}$$

9. Металічний диск має форму круга, який обмежений лінією кола $x^2 + y^2 = 4x$. Поверхнева густина електричного заряду на диска від точки до точки диска змінюється за законом $\sigma(x; y) = x^2 + y^2 \left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right)$. Обчислити повний заряд диска.

$$\text{Відповідь: } 24\pi \text{ Кл.}$$

9.4. Потрійний інтеграл. Основні означення

Розглянемо в просторі $Oxyz$ кубовану область (V) , яка обмежена зверху поверхнею S . Нехай в області (V) задана функція $u = f(x, y, z)$, де x, y, z – прямокутні координати точки в області.

Розіб'ємо область (V) довільно сіткою поверхонь на n частин, які не мають спільних внутрішніх точок. $(\Delta V_1), (\Delta V_2), \dots, (\Delta V_n)$ – об'єми відповідних областей. У кожному з елементарних об'ємів (ΔV_i) виберемо довільно точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$ і обчислимо добуток $(f(M_i) \cdot \Delta V_i)$. Складемо інтегральну суму для функції по області V_i

$$f(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta V_1 + f(x_2, y_2, z_2) \cdot \Delta V_2 + \dots + f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i + \dots + \\ = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i = f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i.$$

Нехай d_i – діаметр (ΔV_i) , $\max_{1 \leq i \leq n} d_i \rightarrow 0$.

Означення. Якщо існує скінченна $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \times \\ \times \Delta V_i$ за умови $\max_{1 \leq i \leq n} d_i \rightarrow 0$, яка не залежить ні від способу розбиття області V на елементарні об'єми ΔV_i , ні від вибору точок M_i , то цю границю називають потрійним інтегралом від функції $u = f(x, y, z)$ по області V і позначають

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz, \quad (9.15)$$

де $dx dy dz$ – елемент об'єму.

Властивості потрійного інтеграла

1. Постійний множник c можна виносити за знак потрійного інтеграла

$$\iiint_{(V)} c \cdot f(x, y, z) dx dy dz = c \cdot \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz.$$

2. Потрійний інтеграл від алгебраїчної суми двох (скінченного числа) функцій, рівний алгебраїчній сумі потрійних інтегралів від цих функцій

$$\iiint_{(V)} [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)] dV = \iiint_{(V)} f_1(x, y, z) dV + \iiint_{(V)} f_2(x, y, z) dV.$$

3. Якщо область інтегрування (V) розбита на дві частини (V_1) і (V_2) , що не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V_1)} f(x, y, z) dV + \iiint_{(V_2)} f(x, y, z) dV.$$

4. Теорема (про середнє). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в замкнутій області (V) , то знайдеться така точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (V)$, для якої буде справедлива рівність

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = f(x_0; y_0; z_0) \cdot V,$$

де V – об'єм тіла (V) .

9.5. Обчислення потрійного інтеграла

9.5.1. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Означення. Область (V) назвемо **правильною в напрямку осі Oz** , якщо довільна пряма, що проходить через внутрішню точку області (V) паралельно осі Oz , перетинає межу області не більше ніж у двох точках, причому кожна з меж, що перетинаються, задається тільки одним рівнянням (рис. 9.11).

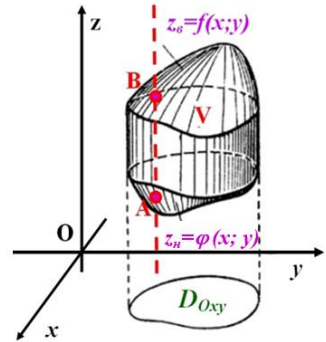


Рисунок 9.11

$$\iiint_V dV = \int_a^b dx \int_{y_n=\varphi_1(x)}^{y_0=\varphi_2(x)} dy \int_{z_n(x;y)}^{z_0(x;y)} dz. \quad (9.16)$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

Проведемо аналогію з подвійним інтегралом:

1) нехай (V) – замкнута кубована область у просторі $Oxyz$, $f(x, y, z)$ – функція, яка неперервна в області (V) скрізь, крім, можливо, деякої множини точок нульового об'єму;

2) у відповідність тілу V поставимо тіло V^* із простору $Ouvw$, тобто встановимо взаємно однозначну відповідність між двома просторами;

3) для спрощення області інтегрування застосуємо підстановку

$$x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \chi(u, v, w). \quad (9.17)$$

Теорема. Нехай у деякій області V^* функції $\varphi(u, v, w)$; $\psi(u, v, w)$; $\chi(u, v, w)$ мають неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник Якобі

$$I(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9.18)$$

Тоді в разі заміни змінних у потрійному інтегралі справедлива формула

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{(V^*)} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \cdot |I(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned} \quad (9.19)$$

9.5.2. Циліндрична система координат

Положення точки M у циліндричній системі координат $Oxyz$ (рис. 9.12) можна задати за допомогою чисел (ρ, φ, z) . Точка M_1 – проєкція точки M на площину Oxy . (ρ, φ, z) – циліндричні координати точки M .

Зв'язок між декартовими та циліндричними координатами такий:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, & z &= z, \\ \text{де } 0 &\leq \rho < +\infty, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, & z &\in R. \end{aligned}$$

$$I(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

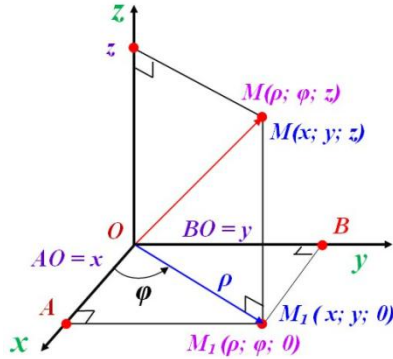


Рисунок 9.12

Тоді

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{(V^*)} f(\varphi(\rho, \varphi, z), \psi(\rho, \varphi, z), z) \cdot \underbrace{\rho d\rho d\varphi dz}_{dV^*}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

9.5.3. Сферична система координат

Положення точки M у сферичній системі координат $Oxyz$ (рис. 9.13) можна задати за допомогою чисел (ρ, φ, θ) . Точка M_1 – проєкція точки M на площину Oxy . (ρ, φ, θ) – сферичні координати точки M .

Зв'язок між декартовими та сферичними координатами (див. рис. 9.13):

– $\triangle OKM$ – прямокутний $\Rightarrow z = OK = OM \cdot \cos \theta \Rightarrow z = \rho \cdot \cos \theta$;

– $\triangle OMM_1$ – прямокутний $\Rightarrow \angle MOM_1 = 90^\circ - \theta$;

– $OM_1 = OM \cdot \cos(90 - \theta) = OM \cdot \sin \theta$;

– $\triangle OM_1A$ – прямокутний $\Rightarrow x = OA = OM_1 \cdot \cos \varphi = \rho \sin \theta \cos \varphi \Rightarrow x = \rho \sin \theta \cos \varphi$;

– ΔOM_1B – прямокутний

$$y = OB = OM_1 \cdot \cos(90 - \varphi) = \rho \sin \theta \sin \varphi \Rightarrow y = \rho \sin \theta \sin \varphi.$$

Тоді

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta,$$

$$\text{де } 0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

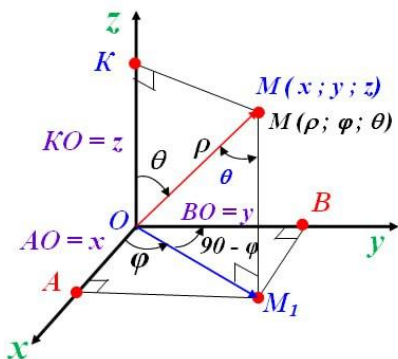


Рисунок 9.13

$$I(\rho, \varphi, z) = -\rho^2 \sin \theta. \quad (9.21)$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ & = \iiint_{(V^*)} f(\varphi(\rho, \varphi, \theta), \psi(\rho, \varphi, \theta), \chi(\rho, \varphi, \theta)) \cdot \underbrace{\rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta}_{dV^*}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

9.6. Практичне застосування потрійних інтегралів

1. Маса тіла m , об'ємна густина якого від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z)$

$$m = \iiint_V \gamma(x; y; z) dx dy dz. \quad (9.23)$$

2. Статичний момент тіла щодо координатних площин:

$$1) Oxy: M_{xy} = \iiint_V z \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (9.24)$$

$$2) Oyz: M_{yz} = \iiint_V x \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (9.25)$$

$$3) Oxz: M_{xz} = \iiint_{(V)} y \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (9.26)$$

3. Координати центра мас пластини

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \quad (9.27)$$

4. Моменти інерції пластини

1) щодо осі Ox

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (9.28)$$

2) щодо осі Oy

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (9.29)$$

3) щодо осі Oz

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (9.30)$$

4) щодо площини Oxy

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (9.31)$$

5) щодо площини Oyz

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \quad (9.32)$$

6) щодо площини Oxz

$$I_{xz} = \iiint_V y^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (9.33)$$

5. Момент інерції щодо початку координат (полярний момент інерції)

$$I_o = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (9.34)$$

6. Електричний заряд Q розподілений по тілу об'ємом V так, що об'ємна густина заряду від точки до точки змінюється за законом $\sigma(x; y; z)$

$$Q = \iiint_V \sigma(x; y; z) dx dy dz. \quad (9.35)$$

Приклад 9.6. Визначити масу неоднорідного циліндра V , якщо його густина змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = x^2 + y^2 + z$, а циліндр обмежений поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$, $z = 3$.

Розв'язання. Зробимо рисунок тіла, масу якого знаходимо, та його проекцію на координатну площину Oxy (рис. 9.14–9.15). Урахуємо, що

$$m_V = \iiint_V \gamma(x; y; z) dV = \iiint_V (x^2 + y^2 + z) dV.$$

Перейдемо в циліндричну систему координат. Опишемо межі інтегрування

$$V^* : \left\{ \begin{array}{l} z_n = 2; z_g = 3 \\ D_{Oxy} \left\{ \begin{array}{l} \rho_n = 0; \rho_g = 1 \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

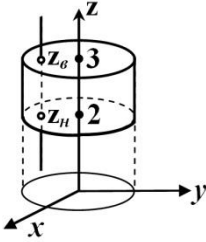


Рисунок 9.14

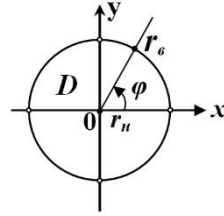


Рисунок 9.15

Скористаємося циліндричною системою координат.

$$m_V = \iiint_{V^*} (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + z) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz.$$

$$m_V = \iiint_V (\rho^2 + z) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz.$$

$$\begin{aligned} m_V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_2^3 (\rho^3 + z\rho) \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \left(\rho^3 z + \rho \frac{z^2}{2} \right) \Big|_2^3 = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^3 + \frac{5}{2}\rho \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{5\rho^2}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $m_V = 3\pi$.

Приклад 9.7. Знайти координати центра мас однорідного тіла ($\gamma(x; y; z) = 1$), обмеженого параболоїдом $z = 3 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ і площиною $z = 0$.

Розв'язання

1. Завдяки симетрії тіла щодо координатних площин xOz і yOz (рис. 9.16) $x_C = y_C = 0$.

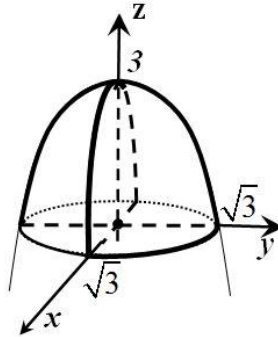


Рисунок 9.16

$$2. z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_{(V)} z \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{(V)} \gamma(x, y, z) dx dy dz}.$$

$$3. m = \iiint_{(V)} \underbrace{\gamma(x, y, z)}_1 dx dy dz = \iiint_{(V)} dx dy dz.$$

Перейдемо в циліндричну систему координат, зважаючи, що тіло інтегрування є правильним щодо осі Oz .

$$m = \iiint_V dx dy dz = \iiint_{V^*} \rho d\rho d\varphi dz = \left[\begin{array}{l} V^* = 0 \leq z \leq 3 - \underbrace{x^2 - y^2}_{\rho^2} \\ D \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\} \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_0^{3-\rho^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(z \Big|_0^{3-\rho^2} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (3\rho - \rho^3) d\rho =$$

$$= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{3\rho^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{3}} \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right) = \frac{9\pi}{2}.$$

$$4. M_{xy} = \iiint_{(V)} z \cdot \underbrace{\gamma(x, y, z)}_1 dx dy dz = \iiint_{(V)} z \cdot dx dy dz.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iiint_{(V)} z \cdot dx \, dy \, dz = \iiint_{V^*} z \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \, d\rho \int_0^{3-\rho^2} z \, dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{3-\rho^2} \right) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho (3-\rho^2)^2 \, d\rho = \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (3-\rho^2)^2 \, d(3-\rho^2) = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{(3-\rho^2)^3}{-9}} \Big|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{9}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{9\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

$$5. \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{9\pi}{2} : \frac{9\pi}{2} = 1.$$

Відповідь: $(0; 0; 1)$ – координати центра мас тіла.

Приклад 9.8. Обчислити момент інерції щодо осі Oz однорідного тіла $(\gamma(x; y; z) = 1)$ V , яке обмежене поверхнями $z \geq 0$; $r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Розв'язання

$$1. \quad I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz. \quad \text{Зробимо рисунок}$$

(рис. 9.17) тіла, за яким проводиться інтегрування.

2. Оскільки тіло інтегрування симетричне щодо площин $x = 0$ і $y = 0$, то візьмемо інтеграл по тілу в першому октанті, а результат помножимо на 4.

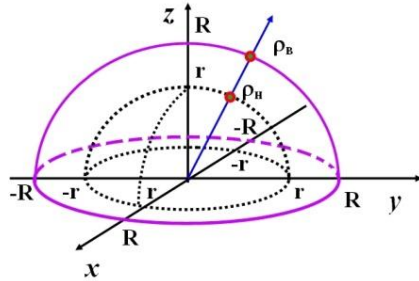


Рисунок 9.17

3. Перейдемо у сферичну систему координат:

$$- f(x; y; z) = x^2 + y^2 = \rho^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi = \rho^2 \cdot \sin^2 \theta;$$

$$- dx dy dz = |-\rho^2 \cdot \sin \theta| d\rho d\varphi d\theta = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta;$$

$$- (x^2 + y^2) + z^2 = (\rho^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cdot \cos^2 \theta = \rho^2 \cdot \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cdot \cos^2 \theta = \rho^2;$$

– рівняння сфер, які обмежують тіло інтегрування, будуть такими:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow \rho = r,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R.$$

4. Опишемо межі інтегрування тіла в першому октанті $V' = \left\{ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; r \leq \rho \leq R \right\}$.

$$V' = \left\{ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; r \leq \rho \leq R \right\}.$$

$$5. I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_{V'} \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= 4 \iiint_{V'} \rho^4 \sin^3 \theta d\rho d\varphi d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \int_r^R \rho^4 d\rho =$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4} \left(\frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_r^R d\theta = \frac{R^5 - r^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin \theta - \sin 3\theta) d\theta = \\
&= \frac{R^5 - r^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-3 \cos \theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{R^5 - r^5}{5} \cdot \frac{8}{3} (\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{15} (R^5 - r^5).
\end{aligned}$$

Відповідь: $I_z = \frac{4\pi}{15} (R^5 - r^5)$.

Приклад 9.9. Система має сферично симетричний заряд з об'ємною густиною $\sigma = \sigma_0 e^{-a\rho^3}$, де σ_0, a – константи, ρ – відстань от центра даної системи. Знайти заряд, який міститься всередині сфери радіуса R із центром у центрі системи.

Розв'язання

1. Заряд усередині сфери – заряд кулі радіуса $\rho = R$. Зважаючи на задану густину заряду, знаходимо заряд (рис. 9.18)

$$Q = \iiint_V \sigma dV = \iiint_V \sigma_0 e^{-a\rho^3} dV.$$

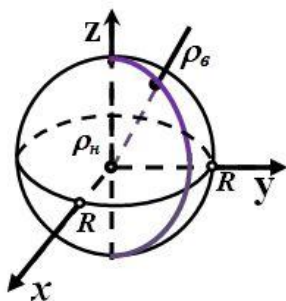


Рисунок 9.18

2. Перейдемо у сферичну систему координат

$$\begin{aligned}
 Q &= \iiint_V \sigma_0 \cdot e^{-a\rho^3} dV = \sigma_0 \iiint_V e^{-a\rho^3} \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\
 &= \left[\begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq R \\ \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right] = \sigma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \underbrace{\int_0^R e^{-a\rho^3} \rho^2 d\rho}_I = \\
 &= \left[\begin{array}{l} e^{-a\rho^3} = t \\ -3a\rho^2 e^{-a\rho^3} d\rho = dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{нпу } \rho_1 = 0 \Rightarrow t_1 = e^0 = 1 \\ \rho_2 = R \Rightarrow t_2 = e^{-aR^3} \end{array} \right] = \\
 &= \sigma_0 \cdot \varphi|_0^{2\pi} \cdot (-\cos \theta)|_0^\pi \cdot \frac{1}{3a} (1 - e^{-aR^3}) = \frac{4\pi\sigma_0}{3a} (1 - e^{-aR^3}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1^* : \int_0^R e^{-a\rho^3} \rho^2 d\rho &= \\
 &= \left[\begin{array}{l} e^{-a\rho^3} = t \\ -3a\rho^2 e^{-a\rho^3} d\rho = dt \\ \rho^2 e^{-a\rho^3} d\rho = -\frac{1}{3a} dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{за умови } \rho_1 = 0 \Rightarrow t_1 = e^0 = 1 \\ \rho_2 = R \Rightarrow t_2 = e^{-aR^3} \end{array} \right] = \\
 &= -\frac{1}{3a} \int_1^{e^{-aR^3}} dt = \frac{1}{3a} \int_{e^{-aR^3}}^1 dt = \frac{1}{3a} t \Big|_{e^{-aR^3}}^1 = \frac{1}{3a} (1 - e^{-aR^3}).
 \end{aligned}$$

Відповідь: $Q = \frac{4\pi\sigma_0}{3a} (1 - e^{-aR^3})$.

Приклад 9.10. Частинка міститься у сферично-симетричному потенційному полі в стаціонарному стані, для якого $\psi(r) = (2\pi a)^{-\frac{1}{2}} r^{-1} e^{-\frac{r}{a}}$, де a – константа, r – відстань від центра поля. Знайти середнє значення r .

Розв'язання

1. Урахуємо, що квадрат модуля псі-функції дає густину ймовірності знаходження частинки в об'ємі dV поблизу точки, положення якої визначається радіус-вектором \vec{r} . За означенням середнього значення фізичної величини маємо

$$\langle r \rangle = \iiint_V r \cdot |\psi(r)|^2 dV,$$

де V – об'єм всього простору.

2. Перейдемо у сферичну систему координат $(r; \theta; \varphi)$, узявши $\rho = r$.

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \iiint_{V^*} r \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{1}{r} e^{-r/a} \right)^2 r^2 \sin \theta \cdot dr d\varphi d\theta = \left[\begin{array}{l} 0 \leq r < \infty \\ \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{r} e^{-r/a} \right)^2 r^3 dr}_{1} = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a}{8} = \frac{a}{2} \\ &1) \frac{1}{2a} \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} e^{-r/a} \right)^2 r^3 dr = \frac{1}{2a} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} e^{-2r/a} \cdot r^3 dr = \\ &= \frac{1}{2a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{r^2} e^{-2r/a} \cdot r^3 dr = \left[\begin{array}{l} u = r, du = dr \\ dv = e^{-2r/a} dr, \\ v = -\frac{a}{2} e^{-2r/a} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2a} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{a}{2} r e^{-2r/a} \Big|_0^b + \frac{a}{2} \int_0^b e^{-2r/a} dr \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-re^{-2r/a} \Big|_0^b + \int_0^b e^{-2r/a} dr \right) = -\frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-be^{-2b/a} - \frac{a}{2} e^{-2b/a} \right) = \\
&= \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{e^{\frac{2b}{a}}} - \frac{a}{2e^{\frac{2b}{a}}} + \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{b}{e^{\frac{2b}{a}}} \right)}_2 + \frac{a}{8} = \frac{a}{8}; \\
2) \quad &\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{e^{\frac{2b}{a}}} \right) = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^{\frac{2b}{a}} \cdot \frac{2}{a}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Відповідь: середнє значення відстані частинки від центра поля $\langle r \rangle = \frac{a}{2}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити масу тіла, обмеженого площинами $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$, якщо поверхнева густина матеріалу в кожній її точці змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = x + y + z$.

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

2. Обчислити масу тіла, яке обмежено поверхнею $x^2 + y^2 + z^2 = z$, якщо поверхнева густина матеріалу в кожній її точці змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Відповідь: $\frac{\pi}{10}$.

3. Обчислити координати центра мас однорідного тіла ($\gamma(x; y; z) = 1$), яке охоплює область V , обмежену поверхнями V $4y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $x^2 + z^2 = 16$, $y = 0$.

Відповідь: $\left(0; \frac{3}{8}; 0\right)$.

4. Обчислити координати центра мас однорідного тіла ($\gamma(x; y; z) = 1$), яке охоплює область V , обмежено поверхнями V $y = x^2 + z^2$, $x^2 + z^2 = 10$, $y = 0$.

Відповідь: $\left(0; \frac{10}{3}; 0\right)$.

5. Знайти координати центра мас однорідного ($\gamma(x; y; z) = 1$) тіла V , обмеженого поверхнями конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та параболоїда $z = 2 - x^2 - y^2$.

Відповідь: $\left(0; 0; \frac{11}{10}\right)$.

6. Обчислити момент інерції однорідного ($\gamma(x; y; z) = 1$) циліндра $x^2 + y^2 = b^2$ із висотою h і радіусом основи b щодо діаметра основи.

Відповідь: $I_x = \frac{\pi b^2 h}{12} (3b^2 + 4h^2)$.

7. Обчислити момент інерції однорідного ($\gamma(x; y; z) = 1$) циліндра $x^2 + y^2 = b^2$ з висотою h і радіусом основи b щодо осі циліндра.

Відповідь: $I_z = \frac{\pi b^4 h}{2}$.

8. Обчислити момент інерції щодо площини Oyz тіла, обмеженого площинами $x + 2y - z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, якщо його густина від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = x$.

Відповідь: $I_{Oxy} = \frac{4}{15}$.

9. Обчислити момент інерції щодо осі однорідного круглого прямого конуса вагою P , висотою H і радіусом основи R .

Відповідь: $\frac{3}{10} \frac{P}{g} R^2$, $g = 9,8 \frac{M}{c^2}$.

10. Обчислити момент інерції однорідної кулі радіуса R щодо її центра.

Відповідь: $\frac{4}{5} \pi$.

РОЗДІЛ 10 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

10.1. Криволінійні інтеграли першого роду

10.1.1. Основні поняття та означення

До узагальненого поняття визначеного інтеграла, коли областю інтегрування є не пряма, а деяка крива, відносять криволінійні інтеграли.

Означення. *Спрямлюваною* називають криву, яка має скінченну довжину. *Неспрямлюваною* – нескінченну.

Означення. *Гладка крива* – неперервна крива, яка в кожній точці має похідну.

Означення криволінійного інтеграла. Розглянемо таку задачу:

1) нехай на площині Oxy задана неперервна крива AB довжини l ;

2) розглянемо неперервну функцію $f(x, y)$, яка визначена в кожній точці дуги \overline{AB} (рис. 10.1).

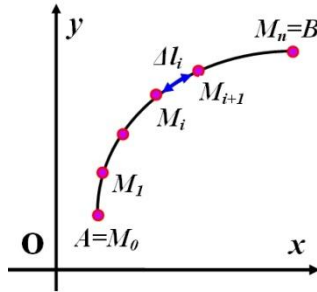


Рисунок 10.1

Виконаємо ряд таких дій:

3) розіб'ємо криву \overline{AB} точками $A = M_0; M_1; M_2; \dots; M_i; \dots; M_n = B$ на n довільних дуг $\overline{M_i M_{i+1}}$ довжиною Δl_i ;

4) на кожній дузі $\overline{M_i M_{i+1}}$ виберемо довільно точку $C_i(x_i; y_i)$ і складемо суму добутоків

$$f(x_1, y_1) \cdot \Delta l_1 + f(x_2, y_2) \cdot \Delta l_2 + \dots + f(x_i, y_i) \cdot \Delta l_i + \dots + f(x_n, y_n) \cdot \Delta l_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta l_i. \quad (10.1)$$

Цю суму називатимемо *інтегральною сумою* для функції $f(x; y)$ по кривій \overline{AB} ;

5) через $d_i = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i$ позначимо максимальну із довжин дуг і сформулюємо означення криволінійного інтеграла за довжиною дуги кривої.

Означення. Якщо існує границя $\lim_{d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i$,

яка не залежить ні від способу ділення дуги l на частини l_i , ні від вибору точок $(x_i, y_i) \in l_i$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом першого роду за дугою l від функції $f(x; y)$* і позначається $\int_l f(x, y) dl$. Отже,

$$\lim_{d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i = \int_l f(x, y) dl, \quad (10.2)$$

де dl – диференціал дуги кривої.

Теорема (достатня умова існування криволінійного інтеграла). Якщо функція $f(x; y)$ неперервна в кожній точці гладкої кривої, криволінійний інтеграл першого роду і його величина не залежить від способу розбиття на частини, ні від вибору точок на них.

10.1.2. Властивості криволінійних інтегралів першого роду

1. Якщо функція $f(x; y)$ інтегрована на кривій \overline{AB} , то інтегрованою на цій кривій є й функція $C \cdot f(x; y)$, де $C = const$ – константа, і виконується рівність

$$\int_{AB} C \cdot f(x; y) dl = C \int_{AB} f(x; y) dl.$$

2. Значення криволінійного інтеграла від функції $f(x; y)$ по заданій кривій не залежить від напрямку інтегрування

$$\int_{AB} f(x; y) dl = \int_{BA} f(x; y) dl.$$

3. Якщо функції $f(x; y)$ та $g(x; y)$ інтегровані на кривій \overline{AB} , то функції $f(x; y) \pm g(x; y)$ також інтегровані на цій кривій і

$$\int_{AB} (f(x; y) \pm g(x; y)) dl = \int_{AB} f(x; y) dl \pm \int_{AB} g(x; y) dl.$$

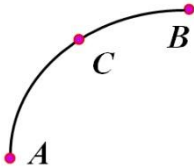
4. Якщо $f(x; y)$ невід'ємна інтегрована функція на кривій \overline{AB} , то

$$\int_{AB} f(x; y) dl \geq 0.$$

5. Якщо $f(x; y) \geq g(x; y)$, $(x; y) \in AB$ і кожна з функцій $f(x; y)$ і $g(x; y)$ інтегрована на кривій \overline{AB} , то

$$\int_{AB} f(x; y) dl \geq \int_{AB} g(x; y) dl.$$

6. Якщо крива \overline{AB} складається із двох кривих AC і CB , то функція (рис. 10.2) $f(x; y)$ інтегрована на кривій \overline{AB} , причому



$$\int_{AB} f(x; y) dl = \int_{AC} f(x; y) dl + \int_{CB} f(x; y) dl.$$

Рисунок 10.2

7. Якщо функція $f(x; y)$ інтегрована на кривій \overline{AB} , то функція $|f(x; y)|$ також інтегрована на цій кривій і

$$\left| \int_{AB} f(x; y) dl \right| \leq \int_{AB} |f(x; y)| dl.$$

8. **Теорема (про середнє значення).** Якщо функція $f(x; y)$ неперервна на кривій \overline{AB} , то на цій кривій знайдеться така точка $f(x_0; y_0)$, що

$$\int_{AB} f(x; y) dl = f(x_0; y_0) \cdot l,$$

де l – довжина дуги кривої \overline{AB} .

10.2. Обчислення криволінійних інтегралів по дузі кривої

Під час обчислення криволінійних інтегралів першого роду завжди керуються такими правилами:

1) щоб обчислити криволінійний інтеграл першого роду, його необхідно звести до визначеного інтеграла;

2) завжди брати межі інтегрування від меншого числа до більшого, щоб зберігалась умова означення криволінійного інтегралу першого роду;

3) dx і dy брати завжди із знаком «+», оскільки

$$dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx;$$

4) якщо криволінійний інтеграл береться по замкнутому контуру, то жодних напрямків не вказувати, а контур завжди вибирати так, щоб змінна, за якою інтегруємо, відкладалася від меншого до більшого.

I. Крива інтегрування задана функцією в явному вигляді. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на деякому відрізку $[a; b]$, то довжина дуги, що задана цим рівнянням, визначається співвідношенням

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

1) $L: y = \varphi(x), x \in [a; b]$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \underbrace{\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2}}_{dl} dx. \quad (10.3)$$

2) $L: x = \psi(y), y \in [c; d]$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_c^d f(\psi(y), y) \underbrace{\sqrt{1 + (\psi'_y)^2}}_{dl} dy, \quad (10.4)$$

де $\varphi(x); \psi(y)$ – неперервні диференційовані функції.

II. Функція задана параметрично:

1) $R^2: L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \underbrace{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}_{dl} dt; \quad (10.5)$$

$$2) R^3: L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha; \beta] \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \underbrace{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}_{dl} dt. \quad (10.6)$$

Примітки

– $x(t); y(t); z(t)$ – неперервні диференційовані функції параметра t ;

– $m.A(x_1; y_1; z_1)$ відповідає значення параметра $t = \alpha$,

$$\text{тобто} \begin{cases} x_1 = x(\alpha) \\ y_1 = y(\alpha); \\ z_1 = z(\alpha) \end{cases}$$

– $m.B(x_2; y_2; z_2)$ відповідає значення параметра

$$t = \beta, \text{ тобто} \begin{cases} x_2 = x(\beta) \\ y_2 = y(\beta). \\ z_2 = z(\beta) \end{cases}$$

III. Функція задана полярним рівнянням

$$L: \rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \underbrace{\sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}}_{dl} d\varphi. \quad (10.7)$$

Примітки:

1) у разі застосування формули (10.7) функцію ρ обов'язково прописати через φ , щоб під знаком інтеграла одержати формулу однієї змінної;

2) кут φ потрібно задавати так, щоб верхня межа була записана більшим числом.

10.3. Практичне застосування криволінійних інтегралів першого роду

I. Геометричний зміст:

якщо взяти $f(x; y) = 1$, то $\int_{AB} 1 \cdot dl = l$. (10.8)

Висновок: криволінійний інтеграл першого роду за умови $f(x; y) = 1$ чисельно рівний довжині дуги \overline{AB} , за якої відбувається інтегрування.

II. Площа циліндричної поверхні S (рис. 10.3):

- 1) \overline{AB} – напрямна циліндричної поверхні;
- 2) твірні поверхні паралельні осі Oz ;
- 3) $f(x; y)$ – функція, яка задає рівняння поверхні в просторі.

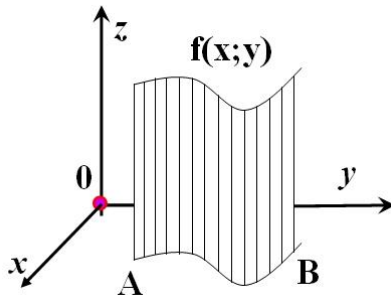


Рисунок 10.3

Висновок: площа циліндричної поверхні

$$S = \int_{AB} f(x; y) dl. \quad (10.9)$$

III. Механічний зміст

Криволінійний інтеграл першого роду по дузі \overline{AB} від невід'ємної функції $\gamma(x; y)$, яка задає густину матеріалу в кожній його точці, чисельно рівний масі цього тіла. Маса дуги кривої \overline{AB} визначається із співвідношення

$$m_V = \int_{AB} \gamma(x; y) dl. \quad (10.10)$$

IV. Статичні моменти кривої L :

– статичний момент кривої щодо осі Ox

$$M_{Ox} = \int_L y \gamma(x; y) dl; \quad (10.11)$$

– статичний момент кривої щодо осі Oy

$$M_{Oy} = \int_L x \gamma(x; y) dl. \quad (10.12)$$

V. Координати центра мас матеріальної кривої \overline{AB}

$$x_c = \frac{\int_L x \gamma(x, y) dl}{M_{Ox}}; \quad y_c = \frac{\int_L y \gamma(x, y) dl}{M_{Oy}}. \quad (10.13)$$

VI. Моменти інерції кривої I_x, I_y, I_0 щодо осей $Ox; Oy$ і початку координат відповідно дорівнюють:

$$I_{Ox} = \int_L y^2 \gamma(x; y) dl; \quad I_{Oy} = \int_L x^2 \gamma(x; y) dl; \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x; y) dl.$$

Приклад 10.1. Колесо без проковзувань котиться горизонтальною дорогою. Знайти довжину шляху, який пройде довільно вибрана точка M на ободі колеса радіу-

сом r за його один повний оберт, якщо кутова швидкість руху колеса $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$.

Розв'язання. Skorистаємося механічним змістом лінії циклоїди: за один повний оберт довільно вибрана матеріальна точка на ободі колеса описує траєкторію руху у вигляді одного витка циклоїди (рис. 10.4). Для розв'язання задачі скористаємося геометричним змістом криволінійного інтегралу першого роду та рівнянням лінії циклоїди. Урахуємо, що максимальна висота підйому матеріальної точки на лінії циклоїди чисельно рівна діаметру колеса.

Тоді параметр a в рівнянні циклоїди $L: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

чисельно рівний радіусу r ободу колеса.

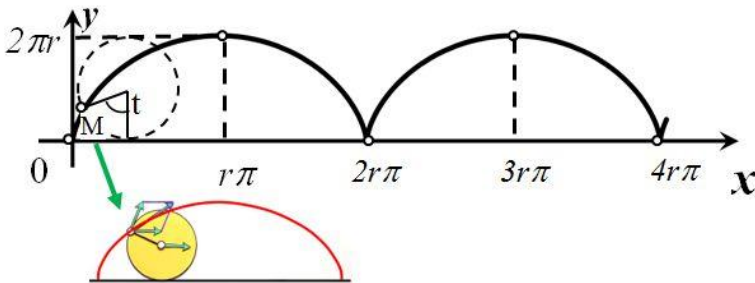


Рисунок 10.4

$$1) \quad l = \int_L dl =$$

$$\left[L: \begin{cases} x = r(t - \sin \omega t) \\ y = r(1 - \cos \omega t) \end{cases}; \quad \omega = 1 \text{ c}^{-1} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = r(1 - \cos t) \\ y'_t = r \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi] \right];$$

$$\begin{aligned}
2) \quad dl &= \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} dt = \\
&= \sqrt{r^2 (1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} dt = r \sqrt{4 \cdot \frac{1 - \cos t}{2}} dt = \\
&= 2r \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2r \cdot \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt; \\
3) \quad l &= \int_0^{2\pi} dl = \int_0^{2\pi} 2r \cdot \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \int_0^{\pi} 2r \cdot \sin \frac{t}{2} dt - \int_{\pi}^{2\pi} 2r \cdot (-\sin \frac{t}{2}) dt = \\
&= 2 \int_0^{\pi} 2r \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 4r \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -8r \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = -8r \cos \frac{\pi}{2} = 8r.
\end{aligned}$$

Відповідь: $l = 8r$.

Приклад 10.2. В електричному колі між двома контактами встановлено перемичку у формі арки циклоїди.

Рівняння лінії взяти у вигляді $L: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$. Питомий

опір вздовж провідника змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = \sqrt{y}$. Площа поперечного перерізу провідника – $l \text{ мм}^2$. Обчислити опір установленної перемички.

Розв'язання

1) скористаємося формулою для розрахунку опору R провідника ($R = \rho \frac{l}{S}$, де ρ – питомий опір, l – довжина провідника, S – площа поперечного перерізу). Оскільки провідник виготовлено із неоднорідного матеріалу, то візьмемо, що питомий опір провідника ρ від точки до точки

змінюється за законом $\gamma(x; y) = \sqrt{y}$, а $S = 1 \text{ мм}^2$. Тоді

$$R = \int_L \frac{\gamma}{S} dl = \int_L \frac{\sqrt{y}}{1} dl = \int_L \sqrt{y} dl;$$

2) зобразимо перемичку у вигляді першої арки циклоїди, за якою проводимо інтегрування (рис. 10.5).

Рівняння кривої циклоїди задане у вигляді:

$$L: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}. \text{ Тоді } \begin{cases} x'_t = a(1 - \cos t) \\ y'_t = a \sin t \end{cases}.$$

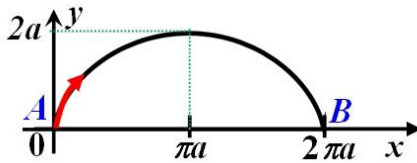


Рисунок 10.5

$$\begin{aligned} 3) \quad dl &= \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \\ &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= a \sqrt{4 \cdot \frac{1 - \cos t}{2}} = 2a \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \cdot \left| \sin \frac{t}{2} \right|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad R &= \int_L \sqrt{y} dl = \left[x \in [0; 2\pi] \right] \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a(1 - \cos t)} \cdot 2a \cdot \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \sqrt{2a} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} \cdot \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2a\sqrt{2a} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} dt = \sqrt{2a^3} \int_0^{2\pi} 2 \cdot \frac{1 - \cos t}{2} dt = \sqrt{2a^3} (t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = \\
 &= 2\pi\sqrt{2a^3}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $R = \int_L \sqrt{y} dl = 2\pi\sqrt{2a^3}$.

Приклад 10.3. Обчислити масу куска дроту, виготовленого із матеріалу, згорнутого у вигляді одного витка лемніскати Бернуллі, якщо його лінійна густина від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = x + y$.

Розв'язання

1) обчислимо масу куска дроту за формулою

$$m_v = \int_{AB} \gamma(x; y) dl = [\gamma(x; y; z) = x + y] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \gamma(\rho(\varphi), \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi;$$

2) запишемо рівняння одного листка лемніскати Бернуллі у вигляді $L: \rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$. Листок лемніскати один, тоді вважатимемо, що він розміщений у першій координатній чверті. Зобразимо криву, за якою проводимо інтегрування (рис. 10.6);

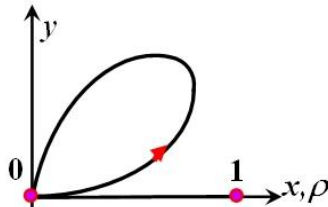


Рисунок 10.6

$$3) \rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2} d\varphi &= \sqrt{\sin 2\varphi + \left(\frac{1}{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot \cos 2\varphi \cdot 2 \right)^2} = \\ &= \sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \sqrt{\frac{\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{1}{\rho}; \end{aligned}$$

$$m = \int_L (x + y) dl = \int_{\left[\begin{array}{c} \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \\ \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2} = \frac{1}{\rho} \end{array} \right]} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi) \frac{1}{\rho} d\varphi = (-\cos \varphi + \sin \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

$$\text{Відповідь: } m = \int_L (x + y) dl = 2.$$

Приклад 10.4. Знайти координати центра мас металічної дуги, виготовленої з однорідного матеріалу з густиною γ у формі півкола радіуса $R = 2$.

Розв'язання

1) скористаємося канонічним рівнянням кола $x^2 + y^2 = 4$ та запишемо його в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}. \text{ За умовою металічна дуга має форму півкола,}$$

тоді $t \in [0; \pi]$;

2) оскільки дуга симетрична щодо осі Oy , то $x_C = 0$.

$$m = \int_0^\pi \gamma \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \gamma \int_0^\pi \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} dt =$$

$$= 2\gamma \int_0^{\pi} dt = 2\gamma\pi;$$

3) статичний момент кривої щодо осі Ox

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \int_L y\gamma(x, y)dl = \gamma \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt = \\ &= 2\gamma \int_0^{\pi} \sin t dt = 2\gamma(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 4\gamma; \end{aligned}$$

$$5) y_C = \frac{M_{Ox}}{m} = \frac{4\gamma}{2\pi\gamma} = \frac{2}{\pi}.$$

Відповідь: координати центра мас півкола $\left(0; \frac{2}{\pi}\right)$.

Приклад 10.5. З однорідного ($\gamma(x; y; z) = 1$) дроту виготовлено деталь у вигляді дуги кола $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Обчислити моменти інерції I_x, I_y, I_0 такого тіла щодо осей Ox, Oy і початку координат.

Розв'язання

Скористаємося формулами для моментів інерції щодо вісей Ox, Oy і початку координат. Маємо

$$\begin{aligned} 1) I_{Ox} &= \int_L y^2 \gamma(x, y) dl = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} dt = \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 4 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad I_{Oy} &= \int_L x^2 \gamma(x; y) dl = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt = \\
 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\
 &= 4 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad I_O &= \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x; y) dl = \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin^2 t) \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 8t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $I_{Ox} = 2\pi$; $I_{Oy} = 2\pi$; $I_O = 4\pi$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти масу відрізка прямої між точками $A(4;1;6)$ і $B(5;3;8)$, лінійна густина якої від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = 3x + 5y + z + 2$.

Відповідь: 92,5.

2. Обчислити масу дуги кривої, густина якої від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = x + y$, а дуга має форму лінії кола $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$, що розміщене в першому квадранті.

Відповідь: $4\sqrt{2}$.

3. Обчислити масу однорідної дуги кривої

$$\rho = a \sin \varphi, \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Відповідь: 7.

4. Обчислити масу дроту, що має форму дуги гвинтової лінії $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = t\sqrt{3}$, $t \in [0; \pi]$, лінійна густина матеріалу якого від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Відповідь: $2\pi(1 + \pi^2)$.

5. Знайти статичні моменти однорідної дуги астроїди $x = 3 \cos^3 t$, $y = 3 \sin^3 t$, яка розміщена в I четверті.

Відповідь: $M_{Ox} = \frac{27}{5}$; $M_{Oy} = \frac{27}{5}$.

6. Обчислити координати центра мас однорідної дуги кривої, що описує лінія кола $x = -\sqrt{9 - y^2}$, $y \leq 0$.

Відповідь: $\left(-\frac{6}{\pi}; -\frac{6}{\pi}\right)$.

7. Знайти координати центра мас першої арки однорідної циклоїди $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$.

Відповідь: $\left(\pi; \frac{4}{3}\right)$.

8. Знайти момент інерції щодо осі Ox першого витка гвинтової лінії $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = \frac{3t}{2\pi}$.

Відповідь: $I_{Ox} = \frac{7}{2}\sqrt{4\pi^2 + 9}$.

9. Знайти момент інерції однорідної дуги астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, яка розміщена в I четверті щодо осі Oy .

Відповідь: $I_{Oy} = \frac{3}{8}$.

10. Обчислити момент інерції щодо початку координат однорідного металічного контура, виговленого у формі квадрата зі сторонами $x = \pm 5$; $y = \pm 5$.

Відповідь: $I_0 = \frac{32}{3}$.

10.4. Криволінійні інтеграли другого роду

10.4.1. Основні поняття та означення

Означення криволінійного інтеграла другого роду.

Розглянемо таку задачу. Нехай точка $C(x; y)$ рухається вздовж деякої плоскої кривої L від точки D до точки B . До точки $C(x; y)$ прикладена сила \vec{F} , яка змінюється по величині і напрямку в разі переміщення точки $C(x; y)$. Обчислити роботу A сили \vec{F} за умови переміщення точки $C(x; y)$ від точки D до точки B . Під час розв'язання цієї задачі врахуємо таке:

1) оскільки, сила \vec{F} змінюється за величиною і напрямком у разі переміщення точки $C(x; y)$, то вона являє собою функцію координат точки C , тобто $\vec{F} = \vec{F}(x; y)$;

2) розглянемо рух точки C по кривій CD (рис. 10.7); розіб'ємо криву DB точками $D = M_0; M_1; M_2; \dots; M_i; \dots; M_n = B$ на n довільних дуг $\overline{M_i M_{i+1}}$ довжиною Δl_i . Величину сили $\vec{F}(x; y)$ у точці $M_i(x_i; y_i)$ позначимо через $\vec{F}_i(x_i; y_i)$;

3) щоб обчислити роботу A сили \vec{F} у разі переміщення точки $C(x; y)$ із точки D до точки B , згадаємо фізичний зміст скалярного добутку двох векторів:
 $A = F \cdot s \cdot \cos \varphi = (\vec{F}, \vec{s});$

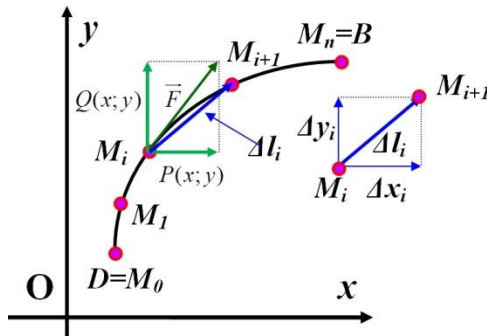


Рисунок 10.7

4) розглянемо вектор $\vec{F}_i(x_i; y_i)$ та введемо такі позначення:

- $P_i(x_i; y_i)$ проекція $\vec{F}_i(x_i; y_i)$ на вісь Ox ;
- $Q_i(x_i; y_i)$ проекція $\vec{F}_i(x_i; y_i)$ на вісь Oy .

Тоді $\vec{F}_i(x_i; y_i) = P_i(x_i; y_i) \cdot \vec{i} + Q_i(x_i; y_i) \cdot \vec{j}$,

або $\vec{F}_i(x_i; y_i) = \overline{(P_i(x_i; y_i); Q_i(x_i; y_i))}$;

5) розглянемо вектор $\vec{\Delta l}_i$ та введемо такі позначення:

- Δx_i проекція $\vec{\Delta l}_i$ на вісь Ox ;
- Δy_i проекція $\vec{\Delta l}_i$ на вісь Oy .

Тоді $\vec{\Delta l}_i = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j}$, або $\vec{\Delta l}_i = \overline{(\Delta x_i; \Delta y_i)}$;

б) робота сили з переміщення точки $C(x; y)$ по кривій DB із точки M_i до точки M_{i+1} рівна скалярному добутку

$$\left(\vec{F}_i, \overline{\Delta l}_i\right) = P_i(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i + Q_i(x_i; y_i) \cdot \Delta y_i;$$

7) наближене значення роботи сили по всій кривій DB буде рівне сумі

$$A \approx \sum_{i=1}^n (P_i(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i + Q_i(x_i; y_i) \cdot \Delta y_i);$$

Отже, уся робота буде рівна граничному значенню суми

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n (P_i(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i + Q_i(x_i; y_i) \cdot \Delta y_i).$$

Означення. Тоді якщо існує скінченна границя інтегральної суми

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n (P_i(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i + Q_i(x_i; y_i) \cdot \Delta y_i),$$

яка не залежить ні від способу ділення дуги l на частини l_i , ні від вибору точок $(x_i, y_i) \in \Delta l_i$, то ця границя називається

криволінійним інтегралом другого роду по координатах і

позначається $\int_{DB} (P(x; y) \cdot dx + Q(x; y) dy)$. Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n (P_i(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i + Q_i(x_i; y_i) \cdot \Delta y_i) = \\ = \int_{DB} (P(x; y) \cdot dx + Q(x; y) dy). \end{aligned} \quad (10.14)$$

Примітки:

– у разі замкненої кривої $DB = L$ криволінійний інтеграл позначається $\oint_L P(x; y) \cdot dx + Q(x; y)dy$ або $\oint_L P dx + Q dy$;

– за додатний напрямок обходу контуру взято рух матеріальної точки по кривій проти годинникової стрілки.

10.4.2. Механічний зміст криволінійного інтеграла другого роду

Інтеграл $\int_{DB} (P(x; y) dx + Q(x; y) dy)$ чисельно дорівнює роботі змінної сили $\vec{F} = P(x; y)\vec{i} + Q(x; y)\vec{j}$ з переміщення матеріальної точки $C(x; y)$ вздовж кривої \overline{DB} від точки D до точки B .

10.4.3. Властивості криволінійних інтегралів другого роду

1. $\int_{BD} 0 dx = \int_{BD} 0 dy = 0$.

2. $\int_{BD} P(x; y) dx = 0$, якщо \overline{DB} – відрізок, \perp до осі Ox .

$\int_{BD} Q(x; y) dy = 0$, якщо \overline{DB} – відрізок, \perp до осі Oy .

3. $\int_{DB} c \cdot P(x; y) dx + c \cdot Q(x; y) dy = c \int_{DB} (P(x; y) dx + Q(x; y) dy)$,

$c = const$.

4. Якщо крива \overline{DB} є об'єднанням кривих DC і CB , причому кінець C кривої DC є початком кривої CB , то

$$\int_{DB} (P(x; y)dx + Q(x; y)dy) =$$

$$= \int_{DC} (P(x; y)dx + Q(x; y)dy) + \int_{CB} (P(x; y)dx + Q(x; y)dy).$$

5. У разі зміни напрямку обходу контуру криволінійний інтеграл змінює знак на протилежний

$$\int_{DB} (P(x; y) \cdot dx + Q(x; y)dy) = - \int_{BD} (P(x; y) \cdot dx + Q(x; y)dy).$$

6. Криволінійний інтеграл по замкнутій кривій ϕ не залежить від вибору початкової точки, але залежить від вибору напрямку обходу кривої (рис. 10.8).

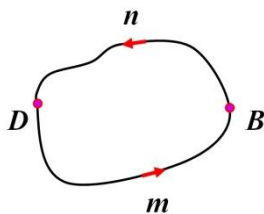


Рисунок 10.8

10.5. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

I. Крива задана в явному вигляді:

1) $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, тоді

$$\int_{DB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \left[\begin{array}{l} y = y(x) \\ dy = y'(x)dx \end{array} \right] =$$

$$= \int_a^b P(x, y(x))dx + Q(x, y(x))y'(x)dx;$$

2) $x = x(y)$, $y \in [c; d]$, тоді

$$\int_{DB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \left[\begin{array}{l} x = x(y) \\ dx = x'(y)dy \end{array} \right] = \\ = \int_c^d P(x(y), y)x'(y)dy + Q(x(y), y)dy.$$

II. Крива задана параметрично:

$x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$; $t \in [\alpha; \beta]$, тоді

$$\int_{DB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \left[\begin{array}{l} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \\ dz = z'(t)dt \end{array} \right] = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t); y(t); z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t); y(t); z(t)) \cdot y'(t) + \\ + R(x(t); y(t); z(t)) \cdot z'(t)) dt.$$

10.6. Практичне застосування криволінійних інтегралів по координатах

I. Робота A змінної сили $\vec{F}(P(x; y); Q(x; y))$ у разі переміщення матеріальної точки по криволінійній ділянці AB (див. означення криволінійного інтеграла другого роду)

$$A = \int_{AB} (P(x; y)dx + Q(x; y)dy). \quad (10.15)$$

II. Закон Ампера, магнітне поле (рис. 10.9)

$$\mu_0 I = \oint_L \vec{B} d\vec{r},$$

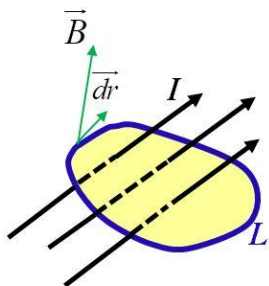


Рисунок 10.9

де \vec{B} – індукція магнітного поля вздовж замкнутого контура L ;

$d\vec{r}$ – напрямок струму в контурі;

$$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{А}} \quad \text{—}$$

магнітна проникність вакууму.

III. Закон Фарадея, електрорушійна сила (рис. 10.10)

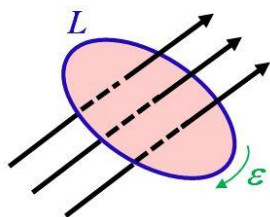


Рисунок 10.10

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l},$$

де \vec{E} – напруженість електричного поля;

$d\vec{l}$ – елемент довжини контуру.

Приклад 10.6. Обчислити роботу, яку виконує сила

$$\vec{F} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}; \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

у разі переміщення матеріальної точки вздовж замкнутого контуру по лінії кола $L: x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання

Згідно з фізичним змістом криволінійного інтеграла другого роду маємо

$$A = \oint_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \left[\begin{array}{l} P(x; y) = \frac{x}{x^2 + y^2}; \\ Q(x; y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ L: x^2 + y^2 = R^2 \end{array} \right] \langle \Rightarrow \rangle$$

1) скористаємося параметричним рівнянням кола

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

2) урахуємо, що $\begin{cases} x'_t = R(-\sin t) \\ y'_t = R \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

3) тоді отримаємо інтеграл

$$\begin{aligned} \langle \Rightarrow \rangle \oint_L \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy &= \\ = \oint_L \frac{R \cos t \cdot R \cos t - R \sin t \cdot R (-\sin t)}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Відповідь: сила \vec{F} виконає роботу $A = 2\pi$ (Дж).

Приклад 10.7. Обчислити роботу сили $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ у разі переміщення матеріальної точки за траєкторією у вигляді гвинтової лінії $x = a \cos t$; $y = a \sin t$; $z = bt$; $t \in [0; \pi]$.

Розв'язання. Урахуємо, що $P(x; y; z) = z$; $Q(x; y; z) = x$; $R(x; y; z) = y$. Маємо

$$\begin{aligned}
A &= \int_L P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz = \\
&= \left[\begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = a \sin t, t \in [0; \pi] \\ z = bt \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x'_t = -a \sin t \\ y'_t = a \cos t \\ z'_t = b \end{array} \right] = \int_L z dx + x dy + y dz = \\
&= \int_0^\pi [bt(-a \sin t) dt + a \cos t \cdot a \cos t dt + ab \sin t dt] = \\
&= -ab \underbrace{\int_0^\pi t \sin t dt}_1 + a^2 \underbrace{\int_0^\pi \cos^2 t dt}_2 + ab \int_0^\pi \sin t dt \quad [=]. \\
1. \int_0^\pi t \sin t dt &= \left[\begin{array}{l} u = t, \quad du = dt \\ dv = \sin t dt, \quad v = -\cos t \end{array} \right] = -t \cos t \Big|_0^\pi + \underbrace{\int_0^\pi \cos t dt}_0 = \pi. \\
2. \int_0^\pi \cos^2 t dt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \\
[=] -ab\pi + \frac{a^2\pi}{2} - ab \cos t \Big|_0^\pi &= -ab\pi + \frac{a^2\pi}{2} + 2ab = \frac{a^2\pi}{2} + ab(2 - \pi).
\end{aligned}$$

Відповідь: сила \vec{F} виконає роботу

$$A = \frac{\pi a^2}{2} - ab(\pi - 2) \text{ (Дж)}.$$

Приклад 10.8. Обчислити роботу сили $\vec{F} = x^3\sqrt{y}\vec{i} + 5x^2\vec{j}$ у разі переміщення одиниці маси за траєкторією у вигляді гвинтової лінії $x = 3 \cos t$; $y = \sin^3 t$; $z = bt$; $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Розв'язання

$$A = \int_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \left[\begin{array}{l} P(x; y) = x\sqrt[3]{y}; \quad Q(x; y) = 5x^2 \\ L: \begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right] \\ \begin{cases} x'_t = -3\sin t \\ y'_t = 3\sin^2 t \cdot \cos t \end{cases} \end{array} \right] =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[3\cos t (\sin^3 t)^{\frac{1}{3}} \cdot (-3\sin t) + 5(3\cos t)^2 \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t \right] dt =$$

$$= -9 \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt}_1 + 135 \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \cdot \cos t dt}_2 =$$

$$= -\frac{21}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{423}{4} = \frac{339}{32} = 10\frac{19}{32}.$$

$$1. -9 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt = -9 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d(\sin t) = -9 \cdot \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -3 \left(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{21}{8}.$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & 135 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \cdot \cos t dt = 135 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) \cdot \cos t dt = \\
& = 135 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \\
& = 135 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d(\sin t) - 135 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) = \\
& = 135 \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - 135 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
& = -\frac{45 \cdot 7}{8} - 27 \left(\sin^5 \frac{\pi}{2} - \sin^5 \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{423}{4}.
\end{aligned}$$

Відповідь: сила \vec{F} виконає роботу $A = 10 \frac{19}{32}$ (Дж).

Приклад 10.9. Обчислити індукцію магнітного поля \vec{B} у вакуумі на відстані r від осі нескінченно довгого провідника зі струмом I .

Розв'язання. Розглянемо коловий контур радіуса r (рівняння лінії контура запишемо в параметричному вигляді $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$, який розміщений перпендикулярно провіднику зі струмом (див. рис. 10.10).

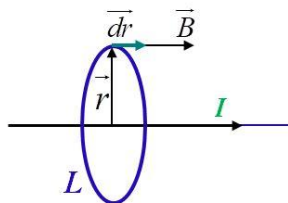


Рисунок 10.11

Урахуємо, що вектор магнітної індукції поля \vec{B} у будь-якій точці контура направлений по дотичній до цієї лінії. Тоді

$$(\vec{B}, d\vec{r}) = |\vec{B}| \cdot |d\vec{r}| \cos(\vec{B}, d\vec{r}) = |\vec{B}| \cdot |d\vec{r}| = B \cdot dr.$$

$$\text{Скористаємося рівністю } \mu_0 I = \oint_L \vec{B} d\vec{r} = \oint_L B \cdot dr = B \oint_L dr.$$

$$\text{Урахуємо, що } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -r \sin t \\ y'_t = r \cos t \end{cases}.$$

$$B \oint_L dr = B \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} dt = Br t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r B.$$

$$\mu_0 I = 2\pi r B \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Відповідь: нескінченно довгий провідник із током I породжує магнітне поле, вектор магнітної індукції якого $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Приклад 10.10. Знайти значення електрорушійної сили ε і електричного поля \vec{E} , яка виникає в кільці радіусом l см у пасажира літака в разі польоту літака в магнітному полі Землі зі швидкістю $900 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Розв'язання. Згідно із законом Фарадея $\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$.

За заданих умов електрорушійна сила $\varepsilon = 2rBv$, де v – швидкість літака, B – індукція магнітного поля Землі.

Урахуємо дані задачі

$$v = 900 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 250 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad r = 0,01 \text{ м}; \quad B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Т}.$$

$$\text{Тоді } \varepsilon = 2rBv = 2 \cdot 0,01 \cdot 250 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 0,00025B.$$

Урахуємо, що електричне поле завдяки своїй симетрії матиме постійну амплітуду в будь-якій точці кільця і напрямлено по дотичній до кільця в будь-якій його точці.

Тоді маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L |\vec{E}| \cdot |d\vec{l}| \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L E \cdot dl \cdot \cos 0^\circ = \\ &= \oint_L E \cdot dl = E \oint_L dl = 2\pi r E. \end{aligned}$$

$$\varepsilon = 2\pi r E \Rightarrow E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = \frac{0,0025}{2\pi \cdot 0,01} = 0,004 \text{ В/м.}$$

Відповідь: $E = 0,004 \frac{B}{m}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити роботу сили $\vec{F} = yx\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ у разі переміщення від точки $O(0;0)$ у точку $B(1;2)$ матеріальної точки вздовж траєкторії, яку описує рівняння прямої $y = 2x$.

Відповідь: $\frac{13}{3} \text{ Дж.}$

2. Обчислити роботу, яку виконає сила $\vec{F} = (6 - y)\vec{i} + (6 - y)\vec{j}$, що спричиняє рух точки M на ободі колеса радіусом r за його один повний оберт, якщо кутова швидкість руху колеса $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$.

Відповідь: $36\pi \text{ Дж.}$

3. Поле утворено силою $\vec{F}(P(x; y); Q(x; y))$, де $P(x; y) = x - y$, $Q(x; y) = x$. Обчислити роботу сили в разі переміщення одиниці маси по контуру квадрата $x = \pm 2$; $y = \pm 2$.

Відповідь: 32 Дж.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F} = (y + x)\vec{i} + 2x\vec{j}$ у разі переміщення матеріальної точки по лінії кола радіусом 5 м у напрямку ходу часової стрілки.

Відповідь: 32 Дж.

5. Поле утворено силою $\vec{F}(P(x; y); Q(x; y))$, де $P(x; y) = y$, $Q(x; y) = x + y$. Обчислити роботу сили \vec{F} у разі переміщення матеріальної точки по траєкторії параболу $y = x^2$ із початку координат у точку $(1; 1)$.

Відповідь: $\frac{5}{3}$ Дж.

6. Обчислити роботу, яку виконає сила $\vec{F} = y\vec{i} + xz\vec{j} + (x^3 - 3y)\vec{k}$, у разі переміщення одиниці маси по контуру $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = 2$, $y \geq 0$.

Відповідь: $\frac{3}{2}\pi$ Дж.

7. Поле утворено силою $\vec{F}(P(x; y); Q(x; y))$, де $P(x; y) = y$, $Q(x; y) = a$. Обчислити роботу сили \vec{F} у разі переміщення маси m по траєкторії лінії еліпса $x = 4 \cos t$; $y = 5 \sin t$; $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Відповідь: $5\pi m$ Дж.

8. У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F} = x^2 y \vec{i} + (x - y) \vec{j}$. Обчислити роботу, яку виконає сила в разі переміщення цієї точки по лінії кубічної параболи $y = x^3$ із початку координат у точці $A(1; 1)$.

Відповідь: $\frac{5}{12}$ Дж.

9. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = x^2 y \vec{i} + (x - y) \vec{j}$, яка переміщує масу m по ламаній, що сполучає точки $O(0; 0)$; $A(1; 1)$; $C(1; 0)$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}$ Дж.

10. Поле утворено силою

$$\vec{F}(P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z)),$$

де $P(x; y; z) = x^2$, $Q(x; y; z) = -1$; $R(x; y; z) = -zy$. Обчислити роботу сили \vec{F} у разі переміщення матеріальної точки найкоротшим шляхом від $m. A(1; -1; 2)$ до $m. B(2; 0; 3)$.

Відповідь: 2,5 Дж.

10.7. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду

Введемо такі позначення. Нехай α і β – кути, які з осями координат утворює напрямна дотична до кривої AB у точці M (рис. 10.12).

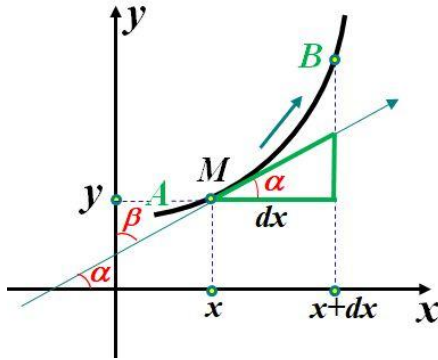


Рисунок 10.12

За додатний напрямок дотичної виберемо той, який відповідає руху точки M по кривій AB . Скористаємося геометричним змістом диференціала функції і диференціала дуги, а саме:

$$|\vec{MB}| = dl; \quad dx = \cos \alpha \, dl, \quad dy = \cos \beta \, dl.$$

Замінімо в криволінійному інтегралі другого роду dx і dy їхніми значеннями

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x; y) \, dx &= \int_{AB} P(x; y) \cos \alpha \, dl, \\ \int_{AB} Q(x; y) \, dy &= \int_{AB} Q(x; y) \cos \beta \, dl, \\ \int_{AB} P \, dx + Q \, dy &= \int_{AB} P \cos \alpha \, dl + Q \cos \beta \, dl. \\ \int_{AB} P \, dx + Q \, dy &= \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) \, dl. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Примітка. У разі зміни напрямку руху по кривій формули не змінюються, оскільки водночас змінюються знаки dx , dy , $\cos \alpha$, $\cos \beta$.

10.8. Формула Гріна – Остроградського. Незалежність криволінійного інтеграла по координатах від шляху інтегрування

Означення. Область називається простою, якщо контур, що її обмежує, перетинається прямими, паралельними координатним осям, не більше ніж у двох точках.

Означення. Під однозв'язною областю йдеться про область D «без дірок». Вона має особливість: будь-яка проведена в ній замкнута крива внаслідок деформації може бути стягнута в точку і водночас вона весь час буде залишатись в області.

Якщо функції $P(x; y)$ та $Q(x; y)$ мають неперервні частинні похідні в простій однозв'язній області D , яка обмежена замкнутим контуром L , то справедлива **формула Гріна – Остроградського**

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (10.17)$$

де криволінійний інтеграл обчислюється за межею області D , яка обов'язково орієнтована додатно.

Примітка. Якщо область інтегрування є складною, то її розбивають на прості області $D = D_1 \cup D_2$, де D_1, D_2 – прості.

Якщо область інтегрування є багатозв'язною, то розіб'ємо цю область на чотири прості (рис. 10.13).

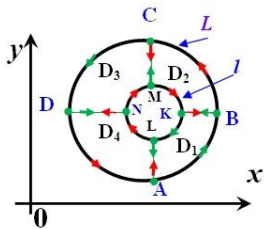


Рисунок 10.13

$$\int_L + \int_I = \iint_D$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{AB} + \int_{BK} + \int_{KL} + \int_{LA} = \iint_{D_1}, \\ \int_{BC} + \int_{CM} + \int_{MK} + \int_{KB} = \iint_{D_2}, \\ \int_{CD} + \int_{DN} + \int_{NM} + \int_{MC} = \iint_{D_3}, \\ \int_{DA} + \int_{AL} + \int_{LN} + \int_{ND} = \iint_{D_4}. \end{array} \right.$$

$$\int_{AB} + \int_{KL} + \int_{BC} + \int_{MK} + \int_{CD} + \int_{NM} + \int_{DA} + \int_{LN} = \iint_D$$

Незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. За умови, що значення криволінійного інтеграла залишається однаковим по всіх можливих кривих, які сполучають кінцеві точки інтегрування, то вважають, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Нехай функції $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ визначені і неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ в деякій замкненій однозв'язній області D . Тоді наступні чотири умови еквівалентні, тобто виконання однієї з них спричиняє за собою виконання інших трьох:

1. Для довільної замкненої кусково-гладкої кривої, що належить області D ,

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

2. Для довільних двох точок M та N області D значення інтеграла $\int_{MN} Pdx + Qdy$ не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області D .

3. Вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції, яка визначена в області D . Інакше кажучи, існує така функція $F(x; y)$, визначена в області D , що $dF = Pdx + Qdy$.

4. В усіх точках області D виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Умови 3 і 4 – необхідна і достатня умови, за яких криволінійний інтеграл *не залежить від шляху інтегрування*. На практиці здебільшого користуються достатньою умовою $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Розглянемо практичне застосування криволінійних інтегралів під час розв'язання фізичних задач.

Приклад 10.11. Поле утворено силою $\vec{F}(P(x; y); Q(x; y))$, де $P(x; y) = -x^2y$, $Q(x; y) = xy^2$. Обчислити роботу сили \vec{F} у разі переміщення маси m по траєкторії лінії $L: x^2 + y^2 = R^2$ у напрямку проти годинникової стрілки.

Розв'язання. Звернемося до формули $A = \oint_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy$. Область інтегрування обмежена лінією кола. Вона є правильною, однозв'язною і додатно орієнтованою за умовою задачі. Тому в цій задачі можемо перейти від криволінійного інтеграла по замкнутому контуру до подвійного інтеграла за теоремою Гріна – Остроградського

$$\begin{aligned}
 A &= \oint_L -x^2 y \, dx + xy^2 \, dy = \left[\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 y) = -x^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2 \end{array} \right] = \\
 &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy = \left[\begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq R, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y^2 + x^2 = \rho^2 \end{array} \right] = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $A = \frac{\pi R^4}{2}$ (Джс).

Приклад 10.12. Поле утворено силою $\vec{F}(2(x^2 + y^2); (x + y)^2)$. Обчислити роботу сили \vec{F} у разі переміщення матеріальної точки по контуру трикутника L із вершинами $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(1; 3)$.

Розв'язання. Траєкторія руху матеріальної точки є замкненою (рис. 10.14). Звернемося до формули

$$A = \oint_L P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \oint_L (2x^2 + 2y^2) dx + (x + y)^2 dy.$$

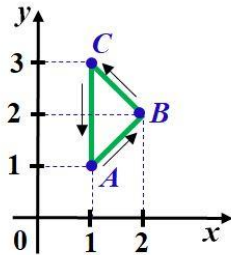


Рисунок 10.14 – Траєкторія руху матеріальної точки

$$\begin{aligned}
A &= \left[\begin{array}{l} \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} = 2(x + y) \\ \frac{\partial Q(x; y)}{\partial x} = 2y \end{array} \right] = \iint_D (2(x + y) - 4y) dx dy = \\
&= \left[D: \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq 4 - x \end{array} \right\} \right] = \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (2(x + y) - 4y) dy = \\
&= 2 \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y) dy = - \int_1^2 (x - y)^2 \Big|_x^{4-x} dx = -4 \int_1^2 (x - 2)^2 dx = \\
&= -\frac{4}{3} (x - 2)^3 \Big|_1^2 = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $A = -\frac{4}{3}$ (Дж).

Приклад 10.13. Поле утворено силою $\vec{F}(x^2 - 3y + 4; 2x + y^3 - 1)$. Обчислити роботу сили \vec{F} у разі переміщення матеріальної точки по контуру L , який заданий рівнянням еліпса $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Зауважити, що рух відбувається проти годинникової стрілки.

Розв'язання. За означенням $A = \int_L P(x; y) dx + Q(x; y) dy$.

Траскторія руху матеріальної точки є замкненою (рис. 10.15). Тоді для розв'язування задачі застосуємо формулу Гріна. Областю D_{xy} є частина площини Oxy , обмежена лінією

еліпса, разом із її границею, тобто $D_{yx}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

$$A = \oint_L P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

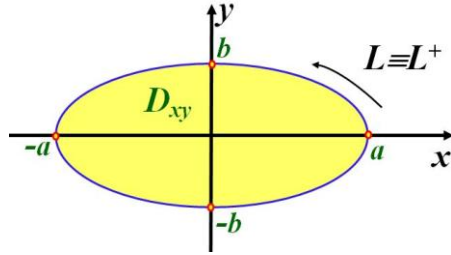


Рисунок 10.15 – Траекторія руху

$$\begin{aligned}
 A &= \oint_L (x^2 - 3y + 4) dx + (2x + y^3 - 1) dy = \left[\begin{array}{l} \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} = -3 \\ \frac{\partial Q(x; y)}{\partial x} = 2 \end{array} \right] = \\
 &= \iint_D 5 dx dy = 4 \iint_{D^*} 5 dx dy = \left[D^* : \begin{cases} x \in [0; a] \\ y \in \left[0; b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right] \end{cases} \right] = \\
 &= 20 \int_0^a dx \int_0^{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dy = 20 \int_0^a \left(y \Big|_0^{b \sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx = 20 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\
 &= 20 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} 1) x = a \cos t, dx = -a \sin t dt \Rightarrow t = \arccos \frac{x}{a} \\ 2) \text{якщо } x_1 = 0, \text{ то } t_1 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \\ \text{якщо } x_2 = a, \text{ то } t_2 = \arccos 1 = 0 \end{array} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 20 \frac{b}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sqrt{1 - \cos^2 t} (-a \sin t) dt = 20ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\
&= 10ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 10ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 10ab \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi ab .
\end{aligned}$$

Відповідь: $A = 5\pi ab$ (Дж).

Приклад 10.14. Поле нерухомого точкового електричного заряду, розміщеного в початку координат, задається вектор-функцією

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_0}{r^3} \vec{r},$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений із початку координат у точку, де визначається поле, q_0 – величина заряду. Визначити роботу поля з переміщення точкового заряду q по замкненому контуру у вигляді еліпса $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ під час руху в напрямку проти годинникової стрілки з точки $A(3; 0)$.

Розв’язання. Сила, що діє на заряд q

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_0q}{r^3} \vec{r}.$$

Для двовимірного випадку робота сили

$$\begin{aligned}
A &= \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_L \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_0q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \\
&= \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_L \frac{(x\vec{i} + y\vec{j})}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_L \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} .
\end{aligned}$$

Скористаємося параметричним рівнянням еліпса

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi], \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} dx = -3 \sin t \\ dy = 2 \cos t \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{3 \cos t \cdot (-3) \sin t \, dt + 2 \sin t \cdot 2 \cos t \, dt}{\sqrt{(9 \cos^2 t + 4 \sin^2 t)^3}} = \\ &= -\frac{5q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{\cos t \cdot \sin t \, dt}{\sqrt{(9 - 5 \sin^2 t)^3}} = \left[\begin{array}{l} 1) \sin t = u \Rightarrow \cos t \, dt = du \\ 2) \text{нпу } t_1 = 0, \quad u_1 = 0 \\ \quad \text{нпу } t_2 = 2\pi, \quad u_2 = 0 \end{array} \right] = 0. \end{aligned}$$

Примітка: для заданого поля

$$\begin{aligned} P(x; y) &= \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad Q(x; y) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}. \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{q_0 q x}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{3xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) &= \frac{q_0 q y}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{3xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned}$$

Отже, виконано умови теореми про незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування, а тому інтеграл за будь-яким замкненим контуром L дорівнює нулю.

Відповідь: $A = 0$ (Дж).

Приклад 10.15. Для розглянутого в попередньому прикладі поля знайти його роботу в разі переміщення заряду q із точки $A(-3; 0)$ у точку $B(3; 0)$ по верхній половині еліпса $L : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Розв'язання. У цьому разі знаходження роботи $A = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_L} \int_L \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ призводить до досить складних дій

під час взяття інтегралів. Скористаємося висновками з попереднього прикладу $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. За цієї умови криволіній-

ний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Тому замість верхньої половини еліпса ми обчислимо інтеграл за відрізком прямої $y = 0$, який з'єднує точки $A(-3; 0)$ і $B(3; 0)$. Водночас $y = 0, dy = 0$, тоді

$$A = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_L} \int \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{-3}} \int_{-3}^3 \frac{xdx}{|x|^3} = 0.$$

Цей інтеграл від непарної функції в симетричних межах.

Відповідь: $A = 0$ (Дж).

Примітка. У прикладі 10.15 рівність роботи нулю обумовлена тим, що вибрані точки розташовані на однако- вій відстані від джерела поля. З погляду фізики вони ле- жать на одній еквіпотенціальній поверхні.

Задачі для самостійної роботи

Поле утворено силою $\vec{F}(P(x; y); Q(x; y))$. Обчис- лити роботу сили \vec{F} у разі переміщенні маси m за траек- торією лінії L (рух проти годинникової стрілки).

Таблиця 10.1

№	$\vec{F}(P(x; y); Q(x; y))$	Контур L обмежений кривими	Відповідь
1	$P(x; y) = y^2$ $Q(x; y) = x^2$	$y = x; y = 0; x = 1$	$\frac{1}{3}$ (Дж)
2	$P(x; y) = (x - y)^2$ $Q(x; y) = (x + y)^2$	Контур трикутника з вершинами в точках $A(0; 0), B(2; 0),$ $C(4; 2)$	16 (Дж)
3	$P(x; y) = y$ $Q(x; y) = x^2 - y$	$y = 2x - x^2; y = 0$	-4 (Дж)
4	$P(x; y) = x \cdot y$ $Q(x; y) = -y^2$	$y = x^2; y = 4; x = 0$	-4 (Дж)
5	$P(x; y) = xy + x + y$ $Q(x; y) = xy + x - y$	$x^2 + y^2 = 2x$	$-\pi$ (Дж)
6	$P(x; y) = xy + x + y$ $Q(x; y) = xy + x - y$	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$	0 (Дж)
7	$P(x; y) = e^x \sin y - 2y$ $Q(x; y) = e^x \cos y - 2$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ y > 0 \end{cases}$ і віссю Ox	π (Дж)
8	$P(x; y) = x^2 - 4y$ $Q(x; y) = 2xy + 3$	$y = x^2 + 1; y = x + 1$	$\frac{17}{15}$ (Дж)

Продовження таблиці 10.1

№	$\vec{F}(P(x; y); Q(x; y))$	Контур L обмежений кривими	Відповідь
9	$P(x; y) = x^3$ $Q(x; y) = \frac{yx^2}{2}$	Контур трикутника з вершинами в точках $A(0;0), B(1;0),$ $C(0;1)$	$\frac{1}{24} (Дж)$
10	$P(x; y) = -y^2$ $Q(x; y) = \frac{x^3}{3}$	Контур прямокутника $0 \leq x \leq 1;$ $0 \leq y \leq 2$	$\frac{14}{3} (Дж)$

РОЗДІЛ 11 ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

11.1. Поверхневі інтеграли першого роду. Основні поняття та означення

Означення. Поверхня S називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і в разі переходу від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно.

Означення. Поверхня, яка складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь називається *кусково-гладкою*.

11.1.1. Задача про визначення маси неоднорідної оболонки

Розглянемо гладку поверхню S , яку можна вважати тонкостінною оболонкою. Задамо для кожної точки поверхні неперервну функцію $f(x; y; z) = \gamma(x, y, z)$ (рис. 11.1), яка визначає поверхневу густину матеріалу в цій точці. Знайдемо масу неоднорідної оболонки.

За допомогою кусково-гладких ліній поділимо оболонку S на n елементарних площин S_i . Тоді $\Delta S_i (i = 1 \dots n)$ – площа кожної елементарної площини.

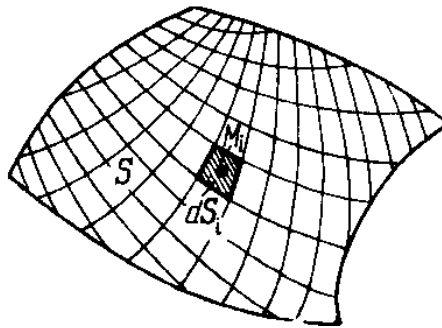


Рисунок 11.1 – Тонкостінна оболонка

d_i – відстань між максимально віддаленими точками елементарної площини S_i .

На кожній площині S_i довільно виберемо m . $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і обчислимо значення поверхневої густини $\gamma(x, y, z)$ у цій точці. Тоді маса кожної ділянки дроблення $m_i \approx \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$, а маса всієї неоднорідної оболонки

$$m \approx \gamma(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta S_1 + \gamma(x_2, y_2, z_2) \cdot \Delta S_2 + \dots + \gamma(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i + \dots + \gamma(x_n, y_n, z_n) \cdot \Delta S_n = \quad (11.1)$$

$$= \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i .$$

Вираз (11.1) – інтегральна сума по поверхні S неоднорідної оболонки для функції $\gamma(x, y, z)$.

Фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду полягає в тому, що маса поверхні S вигнутої пластини, густина розподілу маси якої описує функція $\gamma(x; y; z)$, визначається за співвідношенням

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z) dS . \quad (11.2)$$

Наслідок. Якщо оболонка є однорідною $\gamma(x, y, z) = 1$, то інтеграл $\iint_S dS$ чисельно рівний площі поверхні, за якою проводиться інтегрування

$$S = \iint_S dS . \quad (11.3)$$

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$, яка не залежить ні від способу поділу тонкостінної оболонки на частини S_i , ні від вибору

точок $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$ то ця границя називається **поверхневим інтегралом першого роду по поверхні S від функції $\gamma(x, y, z)$** і позначається $\iint_S \gamma(x, y, z) dS$. Отже,

$$\lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \iint_S \gamma(x, y, z) dS. \quad (11.4)$$

Теорема. (Достатня умова існування поверхневого інтеграла першого роду). Якщо поверхня S гладка або кусково-гладка, а функція $f(x, y, z)$ неперервна в кожній точці цієї гладкої поверхні, то поверхневий інтеграл першого роду існує і його величина не залежить від способу розбиття поверхні на частини, ні від вибору точок на них.

11.1.2. Властивості поверхневих інтегралів першого роду

$$1) \iint_S C \cdot f(x, y, z) dS = C \iint_S f(x, y, z) dS, \quad C = const;$$

2) якщо для функції $f(x, y, z)$ і $g(x, y, z)$ існує поверхневий інтеграл першого роду, то для функції $f(x, y, z) \pm g(x, y, z)$ також існує поверхневий інтеграл першого роду, причому

$$\begin{aligned} & \iint_S (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dS = \\ & = \iint_S f(x, y, z) dS \pm \iint_S g(x, y, z) dS; \end{aligned}$$

3) якщо поверхню S розбити на дві частини S_1 і S_2 , такі що спільною для них буде лише границя розділу, $S = S_1 \cup S_2$, то

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS;$$

4) якщо на поверхні S функція $f(x, y, z) \geq 0$, то
$$\iint_S f(x, y, z) dS \geq 0;$$

5) якщо на поверхні S виконується нерівність $f_1(x, y, z) \leq f_2(x, y, z)$, то

$$\iint_S f_1(x, y, z) dS \leq \iint_S f_2(x, y, z) dS.$$

6) для інтегрованої на поверхні S функції $f(x, y, z)$ справедлива нерівність

$$\left| \iint_S f_1(x, y, z) dS \right| \leq \iint_S |f_2(x, y, z)| dS.$$

7) **теорема про середнє:** якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні S , то на цій поверхні існує точка $M(x_C, y_C, z_C)$ така, що

$$\iint_S f(x, y, z) dS = f(x_C, y_C, z_C) \cdot S.$$

11.1.3. Обчислення поверхневих інтегралів першого роду

Рівняння поверхні S записано в явному вигляді.
Розглянемо задачу з обчислення маси m неоднорідної тонкостінної оболонки.

Розв'язання

Розіб'ємо поверхню S оболонки, яка задана рівнянням $z = z(x, y)$ на n частин сіткою кусково-гладких ліній (рис. 11.2). Позначимо через D_i проєкцію ділянки поверхні S_i на площину Oxy . В області D_i виберемо довільно точку $P_i(x_i, y_i, 0)$ та через цю точку проведемо перпендику-

ляр до перетину ділянки поверхні S_i . Одержимо $M_i(x_i; y_i; z_i)$ на поверхні S_i .

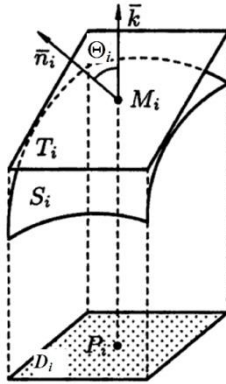


Рисунок 11.2

У точці $M_i(x_i; y_i; z_i)$ до поверхні S проведемо дотичну площину α і розглянемо ту її частину T_i , яка на площині Oxy буде проєктуватись в область ΔD_i .

Примітка: вважатимемо, що $\Delta T_i \approx \Delta S_i$; Θ_i – гострий кут між віссю Oz і нормаллю до площини α , проведеною в $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Тоді одержимо

$$\Delta T_i \cos \Theta_i \approx \Delta S_i.$$

Рівняння дотичної площини в заданій точці до поверхні запишемо у вигляді

$$(x - x_i) z'_x(x_i; y_i) + (y - y_i) z'_y(x_i; y_i) - (z - z_i) = 0.$$

$$\text{Тоді } \vec{n}_\alpha(z'_x(x_i; y_i); z'_y(x_i; y_i); -1).$$

$$(\vec{k}, \vec{n}_i) = |\vec{k}| \cdot |\vec{n}_i| \cdot \cos \Theta_i$$

$$\cos \Theta_i = \frac{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}_i|}{(\vec{k}, \vec{n}_i)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x(x_i; y_i))^2 + (z'_y(x_i; y_i))^2}}.$$

$$\text{Тоді } \Delta T_i = \frac{\Delta S_i}{\cos \Theta_i}$$

$$\Delta T_i = \sqrt{1 + (z'_x(x_i; y_i))^2 + (z'_y(x_i; y_i))^2} \Delta D_i.$$

Складемо інтегральну суму

$$\lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta T_i = \lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta D_i.$$

Отже, масу пластини знаходимо за формулою

$$m = \iint_S f(x; y; z) dS = \iint_{D_{Oxy}} f(x; y; z(x; y)) \sqrt{1 + (z'_x(x; y))^2 + (z'_y(x; y))^2} dx dy. \quad (11.5)$$

Зауваження

I. Якщо поверхня задана рівнянням $y = y(x; z)$, то

$$m = \iint_S f(x; y; z) dS = \iint_{D_{Oxz}} f(x; y(x; z); z) \sqrt{1 + (y'_x(x; z))^2 + (y'_z(x; z))^2} dx dz, \quad (11.6)$$

де D_{Oxz} – проекція поверхні S на площину Oxz .

II. Якщо поверхня задана рівнянням $x = x(y; z)$, то

$$m = \iint_S f(x; y; z) dS = \iint_{D_{Oyz}} f(x(y; z); y; z) \sqrt{1 + (x'_y(y; z))^2 + (x'_z(y; z))^2} dy dz, \quad (11.7)$$

де D_{Oyz} – проекція поверхні S на площину Oyz .

Рівняння поверхні S записано неявно. Нехай поверхня задана рівнянням $F(x; y; z) = 0$ і $F'_z(x; y; z) \neq 0 \quad \forall (x; y; z) \in S$.

Урахуємо, що $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$; $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$;

Тоді

$$m = \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z) \frac{1}{|F'_z|} \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2} dx dy,$$

де $dS = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} dx dy$.

Координати центра мас, точка $M(x_c, y_c, z_c)$, тонкостінної металічної оболонки, яка має форму поверхні S , знаходять за формулами

$$x_c = \frac{1}{m} M_{Oyz} = \frac{1}{m} \iint_S x \cdot \gamma(x; y; z) dS;$$

$$y_c = \frac{1}{m} M_{Oxz} = \frac{1}{m} \iint_S y \cdot \gamma(x; y; z) dS;$$

$$z_c = \frac{1}{m} M_{Oxy} = \frac{1}{m} \iint_S z \cdot \gamma(x; y; z) dS,$$

де M_{Oxy} – статичний момент поверхні S щодо площини Oxy ; M_{Oxz} – статичний момент поверхні S щодо площини Oxz ; M_{Oyz} – статичний момент поверхні S щодо площини Oyz , m – маса поверхні.

Моменти інерції тонкостінної металічної оболонки щодо координатних осей знаходимо за формулами

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_S (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x; y; z) dS; \\
 I_y &= \iint_S (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x; y; z) dS; \\
 I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x; y; z) dS.
 \end{aligned}
 \tag{11.8}$$

Момент інерції щодо початку координат знаходимо так:

$$I_o = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x; y; z) dS. \tag{11.9}$$

Моменти інерції тонкостінної металічної оболонки щодо координатних площин знаходимо за формулами

$$\begin{aligned}
 I_{oxy} &= \iint_S z^2 \gamma(x; y; z) dS; \\
 I_{oxz} &= \iint_S y^2 \gamma(x; y; z) dS; \\
 I_{oyz} &= \iint_S x^2 \gamma(x; y; z) dS.
 \end{aligned}
 \tag{11.10}$$

Сила притягання простого шару

Розглянемо тонкостінну неоднорідну (густина матеріалу від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z)$) оболонку (рис. 11.3), яка має вигляд поверхні S . Нехай поза поверхнею оболонки у точці $A(\xi, \eta, \phi)$ розташована одиниця маси m . Точка A притягується поверхнею S із силою \vec{F} .

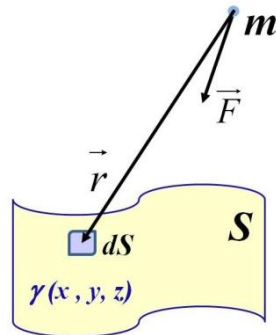


Рисунок 11.3

Проекції величини сили \vec{F} на координатні осі визначають за співвідношеннями

$$\begin{aligned} F_x &= \iint_S \gamma \frac{x-\xi}{r} dS; \\ F_y &= \iint_S \gamma \frac{y-\eta}{r} dS; \\ F_z &= \iint_S \gamma \frac{z-\phi}{r} dS, \end{aligned} \quad (11.11)$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\phi)^2}$.

11.1.4. Практичне застосування поверхневих інтегралів першого роду

Приклад 11.1. Обчислити масу куска тонкостінної металевої пластини, яка розміщена в першому октанті, якщо поверхнева густина матеріалу від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = 2 + 2x + \frac{4}{3}y$, а її поверхня S описує рівняння $6x + 4y + 3z = 12$.

Розв'язання. Зробимо рисунок поверхні, масу якої обчислюємо (рис. 11.4).

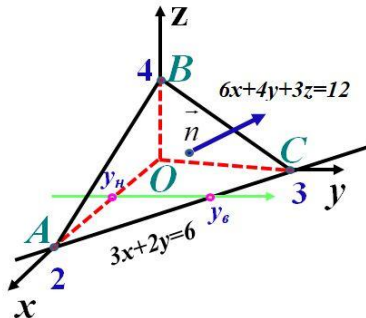


Рисунок 11.4

Скористаємося фізичним змістом поверхневого інтегралу першого роду

$$m = \iint_S \gamma(x; y; z) dS.$$

Тоді маса дорівнює $m = \iint_S \left(2 + 2x + \frac{4}{3}\right) y dS$. Знайдемо диференціал площі поверхні

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + (z'_x(x; y))^2 + (z'_y(x; y))^2} dx dy = \\ &= \begin{bmatrix} 6x + 4y + 3z = 12 \\ z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y \\ z'_x = -2; z'_y = -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \sqrt{1 + 4 + \frac{16}{9}} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy. \\ m &= \iint_S \left(2 + 2x + \frac{4}{3}\right) y dS = \iint_{D_{oxy}} \left(2 + 2x + \frac{4}{3}\right) \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{61}}{3} \int_0^2 dx \int_0^{3 - \frac{3}{2}x} \left(2 + 2x + \frac{4}{3}y\right) dy = \\ &= \frac{\sqrt{61}}{3} \int_0^2 \left(2y + 2xy + \frac{2}{3}y^2\right) \Big|_0^{3 - \frac{3}{2}x} dx = \\ &= \frac{\sqrt{61}}{3} \cdot \int_0^2 \left(2 \cdot \left(3 - \frac{3}{2}x\right) + 2x \left(3 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{2}{3} \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2\right) dx = 4\sqrt{61}. \end{aligned}$$

Відповідь: $m = 4\sqrt{61}$.

Приклад 11.2. Фольга має форму поверхні параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, вирізаного поверхнею конуса

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Обчислити масу фольги, якщо густина її матеріалу в кожній точці поверхні рівна аплікаті цієї точки.

Розв'язання

Густина матеріалу фольги встановлюється за формулою $\gamma(x; y; z) = z$. Розглянемо поверхню, масу якої обчислюємо (рис. 11.5). Маса дорівнює

$$m = \iint_S z \, dS$$

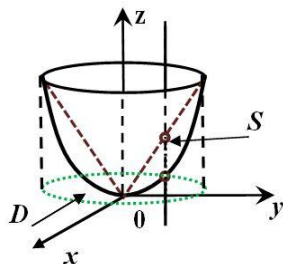


Рисунок 11.5

за умови $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \, dx \, dy = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} \, dx \, dy$.

$$\begin{aligned} m &= \iint_S z \, dS = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dx \, dy = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = \rho \cos \lambda \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} ; \, dx \, dy = \rho \, d\rho \, d\varphi \right] = \iint_{D^*} \rho^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\varphi = \\ &= \left[D^* : \left\{ \begin{array}{l} \rho \in [0; 1] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array} \right\} \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \, \rho \, d\rho = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 1 + 4\rho^2 = t^2 \\ 8\rho \, d\rho = 2t \, dt \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \rho \Big|_0^1 \\ t \Big|_1^{\sqrt{5}} \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{4} t \frac{t \, dt}{4} = \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{1}{16} 2\pi \left(\frac{25\sqrt{5}}{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{\pi}{8} \left(5\sqrt{5} - \frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{5-3}{15} \right) = \frac{\pi}{8} \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{15} \right) = \frac{\pi(25\sqrt{5} + 1)}{60}. \end{aligned}$$

Відповідь: $m = \frac{\pi(25\sqrt{5} + 1)}{60}$.

Приклад 11.3. Обчислити координати центра мас тонкостінної оболонки фольги, яка має форму поверхні параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, вирізаного поверхнею конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Зауважити, що густина матеріалу фольги від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = z$.

Розв'язання. Оскільки поверхня тонкостінної оболонки симетрична щодо площин $x=0$ та $y=0$, то точка, яка є центром мас поверхні, лежить на лінії перетину цих площин, а саме на осі Oz . Тобто $M(0, 0, z_c)$.

Знайдемо статичний момент поверхні щодо площини Oxy

$$\begin{aligned} M_{Oxy} &= \iint_S z \cdot z dS = \iint_S z^2 dS = \iint_D (x^2 + y^2)^2 \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} ; dx dy = \rho d\rho d\varphi \right] = \iint_{D^*} \rho^4 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \left[D^* : \left\{ \begin{array}{l} \rho \in [0; 1] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array} \right\} \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^1 \rho^4 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho}_{1^*} = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{125\sqrt{5} - 1}{8 \cdot 105} d\varphi = \frac{125\sqrt{5} - 1}{8 \cdot 105} \cdot 2\pi = \frac{\pi(125\sqrt{5} - 1)}{420} . \end{aligned}$$

Візьмемо окремо інтеграл 1^*

$$\int_0^1 \rho^4 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 4\rho^2 = t^2 \\ \rho = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{4}} \\ 8\rho d\rho = 2tdt \end{array} \Rightarrow \left. \frac{\rho}{t} \right|_1 \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{t^2 - 1}{4} \right)^2 t^2 dt = \frac{1}{64} \int_1^{\sqrt{5}} (t^2 - 1)^2 t^2 dt = \frac{1}{64} \int_1^{\sqrt{5}} (t^4 - 2t^2 + 1) t^2 dt = \\
&= \int_1^{\sqrt{5}} \left(\sqrt{\frac{t^2 - 1}{4}} \right)^4 \sqrt{t^2} \frac{tdt}{4} = \frac{1}{64} \int_1^{\sqrt{5}} (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = \\
&= \frac{1}{64} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{1}{64} \left(\left(\frac{\sqrt{5}^7}{7} - \frac{2\sqrt{5}^5}{5} + \frac{\sqrt{5}^3}{3} \right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{64} \left(\sqrt{5} \left(\frac{125}{7} - \frac{50}{5} + \frac{5}{3} \right) - \frac{15 - 42 + 35}{105} \right) = \frac{1}{64} \left(\frac{200\sqrt{5}}{21} - \frac{8}{105} \right) = \\
&= \frac{1}{64} \cdot \frac{1000\sqrt{5} - 8}{105} = \frac{125\sqrt{5} - 1}{8 \cdot 105}.
\end{aligned}$$

Під час розв'язання цієї задачі скористаємося результатом для обчислення маси фольги $m = \frac{\pi(25\sqrt{5} + 1)}{60}$, отриманим у прикладі 11.2 та відповідними формулами. Отже,

$$z_c = \frac{1}{m} M_{oxy} = \frac{60}{\pi(25\sqrt{5} + 1)} \cdot \frac{\pi(125\sqrt{5} - 1)}{420} = \frac{125\sqrt{5} - 1}{7 \cdot (25\sqrt{5} + 1)}.$$

Відповідь: $M \left(0, 0, \frac{125\sqrt{5} - 1}{7 \cdot (25\sqrt{5} + 1)} \right).$

Приклад 11.4. Обчислити момент інерції щодо початку координат неоднорідного ($\gamma(x; y; z) = x^2 + y^2$) тонкостінного купола $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$).

Розв'язання. Зобразимо рисунок купола, момент інерції якого обчислюємо (рис. 11.6). Момент інерції фігури щодо початку координат знаходимо за формулою

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x; y; z) dS.$$

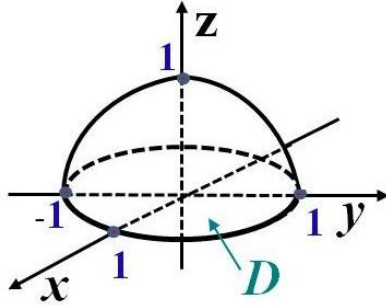


Рисунок 11.6

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2} dx dy = \\ &= \sqrt{\frac{1-x^2-y^2+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}} dx dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\ I_0 &= \iint_S \left(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_1 \right) \cdot (x^2 + y^2) ds = \iint_D (x^2 + y^2) \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = \\ &= [D: x^2 + y^2 \leq 1] = \left[D^* : \begin{cases} \rho \in [0; 1] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{cases} \right] = \iint_{D^*} \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho d\rho d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \underbrace{\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}}}_{2^*} d\rho = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3} .$$

Візьмемо окремо інтеграл 2*

$$\int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \left[\begin{array}{ll} 1) 1-\rho^2 = t^2 & 2) t = \sqrt{1-\rho^2} \\ d(1-\rho^2) = dt^2 & \text{якщо } \rho_1 = 0, \text{ то } t_1 = 1 \\ \rho d\rho = -t dt & \text{якщо } \rho_2 = 1, \text{ то } t_2 = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^1 \frac{1-t^2}{t} t dt = \int_0^1 (1-t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} .$$

Відповідь: $I_0 = \frac{4\pi}{3} .$

Приклад 11.5. Резервуар води шириною l і висотою H одиниць давить на дамбу, яка схематично зображена на рисунку 11.7. Знайти силу тиску води на дамбу.

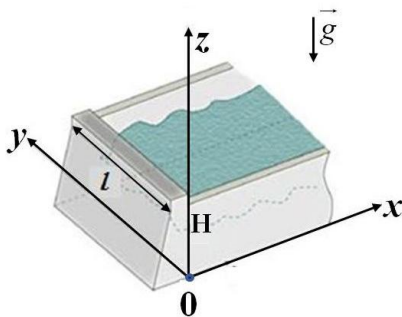


Рисунок 11.7 – Резервуар води

Розв'язання. Урахуємо умову гідростатичної рівноваги: тиск на поверхню дамби залежить від висоти води в резервуарі. Зв'яжемо висоту води в резервуарі з координатою z .

натою точки за змінною z . Тоді гідростатичний тиск води на глибині h можна описати формулою

$$p(z) = \rho g (H - z),$$

де $h = H - z$, ρ – густина води,

$$g = 9,8 \frac{M}{c^2} \text{ – прискорення вільного падіння.}$$

Повна сила тиску \vec{F} , яка діє на дамбу, чисельно рівна поверхневому інтегралу по поверхні, на яку чиниться тиск

$$\vec{F} = \iint_S p \cdot \vec{n} \, dS,$$

де \vec{n} – вектор нормалі до площадки dS , який вказує напрямком елементарної сили $d\vec{F}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \iint_S p \cdot \vec{n} \, dS = \left[\begin{array}{l} z \in [0; H] \\ y \in [0; l] \end{array} \right] = \int_0^l \int_0^H pg (H - z) \cdot (-\vec{i}) \, dydz = \\ &= pg (-\vec{i}) \int_0^l dy \int_0^H (H - z) \cdot dz = pg (-\vec{i}) \int_0^l \left(Hz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^H dy = \\ &= pg (-\vec{i}) \frac{H^2}{2} \int_0^l dy = pgl (-\vec{i}) \frac{H^2}{2}. \end{aligned}$$

Примітки:

1. Вектор $(-\vec{i})$ вказує напрямком дії сили \vec{F} .
2. Сила тиску води на дамбу чисельно рівна абсолютному значенню сили \vec{F} .

Відповідь: $|\vec{F}| = pgl \frac{H^2}{2}.$

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити масу тонкостінної однорідної ($\gamma(x; y; z) = 1$) сферичної оболонки $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка розміщена в першому октанті.

$$\text{Відповідь: } m = \frac{\pi}{2}.$$

2. Тонкостінна посудина, виготовлена із сплаву металу, має форму поверхні конуса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 0$, розміщеного між площинами $z = 0$ і $z = 3$. Обчислити її масу, якщо лінійна густина матеріалу від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{Відповідь: } m = \frac{160\pi}{3}.$$

3. Обчислити масу частини тонкостінної неоднорідної сферичної оболонки $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$, якщо закон зміни лінійної густини матеріалу від точки до точки задається функцією $\gamma(x; y; z) = x^2 + y^2$.

$$\text{Відповідь: } m = \frac{64\pi}{3}.$$

4. Знайти статичний момент частини поверхні однорідної ($\gamma(x; y; z) = 1$) сферичної оболонки $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка розміщена в першому октанті, щодо площини Oyz .

$$\text{Відповідь: } M_{yz} = \frac{\pi}{4}.$$

5. Знайти координати центра мас однорідної ($\gamma(x; y; z) = 1$) тонкостінної сферичної оболонки $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка розміщена в першому октанті.

Відповідь: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6. Обчислити координати центру мас тонкостінної поверхні конуса $y^2 = x^2 + z^2$, розташованої між площинами $y = 1$ і $y = 2$, якщо густина матеріалу від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x; y; z) = y$.

Відповідь: $M\left(0, \frac{3(16 - \sqrt{2})}{49}, 0\right)$.

7. Обчислити момент інерції ($\gamma(x; y; z) = 1$) тонкостінної сферичної оболонки $y = -\sqrt{1 - x^2 - z^2}$ щодо осі Oy .

Відповідь: $I_y = \frac{4\pi}{3}$.

8. Обчисліть момент інерції щодо осі Oz однорідної тонкостінної поверхні, яка є частиною параболоїда $2z = x^2 + y^2$, що обмежена площиною $z = 2$.

Відповідь: $I_z = \pi\left(10\sqrt{5} + \frac{2}{5}\right)$.

9. Обчислити момент інерції щодо осі початку координат неоднорідної ($\gamma(x; y; z) = z$) тонкостінної оболонки фольги, яка має форму поверхні параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, вирізаного поверхнею конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Відповідь: $I_0 = \frac{\pi(125\sqrt{5} - 1)}{240}$.

10. Знайдіть силу притягання між однорідною ($\gamma(x; y; z) = 1$) тонкостінною напівсферою радіусом r із центром у початку координат і точковою масою m , розміщеною в початку координат ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравітаційна стала).

Відповідь: $\vec{F} = \pi G m$.

11.2. Основні поняття та означення поверхневих інтегралів другого роду

Означення. Розглянемо гладку поверхню S . Виберемо на поверхні S довільно точку M і проведемо через цю точку (рис. 11.8) замкнутий контур, який не має спільних точок із границею поверхні. Побудуємо вектор нормалі до поверхні – вектор \vec{n} .

Будемо переміщувати точку M по замкненому контуру так, щоб \vec{n} змінював своє положення, але завжди був \perp до площини поверхні S .

Тоді:

- якщо точка M пройде по такому довільному замкненому контуру, повернеться у свою початкову точку, і вектор нормалі водночас збереже свій початковий напрям, то поверхню називатимемо **двосторонньою** (рис. 11.8);

- якщо під час обходження по цьому самому контуру напрям нормалі змінить свій знак на протилежний, то

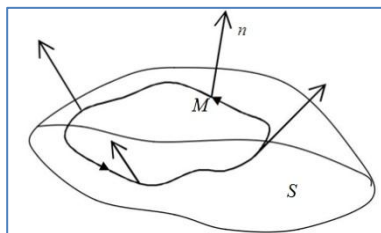


Рисунок 11.8

поверхню називатимемо *односторонньою* (рис. 11.9). На рисунку подано лист Мебіуса.

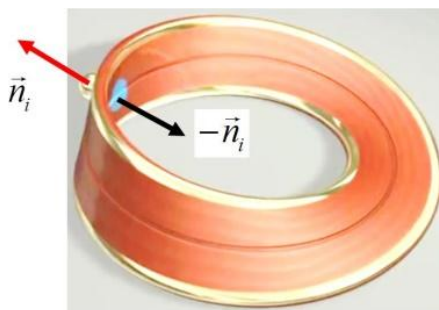


Рисунок 11.9

Означення. Якщо нормаль до двосторонньої поверхні спрямована зовні обмеженого нею об'єму – це *зовнішня сторона поверхні*. Якщо нормаль поверхні напрямлена всередину об'єму V , обмеженого поверхнею S , то цю сторону поверхні називатимемо *внутрішньою*.

11.2.1. Задача про обчислення потоку рідини через поверхню

Розглянемо гладку двосторонню поверхню S , яка описується рівнянням $z = f(x, y)$, та сталий потік рідини через гладку двосторонню поверхню S .

Швидкість руху частинки в потоці $\vec{v} = \vec{v}(x; y; z)$ не залежить від часу t і задається співвідношенням

$$\vec{v} = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}, \quad (11.12)$$

де $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ – обмежені функції, які визначені в кожній точці цієї поверхні S .

Поділимо поверхню S сіткою кусково-гладких ліній на елементарні ділянки S_i , площі яких позначимо через

$\Delta S_i (i = 1 \dots n)$. На кожній ділянці поверхні S_i довільно виберемо точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Водночас позначимо $\vec{n}_{0i}(\cos \alpha_i; \cos \beta_i; \cos \gamma_i)$ – одиничний вектор нормалі до нескінченно малого елемента поверхні ΔS_i ; d_i – відстань між максимально віддаленими точками ділянки S_i ; D_i – проєкція ділянки S_i на площину Oxy ; ΔS_i^* – площа ділянки D_i ; $\gamma(x; y; z)$ – густина рідини; $\Delta \Pi_i$ – потік рідини через ділянку площею ΔS_i .

Спроекуємо область S_i на три координатні площини. На рисунку 11.10 зображено приклад такого проєкування на площину Oxy – область D_i . Вважаємо, що на площині Oxy площа ділянки D_{i1} $\Delta S_{i1}^* = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, а на площині Oxz площа ділянки D_{i2} $\Delta S_{i2}^* = \Delta x_i \cdot \Delta z_i$, на площині Oyz площа ділянки D_{i3} $\Delta S_{i3}^* = \Delta y_i \cdot \Delta z_i$.

Визначимо величину потоку рідини як масову витрату за одиницю часу, скориставшись позначеннями з рисунка 11.11.

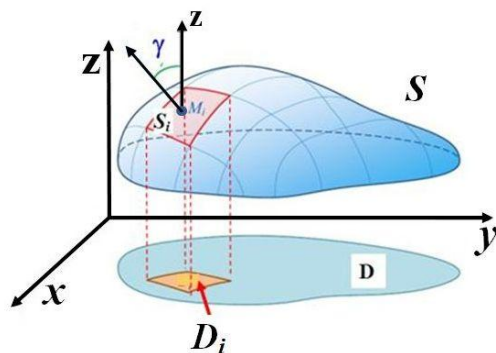


Рисунок 11.10

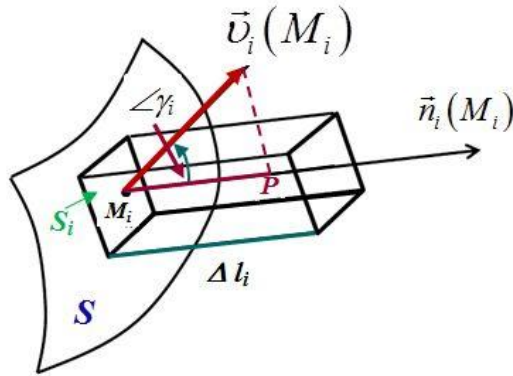


Рисунок 11.11

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_i &= \frac{\Delta m_i}{t} \approx \frac{\gamma(M_i) \cdot \Delta V_i}{t} = \frac{\gamma(M_i) \cdot \Delta l_i \cdot \Delta S_i}{t} = \\ &= \left[\frac{\Delta l_i}{t} = np_{\vec{n}_{0i}} \vec{v}_i \right] = \gamma(M_i) \cdot np_{\vec{n}_{0i}} \vec{v}_i \cdot \Delta S_i \end{aligned}$$

де Δl_i – висота криволінійної призми, в основі якої лежить ділянка площею ΔS_i .

Урахуємо, що

$$M_i P = np_{\vec{n}_{0i}} \vec{v}_i = |\vec{v}_i| \cdot \cos \varphi = |\vec{v}_i| \cdot |\vec{n}_{0i}| \cos \varphi = (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_{0i}), \text{ тоді}$$

$$\Delta \Pi_i = \gamma(M_i) \cdot \vec{v}_i \cdot \Delta S_i = \gamma(M_i) \cdot (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_{0i}) \Delta S_i. \quad (11.13)$$

Виконавши відповідні дії на кожній ділянці S_i , визначимо потік рідини через поверхню S , склавши інтегральну суму добутків, описаних формулою (11.13)

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^n \gamma(M_i) \cdot (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_{0i}) \Delta S_i.$$

Перейдемо до його граничного значення

$$\Pi = \lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \gamma(M_i) \cdot (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_{0i}) \Delta S_i. \quad (11.14)$$

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми $\lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \gamma(M_i) \cdot (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_{0i}) \Delta S_i$, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні S на частини, ні від вибору точок M_i у кожній із них, то таку границю називають **поверхневим інтегралом другого роду** (за координатами) по поверхні S . Отже,

$$\lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \gamma(M_i) \cdot (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_{0i}) \Delta S_i = \iint_S \gamma(M) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}_0) dS. \quad (11.15)$$

Примітка. Відмітимо, що потік векторного поля рівний скалярному добутку вектор-функції, яка характеризує це векторне поле (у цьому разі – це поле швидкості), на одиничний вектор нормалі до поверхні.

Урахувавши рівність (11.12) та координати прямого вектора нормалі до поверхні $\vec{n}(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$, маємо

$$\begin{aligned} & \vec{v}(x; y; z) \cdot \vec{n}_0 = \\ & = P(x; y; z) \cdot \cos \alpha + Q(x; y; z) \cdot \cos \beta + R(x; y; z) \cdot \cos \gamma, \\ & (\vec{v}(x; y; z) \cdot \vec{n}_0) dS = \\ & = (P(x; y; z) \cdot \cos \alpha + Q(x; y; z) \cdot \cos \beta + R(x; y; z) \cdot \cos \gamma) dS. \\ & \iint_S \gamma(M_i) \cdot (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_{0i}) dS = \\ & = \iint_S \gamma(x; y; z) (P(x; y; z) \cos \alpha + Q(x; y; z) \cos \beta + R(x; y; z) \cos \gamma) dS. \end{aligned}$$

На основі теореми про площу ортогональної проєкції виконаємо таку заміну

$$\begin{aligned}\cos \alpha dS &= \pm dy dz; & \cos \beta dS &= \pm dx dz; \\ \cos \gamma dS &= \pm dx dy.\end{aligned}\quad (11.16)$$

Відповідь до задачі: потік Π рідини через поверхню S чисельно рівний поверхневу інтегралу за координатами

$$\begin{aligned}\Pi &= \iint_S \gamma(x; y; z) \left[P(x; y; z)(\pm dy dz) + \right. \\ &\left. + Q(x; y; z)(\pm dx dz) + R(x; y; z)(\pm dx dy) \right].\end{aligned}\quad (11.17)$$

Примітка. Якщо рідина однорідна $\gamma(x; y; z) = const$ (визьмемо $\gamma(x; y; z) = 1$), формулу (11.17) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\Pi &= \iint_S \left[P(x; y; z)(\pm dy dz) + Q(x; y; z)(\pm dx dz) + \right. \\ &\left. + R(x; y; z)(\pm dx dy) \right],\end{aligned}\quad (11.18)$$

$$\text{або } \Pi = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) dS, \quad (11.19)$$

де $\vec{a} = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$ – вектор, який характеризує задане векторне поле в кожній точці певної області простору, якій належить поверхня S .

11.2.2. Властивості поверхневого інтеграла за координатами

1. Постійний множник можна виносити за знак поверхневого інтеграла

$$\iint_S c \cdot R(x; y; z) dx dy = c \iint_S R(x; y; z) dx dy, \quad c = const.$$

2. Поверхневий інтеграл за координатами змінює свій знак у разі зміни сторони поверхні

$$\iint_{S^+} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) dS = -\iint_{S^-} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) dS,$$

де S^+ – це сторона поверхні S , яка відповідає додатному напрямку \vec{n}_0 ; S^- – протилежна сторона поверхні.

3. Якщо $S = S_1 \cup S_2$, а S_1 і S_2 із спільних внутрішніх точок мають лише межу розділу поверхонь, то поверхневий інтеграл за координатами по всій поверхні S рівний сумі інтегралів по її частинах S_1 і S_2 .

11.2.3. Обчислення поверхневого інтеграла за координатами

Обчислення поверхневих інтегралів другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів за допомогою проектування поверхні S на координатні площини Oxy , Oxz , Oyz

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x; y; z) dy dz + Q(x; y; z) dx dz + R(x; y; z) dx dy = \\ & = \pm \iint_{D_{Oxy}} P(x(y; z); y; z) dy dz \pm \iint_{D_{Oxz}} Q(x; y(x; z); z) dx dz \pm \\ & \pm \iint_{D_{Oyz}} R(x; y; z(x; y)) dx dy. \end{aligned} \quad (11.20)$$

D_{Oxy} ; D_{Oxz} ; D_{Oyz} – проєкції поверхні S на площини Oxy ; Oxz ; Oyz відповідно.

Примітка: знак « \pm » вибираємо за «правилом косинусів».

Алгоритм роботи із «правилом косинусів»

1) розбираємося, за якою поверхнею S – зовнішньою чи внутрішньою, проводиться інтегрування;

2) будуємо вектор нормалі $\vec{n}_0(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ до поверхні в довільно вибраній точці M ;

3) якщо $\alpha; \beta; \gamma$ – гострі, то косинуси цих кутів додатні \Rightarrow « \pm » заміняємо на «+»; якщо $\alpha; \beta; \gamma$ – тупі, то косинуси таких кутів від’ємні \Rightarrow « \pm » заміняємо на «-».

Примітка: зв’язок між поверхневими інтегралами по поверхні та по координатах встановлюється за формулою

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_S [P(x; y; z) dy dz + Q(x; y; z) dx dz + R(x; y; z) dx dy]. \quad (11.21)$$

$\vec{n}_0(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – напрямні косинуси вектора нормалі на відповідній стороні поверхні S .

11.2.4. Формула Остроградського – Гаусса

Якщо S – замкнута гладка поверхня у просторі V і $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – неперервні функції разом із їхніми частинними похідними першого порядку в області V , то застосовують формулу Остроградського – Гаусса (11.22)

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iiint_V \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & \qquad \qquad \qquad \text{або} \\ & \iint_S (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS = \\ & = \iiint_V \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (11.22) \end{aligned}$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S .

11.2.5. Практичне застосування поверхневих інтегралів другого роду

Розглянемо гідро- або аеромеханічну задачу, а саме – задачу розрахунку потоку газу або рідини через поверхню площею S .

Приклад 11.6. В'язка рідина тече через поперечний переріз труби радіусом R . Швидкість руху потоку $\vec{v} = 5e^{-r}\vec{k}$ (м · с⁻¹), де \vec{k} – одиничний вектор нормалі, напрямлений вздовж осі труби, напрямлений у бік потоку, r – відстань від осі труби до будь-якої точки потоку в її поперечному перерізі, $\gamma(x; y; z) = 1$ – густина рідини в потоці (рис. 11.12). Обчислити потік рідини через поперечний переріз труби.

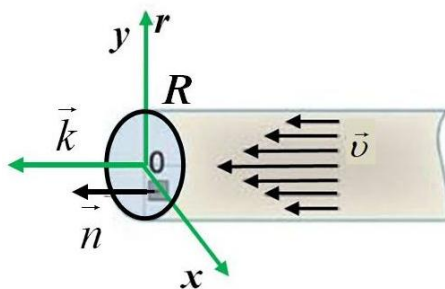


Рисунок 11.12

Розв'язання. З розв'язку задачі про потік рідини через поверхню S маємо

$$\Pi = \iint_S \underbrace{\gamma(x; y; z)}_1 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{k}) dS, \text{ де } \vec{k} (0; 0; 1).$$

Урахуємо, що вектори $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{k}$ співнапрямлені

$$\Pi = \iint_S 5e^{-r} dS. \text{ Тоді } \Pi = 5 \iint_{D_{Oxy}} e^{-r} dx dy =$$

(перейдемо в полярну систему координат)

$$= \left[D: x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow D^*: \begin{matrix} \rho \in [0; R] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{matrix} \right] =$$

$$= 5 \int_0^\pi d\varphi \underbrace{\int_0^R e^{-r} r dr}_{1^*} = 5(1 - (R+1)e^{-R}) \varphi_0^{2\pi} = 10\pi(1 - (R+1)e^{-R})$$

(застосуємо метод інтегрування частинами до інтеграла 1^{*})

$$\int_0^R e^{-r} r dr = \left[\begin{matrix} u = r & \Rightarrow du = dr \\ dv = e^{-r} dr & \Rightarrow v = -e^{-r} \end{matrix} \right] = -re^{-r} \Big|_0^R + \int_0^R e^{-r} dr =$$

$$= -R \cdot e^{-R} - e^{-r} \Big|_0^R = -R \cdot e^{-R} - e^{-R} + e^0 = 1 - (R+1)e^{-R}$$

Відповідь: $\Pi = 10\pi(1 - (R+1)e^{-R}) m^3 \cdot c^{-1}$.

Приклад 11.7. Знайти величину сталого потоку частинок газу, вектор швидкості якого описується рівнянням $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1-z)\vec{k}$, через повну поверхню конуса $z^2 = x^2 + y^2$ висотою H , якщо $\gamma(x; y; z) = 1$.

Розв'язання. У прямокутній декартовій системі координат зобразимо поверхню конуса $z^2 = x^2 + y^2$ висотою H і врахуємо, що потік частинок газу будемо обчислювати саме через верхню частину поверхні (рис. 11.13).

Повна поверхня складається з бічної поверхні $S_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та поверхні основи конуса $S_2: z = H$. Тоді $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$.

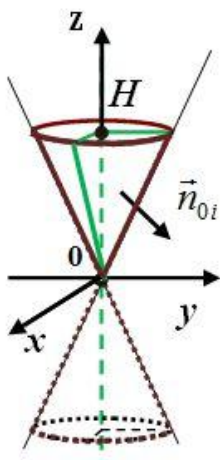


Рисунок 11.13

$$\Pi_1 = \iint_{s_1} \underbrace{\gamma(x; y; z)}_1 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}_0) dS = \left[\begin{array}{l} P(x; y; z) = x \\ Q(x; y; z) = y \\ R(x; y; z) = 1 - z \end{array} \middle| \vec{n}_0 - ? \right] \{=\}$$

Знайдемо координати одиничного вектора нормалі до поверхні \vec{n}_0 .

Поверхня задана функцією $z = f(x; y)$ у явному вигляді. Оскільки ми в розрахунках повинні брати потік у напрямку зовнішньої нормалі, яка для верхньої частини конуса збігається з нормаллю до нижньої сторони поверхні, то координати нормального вектора поверхні

$\vec{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; -1 \right)$ такі:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \vec{n} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -1 \right)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} + 1 = \sqrt{\frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2} \quad (*).$$

Нормуємо вектор \vec{n} до одиничного

$$\vec{n}_0 = \left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\cos \alpha}; \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\cos \beta}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \vec{n}_0) &= \frac{x^2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1-z}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{x^2+y^2 - \sqrt{x^2+y^2} + z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2 - \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \\ &+ \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-2(x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \\ &= \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\{=\} \iint_{S_1} \left(\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dS = - \text{ми перейшли до поверхне-$$

вого інтеграла першого роду, тоді

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy \quad - \text{дивись рівність}$$

(*) вище.

Спроекуємо бічну поверхню циліндра на площину Oxy . Проекцією бічної поверхні буде круг $x^2 + y^2 \leq H^2$, тому перейдемо в полярну систему координат.

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_{Oxy}} \left(\sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} \, dx dy = \iint_{D_{Oxy}} \left(2\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right) dx dy = \\
&= \left[D^* : \begin{array}{l} \rho \in [0; H] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array} \right] = \iint_{D^*} (2\rho - 1) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H (2\rho^2 - \rho) d\rho = \\
&= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(2\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^H = 2\pi \cdot \left(2\frac{H^3}{3} - \frac{H^2}{2} \right) = 2\pi \cdot H^2 \left(\frac{2H}{3} - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Аналогічно до Π_2 маємо

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= \iint_{S_2} \underbrace{\gamma(x; y; z)}_1 \cdot (\vec{\nu} \cdot \vec{n}_0) dS = \left[\begin{array}{l} P(x; y; z) = x \\ Q(x; y; z) = y \quad ; \quad \vec{n}_0 = \vec{k}(0; 0; 1) \\ R(x; y; z) = 1 - z \end{array} \right] = \\
&= \iint_{S_2} (1 - z) dS = \left[\begin{array}{l} S_2 : z = H \\ 1) (1 - z) = 1 - H \\ 2) dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy = dx dy \end{array} \right] = \\
&= (1 - H) \iint_{S_2} dS = (1 - H) \iint_{S_2} dx dy = (1 - H) \iint_{D_{Oxy}} dx dy = \\
&= (1 - H) \iint_{D^*} \rho d\rho d\varphi = (1 - H) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \rho d\rho = (1 - H) \cdot 2\pi \cdot \frac{H^2}{2} = \\
&= \pi H^2 (1 - H).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi &= 2\pi \cdot H^2 \left(\frac{2H}{3} - \frac{1}{2} \right) + \pi H^2 (1 - H) = \\
&= \pi H^2 \left(\frac{4H}{3} - 1 + 1 - H \right) = \frac{\pi H^3}{3}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $\Pi = \frac{\pi H^3}{3}$.

Приклад 11.8. Обчислити величину стаціонарного потоку частинок газу, описаного в прикладі 11.7, за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

Розв’язання. Оскільки поверхня $S = S_1 + S_2$ – замкнута гладка поверхня (рис. 11.13), то під час обчислення потоку Π через повну поверхню конуса зручно скористатися формулою Остроградського – Гаусса

$$\Pi = \iiint_V \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz .$$

$$1) P(x; y; z) = x, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 1; \quad Q(x; y; z) = y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1;$$

$$R(x; y; z) = 1 - z; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -1;$$

$$2) \Pi = \iiint_V (1+1-1) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz \{=\}.$$

Перейдемо в циліндричну систему координат, зважаючи, що тіло інтегрування є правильним щодо осі

$$Oz: V: \left\{ \varphi \in [0; 2\pi]; \rho \in [0; H]; z \in \left[\underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\rho}; H \right] \right\}$$

$$\{=\} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^H \rho d\rho \int_0^{\rho} dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^H \rho (z|_0^{\rho}) d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^H \rho^2 d\rho =$$

$$= 4 \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi H^3$$

$$\text{Відповідь: } \Pi = \frac{\pi H^3}{3} .$$

Розглянемо задачі розрахунку потоку електростатичного поля.

Приклад 11.9. Заряд q розміщений у початку координат і створює поле з напруженістю $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r}$. Обчислити потік цього поля через поверхню сфери радіуса r з центром у початку координат і нормальним вектором, напрямленим від початку координат.

Розв'язання. Подамо розв'язання задачі в декілька етапів:

1) потік електричного поля \vec{E} (рис. 11.14) обчислимо за формулою $\Pi = \iint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}_0) dS$;

2) одиничний вектор нормалі \vec{n}_0 до сфери колінеарний радіус-вектору $\vec{r} \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$;

3) тоді

$$\vec{E} \cdot \vec{n}_0 = \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{r^4} \cdot \vec{r}^2 = \left[\vec{r}^2 = |\vec{r}| \cdot |\vec{r}| \cos 0^\circ = r^2 \right] = \frac{q}{r^2};$$

$$4) \Pi = \iint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}_0) dS = \frac{q}{r^2} \iint_S dS = \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Скористаємося канонічним рівнянням сфери $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

$$1^*: \iint_S dS = \left[z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right] = 2 \iint_{D_{Oxy}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy =$$

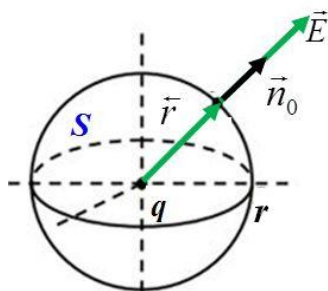


Рисунок 11.14

$$\begin{aligned}
 &= \left[D^* : \begin{array}{l} \rho \in [0; r] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array} \right] = 2r \iint_{D^*} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi = \\
 &= 2r \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho}_2 = 2\pi r^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\
 &= \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dx dy = \\
 &= \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^* : \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho &= \left[r^2 - \rho^2 = t^2 \mid \rho_1 = 0 \Rightarrow t_1 = r \right. \\
 &\quad \left. \rho d\rho = -tdt \mid \rho_2 = R \Rightarrow t_2 = 0 \right] = \\
 &= \int_0^r \frac{1}{\sqrt{t^2}} t dt = r
 \end{aligned}$$

Відповідь: потік поля, який створює точковий заряд q , дорівнює $4\pi q$.

Звернемося до задачі обчислення потоку магнітного поля.

Розглянемо однорідне магнітне поле, що характеризується вектором магнітної індукції \vec{B} , яке пронизує плоску площадку площею S (рис. 11.15).

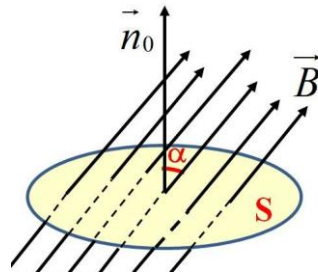


Рисунок 11.15

Означення. Поток вектора магнітної індукції \vec{B} називається скалярна величина $\Phi_{\vec{B}}$, яка рівна скалярному добутку \vec{B} на \vec{S} : $\Phi_{\vec{B}} = \vec{B} \cdot \vec{S}$.

У разі неоднорідного магнітного поля чи неплоскої поверхні S величина магнітного потоку обчислюється за формулою

$$\Phi_{\vec{B}} = \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{n}_0) dS.$$

Приклад 11.10. Обчислити потік неоднорідного магнітного поля $\vec{B}(0; y^2; z^2 - x^2)$ через бічну частину поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 9$, ($y \geq 0$, $z \in [0; 5]$) у напрямку зовнішньої нормалі до бічної поверхні циліндра.

Розв'язання. Проведемо розв'язання задачі в декілька етапів:

1) зробимо рисунок поверхні (рис. 11.16);

2) $\Phi_{\vec{B}} = \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{n}_0) dS$;

3) знайдемо координати одиничного вектора нормалі \vec{n}_0 до поверхні. Для зручності запишемо рівняння бічної поверхні циліндра, через яку обчислюємо потік магнітного поля, у неявному вигляді $F: x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Тоді:

а) $\vec{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Rightarrow \vec{n}(2x; 2y; 0)$;

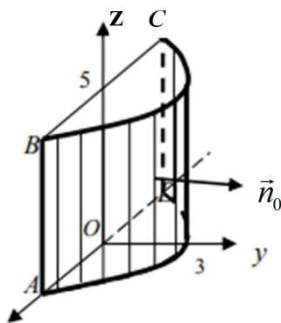


Рисунок 11.16

$$\text{б) } |\vec{n}| = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2 \sqrt{\underbrace{x^2 + y^2}_9} = 6;$$

$$\text{в) } \vec{n}_0 \left(\frac{n_x}{|\vec{n}|}; \frac{n_y}{|\vec{n}|}; \frac{n_z}{|\vec{n}|} \right) \Rightarrow \vec{n}_0 \left(\frac{x}{3}; \frac{y}{3}; 0 \right);$$

$$\text{г) } \vec{B} \cdot \vec{n}_0 = \left[\vec{B}(0; y^2; z^2 - x^2); \vec{n}_0 \left(\frac{x}{3}; \frac{y}{3}; 0 \right) \right] = \frac{y^3}{3}.$$

$$\Phi_{\vec{B}} = \iint_S \frac{y^3}{3} dS;$$

5) спроектуємо бічну поверхню циліндра на площину Oxz

$$\begin{aligned} dS &= \left[y = \sqrt{9 - x^2} \right] = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2} dx dz = \\ &= \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \right)^2} dx dz = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx dz; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \Phi_{\vec{B}} &= \iint_{D_{Oxz}} \frac{y^3}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx dz = \\ &= \iint_{D_{Oxz}} \frac{\sqrt{(9 - x^2)^3}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx dz = \iint_{D_{Oxz}} (9 - x^2) dx dz = \left[D_{Oxz}: \begin{array}{l} -3 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{array} \right] = \\ &= \int_0^5 dz \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 2 \int_0^5 dz \int_0^3 (9 - x^2) dx = 2 \cdot z \Big|_0^5 \cdot \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 180. \end{aligned}$$

Відповідь: $\Phi_{\vec{B}} = 180$ Вб.

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити величину сталого потоку повітря через верхню сторону півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$,

якщо поле швидкості описується рівністю
 $\vec{v} = x\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} + (z - 2y)\vec{k}$.

Відповідь: 16π .

2. Знайти величину сталого потоку частинок газу, вектор швидкості якого описується рівнянням
 $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через частину поверхні
 $z = x^2 + y^2$, $z \in [0; 9]$, у напрямку зовнішньої нормалі.

Відповідь: $\frac{81}{2}\pi$.

3. Обчислити величину потоку рідини, яка тече зі швидкістю $\vec{v}(x + y; z - x; z)$, через бічну поверхню конуса
 $x^2 + y^2 = z^2$, $z \in [0; 4]$ у напрямку зовнішньої нормалі (рис. 11.17).

Відповідь: -16π .

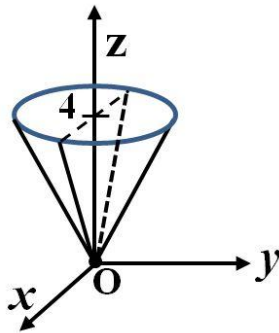


Рисунок 11.17

4. Обчислити потік частинок газу через поверхню верхньої частини півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ у напрямку зовнішньої нормалі до поверхні, якщо вектор швидкості газового потоку описується рівністю $\vec{v} = 3x\vec{i} + x^2z\vec{j} + (2 - z)\vec{k}$.

Відповідь: $\frac{88}{3}\pi$.

5. Обчислити потік газу через основу півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ у напрямку нормалі, що збігається з напрямком осі Oz , якщо вектор швидкості газового потоку описується рівністю $\vec{v} = 3x\vec{i} + x^2z\vec{j} + (2-z)\vec{k}$.

Відповідь: 8π .

6. Обчислити потік рідини, яка тече зі швидкістю $\vec{v}(x^2; -z^2; z)$, через повну поверхню параболоїда $z = 3 - x^2 - y^2$, що відтинається площиною $z = 0$.

Відповідь: $\frac{9}{2}\pi$.

7. Піраміда, яка утворена площиною $\alpha: x + 2y + 2z = 4$ і координатними площинами, нагрівається сонячними променями і випромінює тепловий потік у навколишнє середовище. Обчислити числове значення величини повітряного теплового потоку через зовнішню поверхню піраміди двома способами:

1) використавши означення потоку векторного поля;

2) за допомогою формули Остроградського – Гаусса. Застосувати закон зміни швидкості теплового потоку $\vec{v} = 3x\vec{i} + x^2z\vec{j} + (2-z)\vec{k}$.

Відповідь: $\frac{8}{3}$.

8. Обчислити напруженість електричного поля нескінченної пластини з однорідно розподіленим зарядом, якщо поверхнева густина заряду на поверхні S дорівнює σ .

Відповідь: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, де $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ – елект-

рична стала.

9. Обчислити потік неоднорідного магнітного поля $\vec{B}(y z; x z; x y)$ через верхню сторону площини $x + y + z = 4$, що відтинається координатними площинами.

Відповідь: 32.

10. Обчислити потік неоднорідного магнітного поля $\vec{B} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню сторону замкнутої поверхні, утвореної параболоїдом $3z = x^2 + y^2$ і півсферою $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Відповідь: $\frac{19\pi}{3}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пономарев К. К. Составление дифференциальных уравнений : учебное пособие / К. К. Пономарев. – Минск : Вышэйшая школа, 1973. – 560 с.
2. Петров В. А. Математический анализ в производственных задачах / В. А. Петров. – Москва : Просвещение, 1990. – 128 с.
3. Кратные интегралы и их приложения : метод. указания / сост.: С. В. Бушков, Л. В. Коломиец. – Самара : СГАУ, 2015. – 52 с.
4. Карнаухова О. А. Прикладные задачи по математике : учеб пособие / О. А. Карнаухова, А. А. Шершнева, Т. О. Кочеткова. – 2-е изд., испр. и доп. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. – 216 с.
5. Прикладные задачи по высшей математике / И. Н. Ноздрин, И. М. Степаненко, Л. К. Костюк. – Киев : Вища школа, 1976. – 176 с.
6. Геворкян Ю. Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев : учебник. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2002. – 542 с.
7. Прикладные задачи по математике для студентов инженерных специальностей : практикум / Минобрнауки России, ОмГТУ ; [сост.: Т. И. Бова, О. И. Кузьменко, И. И. Малахов]. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2018. – 88 с.
8. Зеленков О. А. Перехідні процеси в лінійних електричних колах : конспект лекцій / О. А. Зеленков, В. П. Шахов, О. О. Бунчук. – Київ : НАУ, 2003. – 132 с.
9. Збірник задач з векторного та тензорного числення : навч. посіб. для студентів фізичних факультетів університетів / М. Ф. Ледней, М. А. Разумова, О. В. Романенко, В. М. Хотяїнцев. – Київ : Київський університет, 2010. – 129 с.
10. Вища математика : збірник задач у двох частинах. Ч.1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геомет-

рія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення / за ред. П. П. Овчинникова. – 2-ге вид. – Київ : Техніка, 2004. – 279 с.

11. Вища математика : збірник задач : у 2-х частинах. – Ч. 2 : Звичайні диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди. Рівняння математичної фізики. Стійкість за Ляпуновим. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики. Методи оптимізації і задачі керування / за ред. П. П. Овчинникова. – 2-ге вид., стереот. – Київ : Техніка, 2004. – 376 с.

12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Высш. шк., 1990. – Ч. 1. – 270 с.

13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Высш. шк., 1991. – Ч. 2. – 352 с.

14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Высш. шк., 1991. – Ч. 3. – 286 с.

15. Вища математика в прикладах і задачах, частина I : навчальний посібник / А. П. Харченко, В. О. Гаєвська, Г. В. Лісянська. – Харків : НТМТ, 2013. – 194 с.

Навчальне видання

Білоус Олена Анатоліївна,
Кравченко Юлія Анатоліївна

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки Ю. А. Кравченко
Редактор І. О. Кругляк
Комп'ютерне верстання: О. А. Білоус, Ю. А. Кравченко

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 14,42. Обл.-вид. арк. 7,50. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.