

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Рубан А. І., Гогоці Ю. Г., Гусак О. Г.

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Підручник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету



Суми
Сумський державний університет
2023

УДК 537.8+621.3.09(075.8)

Р 82

Рецензенти:

О. Д. Погребняк – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри наноелектроніки та модифікації поверхні Сумського державного університету;

В. С. Бойко – доктор технічних наук, професор, професор кафедри теоретичної електротехніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету як підручник
(протокол № 10 від 9 березня 2023 року)*

Рубан А. І.

Р 82 Теорія поля : підручник / А. І. Рубан, Ю. Г. Гогоці, О. Г. Гусак. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – 279 с.

ISBN 978-966-657-936-5

У цьому підручнику подано основи класичної макроскопічної теорії електромагнітного поля та гідромеханіки. Розглянуто систему основних рівнянь теорії Максвелла, їхнє застосування для квазістатичних, квазістаціонарних і статичних електромагнітних процесів і в механіці рідин і газу. Наведено основні методи і приклади розв'язання задач у теорії поля.

Підручник призначено для студентів закладів вищої освіти, що навчаються за спеціальностями 131 «Прикладна механіка», 153 «Мікро- та наносистемна техніка», 171 «Електроніка», 172 «Телекомунікації та радіотехніка».

УДК 537.8+621.3.09(075.8)

© Сумський державний університет, 2023

© Рубан А. І., Гогоці Ю. Г.,

Гусак О. Г., 2023

ISBN 978-966-657-936-5

ЗМІСТ

	С.
ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ	9
1.1 Загальна характеристика електромагнітного поля.....	9
1.2 Рівняння Максвелла та їхній фізичний зміст	19
1.3 Рівняння безперервності, Лапласа і Пуассона.....	23
1.4 Рівняння енергетичного балансу електромагнітного поля (теорема Умова – Пойнтінга)	26
1.5 Закони зміни векторів електромагнітного поля на границі поділу двох середовищ (граничні умови)	30
1.6 Приклади використання основних рівнянь і законів під час опису електромагнітних полів	36
Питання для самоперевірки	47
РОЗДІЛ 2 ЧАСТКОВІ ВИДИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ	49
2.1 Загальні властивості і рівняння квазістатичних, квазістаціонарних і стаціонарних полів.....	49
2.2 Електростатичне поле	54
2.3 Електричне поле постійного струму	58
2.4 Магнітне поле постійного струму	62
2.5 Аналогія між стаціонарними полями	65
2.6 Електрична ємність, власна і взаємна індуктивність, енергія стаціонарних полів	69

2.7 Приклади аналізу стаціонарних і квазістаціонарних полів у найпростіших компонентах електричних кіл	75
Питання для самоперевірки	89
РОЗДІЛ 3 ЗАСТОСУВАННЯ ПОНЯТЬ ТЕОРІЇ ПОЛЯ	
В МЕХАНІЦІ РІДИНИ ТА ГАЗУ	91
3.1 Поле швидкостей і прискорень.....	91
3.2 Лінії і трубки течії. Витрата рідини	99
3.3 Розподіл маси в суцільному середовищі. Закон збереження маси і рівняння нерозривності (суцільності).....	104
3.4 Поле швидкостей суцільного середовища поблизу точки. Теорема Коші – Гельмгольца	110
3.5 Вихрові лінії й трубки. Теорема Гельмгольца. Утворення вихорів	116
3.6 Циркуляція швидкості й теорема Стокса.....	120
3.7 Поле швидкостей, зумовлене вихорами. Формула Біо – Савара	122
3.8 Безвихровий або потенціальний рух	129
3.9 Плоскі потоки нестисливої рідини. Функція течії та гідродинамічна сітка	133
3.10 Потенціальні течії нестисливої рідини	139
3.10.1 Загальні властивості потенціальних течій. Постановка гідродинамічної задачі	139
3.10.2 Деякі прості потенціальні потоки	144
3.10.2.1 Плоскопаралельний потік	144
3.10.2.2 Джерело і стік.....	147
3.10.2.3 Вихор.....	148
3.10.2.4 Вихростік і вихроджерело.....	150

3.10.2.5 Диполь.....	150
3.10.2.6 Вихровий шар.....	151
3.10.3 Методи особливостей	
для розв'язання плоских задач	
потенціального обтікання тіл	153
3.10.4 Безциркуляційне обтікання	
прямолінійним потоком	
круглого циліндра	156
3.10.5 Циркуляційне обтікання	
круглого циліндра.....	162
3.10.6 Застосування методу	
конформних відображень для побудови	
плоских потенціальних течій	169
3.10.7 Циркуляційне обтікання пластини	
плоским потенціальним потоком.....	173
3.10.8 Постановка загальної задачі	
про обтікання крилового профілю.....	179
3.11 Напружений стан суцільного середовища.....	185
3.11.1 Розподіл сил у суцільному середовищі	185
3.11.2 Властивості напружень поверхневих сил	187
3.11.3 Рівняння руху рідини в напруженнях.....	190
3.11.4 Узагальнена гіпотеза Ньютона	
про зв'язок між напруженнями	
і швидкостями деформацій.....	194
3.11.5 Рівняння руху в'язкої рідини	
(рівняння Нав'є – Стокса).....	197
3.11.6 Рівняння Рейнольдса	
осередненого турбулентного руху	201
Питання для самоперевірки	206

РОЗДІЛ 4 МЕТОДИ І ПРИКЛАДИ	
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ТЕОРІЇ ПОЛЯ	208
4.1 Загальна характеристика методів розв'язання задач.....	208
4.2 Методи, що ґрунтуються на теоремі Гаусса і законі повного струму в інтегральній формі з використанням властивості накладення полів.....	215
4.3 Інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа для одновимірних полів.....	217
4.4 Інтегрування рівнянь Лапласа і Гельмгольца методом розділення змінних (методом Фур'є)	218
4.5 Метод дзеркальних зображень.....	228
4.6 Конформне перетворення (відображення) плоскопаралельних полів	231
4.7 Приклади розв'язання задач.....	234
Питання для самоперевірки	275
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	277

ВСТУП

Видані раніше підручники і посібники з теорії поля здебільшого орієнтовані на підготовку фахівців електричного та електроенергетичного профілів, що визначає структуру їхньої побудови та ґрунтується на переході від окремих видів полів (електростатичного, електричного і магнітного полів постійного струму) до загальних рівнянь електромагнітних полів. На наш погляд, заснований на багаторічному досвіді викладання теорії поля студентам спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 153 «Мікро- та наносистемна техніка», 171 «Електроніка» та 172 «Телекомунікації та радіотехніка», більш кращим є фундаментальний підхід, який ґрунтується на використанні рівнянь Максвелла для опису як стаціонарних електромагнітних полів, так і механіки рідини і газу.

Підручник складається з *чотирьох розділів*. Перші два розділи присвячені висвітленню основ теорії електромагнітного поля, зокрема рівняння Максвелла, рівняння квазістатичних, квазістаціонарних і стаціонарних полів.

Третій розділ присвячений застосуванню понять теорії поля в механіці рідини та газу. Рідину та газ розглядають як суцільні середовища, маса яких безперервно розподілена по об'єму. У цьому разі всі параметри, що визначають стан суцільного середовища, утворюють поля: швидкостей, прискорень, тисків, напружень, температур тощо.

У четвертому розділі наведено методи і приклади розв'язання задач із теорії поля.

Практично всі розділи підручника мають приклади, що ілюструють фізичні процеси, які відбуваються в електромагнітних полях, а також питання для самоконтролю.

Перелік рекомендованої літератури містить підручники і навчальні посібники з курсу «Теорія поля», а також літературні джерела до суміжних питань, що допоможе

студентам і фахівцям у цій галузі отримати додаткову інформацію практичного плану.

Підручник розрахований на студентів закладів вищої освіти, що навчаються за спеціальностями 131 «Прикладна механіка», 153 «Мікро- та наносистемна техніка», 171 «Електроніка», 172 «Телекомунікації та радіотехніка» та інших спеціальностей, пов'язаних із розробленням і застосуванням електрофізичного обладнання, гідравлічних машин і гідроприводів.

Автори висловлюють глибоку подяку рецензентам: доктору фізико-математичних наук, професору, завідувачу кафедри наноелектроніки та модифікації поверхні Сумського державного університету Олександрю Погребняку; доктору технічних наук, професору, професору кафедри теоретичної електротехніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Валерію Бойку за критичні зауваження, поради і рекомендації щодо матеріалу рукопису, які дозволили поліпшити зміст підручника.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

1.1 Загальна характеристика електромагнітного поля

Електромагнітне поле являє собою особливий вид матерії, що виявляє силовий вплив на заряджені частинки, і визначається як сукупність змінних взаємозалежних електричного і магнітного полів, що впливають один на одного. У разі порушення цього загального визначення залежно від припущень і обмежень розрізняють такі часткові види електромагнітного поля: електростатичне, електричне і магнітне постійного струму, а також квазістаціонарне і квазістатичне поля.

На електромагнітне поле як на вид матерії поширюються поняття, які описують властивості речовини: *інерція, гравітаційна маса та енергія, кількість руху і момент кількості руху.* Наявність інертної маси електромагнітного поля підтверджують досліди російського фізика П. Н. Лебедева, який вивчив світловий тиск на тверді тіла (1899) і гази (1907). Інертна маса електромагнітного поля має незначну густину.

Електромагнітне поле є носієм гравітаційної маси, що підтверджено скривленням світлового променя в полі тяжіння Сонця, поміченим під час сонячного затемнення (1919), а також тим, що енергія (швидкість) променя збільшується під час руху до Землі і зменшується під час руху від Землі (дослід Пандау, 1960).

Електромагнітне поле має енергію, тому що під час взаємодії із зарядженими частинками їхня енергія змінюється, а отже, передається електромагнітному полю і навпаки. Рух енергії електромагнітного поля кількісно оцінює вектор Пойнтінга (п. 1.4).

У цьому посібнику розглянуто макроскопічну теорію електромагнітного поля, яка не враховує дискретного розподілу електричних зарядів у речовині, вважаючи речовинне середовище суцільним. За такого припущення для характеристики макроскопічного поля використовують усереднені значення мікроскопічних величин у нескінченно малому об'ємі, вводячи чотири основні вектори:

\vec{E} – напруженості електричного поля;

\vec{D} – електричного зміщення (електричної індукції);

\vec{H} – напруженості магнітного поля;

\vec{B} – магнітної індукції.

Напруженість електричного поля \vec{E} є силовою характеристикою електричного поля, що показує, яка сила \vec{F} діє на одиничний точковий заряд q , поміщений у це поле, тобто $\vec{E} = \vec{F}/q$.

Якщо в електричне поле \vec{E} помістити діелектрик, то всередині нього буде відбуватися *поляризація* (негативно заряджені електрони будуть рухатися до позитивного джерела електричного поля, позитивно заряджені іони – до негативного, створюючи в такий спосіб додаткове внутрішнє електричне поле). Заряди, що беруть участь у поляризації діелектрика, є зв'язаними. Силкові лінії електричного поля \vec{E} починаються і закінчуються на вільних і зв'язаних зарядах (рис. 1.1). З рисунка 1.1 можна бачити, що деякі силкові лінії вектора \vec{E} (суцільні лінії) на границі поділу зазнають стрибкоподібної зміни, створюючи в такий спосіб незручності під час розрахунків електростатичних полів. Тому вводять вектор, який не змінюється на всьому

проміжку між електродами (*вектор електричного зміщення* \vec{D}).

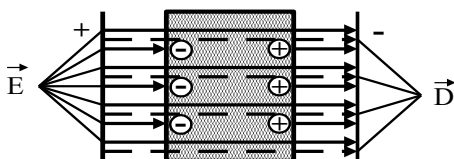


Рисунок 1.1 – Загальна схема поляризації діелектрика

Лінії такого вектора починаються і закінчуються тільки на вільних зарядах (див. рис. 1.1, пунктирна лінія). Отже, *вектор електричного зміщення* \vec{D} характеризує електричне поле, створене вільними зарядами, але за такого їхнього розподілу у просторі,

який існує за наявності діелектрика. Тоді вектор електричного зміщення \vec{D} дорівнює сумі векторів зовнішнього електричного поля у вакуумі $\vec{D}_{\text{вак}}$ і поля, що створюється зарядами речовини \vec{P} , названого *вектором поляризованості*.

З урахуванням цього можна записати

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{D}_{\text{вак}} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi^e \vec{E} = \\ &= \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\chi^e}{\varepsilon_0} \right) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де ε_0 – діелектрична стала ($\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м);

χ^e – електрична сприйнятливість речовини (поляризованість);

$\varepsilon = 1 + (\chi^e / \varepsilon_0)$ – відносна діелектрична проникність речовини ($\varepsilon \geq 1$);

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$ – абсолютна діелектрична проникність речовини.

З формули (1.1) випливає, що за постійного значення \vec{D} у вакуумі та в діелектрику збільшення відносної діелектричної проникності ϵ призводить до зменшення напруженості електричного поля в діелектрику. Тому з фізичного погляду *відносна діелектрична проникність речовини ϵ показує, у скільки разів електричне поле в речовині менше за електричне поле у вакуумі*, тобто $\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0 \epsilon$.

Аналогічні міркування можна навести і для магнітного поля. Якщо по провіднику пропустити струм I , то навколо нього створюється магнітне поле з *напруженістю \vec{H}* . У разі внесення в це поле магнетика (речовини, здатної під дією магнітного поля одержувати магнітний момент) він буде намагнічуватися (орбітальні електрони, обертаючись навколо ядер, створюють магнітні моменти, які спрямовані або вздовж зовнішнього поля або проти нього, формуючи в такий спосіб своє внутрішнє магнітне поле). Тоді магнітне поле всередині речовини \vec{B} (*вектор магнітної індукції*) дорівнює сумі зовнішнього магнітного поля (поля, створеного макрострумами у вакуумі – $\vec{B}_{\text{вак}}$, і внутрішнього магнітного поля (поля, створеного мікрострумами $\vec{B}_{\text{вн}}$), описуваного за допомогою *вектора намагніченості \vec{M}* .

З урахуванням цього можна записати

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_{\text{вак}} + \vec{B}_{\text{вн}} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \\ &+ \mu_0 \chi^m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi^m) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де μ_0 – магнітна стала ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,256 \cdot 10^{-6}$ Гн/м²);

χ^m – магнітна сприйнятливність речовини;

$\mu = 1 + \chi^m$ – відносна магнітна проникність речовини;

$\mu_a = \mu_0 \mu$ – абсолютна магнітна проникність речовини.

З фізичного погляду **відносна магнітна проникність речовини** μ показує, у скільки разів магнітне поле в речовині більше (для парамагнетиків $\mu > 1$ і феромагнетиків $\mu \gg 1$) або менше (для діамагнетиків $\mu < 1$) за магнітне поле у вакуумі, тобто $\mu = \mu_a / \mu_0$.

Рівняння (1.1) і (1.2) називають *матеріальними рівняннями*.

З іншого боку, якщо в магнітне поле помістити провідник зі струмом, то на нього буде діяти сила Ампера. Тому **магнітна індукція** \vec{B} є силовою характеристикою магнітного поля, що показує, яка сила \vec{F}_A діє на елемент провідника $d\vec{l}$ зі струмом I (тобто на заряди, що рухаються), внесеним у це поле (закон Ампера $d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]$).

Якщо поле не змінюється в часі, то таке поле називається **стаціонарним**. Під час описання стаціонарних електричних полів, які є *потенційними* ($\text{rot } \vec{E} = 0$), вводить поняття скалярного електричного потенціалу ϕ , зв'язаного з вектором \vec{E} співвідношенням

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi. \quad (1.3)$$

Потенціал ϕ є енергетичною характеристикою електричного поля, яка показує, яку потенційну енергію має одиничний позитивний заряд у даній точці.

Для стаціонарного магнітного поля $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$ (п. 2.1). Таке поле є *вихровим*. Однак для сукупності точок, у яких густина струму $\vec{\delta} = 0$, $\text{rot } \vec{H} = 0$, і магнітне поле можна розг-

лядати як потенційне, що має скалярний магнітний потенціал φ_m . Отже, для таких областей можна записати

$$\vec{H} = -\text{grad}\varphi_m. \quad (1.4)$$

Для розрахунків магнітних полів широко використовують також **векторний потенціал магнітного поля** \vec{A} , який пов'язаний із \vec{B} виразом

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (1.5)$$

Підставою для подання індукції \vec{B} у вигляді ротора від векторного потенціалу \vec{A} є те, що за умови підставлення (1.5) у четверте рівняння Максвелла (п. 1.2) виконано умову соленоїдальності магнітного поля $\text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} \equiv 0$.

Для провідного середовища густина струму $\vec{\delta}$ лінійно залежить від напруженості електричного поля \vec{E} в кожній її точці. Цю залежність описує **закон Ома в диференціальній формі** (п. 2.3)

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \quad (1.6)$$

де коефіцієнт пропорційності γ називається **питомою електричною провідністю середовища** і має розмірність $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$.

Рівняння (1.6) доповнюють рівняннями (1.1) і (1.2) для розв'язання рівнянь Максвелла.

Властивості електромагнітних полів значною мірою визначено *типами середовищ*, які умовно можна класифікувати в такий спосіб:

– *однорідні* – параметри середовища ($\epsilon_a, \mu_a, \gamma$) однакові у всіх точках;

– *неоднорідні* – параметри середовища ($\epsilon_a, \mu_a, \gamma$) змінюються від точки до точки;

– *ізотропні* – співвідношення між парами векторів \vec{D} і \vec{E} , \vec{B} і \vec{H} , $\vec{\delta}$ і \vec{E} лінійно залежні, тобто параметри середовища $\epsilon_a, \mu_a, \gamma$ є скалярними величинами;

– *анізотропні* – співвідношення між парами векторів \vec{D} і \vec{E} , \vec{B} і \vec{H} , $\vec{\delta}$ і \vec{E} залежать від їхньої орієнтації, тобто параметри середовища $\epsilon_a, \mu_a, \gamma$ є тензорами;

– *лінійні* – властивості середовища ($\epsilon_a, \mu_a, \gamma$) не залежать від величини поля \vec{E} або \vec{H} ;

– *нелінійні* – властивості середовища ($\epsilon_a, \mu_a, \gamma$) залежать від інтенсивності поля \vec{E} або \vec{H} .

Надалі для спрощення математичних викладів і наочності подання фізичних процесів будуть розглянуті рівняння, що характеризують поля в однорідних, ізотропних і лінійних середовищах.

Для наочного графічного уявлення електричного і магнітного полів вводять поняття силових і еквіпотенціальних ліній (еквіпотенціальних поверхонь).

Силова лінія – це уявно проведена в полі лінія, дотична до якої в кожній точці збігається з напрямом вектора напруженості електричного поля \vec{E} або вектора магнітної індукції \vec{B} . Силові лінії електричного поля по-

чинаються на позитивно зарядженому тілі і закінчуються на негативно зарядженому, що випливає із рівняння Максвелла $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ (п. 1.2). Умовно уздовж силової лінії міг би пересуватися досить малий позитивний заряд, якщо б він мав можливість вільного безінерційного переміщення в полі. *Силкові лінії магнітного поля* замкнені самі на себе, тому що $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (п. 1.2).

Під *еквіпотенціальною* (рівнопотенціальною) *поверхнею* йдеться про сукупність точок поля, що мають однаковий потенціал. Якщо подумки розсікти статичне поле будь-якою січною площиною, то в отриманому перетині будуть видимі сліди перетинання площини з еквіпотенціальними поверхнями. Їх називають *еквіпотенціальними лініями* (або еквіпотенціалами). Отже, *еквіпотенціальними* називаються *лінії* поля, на яких потенціал не змінюється. Еквіпотенціальні і силкові лінії в будь-якій точці поля перетинаються під прямим кутом.

Еквіпотенціальні лінії стаціонарного електричного поля замкнені (тому що $\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rotgrad}\varphi \equiv 0$).

Еквіпотенціальні лінії стаціонарного магнітного поля за умови $\vec{\delta} = 0$ ($\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rotgrad}\varphi_m \equiv 0$) починаються і закінчуються на струмах (аналогічно як і силкові лінії електричного поля починаються і закінчуються на зарядах). Приклад розподілу силових і еквіпотенціальних ліній для електричного поля точкового заряду і магнітного поля провідника зі струмом наведено на рисунку 1.2.

З рисунка 1.2 можна бачити, що силовим лініям електростатичного поля відповідають еквіпотенціальні лінії магнітного поля, а еквіпотенціалам електростатичного поля – силкові лінії магнітного поля.

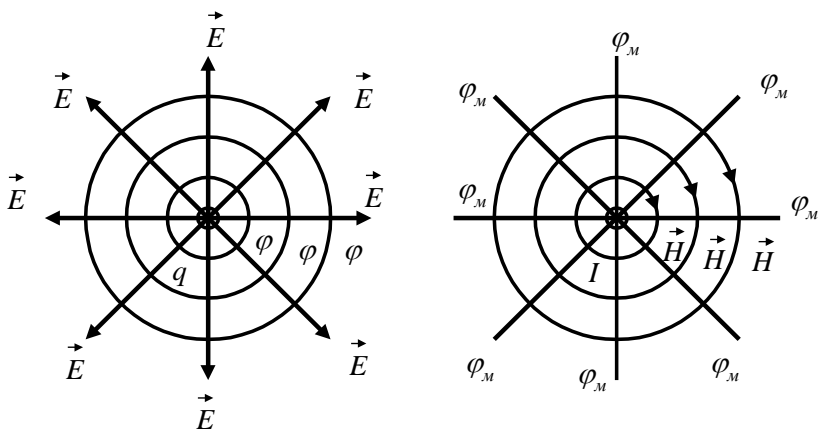


Рисунок 1.2 – Силкові і екіпотенціальні лінії електричного і магнітного потенціальних полів

На закінчення цього підрозділу сформулюємо деякі теореми і принципи, які є загальними під час розв’язання багатьох задач теорії електромагнетизму.

Інтегральні теореми застосовують за умови переходу від рівнянь поля, записаних в інтегральній формі, до рівнянь поля в диференційній формі і навпаки.

Теорема Остроградського – Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{K} dV = \oint_S \vec{K} \vec{dS} \quad (1.7)$$

визначає співвідношення між інтегралом дивергенції вектора \vec{K} по об’єму V і поверхневим інтегралом, узятим по замкненій поверхні S , що обмежує цей об’єм. Водночас обмежувальна поверхня повинна бути кусково-гладкою, а вектор на цій поверхні – безперервним. Позитивною є зовнішня нормаль \vec{dS} .

Теорема Стокса

$$\int_S \text{rot } \vec{K} d\vec{S} = \oint_l \vec{K} d\vec{l} \quad (1.8)$$

прирівнює поверхневий інтеграл ротора вектора \vec{K} до лінійного інтеграла цього вектора, узятого по замкненому контуру l , що обмежує цю поверхню. Вектор \vec{K} повинен бути безперервним по усьому контуру інтегрування, а контур – кусково-гладким. Позитивний напрямок нормалі до поверхні і напрямок обходу зв'язані правилом правоходового гвинта.

Теорема одиничності (однозначного) розв'язку придатна для постійних і змінних електромагнітних полів: *розв'язок, що задовольняє рівняння поля, граничні та початкові умови, є єдиним*. Наприклад, електричне поле описує рівняння Лапласа або Пуассона. Вони є рівняннями в частинних похідних. Для рівнянь у частинних похідних, на відміну від звичайних диференціальних рівнянь, допустимо загалом безліч лінійно незалежних один від одного розв'язків. У будь-якому реальному практичному завданні існує єдина картина поля, тобто єдиний розв'язок. З безлічі лінійно незалежних розв'язків, що допускає рівняння Лапласа – Пуассона, єдиний вибір, який задовольняє конкретне завдання, роблять за допомогою граничних умов.

Якщо існує деяка функція, яка задовольняє рівняння Лапласа – Пуассона і граничні умови в даному полі, то ця функція і являє собою той єдиний розв'язок конкретного завдання, який шукають.

Принцип накладення (суперпозиції) застосовують для полів, які описують лінійні рівняння: результуючий вектор (скаляр) дорівнює сумі векторів (скалярів), створених кожним джерелом окремо. Наприклад, n зарядів

створюють результуючу напруженість електричного поля

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k.$$

Принцип подвійності (принцип переставної подвійності) придатний для електростатичного, електричного постійного струму та магнітного постійного струму полів і ґрунтується на аналогії стаціонарних полів (п. 2.5): *задачі про розрахування одного поля можна замінити задачею про розрахування іншого поля, застосувавши аналогію величин і коефіцієнтів, які характеризують ці поля, якщо граничні поверхні обох полів за формою і взаємним розміщенням однакові, а граничні умови і диференціальні рівняння подібні до величин і коефіцієнтів, властивих кожному полю.*

1.2 Рівняння Максвелла та їхній фізичний зміст

Рівняння Максвелла є фундаментальними рівняннями електромагнітного поля. *Інтегральна форма запису* рівнянь устанавлює зв'язок між величинами в різних точках або на різних відрізках поверхні. *Диференціальна форма запису* описує співвідношення між величинами поблизу однієї і тієї самої точки поля в певний момент часу.

Перехід від інтегральної форми запису рівнянь Максвелла до диференційної форми здійснюється за допомогою теорем Остроградського – Гаусса (1.7) і Стокса (1.8).

Існує чотири рівняння Максвелла.

Перше рівняння Максвелла (закон повного струму)

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{\delta} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} d\vec{S},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$
(1.9)

Фізичний зміст: вихрове магнітне поле \vec{H} створює струм провідності $i_{\text{пров}} = \oint_S \vec{\delta} dS$ і струм зміщення

$$i_{\text{зм}} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} dS, \text{ де } \frac{d\vec{D}}{dt} - \text{змінне електричне поле.}$$

Друге рівняння Максвелла (закон електромагнітної індукції)

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} dl &= -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} dS, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Фізичний зміст: вихрове електричне поле \vec{E} створює змінне магнітне поле $\frac{d\vec{B}}{dt}$.

Третє рівняння Максвелла (теорема Гаусса)

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} dS &= \int_V \rho dV = \sum q, \\ \text{div } \vec{D} &= \rho, \end{aligned} \tag{1.11}$$

де ρ і q – вільні заряди в середовищі.

Фізичний зміст: силові лінії електричного поля починаються і закінчуються на зарядах q .

Четверте рівняння Максвелла (принцип безперервності магнітних силових ліній)

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{B} dS &= 0, \\ \text{div } \vec{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Фізичний зміст: силові лінії магнітного поля замкнені.

Для опису гармонічних змінних електромагнітних полів (які змінюються за законами синуса або косинуса) зручно використовувати *рівняння Максвелла в комплексній формі запису*. Відобразимо вектори електромагнітного поля в комплексному вигляді (за приклад візьмемо розглянутий вектор \vec{E})

$$\dot{\vec{E}} = E_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}, \quad (1.13)$$

де E_m – амплітуда поля;

φ – фаза поля;

$\omega = 2\pi f$ – колова частота;

t – часова координата;

j – комплексна одиниця.

Тоді

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \dot{\vec{E}}.$$

З урахуванням цього можна записати перше рівняння Максвелла в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{H}} &= \dot{\vec{\delta}} + j\omega \dot{\vec{D}} = \dot{\gamma} \dot{\vec{E}} + j\omega \dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}} = (\dot{\gamma} + j\omega \dot{\varepsilon}_a) \dot{\vec{E}} = \\ &= j\omega \left(\dot{\varepsilon}_a + \frac{\dot{\gamma}}{j\omega} \right) \dot{\vec{E}} = j\omega \dot{\varepsilon}_a \left(1 - \frac{j\dot{\gamma}}{\omega \dot{\varepsilon}_a} \right) \dot{\vec{E}} = j\omega \dot{\varepsilon}_{ka} \dot{\vec{E}}, \end{aligned}$$

де $\dot{\varepsilon}_{ka} = \dot{\varepsilon}_a \left(1 - \frac{j\dot{\gamma}}{\omega \dot{\varepsilon}_a} \right)$ – *комплексна діелектрична проник-*

ність, яка не має фізичного змісту, а вводиться для зручності і симетрії подання рівнянь Максвелла.

Часто уявну частину у виразі для комплексної діелектричної проникності заміняють тангенсом кута діелектричних втрат $tg\delta$

$$tg\delta = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a} = \frac{\gamma E}{\omega\varepsilon_a E} = \frac{\delta_{пров}}{\delta_{зм}}$$

Отже, *тангенс кута діелектричних втрат $tg\delta$ дорівнює відношенню густини струму провідності в середовищі до густини струму зміщення*. Отже,

$$\varepsilon_{ka} = \varepsilon_a (1 - jtg\delta).$$

Значення $tg\delta$ для різних речовин наводять у довідниках. Величина тангенса діелектричних втрат може бути основою для характеристики речовин. Так, якщо $tg\delta \ll 1$, то речовина є гарним діелектриком, якщо $tg\delta \gg 1$, то речовина – гарний провідник.

З урахуванням подання інших векторів поля у вигляді (1.13) *рівняння Максвелла в комплексній формі* запишемо в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \overset{\cdot}{\text{rot}} \overset{\cdot}{H} &= \overset{\cdot}{\delta} + j\omega \overset{\cdot}{D} = j\omega\varepsilon_{ka} \overset{\cdot}{E}, \\ \overset{\cdot}{\text{rot}} \overset{\cdot}{E} &= -j\omega \overset{\cdot}{B} = -j\omega\mu_a \overset{\cdot}{H}, \\ \overset{\cdot}{\text{div}} \overset{\cdot}{D} &= \overset{\cdot}{\rho}, \\ \overset{\cdot}{\text{div}} \overset{\cdot}{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Рівняння Максвелла в комплексній формі запису *фізичного змісту не мають*.

Узагальнюючи сказане вище, подамо системи рівнянь Максвелла у трьох формах запису (табл. 1.1).

Зазвичай систему рівнянь Максвелла доповнюють матеріальними рівняннями (1.1), (1.2) і законом Ома (1.6)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \quad \vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$$

Таблиця 1.1 – Система рівнянь Максвелла у трьох формах запису

Інтегральна	Диференційна	Комплексна
$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{\delta} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{H} = j\omega \varepsilon_{ka} \vec{E}$
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_s \vec{B} d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}$
$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_v \rho dV = \sum q$	$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\text{div } \vec{D} = \rho$
$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$

1.3 Рівняння безперервності, Лапласа і Пуассона

Рівняння безперервності (закон збереження заряду) виводять із першого рівняння Максвелла в диференційній

формі $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Застосуємо оператор div до всіх членів цього рівняння. Одержимо $div \vec{rot} \vec{H} = div \vec{\delta} + div \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Оскільки

$$div \vec{rot} \equiv 0, \text{ то } div \vec{\delta} + \frac{\partial (div \vec{D})}{\partial t} = 0.$$

З урахуванням третього рівняння Максвелла (1.11) можна записати

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \vec{\delta} = 0. \quad (1.15)$$

Отриманий вираз називається **законом збереження заряду**, або **рівнянням безперервності ліній повного струму**.

Для одержання закону збереження заряду в інтегральній формі проінтегруємо рівняння (1.15) за об'ємом V . Унаслідок цього отримуємо

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) + \int_V div \vec{\delta} dV = 0.$$

Скориставшись теоремою Остроградського – Гаусса (1.7), запишемо **інтегральну форму закону збереження заряду**

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) + \oint_S \vec{\delta} \cdot \vec{dS} = 0. \quad (1.16)$$

Фізичний зміст цього рівняння: струм провідності $i_{пров} = \oint_S \vec{\delta} \cdot \vec{dS}$ обумовлений рухом вільних зарядів ρ або заряди не можуть переміщуватися з однієї точки в іншу, не створивши між ними електричного струму.

Рівняння Пуассона і Лапласа для скалярного потенціалу φ є основними диференціальними рівняннями еле-

ктростатики. Вони впливають із третього рівняння Максвелла $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$. Оскільки $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$, а $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, то

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Оператор $\nabla^2 = \Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ називають *оператором Лапласа*, або *лапласіаном*. Тому можна записати так:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (1.17)$$

Це рівняння називають *рівнянням Пуассона*.

Якщо вільних зарядів ρ немає, то рівняння Пуассона переходить у *рівняння Лапласа*

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1.18)$$

У декартовій системі координат рівняння Пуассона і Лапласа мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

Отримавши *рівняння Пуассона для векторного потенціалу* \vec{A} , запишемо перше рівняння Максвелла для стаціонарного поля $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$.

Помноживши обидві частини на μ_a і використавши матеріальне рівняння (1.2), отримаємо

$$\mu_a \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Скористаємося виразом магнітної індукції через векторний потенціал (1.5). Тоді $\text{rot rot } \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}$.

З урахуванням того, що $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$, можна записати

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Оскільки для стаціонарного поля лінії вектора \vec{A} замкнені самі на себе, то $\text{div } \vec{A} = 0$. Унаслідок цього отримуємо рівняння Пуассона для векторного потенціалу

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (1.19)$$

1.4 Рівняння енергетичного балансу електромагнітного поля (теорема Умова – Пойнтінга)

Крім рівнянь Максвелла і закону збереження заряду, велике значення в теорії електромагнітного поля має **теорема Умова – Пойнтінга**, яка описує енергетичні співвідношення розподілу полів у заданому об'ємі. Її нескладно отримати з рівнянь Максвелла.

Для виведення теореми Умова – Пойнтінга скористаємося першим і другим рівняннями Максвелла в диференціальній формі, записаними з урахуванням матеріальних рівнянь (1.1), (1.2), (1.6)

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Помножимо перше рівняння Максвелла скалярно на \vec{E} , а друге – на \vec{H} і віднімемо із першого рівняння друге рівняння. Унаслідок цього отримаємо

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \gamma \vec{E} \vec{E} + \varepsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

З урахуванням того, що

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{div} \left[\vec{H} \times \vec{E} \right] = -\operatorname{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right],$$

можна записати

$$-\operatorname{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] = \gamma E^2 + \varepsilon_a \vec{E} \frac{\partial \left(\vec{E} \right)}{\partial t} + \mu_a \vec{H} \frac{\partial \left(\vec{H} \right)}{\partial t}.$$

Перемістивши \vec{E} і \vec{H} під знаки операторів диференціювання, отримаємо

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] &= \gamma E^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \left(\varepsilon_a E^2 \right)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \left(\mu_a H^2 \right)}{\partial t} = \\ &= \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Отже теорема Умова – Пойнтінга **в диференційній формі запису** має такий вигляд:

$$-\operatorname{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] = \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right). \quad (1.20)$$

У (1.20) $\frac{\varepsilon_a E^2}{2}$ являє собою енергію електричного поля в одиниці об'єму, $\frac{\mu_a H^2}{2}$ – енергію магнітного поля в одиниці об'єму dV , γE^2 – теплові втрати електромагнітної енергії. Для визначення енергії в повному обсязі проінтегру-

емо вираз (1.20) за об'ємом V . З урахуванням теореми Остроградського – Гаусса (1.7) *теорема Умова – Пойнтінга в інтегральній формі* запише набуде вигляду

$$-\oint_S \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] \vec{dS} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (1.21)$$

Векторний добуток $\left[\vec{E} \times \vec{H} \right] = \vec{\Pi}$ називають *вектором Пойнтінга*; він характеризує значення і напрямок переміщення енергії, яка проходить за одиницю часу крізь одиницю площі, перпендикулярну вектору $\vec{\Pi}$ (рис. 1.3).

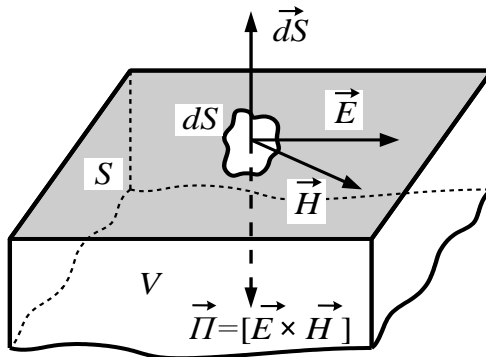


Рисунок 1.3 – Орієнтація векторів \vec{E} , \vec{H} , $\vec{\Pi}$ до поверхні S , яка обмежує об'єм V

Якщо вектор $\vec{\Pi}$ спрямований усередину поверхні, то його потік, який проходить крізь поверхню, буде позитивним $-\oint_S \vec{\Pi} \vec{dS} > 0$ (за позитивного напрямку \vec{dS} у бік зовнішньої нормалі до поверхні).

Фізичний зміст теореми Умова – Пойнтінга: енергія електромагнітного поля витрачається на теплові втрати γE^2 і на збільшення електричної $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} \right)$ і магнітної $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_a H^2}{2} \right)$ енергій у заданому об'ємі.

Теорема Умова – Пойнтінга в комплексній формі запису використовується для опису енергетичного балансу гармонічних електромагнітних коливань. Під час її виведення скористаємося першим і другим рівняннями Максвелла (1.14)

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \gamma \vec{E} + j\omega \epsilon_a \vec{E}; \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}.$$

Знаходячи повну потужність, необхідно комплекс вектора напруженості електричного поля \vec{E} помножити на сполучений комплекс вектора напруженості магнітного поля \vec{H} і виконати послідовність операцій, викладених вище, під час отримання рівняння для миттєвих значень. Унаслідок цього отримаємо

$$-\text{div} \vec{\Pi} = \gamma E^2 + 2j\omega \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right). \quad (1.22)$$

Для визначення енергії в повному обсязі проінтегруємо (1.22) по об'єму V і застосуємо до лівої частини теорему Остроградського – Гаусса (1.7)

$$-\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + j2\omega \int_V \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (1.23)$$

Перший доданок правої частини являє собою активну потужність, другий – реактивну потужність. Отже, теорема Умова – Пойнтінга в комплексній формі може бути записана і сформульована в такий спосіб:

$$-\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = P + jQ,$$

потік комплексного вектора Пойнтінга $\vec{\Pi}$ крізь замкнену поверхню дорівнює комплексній потужності, що виділяється всередині об'єму, обмеженого цією поверхнею.

1.5 Закони зміни векторів електромагнітного поля на границі поділу двох середовищ (граничні умови)

Для областей, що містять границю поділу двох або більше середовищ, безпосередній розв'язок диференціальних рівнянь Максвелла не можливий. Зазвичай розв'язують рівняння для кожного середовища окремо, а отримані розв'язки «зшивають» на границі поділу. Для цього використовують так звані *граничні умови* – співвідношення між значеннями

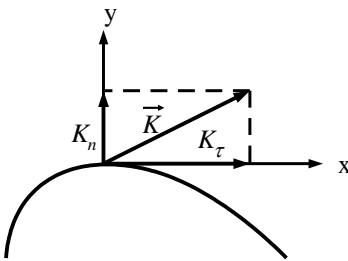


Рисунок 1.4 – Подання вектора \vec{K} у проєкціях на осі координат у вигляді тангенціальної (K_r) і нормальної (K_n) складових

векторів поля по обидва боки від границі поділу середовищ. Оскільки рівняння Максвелла є векторними, а розв'язки їх, зазвичай, перебувають у проєкціях на осі координат, то граничні умови зручно подати у вигляді нормальної (проєкція на вісь y) і тангенціальної (проєкція на вісь x) складових (рис. 1.4).

Методика виведення граничних умов ґрунтується на використанні рівнянь Максвелла (1.9)–(1.12).

Граничні *умови для нормальних складових поля*.

Нехай досить гладкий елемент поверхні ΔS розділяє два середовища 1 і 2 з різними діелектричними проникностями ϵ_1 і ϵ_2 ; у кожному середовищі параметри ϵ_1 і ϵ_2 постійні (рис. 1.5). Позначимо вектор електричної індукції (електричного зміщення) у середовищі 1 вектором \vec{D}_1 , у

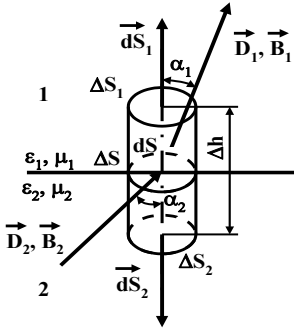


Рисунок 1.5 –
Переломлення

векторів \vec{D} і \vec{B} на границі
поділу середовищ

середовищі 2 – вектором \vec{D}_2 . Побудуємо на плоскій границі поділу елемент циліндра з висотою $\Delta h \rightarrow 0$ і основою циліндра $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$. Век-

тори \vec{dS}_1 і \vec{dS}_2 будуть спрямовані перпендикулярно до основ і поверхні поділу ($\vec{dS} = n dS$, де \vec{n} – нормаль до поверхні поділу), на якій загалом розподілений заряд із *поверхневою щільністю* $\sigma = \frac{dq}{dS}$. Позначимо кут між векторами \vec{D}_1 і \vec{dS}_1 через α_1 , між векторами \vec{D}_2 і \vec{dS}_2 – через α_2 .

Скористаємося третім рівнянням Максвелла в інтегральній формі (1.11) $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \int_V \rho dV = \oint_S \sigma dS$.

Сумарний інтеграл по поверхні циліндра в лівій частині буде містити два інтеграли по основах і один – по

бічній поверхні, який можна виключити з урахуванням того, що за умови $\Delta h \rightarrow 0$ площа бічної поверхні $\Delta S_{\text{бчн}} \rightarrow 0$. Тоді для виділеного циліндра

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{D}_1 d\vec{S}_1 + \int_{\Delta S_2} \vec{D}_2 d\vec{S}_2 = \int_{\Delta S} \sigma dS.$$

Оскільки $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$, а $|dS_1| = |dS_2| = |dS|$, то з урахуванням рівності підінтегральних скалярних добутків у разі переходу до запису в проекціях на осі координат отримаємо $D_1 \cos \alpha_1 + D_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = \sigma$.

Для остаточного запису граничних умов розкладемо, наприклад, вектор \vec{D}_1 на нормальну і тангенціальну складові (рис. 1.6).

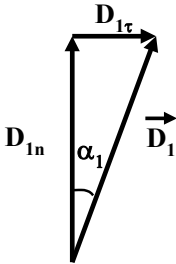


Рисунок 1.6 – Приклад розкладу вектора \vec{D} на складові

нормальних складових вектора електричної індукції на границі поділу середовищ

З рисунка 1.6 можна

бачити, що $\cos \alpha_1 = \frac{D_{1n}}{D_1}$.

Аналогічне розкладання можна провести і для вектора \vec{D}_2 . Тоді $D_1 \cos \alpha_1 = D_{1n}$, $D_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = -D_{2n}$.

Зважаючи на те, що середовища 1 і 2 ізотропні, а заряд σ розподілений по поверхні поділу рівномірно, отримуємо остаточний вираз для

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma. \quad (1.24)$$

Фізичний зміст: нормальна складова вектора електричної індукції D_n у разі переходу через границю поділу двох середовищ зазнає стрибка, який чисельно дорівнює поверхневій густині електричного заряду σ .

Граничну умову для нормальної складової магнітного поля можна одержати з четвертого рівняння Максвелла (1.12) $\oint_S \vec{B} dS = 0$.

У цьому разі виведення граничних умов аналогічне вищенаведеному виведенню для електричного поля (студенти роблять виведення самостійно).

Унаслідок цього отримуємо

$$B_{1n} - B_{2n} = 0$$

або

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (1.25)$$

Фізичний зміст: нормальна складова вектора магнітної індукції B_n у разі переходу через границю поділу двох середовищ не змінюється.

Граничні умови для тангенціальних складових поля виводяться з першого і другого рівнянь Максвелла (1.9), (1.10).

Нехай досить гладка поверхня S розділяє два середовища 1 і 2 з різними магнітними (діелектричними) проникностями μ_1 і μ_2 (ε_1 і ε_2); параметри середовищ постійні (рис. 1.7). Позначимо вектором \vec{H}_1 напруженість магнітного поля в середовищі 1, \vec{H}_2 – у середовищі 2. Охопимо границю невеликим контуром довжиною Δl і висотою Δh , який складається з елементарних відрізків Δl_1 , Δl_2 і Δl_3 , обумовлених за напрямками одиничними векто-

рами \vec{dl}_1 , \vec{dl}_2 і \vec{dl}_3 . Припустимо, що $|\Delta l_3| = \Delta h \rightarrow 0$, а вздовж поверхні S у нескінченно тонкому шарі, поміщеному на границі поділу, проходить *поверхневий струм* із густиною $i_{\text{нов}} = dI / dl$. Позначимо кут падіння вектора \vec{H}_1 на границю через α_1 , а кут заломлення вектора \vec{H}_2 – через α_2 .

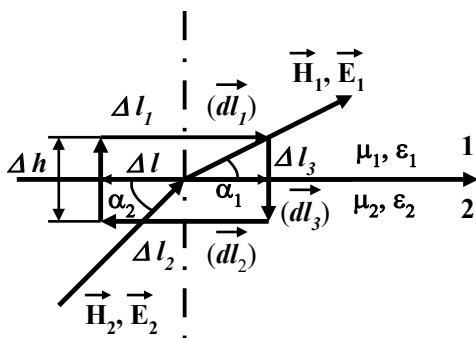


Рисунок 1.7 – Переломлення векторів \vec{H} і \vec{E} на границі поділу середовищ

Запишемо перше рівняння Максвелла (1.9) в інтегральній формі

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \oint_{\Delta S} \vec{\delta} \vec{dS} + \frac{d}{dt} \oint_{\Delta S} \vec{D} \vec{dS}.$$

Очевидно, що з умов $\Delta l \rightarrow 0$ і $S_{\text{бічн}} \rightarrow 0$ впливає заміна $\oint_S \vec{\delta} \vec{dS}$ на $\oint_{\Delta l} \vec{i}_{\text{нов}} \vec{dl}$, тому що $\vec{\delta}$ за розміром кінцева величина, і потрібно враховувати лише поверхневий

струм $i_{нов}$. Внеском бічних сторін ($\Delta l \rightarrow 0$) на контурний інтеграл тут знехтуємо. Другий інтеграл у правій частині рівняння Максвелла також прямує до нуля, оскільки $\Delta S = \Delta l \times \Delta h \rightarrow 0$. Тоді вихідне рівняння матиме такий вигляд:

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \int_{\Delta l_1} \vec{H}_1 \vec{dl}_1 + \int_{\Delta l_2} \vec{H}_2 \vec{dl}_2 = \int_{\Delta l} \vec{i}_{нов} \vec{dl}.$$

З урахуванням того, що за умови $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$ і $\vec{dl}_1 = \vec{dl}_2 = \vec{dl}$ підінтегральні вирази рівні, під час запису скалярних добутків векторів у проєкціях на осі координат маємо

$$H_1 \cos \alpha_1 - H_2 \cos \alpha_2 = i_{нов}.$$

Розкладемо вектор \vec{H}_1 на нормальну і тангенціальну складові (рис. 1.8). Тоді $\cos \alpha_1 = H_{1\tau} / H_1$, аналогічно $\cos \alpha_2 = H_{2\tau} / H_2$. Унаслідок цього маємо

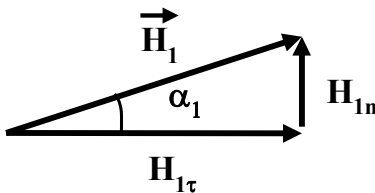


Рисунок 1.8 – Приклад розкладу вектора \vec{H} на складові

$$H_1 \cos \alpha_1 = H_{1\tau},$$

$$H_2 \cos \alpha_2 = H_{2\tau}.$$

Остаточно отримуємо граничну умову для тангенціальної складової магнітного поля

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = i_{нов}. \quad (1.26)$$

Фізичний зміст: тангенціальна складова вектора напруженості магнітного поля H_τ у разі переходу через гра-

ницю поділу двох середовищ зазнає стрибка, який чисельно дорівнює поверхневому струму $i_{нов}$.

Граничну умову для тангенціальної складової електричного поля можна отримати із другого рівняння Максвелла (1.10).

Виведення граничних умов для електричного поля аналогічне вищевикладеному виведенню для магнітного поля (студенти виведення роблять самостійно).

Унаслідок цього отримуємо

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$$

або

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (1.27)$$

Фізичний зміст: тангенціальна складова вектора напруженості електричного поля E_{τ} у разі переходу через границю поділу двох середовищ не змінюється.

Отже, загальна система граничних умов для електромагнітних полів має такий вигляд:

Електричні компоненти поля	Магнітні компоненти поля	
$D_{1n} - D_{2n} = \sigma,$	$B_{1n} = B_{2n},$	
$E_{1\tau} = E_{2\tau},$	$H_{1\tau} - H_{2\tau} = i_{нов}.$	(1.28)

Індекс 1 відповідає верхній півплощині середовища, індекс 2 – нижній півплощини.

1.6 Приклади використання основних рівнянь і законів під час опису електромагнітних полів

Для більш глибокого розуміння фізичної сутності наведених вище рівнянь і законів розглянемо найпростіші приклади їхнього використання під час опису електромагнітних процесів.

Приклад 1.1 (перше рівняння Максвелла)

Розглянемо прямий провідник, уздовж якого проходить постійний струм I (рис. 1.9). Навколо провідника виникає магнітне поле H , яке може бути визначене з першого рівняння Максвелла в інтегральній формі (1.9)

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{\delta} d\vec{S}, \quad \left(\frac{d\vec{D}}{dt} = 0\right).$$

Виберемо поверхню S , обмежену контуром l у вигляді кола радіусом r із центром, що збігається з віссю провідника і розміщене у площині, перпендикулярній до осі провідника. Використовуючи осьову симетрію задачі, замінимо скалярний добуток векторів $\vec{H} d\vec{l}$ добутком їхніх довжин і винесемо H за знак інтеграла як величину сталу вздовж контуру інтегрування. Тоді $\oint_l dl = 2\pi r$,

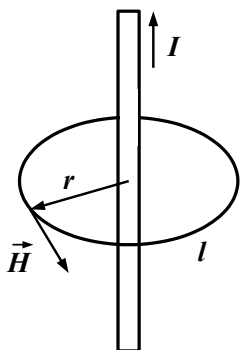


Рисунок 1.9 –
Магнітне поле
провідника
зі струмом

а інтеграл у правій частині дорівнює повному струму I , який перетинає поверхню S . Отже,

$$H = \frac{I}{2\pi}. \quad (1.29)$$

Це співвідношення є виразом *закону Ампера* для знаходження магнітного поля провідника, через який проходить постійний струм.

Проаналізуємо значення другого доданка $\frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} d\vec{S}$

у правій частині першого рівняння Максвелла (1.9).

Розглянемо дві пластини конденсатора (рис. 1.10), у колі якого проходить струм i . Виберемо контур інтегрування l у вигляді кола, яке охоплює провідник. Якщо поверхня S_1 , обмежена цим контуром, перетинає провідник до першої пластини конденсатора, то згідно з рівнянням Максвелла (1.9) струм провідності створює магнітне поле, обумовлене таким співвідношенням:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{\delta} d\vec{S}_1 = i_{np}.$$

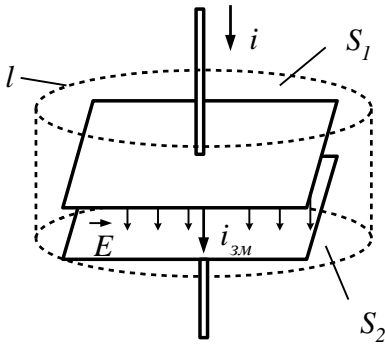


Рисунок 1.10 – Схема проходження струму колом конденсатора

струм провідності в колі конденсатора замикається струмом зміщення між його пластинами

$$i_{3M} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} d\vec{S}.$$

Густина струму зміщення

$$\vec{\delta}_{3M} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Виберемо іншу поверхню S_2 , обмежену таким самим контуром, але розміщену між пластинами конденсатора, де струм провідності переривається. Тоді

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{D} d\vec{S}_2.$$

Однак результат виникнення магнітного поля не повинен залежати від вибору поверхні інтегрування, тому праві частини останніх виразів повинні бути рівні. Отже,

Струм зміщення виникає в будь-якому діелектрику за зміни електричного поля в часі. Хоча природа струму провідності і струму зміщення різна, обоє вони утворюють магнітне поле.

Приклад 1.2 (друге рівняння Максвелла)

У просторі, де є магнітне поле \vec{B} , розглянемо одиничний дротовий контур l (рис. 1.11). Згідно із другим рівнянням Максвелла в інтегральній формі (1.10)

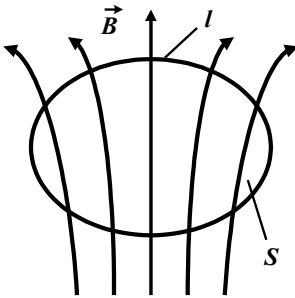


Рисунок 1.11 –
Одиничний
дротовий контур
у магнітному полі

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} =$$

$$= -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} d\vec{S}$$

у просторі виникає електричне поле. Інтеграл у правій частині являє собою потік $\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}$ вектора магнітної індукції \vec{B} через поверхню S , обмежену контуром l . Інтеграл у лівій частині являє собою електрорушійну силу, що виникає в контурі

$$e = \oint_l \vec{E} d\vec{l}.$$

Рівняння

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

виражає закон електромагнітної індукції, отриманий Фарадеєм.

Приклад 1.3 (третє рівняння Максвелла)

Розглянемо точковий заряд q , навколо якого існує електричне поле. Відповідно до третього рівняння Максвелла в інтегральній формі (1.11) маємо

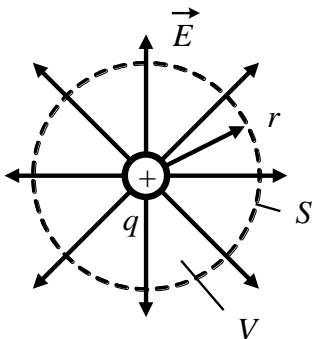


Рисунок 1.12 –
Електричне поле
точкового заряду

$$\varepsilon\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \rho dV = q.$$

Якщо за поверхню інтегрування вибрати сферу (рис. 1.12) із центром у місці розміщення заряду, очевидно, що через центральну симетрію вектори \vec{E} і $d\vec{S}$ колінеарні, а напруженість постійна по всій поверхні інтегрування. Тоді інтеграл у лівій частині дорівнює добутку E на площу поверхні сфери $4\pi r^2$, а інтеграл у правій частині дорівнює заряду q .

Напруженість поля точкового заряду визначається виразом

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Якщо в електричне поле заряду q внести пробний заряд q^* , то сила, що діє на нього, буде дорівнювати

$$F = q^* E = \frac{qq^*}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Цей вираз являє собою запис закону Кулона про взаємодію між зарядами (п. 2.2).

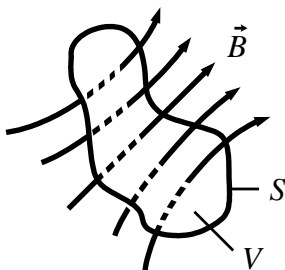


Рисунок 1.13 –
Потік вектора
магнітної індукції

Приклад 1.4 (четверте рівняння Максвелла)

Четверте рівняння Максвелла (1.12) демонструє, що потік вектора магнітної індукції крізь замкнену поверхню S дорівнює нулю, тобто вхідний потік дорівнює вихідному (рис. 1.13). Це означає, що магнітні силові лінії завжди замкнені і не мають ні початку, ні кінця. Силові лінії електричного поля починаються або закінчуються на зарядах.

Приклад 1.5 (рівняння безперервності)

Якщо в однорідному середовищі, яке характеризується питомою електропровідністю γ , у будь-який спосіб створити об'ємний заряд ρ , то, очевидно, що завдяки струмам провідності цей заряд буде «розпливатися» доти, доки не розподілиться рівномірно по всьому об'єму, тобто до зникнення створеного ним електричного поля. Це явище називається релаксацією, тобто поверненням до стану рівноваги. Проведемо кількісний аналіз процесу релаксації об'ємного заряду ρ за допомогою рівняння безперервності (1.15), для чого замість густини струму $\vec{\delta}$ підставимо

його значення з (1.6), а замість $\text{div} \vec{E}$ – величину $\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}$ з

(1.11) (постійні величини γ і $\epsilon\epsilon_0$ можна винести за знак оператора дивергенції). Унаслідок цього отримаємо диференціальне рівняння $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma \rho}{\epsilon\epsilon_0} = 0$, розв'язком якого є експонентна функція $\rho(t) = \rho(0) e^{-t/\tau_m}$ (рис. 1.14).

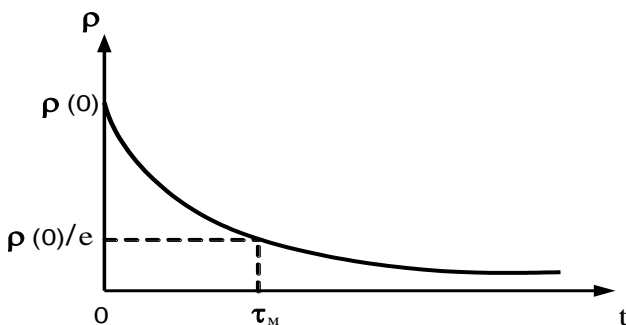


Рисунок 1.14 – Характеристика зміни об’ємного заряду ρ від часу t

Величина $\tau_m = \frac{\epsilon\epsilon_0}{\gamma}$ характеризує швидкість спадання

об’ємного заряду і називається максвеловим часом релаксації. Треба пам’ятати, що за час τ_m об’ємний заряд зменшується в $e = 2,7$ раз. Приблизно вважають, що об’ємний заряд повністю зникає за час, що дорівнює $(3 - 5)\tau_m$. У металах, які мають високу провідність, цей час дуже малий (порядку $10^{-17} - 10^{-18}$ с). У діелектриках залежно від їхньої якості він дорівнює $10^{-2} - 10^{-6}$ с.

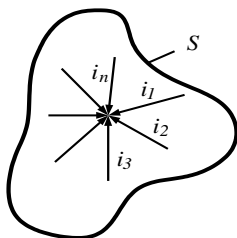


Рисунок 1.15 – Вузол електричного кола

Описане явище можна спостерігати, наприклад, за такої простої ситуації, як розрядження конденсатора завдяки струмам витоку, які проходять через ізоляційний діелектрик. Час розрядження визначається параметрами діелектрика: діелектричною проникністю ϵ і питомою електропровідністю середовища γ .

Іншим найпростішим прикладом використання рівняння безперервності є аналіз вузла електричного кола (рис. 1.15), у якому сходяться кілька провідників із постійними струмами $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$. Оточимо цей вузол деякою замкненою поверхнею S і скористаємося рівнянням безперервності у формі (1.16). Оскільки за постійних струмів заряд усередині поверхні не накопичується і не зникає, то перший доданок дорівнює нулю. Другий доданок дорівнює повному струму, який проходить крізь поверхню S , тому

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Це співвідношення являє собою перший закон Кірхгофа, який є одним із основних у теорії електронних кіл (п. 2.3).

Приклад 1.6 (рівняння енергетичного балансу)

Розглянемо найпростіший приклад застосування теореми Умова – Пойнтінга.

Нехай вздовж коаксіального кабелю (рис. 1.16) проходить постійний струм I . Напруга між жилою та оболонкою – U .

Провідність матеріалу жили та оболонки γ . Потужність сигналу, переданого по кабелю, $P = IU$. Підрахуємо потік вектора Пойнтінга через поперечний переріз діелектрика, який заповнює простір між жилою та оболонкою.

Напруженість магнітного поля в діелектрику можна визначити за законом Ампера (1.29)

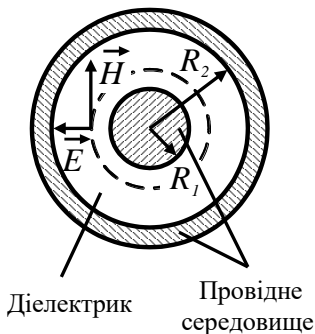


Рисунок 1.16 – Поперечний переріз коаксіального кабелю

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Нормальна складова вектора напруженості електричного поля E_n у діелектрику для коаксіального контура визначається таким співвідношенням:

$$E_n = \frac{U}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

де R_1 – радіус жили; R_2 – внутрішній радіус оболонки.

Тоді тангенціальна складова вектора Пойнтінга для точок діелектрика на відстані r від осі ($R_1 \leq r \leq R_2$) визначається виразом

$$P_\tau = E_n H = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Потік вектора Пойнтінга через кільце діелектрика з радіусами R_1 і R_2 дорівнює

$$\oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \int_{R_1}^{R_2} P_\tau 2\pi r dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \int_{R_1}^{R_2} (r^{-1}) dr = UI.$$

Оскільки вся подана до коаксіального кабелю потужність $P = IU$ проходить тільки через діелектрик, то можна зробити такий висновок: *електромагнітна енергія від місця її генерування до місця споживання передається по діелектрику; дроти відіграють роль каналів, якими проходить струм, і організаторів структури поля в діелектрику. По жилі та оболонці енергія до приймача не переда-*

ється. Дроти самі споживають із діелектрика енергію на покриття теплових втрат.

Продемонструємо цей факт. Для цього підрахуємо потік вектора Пойнтінга всередині жили на довжині l . Тангенціальна складова E_τ напруженості електричного поля на поверхні жили за законом Ома дорівнює $\frac{I}{\pi r_1^2 \gamma}$.

Тоді потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню жили

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \int_S P_n dS = \int_S E_\tau H dS = \int_0^l \frac{I^2}{\pi r_1^2 \gamma} dl = I^2 R.$$

Отже, ця енергія дорівнює втратам $I^2 R$ у жилі кабелю на довжині l .

Приклад 1.7 (граничні умови)

Розглянемо особливості поведінки електричного поля біля поверхні ідеального провідника. Будемо виходити з того, що якщо його електрична провідність дорівнює нескінченності, то всередині провідника електричне поле повинно бути відсутнім. Але тоді з перших двох граничних умов (1.28) випливає те, що дотична складова поля над поверхнею дорівнює нулю, а вектор напруженості електричного поля буде перпендикулярним до поверхні і дорівнюватиме поверхневій густині заряду $E = E_n = \rho_{\text{нов}} / \epsilon \epsilon_0$. Цей висновок спрощено поширюється і на реальні метали.

Магнітна складова дорівнює нулю навіть у немагнітних металах. Це означає, що нормальна складова вектора напруженості магнітного поля також дорівнює нулю, тому магнітне поле біля поверхні буде дотичним і перпендикулярним до ліній струму, а його напруженість дорівнюватиме поверхневій густині струму (рис. 1.17)

$$H = H_{\tau} = i_{\text{пов.}}$$

Розглянемо поведінку хвиль на границі поділу «діелектрик – діелектрик». За приклад заломлення вектора на границі двох діелектриків розрахуємо напрямок і величину електричного поля у слюді ($\epsilon = 7$, $\gamma < 10^{-11}$ См/м), якщо біля її границі в повітрі напруженість електричного поля дорівнює 10^3 В/м, а силові лінії спрямовані під кутом $\alpha_1 = 45^\circ$ до поверхні (рис. 1.18).

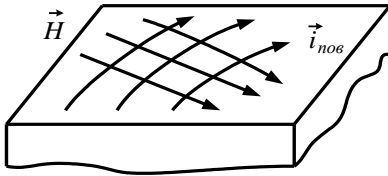


Рисунок 1.17 – Розподіл магнітного потоку і струмів на поверхні металу

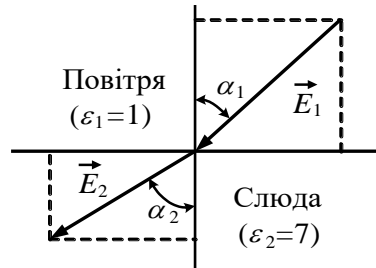


Рисунок 1.18 – Заломлення вектора \vec{E} на границі поділу «слюда – повітря»

Значення питомої електричної провідності свідчить, що слюда – гарний діелектрик, тому зовнішнє поле не викликає появи на її поверхні наведеного заряду ($\rho_{\text{пов.}} = 0$). Використовуючи позначення на рисунку 1.18, запишемо граничні умови для нормальної ($\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$) і тангенціальної ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$) складових електричного поля по обидва боки від границі поділу. Оскільки $E_{1n} = E_1 \cos \alpha_1 \approx 707$ В/м, то $E_{2n} = E_{1n} / \epsilon_2 \approx 101$ В/м, а $E_{2\tau} = E_{1\tau} = E_1 \sin \alpha_1 \approx 707$ В/м.

Отже,

$$E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2\tau}^2} \approx 714 \text{ В/м,}$$

$$\alpha_2 = \arctg\left(\frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}\right) \approx 82^\circ.$$

Питання для самоперевірки

1. На які основні діапазони можна умовно поділити спектр електромагнітних коливань? Дайте їхню коротку характеристику.

2. Які основні вектори характеризують електромагнітні поля? Запишіть зв'язок між ними через матеріальні параметри середовища.

3. Який фізичний зміст мають вектори поляризованості і намагніченості?

4. Для чого вводять поняття скалярного електричного і векторного магнітних потенціалів?

5. Які електродинамічні параметри характеризують матеріальні середовища? Перелічіть основні типи середовищ.

6. Які лінії називаються силовими та екіпотенціальними? Продемонструйте їхній розподіл на конкретних прикладах елементарних джерел електричних і магнітних полів.

7. З яких законів електромагнетизму впливають рівняння Максвелла в інтегральній формі? Запишіть їх і поясніть фізичний зміст.

8. Як здійснюється перехід від інтегральної форми запису рівнянь Максвелла до диференційної?

9. Як здійснюється перехід від диференційної до комплексної форми запису рівнянь Максвелла? Для якого типу електромагнітних процесів ці рівняння справедливі?

10. Які властивості електромагнітного поля характеризує закон безперервності?

11. Як із рівнянь Максвелла можна одержати рівняння Лапласа і Пуассона?

12. Яким рівнянням характеризується закон збереження енергії електромагнітного поля для замкненої системи?

13. Чому в рівнянні балансу енергії для гармонійних коливань відсутні члени, які містять похідні за часом?

14. Які співвідношення зв'язують вектори електромагнітного поля на границі поділу двох середовищ?

15. Які основні теореми і принципи використовують під час розв'язання задач теорії електромагнетизму?

РОЗДІЛ 2 ЧАСТКОВІ ВИДИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

2.1 Загальні властивості і рівняння квазістатичних, квазістаціонарних і стаціонарних полів

Рівняння Максвелла описують змінне електромагнітне поле як єдиний процес взаємозв'язку електричного $\vec{\partial D}/\partial t$ і магнітного $\vec{\partial B}/\partial t$ полів. Залежно від швидкості зміни $\vec{\partial D}/\partial t$ і $\vec{\partial B}/\partial t$ розрізняють *квазістатичне*, *квазістаціонарне* і *швидкозмінне* поле. У граничних випадках, коли $\vec{\partial D}/\partial t$ і $\vec{\partial B}/\partial t$ дорівнюють нулю, рівняння Максвелла спрощуються і описують окремі види стаціонарних електромагнітних полів: *електростатичне поле*, *електричне поле постійного струму* та *магнітне поле постійного струму*. Ці поля мають свої особливості і закономірності, коротко зупинимось на найбільш загальних із них.

1. *Квазістатичним полем* називається змінне електромагнітне поле, у якому $\vec{\partial B}/\partial t = 0$. Таке поле вважають потенціальним, тому що $\text{rot } \vec{E} = 0$ та для нього відсутній взаємний вплив електричного і магнітного полів.

2. *Квазістаціонарне поле* – це повільно змінне в часі вихрове поле, для якого можна вважати, що густина струму зміщення ($\vec{\delta}_{zm} = \vec{\partial D}/\partial t \approx 0$) мала порівняно із густиною струму провідності $\vec{\delta}_{np}$. Ефект запізнювання (ефект випромінювання) відсутній. Для металевих провідників нехтування струмами зміщення ($\frac{\omega \varepsilon_a}{\gamma} \ll 1$) припустимо

в широкому діапазоні частот аж до $f = 10^{17}$ Гц. Ефект запізнювання, обумовлений кінцевою швидкістю хвилі, неістотний, якщо лінійні розміри електромагнітних установок набагато менші за довжину хвиль, які поширюються в досліджуваній області. За низьких частот, наприклад, за промислової частоти $f = 50$ Гц, довжина хвилі в повітрі $\lambda = 6000$ км, тому ефектом запізнювання можна знехтувати в межах великих областей поля. Більшість електромагнітних полів, які досліджують в електродинаміці та радіотехніці, можна розглядати як квазістаціонарні.

Зважаючи на визначення квазістатичного та квазістаціонарного полів, їхні диференційні рівняння запишемо в такий спосіб:

Квазістатичне поле	Квазістаціонарне поле
$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$	$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E},$
$\text{rot } \vec{E} = 0,$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$
$\text{div } \vec{D} = \rho,$	$\text{div } \vec{D} = \rho,$
$\text{div } \vec{B} = 0.$	$\text{div } \vec{B} = 0.$

3. Стаціонарні поля. Умовою стаціонарності електромагнітних полів є відсутність їхньої зміни в часі, тобто вектори \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} і \vec{B} є функціями тільки координат. Це означає, що змінні в часі компоненти полів, які входять у рівняння Максвелла (1.9)–(1.12) і рівняння безперервності, відсутні. Доповнивши цю систему рівняннями Лапласа і Пуассона (1.17), (1.18), отримаємо спільну систему рівнянь, яка описує стаціонарні поля

$$\begin{aligned}
\oint_l \vec{H} d\vec{l} &= \oint_s \vec{\delta} d\vec{S}, & \text{rot } \vec{H} &= \vec{\delta}, & \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \\
\oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0, & \text{rot } \vec{E} &= 0, & \nabla^2 \vec{A} &= -\mu_a \vec{\delta}, \\
\oint_s \vec{D} d\vec{S} &= \int_v \rho dV = \sum q, & \text{div } \vec{D} &= \rho, & \vec{D} &= \varepsilon_a \vec{E}, \\
\oint_s \vec{B} d\vec{S} &= 0, & \text{div } \vec{B} &= 0, & \vec{B} &= \mu_a \vec{H}, \\
\oint_s \vec{\delta} d\vec{S} &= 0, & \text{div } \vec{\delta} &= 0, & \vec{\delta} &= \gamma \vec{E}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

З аналізу компонентів полів, що входять у систему (2.3), випливає, що її умовно можна розбити на дві групи рівнянь, які характеризують електричні (вектори \vec{E} , \vec{D}) і магнітні (вектори \vec{H} , \vec{B}) поля

Електричні поля	Магнітні поля
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0, \text{ rot } \vec{E} = 0,$	$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{\delta} d\vec{S}, \text{ rot } \vec{H} = \vec{\delta},$
$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = q, \text{ div } \vec{D} = \rho,$	$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0, \text{ div } \vec{B} = 0,$
$\oint_s \vec{\delta} d\vec{S} = 0, \text{ div } \vec{\delta} = 0,$	$\vec{B} = \text{rot } \vec{A},$
$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a},$	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta},$
$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$	$\vec{B} = \mu_a \vec{H}.$

Із системи рівнянь (2.4) і (2.5) можна бачити, що між ними існує тільки непрямий зв'язок через вектор густини струму $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$. Якщо $\vec{\delta} = 0$, що справедливо для полів постійних магнітів і областей існування магнітних полів, не зайнятих струмами, то рівняння (2.4) і (2.5) стають цілком незалежними і характеризують електростатичні та магнітостатичні поля. Такі поля називаються **потенціальними**.

Для потенціальних (безвихрових) полів лінійний інтеграл за будь-яким замкненим контуром від вектора напруженості електричного поля $\oint_l \vec{E} d\vec{l}$, а також від вектора напруженості магнітного поля $\oint_l \vec{H} d\vec{l}$ в області, не зайнятій струмом, дорівнює нулю. Тому потенціальні поля характеризують скалярними функціями: *електричним потенціалом ϕ електричного поля та магнітним потенціалом ϕ_m – магнітного поля постійного струму*.

У розділі 1 наведено визначення скалярного потенціалу. Зупинимося більш детально на поясненні його фізичної сутності під час застосування для розв'язання широкого класу задач електромагнетизму. Розглянемо питання про *роботу*, яку здійснюють сили поля під час переміщення заряду, і про пов'язані з *роботою* поняття **потенціалу** і **різниці потенціалів**.

Помістимо в електричне поле деякий заряд q . На заряд буде діяти сила $q\vec{E}$. Нехай заряд q із точки 1 перемістився в точку 2 шляхом 1–3–2 (рис. 2.1). Робота, витрачена на перенесення заряду з точки 1 у точку 2 шляхом 1–3–2,

визначиться як сума елементарних робіт $q \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Ця сума може бути записана у вигляді лінійного інтеграла $q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

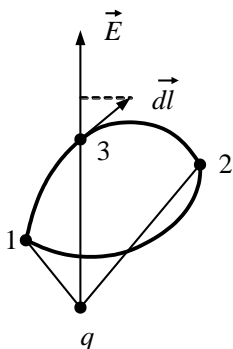


Рисунок 2.1 –
Схема переміщення
заряду q

Заряд q може бути будь-яким. Візьмемо його таким, що дорівнює одиниці (одичинний заряд). Під різницею потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ йдеться про роботу, затрачену силами поля під час перенесення одиничного заряду з початкової точки 1 у кінцеву точку 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) дозволяє визначити різницю потенціалів точок 1 і 2 як лінійний інтеграл від напруженості поля.

Якщо потенціал кінцевої точки шляху 2 дорівнював би нулю ($\varphi_2 = 0$), то потенціал точки 1 визначився б так:

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

тобто потенціал довільної точки поля може бути визначений як робота, що виконують сили поля з перенесення одиничного позитивного заряду з цієї точки поля в точку поля, потенціал якої дорівнює нулю.

За точку, яка має нульовий потенціал, може бути взято будь-яку точку поля. Якщо таку точку обрано, то потенціали всіх точок поля визначаються однозначно.

У курсах фізики потенціалом називають роботу, спричинену силами поля під час перенесення одиничного

заряду з даної точки поля в нескінченність $\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

В електротехніці вважають, що точка із нульовим потенціалом перебуває на поверхні землі (земля в умовах електростатики є провідним тілом, тому немає різниці, де саме – на поверхні землі або в її товщі є ця точка).

Отже, потенціал будь-якої точки залежить від того, якій точці поля заданий нульовий потенціал, тобто потенціал визначається з точністю до постійної величини. Однак істотного значення це не має, тому що практично важливий не потенціал якої-небудь точки поля, а різниця потенціалів і похідна від потенціалу за координатами.

Під час складання різниці потенціалів довільну постійну, з точністю до якої визначають потенціал, віднімають, тобто в різницю потенціалів вона не входить. На значенні похідної від потенціалу за координатами довільна постійна також не позначиться, оскільки похідна від постійної величини дорівнює нулю.

Картини поля є графічним зображенням сукупності ліній вектора поля та ліній рівного потенціалу. Плоскопаралельне поле має однакову картину поля у всіх площинах, які перпендикулярні до однієї з осей прямокутної системи координат (наприклад, поле конденсатора). За плоскомеридіанного поля картина поля однакова у всіх площинах поля, які проходять крізь вісь симетрії (наприклад, поле циліндричного конденсатора).

2.2 Електростатичне поле

Електростатичне поле створюється нерухомими у просторі і незмінними в часі зарядами.

На підставі цього формулювання впливають такі умови існування електростатичного поля: швидкість заряду $v_q = 0$; струм провідності відсутній ($\vec{\delta} = 0$); питома про-

відність середовища $\gamma = 0$, тобто електростатичне поле формується в середовищі «вакуум – діелектрик»; поле – потенціальне, тому що $\text{rot } \vec{E} = 0$.

У зарядженому тілі (якщо загальний заряд його не змінний із часом) елементарні заряди рухаються хаотично. Тому навіть у безпосередній близькості від поверхні цього тіла магнітне поле, створене елементарними зарядами, практично відсутнє. Це і дає можливість розглядати в електричному полі лише одну «сторону» електромагнітного поля, а саме електричну складову, яку описують вектори \vec{E} , \vec{D} , потенціал φ і параметр середовища ε_a . Як відзначено в п. 1.1, тут і надалі будемо розглядати поля в однорідних та ізотропних середовищах.

Основні рівняння, які описують електростатичні поля, випливають із загальної системи (2.4) з урахуванням того, що $\vec{\delta} = 0$ і $\gamma = 0$

$$\begin{aligned}
 \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0, & \text{rot } \vec{E} &= 0, \\
 \oint_s \vec{D} d\vec{S} &= q, & \text{div } \vec{D} &= \rho, \\
 \varphi &= -\int_l \vec{E} d\vec{l} + \text{const}, & \vec{E} &= -\text{grad } \varphi, \\
 \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, & \nabla^2 \varphi &= 0 \text{ за умови } \rho = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Граничні умови електростатики випливають із загальних граничних умов (1.28) для електричних компонентів поля

Границя
«діелектрик – діелектрик»

$$\begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= \sigma, \\ \varepsilon_{a1} E_{1n} - \varepsilon_{a2} E_{2n} &= \sigma, \\ \varepsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \sigma, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$D_{1n} = D_{2n}$ за умови $\sigma = 0$.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}, \quad (2.10)$$

($\varphi_1 = \varphi_2$).

Границя
«діелектрик –
провідник» (див. п. 1.6,
приклад 1.7)

$$\begin{aligned} D_n &= -\sigma, \quad E_n = -\frac{\sigma}{\varepsilon_a}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_a}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$E_\tau = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0. \quad (2.11)$$

Граничні умови для потенціалів впливають із порівняння виразів: $\vec{E} = \vec{\tau} E_\tau + \vec{n} E_n$ та $\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\vec{\tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) - \vec{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)$, звідки $E_\tau = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ і $E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Тут $\vec{\tau}$ і \vec{n} – одиничні вектори тангенціальних і нормальних складових.

Основні властивості, теореми і закони електростатики

1. *Електростатичне поле* – безвихрове, потенціальне поле ($\text{rot } \vec{E} = 0$).

2. За наявності електричного поля у провідному тілі відбувається розподіл зарядів. Унаслідок цього всередині провідника створюється внутрішнє електричне поле, яке компенсує зовнішнє поле. Тоді *всередині ідеального провідника напруженість електричного поля і вектор електричного зміщення дорівнюють нулю* $E = 0, D = 0$.

3. **Теорема Гаусса:** потік вектора електричного зміщення крізь замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, які перебувають усередині замкненої поверхні ($\oint_S \vec{D} dS = \sum q$).

4. **Закон заломлення вектора** $\vec{E} \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$. Із гра-

ничних умов електростатики (Границя «діелектрик – діелектрик») випливає, що безперервна тангенціальна складова вектора \vec{E} , тобто $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ (але $E_{1n} \neq E_{2n}$) і $D_{1n} = D_{2n}$ за умови $\sigma = 0$ (але $D_{1\tau} \neq D_{2\tau}$). Звідси видно, що повні значення вектора \vec{E} і вектора \vec{D} загалом змінюються стрибком на границі поділу. Зв'язок між кутом падіння α_2 і кутом заломлення α_1 (рис. 1.5) знаходять з аналізу трикутників розкладання векторів на складові (рис. 1.6, п. 1.5)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} = \frac{\varepsilon_{a1} E_{1\tau}}{D_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_{a2} E_{2\tau}}{D_{2n}} \quad \text{або} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

5. **Закон Кулона** призначений для визначення електростатичного поля та описує його механічний прояв за умови впливу на заряди. Сформулювати його можна так: *два точкові заряди q_1 і q_2 у вакуумі взаємодіють один із одним із силою \vec{F} , прямо пропорційною добутку зарядів q_1 , q_2 і обернено пропорційною квадрату відстані r між ними*

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{r}_0,$$

де \vec{r}_0 – одиничний вектор, спрямований вздовж лінії, яка з'єднує заряди.

Ця сила спрямована вздовж лінії, яка з'єднує точкові заряди (рис. 2.2). Якщо заряди мають однакові знаки, то вони намагаються відштовхнутися один від одного, заряди протилежних знаків намагаються зблизитися.

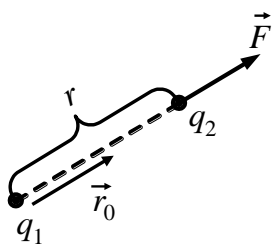


Рисунок 2.2 –
Взаємодія
зарядів q_1 і q_2

Про значення закону Кулона у фізиці. Шарль Кулон народився в 1736 році, за освітою – військовий інженер. Сформулював у 1785 році закон, названий на його честь, і експериментально підтвердив цей закон у 1789 році. Закон Кулона відіграв вирішальну роль у розвитку не тільки теорії електромагнетизму, але й у ядерній фізиці. Так, наприклад, він став основою під час побудови загальної теорії електромагнітного поля Максвеллом. У 1911 році

Резерфорд, використовуючи закон Кулона, побудував планетарну модель атома, на підставі якої теоретично пояснив фізику розсіювання α -частинок на ядрі (формула Резерфорда). Експериментальні перевірки точності закону «зворотних квадратів» (закону Кулона) до сьогодні досягли рекордних значень ($\sim 10^{-16}$), що дозволило фізикам зробити висновок про рівність нулю маси спокою фотона.

2.3 Електричне поле постійного струму

Електричне поле постійного струму утворюється всередині та ззовні провідників під час проходження ними постійного струму, створеного зовнішніми джерелами е. р. с.

На підставі визначення умови існування електричного поля постійного струму полягають у такому: густина струму $\vec{\delta} \neq 0$; об'ємний заряд $\rho = 0$ ($q = 0$); на поверхні провідника поверхнева густина заряду постійна ($\sigma = const$), питома провідність середовища $\gamma \gg \varepsilon$. Отже, електричне поле постійного струму характеризується векторами \vec{E} , $\vec{\delta}$, потенціалом φ і параметром середовища γ . На підставі цього основні рівняння електричного поля постійного струму мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0, & rot \vec{E} &= 0, \\
 \oint_s \vec{\delta} d\vec{S} &= 0, & div \vec{\delta} &= 0, \\
 \varphi &= -\int_l \vec{E} d\vec{l} + const, & \vec{E} &= -grad \varphi, \\
 I &= \oint_s \vec{\delta} d\vec{S}, & \vec{\delta} &= \gamma \vec{E}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Граничні умови електричного поля постійного струму для вектора \vec{E} випливають із системи (1.28), а для вектора $\vec{\delta}$ – із рівняння $\oint_s \vec{\delta} d\vec{S} = 0$ за методикою, викладеною в п. 1.5

$$\begin{aligned}
 \delta_{1n} &= \delta_{2n}; \quad \gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n} \\
 E_{1\tau} &= E_{2\tau}; \quad (E_{1n} \neq E_{2n}) \text{ за умови } E_{cноп} = 0 \\
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}; \quad \varphi_1 = \varphi_2.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Основні закони електричного поля постійного струму

1. **Закон заломлення ліній вектора $\vec{\delta}$** виводиться аналогічно до закону для вектора \vec{E} (див. п. 2.2) і має вигляд

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

де β_1 і β_2 – кути падіння і заломлення в провідному середовищі відповідно.

2. **Закон Ома в диференційній формі:** $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ – густина струму провідності $\vec{\delta}$ пропорційна напруженості електричного поля \vec{E} . В інтегральній формі закон Ома має вигляд $U = IR$.

3. **Узагальнений закон Ома в диференційній формі** для областей, зайнятих джерелами е. р. с.

$$\vec{\delta} = \gamma \left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}} \right),$$

де $\vec{E}_{\text{стор}}$ – поле у джерелі е. р. с.

4. Перший закон Кірхгофа:

– в інтегральній формі $\oint_S \vec{\delta} dS = 0$ – потік вектора густини струму провідності крізь замкнену поверхню дорівнює нулю;

– у диференційній формі $\operatorname{div} \vec{\delta} = 0$ – дивергенція вектора густини струму провідності дорівнює нулю (лінії $\vec{\delta}$ замкнені).

5. Другий закон Кірхгофа:

– в інтегральній формі $\oint_l \vec{E} dl = 0$ – циркуляція вектора

\vec{E} поза джерелами е. р. с. дорівнює нулю;

– у диференційній формі $\text{rot } \vec{E} = 0$ – поле потенціальне поза джерелами е. р. с.

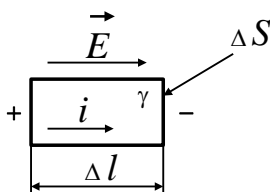


Рисунок 2.3 –
Елемент провідника
зі струмом

6. Закон Джоуля – Ленца в диференційній формі: $p = \gamma E^2$ – потужність теплових втрат p , що розсіюється за одиницю часу в одиниці об'єму провідного середовища під час проходження струму провідності (рис. 2.3), пропорційна питомій провідності γ середовища і квадрата напруженості прикладеного електричного поля E .

Цей закон є наслідком його інтегральної форми $P = I^2 R$ під час розгляду елементарного відрізка провідника зі струмом довжиною Δl і перерізом ΔS . Нижче наведено схему виведення закону Джоуля – Ленца в диференційній формі

$$p = \frac{P}{V} = \frac{I^2 R}{V} = \left| \begin{array}{l} I = \delta \Delta S, \\ V = \Delta l \Delta S, \\ R = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S} \end{array} \right| = \quad (2.14)$$

$$= \frac{\delta^2 \Delta S^2}{\Delta l \Delta S} \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \frac{\gamma^2 E^2}{\gamma} = \gamma E^2.$$

2.4 Магнітне поле постійного струму

Магнітне поле постійного струму створюється в провіднику і навколишньому просторі під час проходження постійного струму провідником.

Основною умовою існування стаціонарного магнітного поля є наявність незмінного з часом струму провідності ($\vec{\delta} \neq 0$). Магнітне поле – вихрове ($\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$) і характеризується векторами \vec{B} , \vec{H} , \vec{A} , $\vec{\delta}$, а в областях, не зайнятих струмами, – скалярним магнітним потенціалом φ_m .

Основні властивості магнітного поля постійного струму на підставі системи рівнянь (2.5) можуть бути сформульовані в такий спосіб:

1) закон повного струму:

– інтегральна форма $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I$ – циркуляція вектора

напруженості магнітного поля \vec{H} дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які проходять усередині контура інтегрування;

– диференційна форма $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$ – ротор вектора \vec{H} дорівнює вектору густини струму $\vec{\delta}$ (поле вихрове);

2) принцип безперервності ліній магнітної індукції:

– інтегральна форма $\Phi = \oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0$ або з викорис-

танням теореми Стокса (1.8) і співвідношення $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$,

маємо вираз для магнітного потоку Φ через векторний потенціал \vec{A} : $\Phi = \oint_S \text{rot } \vec{A} dS = \oint_l \vec{A} d\vec{l}$;

– диференціальна форма $\text{div } \vec{B} = 0$ – дивергенція вектора магнітної індукції дорівнює нулю (магнітне поле не має джерел). Аналогічно $\text{div } \vec{A} = 0$;

3) **закон Біо – Савара – Лапласа** визначає, яку індукцію магнітного поля $d\vec{B}$ створює елемент провідника $d\vec{l}$ зі струмом I на відстані r від провідника за відсутності феромагнітних середовищ

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}^0]}{r^2}, \quad (2.15)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений з елемента $d\vec{l}$ в точку, у якій визначається магнітна індукція $d\vec{B}$ (рис. 2.4);

\vec{r}^0 – одиничний орт.

Результуюча індукція магнітного поля в заданій точці матиме вигляд

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}^0]}{r^2}. \quad (2.16)$$

Вирази (2.15) і (2.16) можна записати через густину струму $\vec{\delta}$ за допомогою введення I у векторний добуток і заміни $I d\vec{l}$ на $\vec{\delta} dV$, де dV – елемент об'єму провідника з густиною струму $\vec{\delta}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{\delta} \times \vec{r}^0]}{r^2} dV; \quad (2.17)$$

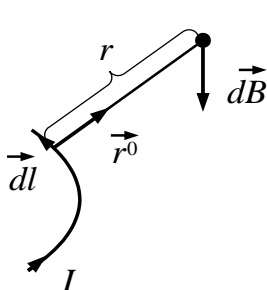


Рисунок 2.4 –
Ілюстрація закону
Біо – Савара – Лапласа

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{\delta} \times \vec{r}^0]}{r^2} dV.$$

Формули (2.17) у літературі іноді називають *законом Ампера* за аналогією з (1.29) для замкненого контура.

Закони повного струму та Біо – Савара – Лапласа дозволяють визначити магнітну індукцію, що створює струм.

Однак закон повного струму може бути застосований тільки до замкнених контурів, тоді як закон Біо – Савара – Лапласа справедливий і для відрізків провідників зі струмом;

4) *закони зміни векторів магнітного поля на границі поділу двох середовищ* впливають із загальної системи (1.28) і розгляду таких рівнянь для векторного потенціалу \vec{A} :

$$\oint_l \vec{A} dl = 0 \text{ і } \text{div } \vec{A} = 0 \quad (\vec{A} = \text{const}).$$

Використовуючи методику п. 1.5 і вираз (1.28), отримуємо співвідношення для векторів магнітного поля на границі поділу двох середовищ

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = i_{\text{нов}}, \quad A_{1\tau} = A_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad A_{1n} = A_{2n}. \quad (2.18)$$

Із (2.18) випливає, що вектор \vec{A} не зазнає стрибків на границі поділу двох середовищ.

Використовуючи скалярні магнітні потенціали (поле потенціальне)

$$\varphi_{1m} = \varphi_{2m}, \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi_{1m}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{2m}}{\partial n}.$$

Закон заломлення ліній вектора магнітної індукції має вигляд, аналогічний до електричних стаціонарних полів

$$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

2.5 Аналогія між стаціонарними полями

Аналогія між електричним полем постійного струму та електростатичним полем. За своєю природою електростатичне поле і поле постійного струму в провідному середовищі різні. Електростатичне поле створюється незмінними в часі і нерухомими у просторі електричними зарядами, тоді як в електричному полі в провідному середовищі електричні заряди рухаються впорядковано під дією зовнішнього джерела. Проте між двома полями може бути проведено певну формальну аналогію.

Загальною властивістю електричного поля постійного струму та електростатичного поля є їхня потенціальність: $\text{rot} \vec{E} = 0$. Для обох полів справедливе рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$, якщо розглядаємо область електричного поля,

яка перебуває поза джерелами енергії, а область електростатичного поля – поза об’ємним зарядом.

З подібності рівнянь, які описують ці поля, впливає формальна аналогія між відповідними величинами в цих рівняннях і тотожність граничних умов для них за однаковою формою граничних поверхонь (табл. 2.1). Водночас картини обох полів подібні, що дозволяє електростатичне поле в діелектрику моделювати електричним полем постійного струму в провідному середовищі і навпаки.

Таблиця 2.1 – Аналогія електричних стаціонарних полів

Електростатичне поле	Електричне поле постійного струму
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$	$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$
$rot \vec{E} = 0$	$rot \vec{E} = 0$
$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = 0$ (за умови $\rho = 0$)	$\int_s \vec{\delta} d\vec{S} = 0$
$div \vec{D} = 0$ (за умови $\rho = 0$)	$div \vec{\delta} = 0$
$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$	$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$
$\vec{E} = -grad \varphi$	$\vec{E} = -grad \varphi$
$\varphi = -\int_l \vec{E} d\vec{l} + const$	$\varphi = -\int_l \vec{E} d\vec{l} + const$
$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
$E_{1r} = E_{2r}$	$E_{1r} = E_{2r}$

Продовження таблиці 2.1

Електростатичне поле	Електричне поле постійного струму
$D_{1n} = D_{2n}$ (за умови $\sigma = 0$)	$\delta_{1n} = \delta_{2n}$
$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\frac{tg\beta_1}{tg\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$
$\varphi_1 = \varphi_2$	$\varphi_1 = \varphi_2$
Q	I
\vec{D}	$\vec{\delta}$
ε_a	γ

Аналогія між магнітним полем постійного струму та електростатичним полем. Диференційні рівняння магнітного поля постійного струму, записані для простору поза струмом, і диференційні рівняння електростатичного поля за відсутності об'ємних зарядів аналогічні. У цьому разі застосуємо принцип подвійності (див. п. 1.1). Розрахунки магнітного поля аналогічні до розрахунків електростатичного поля, але під час розв'язання замінюють $\varepsilon\varepsilon_0$ на $\mu\mu_0$, φ на φ_m , \vec{E} на \vec{H} , \vec{D} на \vec{B} (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 – Аналогія електричного та магнітного стаціонарних полів

Електростатичне поле	Магнітне поле постійного струму
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$	$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = 0$
$rot \vec{E} = 0$	$rot \vec{H} = 0$

Продовження таблиці 2.2

Електростатичне поле	Магнітне поле постійного струму
$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0$ (за умови $\rho = 0$)	$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$
$div \vec{D} = 0$ (за умови $\rho = 0$)	$div \vec{B} = 0$
$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_a \vec{H}$
$\vec{E} = -grad\varphi$	$\vec{H} = -grad\varphi_m$
$\varphi = -\int_l \vec{E} d\vec{l} + const$	$\varphi_m = -\int_l \vec{H} d\vec{l} + const$
$\nabla^2\varphi = 0$	$\nabla^2\varphi_m = 0$
$E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$H_{1\tau} = H_{2\tau}$
$D_{1n} = D_{2n}$ (за умови $\sigma = 0$)	$B_{1n} = B_{2n}$

Між картиною електростатичного поля і картиною магнітного поля постійного струму в областях, не зайнятих струмом, існує відповідність двох типів (одну з них наведено на рисунку 2.5).

Перший тип відповідності – існує однаковий розподіл лінійних зарядів в електростатичному полі і лінійних струмів у магнітнім полі. У цьому разі картина магнітного поля подібна до картини відповідного електростатичного поля. Відмінність полягає лише в тому, що силовим лініям електростатичного поля відповідають еквіпотенціальні лінії магнітного поля, а еквіпотенціалам електростатичного поля відповідають силові лінії магнітного поля (див. рис. 1.2).

Другий тип відповідності – коли існує однакова форма граничних еквіпотенціальних поверхонь в електрос-

татичному полі і в магнітному полі постійного струму. У цьому разі картина поля є повністю однаковою. Наприклад, силові лінії магнітного поля в повітряному проміжку між полюсом і якорем машини постійного струму збігаються із силовими лініями електричного поля, що створюють електроди, які мають форму полюса та якоря (рис. 2.5).

2.6 Електрична ємність, власна і взаємна індуктивність, енергія стаціонарних полів

Поняття електричної ємності C , власної L і взаємної M індуктивностей є інтегральними характеристиками не тільки електростатичного і магнітного полів, але й електричних кіл.

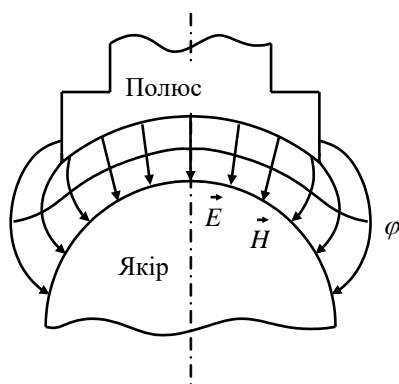


Рисунок 2.5 –
Демонстрація аналогії силових і еквіпотенціальних ліній магнітостатичного та електростатичного полів

Розрахунки величин C , L і M проводять методами теорії поля. У деяких випадках за допомогою цих величин може бути обчислена також енергія електричного і магнітного полів.

Електрична ємність і енергія. За постійної діелектричної проникності середовища заряд окремого провідного тіла пропорційний його потенціалу $Q = C\phi$. Заряд двох провідників, розділених діелектриком і заряджених рівними за значенням і протилежними

за знаком зарядами, пропорційний різниці потенціалів цих тіл $Q = C(\phi_1 - \phi_2)$. Водночас коефіцієнт пропорційності C називається **ємністю**.

Ємність визначають як відношення заряду окремого провідного тіла до його потенціалу $C = Q / \varphi$, а ємність двох провідних тіл – як відношення абсолютного значення заряду до різниці потенціалів між цими тілами

$$C = \frac{Q}{(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{Q}{U}.$$

З визначення ємності випливає одиниця її розмірності $1 \frac{\text{Кулон}}{\text{Вольт}} = 1 \text{ Фарада (Ф)}$. Це дуже велика одиниця, і тому на практиці користуються більш дрібними, кратними їй одиницями: мікрофарадою (мкФ) та пікофарадою (пФ): $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$; $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$.

Ємність залежить від геометричних розмірів, конфігурації, діелектричної проникності середовища та взаємного розміщення тіл. Пристроєм, призначеним для отримання певної величини ємності, є конденсатор, який являє собою систему із двох провідників (обкладинок, електродів), розділених діелектриком. Залежно від форми обкладинок конденсатори можуть бути плоскими, циліндричними, сферичними та ін. Якщо діелектрична проникність постійна, то ємність конденсатора не залежить від напруги між обкладинками, його характеристика – лінійна. За залежності діелектричної проникності від напруженості поля ємність конденсатора залежить від напруги між обкладинками, а його характеристика – нелінійна.

За наявності декількох заряджених провідників вводять поняття часткових ємностей і еквівалентної ємності системи.

Запас електричної енергії в об'ємі V визначається таким співвідношенням:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV. \quad (2.19)$$

Розрахунки енергії простіше проводити, використовуючи скалярні характеристики поля: потенціали φ і заряди q . Для цього у (2.19) здійснимо заміну $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ і скористаємося тотожністю векторного аналізу $\text{div}\vec{D} = \varphi \text{div}\vec{D} + \vec{D} \text{grad}\varphi$, звідки

$$\vec{D} \text{grad}\varphi \equiv \text{div}\vec{D} - \varphi \text{div}\vec{D}.$$

Унаслідок цього отримуємо, що $W_e = \frac{1}{2} \int_V \varphi \text{div}\vec{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div}\varphi \vec{D} dV$. Скориставшись теоремою Гаусса

($\text{div}\vec{D} = \rho$) і Остроградського – Гаусса (1.7), остаточно маємо $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV - \frac{1}{2} \oint_S \varphi \vec{D} dS$. Можна показати, що для локального розподілу заряду в необмеженому просторі V поверхневий інтеграл прямує до нуля, тоді

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (2.20)$$

Якщо розподіл заряду розбити на N окремих областей V_i ($i = 1, 2, \dots, N$), що несуть повні заряди q_i , то для системи провідників можна вважати, що $\varphi_i = \text{const}$. Тоді

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i \int_{V_i} \rho_i dV_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i. \quad (2.21)$$

Із співвідношення (2.21) електрична енергія конденсатора через ємність визначається в такий спосіб:

$$W_e = \frac{Q(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q}{2C}. \quad (2.22)$$

Співвідношення (2.22) дозволяє обчислити ємність конденсатора (системи із двох провідників) через електричну енергію.

Індуктивність і взаємна індуктивність, магнітна енергія. Якщо по замкненому контуру проходить електричний струм I , то всередині контура створюється магнітне поле

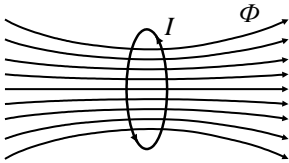


Рисунок 2.6 –
Магнітний потік контура зі струмом

(рис. 2.6), індукція якого \vec{B} пропорційна силі струму I та визначається за законом Біо – Савара – Лапласа (2.16). Оскільки магнітний потік Φ пов'язаний із магнітною індукцією виразом

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S},$$

то магнітний потік, створений контуром зі струмом, буде пропорційний силі струму, який проходить у контурі $\Phi = LI$, де L – коефіцієнт пропорційності, який називається *індуктивністю контура*.

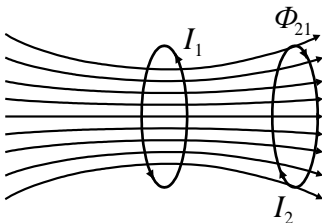


Рисунок 2.7 –
Магнітні потоки двох контурів зі струмом

Отже, **індуктивністю контура** є коефіцієнт пропорційності між власним магнітним потоком, що пронизує контур, і струмом у цьому контурі,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \oint_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (2.23)$$

Тепер розглянемо два контури зі струмами I_1 та I_2 . Такі

контури створюють магнітні потоки Φ_1 і Φ_2 відповідно. Частина магнітного потоку Φ_{12} , створеного струмом I_1 першого контура пронизує другий контур, а частина магнітного потоку Φ_{21} , створеного струмом I_2 другого контура, пронизує перший контур (рис. 2.7). Між магнітним потоком Φ_{21} , який пронизує другий контур, і струмом I_1 першого контура існує лінійний зв'язок $\Phi_{21} = L_{21}I_1$. Тут коефіцієнт пропорційності L_{21} називається *взаємною індуктивністю контурів*. Аналогічно можна записати і для першого контура $\Phi_{12} = L_{12}I_2$. Розрахунки, підтверджені дослідом, показують, що $L_{21} = L_{12} = M$.

*Коефіцієнт пропорційності M між струмом одного контура і магнітним потоком, створеним цим струмом, який пронизує другий контур, називається **взаємною індуктивністю***

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{1}{I_1} \oint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{I_2} \oint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}. \quad (2.24)$$

Магнітні потоки, створені постійним струмом, визначають статичні індуктивності, які залежать від геометричних розмірів контурів, їхнього взаємного розміщення, магнітної проникності матеріалів контурів і середовища. Для нелінійних середовищ [$\mu = f(H)$] індуктивності L і M залежать від струмів у контурах.

Під час обчислення власної індуктивності розглядають області всередині і поза дротом, тоді $L = L_{\text{вн}} + L_{\text{зовн}}$. Якщо радіус дроту малий порівняно з іншими розмірами контура, то можна припустити, що зовнішнє магнітне поле створює струм, зосереджений на осі дроту. Власна індуктивність одного контура може бути визначена на підставі основного співвідношення для енергії магнітного поля

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV. \quad (2.25)$$

Як і в разі електричних полів, можна перейти до запису магнітної енергії через джерела $\vec{\delta}$ і потенціали \vec{A} . Проведемо у (2.25) заміну $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ і скористаємося тотожністю векторного аналізу

$$\text{div} \left[\vec{H} \times \vec{A} \right] = \vec{A} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{A},$$

звідки $\vec{H} \text{rot } \vec{A} = \vec{A} \text{rot } \vec{H} - \text{div} \left[\vec{H} \times \vec{A} \right]$. З урахуванням зако-

ну повного струму $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$ рівність (2.25) набуде такого вигляду:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{\delta} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div} \left[\vec{H} \times \vec{A} \right] dV.$$

Застосуємо до другого інтеграла теорему Остроградського – Гаусса (1.7), водночас можна показати, що потік вектора $\left[\vec{H} \times \vec{A} \right]$ крізь замкнену поверхню, яка охоплює всі джерела об'єму V , буде дорівнювати нулю. Унаслідок цього маємо

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{\delta} dV. \quad (2.26)$$

Припустимо, що $\int_S \vec{\delta} dS = I = \text{const}$ для будь-якого

відрізка $d\vec{l}$ у заданому контурі, а $\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \Phi = \text{const}$ для

будь-якого перерізу \vec{dS} , тоді об'ємний інтеграл (2.26) можна записати в такому вигляді:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_S \vec{\delta} dS \times \int_l \vec{A} d\vec{l} = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{LI^2}{2}.$$

Для практичних розрахунків зручно виходити із таких рівностей:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV = \frac{LI^2}{2}$$

або

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mu_a H dS = \sum_{k=1}^n M_{ik} I_k. \quad (2.27)$$

Водночас магнітний потік може бути розрахований за векторним потенціалом $\Phi_i = \oint_{l_i} \vec{A} dl_i$.

2.7 Приклади аналізу стаціонарних і квазістаціонарних полів у найпростіших компонентах електричних кіл

Найпростіші компоненти пристроїв електронної техніки – резистори, котушки індуктивності, конденсатори, відрізки сполучних ліній.

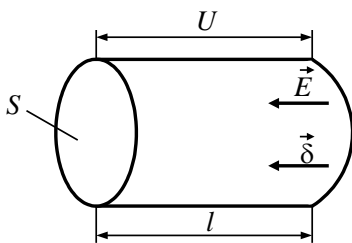


Рисунок 2.8 – Резистор

Крім названих, електронні ланцюги містять так звані активні компоненти, які безпосередньо підсилюють сигнали, перетворюють енергію з однієї форми в іншу, відображають інформацію тощо. Ці компоненти є предметом вивчення курсів електроніки.

Розглянемо лише найпростіші (пасивні) компоненти з погляду на їхні схемотехнічні властивості, тобто зв'язки між струмом і напругою (резистори), зарядом і напругою (конденсатори), магнітним потоком і струмом (катушки індуктивності).

Приклад 2.1 (резистор). У найпростішому варіанті резистор – деякий об'єм речовини (рис. 2.8), яка має помітну електричну провідність і для якого виконується закон Ома в диференційній формі $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$. Помножимо обидві частини цієї рівності на елементарний об'єм $dS dl$ і проінтегруємо за всім об'ємом. Інтеграл від $\vec{\delta} dS$ у лівій частині – повний струм il , а інтеграл від $\vec{E} dl$ у правій – різниця потенціалів U на всій довжині зразка. Тому $il = \gamma SU$ або $U = iR$, де $R = l / \gamma S$ – опір.

Отже, для резистора характерна пряма пропорційність між струмом, що проходить, і спаданням напруги. Ця закономірність називається законом Ома, а коефіцієнт пропорційності – опором. Така залежність спостерігається лише для початкової ділянки вольтамперної характеристики резистора. У сильних електричних полях питома електрична провідність стає залежною від напруженості електричного поля, і закон Ома порушується.

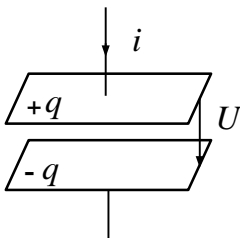


Рисунок 2.9 –
Плоский конденсатор

Приклад 2.2 (плоский конденсатор). Відмітною ознакою елементів, що характеризуються ємністю, є електростатичне поле. Розглянемо конденсатор, на пластинах якого розміщені рівні за величиною і протилежні за знаком заряди (рис. 2.9). Відомо (див. п. 2.5), що заряд однієї із пластин пря-

мо пропорційний різниці потенціалів $q = CU$, де C – ємність конденсатора.

Збільшення заряду, наприклад на верхній пластині, призведе до збільшення різниці потенціалів. Але, з іншого боку, збільшення заряду можливо лише завдяки проходженню струму $i = dq / dt$ у колі. Тому струм у колі конденсатора пропорційний швидкості зміни напруги в часі $i = C \frac{dU}{dt}$, а коефіцієнтом пропорційності є ємність конденсатора.

Під час підключення до конденсатора змінної напруги в його колі буде проходити змінний струм. У припущенні квазістаціонарності процесу ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$) між їхніми комплексними амплітудами спостерігається пряма пропорційність $\dot{i} = j\omega C \dot{U}$.

За формою ця рівність аналогічна до закону Ома, а величина $1/\omega C = X_C$ називається *реактивним ємнісним опором*.

Приклад 2.3 (катушка індуктивності). Одним із елементів електричних кіл є катушка індуктивності, під час проходження електричного струму по ній виникає магнітне поле (рис. 2.10).

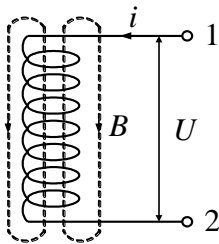


Рисунок 2.10 –
Катушка індуктивності

Для аналізу схематичних властивостей такого елемента припустимо, що він виготовлений із провідника без втрат, і скористаємося другим рівнянням Максвелла в інтегральній формі (1.10)

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_s \vec{B} d\vec{S}.$$

За замкнений контур інтегрування візьмемо лінію, яка проходить від точки 1 до точки 2 уздовж провідника зі струмом, і потім від точки 2 до точки 1 по вільному простору. Оскільки в ідеальному провіднику електричне поле відсутнє, інтеграл на першій ділянці дорівнює нулю, а на другій – різниці потенціалів між точками 1 і 2 (2.6), тобто спаданню напруги на котушці (зі зворотним знаком). Інтеграл у правій частині дорівнює потоку вектора магнітної індукції Φ крізь поверхню, обмежену обраним контуром. Як відомо, цей потік пропорційний струму, тобто $\Phi = Li$. Тому напруга U на котушці, у припущенні квазістаціонарності процесу ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$), пропорційна швидкості зміни струму в часі

$$U = L \frac{di}{dt},$$

а коефіцієнт пропорційності L називається *індуктивністю* (див. п. 2.6).

Під час роботи котушки на змінному струмі ($i \rightarrow \dot{I} \times e^{j\omega t}$, $U \rightarrow \dot{U} \times e^{j\omega t}$) між амплітудами напруги і струму буде спостерігатися пряма пропорційність, тоді, якщо скористатися методом комплексних амплітуд,

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}.$$

Формально ця залежність для комплексних амплітуд аналогічна закону Ома, а коефіцієнт пропорційності $X_L = \omega L$ називається *реактивним опором котушки індук-*

тивності аналогічно ємнісному реактивному опору конденсатора (див. приклад 2.2).

Приклад 2.4 (магнітна індукція відрізка дроту зі струмом). Для порівняння законів повного струму і Біо – Савара – Лапласа розглянемо процедуру знаходження магнітної індукції, створеної відрізком лінійного дроту зі струмом i в довільній точці m (рис. 2.11). Для знаходження магнітної індукції скористаємося співвідношенням (2.16).

Припустимо, що точка m віддалена на відстань b .

Кут між \vec{dl} і \vec{r}^0 позначимо α . З геометричних міркувань маємо: $r = \frac{b}{\sin \alpha}$, $l = -bctg \alpha$, отже, $dl = \frac{bd\alpha}{\sin^2 \alpha}$;

$$\left[\vec{dl} \times \vec{r}^0 \right] = dl \times 1 \times \sin \alpha; \quad dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha.$$

Унаслідок цього інтеграл (2.16) і його розв'язання запишемо у вигляді

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

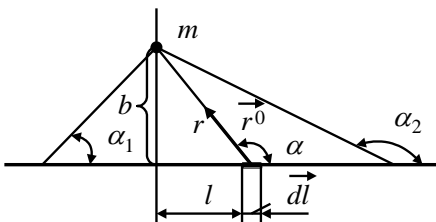


Рисунок 2.11 –
Визначення магнітної
індукції відрізка дроту

де вектор \vec{B} спрямований до читача.

Якщо дріт буде нескінченно довгий, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180^\circ$, $\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = 2$ і $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi b}$,

що збігається з результатом, отриманим за законом повного струму в п. 1.6 (1.29).

Приклад 2.5 (поле і ємність дводрової лінії).

Однією із простих задач електростатики, під час розв'язання якої використовується теорема Гаусса в інтегральній формі (1.11), може бути задача зі знаходження напруженості поля \vec{E} , потенціалу φ та ємності C дводрової лінії передачі – одного з компонентів електричних кіл. Водночас для більшої наочності розв'язання задачі доцільно розбити її на три етапи: визначення поля нескінченно довгого і тонкого провідника (зарядженої осі); двох паралельних заряджених осей; дводрової лінії з урахуванням товщини провідників.

Заряджена вісь розміщена в діелектричному середовищі ϵ_a і має заряд на одиницю довжини $\tau = \frac{\partial q}{\partial l}$. Для

знаходження напруженості поля \vec{E} у деякій точці, віддаленій на відстань r від осі (рис. 2.12), проведемо через цю точку циліндричну поверхню так, щоб її вісь збігалась із зарядженою віссю.

Тоді теорему Гаусса для такої системи запишемо в такий спосіб:

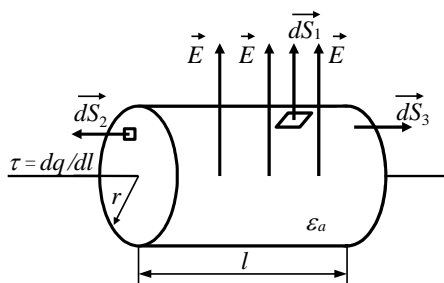


Рисунок 2.12 – Визначення напруженості електричного поля зарядженої осі

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a} = \frac{1}{\epsilon_a} \int \tau dl.$$

У цьому разі замкнена поверхня утворена бічною поверхнею циліндра і двома його основами. Потік

вектора \vec{E} проходить тільки крізь бічну поверхню циліндра. Крізь основи потік векто-

ра \vec{E} відсутній, оскільки елемент поверхні $d\vec{S}$ кожного із них перпендикулярний до \vec{E} , то маємо інтегрування тільки по бічній поверхні. З урахуванням того, що елементи $d\vec{S}$ бічної поверхні і напруженість електричного поля \vec{E} у будь-якій точці циліндра за напрямом збігаються, а τ не залежить від елемента довжини зарядженої осі, рівняння (2.28) набуде такого вигляду:

$$E \oint_S dS_1 = \frac{\tau}{\epsilon_a} \int l$$

або $ES_1 = \frac{\tau}{\epsilon_a} l$, де $S_1 = 2\pi rl$.

Звідки напруженість поля зарядженої осі

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}. \quad (2.29)$$

Із (2.29) можна бачити, що напруженість у полі зарядженої осі змінюється обернено пропорційно відстані r від точки до осі, тому потенціал визначається в такий спосіб:

$$\varphi = -\int E dr = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \int (r^{-1}) dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C, \quad (2.30)$$

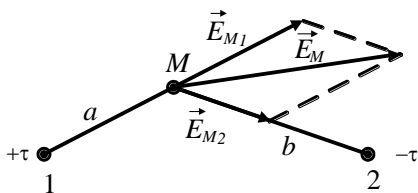


Рисунок 2.13 –
Електричне поле
двох заряджених осей

де C – константа інтегрування, а одиниця, що перебуває під знаком логарифма у (2.30), має сенс одиничного радіуса (одиниці вимірювання), тому логарифм береться від величини з нульовою розмірністю.

Паралельні заряджені осі схематично наведені на рисунку 2.13. Нехай одна вісь на одиницю довжини має заряд $+\tau$, інша – заряд $-\tau$. Візьмемо в їхньому полі деяку довільну точку M .

Результуюча напруженість поля в ній $\vec{E}_M = \vec{E}_{M1} + \vec{E}_{M2}$. Відстань від точки M до позитивно зарядженої осі позначимо через a , до негативно зарядженої осі – через b . Потенціал точки M дорівнює сумі потенціалів від кожної осі

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{a} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{b} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a} + C. \quad (2.31)$$

Для екіпотенціальних ліній ($\varphi = const$) відстань $\frac{b}{a} = const$.

Дводротову лінію із провідниками кінцевого радіуса схематично наведено на рисунку 2.14.

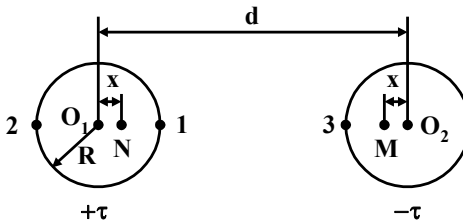


Рисунок 2.14 – Схема дводротової лінії

Нехай два дроти однакового радіуса R перебувають на відстані d один від одного. Якщо лівий дріт матиме заряд $+\tau$ на одиницю довжини, а правий $-\tau$, то у просторі між ними виникне електричне поле. Заряди дротів розподіляться по поверхні з неоднаковою густиною: на внутрішніх стінках дротів густина заряду буде більша, ніж назовні.

Поверхня кожного дроту є екіпотенціальлю. У середині дротів $E = 0$. Задача про поле дводротової лінії зводиться до розглянутої вище задачі про поле двох заряджених осей. Розташуємо дві заряджені осі так, щоб поверхні кожного дроту були екіпотенціальними.

Точками O_1 і O_2 позначимо геометричні осі провідників. Нехай заряджені осі будуть розміщені в точках M і N . З умови симетрії вони віддалені від геометричних осей на однакову відстань x . Запишемо умову рівності потенціалів точок 1 і 2 лівого дроту. Відношення $\frac{b}{a}$ в (2.31) для точки 1

$$\epsilon \frac{d - R - x}{R - x}; \quad \text{відношення } \frac{b}{a} \text{ для точки 2 дорівнює } \frac{d + R - x}{R + x}.$$

З рівності $\frac{d - R - x}{R - x} = \frac{d + R - x}{R + x}$ отримаємо

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - R^2}. \quad (2.32)$$

У виразі (2.32) знак мінус перед радіусом відповідає положенню точки N , знак плюс – точки M .

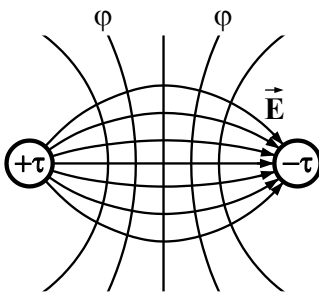


Рисунок 2.15 – Картина електричного поля дводротової лінії

Легко переконатися в тому, що якщо $d \gg R$, то x стає на багато менше ніж R . Водночас електричні і геометричні осі практично збігаються. На рисунку 2.15 наведено картину електричного поля дводротової лінії.

Знайдемо *ємність дводротової лінії*. Для цього виразимо напругу між двома

дротами з використанням заряду τ на одиницю довжини. Виберемо точку 1 (див. рис. 2.14), що належить поверхні лівого дроту, точку 3 – поверхні правого дроту. Різниця потенціалів між ними

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-R-x}{R-x} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R-x}{d-R-x}.$$

$$\begin{aligned} \text{За умови } d \gg R \text{ і } R \gg x \quad U_{13} &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} 2 \ln \frac{d}{R} = \\ &= \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{R}. \end{aligned}$$

Отже, ємність одиниці довжини лінії за умови $d \gg R$

$$C = \frac{\tau}{U_{13}} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{R}}. \quad (2.33)$$

Із (2.33) випливає, що *ємність* лінії *залежить тільки від її геометричних розмірів і від властивостей середовища, у якому вона розміщується*. Залежність від величини заряду і напруги U_{13} у виразі (2.33) відсутня. Варто зазначити, що якщо відстань між двома провідниками збільшувати, то ємність буде зменшуватися.

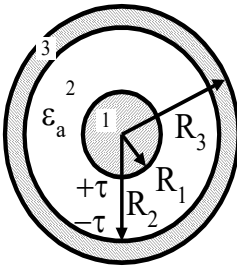


Рисунок 2.16 –
Коаксіальний кабель
(конденсатор)

чити, що якщо відстань між двома провідниками збільшувати, то ємність буде зменшуватися.

Приклад 2.6 (ємність і індуктивність коаксіального кабелю (циліндричного конденсатора)). Коаксіальний кабель (циліндричний конденсатор) являє собою два циліндричні провідники (один – суцільний, інший – порожній), розміщених

так, що їхні осі збігаються (рис. 2.16). Простір між провідниками заповнений діелектриком із проникністю ε_a . Нехай внутрішній і зовнішній провідники заряджені різнойменними зарядами з лінійною густиною $+\tau$ та $-\tau$. Ці заряди зосереджені на обернених один до одного поверхнях. Оскільки осі циліндричних провідників коаксіального кабелю збігаються, то заряди рівномірно розподілені по всій поверхні. Тому поле між цими електродами можна розглядати як поле, створене зарядженою віссю (див. приклад 2.5). Тоді напруженість електричного поля між провідниками визначається виразом (2.29).

Напруга між оберненими один до одного поверхнями дротів $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Тут φ_1 – потенціал на поверхні внутрішнього провідника; φ_2 – потенціал на внутрішній поверхні зовнішнього провідника.

Із (2.30) знаходимо U

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \int_{R_1}^{R_2} (r^{-1}) dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Підставивши отримане значення напруги у формулу для ємності, отримуємо

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}. \quad (2.34)$$

Із співвідношення (2.34) можна бачити, що ємність коаксіального кабелю, як і дводротової лінії (2.33), залежить тільки від параметрів матеріального середовища і геометрії електродів.

Власну індуктивність коаксіального кабелю L на одиницю довжини за умови постійного струму і $\mu = const$ створюють магнітні потоки, розподілені в трьох областях

поля: усередині жили кабелю L_1 , в області L_2 , зайнятій ізоляцією (зовнішньою щодо до струму жили), і всередині оболонки L_3 (див. рис. 2.16). Повна власна індуктивність кабелю $L = L_1 + L_2 + L_3$.

Приклад 2.7 (використання аналогії стаціонарних електричних полів). Якщо будь-які електроди помістити в провідне середовище і приєднати до джерела е. р. с., то в середовищі виникне струм I . За напруги між електродами U_{12} провідність середовища є величиною, зворотною опору $G = I / U_{12}$.

Оскільки $I = \int \vec{\delta} dS = \gamma \int \vec{E} dS$ та $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$, то провідність

$$G = \frac{\gamma \int \vec{E} dS}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}}. \quad (2.35)$$

Зі свого боку, в електричному полі з електродами такої самої конструкції ємність за наявності різнойменних статичних зарядів $Q = \int \vec{D} dS$ матиме вигляд

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\varepsilon_a \int \vec{E} dS}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}}. \quad (2.36)$$

Якщо розділити (2.36) на (2.35), то після скорочення отримаємо

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon_a}{\gamma}, \quad (2.37)$$

тобто ємність C між двома тілами, розділеними діелектриком із абсолютною діелектричною проникністю ε_a , так належить до провідності G між тими ж тілами, якщо б помістити їх у середовище з електричною провідністю γ , як ε_a співвідноситься з γ .

Співвідношення (2.37) дозволяє за відомим виразом для ємності між будь-якими тілами одержати вираз для провідності або зробити зворотну операцію. Так, наприклад, ємність дводрової лінії (2.33)

$$C = \frac{\pi \varepsilon_a}{\ln \frac{d}{R}}.$$

Для того щоб одержати вираз для провідності між двома паралельними дротами (циліндрами) довжиною l , зануреними в середовище із провідністю γ , необхідно відповідно до (2.37) замінити ε_a на γ . Тоді отримаємо

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln \frac{d}{R}}.$$

Або інший приклад. Ємність коаксіального кабелю (2.34)

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_a}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

Провідність між двома співвісними циліндрами довжиною l , які розділені середовищем із питомою провідністю γ , ідентифікується таким виразом:

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Аналогію можна поширити і на більш складні поля.

Приклад 2.8 (екранування електростатичних і магнітних полів). Екранами є пристрої, призначені для захисту установок від електромагнітних зовнішніх полів, а також навколишнього простору від полів, створених самою установкою.

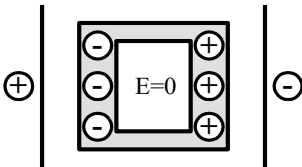


Рисунок 2.17 –
Електростатичний екран

Товщина екрана на якість екранування не впливає. Електростатичні екрани застосовують за точних вимірів і для захисту вимірювальних установок.

Магнітні екрани призначені для ослаблення зовнішнього магнітного потоку всередині екрана. За екранування зовнішнього магнітного поля застосовують замкнені феромагнітні оболонки з листових або масивних феро-

Екрани поділяють на електростатичні, магнітні та електромагнітні.

Електростатичні екрани ґрунтуються на використанні явища електростатичної індукції: поле зовнішніх зарядів компенсується полем викликаних ними зарядів, розміщених на зовнішній поверхні екрана. Тому всередину металевого екрана зовнішнє поле не проникає (рис. 2.17).

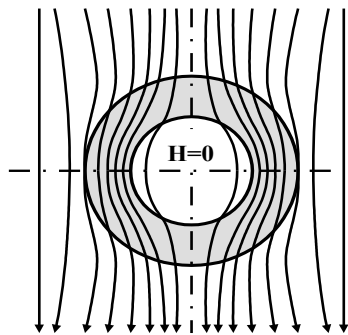


Рисунок 2.18 –
Магнітний екран

магнітних матеріалів. Водночас майже всі лінії зовнішнього магнітного поля концентруються всередині стінок екрана, практично не проникаючи у внутрішню область простору (рис. 2.18). Дія екрана тим сильніша, чим більше відношення μ екрана до μ середовища всередині екрана.

Питання для самоперевірки

1. Чим відрізняються рівняння квазістатичних, квазістаціонарних і стаціонарних полів від загальної системи рівнянь Максвелла?

2. Яким способом можна розділити систему рівнянь Максвелла на рівняння електричних і магнітних стаціонарних полів?

3. Які поля називаються потенціальними? У чому полягає фізичний зміст потенціалу і різниці потенціалів?

4. Які основні теореми і закони електростатики ви знаєте?

5. Які основні закони описують електричні поля постійного струму?

6. У чому полягає принципова відмінність властивостей магнітного поля постійного струму від властивостей електричних стаціонарних полів?

7. Чим відрізняються граничні умови електричних і магнітних стаціонарних полів від загальних граничних умов електромагнітного поля?

8. У чому відмінність закону Ома в диференційній формі від його інтегральної форми запису?

9. Чим відрізняється інтегральна і диференційна форми запису закону Джоуля – Ленца?

10. У чому відмінність закону повного струму від закону Біо – Савара – Лапласа?

11. Чим відрізняється скалярний потенціал магнітного поля φ_m від векторного \vec{A} ?

12. Які основні властивості і рівняння призначені для побудови аналогії стаціонарних полів? Під час розв'язання яких задач у теорії поля застосовують аналогію стаціонарних полів?

13. Для яких елементів електричних кіл застосовують поняття ємності, індуктивності і взаємної індуктивності? Дайте визначення цих параметрів.

14. Чи можливо із співвідношень для електричної та магнітної енергій визначити ємність і індуктивність?

15. Які фізичні принципи використовують за електростатичного і магнітного екранування? Наведіть схеми виконання екранів.

РОЗДІЛ 3

ЗАСТОСУВАННЯ ПОНЯТЬ ТЕОРІЇ ПОЛЯ В МЕХАНІЦІ РІДИНИ ТА ГАЗУ

У гідромеханіці розглядають макроскопічні рухи рідини та газу, а також силову взаємодію цих середовищ із твердими тілами. Водночас розміри розглядуваних об'ємів рідин, газів і твердих тіл є значно більшими порівняно з розмірами молекул і міжмолекулярними відстанями. Це природно, оскільки міжмолекулярні відстані в рідинах становлять всього 10^{-7} – 10^{-8} см, а довжина вільного пробігу молекул газу за атмосферного тиску становить приблизно 10^{-9} см і змінюється обернено пропорційно тиску. З цієї причини зазвичай рідини і гази сприймають як суцільні середовища, маса яких безперервно розподілена за об'ємом.

У цьому разі всі параметри, що визначають стан суцільного середовища, утворюють поля: швидкостей, прискорень, тисків, напружень, температур тощо.

3.1 Поле швидкостей і прискорень

Частина механіки, у якій розглядаються загальні властивості руху тіл без з'ясування причин їхнього виникнення, називають кінематикою. У кінематиці рідин і газів вивчається положення частинок рідини і газу в просторі залежно від часу.

На відміну від теоретичної механіки, у якій вивчається рух абсолютно твердого тіла, а також рух окремої точки або системи точок із фіксованими відстанями між ними, у кінематиці суцільного середовища вивчається рух деформованих тіл. У процесі руху таких тіл змінюється їхня форма і відстань між двома будь-якими частинками. Деформованість є головною кінематичною особливістю суцільних середовищ загалом і рідин та газів зокрема.

Природним описом способу руху частинок рідини є знаходження залежності від часу координат точки, де в даний момент є частинка, за якою спостерігають. Таку залежність можна виразити в координатній формі

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t)$$

або у векторній

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки з координатами x, y, z ; t – час.

Проте, очевидно, знання такої залежності для опису руху кінцевої маси рідини недостатньо, оскільки в цій залежності немає параметрів, які виділяють цю частинку з нескінченної множини інших. Такими параметрами зручно обирати значення декартових прямокутних координат a, b, c тієї точки простору, у якій частинки були в початковий момент часу t .

Тоді положення будь-якої частинки в довільний момент часу буде визначено залежностями

$$x = x(a, b, c, t); y = y(a, b, c, t); z = z(a, b, c, t)$$

або векторною функцією

$$\vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t).$$

Маючи ці залежності, можна виразити миттєву швидкість частинки рідини векторною функцією

$$\vec{U} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (3.1)$$

або проєкціями вектора швидкостей

$$U_x = \frac{\partial x}{\partial t}; U_y = \frac{\partial y}{\partial t}; U_z = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Прискорення і його проєкції визначаються формулами

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}; \quad (3.3)$$

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (3.4)$$

Якщо параметри a , b , c зафіксовані, то наведені співвідношення встановлюють кінематичні характеристики конкретної частинки рідини, аналогічно тому, як визначаються відповідні характеристики матеріальної точки. Змінюючи величини a , b , c , ми здійснюємо перехід від однієї частинки рідини до іншої і можемо в такий спосіб охарактеризувати рух усієї кінцевої маси рідини. Викладений спосіб опису руху частинки рідини називається методом Лагранжа, а параметри a , b , c – змінними Лагранжа.

Незважаючи на природність цього методу і досить повну інформацію про рух маси рідини, яку він надає, метод Лагранжа не отримав переважного застосування в механіці рідини та газу і вживається тільки в низці спеціальних задач.

Це пов'язано з тим, що рівняння руху, складені на основі метода Лагранжа, складні і важкорозв'язувані.

Переважає застосування в гідромеханіці знаходить метод Ейлера, який полягає в описі поля швидкостей у просторі, що зайнятий рухомою рідиною. Цей метод ґрунтується на понятті місцевої швидкості або швидкості в точці. Цим терміном позначають швидкість частинки рідини, що є у вибраній точці простору в деякий момент часу. Очевидно, що загалом місцеві швидкості різні в один і той самий момент часу в різних точках i , водночас, можуть змінюватися в часі в кожній точці. Отже, якщо \vec{U} – вектор місцевої швидкості, то загалом

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}, t) \quad (3.5)$$

або у формі проєкцій

$$U_x = U_x(x, y, z, t); U_y = U_y(x, y, z, t); U_z = U_z(x, y, z, t), \quad (3.6)$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки з координатами x, y, z , які називаються змінними Ейлера.

Цими функціями визначається поле швидкостей рухомої рідини, тобто сукупність значень вектора \vec{U} , який визначається в кожній точці простору або його частині.

Якщо місцева швидкість \vec{U} залежить від часу, тобто змінюється з часом, то рух і відповідне йому поле швидкостей називають неусталеним або нестационарним. Якщо в кожній точці вектор \vec{U} має стале в часі значення, то рух і поле швидкостей будуть усталеними або стаціонарними. У цьому разі

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}). \quad (3.7)$$

$$U_x = U_x(x, y, z); U_y = U_y(x, y, z); U_z = U_z(x, y, z). \quad (3.8)$$

Ламінарні течії можуть бути як усталеними, так і неусталеними, але турбулентні течії, точно кажучи, завжди є неусталеними. Хаотичний рух частинок у турбулентному потоці створює різкі зміни місцевих швидкостей у часі, які називаються пульсаціями швидкості.

На рисунку 3.1 наведено результати вимірювання місцевої миттєвої швидкості турбулентного потоку повітря.

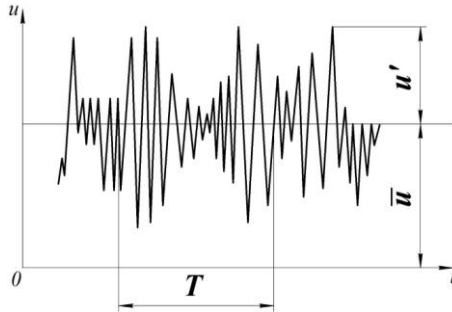


Рисунок 3.1 – Пульсації швидкості в турбулентному потоці

Місцева швидкість змінюється в часі достатньо різко, проте її величина коливається біля деякого середнього за часом значення. Оскільки користування в розрахунках миттєвими значеннями швидкостей призводить до труднощів і деякої невизначеності, то вводять поняття місцевої осередненої швидкості, яку визначає співвідношення

$$\bar{\bar{U}} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \vec{U} dt, \quad (3.9)$$

де \vec{U} – миттєва місцева швидкість; T – період усереднення.

Спосіб усереднення, виражений співвідношенням (3.9), не є єдиноможливим, але завдяки простоті його широко застосовують у гідромеханіці. За цього способу осереднення вважають, що операція повторного осереднення не змінює результату, тобто $\bar{\bar{\bar{U}}} = \bar{\bar{U}}$.

Проекції вектора осередненої швидкості виражаються формулами

$$\begin{aligned}
\overline{U_x} &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} U_x dt; \\
\overline{U_y} &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} U_y dt; \\
\overline{U_z} &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} U_z dt.
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Різницю векторів \vec{U} і $\vec{\overline{U}}$ називають пульсацією швидкості або просто пульсацією

$$\begin{aligned}
\vec{U}' &= \vec{U} - \vec{\overline{U}}; \\
U'_x &= U_x - \overline{U_x}; \quad U'_y = U_y - \overline{U_y}; \quad U'_z = U_z - \overline{U_z}.
\end{aligned}$$

Неважко переконатись, що осереднене значення пульсації дорівнює нулю

$$\frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \vec{U}' dt = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} (\vec{U} - \vec{\overline{U}}) dt = \vec{\overline{U}} - \vec{\overline{U}} = 0.$$

У випадку, поданому на рисунку 3.1, осереднена швидкість від часу не залежить. Турбулентну течію водночас умовно називають осередненою усталеною або просто усталеною. Проте можливі випадки, коли осереднена місцева швидкість закономірно змінюється з часом. Така течія називається осереднено неусталеною. Операції осереднення для таких течій вимагають деякого уточнення.

Коли йдеться про дійсний характер руху реальних рідин, у подальшому будемо сприймати місцеві швидкості безперервними диференційованими функціями координат і часу, незалежно від того, яку реальну течію (ламінару чи турбулентну) вони описують. Тільки в особливих випадках будемо допускати існування розривів швидкостей і їхніх похідних на деяких поверхнях, лініях або точках.

Якщо функції (3.5) або (3.6) визначені, то можна не тільки скласти уявлення про характер руху маси рідини, але й знайти інші кінематичні характеристики, необхідні для складання динамічних рівнянь руху.

Оскільки закони механіки (другий закон Ньютона, закон кількості руху тощо) застосовують лише до матеріальних тіл, якими в механіці рідини та газу є частинки рідин і їхні кінцеві сукупності, то необхідно вміти, користуючись методом Ейлера, виражати прискорення \vec{a} частинок рідини. Відповідно до його фізичного змісту це прискорення визначається повною похідною вектора швидкості \vec{U} за часом $\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt}$, яку називають також індивідуальною, або субстанціональною похідною.

Для виразу цього прискорення у змінних Ейлера врахуємо, що для рухомої частинки рідини її координати є функціями часу $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. Тоді проєкції швидкостей U_x , U_y , U_z будуть складними функціями часу

$$U_x = U_x [x(t), y(t), z(t), t];$$

$$U_y = U_y [x(t), y(t), z(t), t];$$

$$U_z = U_z [x(t), y(t), z(t), t].$$

Використовуючи правило диференціювання складних функцій для проєкцій повного прискорення, отримуємо

$$a_x = \frac{dU_x}{dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt};$$

$$a_y = \frac{dU_y}{dt} = \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt};$$

$$a_z = \frac{dU_z}{dt} = \frac{\partial U_z}{\partial t} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Оскільки для рухомої частинки рідини

$$\frac{dx}{dt} = U_x; \quad \frac{dy}{dt} = U_y; \quad \frac{dz}{dt} = U_z,$$

у кінцевому підсумку маємо

$$a_x = \frac{dU_x}{dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \cdot \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \cdot \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \cdot \frac{\partial U_x}{\partial z};$$

$$a_y = \frac{dU_y}{dt} = \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \cdot \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \cdot \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \cdot \frac{\partial U_y}{\partial z}; \quad (3.11)$$

$$a_z = \frac{dU_z}{dt} = \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \cdot \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \cdot \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \cdot \frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

Для подання прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{dU_x}{dt} \vec{i} + \frac{dU_y}{dt} \vec{j} + \frac{dU_z}{dt} \vec{k}$$

у компактній формі скористуємось оператором Гамільтона, який визначається формулою

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Розглядаючи ∇ формально як вектор із проєкціями $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ і згадуючи, що скалярний добуток двох векторів є сумою добутків їхніх однойменних проєкцій, прискорення можна презентувати в такому векторному записі:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U}, \quad (3.12)$$

де $(\vec{U} \cdot \nabla)$ умовно розглядається як скалярний добуток векторів \vec{U} і ∇ .

Як випливає з (3.12), прискорення складається із двох частин.

Перша – $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$, яка називається локальною похідною швидкості \vec{U} , показує зміну в часі вектора \vec{U} у фіксованій точці простору. Ця величина визначає місцеве або локальне прискорення.

Друга частина – $(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}$ називається конвективною похідною вектора швидкості. Ця величина виражає зміну швидкості в просторі, зайнятому рідиною в даний момент часу.

В окремому випадку усталеного руху локальне прискорення дорівнює нулю і, відповідно, $\vec{a} = (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}$.

3.2 Лінії і трубки течії. Витрата рідини

Наглядне уявлення про поле швидкостей рухомої рідини можна отримати, якщо побудувати векторні лінії цього поля, які називаються в гідромеханіці лініями течії. За визначенням, лінією течії є крива, у кожній точці якої вектор швидкості в даний момент часу спрямований по дотичній. Очевидно, що за усталеного руху лінії течії з часом не змінюються, тоді як за неусталеного вони в різні моменти можуть мати різну форму. Можливий, проте, і такий неусталений рух, за якого форма ліній течії зберігається, але змінюються величини місцевих швидкостей.

Рівняння сімейства ліній течії можна отримати на підставі їхнього визначення, згідно з яким вектор місцевої швидкості $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$ повинен бути колінеарним відрітку дуги лінії течії $d\vec{S}(dx, dy, dz)$ (рис. 3.2, а).

Оскільки однойменні проєкції колінеарних векторів пропорційні, то

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z}. \quad (3.13)$$

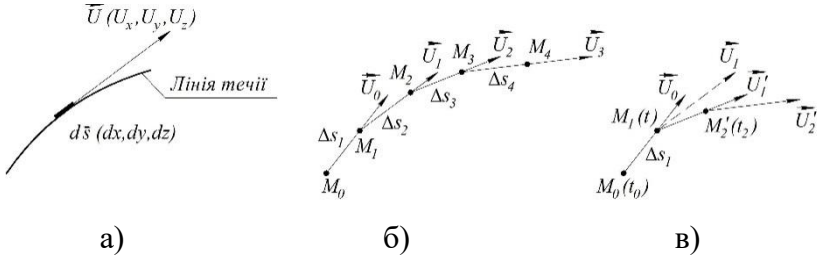


Рисунок 3.2 – Схема побудови ліній течії і траєкторій

Співвідношення (3.13), яке складається з двох незалежних диференціальних рівнянь (третє рівняння випливає з них), визначає форму ліній течії.

У разі неусталеного руху час t , від якого залежать U_x , U_y і U_z , розглядається як параметр.

З'ясуємо взаємозв'язок між лініями течії і траєкторіями частинки рідини. Нехай у деякій точці M_0 у момент t_0 швидкість має значення \vec{U}_0 . Побудуємо лінію течії так. Відкладаємо на векторі \vec{U}_0 малий відрізок ΔS_1 (рис. 3.2, б) і в точці побудуємо відповідний їй вектор \vec{U}_1 . Потім на цьому векторі відкладаємо відрізок ΔS_2 і аналогічно будуємо вектор \vec{U}_2 тощо.

Важливо підкреслити, що всі побудови виконують для одного фіксованого моменту часу t_0 , а тому байдуже, є течія усталеною або неусталеною. Якщо відрізки ΔS_i взяти достатньо малими, то наближено отримаємо криву, яка задовольняє визначенню лінії течії.

Спробуємо тепер подібно побудувати траєкторію частинки рідини, яка в момент t_0 була в точці M_0 . Нехай за малий час Δt_1 вона пройде шлях ΔS_1 (рис. 3.2, в). У ліній-

ному наближенні цей шлях можна вважати таким, що збігається з напрямком вектора \vec{U}_0 . Тоді в кінці інтервалу Δt_1 частинка рідини потрапляє в точку M_1 . Якщо рух усталений, то швидкість у цій точці матиме те ж саме значення \vec{U}_1 , яке було в момент t_0 . У цьому разі частинка рідини далі переміщується за напрямком вектора \vec{U}_1 , досягає точки M_2 тощо. Очевидно, її шлях (траєкторія) збігається з лінією течії. Якщо ж рух неусталений, то за час Δt_1 вектор \vec{U}_1 зміниться, і до моменту прибуття частинки рідини в точку M_1 її швидкість матиме значення \vec{U}_1 . Отже, з точки M_1 частинка рідини направляється вздовж вектора \vec{U}_1 і не потрапляє в точку M_2 . Тому і траєкторія розглядуваної частинки рідини не збігається з лінією течії. Отже, лінії течії і траєкторії збігаються тільки за усталеного руху рідини.

Звернемо увагу на те, що лінії течії не можуть перетинатися в жодній точці, де швидкість не дорівнює нулю або нескінченності. Дійсно, допустимо протилежне: дві лінії течії перетинаються в точці C (рис. 3.3).

Тоді вектори \vec{U}_1 і \vec{U}_2 потрібно розглядати як складові результуючого вектора \vec{U} , тому що в даний момент у даній точці в частинки рідини не може бути двох різних швид-

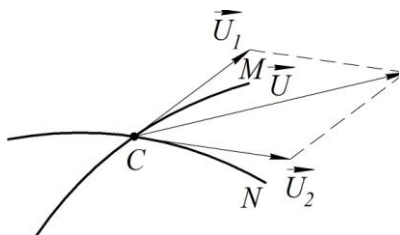


Рисунок 3.3 – Лінії течії не перетинаються в точках, де швидкість рідини має кінцеве значення

костей. Але вектор \vec{U} не є дотичним ні до однієї з ліній MC і NC , а отже, ні одна з них не є лінією течії, що суперечить вихідній умові.

Доведення втрачає силу, якщо $\vec{U} = 0$ або $\vec{U} = \infty$. Точки, де $\vec{U} = 0$ або $\vec{U} = \infty$, називають критичними або особливими.

Введемо ще одне важливе поняття. Виберемо в рідині замкнутий контур l (рис. 3.4, а) і проведено через кожну його точку лінію течії. Отримаємо трубчасту поверхню, яку називають трубкою течії. Якщо контур l достатньо малий, то трубку течії називають елементарною. У межах попереднього перерізу елементарної трубки розподіл швидкостей частинок рідини беруть рівномірним. Для кінцевих трубок цього, загалом, допустити не можна. Очевидно, трубки течії мають ту властивість, що через їхню бічну поверхню рідина не протікає.

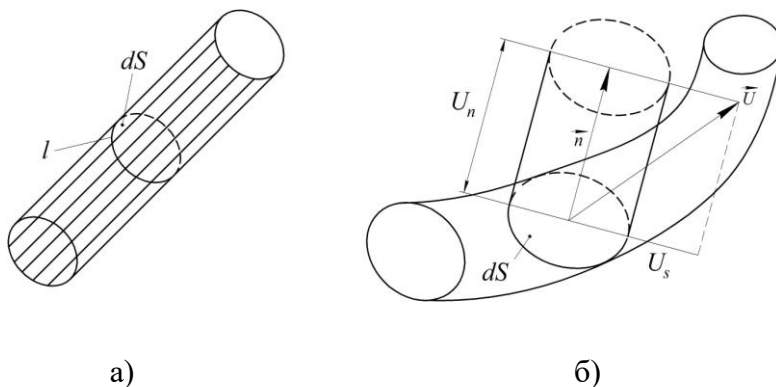


Рисунок 3.4 – Елементарна трубка течії (а) і схема до визначення об'ємної витрати (б)

Сукупність частинок, обмежених поверхнею елементарної трубки течії, називають елементарною струминкою. Потік кінцевих розмірів розглядають як сукупність елементарних струминок. Отже, ми приходимо до струминної моделі потоку рідини.

Позначимо через $d\vec{S}$ вектор площинки будь-якого поперечного перерізу елементарної трубки течії (рис. 3.4, б), складемо скалярний добуток векторів \vec{U} і $d\vec{S}$

$$\vec{U} \cdot d\vec{S} = (\vec{U} \cdot \vec{n})dS = U_n dS,$$

де \vec{n} – нормаль до площинки; U_n – проєкція швидкості на нормаль \vec{n} .

Величина $U_n dS$ буде додатною, якщо вектори \vec{U} і \vec{n} утворюють гострий кут, і від'ємною, якщо цей кут тупий.

Неважко побачити, що абсолютною величиною $U_n dS$ є об'єм dQ рідини, що протікає через площинку dS за одиницю часу. Дійсно, вектор швидкості можна розкласти на складові: нормальну U_n і дотичну U_S до площинки. Очевидно, тільки нормальна складова U_n зумовлює протікання рідини через площинку. За одиницю часу протікає об'єм $|U_n dS| = dQ$.

У подальшому величину dQ будемо називати об'ємною витратою елементарної струминки.

Розглядаючи довільний кінцевий переріз S реально-го потоку рідини, визначимо величину

$$Q = \left| \int_S \vec{U} \cdot d\vec{S} \right| = \left| \int_S U_n dS \right| \quad (3.14)$$

як об'ємну витрату рідини через поверхню S .

Відповідно абсолютні значення величин

$$Q = \rho U_n dS \text{ і } M = \int_S \rho U_n dS \quad (3.15)$$

називають масовою витратою елементарної струминки і масовою витратою через поверхню S .

У формулі (3.15) ρ – густина рідини (п. 3.3).

3.3 Розподіл маси в суцільному середовищі. Закон збереження маси і рівняння нерозривності (суцільності)

Візьмемо малий об'єм рідини або газу ΔW , у якому розташована точка A , і нехай маса цього об'єму буде Δm .

Скалярна величина ρ , що визначається граничним відношенням

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}, \quad (3.16)$$

водночас вважаємо, що в разі наближення об'єму ΔW до нуля точка A весь час залишається всередині об'єму, називається густиною розподілу маси, або густиною середовища в даній точці A .

У технічних питаннях часто замість густини користуються питомою вагою, що визначається як границя відношення ваги малого об'єму до величини об'єму.

Питома вага дорівнює

$$\gamma = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{g\Delta m}{\Delta W} = g\rho, \quad (3.17)$$

де g – прискорення сили ваги ($9,81 \text{ м/с}^2$).

Густина рухомого середовища залежить від його матеріального складу, температури і тиску, а також від характеру руху середовища. Загалом густина є функцією координат і часу

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

і утворює скалярне поле, яке може бути як стаціонарним, так і нестаціонарним.

Поверхні або, в окремому випадку плоского розподілу, лінії рівня скалярного поля густин називають ізостеричними поверхнями або лініями, або ізостерами.

Густина як маса, віднесена до одиниці об'єму, вимірюється в $\text{кг}/\text{м}^3$, а питома вага в $\text{Н}/\text{м}^3$. Густина води, як і інших крапельних рідин, незначною мірою залежить від температури і майже не залежить від тиску, оскільки під впливом навіть великих тисків об'єм рідини змінюється несуттєво.

Якщо під час руху рідина повністю, без пустот, заповнює простір і в жодній точці не відбувається поглинання або притік маси зовні, то її густина і місцева швидкість \vec{U} пов'язані рівнянням, яке має назву рівняння нерозривності і виражає закон збереження маси.

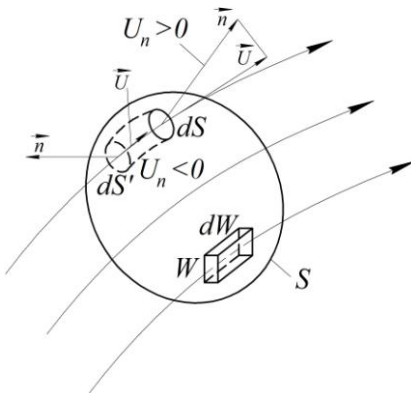


Рисунок 3.5. – Схема для виведення рівняння нерозривності

Для встановлення цього рівняння проведено в рідині фіксовану в просторі замкнену поверхню S (рис. 3.5), яка обмежує об'єм W , і виділимо на ній елементарну площадку $d\vec{S}$. Через \vec{n} позначимо одиничний вектор зовнішньої до S нормалі. Тоді добуток $\rho U_n dS$ буде секундною масою, що витікає з об'єму W або заходить у нього, залежно від напрямку швидкості на площі dS . Оскільки \vec{n} – зовнішня нормаль, то $U_n > 0$ на тих площинках dS , де рідина витікає з об'єму W , і $U_n < 0$ на тій частині поверхні S , через яку вона надходить у цей об'єм.

Отже, інтеграл

$$\int_S U_n dS \quad (3.18)$$

є різницею маси рідини, що витікає з об'єму W за одиницю часу і заходить в нього за той самий час або, інакше кажучи, секундна зміна маси рідини в об'ємі W . Цю зміну маси рідини можна розрахувати й іншим способом. Для цього виділимо елементарний об'єм dW . Маса рідини в цьому об'ємі може змінюватися завдяки різниці припливу і відтоку. Секундна зміна маси ρdW буде дорівнювати

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dW) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dW,$$

а секундну зміну маси в об'ємі W виражає інтеграл

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW. \quad (3.19)$$

Вирази (3.18) і (3.19) можна порівняти, оскільки вони дають одну й ту ж саму величину. Проте водночас потрібно враховувати, що (3.18) додатний, якщо через поверхню S витікає рідини більше, ніж надходить, а (3.19) за цих самих умов – від'ємний, оскільки внаслідок суцільності течії у випадку, що розглядається, густина зменшується в часі $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$. Отже,

$$\int_S \rho U_n dS = - \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW. \quad (3.20)$$

За теоремою Гаусса – Остроградського

$$\int_S \rho U_n dS = \int_W \left(\frac{\partial \rho U_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho U_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho U_z}{\partial z} \right) dW.$$

У векторному аналізі сума часткових похідних від проєкцій вектора за однойменними координатами називається дивергенцією, або розходженням вектора. У цьому разі

$$\operatorname{div} \rho \vec{U} = \frac{\partial \rho U_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho U_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho U_z}{\partial z}.$$

Тому рівняння (3.20) подамо у вигляді

$$\int_W \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{U} \right) dW = 0.$$

З огляду на довільність об'єму W підінтегральна функція дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{U} = 0. \quad (3.21)$$

Це і є рівнянням нерозривності в диференціальній формі для довільного руху стисливої рідини.

Рівняння (3.20) можна розглядати як інтегральну форму рівняння нерозривності.

Якщо розглядати умову збереження маси рухомого об'єму рідини, то прийдемо також до рівняння (3.21), якому в цьому разі можна надати іншого вигляду.

Оскільки $\rho = \rho(x, y, z, t)$ і під час руху об'єму рідини $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \rho \vec{U} &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho U_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho U_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho U_z) = \\ &= \rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + U_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \\ &= \rho \operatorname{div} \vec{U} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \end{aligned}$$

тобто (3.21) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} = 0$$

або

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{U} = 0, \quad (3.22)$$

де $\frac{d\rho}{dt}$ – індивідуальна похідна густини.

Для усталеного руху стисливої рідини $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ і, відповідно, за формулою (3.21)

$$\operatorname{div} \rho \vec{U} = 0. \quad (3.23)$$

Для будь-якого руху нестисливої рідини $\rho = \text{const}$ відповідно.

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0. \quad (3.24)$$

У технічних розрахунках суттєве значення має гідравлічна форма рівняння нерозривності (рівняння витрати).

Розглянемо усталений потік стисливої рідини в трубі довільної форми (рис. 3.6). Поверхнею $S = S_1 + S_2 + S_\delta$ обмежимо деякий об'єм рідини в трубі. За формулою (3.20) за усталеної течії

$$\int_S \rho U_n dS = \int_{S_1} \rho U_n dS + \int_{S_2} \rho U_n dS + \int_{S_\delta} \rho U_n dS = 0.$$

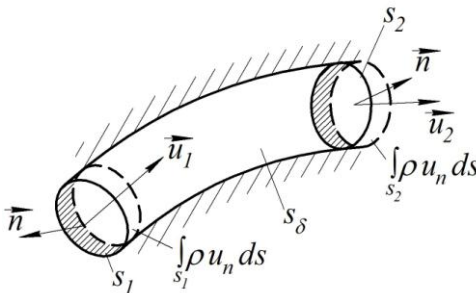


Рисунок 3.6 – Схема для виведення гідравлічної форми рівняння нерозривності

Оскільки бокова поверхня S_δ непроникна, то на ній $U_n = 0$ і тому $\int_{S_\delta} \rho U_n dS = 0$, а

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \rho U_n dS &= \\ &= \int_{S_2} \rho U_n dS. \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що на поверхні нормалі S_1 спрямовані зовні від виділеного об'єму і $U_n = -U_{-n}$, де U_{-n} – проєкція швидкості на внутрішню нормаль, запишемо

$$\int_{S_1} \rho U_{-n} dS = \int_{S_2} \rho U_n dS.$$

Якщо поверхні S_1 і S_2 нормальні в кожній точці лініям течії, то, позначивши площі живих перерізів у трубі через ω_1 і ω_2 та зважаючи, що в перерізі ω_1 швидкість $U_{-n} = U_1$, подамо останнє рівняння у формі

$$\int_{\omega_1} \rho U_1 d\omega = \int_{\omega_2} \rho U_2 d\omega, \quad (3.25)$$

що виражає рівність масових витрат через живі перерізи ω_1 і ω_2 .

Якщо ці перерізи плоскі, а розподіл швидкості і густини в кожному з них рівномірний, то вираз (3.25) набуває вигляду

$$\rho_1 \omega_1 U_1 = \rho_2 \omega_2 U_2. \quad (3.26)$$

Для нестисливої рідини $\rho = \text{const}$, і тоді отримуємо

$$\omega_1 U_1 = \omega_2 U_2.$$

Звідси можна бачити, що об'ємна витрата $Q = U\omega$ нестисливої рідини залишається постійною вздовж труби. Якщо розподіл швидкостей у живому перерізі нерівномірний, то, використовуючи середню швидкість, яку визначає співвідношення $V = Q/\omega$, отримуємо широко вживану форму рівняння нерозривності

$$V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2. \quad (3.27)$$

3.4 Поле швидкостей суцільного середовища поблизу точки. Теорема Коші – Гельмгольца

Щоб детально вивчити механізм руху суцільного середовища, застосуємо такий самий підхід розкладання руху на складові, який використовують у кінематиці твердого тіла. Нагадаємо, що в цьому окремому випадку суцільного недеформованого середовища рух твердого тіла будь-якого розміру можна розкласти на поступальний його рух разом із деяким довільно вибраним полюсом M_0 і обертальний навколо миттєвої осі, що проходить через полюс (рис. 3.7). Особливістю цього найпростішого руху суцільного середовища є однаковість вектора кутової швидкості обертання тіла для всіх точок незалежно від вибору полюсу і просторової протяжності тіла. Швидкість довільної точки M виражається через швидкість \vec{U}_0 точки M_0 і кутову швидкість $\vec{\omega}$ так:

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{\omega} \times \Delta\vec{r}, \quad (3.28)$$

де $\Delta\vec{r}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \vec{r} - \vec{r}_0$ – радіус-вектор точки M щодо точки M_0 ; $\vec{r}(x, y, z)$ і $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ – відповідно радіус-вектори точок M і M_0 щодо початку координат.

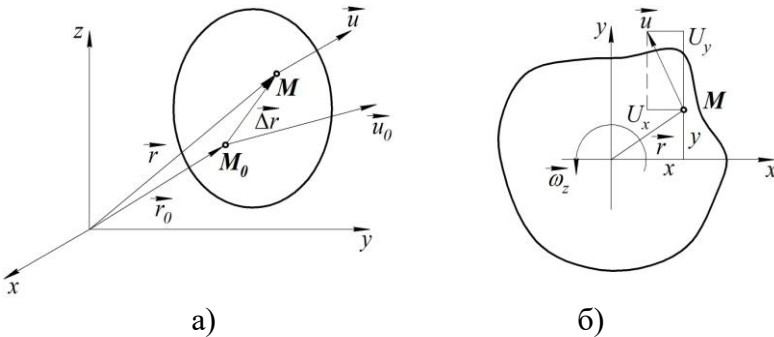


Рисунок 3.7 – Схеми для виведення зв'язку між швидкостями двох точок частинки рідини

Нагадаємо, що колова швидкість $\vec{U}(U_x, U_y)$ точки $M[\vec{r}(x, y)]$ твердого тіла (рис. 3.7, б), що обертається, наприклад, навколо осі Z із кутовою швидкістю $\vec{\omega}(0, 0, \omega_z)$ визначається формулами

$$U_x = -\omega_z \cdot y; \quad U_y = \omega_z \cdot x.$$

З розрахунку похідних

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = -\omega_z; \quad \frac{\partial U_y}{\partial x} = \omega_z$$

знаходимо

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right).$$

Загалом за обертового руху твердого тіла кутова швидкість $\vec{\omega}$ має ще дві проекції

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right);$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right).$$

Очевидно, що зв'язок між швидкостями точок рухомої частинки рідини повинен бути більш складним, оскільки в процесі руху частинка рідини деформується, і відстані між її точками змінюються. Виберемо в частинці рідини (рис. 3.7, а) точки M і M_0 достатньо близько, і розкладемо в ряд Тейлора миттєві значення проекцій швидкості U_x, U_y, U_z в точці M , обмежуючись лінійними членами ряду.

Для компоненти U_x маємо

$$U_x = U_{x_0} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} \right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)_0 \Delta z, \quad (3.29)$$

де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – проекції вектора $\Delta \vec{r}$, а індексом «0» позначені похідні швидкості в точці M_0 .

Використаємо тотожності

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{\partial U_x}{\partial y} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_y}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x} \right);$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial U_x}{\partial z} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right).$$

Підставляючи в (3.29), отримуємо

$$U_x = U_{x_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)_0 \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)_0 \Delta z +$$

$$+ \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)_0 \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)_0 \Delta z,$$

$$U_x = U_{0x} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y + \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)_0 \Delta x +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)_0 \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)_0 \Delta z. \quad (3.30)$$

Не повторюючи міркування, за аналогією напишемо рівняння, які можна отримати для двох інших компонент швидкості

$$U_y = U_{0y} + \omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z + \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} \right)_0 \Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right)_0 \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right)_0 \Delta z; \quad (3.31)$$

$$U_z = U_{0z} + \omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x + \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_0 \Delta z +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right)_0 \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right)_0 \Delta y. \quad (3.32)$$

Порівнюючи ці формули з наведеними вище виразами проєкцій вектора колової швидкості твердого тіла, можна зробити висновок, що частинка рідини, як і тверде тіло, обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ щодо деякої миттєвої осі.

У гідромеханіці, водночас із вектором $\vec{\omega}$, обертальний рух частинок рідини характеризує вектор $\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \text{rot}\vec{U}$, який називається вихором, або ротором вектора \vec{U} .

Як можна бачити з (3.30)–(3.32), для частинки рідини формулою (3.28) визначається лише деяка частина вектора швидкості \vec{U} , яку називають швидкістю $\vec{U}_{\text{кв}}$ квазі-твердого руху. Повну ж швидкість визначають за формулами (3.30)–(3.32), яку можна подати у векторній формі

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{U}_{\text{кв}} + \vec{U}_{\text{деф}}, \\ \vec{U}_{\text{кв}} &= \vec{U}_0 + \vec{\omega} \times \Delta\vec{r};\end{aligned}\quad (3.33)$$

де $\vec{U}_{\text{деф}}$ – швидкість, що зумовлена деформацією частинки рідини.

З’ясуємо фізичний зміст вектора $\vec{U}_{\text{деф}}$.

Нехай малий відрізок рідини Δx рухається вздовж осі x (рис. 3.8, а). Якщо U_x – швидкість його лівого кінця, то швидкість правого кінця буде $U_x + \frac{\partial U_x}{\partial x} \Delta x$.

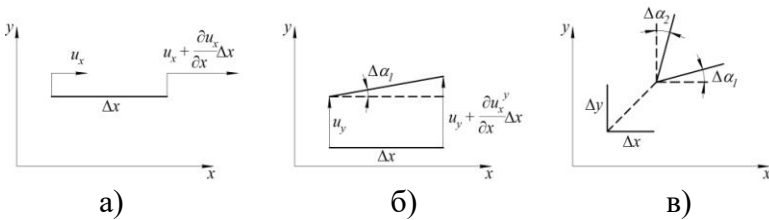


Рисунок 3.8 – Деформації відрізків і кутів частинки рідини

Унаслідок різниці в цих швидкостях за час Δt довжина відрізка зміниться на величину $\frac{\partial U_x}{\partial x} \Delta x \Delta t$. Швидкість цієї зміни довжини буде $\frac{\partial U_x}{\partial x} \Delta x$. Отже, у формулах (3.30)–(3.32)

члени виду $\frac{\partial U_x}{\partial x} \Delta x$, $\frac{\partial U_y}{\partial y} \Delta y$, $\frac{\partial U_z}{\partial z} \Delta z$ є швидкостями подовження елементарних відрізків, або, інакше кажучи, швидкостями лінійних деформацій.

Зрозуміло, що похідні

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = \dot{\epsilon}_{xx}, \quad \frac{\partial U_y}{\partial y} = \dot{\epsilon}_{yy}, \quad \frac{\partial U_z}{\partial z} = \dot{\epsilon}_{zz} \quad (3.34)$$

є швидкостями питомих лінійних деформацій, або швидкостями подовження відрізків одиничної довжини.

Далі розглянемо рух відрізка рідини вздовж осі y (рис. 3.8, б). Якщо швидкість його лівого кінця U_y , то швидкість правого – $U_y + \frac{\partial U_y}{\partial x} \Delta x$. Унаслідок різниці швидкостей за час Δt відрізок Δx переміститься і повернеться на кут $\Delta\alpha_1 \approx \operatorname{tg}(\Delta\alpha_1) = \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial U_y}{\partial x} \Delta x \Delta t = \frac{\partial U_y}{\partial x} \Delta t$. Кутова швидкість його обертання буде $\frac{\Delta\alpha_1}{\Delta t} = \frac{\partial U_y}{\partial x}$.

Розмірковуючи аналогічно, можна впевнитися, що кутова швидкість обертання відрізка Δy (рис. 3.8, в) буде $\frac{\partial U_x}{\partial y}$.

Унаслідок обертання відрізків Δx і Δy , що створили спочатку прямий кут, відбудеться кутова деформація частинки рідини в площині xy . Швидкість кутової деформації визначає сума $\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y}$. У гідродинаміці за міру швидкості кутової деформації беруть половину цієї величини. Отже, доходимо висновку, що величини

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right); \\ \dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right); \\ \dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

характеризують швидкості кутових деформацій.

Сукупність цих дев'яти величин (3.34)–(3.35) утворюють тензор 2-го рангу, що має назву «тензор швидкостей деформації»

$$\dot{\epsilon} \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{vmatrix}. \quad (3.36)$$

Цей тензор симетричний: компоненти його, що дзеркально розташовані щодо головної діагоналі, рівні між собою.

Тензор $\dot{\epsilon}dt = \epsilon$, що виражається аналогічно (3.34–3.35) через проєкції нескінченно малих переміщень $U_x dt$, $U_y dt$, $U_z dt$, називають тензором переміщень, і він лежить в основі теорії пружності.

Рівняння (3.30)–(3.32) можуть бути подані в такій, більш компактній формі:

$$\begin{aligned} U_x &= U_{0x} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y + \dot{\epsilon}_{xx} \Delta x + \dot{\epsilon}_{xy} \Delta y + \dot{\epsilon}_{xz} \Delta z; \\ U_y &= U_{0y} + \omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z + \dot{\epsilon}_{yx} \Delta x + \dot{\epsilon}_{yy} \Delta y + \dot{\epsilon}_{yz} \Delta z; \\ U_z &= U_{0z} + \omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x + \dot{\epsilon}_{zx} \Delta x + \dot{\epsilon}_{zy} \Delta y + \dot{\epsilon}_{zz} \Delta z. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Отриманий результат становить зміст теореми Коші – Гельмгольца: рух елементарного об'єму середовища можна в кожний заданий момент часу розкласти: 1) на «квазітвердий» рух зі швидкістю $\vec{U}_{\text{кв}}$, рівною сумі поступальної швидкості \vec{U}_0 разом із деяким полюсом, і обертової $\vec{\omega} \times \Delta \vec{r}$, відповідній вектору кутової швидкості $\vec{\omega}$, рівному $\frac{1}{2} \text{rot} \vec{U}$; 2) «деформаційний» рух зі швидкістю $\vec{U}_{\text{деф}}$, який визначає тензор швидкостей деформації (3.36), компоненти якого задаються рівняннями (3.34)–(3.35).

Основний зміст теореми Коші – Геймгольца полягає у ствердженні ідеї пов'язаності між собою окремих складових руху елементарного об'єму, залежної від наявності безперервного і диференційованого поля швидкостей. Обертання елементарного об'єму і його деформаційний

рух не можуть бути довільними, незалежними один від одного і від поступального руху об'єму. Вони зв'язані між собою цілком визначеними кількісними співвідношеннями, що виражається через просторові похідні, які розраховують за заданим розподілом швидкостей (полем швидкостей).

Необхідно зазначити, що теорема Коші – Гельмгольца характеризує лише один із можливих способів розкладання складного руху частинки рідини на найпростіші складові. Проте цей спосіб розкладання є фізично найбільш обґрунтованим, оскільки відкриває основні характерні особливості руху рідинного середовища.

В окремих випадках деякі зі складових руху можуть бути відсутніми. Особливу зацікавленість становить рух без обертання частинок рідини або безвихровий рух ($\vec{\omega} = 0$), що має низку чудових властивостей. Перед тим як переходити до його вивчення, з'ясуємо закономірності більш загального вихрового руху, коли $\vec{\omega} \neq 0$.

3.5 Вихрові лінії й трубки. Теорема Гельмгольца. Утворення вихорів

Розглянемо випадок, коли в кожній точці простору, зайнятого рухомою рідиною, вектор $\vec{\omega}$ відмінний від нуля, тобто всі частинки обертаються. Тоді ми маємо поле вектора $\vec{\omega}$, для якого можна побудувати векторні лінії.

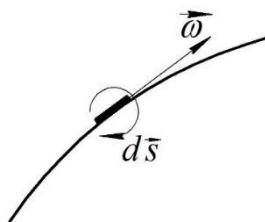


Рисунок 3.9 – Вихрова лінія

Назвемо вихровою лінією криву, у кожній точці якої вектор $\vec{\omega}$ спрямований по дотичній. Тоді елементарні відрізки $d\vec{s}$ такої лінії (рис. 3.9) будуть миттєвими осями обертання тих

частинок рідини, які на них розміщені. Очевидно, цей рух можливий лише завдяки деформації обертальних частинок

рідини, оскільки вихрова лінія, власне кажучи, криволінійна, і загалом не може розглядатися як вісь обертання кінцевого об'єму рідини.

Диференціальне рівняння вихрових ліній легко одержати з умови колінеарності вектора кутової швидкості $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ й елементарного спрямованого відрізка $d\vec{s}(dx, dy, dz)$

$$d\vec{s} \times d\vec{\omega} = 0. \quad (3.38)$$

Розкриваючи векторний добуток, маємо

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 0, \\ & \vec{i} \cdot (dy \cdot \omega_z - dz \cdot \omega_y) - \vec{j} \cdot (dx \cdot \omega_z - dz \cdot \omega_x) + \vec{k} \times \\ & \quad \times (dx \cdot \omega_y - dy \cdot \omega_x) = 0, \\ & \quad dy \cdot \omega_z - dz \cdot \omega_y = 0, \\ & \quad dx \cdot \omega_z - dz \cdot \omega_x = 0, \\ & \quad dx \cdot \omega_y - dy \cdot \omega_x = 0. \end{aligned}$$

Умову пропорційності однойменних проєкцій цих векторів запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (3.39)$$

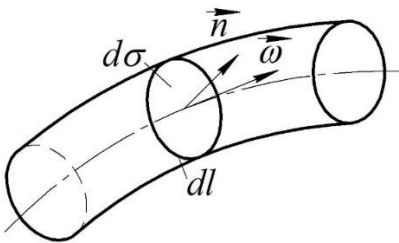


Рисунок 3.10 – Вихрова трубка

Знаючи функції $\omega_x(x, y, z)$, $\omega_y(x, y, z)$, $\omega_z(x, y, z)$ із системи двох рівнянь (3.39), можна знайти вигляд вихрових ліній.

Проведемо через точки малого контура dl (рис. 3.10) вихрові лінії.

Отриману трубчасту поверхню будемо називати елементарною вихровою трубкою, а сукупність обмежених нею частинок рідини – вихровим шнуром.

Якщо поперечний переріз вихрового шнура $d\sigma$ достатньо малий, то можна припустити, що в його межах вектор $\vec{\omega}$ має постійне значення.

Скалярний добуток dj векторів $\vec{\omega}$ і $d\vec{\sigma}$ називають *інтенсивністю*, або *напруженістю вихрової трубки*, він є мірою вихрового руху

$$dj = \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma} = \omega_n \cdot d\sigma, \quad (3.40)$$

де ω_n – проєкція вектора $\vec{\omega}$ на нормаль до площини $d\sigma$.

Візьмемо тепер довільну поверхню σ і, розбивши її на елементарні площинки $d\sigma$, побудуємо на кожній із них вихровий шнур. Сумарна інтенсивність цих шнурів є потоком вектора $\vec{\omega}$ через поверхню σ

$$j = \int_{\sigma} \vec{\omega} d\vec{\sigma} = \int_{\sigma} \omega_n d\sigma. \quad (3.41)$$

Величина $2j = 2 \int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_{\sigma} \Omega_n d\sigma$ є потоком вектора вихору $\vec{\Omega}$ через поверхню σ або просто потоком вихорів.

У кінематиці відома так звана друга теорема Гельмгольца: *потік вектора вихору швидкості через довільно проведений поперечний переріз вихрової трубки на даний момент часу має постійне значення вздовж усієї трубки.*

З цієї теореми випливають дуже важливі наслідки:

1. Переріз вихрової трубки ніде не може дорівнювати нулю, оскільки в цьому разі швидкість обертання частинок рідини повинна стати нескінченною, що фізично не можливо.

2. Вихрові трубки не можуть закінчуватися всередині рідини. Дійсно, це означало б, що в разі переходу через такий переріз усередину рідини вектор $\vec{\omega}$ стрибкоподібно

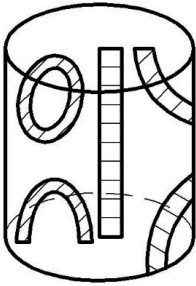


Рисунок 3.11 –
Типи вихрових трубок

повинен змінюватися від кінцевого значення до нуля, що суперечить положенню про безперервність поля швидкостей. Вони або замикаються самі на собі, утворюючи вихрові кільця (рис. 3.11), або спираються на стінку чи на вільну поверхню.

Вихрові трубки у вигляді кільця можна спостерігати, наприклад, під час початкової стадії витікання рідини через отвір у середовище тієї самої густини.

Структура вихрових рухів реальних рідин досить різноманітна. У деяких випадках виникають великі вихори, які можна спостерігати візуально, якщо в рідину ввести фарбу або спеціальну речовину. Великі вихори можна бачити і в природі – це водяні й повітряні смерчі.

Але вихровий рух не завжди супроводжується утворенням візуально спостережуваних вихрових шнурів. Напри-

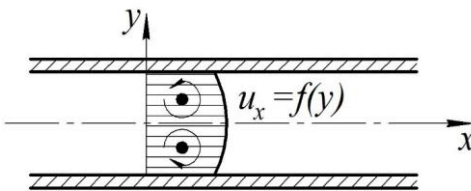


Рисунок 3.12 – Вихровий рух рідини між паралельними пластинами

клад, під час прямолінійного руху рідини між нерухомими плоскими паралельними пластинами (рис. 3.12). Проекції швидкості в системі координат, подані на рисунку 3.12, мають такі значення:

$$U_x = f(y),$$

$$U_y = U_z = 0,$$

де $f(y)$ – безперервна функція. Проекції вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ (див. п. 3.4) у цьому разі дорівнюють

$$\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Звідси випливає, що ця течія – вихрова, у цьому разі вектор $\vec{\omega}$ в усіх точках паралельний осі z (нормальній площині креслення), і тому вихрові лінії мають вигляд прямих, нормальних до лінії течії.

Проте вихрову структуру течії в цьому разі візуально не видно. Рух такого типу може бути безвихровим, тобто проходити без обертання частинок, лише в разі $f(y) = \text{const}$. Останнє означає рівномірність розподілу швидкостей по товщині потоку, що в реальних умовах неможливо внаслідок прилипання в'язких рідин до твердих стінок.

Течія реальних рідин між твердими стінками зазвичай є вихровою і в інших випадках. Поряд з упорядкованими елементарними вихорами, безперервно розміщеними в області течії, у таких потоках можуть утворюватися зони, заповнені великими візуально спостережуваними вихорами.

3.6 Циркуляція швидкості й теорема Стокса

Поняття інтенсивності вихорів є прямою характеристикою вихрового руху, але воно має недоліки: величина інтенсивності не може бути безпосередньо вимірною. Крім того, у деяких розрахунках зручніше оперувати такою мірою вихрового руху, яка б виражалася не через кутову, а через поступальну швидкість. Цій меті відповідає поняття циркуляції швидкості.

Циркуляцією Γ вектора швидкості \vec{U} за деякими контуром L називають контурний інтеграл від скалярного добутку \vec{u} на елементарний вектор $d\vec{S}$ дуги L (рис. 3.13)

$$\Gamma = \oint_L \vec{U} d\vec{S}. \quad (3.42)$$

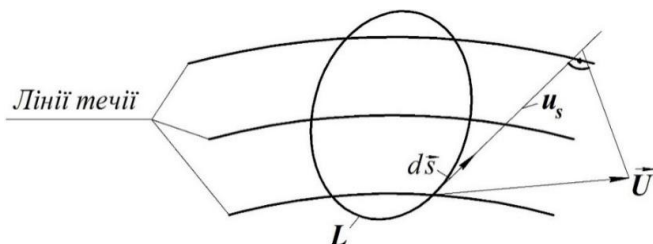


Рисунок 3.13 – Схема для визначення циркуляції швидкості за замкненим контуром

Згадуючи різні вирази для скалярного добутку двох векторів, циркуляцію можна подати такими формами:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_L U dS \cdot \cos(S, U) = \oint U_s dS = \\ &= \oint_L U_x dx + U_y dy + U_z dz, \end{aligned} \quad (3.43)$$

де dx, dy, dz – проекції вектора $d\vec{S}$.

Визначимо властивості циркуляції, що впливають із її визначення як контурного інтеграла.

Циркуляція швидкості за контуром дорівнює сумі циркуляцій окремих ділянками цього контура.

Зміна напрямку обходу контура на протилежний призводить до зміни знаку циркуляції.

Домовимося вважати додатною циркуляцію, яку одержують, якщо контур обходити так, щоб обмежена ним область залишалася зліва.

Зв'язок між циркуляцією Γ й інтенсивністю вихорів установлює теорема Стокса, яку ми сформулюємо без доведення для однозв'язної й багатозв'язної областей. Нага-

даємо, що однозв'язна – це така область, яка подумки може бути стягнена в одну точку (рис. 3.14).

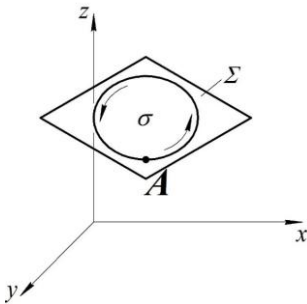
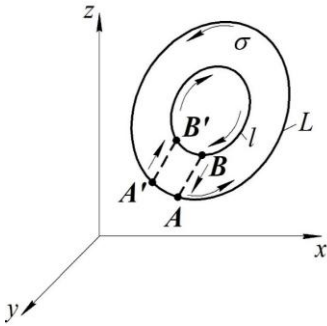


Рисунок 3.14 –
Схема однозв'язної області

Циркуляція швидкості за замкненим контуром, що обмежує однозв'язну область, дорівнює потоку вихорів через цю область.

Схему багатозв'язної області подано на рисунку 3.15.

Потік вихорів через багатозв'язну область дорівнює різниці між циркуляцією за зовнішнім контуром L і сумою циркуляцій за всіма внутрішніми контурами l_i .

Отже, циркуляція швидкості Γ за замкненим контуром може бути, водночас з інтенсивністю вихорів, мірою вихрового руху. У теоретичних і практичних розрахунках поняття циркуляції виявилось досить зручним та ефективним.

3.7 Поле швидкостей, зумовлене вихорами. Формула Біо – Савара

Для знаходження поля швидкостей за просторового обтікання тіл, разом із методом особливостей (застосування джерел, стоків і диполів), широко користуються полями швидкостей, зумовлених або індукованих вихровими лініями.

Найбільш простою є задача про індукування швидкостей прямолінійним вихором. Величина циркуляції швидкості Γ , індукованої прямолінійним вихором у площині, нормальній осі вихору (рис. 3.16), буде

$$\Gamma = \oint_S U dS = U \oint_S dS = 2\pi r U.$$

Звідки швидкість U , індукована вихором, дорівнює

$$U = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (3.44)$$

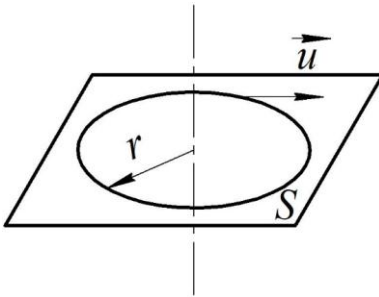


Рисунок 3.16 – Схема для визначення швидкості, індукованої прямолінійним вихором

Розглянемо найбільш загальний випадок. Нехай у деякому обмеженому просторі W у кожній точці є вихори з компонентами $rot_x \vec{U} = 2\omega_x$, $rot_y \vec{U} = 2\omega_y$, $rot_z \vec{U} = 2\omega_z$, які залежать від координат x, y, z ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – кутові швидкості обертання частинок). Необхідно знайти в кожній точці цього об'єму швидкість або проекції швидкості U_x, U_y, U_z ,

що індуковані цими вихорами.

Компоненти куткових швидкостей, як це було подано в п. 3.4, виражаються через компоненти швидкостей

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right).$$

Відомо, що $div \operatorname{rot} \vec{U} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{U}) = 0$ унаслідок скалярного добутку, взаємно перпендикулярних векторів ∇ і $(\nabla \times \vec{U})$.

Зазвичай для знаходження поля швидкостей вводять допоміжний вектор \vec{a} зі змінними a_x , a_y і a_z , який щодо швидкостей U_x , U_y , U_z має такі самі значення, як швидкості щодо проєкцій кутових швидкостей ω_x , ω_y і ω_z . Цю умову можна записати у векторній формі

$$\vec{U} = \operatorname{rot} \vec{a}$$

і в проєкціях

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}; \\ U_y &= \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}; \\ U_z &= \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Будемо вважати, що розходження введеного вектора \vec{a} , що називається векторним потенціалом, дорівнює нулю

$$div \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0. \tag{3.47}$$

Підставляючи значення вектора швидкості, вираженого через векторний потенціал (3.46), у формулу для визначення вектора кутової швидкості $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{U}$, отримаємо у векторній формі $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}$.

Проєкція ω_x буде

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Провівши аналогічні операції з іншими компонентами і зважаючи на вираз (3.47), отримаємо три рівняння з трьома невідомими a_x , a_y і a_z

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} &= -2\omega_x; \\
\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} &= -2\omega_y; \\
\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} &= -2\omega_z.
\end{aligned}$$

Наведені диференціальні рівняння в часткових похідних відомі в математиці як рівняння Пуассона. Розв'язання цих рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{1}{2\pi} \int_W \omega_x \frac{dW}{r}; \\
a_y &= \frac{1}{2\pi} \int_W \omega_y \frac{dW}{r}; \\
a_z &= \frac{1}{2\pi} \int_W \omega_z \frac{dW}{r}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Водночас інтеграл беруть по всьому об'єму W , заповненому вихорами. Поза областю, зайнятою вихорами, $\omega = 0$ і рівняння Пуассона стають рівняннями Лапласа.

Отже, задачу можна вважати розв'язаною. За заданими $\omega_x(x, y, z)$, $\omega_y(x, y, z)$ і $\omega_z(x, y, z)$ знаходимо за допомогою виразу (3.48) $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$ і $a_z(x, y, z)$. Потім за співвідношенням (3.46) визначаємо U_x , U_y і U_z .

Застосуємо цей метод для знаходження поля швидкостей, що індукується довільним вихровим шнуром. У разі, коли в розглядуваному нерухомому просторі є вихровий шнур, об'єм W буде дорівнювати площі поперечного перерізу S шнура, помноженого на його довжину. Як можна бачити з рисунка 3.17, а $dW = SdL$.

Складові вектора вихору швидкості, що розташовані під інтегралом у формулах (3.48), можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega \cos(\widehat{\omega, x}) = \omega \frac{d\xi}{dL}; \\ \omega_y &= \omega \cos(\widehat{\omega, y}) = \omega \frac{d\eta}{dL}; \\ \omega_z &= \omega \cos(\widehat{\omega, z}) = \omega \frac{d\zeta}{dL},\end{aligned}$$

де ξ , η і ζ – координати точок вихрового шнура (на відміну від координат x , y і z поза вихровим шнуром).

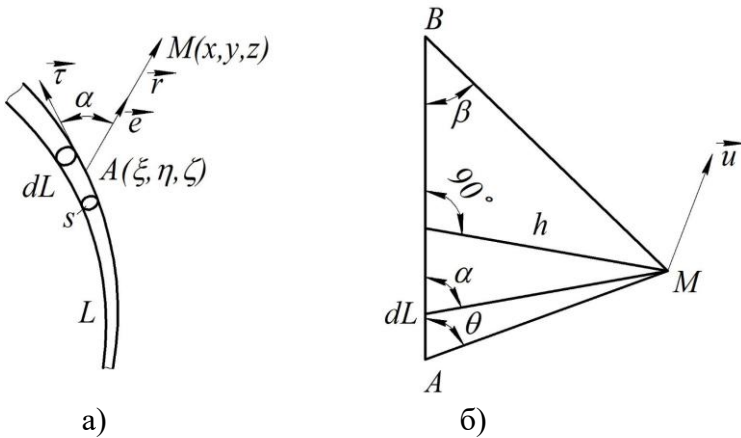


Рисунок 3.17 – Схема для визначення поля швидкостей, що індукується довільним вихровим шнуром

Беручи до уваги, що $\omega S = \frac{1}{2}\Gamma$, отримаємо формули (3.48) для розглядуваного випадку у вигляді

$$a_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\xi}{r}; \quad a_y = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\eta}{r}; \quad a_z = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\zeta}{r}.$$

Для визначення поля швидкостей підставимо отримані значення a_x , a_y і a_z у формули (3.46), тоді для проєкції швидкості на вісь x отримаємо

$$\begin{aligned} U_x &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\xi}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\eta}{r} \right) \right] = \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta \right]. \end{aligned}$$

Провівши аналогічні підстановки для інших проєкцій і зважаючи, що відстань між точкою поза вихором із координатами x , y і z і точкою вихорового шнура з координатами ξ , η і ζ (рис. 3.17, а) буде дорівнювати

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

отримаємо підінтегральні вирази

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{x_1}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{y_1}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{z_1}{r^3},$$

де $x_1 = x - \xi$; $y_1 = y - \eta$; $z_1 = z - \zeta$ – проєкції радіуса – вектора r на осі x , y , z .

У кінцевому підсумку поле швидкостей, що індукється вихровим шнуром, визначається залежностями

$$U_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \left(\frac{y_1}{r} \cdot \frac{d\zeta}{dL} - \frac{z_1}{r} \cdot \frac{d\eta}{dL} \right) \frac{dL}{r^2};$$

$$U_y = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \left(\frac{z_1}{r} \cdot \frac{d\xi}{dL} - \frac{x_1}{r} \cdot \frac{d\zeta}{dL} \right) \frac{dL}{r^2}; \quad (3.49)$$

$$U_z = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \left(\frac{x_1}{r} \cdot \frac{d\eta}{dL} - \frac{y_1}{r} \cdot \frac{d\xi}{dL} \right) \frac{dL}{r^2}.$$

Відклавши в напрямку радіус-вектора r одиничний вектор \vec{e} (рис. 3.17, а), запишемо його вираз у вигляді

$$\vec{e} = \frac{x_1}{r} \vec{i} + \frac{y_1}{r} \vec{j} + \frac{z_1}{r} \vec{k}.$$

Одиничний вектор \vec{t} за напрямком дотичної буде

$$\vec{t} = \frac{d\xi}{dL} \vec{i} + \frac{d\eta}{dL} \vec{j} + \frac{d\zeta}{dL} \vec{k}.$$

З формули (3.49) можна бачити, що підінтегральні вирази в дужках будуть відповідними проєкціями векторного добутку ортів \vec{t} і \vec{e} .

Отже, підставивши у формули (3.49) відповідні проєкції ортів, у кінцевому підсумку отримаємо диференціал вектора швидкості, що індукується вихровим шнуром

$$d\vec{U} = \frac{\Gamma}{4\pi} (\vec{t} \times \vec{e}) \frac{dL}{r^2}, \quad (3.50)$$

або

$$d\vec{U} = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin \alpha dL, \quad (3.51)$$

де α – кут між радіус-вектором \vec{r} і дотичною.

Отриманий вираз називається формулою Біо – Савара. Уперше вона була застосована для визначення магнітного поля, що виникає навколо електричного провідника.

Розглянемо поле швидкостей, що створюється вихровою ниткою з постійною циркуляцією Γ у точці M (рис. 3.17, б).

Якщо h – найкоротша відстань від точки M до вихрової нитки AB , то

$$r = \frac{h}{\sin \alpha}; dL = -d(hctg\alpha) = h \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

і формула Біо – Савара набуде вигляду

$$dU = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{h^2} \cdot \frac{hd\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\Gamma}{4\pi h} \sin \alpha d\alpha.$$

Інтегрування по довжині відрізка AB дає значення U у вигляді

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\theta}^{\pi-\beta} \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos\theta + \cos\beta).$$

Для вихрової нитки нескінченної довжини

$$\theta = \beta = 0; \cos\theta = \cos\beta = 1; U = \frac{\Gamma}{2\pi h}.$$

Для вихрового променя, що спрямований уверх або вниз від точки M $\beta = \frac{\pi}{2}$ і $\theta = 0$, і

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi h}. \quad (3.52)$$

Аналогічним методом можна отримати поле швидкостей за будь-яких інших розміщень вихорів у просторі, наприклад, для колової вихрової нитки, вихрового шару тощо.

3.8 Безвихровий або потенціальний рух

Розглянемо окремих випадок, коли усталений рух рідини відбувається без обертання частинок, тобто допустимо, що в усьому об'ємі, зайнятому рідиною, $\vec{\omega} = 0$.

Ця умова може бути переписана в такому вигляді:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) = 0, \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = 0, \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) = 0,\end{aligned}$$

що рівносильно системі

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_z}{\partial y} &= \frac{\partial U_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} &= \frac{\partial U_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} &= \frac{\partial U_x}{\partial y}.\end{aligned}\tag{3.53}$$

З теорії криволінійних інтегралів відомо, що співвідношення (3.53) є необхідними й достатніми умовами для того, щоб тричлен вигляду $U_x dx + U_y dy + U_z dz$ являв собою повний диференціал деякої функції трьох змінних, яку позначимо $\varphi(x, y, z)$. Отже,

$$U_x dx + U_y dy + U_z dz = d\varphi.\tag{3.54}$$

Зважаючи, що повний диференціал виражають формулою

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,\tag{3.55}$$

можна записати

$$U_x dx + U_y dy + U_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

Оскільки ця рівність виконується за будь-яких dx, dy, dz , коефіцієнти з диференціалами незалежних змінних у лівій і правій частинах рівні, тобто

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ U_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ U_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Отже, під час безвихрового руху компоненти вектора швидкості \vec{u} є частинними похідними деякої функції φ , яку називають *потенціалом швидкості*.

Вектор швидкості в цьому разі може бути подано у вигляді

$$\vec{U} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}, \quad (3.57)$$

або

$$\vec{U} = \text{grad } \varphi. \quad (3.58)$$

Наведені міркування та співвідношення справедливі також для неусталеного руху. У цьому разі їх можна застосувати до будь-якого фіксованого моменту часу, який буде відігравати роль параметра, і, отже,

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t).$$

Використовуючи поняття похідної за напрямком, нескладно продемонструвати, що для будь-якого напрямку

$$U_s = \frac{\partial \varphi}{\partial S}.$$

Отже, проекція вектора швидкості на будь-який напрямок дорівнює похідній потенціалу швидкості на цьому напрямку

$$U_s = U \cos(S, U) = \frac{\partial \varphi}{\partial S}. \quad (3.59)$$

Розглянемо два окремих напрямки одиничного вектора \vec{S}_0 :

1. \vec{S}_0 паралельний \vec{U} . Для цього випадку $\cos(S, U) = 1$, і похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ за цим напрямком набуває найбільшого значення, що дорівнює модулю вектора швидкості $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = U$.

Інакше кажучи, вектор швидкості \vec{U} вказує напрямок найшвидшої зміни функції φ . Оскільки вектори дотичні до лінії течії, то вздовж них функція φ змінюється швидше, ніж за будь-яким іншим напрямком.

2. \vec{S}_0 перпендикулярний до \vec{U} . У цьому разі $\cos(S, U) = 0$ і $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$. Отже, вздовж цього напрямку функція φ залишається постійною. Але в просторі нескінченно багато напрямків, ортогональних до вектора швидкості \vec{U} . У кожній точці лінії течії вони утворюють деяку поверхню, яку називають еквіпотенціальною.

Її рівняння має вигляд

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const.} \quad (3.60)$$

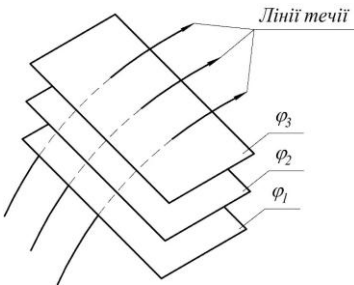


Рисунок 3.18 – Лінії течії, що перетинають еквіпотенціальні поверхні за нормальми

Отже, у потенціальному, або безвихровому потоці рідини можна побудувати сукупність еквіпотенціальних поверхонь і сукупність ліній течії, кожна з яких перетинає будь-яку еквіпотенціальну поверхню ортогонально (рис. 3.18).

Розглянемо довільну (не обов'язково еквіпотенціальну) поверхню Σ і замкнений контур L , розміщений у ній (див. рис. 3.14).

Якщо потік в усіх точках є безвихровим, то за теоремою Стокса $\Gamma_L = 0$. Зважаючи на загальний вираз циркуляції (3.43), одержимо

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_L u_x dx + u_y dy + u_z dz = \oint_L \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \\ &= \oint_L d\varphi = \varphi_{A'} - \varphi_A = 0,\end{aligned}$$

де $\varphi_{A'}$ і φ_A – відповідно значення потенціалу швидкості в точці A після обходу контура та його вихідне значення в цій точці.

Ми бачимо, що $\varphi_{A'} = \varphi_A$, тобто після обходу контура значення потенціалу швидкості не змінилося. Інакше кажучи, якщо потік усередині деякої замкненої області потенціальний, то його потенціал є однозначною функцією.

У разі якщо хоча б в одній точці всередині контура потік є вихровим, згідно з теоремою Стокса циркуляція не буде дорівнювати нулю, і розмірковування, подібні вище наведеним, дають

$$\varphi_{A'} = \varphi_A + \Gamma_L.$$

Винятком є випадок, коли вихори мають різні знаки й такі, що їхня сумарна інтенсивність дорівнює нулю.

Отже, якщо всередині області потенціальність порушується, то потенціал є функцією багатозначною, що змінюється на величину циркуляції після кожного обходу контура.

3.9 Плоскі потоки нестисливої рідини. Функція течії та гідродинамічна сітка

Властивості течій, викладені в попередніх підрозділах, справедливі для будь-яких просторових (тривимірних) течій нестисливої або стисливої рідини. Ми розглянемо

окремий, але практично дуже важливий випадок плоскої течії нестисливої рідини, тобто такий, у якому конфігурація ліній течії в усіх площинах, нормальних до деякої прямої, однакова.

Вибравши зазначену пряму за одну з осей координат (наприклад, за вісь z), ми стверджуємо, що для всього поля течії відповідно проєкція швидкості дорівнює нулю ($U_z = 0$).

Проте в природі плоскі течії не трапляються, але існує досить багато випадків, коли потік із достатньою для практичних цілей точністю може вважатися плоским.

Прикладами можуть бути:

– потік повітря, що обтікає довге циліндричне крило (рис. 3.19, а), якщо з розгляду виключити області поблизу кінців крила;

– потік води в широкому прямокутному каналі (рис. 3.19, б), якщо з розгляду виключити області, які контактують із боковими стінками.

Подібних прикладів багато.

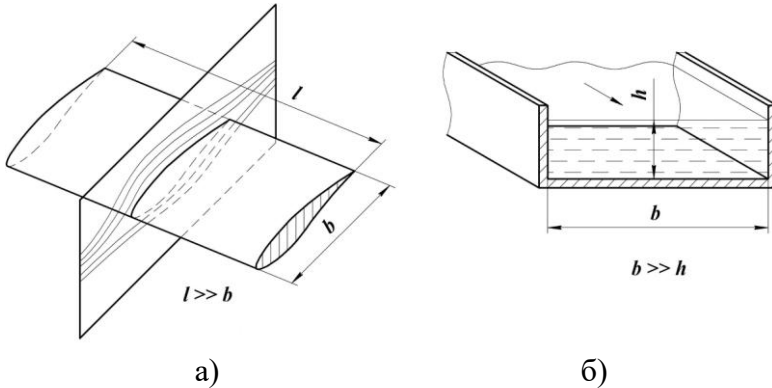


Рисунок 3.19 – Приклади плоских течій:
а) обтікання довгого циліндричного крила;
б) течія в широкому каналі

Вивчення плоских течій істотно легше, по-перше, тому що рівняння, які їх описують, простіші, ніж загалом,

а по-друге, тому що достатньо дослідити течію всього лише в одній площині, щоб скласти уявлення про потік загалом.

Нехай $U_z = 0$. Тоді рівняння нерозривності нестисливої рідини (див. п. 3.23) набуває вигляду

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \text{ або } \frac{\partial U_x}{\partial x} = -\frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad (3.61)$$

а рівняння лінії течії – вигляду

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} \text{ або } U_x dy - U_y dx = 0. \quad (3.62)$$

Співвідношення (3.61) є необхідною й достатньою умовою, щоб ліва частина (3.62) була повним диференціалом деякої функції двох змінних. Тоді

$$U_x dy - U_y dx = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy.$$

Порівнюючи коефіцієнти біля dx і dy , одержуємо

$$U_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad U_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.63)$$

Уздовж будь-якої лінії течії виконується (3.62), і, отже, вздовж неї $\partial\psi = 0$ або $\psi(x, y) = \text{const}$. Отже, функція течії має властивість зберігати вздовж будь-якої лінії течії сталі значення, яке, проте, різне для різних ліній течії.

Щоб з'ясувати фізичний зміст функції течії, проведемо дві довільні лінії течії PQ і MN (рис. 3.20) та розрахуємо витрату q рідини між ними, беручи розмір потоку в напрямку нормалі до площини креслення таким, що дорівнює одиниці. Використаємо загальний вираз витрати та одержимо

$$q = \int_l U_n dl = \int_l \vec{U} \vec{n} dl,$$

де l – довільна крива, що з'єднує лінії течії, або

$$q = \int_l [U_x \cos(n, x) + U_y \cos(n, y)] dl.$$

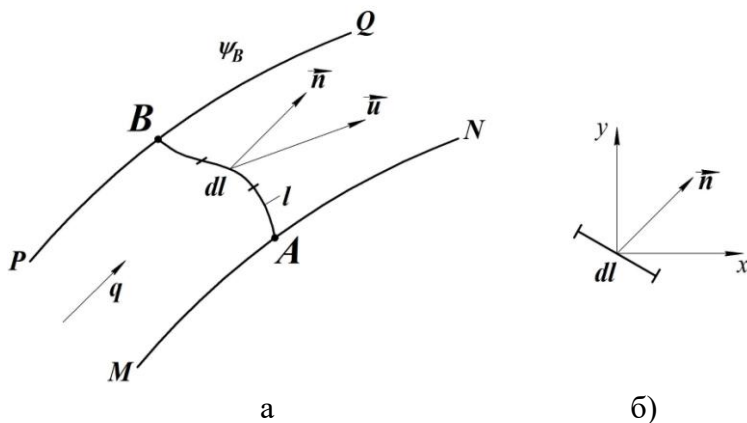


Рисунок 3.20 – Різниця значень функцій течії на двох лініях течії, що дорівнює витраті рідини між ними ($\psi_B - \psi_A = q$)

Як бачимо з рисунка 3.20, $dl \cos(n, x) = dy$, $dl \cos(n, y) = -dx$.

Тоді

$$q = \int_l U_x dy - U_y dx = \int_l \frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int_l d\psi = \psi_B - \psi_A.$$

Тобто різниця значень функції течії на двох лініях течії дорівнює витраті рідини між ними. Якщо $\psi_A = 0$, то $q = \psi_B$, і тому можна зазначити, що ψ – витратна функція.

Підкреслимо, що існування функції течії не залежить від наявності або відсутності в рідині вихорів. Проте

воно впливає з рівняння нерозривності для плоских течій, і тому функція течії наведеного типу існує лише для плоских течій.

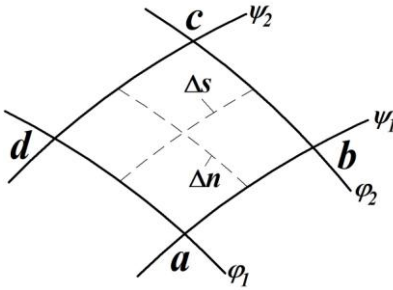


Рисунок 3.21 – Квадратичність гідродинамічної сітки

Припустимо тепер, що потік не лише плоский, а й потенціальний. Тоді в ньому можна провести еквіпотенціальні поверхні, які в цьому разі є циліндричними і в перетині з площиною течії дають плоскі еквіпотенціальні лінії. Отже, плоский

потенціальний потік нестисливої рідини характеризується двома ортогональними множинами кривих: $\psi = const$ (лінії течії) і $\varphi = const$ (еквіпотенціальні). Ці множини утворюють гідродинамічну сітку, що має такі властивості:

- сітка ортогональна;
- однойменні лінії сітки в жодних місцях не перетинаються, крім точок із нульовою й нескінченною швидкостями (критичні або особливі точки);
- гідродинамічна сітка малих розмірів квадратична.

Нехай ми маємо малу клітинку $abcd$ (рис. 3.21), утворену парою відрізків ліній течій (ab і dc) та парою еквіпотенціальних (ad та bc).

Нехай Δn – відрізок середньої еквіпотенціалі, а ΔS – відрізок середньої лінії течії. Витрату через клітинку можна виразити у вигляді

$$\Delta q = U \cdot \Delta n = \Delta \psi,$$

де $\Delta \psi$ – приріст функції течії на відріжку Δn між лініями течії ab і dc .

Але

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta S},$$

де $\Delta \varphi$ – приріст потенціалу на відрізку ΔS між еквіпотенціалами ab і dc .

Отже,

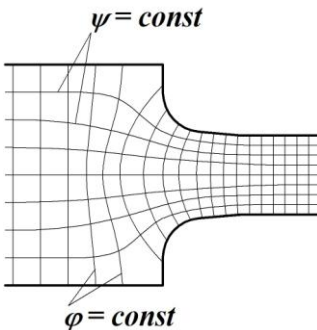
$$\Delta q = \Delta \psi = \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} \Delta n,$$

або

$$\Delta \psi \cdot \Delta S = \Delta \varphi \cdot \Delta n.$$

Звідси випливає, якщо сітка складається з малих криволінійних квадратів ($\Delta S \approx \Delta n$), тоді $\Delta \varphi \approx \Delta \psi$ і навпаки.

У цьому розумінні введений термін «квадратичність».



Перелічені властивості гідродинамічної сітки дозволяють використовувати її для визначення параметрів (насамперед швидкостей) плоских потенціальних потоків. На рисунку 3.22 подано гідродинамічну сітку, побудовану для випадку витікання рідини під тиском із посудини з плоскими стінками.

Рисунок 3.22 –
Гідродинамічна сітка,
побудована для випадку
витікання рідини під тиском
із посудини з плоскими стінками

3.10 Потенціальні течії нестисливої рідини

3.10.1 Загальні властивості потенціальних течій.

Постановка гідродинамічної задачі

Розглянемо більш детально потенціальні течії та основні методи, які дозволяють розв'язувати різноманітні гідродинамічні задачі, у яких течія рідини може вважатися потенціальною. До таких випадків належить, наприклад, практично важлива задача про обтікання твердих тіл нескінченим потоком (так звана зовнішня задача гідроаеромеханіки).

Оскільки для потенціальних течій

$$U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, U_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, U_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то, підставляючи ці співвідношення в диференціальне рівняння нерозривності

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0.$$

Отримаємо

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.64)$$

У векторній формі ці перетворення записують у більш компактній формі: оскільки для потенціальних потоків $\vec{U} = \text{grad} \varphi$, то, вносячи це в рівняння нерозривності $\text{div} \vec{U} = 0$, отримуємо

$$\text{div} \vec{U} = \text{div} \text{grad} \varphi = 0. \quad (3.65)$$

Отже, потенціал швидкості φ будь-якого безвихрового потоку нестисливої рідини задовольняє рівнянню Лапласа (3.64), тобто є гармонічною функцією. У зв'язку з цим задачу знаходження поля швидкостей, тобто знахо-

дження функцій U_x , U_y і U_z для безвихрових течій, можна замінити задачею знаходження однієї функції φ , що задовольняє рівнянню Лапласа. Але для отримання визначеного рішення цього рівняння необхідно сформулювати граничні (крайові) умови. Гранична умова на твердій непроникній стінці має вигляд

$$U_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_c = 0, \quad (3.66)$$

тобто нормальна складова швидкості (вона ж похідна потенціалу по нормалі) на твердій непроникній поверхні (стінці) дорівнює нулю.

Задача знаходження рішення (3.63) за граничних умов (3.65) називається задачею Неймана.

Якщо потік нестисливої рідини є плоским і потенціальним, то разом із потенціалом φ він, як уже про це було зазначено раніше, має функцію течії ψ , водночас

$$U_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad U_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Вносячи ці вирази в умову потенціальності (відсутності вихорів)

$$\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} = 0,$$

переконаємося, що в цьому разі функція ψ , як і φ , є гармонічною

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

В ідеальній рідині будь-яка тверда поверхня є поверхнею течії, і тому гармонічною умовою для ψ на твердій стінці є співвідношення $\psi_c = \text{const}$. Отже, для функції течії

приходимо до задачі Діріхле, методи розв'язання якої достатньо розроблені.

Оскільки рівняння Лапласа лінійне, то сума двох його частинних рішень φ_1 і φ_2 буде також розв'язком цього рівняння. Якщо φ_1 і φ_2 – потенціали швидкості деяких течій, то сума рішень $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ є потенціалом деякої третьої течії. Компоненти швидкості цієї підсумкової течії визначаються формулами

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = U_{x_1} + U_{x_2}; \\ U_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = U_{y_1} + U_{y_2}; \\ U_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = U_{z_1} + U_{z_2}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Звідси випливає принцип суперпозиції (накладання) потенціальних течій: потенціальні потоки нестисливої рідини можна складати. Потенціали швидкостей і функцій течії складаються водночас алгебраїчно, а вектори швидкостей у відповідних точках – геометрично.

Принцип суперпозиції дозволяє, складаючи найпростіші течії, потенціали швидкостей для яких відомі, отримувати більш складні течії в каналах, протічних частинах машин. Особливо ефективний метод складання для розв'язання плоских задач.

Раніше було вказано на зв'язок між потенціалом швидкості і функцією течії

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.68)$$

Зв'язок між двома функціями $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$, виражений співвідношеннями (3.68), має дуже важливе значення і в теорії комплексної змінної його називають умовами Коші – Рімана. Відомо, що якщо дві функції φ і ψ від x і y

задовольняють умовам Коші – Рімана, то комплексна величина

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

не просто залежить від x і y , а є функцією від однієї комплексної змінної z , яка дорівнює

$$z = x + iy = re^{i\theta}.$$

Отже, існує функція комплексної змінної $W(z)$, дійсна та уявна частини якої будуть φ і ψ , тобто

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (3.69)$$

Функція $W(z)$ має дуже велике значення в теорії безвихрового плоского потоку і називається комплексним потенціалом, або характеристичною функцією течії.

Оскільки комплексний потенціал є аналогічною функцією від z , то похідна $W(z)$ не залежить від напрямку диференціювання і повністю визначається положенням точки в площині xOy , заданою координатою z , тобто

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial(iy)}.$$

Або

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial W}{\partial(iy)} = -i \frac{\partial W}{\partial y} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Використовуючи вирази

$$U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad U_x = \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

і

$$U_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad U_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

отримуємо

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial(iy)} = U_x - iU_y. \quad (3.70)$$

Величина і напрямок швидкості в комплексній площині (рис. 3.23) визначається формулою

$$U = U_x + iU_y.$$

Порівнюючи отриманий вираз із формулою (3.70), бачимо, що похідна від комплексного потенціалу за координатами дорівнює за величиною швидкостей але за напрямком збігається із дзеркальним відображенням вектора швидкості щодо дійсної осі.

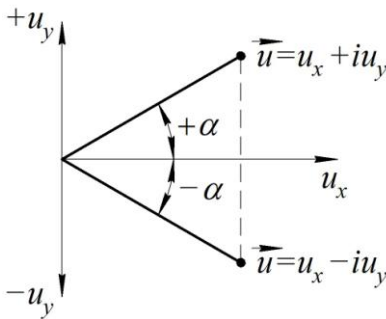


Рисунок 3.23 – Подання швидкості течії в комплексній площині

Оскільки в теорії комплексної змінної величини $z = x + iy$ і $z = x - iy$ називають спряженими, то величину

$$U = U_x - iU_y$$

можна назвати спряженою швидкістю.

Площина $U_x U_y$ називається площиною годографа швидкості, або площиною годографа.

Вирахуємо значення контурного інтеграла

$$\begin{aligned} \oint \frac{\partial W}{\partial z} dz &= \oint \bar{u} dz = \oint (U_x - iU_y)(dx + idy) = \\ &= \oint [(U_x dx + U_y dy) + i(U_x dy - U_y dx)], \end{aligned}$$

але

$$\oint (U_x dx + U_y dy) = \Gamma,$$

$$a \oint (U_x dy - U_y dx) = \oint \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \oint d\psi = Q.$$

Тут Γ – циркуляція швидкості замкнутим контуром;
 Q – об'ємна витрата через замкнутий контур.

Отже, отримаємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \oint \frac{\partial W}{\partial z} dz &= \operatorname{Re} \oint \bar{U} dz = \Gamma, \\ \operatorname{Im} \oint \frac{\partial W}{\partial z} dz &= \operatorname{Im} \oint \bar{U} dz = Q, \end{aligned} \quad (3.71)$$

де через Re і Im позначені відповідно дійсна та уявна частини комплексного числа, тобто дійсна частина інтеграла визначає циркуляцію швидкостей замкнутим контуром, а уявна – об'ємну витрату рідини через цей контур.

Отже, для вивчення плоских безвихрових рухів ідеальної рідини можна широко використовувати теорію комплексної змінної. Водночас комплексному потенціалу визначеного виду відповідає деякий рух рідини і, навпаки, кожен рух може бути подано деяким комплексним потенціалом. Відповідно можна поставити дві задачі:

- за заданим комплексним потенціалом побудувати течію, тобто знайти φ і ψ і поле швидкостей;
- знаючи контур обтічного тіла і значення швидкості на нескінченності, знайти відповідний комплексний потенціал.

Друга задача значно складніша, ніж перша.

Далі розглянемо приклади першої задачі для деяких простих і важливих для гідромеханіки комплексних потенціалів.

3.10.2 Деякі прості потенціальні потоки

3.10.2.1 Плоскопаралельний потік. Найбільш простим прикладом комплексного потенціалу є вираз

$$W(z) = az = a(x + iy). \quad (3.72)$$

Розглянемо послідовно цей вираз для дійсного, уявного і комплексного значень числа.

Якщо, $a = a_1$, дійсне число, то $W(z) = a_1z = a_1x + ia_1y$.

Оскільки $W(z) = \varphi + i\psi$, то $\varphi = a_1x$ і $\psi = a_1y$, звідки отримуємо, що еквіпотенціальні лінії $\varphi = \text{const}$ мають вигляд $\varphi = a_1x = C$, тобто будуть сімейством прямих, паралельних осі y , а лінії течії $\psi = a_1y = C$ будуть сімейством прямих, паралельних осі x .

На рисунку 3.24 подано еквіпотенціальні лінії і лінії течії в площині xOy .

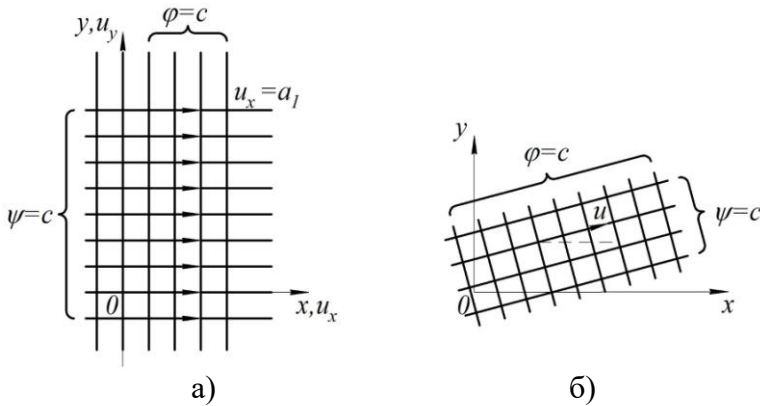


Рисунок 3.24 – Схема плоскопаралельного потоку

Проекції швидкостей можна знайти за формулами

$$U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a_1;$$

$$U_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Якщо сумістити площину годографу з площиною xOy (рис. 3.24, а), то вектор швидкості цього руху буде збігатися за напрямком із лініями течії. Якщо число a – уявне число,

тобто $a = ia_1$ (a_1 – дійсне число), то $W(z) = az = ia_1(x + iy) = a_1y + ia_1x$, тоді $\varphi = -a_1y$ і $\psi = a_1x$.

Еквіпотенціальні лінії і лінії течії відповідно будуть $\varphi = -a_1y = C$ і $\psi = a_1x = C$.

Порівняно з попереднім випадком лінії течії та еквіпотенціальні лінії в разі помноження комплексного потенціалу на уявну одиницю змінюються місцями.

Проекції швидкостей будуть

$$U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ і } U_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -a_1.$$

Якщо a – комплексне число, рівне $a = a_1 + ia_2$ (a_1 і a_2 – дійсні додатні числа), то комплексний потенціал буде $W(z) = az = (a_1 + ia_2)(x + iy) = (a_1x - a_2y) + i(a_2x + a_1y) = \varphi + i\psi$.

У цьому разі потенціал швидкості φ і функція течії ψ мають вигляд $\varphi = a_1x - a_2y$ і $\psi = a_2x + a_1y$, а проекції швидкостей дорівнюють

$$U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a_1 \text{ і } U_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -a_2.$$

Рівняннями ліній течії та еквіпотенціальних ліній відповідно будуть

$$a_2x + a_1y = C_1 \text{ або } y = -\frac{a_2}{a_1}x + C_2;$$

$$a_1x + a_2y = C_3 \text{ або } y = \frac{a_1}{a_2}x + C_4.$$

Отримані рівняння є рівняннями взаємоперпендикулярних прямих, поданих на рисунку 3.24, б. Якщо комплексний потенціал $W(z)$, що являє собою плоскопаралельний потік, помножити на уявне число i , то лінії течії та еквіпотенціальні лінії поміняються місцями.

3.10.2.2 Джерело і стік. Як другий приклад розглянемо комплексний потенціал виду

$$W(z) = alnz = \varphi + i\psi. \quad (3.73)$$

Нехай a – дійсне число. Тоді

$$W(z) = alnz = alnre^{i\theta} = alnr + ialne^{i\theta} = alnr + ia\theta.$$

Очевидно, потенціал швидкості і функція течії такого руху матимуть вигляд $\varphi = alnr$ і $\psi = a\theta$.

Лінії течії та екіпотенціальні лінії, виражені рівняннями $a\theta = C$ і $alnr = C$, будуть, відповідно, сукупностями прямих, що проходять через початок координат, і сукупністю кіл із центром у початку координат (рис. 3.25).

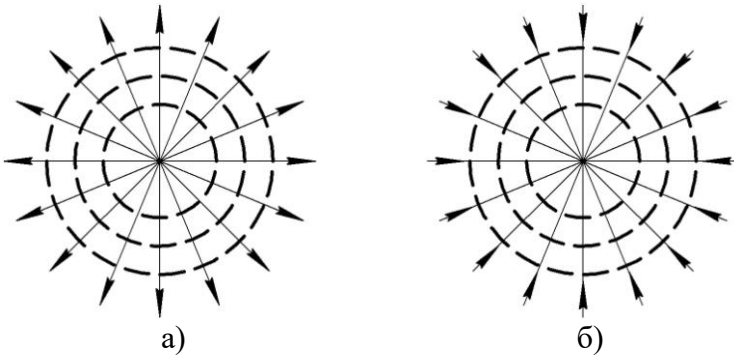


Рисунок 3.25 – Джерело і стік

Складові швидкостей можна визначити згідно з формулами в циліндричній системі координат

$$U_r = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} alnr = \frac{a}{r}; \quad (3.74)$$

$$U_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = 0.$$

Знак U_r визначається знаком числа a . Якщо a додатне, то напрямком ліній течії буде відповідати джерелу (рис. 3.25, а); за від'ємного a – стоку (рис. 3.25, б).

Варто зазначити, що початок координат є особливою точкою, у якій величина швидкості перетворюється в нескінченність.

Знаючи поле швидкостей, можна знайти об'ємну витрату джерела або стоку

$$Q = \int_0^{2\pi} U_r r d\theta = \int_0^{2\pi} a d\theta = 2\pi a.$$

Отже, число a можна виразити через об'ємну витрату Q , яка визначає продуктивність джерела або стоку, і тоді комплексний потенціал такого потоку можна подати у вигляді

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z. \quad (3.75)$$

3.10.2.3 Вихор. Якщо в комплексному потенціалі (3.73) число a уявне, тобто

$$a = ia_1; \quad W(z) = ia_1 \ln z = \varphi + i\psi. \quad (3.76)$$

то порівняно з попереднім лінії течії та екіпотенціальні лінії поміняються місцями, оскільки

$$W(z) = ia_1 \ln r e^{i\theta} = -a_1 \theta + ia_1 \ln r,$$

де a_1 – дійсне число.

Тоді $\varphi = -a\theta$ і $\psi = a_1 \ln r$, а рівняння ліній течії та екіпотенціальних ліній $\psi = a_1 \ln r = C$ і $\varphi = -a\theta = C$ будуть відповідно виражати сукупність кіл із центром у початку координат і сукупність прямих, що проходять через початок координат (3.26, а). Складові швидкостей мають значення

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{і} \quad U_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{a_1}{r}.$$

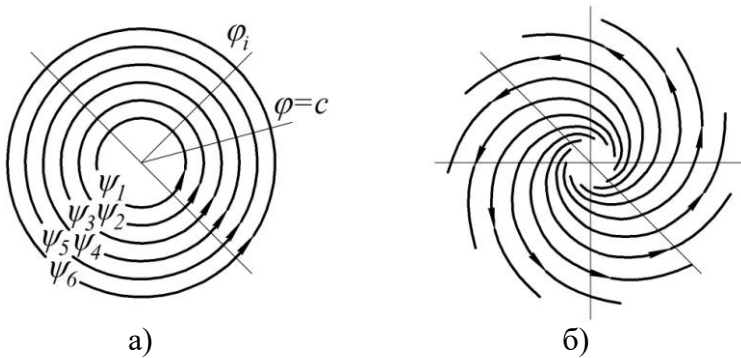


Рисунок 3.26 – Схема вихору

Для визначення фізичного змісту дійсного числа a_1 знайдемо величину циркуляції Γ вздовж будь-якої замкненої лінії течії, що містить усередині початок координат $\Gamma = 2\pi r U_\theta$, після підстановки знайденої величини U_θ отримаємо $\Gamma = -2\pi r a_1$, звідки $a_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}$.

Отже, комплексний потенціал (3.76) потоку з циркуляцією Γ матиме вигляд

$$W = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (3.77)$$

Величина швидкості

$$U_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

обернено пропорційна радіусу r , тобто

$$U_\theta r = \frac{\Gamma}{2\pi} = \text{const.}$$

Такий рух рідини відповідає циркуляційному потоку навколо вихрової нитки. У разі плоского руху маємо потік навколо точкового вихору, що є в початку координат.

3.10.2.4 Вихростік і вихроджерело. За комплексного значення числа a , рівного $a_1 + ib_1$, комплексний потенціал (3.73) матиме вигляд

$$\begin{aligned} W(z) &= (a_1 + ib_1) \ln z = (a_1 + ib_1) \ln r e^{i\theta} = \\ &= (a_1 + ib_1) (\ln r + i\theta) = \\ &= (a_1 \ln r - b_1 \theta) + i(b_1 \ln r + a_1 \theta), \end{aligned}$$

звідки потенціал швидкості φ і функція течії ψ дорівнюють:

$$\begin{aligned} \varphi &= a_1 \ln r - b_1 \theta; \\ \psi &= b_1 \ln r + a_1 \theta. \end{aligned}$$

Цей рух можна розглядати як суму попередніх потоків: джерела або стоку і вихору.

Лінії течії такого руху, що має назву вихроджерела, подано на рисунку 3.26, б.

3.10.2.5 Диполь. Розглянемо комплексний потенціал

$$W(z) = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}, \quad (3.78)$$

де M – постійна, що має назву моменту диполя.

Після підстановки $z = x + iy$ отримуємо

$$W(z) = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

звідки потенціал швидкості φ і функція ψ течії матиме вигляд

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Рівняння ліній течії ($\psi = \text{const}$) і еквіпотенціальних ліній ($\varphi = \text{const}$) запишемо так:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= C \cdot y, \\ x^2 + y^2 &= C \cdot x. \end{aligned}$$

Перше рівняння дає сукупність кіл, які проходять через початок координат, з центром, розташованим на осі y , а друге – такі самі кола, але з центрами, розташованими на осі x . Лінії течії та еквіпотенціальні лінії диполя наведено на рисунку 3.27.

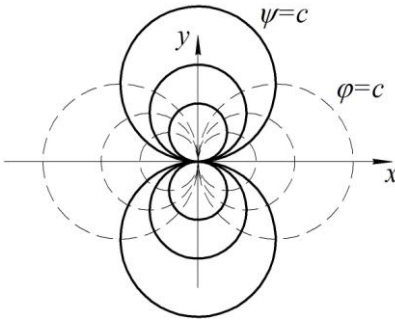


Рисунок 3.27 – Схема диполя

то розглядається безперервний розподіл вихорів на поверхні. Будемо називати сукупність цих вихорів вихровим шаром.

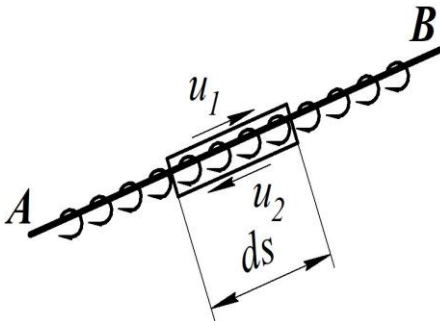


Рисунок 3.28 – Циліндричний вихровий шар

воруч (швидкість U_1), а з іншого – ліворуч (швидкість U_2).

3.10.2.6 Вихровий шар.

Попередньо ми розглядали одиничні або дискретно розташовані джерела, вихори, диполі. Уявімо тепер, що вздовж деякої циліндричної поверхні, слід якої на поверхні креслення зображують кривою (рис. 3.28), у кожній її точці розташовані точкові вихори, тобто

розглядається безперервний розподіл вихорів на поверхні. Будемо називати сукупність цих вихорів вихровим шаром. У теорії ідеальної рідини вихровий шар може слугувати моделлю реальних поверхонь рідини, у разі переходу через які швидкість течії різко змінюється.

Неважко уявити, що коли в рідині є вихровий шар, то з одного його боку рух спрямований пра-

Виділивши малим замкнутим контуром dl (рис. 3.28) елемент вихрового шару dS і розраховуючи циркуляцію, знаходимо

$$d\Gamma = |U_1|dS - |U_2|dS = (|U_1| - |U_2|)dS.$$

Величина

$$\gamma = \frac{d\Gamma}{dS} = |U_1| - |U_2|$$

може бути названа погонною циркуляцією вихрового шару. Як можна бачити з останньої формули, вона дорівнює різниці швидкостей $\Delta U = |U_1| - |U_2|$. Щоб знайти загальний вираз комплексного потенціалу для довільного вихрового шару, виділимо його малу ділянку довжиною dS і будемо розглядати вихори, які розташовані на цій ділянці, як один точковий вихор із циркуляцією $d\Gamma$. Комплексний потенціал течії, який створює цей вихор, матиме вигляд

$$dW = -\frac{id\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_S),$$

де z_S – координата точки, що визначає положення елемента dS .

Відповідно до принципу суперпозиції величина

$$W = -\frac{i}{2\pi} \int_L \ln(z - z_S) d\Gamma$$

буде комплексним потенціалом течії, викликаної усіма вихорами, розташованими на дузі L

$$W = -\frac{i}{2\pi} \int_L \gamma \ln(z - z_S) dS. \quad (3.79)$$

Якщо, зокрема, вихровий шар зосереджений на прямолінійному відрізку $(-l, +l)$, то отримаємо

$$W = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \gamma(\xi) \ln(z - \xi) d\xi, \quad (3.80)$$

де ξ – координати точки на вказаному відрізку.

Проекції швидкості цієї течії виражаються формулами

$$U_x = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{y\gamma(\xi)d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}; \quad U_y = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{(x - \xi)\gamma(\xi)d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Для розрахунку швидкостей за цими формулами необхідно знати функцію $\gamma(\xi)$. Її можна задати, і тоді ми доходимо до задачі знаходження поля швидкостей за заданою інтенсивністю вихрового шару. Проте під час розв'язання технічних задач можна скласти рівняння, які визначають цю функцію. Про це йде мова в наступному пункті.

3.10.3 Методи особливостей для розв'язання плоских задач потенціального обтікання тіл

Група методів, що називаються методами особливостей, ґрунтується на заміні заданого контура тіла системою безперервно розподілених вздовж нього точкових джерел, стоків, диполів, вихорів. Широкого розповсюдження набув метод розподілення вихорів або просто вихровий метод, у якому контур тіла замінюється вихровим шаром. Така заміна має фізичні передумови, оскільки за умови обтікання тіл реальною (в'язкою) рідиною на їхній поверхні утворюється примезовий шар, у якому зосереджена основна частина завихреності потоку.

Розглянемо загальну схему розв'язання задачі обтікання заданого циліндричного тіла потенціальним потоком (рис. 3.29). Уявімо, що контур тіла покритий безперервно розподіленими точковими вихорами. Виділимо на контурі

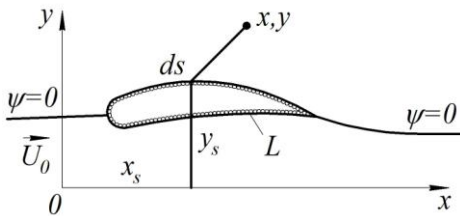


Рисунок 3.29 – Вихровий метод побудови плоского потенціального потоку

у точці (x_s, y_s) . Тоді функцію течії потоку, який створює цей вихор, можна виразити формулою

$$d\psi_s(x, y) = \frac{d\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$$

або

$$d\psi_s(x, y) = \frac{\gamma(S)}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} dS,$$

де індексом S відмічені величини, що залежать від координат точки (x_s, y_s) , яка лежить на контурі.

Згідно з принципом суперпозиції функція течії потоку, створюваного сукупністю всіх елементарних вихорів вихрового шару, отримується складанням

$$\psi_s = \frac{1}{2\pi} \oint_L \gamma(S) \ln \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} dS.$$

Оскільки контур тіла обтікається зі швидкістю U_0 потоком, що має функцію течії $\psi = U_0 y$, то результуюча течія матиме функцію течії

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \psi_S = \\ &= U_0 y + \frac{1}{2\pi} \oint_L \gamma(S) \ln \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2} dS. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Важливо пам'ятати, що у формулі (3.81) точка з координатами (x_S, y_S) лежить у вихровому шарі, а точка з координатами x, y – будь-де в потоці. Формулою (3.81) визначається значенням функції течії саме в цій точці. Інтегрування по координаті $S(x_S, y_S)$ поширюється на весь вихровий шар.

Урахуємо тепер, що за безвідривного обтікання контур тіла повинен бути лінією течії, на якій, як відомо, функція течії постійна. Остання без обмежень може бути взята рівною нулю. Тоді отримаємо рівняння лінії течії, що утворює контур тіла (вихрового шару)

$$U_0 y^0 + \frac{1}{2\pi} \oint_L \gamma(S) \ln \sqrt{(x^0 - x_S)^2 + (y^0 - y_S)^2} dS = 0, \quad (3.82)$$

тут верхнім індексом 0 відмічена та обставина, що точка x^0, y^0 розташована на контурі тіла L .

У рівнянні (3.82) єдиною невідомою функцією є погонна циркуляція γ , яка залежить від змінної інтегрування S . Оскільки вона входить у рівняння під знаком інтеграла, то щодо цієї функції рівняння є інтегральним, з цієї причини і весь метод інколи називають методом інтегральних рівнянь.

Якщо внаслідок розв'язання (3.82) удалося знайти $\gamma(S)$, то тоді за формулою (3.81) може бути знайдена функція течії в будь-якій точці x, y , а отже, визначена вся течія.

Необхідно відзначити, що оскільки точки x_S, y_S і x^0, y^0 належать контуру L , а інтегрування поширюється на весь контур, то для кожної точки x^0, y^0 існує одна точка $x_S,$

y_S , яка з нею збігається. Тоді підінтегральний вираз перетворюється на нескінченність, і інтеграл стає невласним. Тому під час обчислень необхідно провести виділення особливості.

Замість функції течії ψ для складання інтегральних рівнянь можна використати потенціал швидкості φ . У цьому разі умовою на контурі обтічного тіла буде $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_L = 0$. Можна також використати апарат теорії аналітичних функцій, зокрема їхнє подання контурними інтегралами, для отримання інтегральних рівнянь, що визначають комплексний потенціал і спряжену швидкість. Цей метод застосовується для розрахунків гідродинамічних решіток.

3.10.4 Безциркуляційне обтікання прямолінійним потоком круглого циліндра

Використовуючи принцип суперпозиції, знайдемо результат накладання прямолінійного потоку зі швидкістю U_0 , спрямованої вздовж дійсної осі, на диполь із моментом M .

Комплексний потенціал результуючої течії, потенціал швидкості і функцію течії отримуємо з формул попередніх пунктів

$$W = W_{\text{прям.}} + W_{\text{дип.}} = U_0 z + \frac{M}{2\pi z};$$

$$\varphi = U_0 x + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} = r \cos \theta \left(U_0 + \frac{M}{2\pi r^2} \right);$$

$$\psi = U_0 y - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = r \sin \theta \left(U_0 - \frac{M}{2\pi r^2} \right),$$

де $W_{\text{прям.}}$ і $W_{\text{дип.}}$ – комплексні потенціали прямолінійного потоку і диполя.

Конфігурація ліній течії визначається рівнянням $\psi = C$, або

$$y \left(U_0 - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = C.$$

З'ясуємо, яка лінія течії відповідає значенню $C = 0$.
Рівняння цієї лінії розкладається на два

$$y = 0 \text{ і } U_0 - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = 0,$$

тобто

$$x^2 + y^2 = \frac{M}{2\pi U_0}.$$

Перше з них є рівняння осі x , а друге – рівняння кола радіуса

$$r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi U_0}}.$$

Отже, лінія течії $C = 0$ складається з осі x і цього кола. Щоб уявити загальний характер течії, необхідно побудувати інші лінії течії. Їхній загальний вигляд подано на рисунку 3.30. Якщо тепер взяти до уваги, що в ідеальній рідині умова, що визначає будь-яку лінію течії ($U_n = 0$), збігається з умовою на твердій стінці, то можна коло радіуса r_0 (лінію течії) замінити твердою поверхнею. Характер течії від цього перетворення не змінюється. Тоді, нехтуючи течією всередині кола, ми отримаємо її обтікання (більш точно – обтікання круглого циліндра) потенціальним потоком із постійною швидкістю U_0 на значній відстані від циліндра (у нескінченності). Виключаючи з розгляду момент диполя $M = 2\pi U_0 r_0^2$, ми отримаємо такі кінцеві вирази для функцій W , φ і ψ потоку, що обтікає круглий циліндр

$$W = U_0 z + \frac{2\pi U_0 r_0^2}{2\pi z} = U_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right); \quad (3.83)$$

$$\varphi = r \cos \theta \left(U_0 + \frac{2\pi U_0 r_0^2}{2\pi r^2} \right) = U_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right); \quad (3.84)$$

$$\psi = r \sin \theta \left(U_0 - \frac{2\pi U_0 r_0^2}{2\pi r^2} \right) = U_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right). \quad (3.85)$$

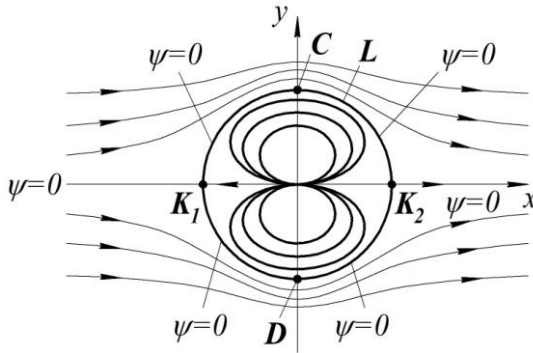


Рисунок 3.30 – Форма ліній течії, створених за накладання плоскопаралельного потоку на диполь

Спряжена швидкість цієї течії має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} = \bar{U} &= U_x - iU_y = \frac{d}{dz} \left(U_0 z + \frac{U_0 r_0^2}{z} \right) = \\ &= U_0 - \frac{U_0 r_0^2}{z^2} = U_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right). \end{aligned}$$

Складові швидкості в полярних координатах

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(U_0 r \cos \theta + U_0 \cos \theta \frac{r_0^2}{r} \right) = \\ &= U_0 \cos \theta - \frac{U_0 \cos \theta r_0^2}{r^2} = U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r} \right); \quad (3.86) \\ U_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -U_0 \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

На поверхні циліндра

$$U_r \Big|_{r=r_0} = 0 \text{ і } U_\theta \Big|_{r=r_0} = -2U_0 \sin \theta.$$

Знак мінус означає, що швидкість U_θ спрямована в бік від'ємної осі S_0 , додатний напрямок якої визначає напрямок відрахунку координатного кута θ (рис. 3.31). Бачимо, що на поверхні циліндра існують дві критичні точки

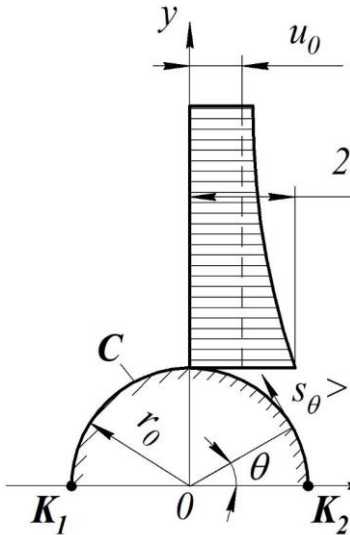


Рисунок 3.31 –
Розподіл швидкості
в потенціальному потоці,
що обтікає круглий циліндр

$K_1(\theta = \pi)$ і $K_2(\theta = 0)$ (рис. 3.30 і 3.31), де швидкість перетворюється на нуль, а за умови $\theta = \pm\pi/2$ вона досягає максимального значення $|U_m| = 2U_0$. За умови $r \rightarrow \infty$ величина швидкості наближається до U_0 (див. формули (3.86)), яку можна назвати швидкістю незбуреного потоку або швидкістю в нескінченності. Епюру розподілу швидкостей на промені $\theta = \pm\pi/2$ подано на рисунку 3.31.

Закон розподілу тиску на поверхні циліндра можна знайти, використавши рівняння Бернуллі. Нехтуючи дією масових сил, запишемо це рівняння для двох точок, одна з яких розташована далеко від циліндра (у нескінченності), а друга на його поверхні

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{U_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{|U|^2}{2} \quad \text{або} \quad p_0 + \frac{\rho U_0^2}{2} = p + \frac{\rho |U|^2}{2}.$$

Як коефіцієнт тиску \bar{p} візьмемо різницю тисків p і p_0 , віднесена до динамічного тиску $\frac{\rho |U|^2}{2}$

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{\frac{\rho U_0^2}{2}}. \quad (3.87)$$

Виконаємо деякі перетворення

$$\bar{p} + \frac{\rho|U|^2}{2} \cdot \frac{2}{\rho U_0^2} = 1,$$

$$\bar{p} + \frac{|U|^2}{U_0^2} = 1, \bar{p} = 1 - \frac{|U|^2}{U_0^2}.$$

Беручи до уваги, що швидкість на циліндрі $|U| = 2U_0 \sin \theta$, отримуємо

$$\bar{p} = 1 - \frac{(2U_0 \sin \theta)^2}{U_0^2} = 1 - 4\sin^2 \theta. \quad (3.88)$$

На рисунку 3.32 подано зміну \bar{p} залежно від кута θ . З рисунка бачимо, що $\bar{p} = 1$ за умови $\theta = 0$ і 180° , $\bar{p}_{min} = -3$ за умови $\theta = 90^\circ$ і 270° .

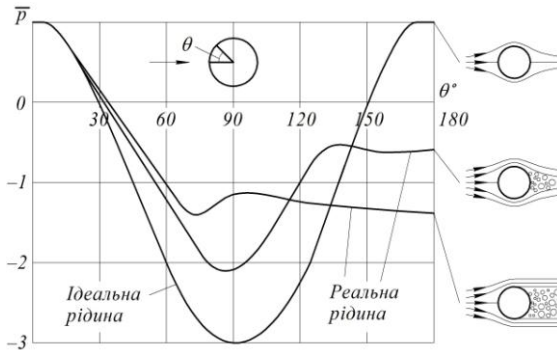


Рисунок 3.32 – Графіки розподілу тиску на поверхні круглого циліндра за його обтікання потоком ідеальної і реальної рідин без циркуляції

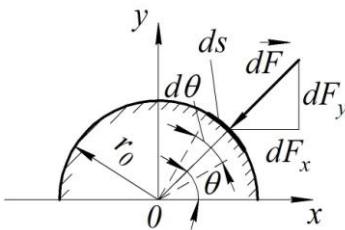
З розподілу швидкостей і тисків бачимо, що й поле швидкостей і поле тисків симетричне щодо декартових осей координат, проведених через центр кола. Отже, за обтікання круглого циліндра потенціальним потоком ідеальної рідини на циліндр жодні сили діяти не будуть.

За обтікання круглого циліндра реальною рідиною розподіл тисків, як це можна бачити з рисунка 3.32, суттєво відрізняється від теоретичного. Залишаючись симетричною щодо осі абсцис, крива тисків для в'язкої рідини буде несиметричною щодо осі ординат. Така несиметрія викликає появу проекції сил за напрямком руху – сили опору. Варто зазначити, що вигляд кривої розподілу тисків буде залежати для цього циліндра від швидкості потоку, а точніше – від числа Рейнольдса Re . Водночас зі збільшенням числа Re розподіл тисків буде наближатися до розподілу тиску на циліндрі, який обтікає ідеальна рідина.

Рівність нулю рівнодійних сил тиску, прикладених до циліндра за його обтікання ідеальною рідиною, можна легко довести, визначивши проекції цієї рівнодійної.

Елементарну силу тиску (рис. 3.33) можна подати формулою

$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS = -p\vec{n}r_0b d\theta,$$



де b – розмір вздовж твірної циліндра;
 \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої до поверхні циліндра нормалі.

Проекції цієї сили на координатні осі будуть дорівнювати

Рисунок 3.33 – Схема для розрахунку гідродинамічної сили, що діє на поверхню обтічного тіла

$$dF_x = -pr_0b \cos \theta d\theta;$$

$$dF_y = -pr_0b \sin \theta d\theta,$$

а проекції результуючої

$$F_x = -r_0b \int_0^{2\pi} p \cos \theta dt \quad \text{і} \quad F_y = -r_0b \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta.$$

Оскільки на поверхні циліндра

$$p = p_0 + \bar{p} \left(\frac{\rho U_0^2}{2} \right),$$

де $\bar{p} = 1 - 4\sin^2\theta$, то

$$F_x = -r_0 b \int_0^{2\pi} \left[p_0 + (1 - 4\sin^2\theta) \frac{\rho U_0^2}{2} \right] \cos\theta \, d\theta.$$

Обчислюючи інтеграл, переконуємося, що $F_x = 0$. Аналогічно знаходимо, що $F_y = 0$.

Отже, обтікаючи круглий циліндр прямолінійним у нескінченності безвихровим потоком, рівнодійна сила тиску на поверхні циліндра дорівнює нулю. Цей результат відомий у гідромеханіці як парадокс Даламбера. Але він є парадоксальним лише за зіставлення з експериментальними даними, які завжди фіксують наявність сили, що виникає з боку потоку на будь-яке обтічне тіло. Проте з погляду теорії ідеальної рідини цей результат є повністю логічним унаслідок тієї ідеалізації, яку ми допустили, виключивши з розгляду сили в'язкості, які є причиною різкої відмінності теоретичного розподілу швидкостей поблизу поверхні циліндра і пов'язаного з ним розподілу тисків. Крім того, сили в'язкості проявляються безпосередньо у вигляді дотичних напружень на поверхні обтічного тіла.

3.10.5 Циркуляційне обтікання круглого циліндра

Накладаємо на безциркуляційний потік, що обтікає круглий циліндр, одиничний плоский вихор із центром на початку координат і циркуляцією Γ . Обертання вихору виберемо за годинниковою стрілкою. Унаслідок такого складування ми знову отримуємо потік, що обтікає круглий циліндр. Унаслідок складання прямолінійного потоку і диполя

утворюється течія, що має одну з ліній течії у вигляді кола L (див. рис. 3.30), яку ми взяли як слід поверхні циліндра. Але і в плоского вихору лінії течії – також кола L . Отже, серед них знайдеться лінія течії L' , яка буде збігатися з L . Оскільки вектори швидкостей у збіжних точках L' і L колінеарні, то нова лінія течії, отримана внаслідок складання, також буде колом того ж самого радіуса, і ми знову беремо її за слід поверхні циліндра. Інші лінії течії змінять свою форму.

Комплексний потенціал нової течії має вигляд

$$W = W_{\text{прям.}} + W_{\text{дип.}} + W_{\text{вих.}} = U_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad (3.89)$$

а також потенціал швидкості і функція течії

$$\begin{aligned} \varphi &= U_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \\ &= U_0 x \left(1 + \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \psi &= U_0 r \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \\ &= U_0 y \left(1 - \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Під час виведення формул для φ і ψ враховано, що

$$\begin{aligned} W_{\text{вих.}} &= \varphi + i\psi = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln r e^{i\theta} = \frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln r. \end{aligned}$$

Спряжена швидкість

$$\bar{U} = U_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z},$$

а проєкції швидкості в полярних координатах

$$\begin{aligned} U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(U_0 r \cos \theta + \frac{U_0 \cos \theta r_0^2}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right) = \\ &= U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right); \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} U_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(U_0 r \cos \theta + \frac{U_0 \cos \theta r_0^2}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right) = \\ &= -\frac{1}{r} \sin \theta U_0 \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} = \\ &= -\sin \theta U_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

На поверхні циліндра за умови $r = r_0$

$$U_r \Big|_{r=r_0} = 0 \text{ і } U_\theta \Big|_{r=r_0} = -2U_0 \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \quad (3.94)$$

З'ясуємо наявність критичних точок і їхнє положення за умови $U_\theta \Big|_{r=r_0} = 0$.

Тоді $-2U_0 \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = 0$, звідки отримуємо

$$\sin \theta_{\text{кр}} = -\frac{\Gamma}{4\pi r_0 U_0}. \quad (3.95)$$

Можливі три випадки:

1. $\Gamma < 4\pi U_0 r_0$. З формули (3.95) випливає, що $\theta_{\text{кр}}$ має два значення в третій і четвертій четвертинах, тобто на поверхні циліндра є дві критичні точки K_1 і K_2 (рис. 3.34, а).

2. $\Gamma = 4\pi U_0 r_0$. У цьому разі $\sin \theta_{кр} = -1$ або $\theta_{кр} = 270^\circ$. Отже на поверхні циліндра розташована критична точка К (рис. 3.34, б).

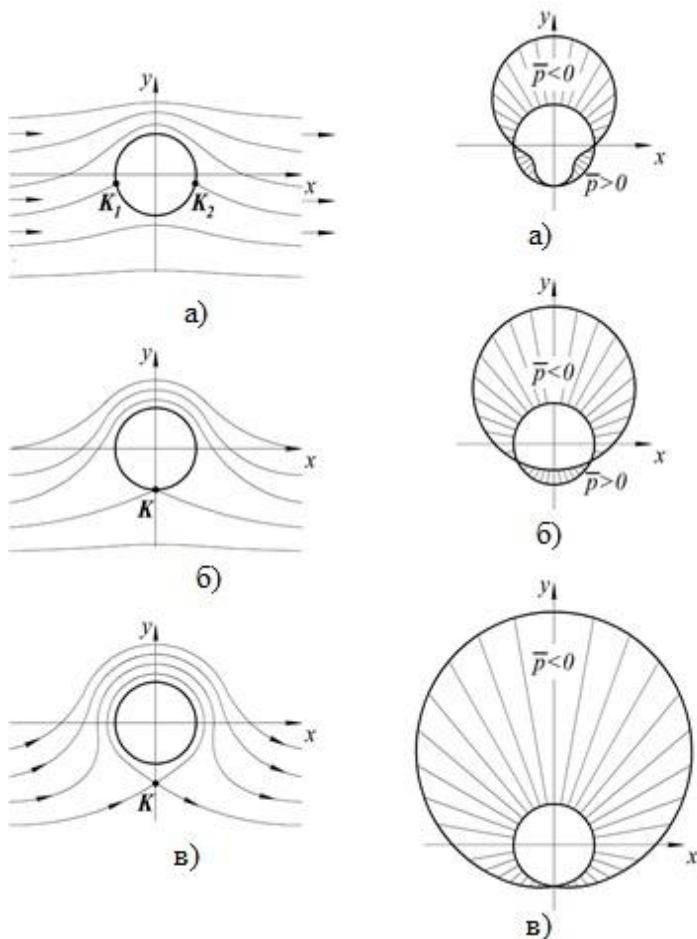


Рисунок 3.34 – Форма ліній течії поблизу круглого циліндра, що обтікає потенціальний потік із циркуляцією і розподіл тиску на поверхні циліндра за різних значень циркуляції швидкості:
 а) $\Gamma = 0,5(4\pi U_0 r_0)$; б) $\Gamma = 4\pi U_0 r_0$; в) $\Gamma = 1,5(4\pi U_0 r_0)$

3. $\Gamma > 4\pi U_0 r_0$. Оскільки $\sin \theta_{\text{кр}}$ не може бути більше за одиницю, для цього випадку на поверхні циліндра немає жодної критичної точки. Більш детальний аналіз свідчить, що точка з нульовою швидкістю розташована всередині потоку на петлеподібній лінії течії, що обмежує замкнену область поблизу поверхні циліндра, у якій відбувається циркуляційна течія (рис. 3.34, в).

Беручи до уваги формулу (3.87), для коефіцієнта тиску отримуємо

$$\begin{aligned}\bar{p} &= 1 - \frac{|U|^2}{U_0^2} = 1 - \frac{\left(2U_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right)^2}{U_0^2} = \\ &= 1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi U_0 r_0}\right)^2 = \\ &= 1 - 4 \left(\sin \theta + \frac{\Gamma}{4\pi U_0 r_0}\right)^2.\end{aligned}$$

Криві $\bar{p} = f(\theta)$ (рис. 3.34) свідчать, що епюри тисків симетричні щодо осі y , а це свідчить про рівність нулю проекції F_x сили тиску на циліндр. Проте ці епюри несиметричні щодо осі x , отже, повинна існувати не рівна нулю проекція цієї сили на вісь y .

$$\begin{aligned}F_y &= -b \int_0^{2\pi} \rho r_0 \sin \theta d\theta = -br_0 \int_0^{2\pi} \left(p_0 + \frac{\rho U_0^2}{2} \cdot \bar{p}\right) \sin \theta d\theta = \\ &= -br_0 \cdot \int_0^{2\pi} \left\{p_0 + \frac{\rho U_0^2}{2} \left[1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi U_0 r_0}\right)^2\right]\right\} \sin \theta dt.\end{aligned}$$

Обрахувавши інтеграл, отримаємо

$$F_y = -b\rho U_0 \Gamma. \quad (3.96)$$

Щоб отримати напрямок сили F_y , потрібно вектор швидкості U_0 повернути на кут $\pi/2$ у напрямку, протилеж-

ному циркуляції. Ця сила називається підйомною або поперечною силою Жуковського.

Рух, аналогічний розглядуваному, можна спостерігати за обтікання реальною рідиною тіл, що обертаються. Сила, що виникає в цьому разі, спрямована перпендикулярно швидкості на нескінченності, використовується в інженерній практиці.

Так, наприклад, в Італії були побудовані судна, які переміщувалися від дії вітру на обертовий циліндр. Якщо на обертовий циліндр буде набігати потік вітру, то до циліндра, а отже, і до корабля буде прикладена сила, спрямована по нормалі до напрямку вітру. Отже, корабель може переміщатися. Дія поперечної сили може проявлятися і за обертового руху футбольного м'яча.

Знайдемо більш загальний вираз для випадку циркуляційного обтікання вздовж довільного напрямку під кутом α до дійсної осі (рис. 3.35).

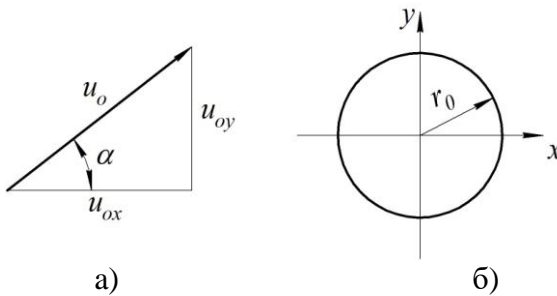


Рисунок 3.35 – Схема обтікання циліндра під кутом до дійсної осі

Для цього розглянемо спочатку безциркуляційне обтікання вздовж уявної осі. Його можна отримати, якщо повернути увесь потік на кут $\pi/2$ проти годинникової стрілки. Така операція математично буде реалізована, якщо у виразі (3.83) та інших замінити z новою змінною $z_1 = iz$.

Дійсно, множення на уявну одиницю змінює (збільшує на кут $\pi/2$) тільки аргумент комплексного числа, не змінюючи його модуля. Тому вся картина течії (рис. 3.30) у площині змінної z_1 стає повернутою на кут $\pi/2$. Комплексний потенціал цієї течії в площині z_1 матиме вигляд

$$W(z_1) = U_0 \left(\frac{z_1}{i} + \frac{ir_0^2}{z_1} \right) = -iU_0 \left(z_1 - \frac{r_0^2}{z_1} \right).$$

Тепер повернемося до площини z і складемо три течії: обтікання циліндра вздовж дійсної осі зі швидкістю U_{0x} , обтікання циліндра вздовж уявної осі зі швидкістю U_{0y} , одиночний плоский вихор із циркуляцією Γ .

Оскільки всі три течії мають лінію течії у вигляді кола $r = r_0$, то і результуючий потік матиме таку ж саму лінію течії. Для результуючого комплексного потенціалу отримуємо

$$\begin{aligned} W(z) &= U_{0x} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - iU_{0y} \left(z - \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z = \\ &= (U_{0x} - iU_{0y})z + (U_{0x} + iU_{0y}) \frac{r_0^2}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \end{aligned}$$

або

$$W(z) = \bar{U}_0 z + U_0 \frac{r_0^2}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (3.97)$$

Зрозуміло, що величина поперечної сили Жуковського за такого обтікання циліндра буде такою, як за течії вздовж дійсної осі, але напрямок її буде ортогональним до напрямку вектора

$$U_0 = U_{0x} + iU_{0y} = |U_0|e^{i\alpha}.$$

3.10.6 Застосування методу конформних відображень для побудови плоских потенціальних течій

Застосування методу конформних відображень значно розширює можливості теоретичної побудови плоских потенціальних течій.

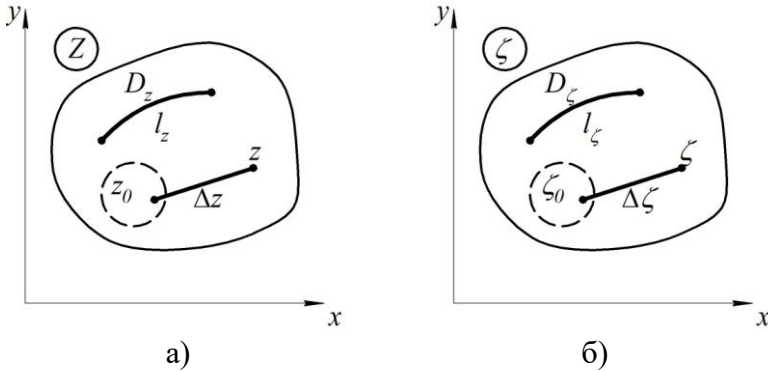


Рисунок 3.36 – Конформне відображення областей

Нагадаємо математичну основу цього методу. Нехай $\zeta = f(z)$ – аналітична функція, визначена в області D_z площини змінної z (рис. 3.36). Будемо інтерпретувати змінну ζ як комплексну координату точок площини ζ . Якщо z набуває всіх можливих значень у межах області D_z , то відповідні значення $\zeta = f(z)$ утворюють у площині ζ деяку область D_ζ , яка є відображенням області D_z . Якщо, зокрема, змінна z пробігає вздовж лінії l_z , то відповідні значення ζ утворюють l_ζ . Областями D_z і D_ζ можуть бути цілі площини z і ζ , які містять нескінченно удалену точку.

Якщо функція $f(z)$ однозначна, то кожній точці області D_z відповідає тільки одна точка області D_ζ , і таке відображення називається однозначним, а якщо однозначна зворотна функція $z = f_1(\zeta)$, то відображення називається однолисточковим. Однозначне однолисточкове відображення

називається взаємнооднозначним. Взаємнооднозначне відображення, яке реалізується аналітичною функцією, називають конформним.

Щоб установити основні властивості такого відображення, розглянемо малу околицю точки z_0 , у якій $f'(z_0) \neq 0$. Позначимо $z - z_0 = \Delta z$; $\zeta_0 = f(z_0)$; $\zeta - \zeta_0 = \Delta \zeta$; $|f'(z_0)| = m$; $\arg f'(z_0) = \theta_0$. Використовуючи зв'язок диференціалу і кінцевого приросту та обмежуючись малими першого порядку, можна записати:

$$d\zeta = f'(z_0)dz, \text{ звідки } |\Delta\zeta| = m|\Delta z|; \arg \Delta\zeta = \arg \Delta z + \theta_0.$$

Отже, будь-який малий вектор $\Delta\zeta$ за відображення може бути отриманим із відповідного малого вектора Δz за допомогою множення довжини останнього на деякий коефіцієнт m (коефіцієнт розтягнення) і повороту на кут θ_0 . Водночас коефіцієнтом розтягнення слугує модуль похідної відображальної функції, а кутом повороту – її аргумент. Оскільки це справедливо для будь-якого вектора Δz , що виходить із точки z_0 , то всі такі вектори будуть під час відображення розтягнуті або стиснені в одне і те ж саме число разів. Інакше кажучи, розглядуване відображення є перетворенням подібності в нескінченно малому.

Так, наприклад, коло малого радіуса з центром у точці z_0 після відображення перейде в коло. Будь-яка інша мала фігура перейде в собі подібну. Проте це не означає, що залишаться подібними і фігури кінцевих розмірів. Навпаки, зміна їхньої конфігурації може бути досить суттєвою.

Оскільки всі малі відрізки повертаються на один і той самий кут θ_0 , очевидно, кути між будь-якою парою з їхнього числа не зміняться за величиною і напрямком обрахунку. Цю властивість відображення називають збереженістю кутів.

Отже, конформне відображення має властивості збереження кутів і постійності розтягування в кожній точці, де $f'(z) \neq 0$.

Оскільки $\frac{d\zeta}{dz} = f'(z) = \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^{-1}$, то остання умова рівносильна умові існування кінцевої похідної від оберненої функції.

Якщо область D_z розташована як область деякої потенціальної течії, то, здійснюючи конформне відображення цієї області за допомогою аналітичної функції $\zeta = f(z)$, ми отримаємо область D_ζ , яку можна розглядати як область іншої (відображеної) течії. Водночас, якщо комплексний потенціал у площині ζ відомий $W(\zeta)$, то, провівши заміну змінних

$$W_\zeta(\zeta) = W_\zeta[f(z)] = W_z(z), \quad (3.98)$$

отримаємо комплексний потенціал для площини z , чого достатньо для повного опису течії.

Отже, розв'язок задачі про побудову плоского потенціального потоку методом конформного відображення зводиться до знаходження аналітичної функції, яка здійснює відображення області течії з відомим комплексним потенціалом на область із заданими границями. Способи знаходження відображальних функцій є чисто математичною проблемою і наразі не розглядаються, тому в наведених у подальшому прикладах будемо використовувати відображальні функції, відомі з математики.

Установимо зв'язок між гідродинамічними величинами у двох потоках, отриманих один з одного за допомогою конформного відображення. Згідно з правилом диференціювання складних функцій маємо

$$\overline{U}_z = \frac{dW_z}{dz} = \frac{dW_\zeta}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \overline{U}_\zeta \frac{d\zeta}{dz}, \quad (3.99)$$

де \overline{U}_z і \overline{U}_ζ – відповідні спряжені швидкості в площинах z і ζ .

Оскільки $\frac{d\zeta}{dz}$ є загалом комплексним числом, то з (3.99) випливає, що за конформного відображення швидкості змінюються в кожній точці як за величиною, так і за напрямком.

Дійсно, згідно з (3.99)

$$|\overline{U}_z| = |\overline{U}_\zeta| \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \text{ і } \arg \overline{U}_z = \arg \overline{U}_\zeta + \arg \frac{d\zeta}{dz}. \quad (3.100)$$

Якщо в якій-небудь точці або частині області течії $\arg \frac{d\zeta}{dz} = 0$, тобто $\frac{d\zeta}{dz}$ є дійсним числом, то $\arg \overline{U}_z = \arg \overline{U}_\zeta$, що означає однакову спрямованість векторів \overline{U}_z і \overline{U}_ζ щодо їхніх осей координат.

Зв'язок між циркуляціями в площинах z і ζ може бути поданий у вигляді

$$\begin{aligned} \Gamma_z &= \operatorname{Re} \oint_{L_z} \overline{U}_z dz = \operatorname{Re} \oint_{L_z} \frac{dW}{dz} dz = \\ &= \operatorname{Re} \oint_{L_z} \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} dz = \operatorname{Re} \oint_{L_z} \overline{U}_\zeta d\zeta = \Gamma_\zeta. \end{aligned}$$

Отже, за конформного відображення потоків циркуляція швидкості не змінюється.

Також можна довести, що витрата рідини через будь-який замкнутий контур залишається постійною за конформного відображення. Дійсно,

$$\begin{aligned} Q_z &= \operatorname{Im} \oint_{L_z} \overline{U}_z dz = \operatorname{Im} \oint_{L_z} \frac{dW}{dz} dz = \\ &= \operatorname{Im} \oint_{L_z} \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} dz = \operatorname{Im} \oint_{L_z} \overline{U}_\zeta d\zeta = Q_\zeta. \end{aligned}$$

3.10.7 Циркуляційне обтікання пластини плоским потенціальним потоком

Нехай необхідно знайти комплексний потенціал потоку, що обтікає зі швидкістю в нескінченності $U_0 = U_{0x} + iU_{0y}$ плоску пластину шириною $2a$ (рис. 3.37, а). Розмір пластини і потоку на нормалі до площини креслення беремо рівними одиниці. Відповідно до загальної схеми методу конформних відображень у допоміжній площині ζ розглянемо течію, комплексний потенціал якої W_ζ відомий і область якої можна конформно відобразити на область z . Такою течією є потік, що обтікає круглий циліндр радіуса a (рис. 3.37, б).

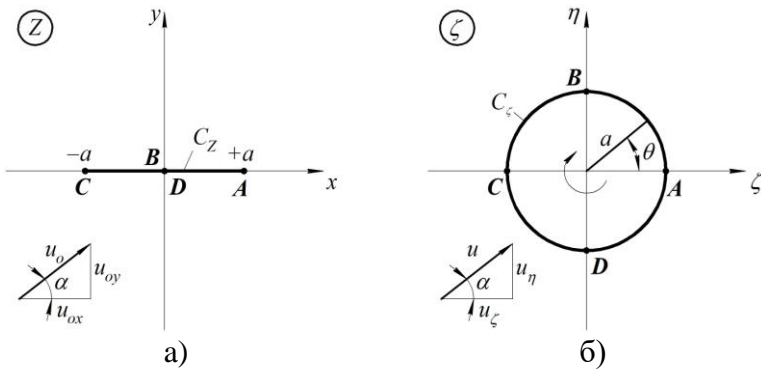


Рисунок 3.37 – Схема для розв’язання задачі про циркуляційне обтікання пластини

Дійсно, функція виду

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right), \quad (3.101)$$

яка називається функцією Жуковського, є аналітичною всюди, крім точки $\zeta = 0$, і відображає зовнішність кола $r = a$ на зовнішність прямолінійного відрізка (пластини) довжиною $2a$, розташованого вздовж дійсної осі площини z .

Щоб переконатися в цьому, врахуємо, що на контурі кола C_ζ (рис. 3.37, б) $\zeta = ae^{i\theta}$. Згідно з (3.101) у точках контура C_z , у який перетворюється коло, буде

$$z = x + iy = \frac{a}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = a \cos \theta,$$

звідки

$$x = a \cos \theta; y = 0.$$

За зміну θ від 0 до π величина x змінюється від a до $-a$, тобто верхня половина кола переходить у верхню половину пластини. Нижній половині кола ($\pi < \theta \leq 2\pi$) відповідає нижній бік пластини. Відповідні точки цих контурів подано на рисунку 3.37, а і б. З (3.101) випливає, що нескінченно віддалена точка площини ζ переходить у нескінченно віддалену точку площини z . Водночас відображення конформно поза колом $r = a$ і у всіх точках кола, крім точок $\zeta = \pm a$, де конформність порушується внаслідок того, що

$$\frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\pm a} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right) \Big|_{\zeta=\pm 2a} = 0.$$

Нехай тепер циліндр у площині змінної $\zeta = \xi + i\eta$ обтікається потоком із деякою швидкістю в нескінченності $U = U_\xi + iU_\eta$ і циркуляцією Γ . Комплексний потенціал такого потоку нам відомий і згідно з (3.97) має вигляд

$$W_\zeta = \overline{U_\zeta} + U \frac{a^2}{\zeta} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta. \quad (3.102)$$

Розв'язуючи відображальну функцію щодо ξ , знаходимо

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - a^2}. \quad (3.103)$$

Знак «+» перед коренем вибраний з умови відповідності нескінченно віддалених точок. Замінюючи у формулі (3.102) змінну ζ на z згідно з (3.103), отримаємо вираз для комплексного потенціалу в площині z

$$W_z = \bar{U} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) + U \frac{a^2}{z + \sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right)$$

або після спрощень

$$W_z = 2U_\xi z - i2U_\eta \sqrt{z^2 - a^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right).$$

Цей вираз не може бути кінцевим, оскільки в нього входить швидкість U , не задана в умові задачі і введена нами як допоміжна величина. Для її знаходження розрахуємо спряжену швидкість

$$\bar{U}_z = \frac{dW_z}{dz} = 2U_\xi - i2U_\eta \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (3.104)$$

значення якої на нескінченності задано $\bar{U}_0 = U_{0x} - iU_{0y}$.

Під час виведення формули (3.104) враховано, що

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\ln \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) \right) &= \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - a^2}} \left(1 + \frac{1 \cdot 2z}{2\sqrt{z^2 - a^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Згідно з (3.104)

$$U_{0x} - iU_{0y} = \bar{U}_z \Big|_{z=\infty} = 2U_\xi - i2U_\eta.$$

Отже, $2U_\xi = U_{0x}$; $2U_\eta = U_{0y}$.

Отже, формули для визначення шуканого комплексного потенціалу і спряженої швидкості мають вигляд

$$W_z = U_{0x}z - iU_{0y}\sqrt{z^2 - a^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}); \quad (3.105)$$

$$\bar{U}_0 = U_{0x} - i \frac{2\pi U_{0y}z - \Gamma}{2\pi\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (3.106)$$

Отже, розподіл швидкостей у потоці залежить від циркуляції Γ , і за задовільного її значення в точках $z = \pm a$ швидкість стає нескінченною, тобто ці точки є особливими. Беручи $\bar{U}_z = 0$, можна впевнитися, що на пластині є дві критичні точки, які за $\Gamma = 0$ розташовані симетрично щодо уявної осі і мають координати $\pm \cos \alpha$ (рис. 3.38).

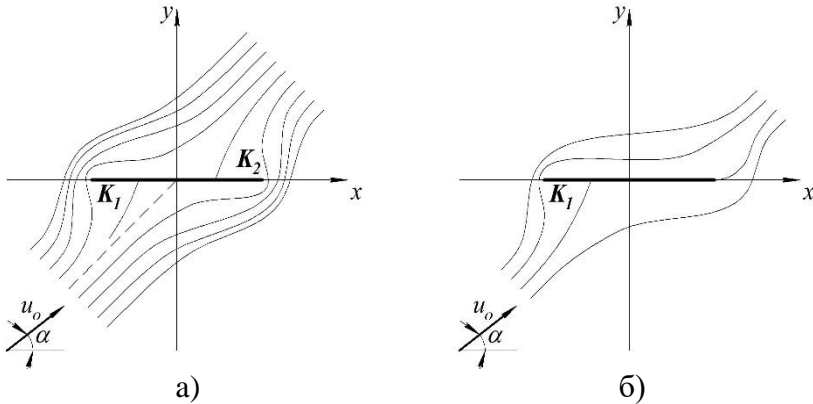


Рисунок 3.38 – Обтікання пластини потенціальним потоком: а) $\Gamma = 0$; б) $\Gamma = 2\pi U_{0y}a$

Оскільки обтікання пластини циркуляційне, то згідно з теоремою Жуковського на ній виникає поперечна сила, що дорівнює $\rho |U_0| \Gamma$. Величина циркуляції тут не визначена і в нашій теоретичній схемі може бути вибрана довільно. Проте, очевидно, що тільки одне значення циркуляції може дати істинну величину сили Жуковського, яка збігається з експериментом.

Постулат, який дозволяє усунути невизначеність величини циркуляції, а отже, і підйомної сили сформулювали С. О. Чаплигін і М. Є. Жуковський. Вони звернули увагу на те, що за обтікання із загостреною кромкою (зокрема за обтікання пластин), згідно з теоретичним рішенням, у точці загострення швидкість стає нескінченною, тоді як за реального обтікання це фізично не можливо. Усунути цю невідповідність теоретичної схеми досліду можливо, вибравши визначене число циркуляції.

Згідно з постулатом Жуковського – Чаплигіна істинною величиною циркуляції швидкості повинна бути та, за якої швидкість у точці загострення обтічного тіла має кінцеве значення.

На прикладі плоскої пластини покажемо, як використати цей постулат. З формули (3.106) випливає, що в точці $z = +a$ (задня загострена кромка обтічного тіла) швидкість стає нескінченною за будь-якого значення Γ , крім того, за якого одночасно перетворюються на нуль чисельник і знаменник другого члена. Очевидно, цим значенням циркуляції є $\Gamma = 2\pi U_{0y} a$, підставивши які в (3.106), знайдемо

$$\overline{U}_z = U_{0x} - iU_{0y} \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}. \quad (3.107)$$

Тепер у точці $z = +a$ буде $\overline{U}_z \Big|_{z=a} = U_{0x}$, тобто кінцеве значення швидкості. Зазначимо, що вибором указанного значення циркуляції не зникає особлива точка на передній кромці пластини, адже згідно з (3.107) маємо $\overline{U}_z \Big|_{z=-a} = \infty$.

На рисунку 3.38 подано конфігурації ліній течії за обтікання пластини без циркуляції і з циркуляцією, вибраної згідно з постулатом Жуковського – Чаплигіна. Можна бачити, що для останнього випадку характерний плавний схід ліній течії з пластини і є тільки одна критична точка K_1 ; друга в цьому разі суміщається з точкою загострення.

Підйомну силу Жуковського, що відповідає вибраному значенню циркуляції, подаємо у вигляді

$$F_{\Pi} = \rho |U_0| \Gamma = \rho |U_0| 2\pi U_{0y} a,$$

або, оскільки $U_{0y} = |U_0| \sin \alpha$,

$$F_{\Pi} = 2\pi \sin \alpha \cdot 2a \frac{\rho |U_0|^2}{2}.$$

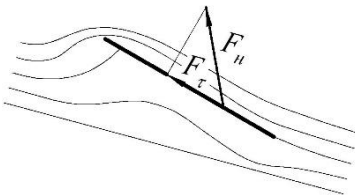
Позначимо $C_y = 2\pi \sin \alpha$; $S = 2a$. Тоді отримаємо універсальну формулу для гідродинамічної сили

$$F_{\Pi} = C_y S \frac{\rho |U_0|^2}{2}. \quad (3.108)$$

Величину C_y називають коефіцієнтом підйомної сили, а S виконує роль характерної площі обтічного тіла.

Експериментальна перевірка теоретичної формули для коефіцієнта підйомної сили пластини $C_y = 2\pi \sin \alpha$ доводить, що для достатньо тонких тіл із загостреною задньою кромкою (крилових профілів), за умови обтікання яких забезпечується плавне сходження струмин із цієї кромки, указана формула наближено може бути застосована за малих кутах атаки ($\alpha < 12^\circ$).

Згідно з теоремою Жуковського сила F_{Π} нормальна до вектора швидкості U_0 і, відповідно, дає складову F_t у



площині пластини, спрямовану до вхідної кромки (рис. 3.39). Ця складова сили має назву «підсмоктувальної» сили. Цей результат є парадоксальним, оскільки всі елементарні сили тиску, результуючою яких є сила Жуковського, нормальні до поверхні пластини.

Рисунок 3.39 –
Схема утворення
«підсмоктувальної» сили
за умови обтікання пластини
з циркуляцією

Пояснення цьому факту можна дати, якщо уявити, що пластина має кінцеву, хоч і малу товщину з плавно закругленим (лобовим) кінцем і загостреним заднім. За умови обтікання такого тіла швидкості на його лобовій частині будуть досить великими (для нескінченно тонкої пластини – нескінченно великими), а на іншій частині поверхні – кінцевими. Відповідно, тиски на лобовій частині будуть досить незначними, а на іншій поверхні – кінцевими. Оскільки поверхня тіла не є площиною, елементарні сили тиску, нормальні до його поверхні, дають складові в напрямку осі x , сума яких і утворює «підсмоктувальну» силу F_T . Зменшуючи товщину тіла до нуля, отримуємо обтікання пластини.

Дійсно, у реальній рідині обтікання загостреної передньої кромки з огинанням її за схемою рисунка 3.39, здійснитися не може. Унаслідок впливу в'язкості і градієнта тиску потік відривається від твердої поверхні, утворюючи вихори, які зносяться вниз за течією, і структура обтікання різко змінюється.

3.10.8 Постановка загальної задачі про обтікання крилового профілю

Криловими називають профілі циліндричних тіл із закругленою передньою кромкою і загостреною задньою. Таку форму мають крила літальних апаратів, лопаті гребних гвинтів і турбомашин. Ця форма забезпечує мінімальний лобовий опір і максимальну підйомну силу.

Розглянемо принципову схему розв'язку задачі обтікання довільного крилового профілю, засновану на методі конформних відображень.

Нехай у площині z заданий контур крилового профілю і комплексна швидкість $U_0 = |U_0|e^{i\alpha}$ в нескінченності потоку, що його обтікає. Для знаходження комплексного потенціалу W_z виберемо в площині ζ допоміжний потік, комплексний потенціал якого нам відомий. Як такий потік

можна взяти потік зі швидкістю в нескінченності $U = |U|e^{i\alpha}$, що обтікає круглий циліндр радіуса a (рис. 3.40). Далі проведемо відображення зовнішнього циліндра на зовнішність профілю за допомогою аналітичної функції $z = F(\zeta)$.

Знаходження відображальної функції $z = F(\zeta)$ для заданого контура – це самостійна і складна задача, яка часто має тільки наближений розв’язок. Допустимо, що ця функція знайдена.

Раніше було з’ясовано

$$W_\zeta = \overline{U}_\zeta + U \frac{a^2}{\zeta} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta. \quad (3.109)$$

Якщо відображальну функцію $z = F(\zeta)$ можна розрахувати щодо ζ , то, виключаючи цю змінну із виразу для W_ζ , знайдемо комплексний потенціал W_z . В іншому разі розглядаємо змінну ζ як параметр i , відповідно, маємо параметричний розв’язок задачі. Проте необхідно ще знайти постійні U , a і Γ , які повинні бути виражені через задані в умові задачі величини.

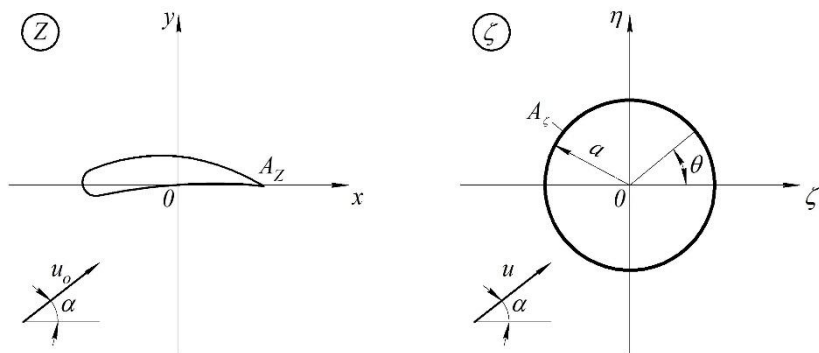


Рисунок 3.40 – Схема для побудови потенціального плоского потоку, що обтікає криловий профіль заданої форми

Швидкість U можна знайти, використовуючи (3.99) між спряженими швидкостями у відображуваних потоках. Якщо знайдена зворотна функція $\zeta = f_{-1}(z)$, то, диференціюючи вираз W_z і беручи $z \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\overline{U}_0 = \left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=\infty} = \overline{U} \left. \frac{df_{-1}(z)}{dz} \right|_{\infty}.$$

Тут, як про це було вказано в попередніх пунктах, $\left. \frac{df_{-1}(z)}{dz} \right|_{z=\infty} = m_1$ – дійсне число і, відповідно,

$$|\overline{U}_0| = |\overline{U}|m_1, \quad (3.110)$$

звідки визначається $|\overline{U}|$, а отже, і вектор U .

У разі параметричного розв'язку, диференціюючи (3.109) і беручи $\zeta \rightarrow \infty$, знаходимо

$$\overline{U} = \left. \frac{dW_\zeta}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} = \overline{U}_0 \left. \frac{df}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty}, \quad (3.111)$$

де $\left. \frac{df}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} = \frac{1}{m_1}$ – дійсне число.

Отже, швидкість допоміжного потоку U легко знайти, якщо відома відображальна функція.

Радіус кола a може бути знайдений у процесі побудови відображальної функції. Циркуляція Γ визначається на основі постулату Жуковського – Чаплигіна і для цього не потрібно знати конкретний вид відображальної функції.

Розглянемо область поблизу точки A_z профілю в площині z і відповідної їй точки A_ζ в площині ζ (рис. 3.41). За умови відображення в цих точках порушується конформність перетворення (збереження кутів), оскільки вихідні з точки A_ζ відрізки кола утворюють кут π , а їм відповідні відрізки контура профілю $N'_z A_z$ і $N''_z A_z$ – кут $2\pi - \delta$.

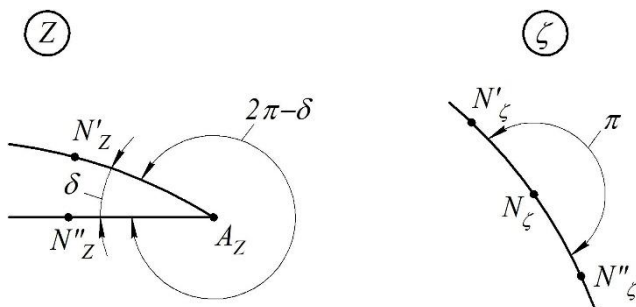


Рисунок 3.41 – Конформне відображення малої області поблизу точки загострення крилового профілю і вибір циркуляції за постулатом Жуковського – Чаплигіна

Виділимо поблизу точки A_z малу область, зовнішню для круга радіуса a . Її можна конформно відобразити на малу область поблизу точки A_ζ за допомогою функції

$$z - z_{A_z} = M \left(\zeta - \zeta_{A_\zeta} \right)^{\frac{2\pi - \delta}{\pi}}, \quad (3.112)$$

де M – дійсне число.

Дійсно, точка ζ_{A_ζ} згідно з виразом (3.112) відповідає точці z_{A_z} . Крім того, якщо використати показникову форму комплексних чисел, то можна записати

$$z - z_{A_z} = r_1 e^{i\theta_1} \text{ і } \zeta - \zeta_{A_\zeta} = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (3.112), отримаємо

$$r_1 = M r_2^{\frac{2\pi - \delta}{\pi}} \text{ і } \theta_1 = \theta_2 \frac{2\pi - \delta}{\pi} + 2k\pi.$$

Звідси випливає, що якщо θ_2 змінюється на величину π , то θ_1 змінюється на величину $2\pi - \delta$, тобто куту $N'_\zeta A_\zeta N''_\zeta$ відповідає кут $N'_z A_z N''_z$. Отже, мала зовнішня до кола область поблизу точки A_ζ відображається на малу зо-

внiшню область поблизу точки A_z . Зв'язок між швидкостями в точках A_ζ i A_z впливає з (3.99)

$$\overline{U}_{A_\zeta} = \overline{U}_{A_z} \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_{A_\zeta}}$$

або

$$\overline{U}_{A_\zeta} = \overline{U}_{A_z} M \frac{2\pi - \delta}{\pi} (\zeta - \zeta_{A_\zeta})^{\frac{\pi - \delta}{\pi}} \Big|_{\zeta=\zeta_{A_\zeta}}.$$

Згiдно з постулатом Жуковського – Чаплигiна швидкiсть \overline{U}_{A_ζ} в точцi загострення A_z кiнцева, а оскiльки останнiй множник дорiвнює нулю, то i вся права частина дорiвнює нулю $\overline{U}_{A_\zeta} = 0$. Отже, точка A_ζ , яка переходить за умови вiдображення в точку загострення, є критичною. З цiєї умови можна знайти циркуляцiю Γ . Оскiльки

$$\overline{U}_{A_\zeta} = \frac{dW_\zeta}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_{A_\zeta}},$$

то, використовуючи (3.109) i зважаючи на (3.100), отримаємо

$$\frac{\overline{U}_0}{m_1} - \frac{U_0}{m_1} \frac{a^2}{\zeta_{A_\zeta}^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi\zeta_{A_\zeta}} = 0.$$

Це рiвняння використовують для знаходження величини Γ . Оскiльки точка A_ζ на колi рiдiусом a , то можна вважати $\zeta_{A_\zeta} = ae^{i\varepsilon_0}$, де ε_0 – координатний кут точки A_ζ (рис. 3.41).

Беручи

$$U_0 = |U_0|e^{i\alpha} \text{ i } \overline{U}_0 = |U_0|e^{-i\alpha}$$

i вносячи цi вирази в останнє рiвняння, знаходимо

$$|U_0|(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} e^{-i2\varepsilon_0}) + \frac{i\Gamma m_1}{2\pi a} e^{-i\varepsilon_0} = 0.$$

Після множення на $e^{i\varepsilon_0}$ і ділення на $|U_0|$

$$e^{-i(\alpha-\varepsilon_0)} - e^{i(\alpha-\varepsilon_0)} + \frac{i\Gamma m_1}{2\pi a|U_0|} = 0$$

або

$$\Gamma = \frac{4\pi a|U_0|}{m_1} \cdot \frac{e^{i(\alpha-\varepsilon_0)} - e^{-i(\alpha-\varepsilon_0)}}{2i}.$$

Змінюючи показникові функції тригонометричними, отримуємо вираз для циркуляції

$$\Gamma = \frac{4\pi a|U_0|}{m_1} \sin(\alpha - \varepsilon_0)$$

або, вводячи позначення $\alpha - \varepsilon_0 = \alpha_0$,

$$\Gamma = \frac{4\pi a|U_0|}{m_1} \sin \alpha_0. \quad (3.113)$$

Отже, усі постійні перетворення знайдені і задачу можна вважати принципово розв'язаною. Для доведення цього рішення до практичних залежностей необхідно в кожному конкретному випадку визначати відображальну функцію $f(\zeta) = z$.

Відзначимо, що кут $\alpha_0 = 0$ за умови $\alpha = \varepsilon_0$. Оскільки водночас $\Gamma = 0$, кут $\alpha = \varepsilon_0$ називається кутом безциркуляційного обтікання.

З викладеного випливає, що якщо криловий профіль обтікає потік зі швидкістю в нескінченності, спрямований під кутом $\alpha = \varepsilon_0$ до дійсної осі, то обтікання буде безциркуляційним. У точці загострення швидкість має кінцеве значення. Водночас положення профілю щодо дійсної осі буде цілком визначеним, залежним від кута ε_0 .

3.11 Напружений стан суцільного середовища

3.11.1 Розподіл сил у суцільному середовищі.

У динаміці суцільних середовищ зазвичай виділяють два класи сил, що діють на частинки середовища: об'ємні (інколи їх ще називають масовими) і поверхневі. До перших сил належать такі: сила ваги, інерції, електростатичне притягування або відштовхування, сили дії магнітного або електричного поля на частинки середовища. Прикладами поверхневих сил є сили в'язкості і тиску.

Поверхневі сили є результатом безпосередньої дії на частинки суцільного середовища сусідніх із ними частинок або інших тіл. Для якісного і кількісного описування поверхневих сил слугує поняття про напруження.

У рідині, яка перебуває в стані спокою або рухається, виділимо об'єм W ; проведемо довільну поверхню ω (рис. 3.42, а) і уявно відкинемо частину рідини, розташовану праворуч від цієї поверхні. Щоб залишений об'єм рідини за цієї умови операції зберіг свій стан рівноваги або руху, прикладемо до нього на поверхні розподілену систему сил, еквівалентну дії відкинutoї частини W_2 рідини на залишену W_1 .

Нехай на частку елементарної площадки $\Delta\omega$, що характеризується одиничним вектором нормалі \vec{n} , приходиться сила $\Delta\vec{P}$.

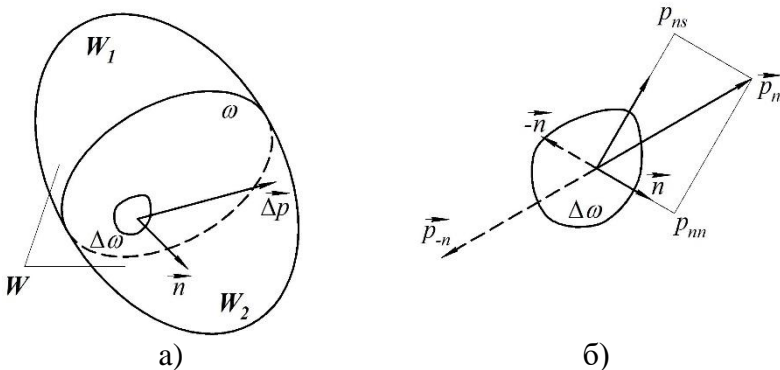


Рисунок 3.42 – Напруження поверхневих сил

Тоді

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta\omega} = \vec{p}_n \quad (3.114)$$

називається напруженням поверхневих сил у тій точці, до якої стягується площинка $\Delta\omega$. Значимо, що індекс n позначає не проєкцію (\vec{p}_n – вектор), а орієнтацію площинки $\Delta\omega$ у просторі, тобто вказує, що \vec{p} – напруження на площинці з нормаллю n .

Щодо площинки вектор \vec{p}_n загалом може бути спрямований будь-як і тому він має нормальну та дотичну складові.

Як бачимо з рисунка 3.42, б

$$\vec{p}_n = p_{ns} \vec{S}^{\sigma} + p_{nn} \vec{n}, \quad (3.115)$$

де p_{nn} – проєкція вектора \vec{p}_n на напрямок нормалі;

p_{ns} – проєкція вектора \vec{p}_n на напрямок дотичної до площадки $\Delta\omega$.

В окремому випадку може бути $p_{ns} = 0$ і $\vec{p}_n = p_{nn} \vec{n}$. У механіці рідини і газу напруження \vec{p}_n зазвичай вважають додатним, якщо воно спрямоване в бік нормалі, зовнішньої до розглядуваного об'єму, тобто є розтяжним напруженням. Оскільки в кожній точці поверхні ω , проведеної в середині рідини, можна вказати дві нормалі: \vec{n} і $-\vec{n}$ (рис. 3.43, б), то їм будуть відповідати два напруження: \vec{p}_n і \vec{p}_{-n} .

Тоді сили $\vec{p}_n \Delta\omega$ і $\vec{p}_{-n} \Delta\omega$ будуть виражати взаємну дію через площинку $\Delta\omega$ об'ємів рідини, що розташовані по обидва боки від неї. Згідно з третім законом Ньютона $\vec{p}_n \Delta\omega = -\vec{p}_{-n} \Delta\omega$, або $\vec{p}_n = \vec{p}_{-n}$.

Для характеристики масових сил введемо поняття про густину їхнього розподілу. Якщо на елементарний об'єм рідини ΔW діє сила $\Delta \vec{f}$, то

$$\vec{F} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta W \rho}. \quad (3.116)$$

\vec{F} називається густиною масових сил у тій точці, куди стягується об'єм ΔW . Очевидно, що вектор \vec{F} є масовою силою, яка віднесена до одиниці маси рідини і має розмірність прискорення.

У подальшому проєкції F на осі декартових прямокутних координат позначимо через $F_x = X$, $F_y = Y$, $F_z = Z$.

Відзначимо основну відмінність між векторами \vec{F} і \vec{P}_n : тоді як вектор \vec{F} є однозначною векторною функцією точок простору і часу, тобто утворює векторне поле, вектор \vec{P}_n набуває в кожній точці простору нескінченну множину значень залежно від орієнтації площинки, до якої прикладено напруження і, в такий спосіб, векторне поле не утворює.

3.11.2 Властивості напружень поверхневих сил

Виділимо в рухомій рідині елементарний об'єм ΔW у вигляді тетраедра, три грані якого $\Delta\omega_x$, $\Delta\omega_y$ і $\Delta\omega_z$ лежать у координатних площинах, а четверта $\Delta\omega_n$ нормаль на напрямку \vec{n} (рис. 3.43). Звернемо увагу на те, що грані $\Delta\omega_x$, $\Delta\omega_y$ і $\Delta\omega_z$ є від'ємними площинками, оскільки нормальми

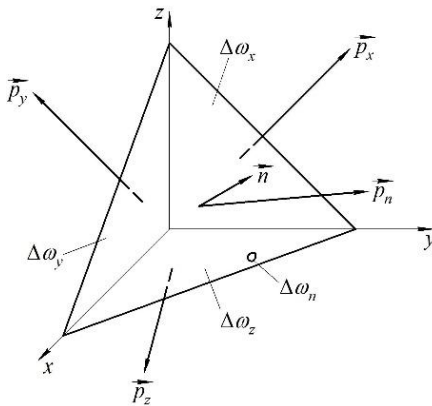


Рисунок 3.43 – Напруження, які діють на грані тетраедра

для них служать вектори $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ і $-\vec{k}$.

Нехай \vec{p}_x , \vec{p}_y , \vec{p}_z , \vec{p}_n – напруження, що діють на відповідних гранях тетраедра; \vec{a} – вектор прискорення його центру мас. Тоді векторне рівняння руху рідинного тетраедра, що виражає другий закон Ньютона, матиме вигляд

$$\vec{F}\rho\Delta W + \vec{p}_n\Delta\omega_n - \vec{p}_x\omega_x - \vec{p}_y\omega_y - \vec{p}_z\omega_z = a\rho\Delta W.$$

Урахуємо, що $\frac{\Delta\omega_x}{\Delta\omega_n} = \cos(x, n) = \alpha_{xn}$ тощо.

Тоді, розділивши всі члени останнього рівняння на $\Delta\omega_n$ і беручи до уваги, що $\lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta S_n} = 0$, на границі отримуємо

$$\lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \frac{\vec{F}\rho\Delta W}{\Delta\omega_n} + \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_n\Delta\omega_n}{\Delta\omega_n} - \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_x\Delta\omega_x}{\Delta\omega_n} - \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_y\Delta\omega_y}{\Delta\omega_n} - \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_z\Delta\omega_z}{\Delta\omega_n} = \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \frac{\vec{a}\rho\Delta W}{\Delta\omega_n},$$

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x\alpha_{xn} + \vec{p}_y\alpha_{yn} + \vec{p}_z\alpha_{zn}. \quad (3.117)$$

Отже, напруження на будь-якій площинці $\Delta\omega_n$ може бути виражене через напруження на трьох взаємоортогональних площинках, які можна вибрати за координатні. Співвідношення (3.117) у проєкціях на осі координат матиме вигляд

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\alpha_{xn} + p_{yx}\alpha_{yn} + p_{zx}\alpha_{zn}, \\ p_{ny} &= p_{xy}\alpha_{xn} + p_{yy}\alpha_{yn} + p_{zy}\alpha_{zn}, \\ p_{nz} &= p_{xz}\alpha_{xn} + p_{yz}\alpha_{yn} + p_{zz}\alpha_{zn}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

За взятих позначень відзначимо, що перший індекс за напружень p позначає вісь, ортогонально до якої зорієнтована площинка, другий індекс – вісь, на яку спроектоване напруження. Так, наприклад, p_{xz} позначає проєкцію на вісь z напруження, прикладеного до площинки, перпендикулярної до осі x .

Величини з однаковими індексами p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} , що є проєкціями векторів напружень $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ на нормалі до відповідних площинок. Їх називають нормальними напруженнями, а різноманітні індекси означають дотичні напруження.

Наприклад, p_{xz} є проєкція на вісь z напруження \vec{p}_x , прикладеного до площинки, нормальної до осі x .

Між дотичними напруженнями існує зв'язок

$$p_{xy} = p_{yx}; p_{yz} = p_{zy}; p_{zx} = p_{xz},$$

який називається парністю дотичних напружень. Отже, напружений стан рідини в точці визначається шістьма незалежними скалярними величинами, три з яких є нормальними напруженнями, а три – дотичними. Сукупність дев'яти величин типу p_{ij} , які пов'язані співвідношенням (3.118), утворюють тензор напружень, для якого величини p_{ij} є скалярними компонентами, а $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ – векторними.

У реальних рідинах нормальні напруження можуть створюватися як тиском одних частинок на інші, так і дією сил в'язкості. Дотичні напруження є результатом дії сил в'язкості і залежить від тиску тільки тому, що від нього незначною мірою залежить коефіцієнт в'язкості. Для моделі ідеальної рідини, у якій всі дотичні напруження дорівнюють нулю, повні напруження спрямовані по нормалі до відповідних площинок і згідно з (3.118) виражаються формулами

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\alpha_{nx}, \\ p_{ny} &= p_{yy}\alpha_{ny}, \\ p_{nz} &= p_{zz}\alpha_{nz}. \end{aligned} \tag{3.119}$$

Водночас напруження повинні бути стискувальними, тобто спрямованими за внутрішніми нормаллями, оскільки розтягувальних зусиль ідеальна рідина, як і реальна рідина, не витримає. Тому величини p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} можна розрахувати із співвідношення

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \vec{p}_n \vec{i} = p_n \cos(n x) = p_n \alpha_{nx}, \\ p_{ny} &= p_n \alpha_{ny}, \\ p_{nz} &= p_n \alpha_{nz}. \end{aligned} \tag{3.120}$$

Порівнюючи (3.119) і (3.120), отримуємо

$$p_n = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}.$$

Ці рівності свідчать, що за відсутності дотичних напружень нормальні напруження не залежать від орієнтації площинок. Величина p

$$p = -p_n = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz} \quad (3.121)$$

називається гідродинамічним тиском у точці.

Очевидно, що вектор напруження в цьому разі можна подати у вигляді

$$p_n = -p\vec{n}.$$

Знак мінус свідчить, що напруження спрямоване за внутрішньою нормаллю, тобто є стискувальним.

Потрібно відзначити, що дотичні напруження дорівнюють нулю в будь-якій в'язкій рідині, які перебувають у стані спокою, оскільки в'язкість проявляється тільки за наявності відносних переміщень шарів рідини. Отже, отриманий вище висновок про незалежність нормальних напружень від орієнтації площадок справедливий для будь-якої рідини, що перебуває в стані спокою. Тиск у цьому разі називається гідростатичним.

3.11.3 Рівняння руху рідини в напруженнях

Для виведення рівнянь руху рідини виділимо довільний об'єм рідини W , що обмежений поверхнею ω , і запишемо для нього рівняння, яке виражає закон кількості руху – похідна за часом кількості руху системи дорівнює сумі зовнішніх сил, що діють на неї.

Оскільки на кожен одиницю маси діє сила \vec{F} , то головний вектор масових сил виражається інтегралом

$$\int_W \rho \vec{F} dW.$$

Головний вектор поверхневих сил отримаємо, складаючи елементарні поверхневі сили $\vec{p}_n d\omega$, розподілені на поверхні ω

$$\int_{\omega} \vec{p}_n d\omega.$$

Кількість руху \vec{K} маси рідини в об'ємі W і її похідна виражаються інтегралами

$$\vec{K} = m\vec{U} = \int_W \rho \vec{U} dW;$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho \vec{U} dW,$$

де \vec{U} – швидкість руху центру мас об'єму W .

Рівняння кількості руху запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \vec{U} dW = \int_W \rho \vec{F} dW + \int_{\omega} \vec{p}_n d\omega.$$

Ліву частину цього рівняння можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \vec{U} dW = \int_W \frac{d\vec{U}}{dt} \rho dW + \int_W \vec{U} \frac{d}{dt} (\rho dW).$$

Беручи масу об'єму рідини постійною, маємо

$$\frac{d}{dt} (\rho dW) = 0.$$

Отже, рівняння кількості руху набуває вигляду

$$\int_W \rho \frac{d\vec{U}}{dt} dW = \int_W \rho \vec{F} dW + \int_\omega \vec{p}_n d\omega. \quad (3.122)$$

Це рівняння являє собою інтегральну форму рівняння руху рідини. Щоб отримати його диференціальну форму, перетворимо поверхневий інтеграл, який входить у формулу (3.122), в об'ємний. Для цього врахуємо, що згідно з (3.117)

$$\int_\omega \vec{p}_n d\omega = \int_\omega [\vec{p}_x \cos(n, x) + \vec{p}_y \cos(n, y) + \vec{p}_z \cos(n, z)] d\omega.$$

Зважаючи на відомі з векторного аналізу формули, справедливі для будь-якого вектора \vec{G}

$$\int_\omega \vec{G} \cos(n, x) d\omega = \int_W \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} dW;$$

$$\int_\omega \vec{G} \cos(n, y) d\omega = \int_W \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} dW;$$

$$\int_\omega \vec{G} \cos(n, z) d\omega = \int_W \frac{\partial \vec{G}}{\partial z} dW,$$

отримаємо

$$\int_\omega \vec{p}_n d\omega = \int_W \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dW.$$

Вносячи цей вираз у (3.122), знаходимо

$$\int_W \left(\rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} - \rho \frac{d\vec{U}}{dt} \right) = 0.$$

Оскільки це рівняння повинно виконуватися для будь-якого об'єму W , то з рівності нулю інтеграла випливає рівність нулю підінтегральної функції.

Отже,

$$\rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} = \rho \frac{d\vec{U}}{dt}. \quad (3.123)$$

Ця векторна форма рівняння руху рідини в напруженнях у проєкціях на осі координат рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{dU_x}{dt}, \\ Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) &= \frac{dU_y}{dt}, \\ Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) &= \frac{dU_z}{dt}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

У систему рівнянь (3.124), що називається рівнянням руху в напруженнях, входять як невідомі функції три проєкції швидкості U_x , U_y , U_z і шість незалежних компонент тензора напружень: p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , $p_{xy} = p_{yx}$, $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{zx} = p_{xz}$. Проєкції одиничних масових сил X , Y , Z , зазвичай, є відомими величинами.

Тому для нестисливої рідини система (3.124) містить дев'ять невідомих функцій і є незамкненою. Для стисливої рідини (газу) до невідомих повинна бути включена також густина ρ . Тому навіть за умови доповнення системи (3.124) рівнянням нерозривності, у яке входять густина і проєкції швидкості, цього недостатньо для того, щоб замкнути систему, і необхідно ввести до розгляду додаткові зв'язки між указаними функціями. Такі зв'язки можна встановити тільки внаслідок ухвалення деяких гіпотез, заснованих на даних дослідів, які виражають фізичні властивості рідин. Найбільш просто система (3.124) замикається для рідини, що перебуває у стані спокою.

Для рідин і газів такою фундаментальною гіпотезою є узагальнений на випадок довільного руху цих середовищ закон в'язкого тертя Ньютона

$$F = \pm \mu S \frac{dU}{dy}, \quad (3.125)$$

де μ – динамічний коефіцієнт в'язкості;

S – площа дотичних шарів;

$\frac{dU}{dy}$ – градієнт швидкості, що показує інтенсивність зміни

величини швидкості за нормаллю до її напрямку;

знак «+» або «-» вибирають залежно від градієнта швидкості.

3.11.4 Узагальнена гіпотеза Ньютона про зв'язок між напруженнями і швидкостями деформацій

Щоб підійти до обґрунтування гіпотези Ньютона (3.125), згадаємо, що напруження в рідині зводяться до напружень стискування, які не залежать від орієнтації площинки, якщо тільки відсутні дотичні напруження. Оскільки останні зумовлені в'язкістю, то напруження у в'язкій рідині за умови зменшення в'язкості до нуля ($\mu = 0$) повинні перетворюватися на тиски, незалежні від орієнтації площинки. Крім того, є підстави вважати, що в'язкість не тільки зумовлює дотичні напруження, але і впливає на величину нормальних.

Отже, повне напруження на довільно орієнтованій площинці у в'язкій рідині подамо сумою

$$\vec{P}_n = N\vec{n} + \vec{k}_n, \quad (3.126)$$

де N – деяка скалярна величина;

\vec{n} – одиничний вектор нормалі до площинки;

\vec{k}_n – в'язка частина повного напруження, незалежна від тиску (рис. 3.44).

Запишемо (3.126) стосовно трьох взаємно ортогональних (координатних) площинок

$$\vec{P}_x = -N\vec{i} + \vec{k}_x; \vec{P}_y = -N\vec{j} + \vec{k}_y; \vec{P}_z = -N\vec{k} + \vec{k}_z.$$

і вкажемо проєкції на координатні осі повних напружень

$$\begin{aligned} P_{xx} &= -N + k_{xx}; P_{xy} = k_{xy}; P_{xz} = k_{xz}, \\ P_{yx} &= k_{yx}; P_{yy} = -N + k_{yy}; P_{yz} = k_{yz}, \\ P_{zx} &= k_{zx}; P_{zy} = k_{zy}; P_{zz} = -N + k_{zz}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Згідно із законом Ньютона в'язкісні напруження за прямолінійного руху рідини пропорційні швидкості кутової деформації.

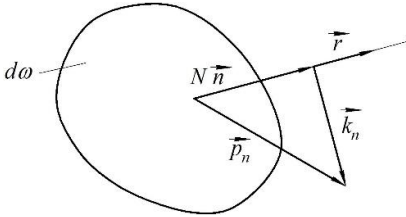


Рисунок 3.44 – Схема для обґрунтування залежності між напруженнями і швидкостями деформацій у в'язкій рідині

Узагальненням цього факту на випадок довільного руху є гіпотеза про те, що дотичні напруження, а також залежні від орієнтації площинок частини нормальних напружень пропорційні відповідним

швидкостям деформацій. Інакше кажучи, береться в усіх випадках руху рідини лінійний зв'язок між в'язкісним напруженням і швидкостями деформацій. Водночас коефіцієнтом пропорційності у формулах, що виражають цей зв'язок, повинен бути динамічний коефіцієнт в'язкості μ , оскільки за умови $\mu = 0$ усі k_{ij} повинні перетворюватися на нуль.

Отже, висловлене гіпотетичне твердження можна описати формулами

$$k_{xx} = 2\mu \frac{\partial U_x}{\partial x}; k_{yy} = 2\mu \frac{\partial U_y}{\partial y}; k_{zz} = 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z};$$

$$\begin{aligned}
 k_{xy} &= k_{yx} = \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right); \\
 k_{yz} &= k_{zy} = \mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right); \\
 k_{zx} &= k_{xz} = \mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right).
 \end{aligned}
 \tag{3.128}$$

Щоб визначити введено вище скалярну величину N , знайдемо середнє арифметичне з нормальних напружень на трьох координатних площинках.

Згідно з (3.127)

$$\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -N + \frac{1}{3}(k_{xx} + k_{yy} + k_{zz}),$$

звідки з урахуванням (3.128)

$$N = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{U}.
 \tag{3.129}$$

Можна показати, що в даній точці рідини сума $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ має одне і теж саме значення для будь-яких трьох взаємоортогональних площинок, що проходять через точку, тобто не залежать від орієнтації цих площинок. Інакше кажучи, ця сума має властивість тиску. Тому доцільно ухвалити гіпотетичні твердження про те, що середнє арифметичне з нормальних напружень за трьома взаємоортогональними площинками, які проходять через одну точку, є взятий із протилежним знаком гідродинамічний тиск у цій точці, тобто

$$\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -p,
 \tag{3.130}$$

і тому

$$N = -p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{U}.$$

Твердження (3.130) не може бути точно доведено і є гіпотезою, яку можна вважати підтвердженою всією прак-

тикою сучасної гідромеханіки. Отже, вирази для нормальних і дотичних напружень у в'язкій рідині мають вигляд

$$\begin{aligned}
 p_{xx} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\
 p_{yy} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\
 p_{zz} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 p_{xy} &= p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\
 p_{yz} &= p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\
 p_{zx} &= p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{3.131}$$

За умови нестисливої рідини $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ вирази для нормальних напружень спрощуються

$$\begin{aligned}
 p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\
 p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\
 p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{3.132}$$

Отже, співвідношення (3.131) установлюють зв'язок між напруженнями у в'язкій рідині і швидкостями деформації. Ці зв'язки дозволяють виключити з рівняння руху (3.124) усі компоненти тензора напружень, замінивши їх тиском p і швидкостями деформацій.

3.11.5 Рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є – Стокса)

Підставляючи в рівняння руху в напруженнях (3.124) формули (3.131), отримаємо

$$\begin{aligned}
\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \\
+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \vec{u}) = \rho \frac{du_x}{dt}; \\
\rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \\
+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \operatorname{div} \vec{u}) = \rho \frac{du_y}{dt}; \\
\rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \operatorname{div} \vec{u}) = \rho \frac{du_z}{dt}.
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Ці рівняння називаються рівняннями Нав'є – Стокса. Вони описують рух в'язких стисливих рідин і газів.

Рівняння для опису руху нев'язких рідин і газів легко отримати з рівняння Нав'є – Стокса як окремий випадок за умови $\mu = 0$; для нестисливих рідин беруть $\rho = \text{const}$.

Система рівняння Нав'є – Стокса незамкнута, оскільки містить шість невідомих: u_x , u_y , u_z , p , ρ і μ . Ще одним рівнянням, що зв'язує ці невідомі, є рівняння нерозривності

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Як рівняння, які замикають систему, використовуються рівняння стану середовища і рівняння залежності в'язкості від параметрів стану.

Для нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$) здебільшого в'язкість можна вважати постійною, що дозволяє суттєво спростити рівняння (3.133).

Виконавши прості перетворення і зважаючи, що $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, отримуємо

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \frac{du_x}{dt},$$

$$\begin{aligned}
 Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_y}{dt}, \\
 Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_z}{dt}.
 \end{aligned}
 \tag{3.134}$$

Рівняння (3.134) – це специфічна для в'язкої нестисливої рідини форма другого закону Ньютона. Дійсно, праві частини цих рівнянь є віднесеними до одиниці маси добутки маси на прискорення, а ліві – суми віднесених до одиниці маси сили $F(X, Y, Z)$, сили тиску $\frac{1}{\rho} \text{grad} p \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right)$ і сили внутрішнього тертя. Усі члени рівнянь (3.134) мають розмірність прискорення $\left(\frac{M}{c^2} \right)$. Якщо розкрити повні прискорення $\frac{du_x}{dt}, \frac{du_y}{dt}, \frac{du_z}{dt}$, виділивши в них локальну і конвективну складову, то отримаємо розгорнуту формулу рівнянь Нав'є – Стокса для нестисливої рідини

$$\begin{aligned}
 X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= \\
 = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \\
 Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \\
 = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\
 Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \\
 = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{3.135}$$

Разом із рівнянням нерозривності $\text{div} \vec{u} = 0$ рівняння (3.135) утворюють замкнену систему для визначення u_x, u_y, u_z і p .

Подамо рівняння Нав'є – Стокса у векторній формі. Для цього помножимо перше рівняння на \vec{i} , друге – на \vec{j} , третє – на \vec{k} і складемо.

Отримаємо

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{u} = \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad (3.136)$$

де введено позначення

$$\nabla^2 \vec{u} = \nabla^2 u_x \vec{i} + \nabla^2 u_y \vec{j} + \nabla^2 u_z \vec{k}.$$

Виділяючи конвективну частину прискорення, рівняння (3.136) можна подати у вигляді

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u}. \quad (3.137)$$

Для отримання ще однієї широко вживаної форми рівняння (3.136) використаємо формулу векторного аналізу

$$\text{grad}(\vec{a} \vec{b}) = (\vec{a} \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a},$$

де \vec{a} і \vec{b} – довільні вектори. Правильність цієї формули можна перевірити безпосереднім розрахунком.

Нехай $\vec{a} = \vec{b} = \vec{u}$, тоді

$$\text{grad}(\vec{u} \vec{u}) = \text{grad} u^2 = 2(\vec{u} \nabla) \vec{u} + 2(\vec{u} \times \vec{\Omega}),$$

де $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{u}$.

Розв'язуючи ці співвідношення щодо конвективного прискорення $(\vec{u} \nabla) \vec{u}$ і виключаючи його з рівняння (3.136), отримаємо рівняння руху в'язкої рідини у формі Громеко – Ламба.

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} \frac{u^2}{2} + \nu \nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{\Omega}. \quad (3.138)$$

Вважаючи, що масові сили мають потенціал, тобто $\vec{F} = -grad\phi$, і, зважаючи, що за умови $\rho = const \frac{1}{\rho} grad p = grad \frac{p}{\rho}$, рівняння (1.138) можна записати у вигляді

$$-grad\left(\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) + \nu \nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{\Omega}. \quad (3.139)$$

Позначивши $\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = E$ і спроектувавши (3.139) на осі декартової прямокутної системи координат, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} - (u_y \Omega_z - u_z \Omega_y), \\ -\frac{\partial E}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} - (u_z \Omega_x - u_x \Omega_z), \\ -\frac{\partial E}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} - (u_x \Omega_y - u_y \Omega_x). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Рівняння Нав'є – Стокса у формі Громека – Ламба виявилось досить зручним для розв'язання низки задач динаміки в'язкої рідини.

3.11.6 Рівняння Рейнольдса осередненого турбулентного руху

Виводячи рівняння Нав'є – Стокса, не враховували режим руху рідини. Оскільки властивість в'язкості притаманна в'язким рідинам незалежно від режиму їхнього руху, і за переходу від ламінарної течії до турбулентної інші фізичні властивості не змінюються, можна припустити, що узагальнена гіпотеза Ньютона, а отже, й засновані на ній рівняння Нав'є – Стокса справедливі як за ламінарного, так і турбулентного руху рідини. Проте в останньому випадку використовувати рівняння Нав'є – Стокса для отримання прикладних розв'язків практично не можливо. Входячи в них, миттєві швидкості і тиски за турбулентних рухів є

пульсівними величинами. Навіть коли б ці параметри вдалося знайти за допомогою розв'язку рівнянь Нав'є – Стокса, то використати ці миттєві значення величин із практичною метою було б досить складно. Тому для турбулентного режиму ставиться знаходження осереднених у часі швидкостей і тисків. Ці усереднені величини самі можуть залежати або не залежати від часу. У першому випадку турбулентний рух вважають неусталеним, а в другому – усталеним.

Для отримання рівнянь турбулентної течії використовують рівняння Нав'є – Стокса, усі члени яких усереднюють за часом.

Як відомо з кінематики, дійсна миттєва швидкість пов'язана з осередненою співвідношенням $\vec{u} = \bar{\vec{u}} + u'$, де u' – пульсація.

У проєкціях на осі декартової прямокутної системи координат

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x; \quad u_y = \bar{u}_y + u'_y; \quad u_z = \bar{u}_z + u'_z.$$

Для тиску також можна записати $p = \bar{p} + p'$, вночіас

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p dt.$$

Зважаючи на рівняння нерозривності і $\text{div} \vec{u} = 0$, виконаємо перетворення конвективних членів рівняння Нав'є – Стокса.

$$\begin{aligned} & u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (u_x u_z); \\ & u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x}(u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_y u_z); \\
&\quad u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(u_z u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z u_z).
\end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази в рівняння Нав'є – Стокса і проведемо операцію осереднення рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_x u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u_x u_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u_x u_z}) &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \overline{u_x}; \\
\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_y u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u_y u_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u_y u_z}) &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \overline{u_y}; \\
\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_z u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u_z u_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u_z u_z}) &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \overline{u_z}.
\end{aligned}$$

Виразимо складові швидкості через осереднені значення і пульсації

$$\begin{aligned}
\overline{u_x u_x} &= \overline{(\bar{u}_x + u'_x)(\bar{u}_x + u'_x)} = \bar{u}_x^2 + 2\bar{u}_x \bar{u}'_x + \overline{u'^2_x}; \\
\overline{u_y u_x} &= \overline{(\bar{u}_y + u'_y)(\bar{u}_x + u'_x)} = \\
&= \overline{u_x u_y} + \bar{u}_y \bar{u}'_x + \overline{u'_y u'_x}; \\
\overline{u_x u_z} &= \overline{(\bar{u}_x + u'_x)(\bar{u}_z + u'_z)} = \overline{u_x u_z} + \bar{u}_x \bar{u}'_z + \overline{u'_x u'_z}; \\
\overline{u_y u_z} &= \overline{(\bar{u}_y + u'_y)(\bar{u}_z + u'_z)} = \\
&= \overline{u_y u_z} + \bar{u}_y \bar{u}'_z + \overline{u'_y u'_z}; \\
\overline{u_y u_y} &= \overline{(\bar{u}_y + u'_y)(\bar{u}_y + u'_y)} = \bar{u}_y^2 + 2\bar{u}_y \bar{u}'_y + \overline{u'^2_y}; \\
\overline{u_z u_z} &= \overline{(\bar{u}_z + u'_z)(\bar{u}_z + u'_z)} = \bar{u}_z^2 + 2\bar{u}_z \bar{u}'_z + \overline{u'^2_z}.
\end{aligned}$$

Зважаючи, що $\bar{u}'_x = \bar{u}'_y = \bar{u}'_z = 0$, отримуємо

$$\begin{aligned}
\overline{u_x u_x} &= \bar{u}_x \bar{u}_x + \overline{u'^2_x}; \quad \overline{u_y u_y} = \bar{u}_y \bar{u}_y + \overline{u'^2_y}; \\
\overline{u_z u_z} &= \bar{u}_z \bar{u}_z + \overline{u'^2_z}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{u_x u_y} &= \bar{u}_x \bar{u}_y + \overline{u'_x u'_y}; \quad \overline{u_x u_z} = \bar{u}_x \bar{u}_z + \overline{u'_x u'_z}; \\ \overline{u_y u_z} &= \bar{u}_y \bar{u}_z + \overline{u'_y u'_z}.\end{aligned}$$

Для деякого спрощення підставимо отримані вирази в рівняння Нав'є – Стокса для випадку відсутності масових сил

$$\begin{aligned}& \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} - \overline{u'_x{}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \overline{u'_x u'_y} \right) + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} - \overline{u'_x u'_z} \right); \\ & \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} = \tag{3.141} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} - \overline{u'_x u'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} - \overline{u'_y{}^2} \right) + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} - \overline{u'_y u'_z} \right); \\ & \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} - \overline{u'_x u'_z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} - \overline{u'_y u'_z} \right) + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} - \overline{u'_z{}^2} \right).\end{aligned}$$

Рівняння нерозривності не змінилося

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0.$$

Рівняння (3.141) мають назву рівняння Рейнольдса.

Вони відрізняються від рівнянь Нав'є – Стокса не тільки тим, що в них входять осереднені швидкості замість миттєвих, а й наявністю в них дев'яти повних членів, які

залежать від пульсації швидкості. Подамо кожний із цих членів у формі

$$\frac{\partial \overline{u'_x u'_x}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{u'_x u'_x})$$

тощо. Для скорочення випишемо тільки перше рівняння

$$\begin{aligned} & \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{u'_x u'_x}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{u'_x u'_y}) - \\ & \quad - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{u'_x u'_z}). \end{aligned} \quad (3.142)$$

Тепер ми бачимо, що поряд із членами виду

$$\nu \nabla^2 \bar{u}_x = \frac{1}{\rho} \mu \nabla^2 \bar{u}_x,$$

що, характеризують дію в'язкісних напружень, рівняння Рейнольдса містять члени виду

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{u'_x u'_x}) \dots,$$

які виражають дію напружень, притаманних тільки турбулентному потоку.

Ці напруження, породжені пульсаціями швидкості, називають турбулентними або вдаваними напруженнями. Останній термін підкреслює, що їхня поява в рівняннях руху є результатом формального переходу від миттєвих до осереднених швидкостей. Проте якщо порівнювати осереднений турбулентний потік із ламінарним, ці напруження дають вже не «вдаваний» ефект, а дійсно значення збільшення опору і відповідну зміну профілю швидкості.

Отже, в турбулентному потоці повні дотичні напруження складаються з в'язкісних і турбулентних

$$\tau = \tau_\mu + \tau_T. \quad (3.143)$$

Турбулентні напруження визначаються формулою

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (3.144)$$

і мають властивість взаємності $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Рівняння Рейнольдса містять 10 невідомих і утворюють незамкнену систему. Замикання системи зводиться до встановлення зв'язків між турбулентним напруженням і іншими змінними, що входять у рівняння. Установлення таких зв'язків є складним завданням. У сучасній гідромеханіці його розв'язують на основі гіпотез, висунутих низкою авторів стосовно простих випадків руху. Зв'язки, отримані на основі таких гіпотез, містять функції або константи, які визначають із дослідів. Сукупність методів, що застосовують для цього, становить зміст напівемпіричних теорій турбулентності.

Питання для самоперевірки

1. У чому принципова відмінність методів Лагранжа та Ейлера для описування руху рідини?
2. Який фізичний зміст локального і конвективного прискорення частинки рідини?
3. Наведіть визначення лінії і трубки течії.
4. Укажіть фізичний зміст теореми Коші – Гельмгольца щодо руху елементарного об'єму рідини.
5. Наведіть визначення вихрової лінії і трубки.
6. Який зв'язок між циркуляцією швидкості деяким контуром, що обмежує область, і потоком вихорів через цю область?
7. Що таке потенціал швидкості?
8. Наведіть приклади плоских течій.
9. Фізичний зміст функції течії.
10. Що таке гідродинамічна сітка плоского потоку?
11. Наведіть визначення комплексного потенціалу або характеристичної функції течії $W(z)$.

12. Як для вивчення плоских безвихрових рухів рідини використовується теорія комплексної змінної?

13. Наведіть приклади простих потенціальних потоків.

14. У чому суть методу особливостей для розв'язання плоских задач потенціального обтікання тіл?

15. Які прості потенціальні потоки, використовуючи метод суперпозиції, накладають, щоб отримати безциркуляційне і циркуляційне обтікання прямолінійним потоком круглого циліндра?

16. У чому особливість застосування методу конформних відображень для побудови плоских потенціальних течій?

17. Опишіть постановку загальної задачі про обтікання крилового профілю.

18. Які сили діють на частинки рідини?

19. Укажіть властивості напружень поверхневих сил.

20. Наведіть рівняння руху рідини в напруженнях.

21. Обґрунтуйте залежність між напруженнями і швидкостями деформацій у в'язкій рідині (узагальнена гіпотеза Ньютона).

22. Який фізичний зміст мають складові рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є – Стокса)?

23. Чим рівняння Рейнольдса відрізняються від рівнянь Нав'є – Стокса?

РОЗДІЛ 4 МЕТОДИ І ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

4.1 Загальна характеристика методів розв'язання задач

Умовно методи розв'язання задач із «Теорії поля» можна поділити на три групи: аналітичні, числові, експериментального моделювання і графічної побудови. Найбільш наочними з погляду фізичного аналізу електромагнітних процесів є аналітичні методи, які переважно застосовують для потенційних електричних і магнітних полів. Високий рівень розвитку числових методів практично звів нанівець роль багатьох методів експериментального моделювання і графічної побудови, які сьогодні переважно використовують із метою демонстрації, наприклад, під час проведення лабораторних робіт. Зупинимося коротко на порівняльному аналізі основних методів розв'язання задач теорії поля із зазначенням меж їхнього застосування.

Аналітичні методи аналізу постійних полів умовно можна поділити на розв'язання прямих і зворотних задач.

Пряма задача аналізу постійних електричних полів полягає у визначенні розподілу \vec{E} , \vec{D} , φ у діелектрику та \vec{E} , $\vec{\delta}$, φ у провідному середовищі як функції координат за заданим розкладом зарядів, струмів або потенціалів (різниці потенціалів) заряджених тіл. Розрахунки постійного магнітного поля полягають в обчисленні \vec{B} , \vec{H} , φ_m і \vec{A} залежно від координат за відомим розподілом струмів або різницею магнітних скалярних потенціалів.

Зворотна задача аналізу полягає у визначенні закону розподілу зарядів або струмів за заданим розподілом на-

пруженостей або потенціалів. Під час розв'язання обох задач, зазвичай, відомі параметри, розміри, розміщення тіл і електротехнічні властивості середовища.

Аналітичні методи аналізу крайових задач постійних електричних і магнітних полів, а також хвильових процесів передбачають розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних: Лапласа, Пуассона, Гельмгольца і Даламбера. Розрахунки полів проводять у такій системі координат, у якій координатні поверхні збігаються або близькі до граничних поверхонь.

Метод, який ґрунтується на застосуванні теореми Гаусса і закону повного струму. Теорему Гаусса в інтегральній формі $\oint_S \vec{D} dS = \sum_k Q_k$ застосовують для визначення

вектора \vec{D} (\vec{E}), коли потік цього вектора рівномірно розподілений по поверхні інтегрування, а його числове значення однакове в кожній точці поверхні. Закон повного струму в інтегральній формі $\oint_l \vec{H} dl = \sum I$ застосовують,

коли може бути використана симетрія поля, числове значення \vec{H} у всіх точках контура інтегрування те ж саме.

Метод безпосереднього інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа. З рівнянь Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon_a$ та

$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}$ знаходять розподіл у просторі потенціалів φ і \vec{A} за заданими зарядами, струмами, і, навпаки, за відомим розподілом φ і \vec{A} визначають розподіл зарядів і струмів. Для електростатичного поля поза зарядами та для постійних електричного і магнітного полів поза струмами використовують рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$, $\nabla^2 \varphi_m = 0$. Рів-

няння розв'язують у системі координат, що відповідає формі граничної поверхні. За заданих зарядів і струмів задача зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних і визначення постійних інтегрування за граничними умовами. Рівняння Пуассона і Лапласа розв'язують для кожної області з постійними ε та μ .

Метод розділення змінних. Одержати розв'язок рівнянь Пуассона і Лапласа в частинних похідних для двовимірних і особливо тривимірних полів часто дуже складно. У разі можливого розділення змінних і виконання граничних умов розв'язання рівнянь виконують методом Фур'є (методом розділення змінних). Водночас розв'язок рівняння наводять у вигляді добутку або добутку сум невідомих функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

Метод дзеркальних зображень застосовують для розрахунків електричних і магнітних полів у неоднорідних середовищах. Задачу зводять до кількох задач в однорідних середовищах, кількість яких залежить від кількості середовищ, які граничать між собою. Поле в однорідному середовищі, яке граничить з іншим однорідним середовищем, визначають, замінюючи друге середовище першим. Вплив другого середовища на поле першого враховують введенням додаткових (фіктивних) зарядів (струмів), розміщених у другому середовищі. Значення, знак і розміщення додаткових зарядів (струмів) у другому середовищі визначають так, щоб вони задовольняли граничні умови на межі поділу середовищ у вихідній задачі.

Метод конформного перетворення (відображення) застосовується для аналізу плоскопаралельних полів, які описує рівняння Лапласа. Плоскопаралельні поля складної конфігурації, зображені на комплексній площині, перетворюються за допомогою комплексного потенціалу в поля більш простої конфігурації на іншій комплексній площині. Водночас область дійсного поля відображається конформно,

тобто без зміни значень і знаків кутів перетинання двох криволінійних ділянок поля, а отже, зі збереженням подібності нескінченно малих елементів площі полів. Відображення здійснюють переважно на канонічні області – паралельну смугу, прямокутник, кругове кільце. Основними труднощами є відсутність загального способу одержання виразів для комплексного потенціалу (комплексної функції, яка відображає поле). В окремому випадку відображення полів, обмежених n -кутником, комплексний потенціал знаходять за формулою Крістофеля – Шварца.

Числові методи розв'язання задач теорії поля.

Числові методи розрахунків електромагнітних полів приводять до системи алгебраїчних рівнянь. Зазвичай порядок системи рівнянь збігається із загальним числом невідомих, яке може бути досить великим (сотні, тисячі).

Для реалізації числових методів здійснюють програмування розв'язання задачі на ЕОМ. Основним із недоліків цих методів є труднощі оцінювання похибки. Джерелом похибок є як сам метод, так і похибки, викликані застосуванням ЕОМ.

Метод інтегральних рівнянь (вторинних джерел).

Дослідження поля в неоднорідному середовищі зводять до розрахунків його в однорідному середовищі. Вплив на поле неоднорідностей (діелектричних, магнітних і тіл, які проводять струм) ураховують введенням у поле замість неоднорідностей вторинних джерел – зарядів поляризації, струмів намагніченості, наведених вихрових струмів та ін., розподілених на границях (в об'ємі) неоднорідностей. Спочатку визначають інтегральні рівняння, які повинні відповісти розподілу вторинних джерел, а потім за рівняннями поля з урахуванням заданих і вторинних джерел виконують завдання аналізу поля.

Метод кінцевих елементів широко застосовують під час розрахунків полів електронно-оптичних систем. Об-

ласть поля розбивають на кінцеве число підобластей – елементів. У середині кожного елемента отримана функція апроксимується, наприклад, поліномом, коефіцієнти якого виражаються через невідомі значення функції у вузлах елемента. Отримані співвідношення для коефіцієнтів підставляють в апроксимуючий поліном, який приводить до рівняння одержуваної функції залежно від її вузлових значень і форми елемента. Це інтерполяційне рівняння записують для кожного елемента згідно з наскрізною нумерацією всіх елементів області. Після цього за допомогою обраного методу знаходять рівняння для вузлових значень функції.

Метод сіток, як і попередній метод, застосовують під час розрахунків електронної та іонної оптики. Він ґрунтується на розв'язаннях рівнянь Лапласа і Пуассона в кінцевих різницях. В області досліджуваного поля наносять квадратну або полярну сітку, для вузлів якої розраховують значення потенціалів. Для цього на сітку наносять передбачувану картину поля, задаючись значеннями потенціалів у вузлах, потім за рівнянням зв'язку, отриманим із рівняння Лапласа, знаходять потенціали вузлів сітки. Під час першого підрахунку передбачувані і розраховані значення потенціалів за рівнянням зв'язку можуть не збігатися, утворюючи залишок. Тому знову задають потенціали у вузлах і знову їх обчислюють. Розрахунки проводять доти, поки значення потенціалів не збіжаться або їхній залишок у всіх вузлах не буде перевищувати заданого значення. Метод застосовують за умови граничних поверхонь довільної форми для двовимірних, тривимірних із осью симетрії та інших більш складних полів. Він дозволяє знайти розподіл скалярного потенціалу електричних і магнітних полів, а також розподіл векторного потенціалу магнітного поля.

Метод кінцевих різниць у часовій області. На сьогодні все більша швидкодія персональних комп'ютерів

сприяє широкому застосуванню методу кінцевих різниць у часовій області FDTD (Finite-Difference Time-Domain), який є одним із основних методів числового розв'язання електродинамічних задач. Метод FDTD – універсальний, його можна з успіхом застосовувати практично у всіх задачах електродинаміки, які вимагають числового розв'язку. Частотні характеристики досліджуваного об'єкта можуть бути отримані за допомогою дискретного перетворення Фур'є або умовно, за допомогою завдання квазігармонічного джерела і виконання розрахунків до виходу на режим, який установився. Крім простоти постановки, метод FDTD має безсумнівні переваги в плані моделювання електродинамічних об'єктів із неоднорідними, анізотропними та нелінійними середовищами з довільними формами поверхонь. У своїй класичній постановці метод FDTD ґрунтується на дискретизації рівнянь Максвелла, записаних у диференційній просторово-часовій формі.

Експериментальні методи моделювання електромагнітних полів. Моделювання за допомогою електричних ванн і провідних аркушів. Експериментальне моделювання одного потенційного поля іншим ґрунтується на аналогії рівнянь і подібності картин електростатичного, електричного і магнітного полів (див. п. 2.5). Електростатичне поле і магнітне поле постійного струму замінюють електричним полем струму низької частоти (для виключення явища поляризації, а також більш легкого відтворення поля). Під час моделювання полів необхідно дотримуватися геометричних конфігурацій і заданого розміщення електродів (полюсів), а також граничних умов. Двовимірні поля досліджують за допомогою металевих аркушів або аркушів із провідного паперу. Тривимірні поля моделюють за допомогою похилих ванн, заповнених слабопровідною рідиною. У всіх випадках еквіпотенціальні лінії досліджують за допомогою зонда.

Моделювання за допомогою електричних сіток. Будують електричну модель поля з великої кількості елементів електричного кола. Кожний елементарний об'єм поля приблизно замінюють резисторами, конденсаторами і котушками. За допомогою конденсаторів і котушок ураховують струми зміщення та е. р. с., збуджені змінним магнітним полем. Цей метод може бути застосований і для моделювання змінних електромагнітних полів. Метод передбачає числове оброблення результатів.

Моделювання випромінювання електронного потоку за допомогою поверхневої хвилі діелектричного хвилеводу. Ефективним способом дослідження нових модифікацій квазіоптичних систем пристроїв дифракційної електроніки є метод експериментального моделювання, за якого випромінювання електронної хвилі струму просторового заряду моделюється випромінюванням поверхневої хвилі планарного діелектричного хвилеводу, розміщеного поблизу дифракційних решіток. За рівномірного і прямолінійного руху електронного потоку власне його поле має вигляд плоскої хвилі. Подібну хвилю можна сформуванати плоским діелектричним хвилеводом. Частина потужності, яка поширюється вздовж хвилеводу, зосереджена в зовнішній стосовно нього області у вигляді поверхневого поля повільних хвиль, обумовлюючи його дифракцію на елементах періодичної структури. Це дозволяє за допомогою тільки хвильових полів моделювати ефекти дифракційного та черенковського випромінювань. Унаслідок цього енергія повільних хвиль перетвориться на енергію швидких просторових гармонік, випромінювану в навколишній простір (відкритий резонатор, відкритий хвилевід тощо).

Оскільки в межах цього навчального курсу для наочної ілюстрації електромагнітних процесів переважно використано аналітичні методи розв'язання задач теорії поля, то зупинимося на більш докладному їхньому описі з демонстрацією на конкретних прикладах.

4.2 Методи, що ґрунтуються на теоремі Гаусса і законі повного струму в інтегральній формі з використанням властивості накладення полів

Вектор електричного зміщення \vec{D} або вектор напруженості електричного поля \vec{E} , який має плоску осьову або сферичну симетрію, визначається за допомогою теореми Гаусса в інтегральній формі $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum Q$ або

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \sum Q / \varepsilon_a \text{ за умови } \varepsilon_a = \text{const} \text{ (див. п. 2.2)}. \text{ У цьому}$$

разі в кожній точці замкненої поверхні інтегрування (поверхні симетрії), яка охоплює заряди і проведена через точку спостереження, вектор \vec{E} має те саме значення і може бути винесений з-під знака інтеграла. Наприклад, для поля точкового заряду і зарядженої кулі поверхнею інтегрування є сферична поверхня, а для поля зарядженої нескінченної осі і циліндра – циліндрична поверхня. У кожній точці цих поверхонь вектор \vec{E} має тільки радіальну складову. Тому вектори \vec{E} та $d\vec{S}$ збігаються за напрямком. Тоді $E = Q / (\varepsilon_a S)$, а потенціал $\varphi = -\int \vec{E} d\vec{r} + C$.

За наявності декількох точкових (електричний диполь, однойменні точкові заряди, рівномірно заряджене кільце) або розподілених зарядів (рівномірно заряджений відрізок, нескінченно довга заряджена вісь, циліндри) поле розраховують, застосовуючи принцип накладення (див. п. 1.1). Водночас розподілені заряди за об'ємом поверхні та лінії зображують у вигляді сукупності точкових зарядів ρdV , σdS і τdl відповідно.

Поле близько розміщених різнойменно заряджених нескінченних циліндрів (паралельно розміщених поза та всередині один одного) розглядають як поле, створене фіктивними різнойменно зарядженими осями – електричними осями (див. п. 2.7, приклад 2.5). Електричні осі не збігаються з геометричними осями циліндрів. Електричні осі розміщують так, щоб поверхні кожного циліндра, який є еквіпотенціальною поверхнею, збігалися з еквіпотенціальною поверхнею поля електричних осей. У просторі поза циліндрами поле електричних осей збігається з полем циліндрів. Усередині провідних циліндрів електричне поле відсутнє, а поверхнева густина зарядів на поверхні циліндрів нерівномірна внаслідок електростатичної індукції. Положення електричних осей можна визначити аналітично (див. приклад 2.5, формула (2.32)).

Вектор напруженості \vec{H} або вектор магнітної індукції \vec{B} магнітного поля постійного струму, який має симетрію щодо контура інтегрування, визначають за допомогою закону повного струму в інтегральній формі $\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I$ (див. п. 2.4). У кожній точці замкненого контура інтегрування, що охоплює струми, і проведеного через точку спостереження вектор \vec{H} має те саме значення і може бути винесений з-під знака інтеграла. У разі збігу векторів \vec{H} і $d\vec{l}$ (вектор \vec{H} спрямований по дотичній до елемента контура інтегрування $d\vec{l}$) закон повного струму набуває вигляду $Hl = \sum I$. Наприклад, напруженість магнітного поля, створюваного постійним струмом I , який проходить по циліндричному дроту на відстані r від його осі, $H = I / (2\pi r)$. Докладне розв'язання задачі розглянуто в прикладі 1.1.

За наявності декількох проводів зі струмом або ко-
тушки з числом витків ϖ вектор напруженості \vec{H} розра-
ховують, застосовуючи, як і для електростатичного поля,
метод накладення (див. п. 1.1).

4.3 Інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа для одновимірних полів

Найбільш просто рівняння Пуассона і Лапласа розв'я-
зуються за умови одновимірних полів, потенціал яких за-
лежить від однієї координати. Водночас диференціальне рів-
няння в частинних похідних переходить в одновимірне
диференціальне рівняння другого порядку, розв'язок якого
за відомих граничних умов не викликає труднощів. Якщо
потенціал є функцією двох або трьох координат, то розв'я-
зати рівняння в частинних похідних значно важче.

У крайовій електричній задачі необхідно враховува-
ти такі умови, які повинен задовольняти потенціал φ :

- у всіх точках поля, які не лежать на граничних по-
верхнях і не зайняті зовнішніми джерелами, справедливе
рівняння Лапласа;

- потенціал φ усюди безперервний, зокрема грани-
ці діелектриків і провідників;

- потенціал φ усюди кінцевий;

- потенціал φ має постійне значення всередині і на
поверхні провідників;

- φ – регулярна функція на нескінченності.

Крім цих умов, для однозначності розв'язку необ-
хідне виконання граничних умов (2.10), (2.11) для векто-
рів \vec{E} і \vec{D} (див. п. 2.2).

Під час розв'язання рівняння Лапласа для магнітно-
го потенціалу φ_m він усюди кінцевий і безперервний, зок-
рема граничні поверхні $\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$.

Визначаючи магнітне поле всередині провідника з постійним струмом, розв'язують рівняння Пуассона для векторного потенціалу $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}$ під час виконання таких умов:

- у всіх точках поза областями зі струмом $\nabla^2 \vec{A} = 0$;
- у всіх точках, які не лежать на границі $\text{div} \vec{A} = 0$;
- тангенціальні та нормальні складові вектора \vec{A} – безперервні ($A_{1\tau} = A_{2\tau}$, $A_{1n} = A_{2n}$).

4.4 Інтегрування рівнянь Лапласа і Гельмгольца методом розділення змінних (методом Фур'є)

Метод розділення змінних переважно використовують для розв'язання рівнянь Лапласа та однорідних хвильових рівнянь Гельмгольца. Розглянемо для простоти двовимірні випадки в декартовій, сферичній і циліндричній системах координат.

Система плоскопаралельних електродів. Для поля, створеного плоскими, необмеженими по осі z електродами, рівняння Лапласа набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язок рівняння Лапласа можна записати у формі добутку двох незалежних функцій

$$\varphi(x, y) = M(x)N(y).$$

Підставивши цей розв'язок у рівняння Лапласа і по-членно розділивши на добуток $M(x)N(y)$, знаходимо

$$\frac{1}{M(x)} \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -\frac{1}{N(y)} \frac{d^2 N(y)}{dy^2}.$$

Оскільки ліва і права частини цього рівняння залежать від різних змінних, то вони повинні дорівнювати деякій сталій, наприклад K^2 (стала розділення).

Унаслідок цього одержують два незалежні диференціальні рівняння

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \pm K^2 M(x), \quad \frac{d^2 N(y)}{dy^2} = \mp K^2 N(y).$$

Розв'язок цих рівнянь за першої комбінації знаків за умови K має вигляд

$$M(x) = A \cos(Kx) + B \sin(Kx),$$

$$N(y) = C \operatorname{ch}(Ky) + D \operatorname{sh}(Ky).$$

За зворотної комбінації знаків за умови K гіперболічні і тригонометричні функції міняються місцями.

Спочатку знаходять ту незалежну функцію, за змінною якої задані нульові граничні умови, наприклад $M(x)$. Ця функція буде задовольняти задані однорідні граничні умови і не буде дорівнювати нулю (що не є цікавим) тільки за певних значень чисел K_n . Числа K_n загалом обчислюють, прирівнюючи до нуля головний визначник системи рівнянь, отриманої за допомогою підстановки розв'язку $M_n(Kx)$ у вираз для граничних умов (за умови $x = a$ і $x = b$). Визначник складають із коефіцієнтів за умови A_n та B_n , які розглядають як величини, які необхідно знайти. Потім будь-яке із знайдених чисел K_n підставляють у цю систему рівнянь і знаходять одну зі сталих, наприклад A , виражену через B . Однак числа K_n у низці випадків можуть бути ро-

зраховані без складання системи рівнянь, безпосередньо за граничними умовами з урахуванням властивостей отриманого поля. Після знаходження K_n записують частковий розв'язок для функції

$$N_n(y) = C_n ch(K_n y) + D_n sh(K_n y).$$

Загальний розв'язок вихідного диференційного рівняння має вигляд

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n \cos(K_n x) + B_n \sin(K_n x)) \times \right. \\ \left. \times (C_n ch(K_n y) + D_n sh(K_n y)) \right].$$

Сталі C_n і D_n визначають із граничних умов за змінною y залежно від умови задачі. Знаючи φ , нескладно визначити напруженість поля

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Куля в зовнішньому однорідному полі (схема розв'язання). Для кулі (кулястої порожнини) з урахуванням незалежності потенціалу від координати α рівняння Лапласа у сферичній системі координат має два доданки

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (4.1)$$

Подаючи потенціал у вигляді $\varphi = M(r)N(\theta)$ і підставляючи його в (4.1), отримаємо

$$\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \frac{1}{N \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (4.2)$$

У цьому рівнянні перший доданок залежить тільки від r , другий – від θ , а їхня сума дорівнює нулю. Ця умова виконується або коли кожний доданок дорівнює нулю, або коли кожний доданок дорівнює якомусь поки що невідомому числу p (нехай перший доданок дорівнює $+p$, другий доданок дорівнює $-p$), тобто

$$\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial M}{\partial r} \right) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{N \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial M}{\partial r} \right) = p, \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{N \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = -p. \quad (4.6)$$

З розв'язання рівнянь (4.3) і (4.4) випливає, що $M_1 = \frac{A_1}{r} + A_2$ та $N_1 = A_3$.

Використовуючи підстановку Ейлера і рівняння (4.5), отримаємо $M_2 = Cr^n$, де $n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p}$. Розв'язок рівняння (4.6) має такий вигляд: $N_2 = B \cos \theta$, підставляючи який, знаходимо, що $p = 2$. Тут A_1 , A_2 , A_3 , C і B – сталі інтегрування.

Повний розв'язок рівняння Лапласа можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = M_1 N_1 + M_2 N_2 = \frac{C_1}{r} + C_2 + \\ + \left(C_3 r + \frac{C_4}{r^2} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Позначимо потенціал усередині кулі φ_i , поза кулею φ_e .

Тоді потенціали для внутрішньої і зовнішньої областей кулі запишемо в такий спосіб:

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \frac{C_{1i}}{r} + C_{2i} + \left(C_{3i}r + \frac{C_{4i}}{r^2} \right) \cos \theta, \\ \varphi_e &= \frac{C_{1e}}{r} + C_{2e} + \left(C_{3e}r + \frac{C_{4e}}{r^2} \right) \cos \theta.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Сталі інтегрування C знаходять із граничних умов, які залежать від типу заданого поля (електричного або магнітного) і матеріалу кулі (діелектрик, магнетик, провідник).

Циліндр у зовнішньому однорідному полі (схема розв'язання). Рівняння Лапласа в циліндричній системі координат з урахуванням нескінченності системи по осі z має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0.\tag{4.9}$$

Аналогічно до кулі розв'язок знайдемо у вигляді $\varphi = M(r)N(\alpha)$, унаслідок підстановки якого в (4.9) отримуємо

$$\frac{r}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha^2} = 0.\tag{4.10}$$

У цьому рівнянні перший доданок залежить тільки від r , другий – від α , а їхня сума дорівнює нулю. Ця умова виконується або коли кожний доданок дорівнює нулю, або коли кожний доданок дорівнює якомусь поки що невідомому числу p (нехай перший доданок дорівнює $+p$, другий доданок дорівнює $-p$), тобто

$$\frac{r}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial M}{\partial r} \right) = 0, \quad (4.11) \qquad \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{r}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial M}{\partial r} \right) = p, \quad (4.13) \qquad \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha^2} = -p. \quad (4.14)$$

З рівняння (4.11) отримуємо, що $M_1 = A_1 \ln r + A_2$, з (4.12) отримуємо, що $N_1 = A_3$.

З рівняння (4.13) отримуємо, що $M_2 = Cr^n$, де $n_{1,2} = \pm\sqrt{p}$. Розв'язок рівняння (5.14) має вигляд $N_2 = B \cos \alpha$, звідки $p = 1$. Тут A_1 , A_2 , A_3 , C і B – сталі інтегрування.

Тоді повний розв'язок рівняння Лапласа можна навести у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = M_1 N_1 + M_2 N_2 = C_1 \ln r + C_2 + \\ + \left(C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Позначимо потенціал усередині циліндра φ_i , поза циліндром φ_e .

Тоді потенціали для внутрішньої і зовнішньої областей

$$\begin{aligned} \varphi_i = C_{1i} \ln r + C_{2i} + \left(C_{3i} r + \frac{C_{4i}}{r} \right) \cos \alpha, \\ \varphi_e = C_{1e} \ln r + C_{2e} + \left(C_{3e} r + \frac{C_{4e}}{r} \right) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Сталі інтегрування C знаходять із граничних умов, вони залежать від того, з якого матеріалу виготовлений циліндр.

Граничні умови для кулі і циліндра

1. Для діелектричних і магнітних куль (циліндрів) зручно потенціал на початку координат взяти таким, що дорівнює нулю ($\varphi_{r=0} = 0$).

2. Заряд кулі Q на нескінченності ($r \rightarrow \infty$) сприймається як точковий заряд $\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r} - Er \cos \theta$, а зарядже-

ний циліндр – як заряджена вісь $\varphi_0 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln r - Er \cos \alpha$.

3. На поверхні провідної незарядженої кулі (циліндра) потенціал безперервний (поверхня екіпотенціальна $\varphi_{r=R} = const$): $\varphi_{1(r=R)} = \varphi_{2(r=R)}$ або $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ ($H_{1\tau} = H_{2\tau}$).

4. На границі поділу діелектричних середовищ нормальні складові вектора \vec{D} безперервні: $D_{1n} = D_{2n}$,
 $\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$ (з урахуванням заданої поляризованості \vec{P}
кулі $D_{1n} = \epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}$).

5. На границі поділу провідних середовищ нормальні складові вектора $\vec{\delta}$ безперервні: $\delta_{1n} = \delta_{2n}$,
 $\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$.

6. На границі поділу магнітних середовищ нормальні складові вектора \vec{B} дорівнюють: $B_{1n} = B_{2n}$,
 $\mu_1 \frac{\partial \varphi_{1m}}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{2m}}{\partial r}$ (φ_m – магнітний потенціал поля з урахуванням заданої намагніченості \vec{M} кулі $B_{1n} = \mu_0 \vec{H}_2 + \mu_0 \vec{M}$).

З урахуванням граничних умов 1–6 загальні розв'язки (4.8) і (4.16) для конкретних об'єктів матимуть такий вигляд:

1. Якщо куля діелектрична, то потенціал на нескінченності $\varphi = \varphi_0 + E_0 r \cos \theta$, звідси

$$\varphi_e = \varphi_0 + \left(E_0 r + \frac{C_{4e}}{r^2} \right) \cos \theta, \quad \varphi_i = \varphi_0 + C_{3i} r \cos \theta.$$

Із граничних умов (за умови $r = R$) $\varphi_i = \varphi_e$ і $D_{1n} = D_{2n}$ знаходимо, що

$$C_{3i} = E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}, \quad C_{4e} = R^3 E_0 \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}.$$

$$\text{Тоді } \varphi_i = \varphi_0 + E_0 r \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} \cos \theta = \varphi_0 + E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} z,$$

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(r + \frac{R^3}{r^2} \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_i)}{(2\varepsilon_e + \varepsilon_i)} \right) \cos \theta.$$

2. Якщо куля провідна, але не заряджена, то $\varphi_i = \varphi_0$.
 $C_{4e} = -E_0 R^3$.

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta.$$

3. Якщо провідна куля заряджена, то $\varphi_i = \varphi_0$.

$$\varphi_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r} + \varphi_0 + E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta.$$

Для опису магнітного середовища замість потенціалу φ використовують скалярний магнітний потенціал φ_m .

Знаючи φ , нескладно визначити напруженість поля

$$E_i = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}, \quad E_e = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \sqrt{\left(-\frac{\partial \varphi_e}{\partial r}\right)^2 + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta}\right)^2}.$$

4. Якщо циліндр діелектричний, то потенціал на нескінченності $\varphi = \varphi_0 + E_0 r \cos \alpha$, звідси

$$\varphi_e = \varphi_0 + \left(E_0 r + \frac{C_{4e}}{r}\right) \cos \alpha, \quad \varphi_i = \varphi_0 + C_{3i} r \cos \alpha.$$

Із граничних умов (за умови $r = R$) $\varphi_i = \varphi_e$ і

$$D_{1n} = D_{2n} \text{ знаходимо, що } C_{3i} = E_0 \frac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_e + \varepsilon_i}; \quad C_{4e} = R^2 E_0 \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{\varepsilon_e + \varepsilon_i}.$$

$$\text{Тоді } \varphi_i = \varphi_0 + E_0 r \frac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_e + \varepsilon_i} \cos \alpha = \varphi_0 + E_0 \frac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_e + \varepsilon_i} z,$$

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(r + \frac{R^2 (\varepsilon_e - \varepsilon_i)}{r (\varepsilon_e + \varepsilon_i)} \right) \cos \alpha.$$

5. Якщо циліндр провідний, але незаряджений, то $\varphi_i = \varphi_0$. $C_{4e} = -E_0 R^2$.

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \cos \alpha.$$

6. Якщо провідний циліндр заряджений, то $\varphi_i = \varphi_0$.

$$\varphi_e = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln r + \varphi_0 + E_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \cos \alpha.$$

Для опису магнітного середовища замість потенціалу φ використовують скалярний магнітний потенціал φ_m .

Знаючи φ , нескладно визначити напруженість поля

$$E_i = -\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}, \quad E_e = \sqrt{E_r^2 + E_\alpha^2} = \sqrt{\left(-\frac{\partial\varphi_e}{\partial r}\right)^2 + \left(-\frac{\partial\varphi_e}{\partial\alpha}\right)^2}.$$

Аналізуючи отримані вище співвідношення для потенціалів куль і циліндрів з урахуванням конкретних граничних умов, можна зробити узагальнювальні висновки стосовно досліджуваних об'єктів.

1. У діелектричних кулі та циліндрі з діелектричною проникністю більшою, ніж діелектрична проникність середовища, результуюче поле менше від зовнішнього поля. Це пояснюється тим, що поле зв'язаних зарядів усередині тіла спрямоване назустріч зовнішньому полю. Таке поле зв'язаних зарядів називають *деполяризуючим*. Деполяризуюче електричне та результуюче поля в кулі і циліндрі є однорідними тільки в діелектричному еліпсоїді, кулі і циліндрі.

2. Вирази для потенціалу всередині та поза кулею (циліндром), а також для напруженості зовнішнього електричного поля в діелектрику і магнітного поля у феромагнетика аналогічні. Перехід від одного виразу до іншого може бути здійснений заміною відповідних величин на підставі аналогії рівнянь полів (див. п. 2.5). Наприклад, напруженість поля всередині діелектричної кулі із проникністю ε_1 ,

поміщеної в однорідне електричне поле напруженістю \vec{E}_0 в середовищі із проникністю ε_2 , $E_i = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0$, а всере-

дині кулі в магнітному полі $H_i = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0$.

3. Задачу про магнітну кулю і циліндр, внесені в однорідне магнітне поле, розв'язують, використовуючи аналогію рівнянь із рівняннями електростатичного поля (див.

п. 2.5). Намагнічування магнітної кулі також отримують однорідним. У разі внесення магнітної кулі в однорідне магнітне поле напруженість магнітного поля всередині кулі обумовлена намагніченістю кулі, спрямована назустріч напруженості зовнішнього поля. Таке поле називають полем, що розмагнічує. Водночас результуюче магнітне поле всередині кулі менше від зовнішнього поля.

4.5 Метод дзеркальних зображень

Для розрахунків електростатичних полів, особливо обмежених якою-небудь провідною поверхнею правильної форми або в яких є геометрично правильної форми границя між двома діелектриками, широко застосовують *метод дзеркальних зображень*. Це штучний прийом розрахунків, у якому, крім заданих зарядів, вводять ще додаткові заряди, величини і місце розміщення яких вибирають так, щоб задовольнити граничні умови в полі. Якщо границя між двома середовищами плоска, то додаткові («фіктивні») заряди поміщають територіально там, де перебувають дзеркальні (у геометричному сенсі) відображення заданих зарядів. Метод дзеркальних зображень застосовують не тільки для розрахунків електростатичних полів, але й для розрахунків електричних полів у провідному середовищі та магнітних полів постійного струму. Обґрунтуванням методу і правильності розв'язку є теорема одиничності розв'язку (див. п. 1.1).

Розглянемо два приклади на метод дзеркальних зображень.

Система «провідне середовище – діелектрик». Якщо в діелектричному середовищі з діелектричною проникністю ε помістити точковий заряд (заряджену нитку), то вільні електрони провідного середовища будуть рухатися в бік (або в протилежний бік) цього заряду (явище електростатичної індукції). Унаслідок цього електричне поле в діе-

лектрику буде дорівнювати сумі електричного поля, створеного точковим зарядом, і поля, створеного вільними електронами провідного середовища.

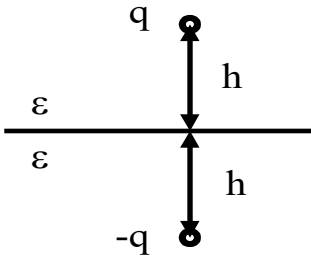


Рисунок 4.1 –
Метод дзеркальних
відображень для системи
«діелектрик – провідник»

Нехай у діелектричне середовище поміщений заряд q на відстані h від поверхні провідного середовища. Тоді для визначення електричного поля в діелектричному середовищі з ε (у провідному середовищі електричне поле дорівнює нулю) провідне середовище заміняють діелектричним із такою ж самою проникністю ε і вводять додатковий «уявний»

заряд q тієї самої величини, але протилежний за знаком, розміщений дзеркально на відстані h від поверхні поділу (рис. 4.1). Поле в будь-якій точці діелектрика буде дорівнювати векторній сумі поля фактичного та «уявного» зарядів.

Розглянемо застосування методу дзеркальних зображень для системи «діелектрик – діелектрик». Нехай у діелектрику з діелектричною проникністю ε_1 на відстані h від поверхні поділу перебуває заряд q_1 (рис. 4.2, а). Необхідно визначити поле в одному з діелектриків. Для розв'язання цієї задачі має важливе значення те, у якому з діелектриків – з ε_1 або з ε_2 – необхідно визначити поле. Розглянемо два випадки.

Нехай необхідно визначити поле в діелектрику з ε_1 , де перебуває заряд q_1 . Тоді діелектрик із ε_2 заміняють на діелектрик із ε_1 і в діелектрику з ε_2 вводять додатковий

«уявний» заряд q_2 , розміщений дзеркально на відстані h від поверхні поділу (див. рис. 4.2, б). Причому

$$q_2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} q_1.$$

Тоді поле в будь-якій точці діелектрика, у якому перебуває заряд, буде дорівнювати векторній сумі поля фактичного q_1 та «уявного» q_2 зарядів.

Нехай необхідно визначити поле в діелектрику з ε_2 , у якому відсутній заряд q . Тоді діелектрик із ε_1 замінюють на діелектрик із ε_2 , а заряд q_1 замінюють на заряд q_3 , розміщений у тому ж самому місці, де і q_1 (див. рис. 4.2, в). Причому

$$q_3 = \frac{2\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} q_1.$$

Тоді поле в будь-якій точці діелектрика з ε_2 буде визначатися полем, створеним зарядом q_3 .

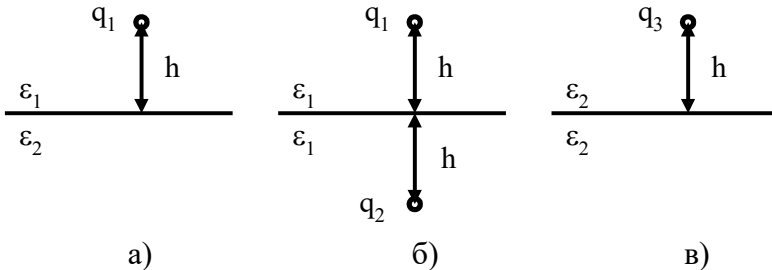


Рисунок 4.2 – Метод дзеркальних зображень для системи «діелектрик – діелектрик»:

- а) вихідне завдання;
- б) визначення поля в діелектрику з ε_1 ;
- в) визначення поля в діелектрику з ε_2

Абсолютно ідентичне застосування методу дзеркальних зображень і за умови поля, створеного зарядженою ниткою. Тільки в цьому разі замість поля заряду q визначається поле зарядженої нитки τ .

Метод дзеркальних зображень застосовують не тільки для розрахунків електростатичних полів, але й для розрахунків електричних полів у провідному середовищі та магнітних полів.

У разі електричного поля постійного струму визначається електричне поле, створене не зарядом q , а струмом I , і замість діелектриків із діелектричними проникностями ε_1 і ε_2 розглядаються провідні середовища з питомими провідностями γ_1 і γ_2 .

У разі магнітного поля постійного струму визначається результуюче магнітне поле, створене додатковими струмами I_2 та I_3

$$I_2 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_2 + \mu_1)} I_1, \quad I_3 = \frac{2\mu_1}{(\mu_2 + \mu_1)} I_1.$$

4.6 Конформне перетворення (відображення) плоскопаралельних полів

Перетворення двовимірною плоскопаралельного поля, яке задовольняє рівняння Лапласа ($\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0$) у комплексній площині $z = x + jy$, справедливе і для комплексної площини $w = u + jv$, де одержують більш просте поле. Залежність $w(z)$ установлює зв'язок між точками площини Z і точками площини W . Водночас будь-яка нескінченно мала фігура на площині Z переходить у подібну нескінченно малу фігуру на площині W . Тому кути між пересіченими кривими зберігаються. Водночас коефіцієнт лінійного розтягання (стиску) довільного нескінченно

малого відрізка дорівнює модулю похідної dw/dz , а кут повороту відображення $w(z)$ у точці z – аргументу цієї похідної. Таке відображення називають *конформним*.

Для здійснення конформного відображення необхідно і достатньо, щоб відображувана функція $w(z)$ була аналітичною, однозначною, а похідна dw/dz усередині області ніде не перетворювалася на нуль.

За конформного перетворення залишаються незмінними потенціал електродів, сумарні заряди, зосереджені на електродах, ємності електродів і загальна енергія поля. Конфігурація і лінійні розміри електродів, напруженість поля і густина зарядів на електродах змінюються.

Під час розв'язання задач методом конформного перетворення основною невідомою функцією є комплексний потенціал – це комплексна функція $w(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, яка описує сукупність силових, наприклад $u(x, y) = const$, і екіпотенціальних, наприклад, $v(x, y) = const$, ліній плоскопаралельного двовимірного поля. За допомогою функції $w(z)$ здійснюється перетворення поля із площини $z(x, y)$ на площину $w(u, v)$, де картина поля спрощується. Значення комплексного потенціалу дозволяє одержати картину поля і всі величини, які характеризують досліджуване поле: напруженість, енергію, ємність, індуктивність та ін. Водночас для комплексного потенціалу повинні виконуватися такі умови:

– у кожній точці заданої області комплексний потенціал повинен бути однозначною функцією, маючи кінцеву і безперервну похідні, які не повинні перетворюватися на нуль (для цього необхідні і достатні умови $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$ і $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$);

– задовольняти рівняння Лапласа;

– дійсна та уявна частини – ортогональні, тому залежно від завдання одну з частин комплексного потенціалу, наприклад, уявну частину можна вважати потенційною функцією, а дійсну зобразити як потік вектора напруженості поля.

Отже, визначення плоскопаралельного поля, створеного двома електродами відомої форми, методом конформного перетворення зводиться до відшукування такої функції $w(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ або в полярних координатах $w(z) = r \cdot e^{j\alpha}$, за допомогою якої можливо здійснити конформне відображення області D_z на площині Z із шуканим комплексним потенціалом на області D_w площини W із відомим комплексним потенціалом (або на якій комплексний потенціал легко розрахувати). Спільного методу знаходження функції $w(z)$ для будь-якої форми електродів немає. Серед найпоширеніших відзначимо такі методи перетворення плоскопаралельних полів із застосуванням комплексного потенціалу:

- заданого комплексного потенціалу;
- перетворення областей на канонічні;
- відображення за допомогою інтеграла Крістофеля –

Шварца.

Як приклад проаналізуємо комплексну функцію вигляду $w = Az = A \ln(r \cdot e^{j\alpha})$ і визначимо, конформне перетворення яких полів здійснює ця функція.

Перетворимо задану функцію $r \cdot e^{j\alpha}$, виділивши уявну і дійсну частини

$$w(z) = A \ln(r \cdot e^{j\alpha}) = A \ln r + jA\alpha = u + jv.$$

Візьмемо за рівняння екіпотенціалей рівняння $u = A \ln r = \text{const}$ (рівняння концентричних кіл), тоді рівняння силових ліній матиме вигляд $v = A\alpha = \text{const}$ (рівняння радіальних прямих), а модуль напруженості електричного поля запишемо в такий спосіб:

$$\left| \vec{E} \right| = \left| \frac{dw(z)}{dz} \right| = \frac{A}{r}.$$

Задана функція здійснює перетворення поля одиночного провідника круглого перерізу. Сталу інтегрування A визначають за граничною умовою.

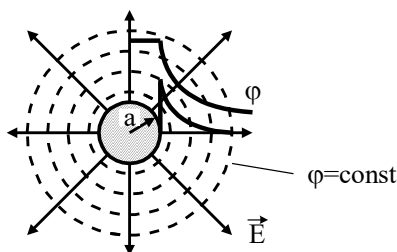
4.7 Приклади розв'язання задач

Теорема Гаусса

Приклад 1. Визначити напруженість і потенціал електричного поля провідної рівномірно зарядженої кулі: заряд кулі – Q , радіус – a .

Розв'язок. Оскільки куля провідна, то всередині кулі поле відсутнє $E = 0$ за умови $r < a$.

На поверхні кулі рівномірно розподілений сумарний заряд Q .



Для знаходження електричного поля поза кулею $r \geq a$ скористаємося теоремою Гаусса в інтегральній формі (див. п. 2.2), яку для нашого випадку запишемо в такий спосіб:

$$\epsilon_a \oint_s \vec{E} d\vec{S} = Q. \quad (4.17)$$

Рисунок 4.3 – Картина поля провідної рівномірно зарядженої кулі

За поверхню інтегрування виберемо сферу радіусом $r > a$ із центром у місці розміщення центра кулі (рис. 4.3). Очевидно, що через центральну симетрію \vec{E} і $d\vec{S}$ – колінеарні, а напруженість постійна на всій поверхні інтегрування. Тоді (4.17) набуде такого вигляду:

$$\varepsilon_a E \oint_S dS = Q,$$

звідси з урахуванням площі поверхні сфери маємо

$$\varepsilon_a E 4\pi r^2 = Q, \quad E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_a r^2}.$$

Потенціал кулі визначимо із загального співвідношення (див. п. 2.1) $\varphi = -\int_l \vec{E} d\vec{l}$, яке для нашої задачі набуде

$$\text{вигляду } \varphi = -\int E dr = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_a} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_a r} + C.$$

З отриманого виразу випливає, що $\varphi = 0$ за умови $r \rightarrow \infty$, отже, стала інтегрування $C = 0$.

$$\text{Відповідь: } E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_a r^2}, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_a r}.$$

Порівнюючи цю відповідь із прикладом 1.3 (див. п. 1.6), доходимо висновку, що поле провідної кулі із зарядом Q збігається з полем, яке має однаковий із ним точковий заряд за умови розміщення його в центрі кулі. Ідентичними є також картини полів (див. рис. 1.12 і рис. 4.3).

Приклад 2. Визначити напруженості і потенціал електричного поля діелектричної рівномірно зарядженої кулі: заряд кулі – Q , радіус – a .

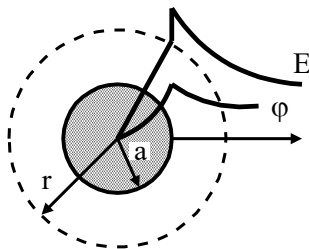


Рисунок 4.4 –
Рівномірно заряджена
діелектрична куля

Розв'язок. Оскільки куля діелектрична, то електричне поле буде наявне як усередині (завдяки поляризаційним ефектам), так і зовні кулі. Водночас електричне поле всередині кулі буде залежати від об'ємної густини заряду, тому теорему Гауса необхідно застосовувати для двох вищезазначених областей $r < a$ і $r \geq a$ (рис. 4.4).

За умови $r < a$

$$\varepsilon_a \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad (4.18)$$

де для нашої задачі $\rho = \frac{Q}{V_{\text{кулі}}} = \frac{Q}{4/3\pi a^3}$.

Підставивши в (4.18) значення ρ і перетворивши ліву частину за допомогою першого прикладу, матимемо

$$\varepsilon_a E \oint_S dS = \frac{Q}{4/3\pi a^3} \int_V dV. \quad (4.19)$$

Наявні в цій рівності інтеграли дорівнюють, відповідно, площі поверхні та об'єму кулі, що дозволяє рівність (4.19) записати в такому вигляді:

$$\varepsilon_a E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{4/3\pi a^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Зробивши нескладні перетворення, отримаємо такий вираз для напруженості електричного поля:

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi \varepsilon_{a1} a^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_{a1}}.$$

Потенціал усередині кулі

$$\varphi_1 = -\int E_1 dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_{a1}} \int r dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_{a1}} + C_1 = -\frac{Q r^2}{8\pi \varepsilon_{a1} a^3} + C_1.$$

За умови $r \geq a$ задача зводиться до прикладу 1, унаслідок чого маємо

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_{a2} r^2}, \quad \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_{a2} r} + C_2.$$

Сталі інтегрування C_1 та C_2 визначаються із граничних умов $\varphi_2 = 0$ за умови $r \rightarrow \infty$; $\varphi_1 = \varphi_2$ за умови $r = a$. Унаслідок отримуємо, як і для попередньої задачі, $C_2 = 0$.

З $\varphi_1 = \varphi_2$ за умови $r = a$ маємо

$$-\frac{Q a^2}{8\pi \varepsilon_{a1} a^3} + C_1 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_{a2} a},$$

$$\text{звідки } C_1 = \frac{Q}{4\pi a} \left(\frac{1}{\varepsilon_{a2}} + \frac{1}{2\varepsilon_{a1}} \right) = \frac{Q}{8\pi a} \cdot \frac{2\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} \varepsilon_{a2}}.$$

Унаслідок цього потенціал усередині кулі можна описати такою функцією:

$$\varphi_1 = -\frac{Q r^2}{8\pi \varepsilon_{a1} a^3} + \frac{Q}{8\pi a} \cdot \frac{2\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} \varepsilon_{a2}} = \frac{Q}{8\pi a} \left(\frac{2\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} \varepsilon_{a2}} - \frac{r^2}{\varepsilon_{a1} a^2} \right).$$

Відповідь:

$$\text{за умови } r < a \quad E_1 = \frac{Q r}{4\pi \varepsilon_{a1} a^3}, \quad \varphi_1 = \frac{Q}{8\pi a} \left(\frac{2\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} \varepsilon_{a2}} - \frac{r^2}{\varepsilon_{a1} a^2} \right),$$

$$\text{за умови } r \geq a \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_{a2} r^2}, \quad \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_{a2} r}.$$

Графічна картина розподілу полів і потенціалів для діелектричної кулі зображена на рисунку 4.4.

Закон повного струму

Приклад 1. Через дрiт круглого перерізу радіуса a проходить постійний струм I (рис. 4.5). Визначити напруженості магнітного поля H усередині і поза проводом. Побудувати якісну картину розподілу полів.

Розв'язок. Для знаходження магнітного поля всередині ($r \leq a$) і поза ($r \geq a$) проводом зі струмом скористаємося законом повного струму в інтегральній формі

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I, \quad (4.20)$$

де $I = \int_s \vec{\delta} d\vec{S}$.

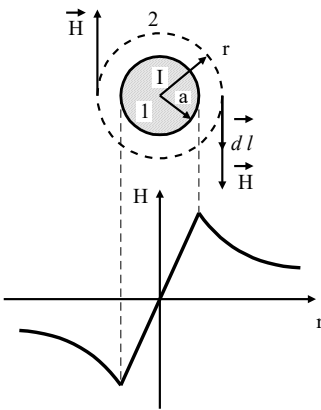


Рисунок 4.5 –
Картина магнітного поля
провідника зі струмом
кінцевого діаметра

За контури інтегрування виберемо два кола з радіусами $r \leq a$ і $r \geq a$. В обох випадках вектори \vec{H} і $d\vec{l}$ колінеарні, тому H постійне на контурі інтегрування, і його можна вивести за знак інтеграла

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = H \oint_l dl = H \cdot 2\pi r.$$

Вираз (4.20) набуде такого вигляду:

$$H = \frac{\sum I}{2\pi r}. \quad (4.21)$$

Для області $r \leq a$

$$\delta = \frac{I}{\pi a^2}, \quad I_1 = \int_S \frac{I}{\pi a^2} dS = \frac{I}{\pi a^2} \int_S dS = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \frac{\pi r^2}{2} = I \frac{r^2}{a^2}.$$

Підставимо в (4.21) значення I_1 та отримаємо, що

$$H_1 = \frac{I r}{2\pi a^2}.$$

Для області $r \geq a$: $I_2 = I$ і значення $H_2 = \frac{I}{2\pi r}$.

Відповідь:

$$H_1 = \frac{I r}{2\pi a^2} \text{ за умови } r \leq a;$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \text{ за умови } r \geq a.$$

З отриманих відповідей випливає, що всередині дроту поле змінюється за лінійним законом, а поза проводом – як $1/r$. Поза проводом зміна поля аналогічна до тонкого провідника зі струмом, розглянутим у прикладі 1.1 (див. п. 1.6).

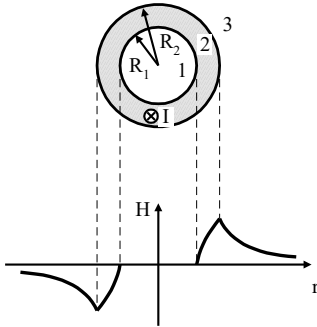


Рисунок 4.6 –
Картина магнітного
поля в трубі зі струмом

Приклад 2. Уздовж труби круглого перерізу із внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім радіусом R_2 проходить постійний струм I (рис. 4.6). Визначити напруженості магнітного поля H усередині труби, у тілі труби і поза трубою. Побудувати якісну картину поля.

Розв'язок. За контури інтегрування виберемо три кола з радіусами $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ і $r > R_2$. Для знаходження полів скористаємося виразом (4.21).

Для області $r < R_1$ струм усередині контура $I = 0$, отже, $H_1 = 0$.

Для області $R_1 < r < R_2$

$$\delta = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)},$$

$$\oint_S dS = S_2 = \pi(R_2^2 - R_1^2) \text{ — площа кільця шириною } R_2 - R_1.$$

$$\text{Тоді } I_2 = \delta S_2 = \frac{I\pi(r^2 - R_1^2)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{I(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Підставляючи значення I_2 в (4.21), отримуємо

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}.$$

$$\text{Для області } r > R_2 \text{ } I_3 = I, \text{ тому } H_3 = \frac{I}{2\pi r}.$$

Відповідь:

$$H_1 = 0 \text{ за умови } r < R_1;$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)} \text{ за умови } R_1 < r < R_2;$$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r} \text{ за умови } r > R_2.$$

З отриманих відповідей випливає те, що всередині труби поле відсутнє, у тілі труби і поза трубою поле змінюється за законом $1/r$ зі збільшенням абсолютного значення H у першому випадку і зменшенням його у другому випадку.

Приклад 3. По внутрішньому провіднику коаксіального кабелю радіуса R_1 і зовнішньому провіднику товщиною $R_3 - R_2$ у протилежних напрямках проходить постійний струм I (рис. 4.7). Визначити напруженість магнітного поля в провідниках кабелю, а також у внутрішній і зовнішній областях. Побудувати якісну картину розподілу полів.

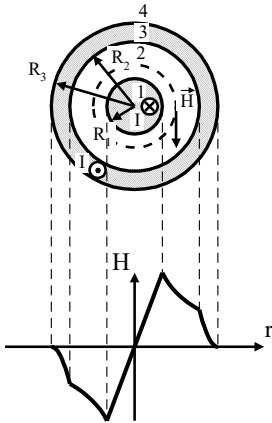


Рисунок 4.7 – Картина магнітного поля в коаксіальному кабелі

Розв'язок. За контури інтегрування візьмемо чотири області з радіусами $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$ і $r > R_3$. Для знаходження полів, як і раніше, скористаємося співвідношенням (4.21).

Область $r < R_1$ являє собою провідник радіуса R_1 зі струмом I і напруженістю магнітного поля, визначеною в прикладі 1

$$H_1 = \frac{I r}{2\pi R_1^2}.$$

В області $R_1 < r < R_2$ магнітне поле визначено струмом внутрішнього провідника I та може бути записано у вигляді

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}.$$

Поле в області $R_2 < r < R_3$ визначається за принципом накладення полів, створених внутрішнім і зовнішнім провідниками. З урахуванням того, що зовнішній провідник являє собою трубу зі струмом I , то його власне поле H_{mp} визначається аналогічно прикладу 2 таким виразом:

$$H_{mp} = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} H_3 = H_2 - H_{mp} &= \frac{I}{2\pi r} - \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} = \\ &= \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \right). \end{aligned}$$

Знак « \leftarrow » за умови накладання полів обумовлений протилежним напрямком струмів у внутрішньому і зовнішньому провідниках.

Для області $r > R_3$ з отриманого виразу для H_3 бачимо, що за умови $r = R_3$ магнітне поле на поверхні кабелю відсутнє, отже, $H_4 = 0$.

$$\text{Відповідь: } H_1 = \frac{I r}{2\pi R_1^2} \text{ за умови } r < R_1;$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \text{ за умови } R_1 < r < R_2;$$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \right) \text{ за умови } R_2 < r < R_3;$$

$$H_4 = 0 \text{ за умови } r > R_3.$$

На рисунку 4.7 наведено картину розподілу магнітного поля в коаксіальному кабелі, з якої випливає, що магнітне поле наявне по всьому поперечному перерізу кабелю, обмеженому його зовнішньою частиною оболонки.

Рівняння Пуассона і Лапласа для одновимірних полів

Приклад 1. Повітряний конденсатор складається із двох плоских пластин, розміщених по осі x на відстані d (рис. 4.8). Одна пластина заземлена, інша пластина під'єднана до позитивного електрода джерела постійної напруги U . Між пластинами розподілений вільний заряд з об'ємною щільністю $\rho(x) = -kx$. Визначити $\varphi(x)$ і $E(x)$.

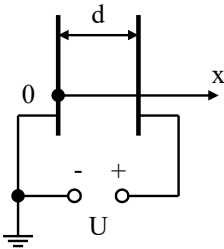


Рисунок 4.8 –
Плоский конденсатор

Розв'язок. Рівняння Пуассона для плоского конденсатора

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{k}{\varepsilon_0} x.$$

Унаслідок інтегрування по x маємо

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{k}{2\varepsilon_0} x^2 + C_1.$$

Після повторного інтегрування по x отримаємо

$$\varphi = \frac{k}{6\varepsilon_0} x^3 + C_1 x + C_2.$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 можна знайти із граничних умов $\varphi = 0$ за умови $x = 0$; $\varphi = U$ за умови $x = d$.

З першої граничної умови випливає, що $C_2 = 0$, а із другої

$$U = \frac{kd^3}{6\epsilon_0} + C_1 d.$$

Звідси

$$C_1 = \frac{U}{d} - \frac{kd^2}{6\epsilon_0}.$$

Тоді

$$\varphi = \frac{k}{6\epsilon_0} x^3 + \left(\frac{U}{d} - \frac{kd^2}{6\epsilon_0} \right) x, \quad E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{k}{2\epsilon_0} x^2 - \frac{U}{d} + \frac{kd^2}{6\epsilon_0}.$$

$$\text{Відповідь: } \varphi(x) = \frac{k}{6\epsilon_0} x^3 + \frac{6U\epsilon_0 - kd^3}{6d\epsilon_0} x,$$

$$E(x) = -\left(\frac{k}{2\epsilon_0} x^2 + \frac{6U\epsilon_0 - kd^3}{6d\epsilon_0} \right).$$

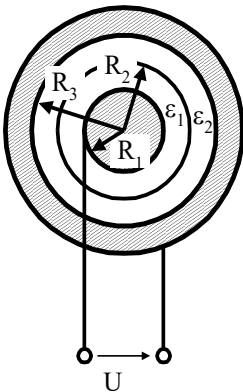


Рисунок 4.9 –
Двошаровий
циліндричний
конденсатор

Приклад 2. Циліндричний конденсатор із двома шарами діелектрика ϵ_1 і ϵ_2 (рис. 4.9) під'єднаний до джерела постійної напруги U . Визначити закон розподілу потенціалу в кожному шарі, якщо заряд у другому шарі змінюється за законом $\rho = ar^2$.

Розв'язок. Потенціал для циліндричного конденсатора можна визначити із рівняння Пуассона в циліндричній системі координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Унаслідок аксіальної симетрії циліндричного конденсатора $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0\right)$ та рівномірності розподілу заряду по всій довжині конденсатора $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0\right)$ рівняння Пуассона набуде вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{ar^2}{\varepsilon_a}.$$

З рівняння Пуассона для шару радіусом R_2 унаслідок подвійного інтегрування маємо

$$\varphi_1(r) = -\frac{ar^4}{16\varepsilon_{a1}} + C_1 \ln r + C_2.$$

З рівняння Лапласа для шару радіусом R_3 , для якого $\rho = 0$, знаходимо аналогічно

$$\varphi_2(r) = C_3 \ln r + C_4.$$

Визначимо константи інтегрування із граничних умов

1) $\varphi_1 = U$ за умови $r = R_1$. Тоді

$$U = -\frac{aR_1^4}{16\varepsilon_{a1}} + C_1 \ln R_1 + C_2;$$

2) $\varphi_2 = 0$ за умови $r = R_3$. Тоді

$$0 = C_3 \ln R_3 + C_4;$$

3) $\varphi_1 = \varphi_2$ за умови $r = R_2$. Тоді

$$-\frac{aR_2^4}{16\varepsilon_{a1}} + C_1 \ln R_2 + C_2 = C_3 \ln R_2 + C_4;$$

4) $D_{1n} = D_{2n}$ за умови $r = R_2$. Тоді $\varepsilon_{a1}E_{1n} = \varepsilon_{a2}E_{2n}$ або $\varepsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$. Звідки випливає

$$\varepsilon_{a1} \left(-\frac{aR_2^3}{4\varepsilon_{a1}} - \frac{C_1}{R_2} \right) = \varepsilon_{a2} \frac{C_3}{R_2}.$$

Розв'язуючи систему із чотирьох рівнянь, можна знайти сталі інтегрування, а, відповідно, і значення потенціалів для першої та другої областей. (Розв'язання системи рівнянь студенти виконують самостійно).

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } \varphi_1(r) &= \frac{a(R_1^4 - r^4)}{16\varepsilon_{a1}} + \\ &+ \left(\frac{\left(16\varepsilon_{a1}\varepsilon_{a2}U + 4a\varepsilon_{a1}R_2^4 \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) + a\varepsilon_{a2}(R_1^4 - R_2^4) \right)}{16\varepsilon_{a1} \left(\varepsilon_{a1} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + \varepsilon_{a2} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + U, \\ \varphi_2(r) &= \left(\frac{\left(16\varepsilon_{a1}\varepsilon_{a2}U + 4a\varepsilon_{a1}R_2^4 \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) + a\varepsilon_{a2}(R_1^4 - R_2^4) \right)}{16\varepsilon_{a2} \left(\varepsilon_{a1} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + \varepsilon_{a2} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} + \frac{aR_2^4}{4\varepsilon_{a2}} \right) \times \\ &\times \ln\left(\frac{R_3}{r}\right). \end{aligned}$$

Приклад 3 (зворотна задача). Чи може потенціал електричного поля φ в області простору, де об'ємна густина заряду $\rho = 0$, виражатися рівнянням у циліндричній системі координат

$$\varphi(r, \alpha, z) = 3r^2 \cos^3 \alpha + 5r - \cos^3 \alpha?$$

Розв'язок. Запишемо рівняння Лапласа в циліндричній системі координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Перевіримо, чи виконується рівність $\nabla^2 \varphi = 0$.

Знайдемо кожний доданок

$$r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 6r^2 \cos^3 \alpha + 5r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 12 \cos^3 \alpha + \frac{5}{r}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 3r^2 \cdot 3 \cos^2 \alpha (-\sin \alpha) - 3 \cos^2 \alpha (-\sin \alpha).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} &= -9r^2 (\cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot 2 \cos \alpha (-\sin \alpha)) + \\ &+ 3 \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha + 6 \cos \alpha (-\sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 12 \cos^3 \alpha + \frac{5}{r} - 9 \cos^3 \alpha + 18 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \\ &+ \frac{3}{r^2} \cos^3 \alpha - \frac{6}{r^2} \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 3 \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \cos^3 \alpha + \\ &+ 6 \left(3 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \frac{5}{r} \neq 0. \end{aligned}$$

Відповідь: не може.

Метод розділення змінних

Приклад 1. Визначити потенціал і напруженість поля всередині і поза провідним незарядженим ($\tau=0$) нескінченно довгим циліндром радіусом R , який поміщений в однорідне електричне поле E_0 , методом розділення змінних. Циліндр і навколишнє його середовище мають питомі провідності γ_1 і γ_2 . Зовнішнє поле напруженістю E_0 перпендикулярне до осі циліндра z (рис. 4.10).

Розв'язок. Рівняння Лапласа в циліндричній системі координат з урахуванням відсутності складової по осі z (циліндр нескінченно довгий)

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

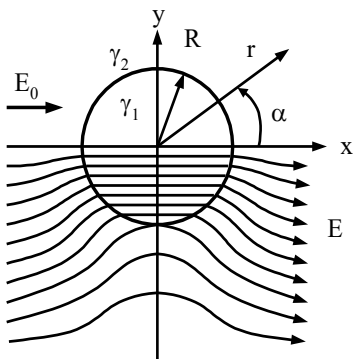


Рисунок 4.10 –
Провідний циліндр
в однорідному
електричному полі

Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$\varphi = M(r)N(\alpha).$$

Одержимо два звичайні диференціальні рівняння, які містять незалежний параметр K , що не залежить від r і α

$$\frac{r}{M(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right) = K^2,$$

$$\frac{1}{N(\alpha)} \frac{d^2 N}{d\alpha^2} = -K^2.$$

Розв'язки отриманих диференціальних рівнянь матимуть такий вигляд:

$$M(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2 - 1) A_n r^{n-2} = 0,$$

звідси $n = \pm 1$,

$$N(\alpha) = A \cos(K\alpha) + B \sin(K\alpha).$$

Визначимо функцію $N(\alpha)$ за граничними умовами для сталої розділення K . Оскільки потенціал є парною функцією щодо α , тобто $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, -\alpha)$, то $B = 0$ і $N(K\alpha) = A \cos(K\alpha)$.

Якщо вважати, що потенціал на осі y дорівнює нулю $\varphi(r, \pm \pi/2) = 0$, то $N(\pm \pi/2) = 0$, а отже, $K = 1$. За $K > 1$ нульова потенційна лінія буде нахилена до осі y , що не відповідає досліджуваному полю (потенціал дорівнює нулю по осі z). Отже, $N(\alpha) = A \cos \alpha$.

Розв'язок рівняння, що відповідає частковому значенню $K = 1$, такий:

$$\varphi(r, \alpha) = M(r)N(\alpha) = (C_1 r + C_2 / r) \cos \alpha.$$

Тоді потенціал усередині і поза циліндром матиме такий вигляд:

$$\varphi_i(r, \alpha) = (C_{1i} r + C_{2i} / r) \cos \alpha = -\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0 r \cos \alpha,$$

$$\varphi_e(r, \alpha) = (C_{1e} r + C_{2e} / r) \cos \alpha = E_0 \left(\frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)} \cdot \frac{R^2}{r} - r \right) \cos \alpha.$$

Значення сталих інтегрування знаходять із граничних умов (див. п. 4.4):

$$1) \varphi_i = \varphi_e \text{ за умови } r = R;$$

$$2) \delta_{in} = \delta_{en} \text{ (тобто } \gamma_1 \left(-\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right)_{r=R} = \gamma_2 \left(-\frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right)_{r=R} \text{)}.$$

Напруженість поля всередині і поза циліндром

$$E = \sqrt{\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2}.$$

Усередині циліндра напруженість поля має те ж саме значення і напрямок $E_i = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0 = \text{const}$.

Поза циліндром

$$E_e = E_0 \sqrt{\left(\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}\right) \cdot \frac{R^2}{r^2} + 1\right)^2 \cos^2 \alpha + \left(\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}\right) \cdot \frac{R^2}{r} - 1\right)^2 \sin^2 \alpha}.$$

Картина поля наведена на рисунку 4.10.

Відповідь: потенціали провідного циліндра в зовнішньому електричному полі дорівнюють

$$\varphi_i = -\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0 r \cos \alpha, \quad \varphi_e = E_0 \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \frac{R^2}{r} - r \right) \cos \alpha,$$

напруженість поля всередині циліндра постійна

$$E_i = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0 = \text{const}, \quad \text{поза циліндром напруженість поля}$$

$$E_e = E_0 \sqrt{\left(\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}\right) \cdot \frac{R^2}{r^2} + 1\right)^2 \cos^2 \alpha + \left(\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}\right) \cdot \frac{R^2}{r} - 1\right)^2 \sin^2 \alpha}.$$

Приклад 2. На підставі загального розв'язку задачі для кулі в зовнішньому однорідному полі (див. п. 4.4) визначити потенціал і напруженість поля провідної кулі радіусом R із зарядом Q , розміщеної в діелектричному сере-

довищі із проникністю ε . Зовнішнє поле напруженістю E_0 спрямоване вздовж осі z (рис. 4.11).

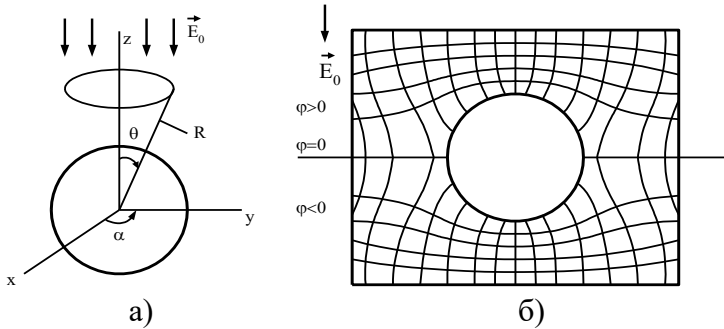


Рисунок 4.11 – Провідна куля в однорідному електричному полі діелектричного середовища:
 а) куля у сферичній системі координат;
 б) картина поля

Розв'язок. Оскільки куля провідна, то поле всередині кулі відсутнє ($\varphi_i = 0$), розв'язок для потенціалу кулі, розміщеної в зовнішньому однорідному полі, має такий вигляд:

$$\varphi_e = \frac{C_{1e}}{r} + C_{2e} + \left(C_{3e}r + \frac{C_{4e}}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (4.22)$$

У (4.22) наявні чотири невідомі сталі C_{1e} , C_{2e} , C_{3e} і C_{4e} , для визначення яких необхідно врахувати не тільки умову на поверхні кулі, але й умови на нескінченно великій відстані від кулі, тобто на нескінченності.

Сукупність досить віддалених від кулі точок в умовному сенсі розглядають водночас як нескінченність. Якщо куля не заряджена, то всі точки площини xOy , яка проходить через центр кулі, мають той самий потенціал (позначимо через φ_0).

У разі віддалення від кулі на великі відстані $z = r \cos \theta$, порівняно з якими радіус кулі R досить малий, змушувальна дія кулі на поле проявляється як збурення від точкового заряду Q . Потенціал на нескінченності можна визначити так:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r} + \varphi_0 + E_0 r \cos \theta. \quad (4.23)$$

Перший доданок правої частини (4.23) дає складову потенціалу від заряду кулі Q , доданок $E_0 r \cos \theta$ ураховує приріст потенціалу від напруженості рівномірного поля E_0 на шляху $z = r \cos \theta$. Оскільки розв'язок (4.22) годиться і для точок поля, досить далеко віддалених від кулі, то можна порівняти вирази (4.22) і (4.23). Вони повинні давати той самий результат. Це буде тільки в тому разі, коли відповідні доданки в обох виразах рівні. З порівняння випливає, що

$$C_2 = \varphi_0, \quad C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a}, \quad C_3 = E_0.$$

Порівняння на нескінченності не дає можливості знайти величину C_4 , тому що в (4.23) немає складових, які змінюються обернено пропорційно другому ступеню r . Для знаходження C_4 скористаємося тим, що в умовах електростатики всі точки поверхні кулі мають той самий потенціал. Ця умова рівносильна тому, що тангенціальна складова напруженості поля на поверхні кулі дорівнює нулю. За умови $r = R$

$$\varphi = const = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + \left(E_0 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos \theta + \varphi_0.$$

Права частина буде постійною зі зміною θ тільки за умови, що $\left(E_0 R + \frac{C_4}{R^2}\right) = 0$. Звідси $C_4 = -E_0 R^3$.

Отже, для всіх точок діелектрика

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r} + E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta + \varphi_0. \quad (4.24)$$

Оскільки потенціал залежить тільки від r і θ , напруженість електричного поля має тільки дві складові

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2} - E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad (4.25)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta.$$

Якщо $Q = 0$, то на поверхні кулі (за умови $r = R$) $E_r = -3E_0 \cos \theta$.

За умови $\theta = 0$ напруженість $E_r = -3E_0$; за умови $\theta = 180^\circ$ $E_r = 3E_0$, тобто в цих точках напруженість утричі більша за напруженість рівномірного поля E_0 , у яке була внесена куля. На «екваторі» за умови $\theta = 90^\circ$ напруженість дорівнює нулю.

$$\text{Відповідь: } \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r} + E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta + \varphi_0,$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2} - E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad E_\theta = E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta.$$

З аналізу останніх випадків випливає, що крапелька води, потрапивши в бак трансформатора з масляним запо-

внення, викликає значне місцеве збільшення напруженості поля.

На рисунку 4.11, б наведено загальну картину розподілу електричного поля (вектора \vec{D} і еквіпотенціальних ліній) для провідної кулі в діелектричному середовищі.

Приклад 3. У рівномірне електричне поле $E_0 = 800$ В/м внесена куля з діелектрика ($\varepsilon_1 = 4$) радіусом $R = 2$ см. Навколишнє середовище – повітря ($\varepsilon_2 = 1$). Потенціали всередині φ_i і поза φ_e кулею змінюються за законами

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 r \frac{3\varepsilon_2}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \cos \theta,$$

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(r + \frac{R^3}{r^2} \cdot \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \right) \cos \theta.$$

Визначити напруженості електричного поля E за умови $r = 1$ см, $\theta = 0^\circ$ і за умови $r = 10$ см, $\theta = 90^\circ$.

Розв'язок. Оскільки за умовою задачі маємо кулю, то розв'язок задачі зручно виконувати у сферичній системі координат.

Використовуємо вираз (1.3) $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$.

З урахуванням відсутності залежності потенціалу φ від кута α вираз для $\text{grad}\varphi$ у сферичній системі координат набуде вигляду

$$\text{grad}\varphi = r^0 \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \theta^0 \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = r^0 (-E_r) + \theta^0 (-E_\theta),$$

де r^0 і θ^0 – одиничні орти, $E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}$.

Знайдемо поле всередині кулі

$$E_{ri} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \cos\theta,$$

$$E_{\theta i} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = E_0 \frac{3\varepsilon_2}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \sin\theta.$$

Тоді

$$E_i = E_0 \frac{3\varepsilon_2}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = E_0 \frac{3\varepsilon_2}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}.$$

Знайдемо поле поза кулею

$$E_{re} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -E_0 \left(1 - \frac{2R^3}{r^3} \cdot \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \right) \cos\theta,$$

$$E_{\theta e} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = E_0 \left(1 + \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \right) \sin\theta.$$

Тоді

$$E_e = E_0 \sqrt{\left(1 - \frac{2R^3}{r^3} \cdot \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \right)^2 \cos^2\theta + \left(1 + \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \right)^2 \sin^2\theta}.$$

$$\text{За умови } r = 1 \text{ см, } \theta = 0^\circ, \quad E = E_i = E_0 \frac{3\varepsilon_2}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} =$$

$$= 400 \text{ В/м.}$$

За умови $r = 10$ см, $\theta = 90^\circ$,

$$E = E_{re} = E_0 \left(1 - \frac{2R^3}{r^3} \cdot \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \right) \cos\theta = 793,6 \text{ В/м.}$$

Відповідь: за умови $r = 1$ см і $\theta = 0^\circ$ $E = 400$ В/м,

за умови $r = 10$ см і $\theta = 90^\circ$ $E = 793,6$ В/м.

Метод дзеркальних зображень

Приклад 1. На відстані h від границі поділу двох діелектриків із діелектричними проникностями ε_1 і ε_2 у сере-

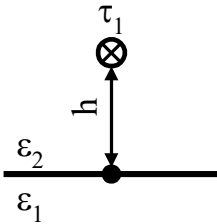


Рисунок 4.12 –
Заряджена нитка
над границею поділу
двох діелектриків

довищі з ε_2 розміщена заряджена нитка з лінійною щільністю заряду τ (рис. 4.12). Визначити потенціал φ і напруженість електричного поля E для точки, яка лежить на границі поділу діелектриків за нормаллю від заряду, вважаючи її такою, що належить двом середовищам.

Розв'язок. Для розв'язання задачі скористаємося методом дзеркальних зображень. Розглянемо два випадки:

- 1) точка належить верхній півплощині;
- 2) точка належить нижній півплощині.

У першому випадку вводимо уявну нитку з лінійною щільністю заряду $\tau_2 = \tau_1 \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}$ і заміняємо середовище з ε_1 на середовище з ε_2 (рис. 4.13, а).

Поле, створене зарядженою ниткою, визначається за формулою (див. приклад 2.5) $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r}$.

Поле, створене двома зарядженими нитками,

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_{a2}h} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_{a2}h} = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_{a2}h} \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) = \frac{\tau_1}{\pi h(\varepsilon_{a2} + \varepsilon_{a1})}.$$

Потенціал зарядженої нитки визначається за формулою (див. приклад 2.5)

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r}.$$

Тоді потенціал від двох заряджених ниток за законом накладення полів

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_{a2}} \ln \frac{1}{h} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_{a2}} \ln \frac{1}{h} = \frac{\tau_1}{\pi(\epsilon_{a2} + \epsilon_{a1})} \ln \frac{1}{h}.$$

У другому випадку замінимо заряджену нитку з τ_1 на уявну нитку з $\tau_3 = \tau_1 \frac{2\epsilon_1}{(\epsilon_2 + \epsilon_1)}$, а середовище з ϵ_2 на середовище з ϵ_1 (див. рис. 4.13, б).

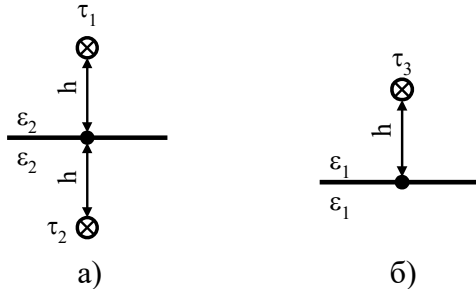


Рисунок 4.13 – Метод дзеркальних зображень для визначення E в точці, яка перебуває:
 а) у верхній півплощині;
 б) у нижній півплощині

Тоді напруженість електричного поля, створеного зарядженою ниткою з τ_3 ,

$$E = \frac{\tau_3}{2\pi\epsilon_{a1}h} = \frac{\tau_1}{\pi h(\epsilon_{a2} + \epsilon_{a1})}.$$

Потенціал

$$\varphi = \frac{\tau_3}{2\pi\varepsilon_{a1}} \ln \frac{1}{h} = \frac{\tau_1}{\pi(\varepsilon_{a2} + \varepsilon_{a1})} \ln \frac{1}{h}.$$

Відповідь: для точки, яка перебуває на границі поділу двох середовищ, напруженість електричного поля

$$E = \frac{\tau_1}{\pi h(\varepsilon_{a2} + \varepsilon_{a1})}; \text{ потенціал } \varphi = \frac{\tau_1}{\pi(\varepsilon_{a2} + \varepsilon_{a1})} \ln \frac{1}{h}.$$

Приклад 2. Над границею поділу двох магнітних середовищ із магнітними проникностями $\mu_1 = 1$ і $\mu_2 = 999$ у середовищі з μ_1 на відстані R від границі розміщений провідник зі струмом. Визначити напруженості магнітного поля в точках M і N (рис. 4.14). $R = 2$ см; точка M перебуває на відстані $R_1 = 2$ см від провідника зі струмом; точка N перебуває на відстані 4 см від точки M перпендикулярно до поверхні поділу; сила струму $I_1 = 10$ А. Знайти напруженості магнітного поля H у точках M і N .

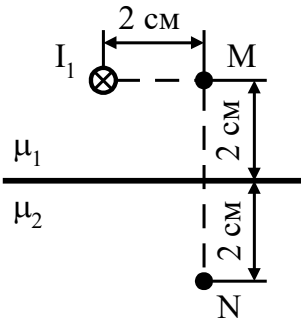


Рисунок 4.14 –
Провідник зі струмом
над поверхнею поділу
двох середовищ

Розв'язок. Для розв'язання задачі скористаємося методом дзеркальних зображень.

Для знаходження поля в точці M уведемо уявний струм

$$I_2 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_2 + \mu_1)} I_1$$

і замінимо середовище з магнітною проникністю μ_2 на середовище з μ_1 (рис. 4.15 а). Тоді за принципом накладення напруженість магнітного поля в точці M

$$\vec{H}_M = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

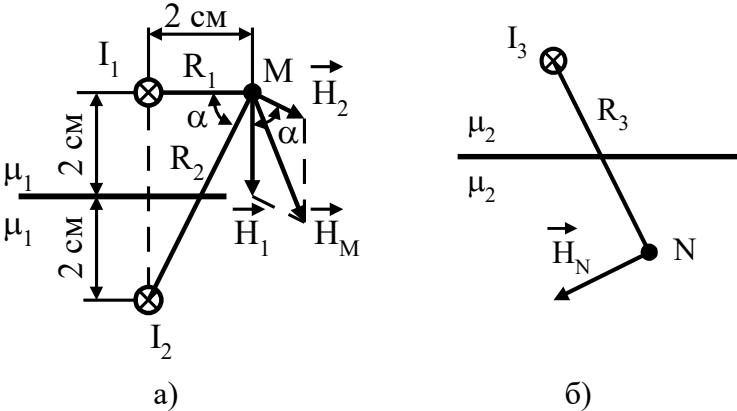


Рисунок 4.15 – Метод дзеркальних зображень для визначення H : а) у точці M ; б) у точці N

Для прямолінійного провідника зі струмом

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1} = 79,5 \text{ А/м},$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2} = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_2 + \mu_1)} \cdot \frac{I_1}{2\pi \sqrt{R_1^2 + (2R_1)^2}} = 35,4 \text{ А/м}.$$

Склавши два вектори за формулою косинусів

$$H_M = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + 2H_1H_2 \cos \alpha},$$

отримаємо $H_M = 101 \text{ А/м}$. Тут

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Для знаходження поля в точці N замінимо струм I_1 уявним струмом I_3

$$I_3 = \frac{2\mu_1}{(\mu_2 + \mu_1)} I_1,$$

а середовище з μ_1 на середовище з μ_2 (рис. 4.15, б).

Тоді

$$H_N = \frac{I_3}{2\pi R_3} = \frac{\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{I_1}{\pi\sqrt{R_1^2 + (2R_1)^2}} = 0,0715 \text{ А/м.}$$

Відповідь: $H_M = 101 \text{ А/м}$, $H_N = 0,0715 \text{ А/м}$.

Приклади розрахунків параметрів деяких компонент електричних кіл

Приклад 1. Вивести формулу для напруженості електричного поля E коаксіального кабелю через напругу U і розрахувати, під яку напругу U можна ввімкнути кабель, якщо максимальна напруженість E_{\max} поля не повинна перевищувати 1/3 пробивної напруженості $E_{np} = 2 \times 10^4 \text{ кВ/м}$. Кабель має такі розміри: радіус внутрішньої жили $R_1 = 2 \text{ мм}$, радіус оболонки $R_2 = 5 \text{ мм}$.

Розв'язок. Розглянемо жилу кабелю як заряджену нитку, для якої напруженість електричного поля E визначається за формулою (див. приклад 2.5)

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r},$$

де τ – лінійна густина заряду.

Тоді

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Підставивши $\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} = Er$ в останній вираз, отримаємо

$$U = Er \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Звідси

$$E = \frac{U}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Оскільки за умовою задачі $E_{\max} = \frac{E_{np}}{3}$

$$(E = E_{\max} \text{ за умови } r = R_1), \text{ то } E_{\max} = \frac{U}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Звідки

$$U_{np} = \frac{E_{np}}{3} R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 12,2 \text{ кВ.}$$

Відповідь: напруженість електричного поля коаксіального кабелю

$$E = \frac{U}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

пробивна напруга $U_{np} = 12,2 \text{ кВ.}$

Приклад 2. Вивести формулу для визначення величини напруженості поля E двошарового плоского конденсатора (рис. 4.16). Товщина першого шару діелектрика з ϵ_{a1} дорівнює d_1 , другого шару

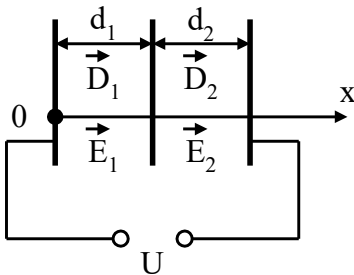


Рисунок 4.16 –
Двошаровий плоский
конденсатор

з ε_{a2} дорівнює d_2 . Вважати, що $\varepsilon_{a1} = 2\varepsilon_{a2}$, $d_2 = 1,5d_1$, напруга на конденсаторі дорівнює U .

Розв'язок. Нехай до першого шару конденсатора прикладена напруга U_1 , до другого – U_2 . Прикладена напруга U пов'язана з напруженістю електричного поля E виразом

$$U = \int_1^2 E dx.$$

Причому

$$U = U_1 + U_2 = \int_0^{d_1} E_1 dx + \int_{d_1}^{d_1+d_2} E_2 dx = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Тут ураховано те, що напруженість електричного поля E в кожному шарі конденсатора постійна.

Оскільки вектор \vec{E} спрямований нормально до поверхні пластин конденсатора, то $E = E_n$. Із граничних умов $D_{1n} = D_{2n}$ випливає, що $\varepsilon_{a1} E_1 = \varepsilon_{a2} E_2$ або

$$E_2 = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}} E_1.$$

Тоді

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}} d_2}, \quad E_2 = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}} \cdot \frac{U}{d_1 + \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}} d_2} = \frac{U}{d_2 + \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}} d_1}.$$

За умови $\varepsilon_{a1} = 2\varepsilon_{a2}$ і $d_2 = 1,5d_1$ отримаємо, що

$$E_1 = \frac{1}{4} \frac{U}{d_1}, \quad E_2 = \frac{3}{4} \frac{U}{d_2}.$$

Відповідь: $E_1 = \frac{1}{4} \frac{U}{d_1}$, $E_2 = \frac{3}{4} \frac{U}{d_2}$.

Приклад 3. Сталева пластина являє собою 3/4 диска з концентрично вирізаним круглим отвором (рис. 4.17). Внутрішній радіус диска $R_1 = 1$ см, зовнішній радіус $R_2 = 2$ см. Товщина пластини постійна. Між кінцями пластини підтримується постійна різниця потенціалів U . Знайти різницю потенціалів $\varphi_2 - \varphi_1$, якщо найбільше значення густини струму $\delta_{\max} = 5 \times 10^6$ А/м², питома провідність сталі $\gamma = 10^7$ См/м.

Розв'язок. Різниця потенціалів $\varphi_2 - \varphi_1$ пов'язана з напруженістю виразом $\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} \vec{dr} = E \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi r = \frac{3\pi}{2} E r$.

Звідки

$$E = \frac{2(\varphi_2 - \varphi_1)}{3\pi r}.$$

Із закону Ома випливає, що

$$\delta = \gamma E = 2\gamma \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{3\pi r}.$$

За умовою задачі відома максимальна густина

струму δ_{\max} ($\delta = \delta_{\max}$ за умови $r = R_1$). Тоді

$$\delta_{\max} = 2\gamma \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{3\pi R_1}.$$

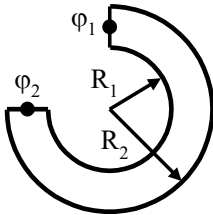


Рисунок 4.17 –
Сектор диска
з отвором

$$\text{Різниця потенціалів } \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi R_1 \delta_{\max}}{2\gamma} = 0,0235 \text{ В.}$$

Відповідь: різниця потенціалів $\varphi_2 - \varphi_1 = 0,0235 \text{ В.}$

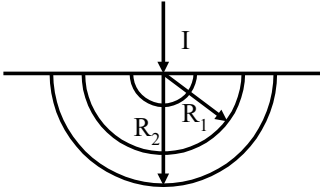


Рисунок 4.18 –
Заземлювач

Приклад 4. Заземлювач являє собою металеву півсферу (рис. 4.18). Через заземлювач проходить струм $I = 1000 \text{ А}$; питома провідність землі $\gamma = 10^{-2} \text{ Ом}^{-1} \times \text{м}^{-1}$. Знайти напругу U між точками, розміщеними на відстані $R_1 = 22 \text{ м}$ і $R_2 = 23 \text{ м}$ від заземлювача.

Розв'язок. Напруга U пов'язана з напруженістю електричного поля E формулою

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} dr.$$

Напруженість \vec{E} можна визначити із закону Ома

$$\vec{E} = \frac{\vec{\delta}}{\gamma}.$$

Оскільки струм I проходить через півсферу (площа сфери $S_{сф} = 4\pi r^2$), то

$$\delta = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi r^2}.$$

Тоді

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 31,9 \text{ В.}$$

Відповідь: напруга між точками 1 і 2 $U_{12} = 31,9 \text{ В.}$

Приклад 5. У циліндричному конденсаторі з недосконалою ізоляцією питома провідність міняється за законом

$$\gamma = \gamma_1 (2 - kr),$$

де $\gamma_1 = 10^{-9}$ См/см;

$$k = 0,1 \text{ см}^{-1}.$$

Радіус внутрішнього циліндра $a = 5$ см, радіус зовнішнього циліндра $b = 10$ см; довжина конденсатора $l = 1$ м. Конденсатор під'єднаний до постійної напруги $U = 1$ кВ. Знайти закон розподілу густини струму $\delta(r)$ як функцію відстані r від осі циліндра. Обчислити струм втрати $I_{\text{втр}}$.

Розв'язок. Струм втрати $I_{\text{втр}}$ (струм через бічну поверхню) можна визначити за формулою

$$I_{\text{втр}} = \int_{S_{\text{біч}}} \vec{\delta} d\vec{S} = \delta S_{\text{біч}} = \delta \cdot 2\pi r l.$$

Густину струму можна визначити із закону Ома в диференційній формі $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$. Тоді

$$I_{\text{втр}} = 2\pi r l \gamma E.$$

Напруженість поля E не відома, але відома прикладена напруга U , яка пов'язана з E виразом

$$U = \int_a^b E dr = \frac{I_{\text{втр}}}{2\pi l \gamma_1} \int_a^b \frac{1}{(2 - kr)r} dr = \frac{I_{\text{втр}}}{4\pi l \gamma_1} \ln \left(\frac{b(2 - ka)}{a(2 - kb)} \right).$$

Звідси струм втрати

$$I_{\text{впр}} = \frac{4\pi l \gamma_1 U}{\ln\left(\frac{b(2-ka)}{a(2-kb)}\right)} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

Тоді з урахуванням заданих параметрів густину струму визначимо в такий спосіб:

$$\delta = \frac{2\gamma_1 U}{r \ln\left(\frac{b(2-ka)}{a(2-kb)}\right)} = \frac{2\gamma_1 U}{r \ln(2-0,1r)} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{r \ln(2-0,1r)}.$$

Відповідь: струм втрати $I_{\text{впр}} = 1,13 \cdot 10^{-3}$ А, розподіл густини струму $\delta(r) = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{r \ln(2-0,1r)}$.

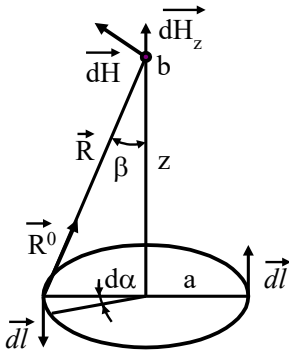


Рисунок 4.19 –
Коловий контур
зі струмом

Приклад 6. За допомогою закону Біо – Савара – Лапласа вивести формулу для визначення напруженості магнітного поля H на осі колового витка радіусом a зі струмом I (рис. 4.19).

Розв'язок. Закон Біо – Савара – Лапласа має вигляд

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[\vec{dl} \times \vec{r}^0]}{r^2}.$$

Магнітна індукція \vec{B} і напруженість магнітного поля \vec{H}

зв'язані між собою формулою $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. За теоремою Піфагора (див. рис. 4.19)

$$R^2 = a^2 + z^2.$$

З урахуванням цього можна записати, що

$$\vec{dH} = \frac{I}{4\pi} \frac{\left[\vec{dl} \times \vec{r}^0 \right]}{\left(a^2 + z^2 \right)}.$$

Векторний добуток $\left[\vec{dl} \times \vec{r}^0 \right] = \left| \vec{dl} \right| \left| \vec{r}^0 \right| \sin \angle \vec{dl} \vec{r}^0 =$

$$= dl \sin \angle \vec{dl} \vec{r}^0.$$

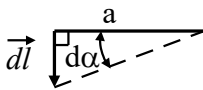


Рисунок 4.20 –
Визначення кута $d\alpha$

З іншого боку, з рисунка 4.20

бачимо, що $\operatorname{tg}(d\alpha) = \frac{dl}{a}$.

Для малих кутів $d\alpha$
 $\operatorname{tg}(d\alpha) \approx d\alpha$, тоді $dl = a d\alpha$.

З урахуванням цього можна записати, що

$$\vec{dH} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{a d\alpha}{\left(a^2 + z^2 \right)} \sin \angle \vec{dl} \vec{r}^0.$$

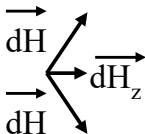


Рисунок 4.21 –
Вектор \vec{dH} у точці А

У точці А поле dH буде створювати кожна ділянка витка dl .

Вектори \vec{dH} у точці А створюють симетричне кінцеве віяло (рис. 4.21). Результуючий вектор

$$\vec{dH}_z = \vec{dH} \sin \beta$$

буде перпендикулярним до площини витка, тобто $\vec{r}_z^0 \perp \vec{dl}$.
Тоді

$$\sin \angle \vec{dl} \vec{r}_z^0 = \sin 90^\circ = 1.$$

З рисунка 4.22 бачимо, що $\sin \beta = \frac{a}{R} = \frac{a}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$.

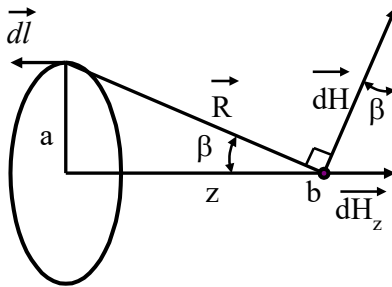


Рисунок 4.22 – Визначення $\sin \beta$

Тоді напруженість магнітного поля, створеного ділянкою витка dl , у точці A $d\vec{H}_z = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{a^2 d\alpha}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$.

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо

$$\vec{H}_z = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Відповідь: напруженість магнітного поля на осі колового витка зі струмом $H = \frac{I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$.

Приклад 7. Постійний струм $I = 5$ А проходить уздовж рамки, виконаної у вигляді правильного багатокутника, вписаного в коло радіусом $a = 10$ см (рис. 4.23). Кількість сторін багатокутника $n = 6$, кількість витків рамки $\omega = 5$. Визначити напруженість магнітного поля H у центрі багатокутника.

Розв'язок. Напруженість магнітного поля H в центрі багатокутника дорівнює сумі напруженостей, створених кожною стороною багатокутника. Напруженість кожної сторони можна розглядати як напруженість відрізка дроту $H = \frac{I}{4\pi h} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$.

З рисунка 4.23 бачимо, що

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1, \quad \cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2,$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{h}{a}.$$

Звідси $h = a \sin \alpha_1$.

Тоді

$$\begin{aligned} H &= \frac{I}{4\pi a \sin \alpha_1} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_1) = \\ &= \frac{I}{2\pi a} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1}. \end{aligned}$$

З рисунка 4.23 бачимо,

$$\text{що } \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}, \quad \text{де } \beta = \frac{2\pi}{n}.$$

Тоді

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

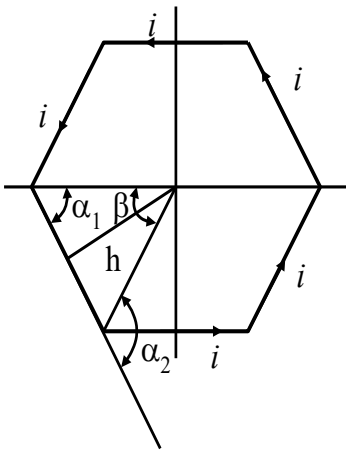


Рисунок 4.23 –
Багатокутник
зі струмом

Напруженість магнітного поля H від $n = 6$ сторін буде в n разів більше; від ω витків – у ω разів більше. Тоді сумарна напруженість магнітного поля

$$H = \frac{In\omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)}{2\pi a \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)} = \frac{In\omega \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\pi a \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{In\omega}{2\pi a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = 143,6 \text{ А/м.}$$

Відповідь: у центрі багатокутника напруженість магнітного поля $H = 143,6$ А/м.

Приклад 8. Прямолінійний довгий дріт і прямокутна одновиткова рамка розміщені в одній площині. Розміри рамки: $b = 50$ см; $c = 30$ см. Уздовж дроту проходить синусоїдальний струм $i = I_m \sin(10t)$ з амплітудою $I_m = 10$ А. Рамка рухається зі швидкістю $v = 80$ см/с у напрямку, перпендикулярному до осі дроту (рис. 4.24). Записати вираз для е. р. с., яку наведено в рамці, якщо за умови $t = 0$ найближча сторона рамки перебуває на відстані $a = 10$ см від осі дроту. Знайти миттєве значення е. р. с., коли найближча сторона рамки перебуває на відстані $x = 20$ см від її початкового положення.

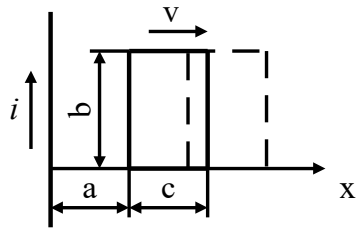


Рисунок 4.24 – Провідник зі струмом і прямокутна рамка

Розв’язок е. р. с., яку наведено в рамці, дорівнює сумі е. р. с., обумовленої зміною магнітного поля в часі (e_1), і е. р. с., обумовленої рухом рамки (e_2), тобто $e = e_1 + e_2$.

Значення e_1 можна визначити із закону Фарадея

$$e_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

де магнітний потік $\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}$.

Зі свого боку, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $dS = bdx$. Тоді

$$\Phi = \mu_0 b \int_x \vec{H} dx.$$

Напруженість магнітного поля H можна визначити із закону повного струму

$$\oint_l \vec{H} dl = i.$$

Звідки

$$H = \frac{i}{2\pi r} = \frac{i}{2\pi(a+x)};$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \int_x^{c+x} \frac{dx}{a+x} = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{a+c+x}{a+x}.$$

Оскільки за умовою задачі $i = 10 \sin(10t)$, то

$$e_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\omega \mu_0 b I_m \cos(\omega t)}{2\pi} \ln \frac{a+c+x}{a+x}.$$

Е. р. с., наведена з одного боку рамки на відстані a від провідника зі струмом, обумовлена рухом рамки, дорівнює

$$\begin{aligned} e_{21} &= \oint_l \left[\vec{v} \times \vec{B}_1 \right] dl = \oint_l v B_1 \sin 90^\circ dl = v \oint_l B_1 dl = v \mu_0 \oint_l H_1 dl = \\ &= v \mu_0 b H_1. \end{aligned}$$

Е. р. с., наведена з одного боку рамки на відстані $(a+c)$, дорівнює

$$e_{22} = v\mu_0 b H_2,$$

$$\text{тут } H_1 = \frac{i}{2\pi(a+x)}, \quad H_2 = \frac{i}{2\pi(a+c+x)}.$$

Тоді е. р. с. між проводами, які перебувають на відстані c ,

$$e_2 = e_{21} - e_{22} = \frac{vb\mu_0 I_m \sin(\omega t)}{2\pi} \left[\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+c+x} \right].$$

Подавши $t = \frac{x}{v}$, отримаємо остаточний вираз для е. р. с.

$$e = -\frac{\mu_0 b I_m}{2\pi} \left[\omega \ln \frac{a+c+x}{a+x} \cos\left(\omega \frac{x}{v}\right) - v \left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+c+x} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\omega \frac{x}{v}\right) \right].$$

За умови $x = 20 \text{ см}$ $e = 6,32 \cdot 10^{-6} \text{ В}$.

$$\text{Відповідь: е. р. с., наведена в рамці, } e = -\frac{\mu_0 b I_m}{2\pi} \times \\ \times \left[\omega \ln \frac{a+c+x}{a+x} \cos\left(\omega \frac{x}{v}\right) - v \left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+c+x} \right) \sin\left(\omega \frac{x}{v}\right) \right].$$

За умови $x = 20 \text{ см}$ $e = 6,32 \cdot 10^{-6} \text{ В}$.

Приклад 9. Визначити тангенс кута α , який утворюється напруженістю електричного поля \vec{E} з нормаллю \vec{n} до поверхні мідної жили коаксіального кабелю (рис. 4.25) у точці, яка перебуває на її поверхні. Підрахувати величини

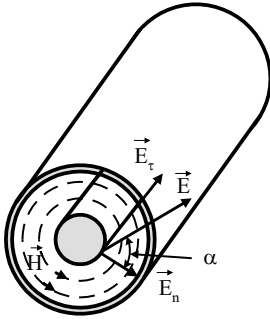


Рисунок 4.25 –
Коаксіальний кабель

ну потоку вектора Пойнтінга через бічну поверхню жили на довжині в $l = 1$ м. Радіус жили $R_1 = 0,3$ см; внутрішній радіус оболонки $R_2 = 1$ см; струм, який проходить кабелем, $I = 50$ А; напруга між жилою та оболонкою $U = 10$ кВ; питома провідність міді $\gamma = 5,7 \times 10^7$ Ом⁻¹ м⁻¹.

Розв'язок. З умови задачі випливає, що $tg\alpha = \frac{E_\tau}{E_n}$ (див.

рис. 4.25), де E_n обумовлена прикладеною напругою між жилою та оболонкою коаксіального кабелю, тобто $E_n = f(U)$.

Зобразимо жилу кабелю як заряджену нитку, для якої

$$E_n = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r},$$

де τ – лінійна густина заряду, невідома з умови задачі.

Тоді

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_n dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

З порівняння двох останніх виразів бачимо, що

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} = E_n r$$

або

$$U = E_n r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Звідси

$$E_n = \frac{U}{r \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

На поверхні жили (за умовою задачі)

$$E_n = \frac{U}{R_1 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

З рисунка 4.25 бачимо, що E_τ обумовлена струмом, який проходить кабелем, тобто $E_\tau = f(I)$. Отже, E_τ можна визначити із закону Ома

$$E_\tau = \frac{\delta}{\gamma}.$$

$$\text{Густина струму } \delta = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R_1^2}.$$

$$\text{Тоді } E_\tau = \frac{I}{\gamma \pi R_1^2}, \quad \text{tg} \alpha = \frac{E_\tau}{E_n} = \frac{I \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{U \gamma \pi R_1^2} = 1,1 \cdot 10^{-7}.$$

Знайдемо потік вектора Пойнтінга $\oint_{S_{\text{бічн}}} \vec{\Pi} dS$ через

бічну поверхню. Оскільки $\vec{\Pi} = \left[\vec{E} \times \vec{H} \right]$, то всі три вектори

взаємно перпендикулярні. Якщо вектор Пойнтінга $\vec{\Pi}$ спрямований через бічну поверхню (за умовою задачі), а вектор напруженості магнітного поля \vec{H} перебуває в поперечному перерізі кабелю, то вектор напруженості елект-

ричного поля \vec{E} буде спрямований уздовж коаксіального кабелю, тобто $\vec{E} = E_r$.

Оскільки вектори $\vec{\Pi}$ і \vec{dS} спрямовані перпендикулярно до бічної поверхні, то кут між ними дорівнює нулю. Також вектор Пойнтінга $\vec{\Pi}$ постійний по всій бічній поверхні жили кабелю. Тоді можна записати

$$\begin{aligned} \oint_{S_{\text{біч}}} \vec{\Pi} \vec{dS} &= \oint_{S_{\text{біч}}} \Pi dS \times \cos 0^\circ = \Pi \oint_{S_{\text{біч}}} dS = E_r H S_{\text{біч}} = \frac{I^2 l}{\pi \gamma R_1^2} = \\ &= 1,523 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\text{tg} \alpha = 1,1 \cdot 10^{-7}$, потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню коаксіального кабелю $\oint_{S_{\text{біч}}} \vec{\Pi} \vec{dS} = 1,523 \text{ Вт}$.

Питання для самоперевірки

1. Які основні методи розв'язання задач використовують у «Теорії поля»?
2. У чому полягає перевага аналітичних методів розв'язання задач перед числовими?
3. Які існують аналітичні методи аналізу стаціонарних полів?
4. Для якого типу задач застосовують теорему Гаусса і закон повного струму?
5. У чому полягає метод безпосереднього інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа?
6. Для розв'язання задач якого типу застосовують метод розділення змінних (метод Фур'є)?
7. У чому полягає метод розділення змінних?
8. Для розрахунків яких полів застосовують метод дзеркальних зображень?

9. Яким штучним прийомом користуються в методі дзеркальних зображень?
10. У чому полягає метод конформного перетворення (відображення)?
11. Чим відрізняється метод інтегральних рівнянь від методу кінцевих елементів?
12. Яка послідовність визначення потенціалів методом сіток?
13. У чому полягає універсальний метод кінцевих різниць у часовій області (метод FDTD)?
14. Чим відрізняються експериментальні методи моделювання полів від числових методів?
15. Які існують методи інтегрування рівнянь Лапласа і Пуассона?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Воробйов Г. С. Електромагнітні поля та хвилі : навчальний посібник / Г. С. Воробйов, К. О. Пушкарьов, А. І. Рубан. – Суми : Вид-во СумДУ, 2002. – 112 с.
2. Теорія електромагнітного поля і основи техніки НВЧ : навчальний посібник / С. В. Соколов, Л. Д. Писаренко, В. О. Журба ; за загальною редакцією Г. С. Воробйова. – Суми : Сумський державний університет, 2011. – 394 с.
3. Теорія поля : підручник / В. О. Москалюк, Т. А. Саурова. – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 244 с.
4. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Магнітне та електромагнітне поле : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 167 с.
5. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 406 с.
6. Бушок Г. Ф. Курс фізики : у 2-х кн. – Кн. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. – 2-ге видання / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – Київ : Либідь, 2001. – 448 с.
7. Бушок Г. Ф. Курс фізики : навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів. – Кн. 2. Електрика і магнетизм / Г. Ф. Бушок, Є. Ф. Венгер. – Київ : Вища школа, 2003. – 278 с.
8. Вища математика: математичний аналіз, диференційні рівняння : підручник / І. І. Веренич, В. П. Лавренчук, Г. С. Пасічник, І. М. Черевко. – Чернівці : Рута, 2008. – 255 с.
9. Perspectives of applications of new modifications of resonant quasi-optical structures in EHF equipment and

electronics / G. S. Vorobyov, M. V. Petrovsky, A. I. Ruban and all // Telecommunications and Radio Engineering. – 2007. – № 66 (20). – P. 1839–1862.

10. The Smith-Pursell effect amplification of the electromagnetic waves in an open waveguide with a metal-dielectric layer / G. S. Vorobyov, A. S. Krivets, M. V. Petrovsky and all. // Telecommunications and Radio Engineering. – 2003. – № 59 (10, 11 and 12). – P. 80–92.

11. Дежко В. І. Гідрогазодинаміка : навч. посіб. / В. І. Дежко, В. О. Виноградов-Салтиков, В. Г. Федоров. – Київ : НТУУ «КПІ», 2014. – 414 с.

12. Константінов Ю. М. Технічна механіка рідини і газу : підручник / Ю. М. Константінов, О. О. Гіжа. – Київ : Вища школа, 2002. – 277 с.

13. Гусак О. Г. Гідрогазодинаміка : навчальний посібник / О. Г. Гусак, С. О. Шарапов, О. В. Ратушний. – Суми : Сумський державний університет, 2022. – 296 с.

14. Смыслов В. В. Гідравліка і аеродинаміка : підручник. – Київ : Вища школа, 1971. – 348 с.

15. Колчунов В. І. Теоретична та прикладна гідромеханіка : навчальний посібник. – Київ : НАУ, 2004. – 336 с.

16. Вамболь С. О. Технічна механіка рідини і газу : підручник / С. О. Вамболь, І. В. Міщенко. – Харків : НУЦЗУ, 2016. – 300 с.

Навчальне видання

Рубан Анатолій Іванович,
Гогоці Юрій Георгійович,
Гусак Олександр Григорович

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Підручник

Художнє оформлення обкладинки А. І. Рубана
Редактор І. О. Кругляк
Комп'ютерне верстання: А. І. Рубан, С. О. Шарапов

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 16,28. Обл.-вид. арк. 12,96. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.