



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Лисенко О.В.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У ФІЗИЦІ

Конспект лекцій
У двох частинах
Частина 2

Суми
Сумський державний університет
2023

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Лисенко О.В.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У ФІЗИЦІ

Конспект лекцій
для спеціальності 113 Прикладна математика

У двох частинах
Частина 2

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри
прикладної математики та
моделювання складних систем
як конспект лекцій із дисципліни
«Математичні моделі у фізиці».
Частина 2.
Протокол № 2 від 07.02.2023 р.

Суми
Сумський державний університет
2023

«Математичні моделі у фізиці» : конспект лекцій : у двох частинах / укладач О. В. Лисенко. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – Ч. 2. – 256 с.

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

ЗМІСТ

	С.
РОЗДІЛ 1 ПОЛЬОВІ МОДЕЛІ В ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМІ	9
ТЕМА 1 МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ.....	9
§ 1 Магнітне поле. Дослід Ерстеда. Закон Ампера. Напрямок і модуль вектора індукції магнітного поля. Принцип суперпозиції.....	9
§ 2 Сила Лоренца	12
§ 3 Рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі.....	12
§ 4 Закон Біо – Савара – Лапласа. Індукція магнітного поля, створеного відрізком із струмом. Індукція нескінченно довгого прямого провідника зі струмом. Індукція на осі колового струму.....	17
§ 5 Взаємодія двох нескінченно довгих паралельних провідників. Ампер – одиниця вимірювання сили струму.....	20
§ 6 Сила, що діє на контур із струмом в однорідному магнітному полі. Момент сил, що діють на контур із струмом у магнітному полі. Вимірювання індукції магнітного поля за допомогою контура зі струмом	21
§ 7 Робота під час переміщення контура зі струмом у магнітному полі	24
§ 8 Теорема Гаусса для магнітного поля у вакуумі. Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції	25
§ 9 Магнітне поле тороїда. Магнітне поле нескінченного соленоїда	26
ТЕМА 2 МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ.....	28
§ 10 Намагнічування речовини. Гіпотеза Ампера. Намагніченість	28
§ 11 Теорема Гаусса для індукції магнітного поля в речовині. Напруженість магнітного поля. Теорема про циркуляцію напруженості магнітного поля.....	29
§ 12 Магнітна проникність, магнітна сприйнятливність.....	31
§ 13 Умови для векторів індукції та напруженості магнітного поля на межі двох магнетиків.....	33
§ 14 Гіромагнітне відношення. Дослід Ейнштейна і де Хааса.....	35
§ 15 Типи магнетиків. Якісне пояснення магнітних властивостей речовини	37
ТЕМА 3 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ.....	39
§ 16 Досліди Фарадея. Закон Фарадея. Правило Ленца	39
§ 17 Електрорушійна сила індукції (механізм виникнення) у рухомих і нерухомих контурах. Максвеллівське трактування закону електромагнітної індукції	41
§ 18 Явище самоіндукції. Індуктивність. Індуктивність довгого соленоїда. ЕРС самоіндукції	42
§ 19 Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність. ЕРС взаємної індукції.....	44
§ 20 Енергія магнітного поля. Енергія соленоїда	44
§ 21 Струм після замикання та розмикання електричного кола	46
ТЕМА 4 РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА	48
§ 22 Вихрове електричне поле. Інтегральна й диференціальна форми закону електромагнітної індукції.....	48
§ 23 Струм зміщення Максвелла.....	50
§ 24 Система фундаментальних рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формах. Матеріальні рівняння.....	53
РОЗДІЛ 2 АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЬ РІЗНОЇ ПРИРОДИ	55
ТЕМА 5 КОЛИВАЛЬНІ ПРОЦЕСИ.....	55
§ 25 Гармонічні коливання та їх характеристики. Диференціальне рівняння гармонічних коливань. Зміна енергії під час гармонічного коливання.....	55
§ 26 Періоди коливань фізичного, математичного та пружинного маятників	57
§ 27 Електричний коливальний контур. Частота коливань.....	60

§ 28 Векторна діаграма. Додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й частоти.....	61
§ 29 Биття	63
§ 30 Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу	64
§ 31 Диференціальне рівняння загасальних коливань.....	66
§ 32 Розв'язування диференціального рівняння загасальних коливань. Коефіцієнт загасання, декремент загасання, логарифмічний декремент загасання, добротність	68
§ 33 Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язання	70
§ 34 Резонанс. Резонансна частота	72
§ 35 Закон Ома для змінних струмів. Імпеданс. Ємнісний та індуктивний опори	74
ТЕМА 6 ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ	78
§ 36 Хвилі в пружному середовищі. Поперечні й поздовжні хвилі. Довжина хвилі. Рівняння біжучої хвилі. Фазова швидкість, хвильове число.....	78
§ 37 Хвильове рівняння. Фазова швидкість поширення хвиль у твердому тілі й газі	82
§ 38 Густина енергії пружної хвилі.....	83
§ 39 Густина потоку енергії. Інтенсивність	85
§ 40 Звукові хвилі та їх використання. Висота, тембр і гучність звуку. Рівень гучності. Ефект Доплера для звукових хвиль.....	87
§ 41 Стоячі хвилі.....	90
§ 42 Хвильовий пакет. Групова швидкість	92
§ 43 Хвильове рівняння для електромагнітної хвилі. Фазова швидкість поширення електромагнітної хвилі.....	94
§ 44 Напруженість електричних і магнітних полів у лінійно поляризованій електромагнітній хвилі.....	95
§ 45 Вектор Пойнтінга	97
§ 46 Випромінювання диполя.....	98
§ 47 Ефект Доплера для електромагнітних хвиль	100
РОЗДІЛ 3 ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ХВИЛЬОВОЇ ОПТИКИ	102
ТЕМА 7 ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА	102
§ 48 Інтерференція монохроматичного світла від двох джерел. Умови, за яких спостерігається інтерференція монохроматичного світла. Умови інтерференційного мінімуму й максимуму.....	102
§ 49 Когерентність. Механізм випромінювання світла атомами. Час когерентності. Довжина когерентності. Радіус когерентності.....	105
§ 50 Дослід Юнга. Ширина інтерференційних смуг	106
§ 51 Дзеркала Френеля. Ширина інтерференційних смуг.....	108
§ 52 Інтерференція світла в разі відбиття від тонких плівок. Різниця ходу променів. Смуги рівного нахилу. Смуги рівної товщини	109
§ 53 Кільця Ньютонів. Радіуси темних і світлих кілець	110
ТЕМА 8 ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА	112
§ 54 Принцип Гюйгенса – Френеля.....	112
§ 55 Метод зон Френеля. Радіус зони Френеля. Амплітуда коливань світлової хвилі від точкового ізотропного джерела	113
§ 56 Дифракція Френеля на круглomu отворі. Амплітуда світлового вектора в центрі дифракційної картини. Характер дифракційної картини.....	117
§ 57 Дифракція Френеля на круглomu диску. Амплітуда світлового вектора в центрі дифракційної картини. Характер дифракційної картини.....	119
§ 58 Дифракція Фраунгофера на щілині. Амплітуда й інтенсивність світла, максимуми та мінімуми.....	120

§ 59 Дифракція Фраунгофера на дифракційних ґратках. Амплітуда й інтенсивність світла, максимуми та мінімуми.....	123
§ 60 Дисперсія й роздільна здатність дифракційних ґраток. Роздільна здатність об'єктива	126
§ 61 Дифракція на просторових структурах. Закон Вульфа – Брегга. Рентгенівська спектроскопія. Рентгеноструктурний аналіз.....	128
ТЕМА 9 ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА.....	131
§ 62 Поляризоване й природне світло. Поляризатор. Ступінь поляризації.....	131
§ 63 Закон Малюса. Проходження природного світла через поляризатор.....	133
§ 64 Поляризація світла під час відбиття та заломленні. Закон Брюстера	134
§ 65 Явище подвійної променезаломлюваності. Призма Ніколя. Четвертьхвильова пластинка. Явище дихроїзму.....	135
ТЕМА 10 ПОШИРЕННЯ СВІТЛА В РЕЧОВИНІ	138
§ 66 Дисперсія світла. Аномальна та нормальна дисперсія. Показник заломлення світла з погляду електронної теорії речовини	138
РОЗДІЛ 4 МОДЕЛІ ДЛЯ ОПИСУ КВАНТОВОЇ ПРИРОДИ ВИПРОМІНЮВАННЯ. 141	
ТЕМА 11 ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ	141
§ 67 Теплове випромінювання, енергетична світність, поглинальна та випромінювальна здатності тіла. Зв'язок між випромінювальною здатністю як функцією частоти та випромінювальною здатністю як функцією довжини хвилі	141
§ 68 Закон Кірхгофа. Універсальна функція Кірхгофа. Експериментальне дослідження універсальної функції Кірхгофа	142
§ 69 Закон Стефана – Больцмана, формула Віна, закон зміщення Віна	144
§ 70 Формула Релея – Джинса. Ультрафіолетова катастрофа.....	145
§ 71 Гіпотеза Планка. Формула Планка	148
ТЕМА 12 ФОТОНИ	150
§ 72 Гальмівне рентгенівське випромінювання. Короткохвильова межа рентгенівського випромінювання	150
§ 73 Зовнішній фотоэффект. Закони фотоэффекту. Формула Ейнштейна для фотоэффекту.....	151
§ 74 Фотони. Дослід Боте. Властивості фотонів. Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла.....	154
§ 75 Ефект Комптона. Зміна довжини хвилі фотона під час його розсіювання на електроні.....	156
РОЗДІЛ 5 ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЕЙ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ.....	158
ТЕМА 13 БОРІВСЬКА ТЕОРІЯ АТОМА	158
§ 76 Дослід Резерфорда. Ядерна модель атома. Залежність кількості α -частинок в одиниці тілесного кута від кута розсіювання. Проблема стабільності атома з погляду ядерної моделі атома	158
§ 77 Постулати Бора. Правило квантування орбіт. Досліди Франка й Герца	161
§ 78 Спектральні закономірності у випромінюванні атома водню. Терми. Комбінаційний принцип Рітца	163
§ 79 Борівська теорія воднеподібного атома. Узагальнена формула Бальмера. Стала Рідберга. Недоліки теорії Бора	164
ТЕМА 14 ХВИЛЬОВІ ВЛАСТИВОСТІ МІКРОЧАСТИНОК.....	166
§ 80 Гіпотеза де Бройля. Довжина хвилі де Бройля для електрона, що вільно рухається	166
§ 81 Досліди Девісона й Джермера. Досліди Томсона і Тартаковського	167
§ 82 Статистична інтерпретація хвиль де Бройля.....	168
§ 83 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга.....	170
ТЕМА 15 КВАНТУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН	172

§ 84 Хвильова функція. Фізична сутність ψ -функції. Стандартні умови для хвильової функції.....	172
§ 85 Загальне й стаціонарне рівняння Шредінгера.....	173
§ 86 Рівняння Шредінгера та квантування енергії.....	175
§ 87 Частинка в одновимірній потенціальній ямі. Енергія та хвильова функція частинки в потенціальній ямі.....	176
§ 88 Тунельний ефект. Коефіцієнт проходження.....	178
§ 89 Оператори фізичних величин. Власні функції та власні значення. Принцип суперпозиції.....	182
§ 90 Середні значення фізичних величин із погляду операторного підходу. Оператори радіуса-вектора, імпульсу, енергії. Зв'язок між власними й середніми значеннями.....	183
§ 91 Комутативність операторів. Умови, за яких дві фізичні величини можуть бути виміряні одночасно.....	185
§ 92 Квантування моменту імпульсу. Модуль та одна з проєкцій моменту імпульсу. Азимутальне і магнітне квантові числа.....	186
ТЕМА 16 ФІЗИКА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ.....	188
§ 93 Атом водню з погляду квантової механіки. Квантові числа: n , l , m_l . Кратність виродження. Правило відбору.....	188
§ 94 Магнетизм атомів. Дослід Штерна й Герлаха. Спін електрона.....	192
§ 95 Принцип Паулі. Періодична система елементів Д. І. Менделєєва з погляду квантової механіки.....	195
§ 96 Спонтанне й вимушене випромінювання. Коефіцієнти Ейнштейна.....	200
§ 97 Інверсна заселеність. Лазери.....	201
ТЕМА 17 СТАТИСТИКИ БОЗЕ – ЕЙНШТЕЙНА ТА ФЕРМІ – ДІРАКА ТВЕРДИХ ТІЛ.....	205
§ 98 Розподіли Фермі – Дірака та Бозе – Ейнштейна.....	205
§ 99 Фотонний газ. Густина енергії фотонного газу.....	209
§ 100 Фононний газ. Теплоємність кристалічної ґратки.....	210
§ 101 Електронний газ у металах.....	213
ТЕМА 18 ЗОННА ТЕОРІЯ ТВЕРДИХ ТІЛ.....	217
§ 102 Енергетичні зони в кристалах. Зона провідності, заборонена зона, валентна зона. Метали, напівпровідники, діелектрики з погляду зонної теорії.....	217
§ 103 Напівпровідники. Власні, домішкові напівпровідники. Рух електронів та дірок. Рівень Фермі. Залежність провідності власних напівпровідників від температури.....	219
§ 104 Домішкова провідність напівпровідників. Донорні рівні, акцепторні рівні.....	222
§ 105 Контакт електронного та діркового напівпровідників. Електричне поле p - n -переходу. Потенціальний бар'єр p - n -переходу. Вольт-амперна характеристика. Напівпровідниковий діод.....	224
§ 106 Транзистор. База, емітер, колектор. Транзисторний підсилювач напруги.....	227
РОЗДІЛ 6 МОДЕЛІ ФІЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА Й ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК.....	228
ТЕМА 19 АТОМНЕ ЯДРО Й ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ.....	228
§ 107 Склад і характеристика атомного ядра. Ізотопи, ізобари, ізотони, ізомери.....	228
§ 108 Дефект маси й енергія зв'язку ядра. Залежність питомої енергії зв'язку ядра від масового числа.....	230
§ 109 Краплинна та оболонкова моделі ядра.....	231
§ 110 Ядерні сили.....	232
§ 111 Закон радіоактивного розпаду. Середній час життя, період піврозпаду, активність радіоактивної речовини. Види радіоактивного розпаду.....	233
§ 112 Альфа-розпад. Енергія α -частинок. Теорія Гамова – Герні – Кондона.....	234

§ 113 Бета-розпад. Види бета-розпаду. Енергія β -частинок. Теорія Фермі. Слабка взаємодія.....	236
§ 114 Ядерні реакції. Енергія реакції. Гранична кінетична енергія. Компаунд- ядро. Реакція зриву. Реакція захоплення. Ефективний переріз ядерної реакції.....	238
§ 115 Поділ ядер. Ланцюгова ядерна реакція. Ядерна бомба. Ядерний реактор.....	242
§ 116 Термоядерні реакції. Дейтерій-тритієвий синтез. Протон-протонний цикл. Вуглецевий цикл.....	246
§ 117 Види взаємодій і класи елементарних частинок	247
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	228
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	251

РОЗДІЛ 1

ПОЛЬОВІ МОДЕЛІ В ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМІ

ТЕМА 1 МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

§ 1 Магнітне поле. Дослід Ерстеда. Закон Ампера. Напрямок і модуль вектора індукції магнітного поля. Принцип суперпозиції

1 У природі трапляються деякі залізні руди, що мають властивість притягувати до себе невеликі залізні предмети, розміщені поблизу, наприклад, залізні ошурки або цвяхи. Якщо кусок такої руди підвісити на нитці, він зорієнтується в напрямку з півночі на південь (рис. 1.1). Куски такої руди називають *природними магнітами*. Кусок заліза або сталі, що знаходиться поблизу магніту, сам намагнічується, тобто одержує здатність притягувати до себе інші залізні предмети.

2 Можна виготовити магніт у вигляді дуже довгого й тонкого стрижня. Подібний магніт називають *магнітною стрілкою*. Часто магнітну стрілку виготовляють у вигляді витягнутого ромба (рис. 1.2). Якщо таку стрілку підвісити або укріпити на вістрі так, щоб вона могла вільно обертатися, то вона завжди встановлюється так, щоб один із її полюсів був повернутий на північ, а інший – на південь. Так само орієнтується й будь-який магніт, підвішений на тонкій легко закрученій нитці. *Полюс магніту повернутий на північ, називають північним полюсом, а інший полюс – південним.*

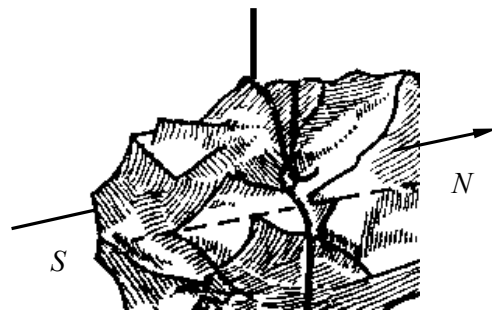


Рисунок 1.1 – Магнітна руда, підвішена на нитці, орієнтується певним чином

Магнітні стрілки особливо зручні для виявлення магнітних властивостей природного або штучного магніту. Наближаючи до стрілки магніт, ми побачимо, що її північний полюс притягується до південного полюса магніту й відштовхується від північного (навпаки). Отже, магнітна стрілка під дією магніту повертається відносно своєї осі.

3 Як показує дослід, взаємодія між магнітами здійснюється за допомогою магнітного поля. *Магнітне поле – це матеріальний об'єкт, що орієнтує магнітну стрілку в просторі.* З дослідів випливає, що магнітне поле має спрямований характер. Тому *магнітне поле характеризують вектором магнітної індукції \vec{B}* . За *напрямок вектора \vec{B}* , за визначенням, беруть напрямок від південного полюса S до північного N магнітної стрілки, що вільно встановилася у магнітному полі (див. рис. 1.2).

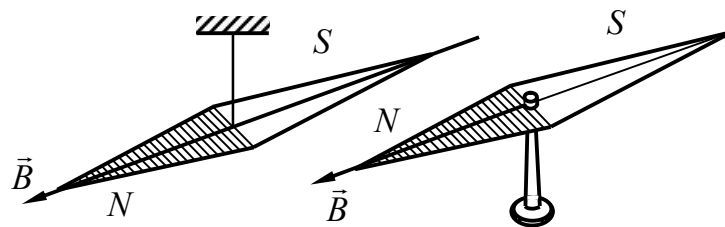


Рисунок 1.2 – Магнітні стрілки у вигляді витягнутого ромба: ліворуч – підвішена на нитці; праворуч – укріплена на вістрі

4 Історичним у розумінні сутності магнітного поля став дослід Ерстеда (1820 р.). Ерстед розмістив над магнітною стрілкою прямолінійний провідник (рис. 1.3) паралельно стрілці. Стрілка могла вільно обертатися навколо вертикальної осі. Коли по провіднику пропускали електричний струм, магнітна стрілка відхилялася й встановлювалася перпендикулярно до провідника. У разі зміни напрямку струму стрілка поверталася на 180° . Те саме відбувалося, коли провідник переносили вниз і розміщували під стрілкою. Отже,

дослід Ерстеда доводить, що в просторі, який оточує електричний струм, створюється магнітне поле.

5 У попередньому пункті ми говорили про те, що провідники зі струмом створюють навколо себе магнітне поле. Виявляється, що є й інша властивість, *магнітне поле діє на провідники зі струмом*. Для доведення цього виконаємо такий дослід. Два паралельних металевих стрижні *A* й *B* розмістимо між полюсами магніту *N* та *S* (рис. 1.4). Легкий металевий стрижень *C* опирається своїми кінцями на стрижні *A* й *B* і може вільно переміщатися уздовж них. Стрижні *A* й *B* приєднані до акумуляторної батареї *B* через комутатор *K*, за допомогою якого можна замикати та розмикати електричне коло, утворене провідниками *A*, *C* і *B*, а також змінювати напрямок електричного струму в ньому.

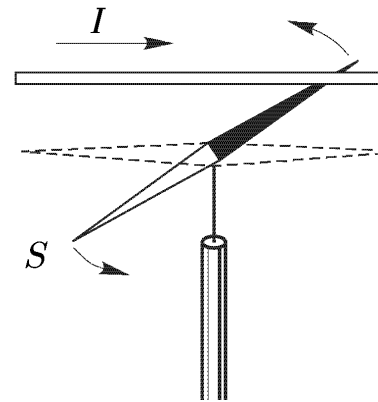


Рисунок 1.3 – Схема досліді Ерстеда

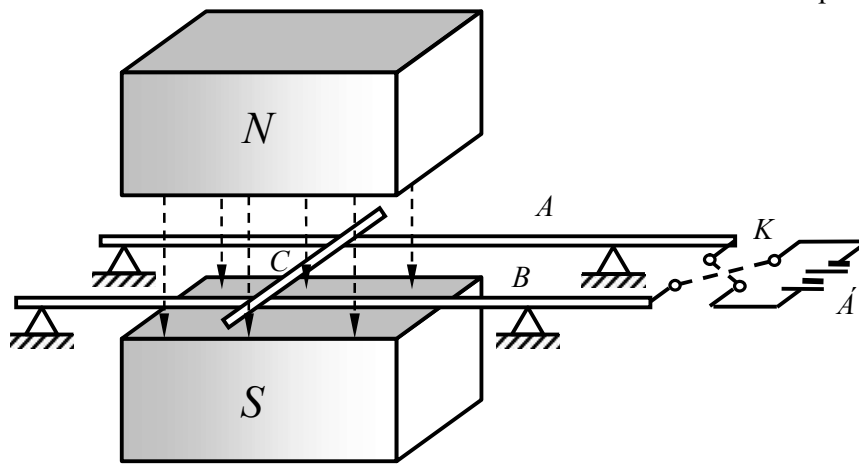


Рисунок 1.4 – Схема досліді, що демонструє вплив магнітного поля на провідник з електричним струмом

За допомогою досліді доведено, що в разі замикання ланцюга провідник *C* починає рухатись уздовж стрижнів *A* й *B*. Напрямок переміщення провідника *C* залежить від напрямку електричного струму в ньому. На рисунку 1.5 показані обидва з можливих випадки. Якщо струм *I* в провіднику *C* проходить перпендикулярно до площини креслення «до нас» (такий струм позначають кружком із крапкою в його центрі), то провідник переміщається вправо (рис. 1.5 *a*). Якщо струм *I* проходить у протилежному напрямку (такий струм позначають кружком із хрестиком усередині нього), то провідник *C* рухається вліво (рис. 1.5 *б*).

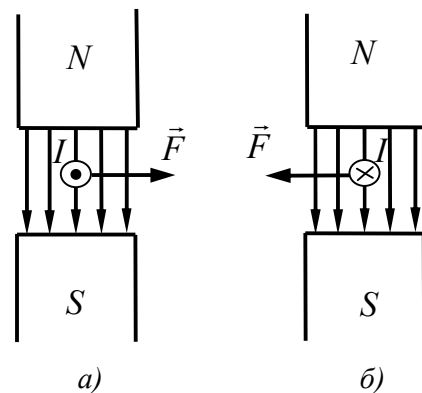


Рисунок 1.5 – Напрямок сили, що діє на провідник з електричним струмом

6 Дію магнітного поля на провідники зі струмом було виявлено Г. Ерстедом і А. Ампером.

Ампер докладно дослідив це явище й дійшов висновку, що сила $d\vec{F}$, яка діє на малий провідник довжиною dl зі струмом I , що знаходиться в магнітному полі, визначається за такою формулою:

$$\boxed{d\vec{F} = k \cdot I [d\vec{l} \times \vec{B}]}. \quad (1.1)$$

У цій формулі \vec{B} – вектор індукції магнітного поля, що є характеристикою магнітного поля; вектор $d\vec{l}$ спрямований за напрямком електричного струму; k – коефіцієнт пропорційності, який у системі СІ дорівнює одиниці. Формулу (1.1) називають **законом Ампера (силою Ампера)**. Силу, що діє на провідник скінченної довжини, визначаємо за формулою (1.1), інтегруючи за всією довжиною провідника.

Як впливає із закону Ампера (1.1), сила $d\vec{F}$ перпендикулярна як до напрямку проходження електричного струму $Id\vec{l}$, так і до вектора \vec{B} , а її величина пропорційна синусу кута між цими векторами (як відомо, $|\vec{d\vec{l}} \times \vec{B}| = |\vec{d\vec{l}}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\angle(\vec{d\vec{l}}, \vec{B}))$). Якщо

вектори $Id\vec{l}$ і \vec{B} паралельні, сила $d\vec{F}$ дорівнює нулю. Для визначення напрямку сили $d\vec{F}$ зручно використовувати **правило лівої руки** (рис. 1.6): якщо ліву долоню розмістити так,



Рисунок 1.6 – До правила лівої руки

якщо ліву долоню розмістити так, щоб витягнуті пальці показували напрямку струму I , а лінії індукції магнітного поля \vec{B} входили в долоню, то відхилений великий палець покаже напрямку сили $d\vec{F}$, що діє на провідник.

Як зазначалося вище, коефіцієнт пропорційності k у формулі (1.1) залежить лише від вибору одиниць величин dl , B , I і dF . У системі СІ цей коефіцієнт дорівнює одиниці $k = 1$, індукцію магнітного поля вимірюють у **теслах** (Тл).

7 Закон Ампера дозволяє визначити числове значення магнітної індукції B . Припустимо, що елемент провідника dl зі струмом I є перпендикулярним до напрямку магнітного поля ($\sin(\angle(\vec{d\vec{l}}, \vec{B})) = 1$). У цьому разі сила, що діє на елемент провідника зі струмом, буде максимальною, тобто

$$dF = IBdl \cdot \sin(\angle(\vec{d\vec{l}}, \vec{B})) = IBdl = dF_{\max}.$$

Експериментально визначивши значення максимальної сили dF_{\max} , що діє на елемент провідника dl із струмом I , можемо знайти **модуль вектора індукції магнітного поля**:

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF_{\max}}{dl}. \quad (1.2)$$

З формули (1.2) випливає, що магнітна індукція B чисельно дорівнює силі, що діє з боку поля на одиницю довжини провідника, по якому проходить електричний струм одиничної сили і який розміщений перпендикулярно до напрямку магнітного поля \vec{B} . Отже, **магнітна індукція є силовою характеристикою магнітного поля**. Напрямок вектора індукції магнітного поля \vec{B} , як зазначали вище, визначається напрямком від південного полюса S до північного N магнітної стрілки, що вільно встановилась у магнітному полі (див. рис. 1.2).

З формули (1.2) також нескладно з'ясувати зв'язок між одиницею вимірювання індукції магнітного поля та іншими одиницями вимірювання в системі СІ: $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(\text{А} \cdot \text{м})$.

8 Дослід свідчить, що для магнітного поля, як і для електричного, виконується принцип суперпозиції: поле \vec{B} , створюване декількома струмами, дорівнює векторній сумі полів \vec{B}_i , створюваним кожним струмом окремо:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i. \quad (1.3)$$

§ 2 Сила Лоренца

1 Сила Ампера, що діє на провідник довжиною dl із струмом I в магнітному полі з індукцією \vec{B} ,

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}] \quad (2.1)$$

обумовлена тим, що магнітне поле діє на рухомі носії електричного струму. Від носіїв струму дія сили передається провіднику, по якому вони переміщуються. Визначимо силу \vec{F}_m з боку магнітного поля, що діє на окремо взятий рухомий електричний заряд.

Для цього подамо силу струму I у вигляді

$$I = jS = nq\upsilon S,$$

де j – густина електричного струму; S – площа поперечного перерізу провідника; n , q та υ – відповідно концентрація, заряд і швидкість носіїв електричного струму. Підставивши цей вираз в (2.1), одержимо

$$d\vec{F} = nq\upsilon S[d\vec{l} \times \vec{B}] = nqSdl[\vec{\upsilon} \times \vec{B}].$$

Тут використали, що напрямки векторів $d\vec{l}$ та $\vec{\upsilon}$ збігаються. Добуток $nSdl$ дорівнює числу носіїв струму, що знаходяться на ділянці провідника dl . Поділивши $d\vec{F}$ на це число, визначимо силу \vec{F}_m , що діє на заряд q , який рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$, з боку магнітного поля:

$$\boxed{\vec{F}_m = q[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]}. \quad (2.2)$$

Ця формула визначає силу (будемо називати її магнітною), що діє в точці поля, де магнітна індукція дорівнює \vec{B} , на точковий заряд q , який рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$. Модуль магнітної сили дорівнює

$$F_m = q\upsilon B \sin \alpha, \quad (2.3)$$

де α – кут між векторами $\vec{\upsilon}$ і \vec{B} . З (2.3) випливає, що на заряд, який рухається вздовж ліній поля, не діє магнітна сила (у цьому разі $\alpha = 0$).

Магнітна сила завжди спрямована перпендикулярно до швидкості зарядженої частинки, як це випливає з (2.3). Тому вона роботи над частинкою не виконує. Отже, за допомогою магнітного поля енергію частинки змінити не можна.

У разі якщо заряджена частинка знаходиться як в електричному, так і в магнітному полі, сила, що діє на заряджену частинку з боку електромагнітного поля, дорівнює

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]}. \quad (2.4)$$

Цей вираз одержав Лоренц узагальненням експериментальних даних, його називають **силою Лоренца**.

§ 3 Рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі

Нижче подано два варіанти викладення цього питання. У першому варіанті більше використовують фізичні ідеї. Другий варіант базується на точному математичному розв'язуванні вихідних рівнянь. Бажано ознайомитися з обома підходами. Для підготовки до практичного заняття, модульного контролю, іспиту можна використати будь-який варіант за вашим вибором.

Перший варіант

Розглянемо рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі, початкова швидкість якої спрямована під кутом α до вектора індукції магнітного поля (див. рис. 3.1).

Для цього використаємо другий закон Ньютона $m d\vec{v}/dt = \sum \vec{F}_i$ та формулу для магнітної складової сили Лоренца:

$$\vec{F}_m = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (3 \text{ а. } 1)$$

Зважаючи на формулу для магнітної складової сили Лоренца (3 а.1), нескладно з'ясувати, що ця сила завжди спрямована перпендикулярно до вектора швидкості частинки (згадайте властивості векторного добутку). Це означає, що робота магнітної складової сили Лоренца завжди дорівнює нулю:

$$A = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_m \cdot \vec{v} dt = \int F_m v \cos(\angle(\vec{F}_m, \vec{v})) dt = \int F_m v \cdot 0 \cdot dt = 0.$$

Отже, магнітна складова сили Лоренца не змінює кінетичної енергії частинки, а отже, не змінює її модуля її швидкості. Вона лише викривлює траєкторію.

Запишемо другий закон Ньютона з урахуванням магнітної складової сили Лоренца (3.1) та одержимо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (3 \text{ а. } 2)$$

У цьому співвідношенні m, q – маса та заряд частинки; \vec{v} – її швидкість; \vec{B} – індукція магнітного поля. Спрямуємо вісь Z уздовж вектора \vec{B} (див. рис. 3.1). Тоді $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Подамо вектор швидкості у вигляді суми двох складових: $v_z\vec{e}_z$, спрямованої вздовж осі Z , та \vec{v}_\perp , перпендикулярної до осі Z :

$$\vec{v} = v_z\vec{e}_z + \vec{v}_\perp. \quad (3 \text{ а. } 3)$$

Підставимо (3 а. 3) в (3 а. 2) і одержимо

$$m \frac{d(v_z\vec{e}_z + \vec{v}_\perp)}{dt} = q[(v_z\vec{e}_z + \vec{v}_\perp) \times B\vec{e}_z],$$

або

$$m \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z + m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = q[v_z\vec{e}_z \times B\vec{e}_z] + q[\vec{v}_\perp \times B\vec{e}_z] = 0 + q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}].$$

Запишемо паралельну та перпендикулярну до осі Z компоненти одержаного рівняння:

$$m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}], \quad (3 \text{ а. } 4)$$

$$m \frac{d(v_z\vec{e}_z)}{dt} = 0. \quad (3 \text{ а. } 5)$$

Отже, система незалежних рівнянь (3 а. 4) та (3 а. 5) описує зміну швидкості частинки в магнітному полі з часом.

З рівняння (3 а. 5) та рис. 3 а. 1. випливає, що

$$v_z = v_{0z} = v_0 \cos \alpha = \text{const}, \quad (3 \text{ а. } 6)$$

тобто **вздовж осі Z частинка рухається рівномірно.**

Розглянемо детально рівняння (3 а. 4), що описує рух частинки в площині, перпендикулярній до осі Z . Модуль швидкості частинки в магнітному полі не змінюється (див. коментар до формули (3 а. 1)), тобто він є сталим у часі й дорівнює (див. рис. 3 а. 1)

$$v_\perp = v_{0\perp} = v_0 \sin \alpha. \quad (3 \text{ а. } 7)$$

Сила $\vec{F}_m = q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}]$ є також сталою величиною, вона перпендикулярна до траєкторії частинки. Це означає, що її прискорення частинки $\vec{a}_{\text{доц}} = \vec{F}_m / m = q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}] / m$ буде

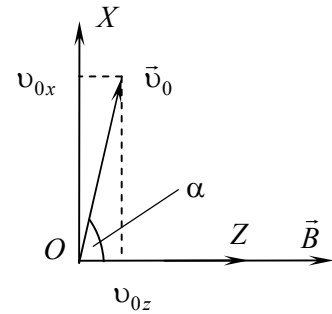


Рисунок 3.1 – Напрямки векторів \vec{v}_0 та \vec{B} у системі координат

перпендикулярне до траєкторії руху, тобто нормальним, а також сталим за модулем. Відомо, що коли частинка рухається по колу, то її прискорення є доцентровим (нормальним) і сталим за модулем, швидкість також є сталою за модулем. Звідси випливає, що **частинка в поперечній площині буде рухатися по колу**. Площина цього кола буде перпендикулярною до магнітного поля (осі Z).

Підставляючи в (3 а. 4) формулу доцентрового прискорення

$$|\vec{a}_{доц}| = \frac{v_{\perp}^2}{R} = |q[\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}] / m| = |qv_{\perp}B / m|,$$

нескладно визначити радіус R цього кола

$$R = \frac{v_{\perp}}{|qB/m|} = \frac{mv_0 \sin \alpha}{|q|B}, \quad (3 \text{ а. } 8)$$

циклічну частоту обертання (циклотронну частоту)

$$\omega = v_{\perp} / R = |q|B / m, \quad (3 \text{ а. } 9)$$

період обертання

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|B}. \quad (3 \text{ а. } 10)$$

Аналізуючи формули (3 а. 9)–(3 а. 10), зазначимо, що період і частота обертання не залежать від швидкості частинки в нерелятивістському випадку. Використовуючи цю особливість, будують роботу прискорювача заряджених частинок, який називають **циклотроном**.

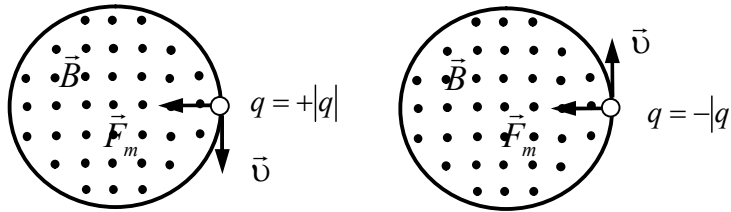


Рисунок 3.2 – Напрямки векторів \vec{F}_m , \vec{B} та \vec{v} для додатно та від'ємно зарядженої частинки

Визначивши напрямок магнітної сили, а отже, й доцентрового прискорення, знайдемо напрямок обертання частинки по колу (див. рис. 3.2, тут магнітне поле спрямоване до читача). Якщо заряд $q = +|q|$ є додатним, то напрямки вектора \vec{B} та кутової швидкості $\vec{\omega}$ протилежні. Коли заряд $q = -|q|$ є від'ємним, то ці напрямки збігаються.

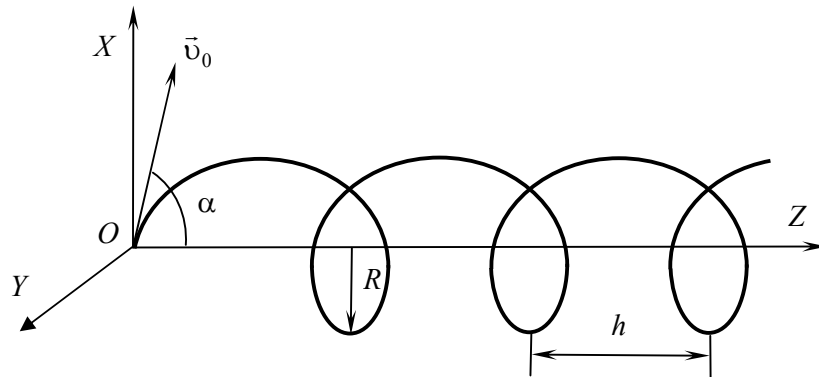


Рисунок 3.3 – Траєкторія руху зарядженої частинки в магнітному полі

Отже, частинка в поперечній площині до магнітного поля рухається рівномірно по колу, а вздовж магнітного поля рухається зі сталою швидкістю. Результуючий рух є рухом частинки по спіралі, вісь якої паралельна магнітному полю (див. рис. 3.3).

Визначимо крок спіралі як відстань, яку частинка проходить уздовж осі Z за період обертання $T = 2\pi/\omega$ (див. рис. 3.3):

$$h = T \cdot v_z = \frac{2\pi}{\omega} v_{0z} = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos \alpha. \quad (3 \text{ а. } 11)$$

Отже, в однорідному магнітному полі заряджена частинка в загальному випадку рухається вздовж спіралі. Радіус та крок спіралі визначають за формулами (3 а. 8) та (3 а. 11). Кутову частоту обертання (кутова швидкість) подають співвідношенням (3 а. 9), період обертання – (3 а. 10).

Другий варіант

Розглянемо рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі, початкова швидкість якої спрямована під кутом α (див. рис. 3.1) до вектора індукції магнітного поля. Для цього використаємо другий закон Ньютона $m d\vec{v}/dt = \sum \vec{F}_i$ та формулу для магнітної складової сили Лоренца $\vec{F}_m = [\vec{v} \times \vec{B}]$ і одержимо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (3 \text{ б. } 1)$$

У цьому співвідношенні m, q – маса та заряд частинки; \vec{v} – її швидкість; \vec{B} – індукція магнітного поля. Спрямуємо вісь Z уздовж вектора \vec{B} . Тоді $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Запишемо рівняння (3 б. 1) у проєкціях на осі X, Y, Z :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} v_y B, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{q}{m} v_x B, \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (3 \text{ б. } 2)$$

З останнього рівняння системи (3 б. 2) випливає, що v_z є константою, тобто

$$v_z = v_{0z} = v_0 \cos \alpha.$$

Тут ураховано, що початкова швидкість частинки спрямована під кутом α до осі Z (див. рис. 3.1).

Якщо продиференціювати перше рівняння системи (3 б. 2) та в одержаний результат підставити друге рівняння системи (3 б. 2), то знайдемо

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x,$$

або

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0. \quad (3 \text{ б. } 3)$$

У рівнянні позначено

$$\omega = \frac{qB}{m}. \quad (3 \text{ б. } 4)$$

Цю величину називають **циклотронною частотою**. Рівняння (3 б. 3) в математиці називають **диференціальним рівнянням гармонічних коливань**. Його розв'язком є

$$v_x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3 \text{ б. } 5)$$

де A, φ_0 – сталі, які визначають початковими умовами. Для того щоб упевнитися, що (3 б. 5) є розв'язком (3 б. 3), достатньо підставити (3 б. 5) в (3 б. 3). Далі з першого рівняння (3 б. 2) знаходимо

$$v_y = \frac{dv_x}{dt} \frac{1}{\left(\frac{q}{m} B\right)} = -A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3 \text{ б. } 6)$$

З'ясуємо сутність констант A та φ_0 . У початковий момент часу $t=0$ проєкції швидкості v_x і v_y мають значення v_{0x}, v_{0y} . Підставляємо їх у (3 б. 5) та (3 б. 6) та одержуємо $v_{0x} = A \cos \varphi_0, \quad v_{0y} = -A \sin \varphi_0$. Звідси знаходимо, що $\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = A \sqrt{\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0} = A$.

Зрозуміло, що $\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = v_{0\perp}$ – модуль складової початкової швидкості частинки, перпендикулярної до осі Z . Отже, $A = v_{0\perp}$. Виберемо вісь X так, щоб у початковий момент часу $t=0$ швидкість \vec{v}_0 лежала в площині XZ . Тоді з рисунку 3.1 визначаємо, що

$$v_{0x} = v_0 \sin \alpha, \quad v_{0y} = 0.$$

Це означає, що $\varphi_0 = 0, \quad v_{0\perp} = v_0 \sin \alpha$. З урахуванням вищезазначеного рівняння (3 б. 5) та (3 б. 6) набувають вигляду

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0\perp} \cos(\omega t), \\ v_y &= -v_{0\perp} \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (3 \text{ б. } 7)$$

де $v_{0\perp} = v_0 \sin \alpha$.

Використаємо визначення швидкості й знайдемо залежність координат частинок від часу:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0\perp} \cos(\omega t) &\Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_{0\perp} \cos(\omega t) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = x_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega} \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (3 \text{ б. } 8)$$

$$\begin{aligned} v_y = \frac{dy}{dt} = -v_{0\perp} \sin(\omega t) &\Rightarrow \int_{y_0}^y dy = \int_0^t -v_{0\perp} \sin(\omega t) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = y_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega} (\cos(\omega t) - 1), \end{aligned} \quad (3 \text{ б. } 9)$$

$$\begin{aligned} v_z = \frac{dz}{dt} = v_{0z} &\Rightarrow \int_{z_0}^z dz = \int_0^t v_{0z} dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = z_0 + v_{0z} \cdot t. \end{aligned} \quad (3 \text{ б. } 10)$$

Початок координатних осей вибираємо так, щоб $x_0 = 0, y_0 - \frac{v_{0\perp}}{\omega} = 0, z_0 = 0$. Це приводить до спрощення математичних співвідношень без зміни фізичної сутності. Тоді з (3 б. 8)–(3 б. 10) одержуємо

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{v_{0\perp}}{\omega} \sin(\omega t), \\
 y &= \frac{v_{0\perp}}{\omega} \cos(\omega t), \\
 z &= v_{0z} \cdot t.
 \end{aligned}
 \tag{3 б. 11}$$

Порівнюючи перші два рівняння (3 б. 11) з (3 б. 1) та (3 б. 2), робимо висновок, що частинка в площині XU рівномірно рухається по колу з радіусом

$$R = \frac{v_{0\perp}}{\omega} = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega}.
 \tag{3 б. 12}$$

Кутову частоту обертання частинки по цьому колу визначають циклотронною частотою (3 б. 4) $\omega = |q|B/m$.

Зважаючи на третє рівняння системи (3 б. 11), стверджуємо, що частинка рухається вздовж осі Z рівномірно. Суперпозиція рівномірного руху вздовж осі Z та рівномірного руху по колу в площині XU дасть рух частинки по спіралі (див. рис. 3.3).

Визначимо крок спіралі як відстань, яку частинка проходить уздовж осі Z за період обертання $T = 2\pi/\omega$ (див. рис. 3.3):

$$h = T \cdot v_z = \frac{2\pi}{\omega} v_{0z} = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos \alpha.
 \tag{3 б. 13}$$

Отже, в однорідному магнітному полі заряджена частинка в загальному випадку рухається по спіралі. Радіус та крок спіралі визначають за формулами (3 б. 12) та (3 б. 13). Кутову частоту обертання (кутова швидкість) подають співвідношенням (3 б. 4), період обертання дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot m}{qB}.
 \tag{3 б. 14}$$

§ 4 Закон Біо – Савара – Лапласа. Індукція магнітного поля, створеного відрізком із струмом. Індукція нескінченно довгого прямого провідника зі струмом. Індукція на осі колового струму

1 Біо й Савар провели в 1820 р. дослідження магнітних полів, створюваних струмами, що проходять тонкими провідниками різної форми. Лаплас проаналізував експериментальні дані, одержані Біо й Саваром, і встановив залежність, яка одержала назву закону Біо – Савара – Лапласа. Відповідно до закону Біо – Савара – Лапласа індукцію магнітного поля, створювану елементом струму $I d\vec{l}$, визначають за формулою

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}},
 \tag{4.1}$$

де $d\vec{l}$ – вектор, модуль якого дорівнює елементарній довжині ділянки зі струмом I і спрямований у той бік, куди проходить струм (рис. 4.1); \vec{r} – вектор, проведений від елемента струму в точку, в якій визначають $d\vec{B}$; r – модуль цього вектора; μ_0 – так звана магнітна стала, що дорівнює

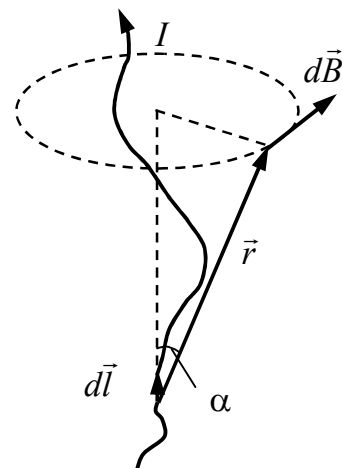


Рисунок 4.1 – Індукція $d\vec{B}$ магнітного поля, створюваного елементом $d\vec{l}$ провідника, по якому проходить струм I

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м/А} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}, \quad (4.2)$$

де Гн (генрі) – одиниця індуктивності (про цю одиницю детально мова буде йти далі).

Згідно з цим законом магнітне поле будь-якого струму може бути обчислене як векторна сума (суперпозиція) полів, створюваних окремими елементарними ділянками струму $I d\vec{l}$:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

Модуль вектора $d\vec{B}$ з огляду на вираз (4.1) визначають за співвідношенням

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}, \quad (4.3)$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{r} .

2 Застосуємо закон Біо – Савара – Лапласа для обчислення індукції магнітного поля, створюваного відрізком із струмом, наприклад у точці O (див. рис. 4.2), розміщеній на відстані a від осі відрізка. У цьому разі вважаємо кути між напрямками векторів, проведених із кінців відрізка зі струмом до точки O і напрямком електричного струму I , відомими й такими, що дорівнюють відповідно α_1 та α_2 (див. рис. 4.2).

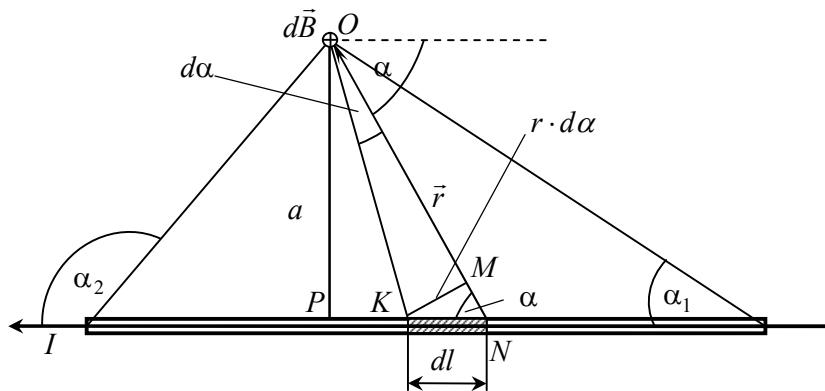


Рисунок 4.2 – До обчислення індукції магнітного поля, створюваного відрізком провідника зі струмом

Розіб'ємо відрізок із струмом I на елементарні ділянки dl (див. рис. 4.2). Відповідно до закону Біо – Савара – Лапласа елемент зі струмом $I d\vec{l}$ створює магнітне поле з індукцією $d\vec{B}$, що визначається за формулою (4.1). Зауважимо, що вектори $d\vec{B}$ від усіх елементів струму $I \cdot d\vec{l}$ у точці O паралельні осі Z , перпендикулярній до площини рисунка (див. рис. 4.2). Тому відповідно до принципу суперпозиції під час визначення індукції магнітного поля \vec{B} у точці O можна перейти від геометричного до алгебраїчного підсумовування (інтегрування):

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B} = \vec{e}_z \cdot \int_l dB = \vec{e}_z \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_l \frac{\sin \alpha}{r^2} \cdot dl, \quad (4.4)$$

де dB – модуль вектора $d\vec{B}$ (див. формулу (4.3)); α – кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{r} .

Проаналізуємо вираз (4.4). Зрозуміло, що під знаком інтеграла у співвідношенні (4.4) кут α та довжина вектора r змінюються під час переходу від одного елемента довжини dl до іншого (див. рис. 4.2). Тому перетворимо підінтегральний вираз так, щоб він залежав лише від однієї змінної, наприклад кута α .

Нескладно знайти зв'язок елемента dl з елементарним кутом $d\alpha$ та довжиною вектора r . З трикутника ΔKMN (див. рис. 4.2) випливає, що $dl \cdot \sin \alpha = KM$, а з трикутника ΔOKN – $KM = r \cdot d\alpha$. Звідси маємо $dl = r \cdot d\alpha / \sin \alpha$. Далі з трикутника ΔOPN можемо виразити довжину вектора r через відстань a та кут α : $r = a / \sin \alpha$. Тоді співвідношення (4.4) набуде вигляду

$$\vec{B} = \vec{e}_z \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{r} = \vec{e}_z \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Далі проведемо інтегрування й одержимо шуканий вираз для індукції магнітного поля, створюваного відрізком провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (4.5)$$

3 Застосуємо закон Біо – Савара – Лапласа для обчислення індукції магнітного поля, створюваного нескінченно довгим прямим провідником із струмом (див. рис. 4.3). Для цього використаємо формулу для індукції магнітного поля від відрізка із струмом (4.5).

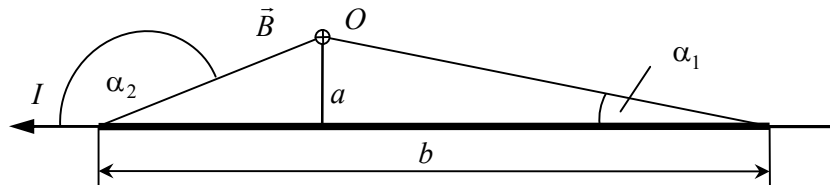


Рисунок 4.3 – До обчислення індукції магнітного поля, створюваного нескінченним тонким провідником зі струмом

З рисунку 4.3 випливає, що коли довжина відрізка b буде прямувати до нескінченності, то кут α_1 буде прямувати до нуля, а кут α_2 – до 180° . Це означає, що коли відрізок перетвориться на нескінченно довгий провідник із струмом ($b = \infty$), кути будуть мати значення

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 180^\circ. \quad (4.6)$$

Тоді індукцію від нескінченно довгого тонкого провідника із струмом визначимо підставивши значення (4.6) у (4.5):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \cdot (1 - (-1)) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot a}, \text{ тобто } B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot a}. \quad (4.7)$$

Отже, одержали співвідношення (4.7), що визначає індукцію магнітного поля від нескінченно тонкого провідника зі струмом I . Потрібно зазначити, що **напрямок вектора \vec{B} можна визначити за правилом правого гвинта**: якщо гвинт установити паралельно струму та обертати його так, щоб поступальний рух гвинта був спрямований уздовж струму, то обертання шапочки гвинта буде визначати напрямки силових ліній індукції магнітного поля.

4 Застосуємо закон Біо – Савара – Лапласа для обчислення індукції магнітного поля на осі колового струму (див. рис. 4.4).

Розіб'ємо коловий виток, по якому проходить струм I , на елементи довжини dl (див. рис. 4.4). Елемент довжини dl зі струмом I створює в точці O магнітне поле $d\vec{B}$, яке визначають законом Біо – Савара – Лапласа (4.1). Відповідно до цього закону вектор $d\vec{B}$ є перпендикулярним до радіуса-вектора \vec{r} і вектора $d\vec{l}$ (див. рис. 4.4), а його модуль відповідно до (4.3) дорівнює

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2}. \quad (4.8)$$

Тут ураховано, що кут α між векторами \vec{r} і $d\vec{l}$ дорівнює $\pi/2$.

Подамо вектор $d\vec{B}$ у вигляді суми двох векторів: вектора $B_x \vec{e}_x$, спрямованого паралельно осі X , та вектора $d\vec{B}_\perp$, перпендикулярного до осі X (див. рис. 4.4).

Знайдемо векторну суму паралельних осі X компонент вектора $d\vec{B}$. Виходячи з рисунка 4.4, нескладно знайти проєкцію

$$dB_x = -dB \cdot \cos(\pi/2 - \beta) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \beta}{r^2}. \quad (4.9)$$

У цій формулі кут β – кут між віссю X та вектором \vec{r} . Зазначимо, що для всіх елементів струму $I d\vec{l}$ кут β має одне і те саме значення (див. рис. 4.4)

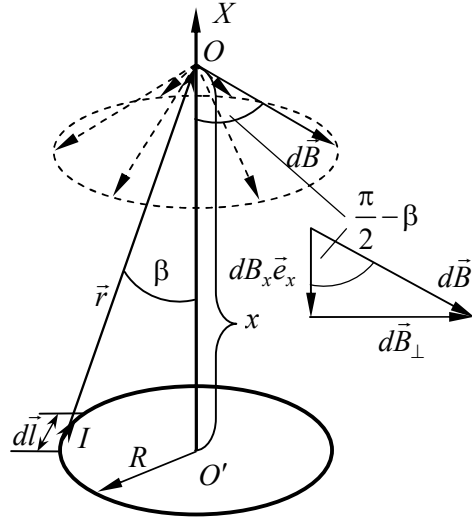


Рисунок 4.4 – До обчислення індукції магнітного поля, створюваного коловим струмом

$$\sin \beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (4.10)$$

Відповідно до принципу суперпозиції визначаємо результуючу проєкцію B_x підсумовуванням усіх елементарних проєкцій dB_x (або, в нашому випадку, їх інтегруванням)

$$\begin{aligned} B_x &= \int dB_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2} \cdot \sin \beta \cdot \int_0^{2\pi R} dl = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2} \cdot \sin \beta \cdot 2\pi R = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{(R^2 + x^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \cdot 2\pi R = -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Обчислимо векторну суму перпендикулярних до осі X компонент вектора $d\vec{B}$ ($d\vec{B}_\perp$). Зазначимо, що в цій сумі для кожного вектора $d\vec{B}_\perp$ можна знайти йому протилежний. Це означає, що сума всіх векторів $d\vec{B}_\perp$ буде дорівнювати нулю.

Отже, результуючу індукцію магнітного поля \vec{B} від колового витка зі струмом можна визначати за співвідношенням

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x = -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x. \quad (4.12)$$

§ 5 Взаємодія двох нескінченно довгих паралельних провідників. Ампер – одиниця вимірювання сили струму

1 У 1820 р. Ампер експериментально встановив, що два прямі паралельні струми притягуються, а антипаралельні – відштовхуються. Визначимо силу взаємодії двох паралельних нескінченних струмів.

Розглянемо два нескінченно довгі паралельні провідники зі струмами 1 і 2 (рис. 5.1). Індукцію магнітного поля, створюваного нескінченно довгим провідником зі струмом I_1 в точці A на відстані R від провідника 1, визначимо за співвідношенням

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}. \quad (5.1)$$

Напрямок вектора \vec{B}_1 можна визначити за **правилом правого гвинта**: коли гвинт установити паралельно струму та обертати його так, щоб поступальний рух гвинта був спрямований уздовж струму, то обертання шапочки гвинта буде визначати напрямок силових ліній індукції магнітного поля. У точці A відповідно до правила правого гвинта вектор індукції магнітного поля \vec{B}_1 спрямований «до нас» і перпендикулярний до провідника 2. Тому кут α між провідником 2 й індукцією магнітного поля \vec{B}_1 у точці A буде дорівнювати $\pi/2$. Тоді модуль сили Ампера, що діє на відрізок довжиною l провідника 2 із струмом I_2 , можемо визначити із закону Ампера:

$$F_{12} = B_1 I_2 l \sin \alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} l. \quad (5.2)$$

Зрозуміло, якщо струми I_1 і I_2 паралельні, то сила F_{12} за правилом лівої руки спрямована до провідника 1. Аналогічно можна показати, що на провідник 1 із струмом I_1 діє сила

$$F_{21} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi R} l,$$

але ця сила спрямована до провідника 2, тобто $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (струми притягуються).

Якщо змінити напрямок I_1 (або I_2), то зміняться напрямки \vec{F}_{12} і \vec{F}_{21} . Оскільки $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$, то силу взаємодії двох паралельних струмів можна визначити за співвідношенням

$$F = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi R} l. \quad (5.3)$$

2 Вивчення взаємодії двох прямих сталих паралельних струмів дає можливість установити одиницю струму – ампер як одну з основних у системі СІ. **Ампер (А)** – сила сталого струму, який, проходячи по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини малого колового перерізу, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, утворює силу взаємодії між ними, що дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ ньютон на кожний метр довжини.

З означення ампера і формули (5.3) знайдемо значення μ_0 :

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ Н} = \frac{\mu_0 \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}}{2\pi \cdot 1 \text{ м}}, \text{ звідси } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \text{ (генрі на метр).}$$

§ 6 Сила, що діє на контур із струмом в однорідному магнітному полі. Момент сил, що діють на контур із струмом у магнітному полі. Вимірювання індукції магнітного поля за допомогою контура зі струмом

1 Визначимо силу \vec{F} , що діє на контур із струмом в однорідному магнітному полі ($\vec{B} = \text{const}$). Згідно із законом Ампера на елемент контура $d\vec{l}$ зі струмом I діє сила

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (6.1)$$

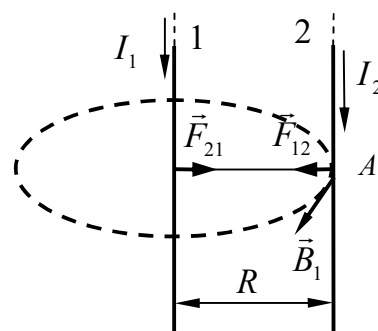


Рисунок 5.1 – До визначення сили взаємодії двох паралельних нескінченних струмів

Результуючу всіх сил, що діють на всі елементи контура, тобто силу, яка діє на контур, визначаємо інтегруванням (6.1):

$$\vec{F} = \oint I[d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (6.2)$$

Винесемо сталі величини I й \vec{B} із під знака інтеграла. У результаті одержимо

$$\vec{F} = I \left[\left(\oint d\vec{l} \right) \times \vec{B} \right]. \quad (6.3)$$

Інтеграл $\oint d\vec{l}$ беруть за замкненим контуром і тому він дорівнює нулю. Тоді з (6.3) випливає, що й сила дорівнює нулю: $\vec{F} = 0$.

Отже, сила, що діє на контур із струмом в однорідному магнітному полі, дорівнює нулю. Це справедливо для контурів будь-якої форми (зокрема, й неплоских) за довільного розміщення контура відносно напрямку поля. Істотною умовою для рівності нулю результуючої сили є лише однорідність поля.

У неоднорідному магнітному полі сила, що діє на контур із струмом, не дорівнює нулю. Її визначають таким співвідношенням:

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}, \quad (6.4)$$

де $\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$ – магнітний момент контура зі струмом, $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial/\partial x + \vec{e}_y \partial/\partial y + \vec{e}_z \partial/\partial z$ – оператор набла.

2 Обчислимо результуючий обертальний момент сил \vec{M} , що діє на плоский контур із струмом I в однорідному магнітному полі з індукцією \vec{B} .

На рисунку 6.1 показано прямокутний контур, орієнтований так, щоб вектор \vec{B} був паралельний двом із його сторін. За зазначених напрямків струму й поля (див. рис. 6.1) на кожний елемент $d\vec{l}_1$ ділянки 1–2 діє спрямована за площину рисунка сила Ампера $d\vec{F}_1$, модуль якої дорівнює $IBdl_1$, а на кожний елемент $d\vec{l}_2$ ділянки 3–4 діє спрямована «на нас» сила Ампера $d\vec{F}_2$, модуль якої дорівнює $IBdl_2$. Ділянки 2–3 і 4–1 паралельні полю, тому сили на них не діють.

Результуюча \vec{F}_1 сил $d\vec{F}_1$ прикладена до середини ділянки 1–2 і має модуль, що дорівнює IBa . Аналогічно результуюча \vec{F}_2 сил $d\vec{F}_2$

прикладена до середини ділянки 3–4 і має модуль такої самої величини, як і \vec{F}_1 . Момент сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 відносно довільної осі Z (див. рис. 6.1) дорівнює

$$M = IBa \cdot x_1 + IBa \cdot x_2 = IBa \cdot (x_1 + x_2) = IBa \cdot b = IBS.$$

З огляду на геометричні міркування $x_1 + x_2 = b$, $a \cdot b = S$, де S – площа контура. Врахувавши взаємну орієнтацію векторів \vec{M} , \vec{B} та орту нормалі \vec{n} контура зі струмом I , запишемо

$$\vec{M} = [(IS\vec{n}) \times \vec{B}]. \quad (6.5)$$

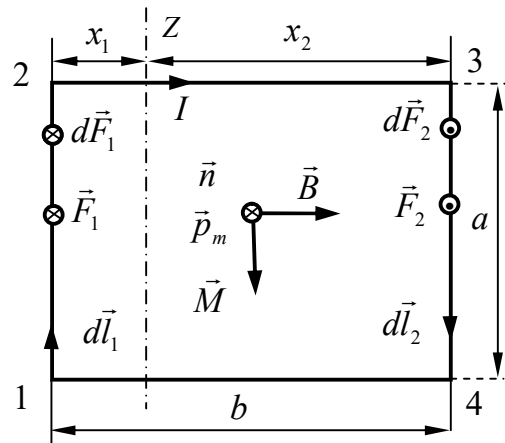


Рисунок 6.1 – Плоский контур із струмом в однорідному магнітному полі, індукція \vec{B} якого паралельна стороні b контура. Нормаль \vec{n} і сила \vec{F}_1 спрямовані «від нас», сила \vec{F}_2 спрямована «на нас»

Вираз $IS\vec{n}$ є важливою характеристикою контура площею S зі струмом I , який називають **магнітним моментом контура**:

$$\boxed{\vec{p}_m = IS\vec{n}}. \quad (6.6)$$

Вектор нормалі контура \vec{n} має одиничну довжину, спрямований перпендикулярно до площини контура і пов'язаний із напрямком електричного струму, що проходить по контуру, правилом правого гвинта. Як випливає з (6.6), *магнітний момент вимірюють у системі СІ в $A \cdot m^2$* .

Тоді формулу (6.5) з урахуванням визначення магнітного моменту можна записати у вигляді

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}], \quad (\vec{p}_m \perp \vec{B}). \quad (6.7)$$

Нагадаємо, що формула (6.7) одержана для випадку, коли вектор \vec{B} є паралельним площі цього контуру ($\vec{p}_m \perp \vec{B}$).

У разі якщо вектори \vec{p}_m і \vec{B} паралельні (в цьому разі вектор \vec{B} є перпендикулярним до площі контура), сили, що діють на окремі елементи контура, лежать в одній площині (площині контура) і, отже, не можуть створити обертового моменту. Ці сили прагнуть розтягти (якщо \vec{p}_m і \vec{B} мають однаковий напрямок) або стиснути (якщо \vec{p}_m і \vec{B} мають протилежні напрямки) контур.

Розглянемо випадок, коли вектори \vec{p}_m і \vec{B} утворюють довільний кут α (рис. 6.2). Розкладемо магнітну індукцію \vec{B} на дві складові: \vec{B}_{\parallel} – паралельну, й \vec{B}_{\perp} – перпендикулярну до вектора \vec{p}_m , і розглянемо дію кожної складової окремо. Компонента \vec{B}_{\parallel} буде обумовлювати сили, що розтягують або стискають контур. Компонента \vec{B}_{\perp} , яка має модуль, що дорівнює $B \sin \alpha$, приведе до виникнення обертового моменту, який можна обчислити за формулою (6.7):

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}_{\perp}]. \quad (6.8)$$

Оскільки $[\vec{p}_m \times \vec{B}_{\parallel}] = 0$, формулу (6.8) можна записати у вигляді

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]}. \quad (6.9)$$

Отже, одержали формулу (6.9), яка визначає результуючий обертовий момент сил, що діє на плоский контур із струмом I в однорідному магнітному полі з індукцією \vec{B} . Зазначимо, що ця формула є справедливою за будь-якої взаємної орієнтації векторів \vec{p}_m і \vec{B} . Можна довести, що вона є правильною для плоских контурів будь-якої форми, що знаходяться в однорідному магнітному полі.

3 Формулу (6.9) можна застосовувати й для неоднорідних магнітних полів. Необхідно лише, щоб розміри контура були малими. Тоді впливом неоднорідності поля на обертовий момент можна знехтувати. Такі контури й котушки можуть бути використані на практиці для вимірювання індукції магнітного поля. У цьому разі їх називають *пробними*.

Якщо пробний контур помістити в магнітне поле, то під дією обертового моменту його магнітний момент \vec{p}_m встановиться вздовж індукції магнітного поля \vec{B} подібно тому, як це відбувається з магнітною стрілкою. Отже, *самочинна орієнтація контура зі струмом*

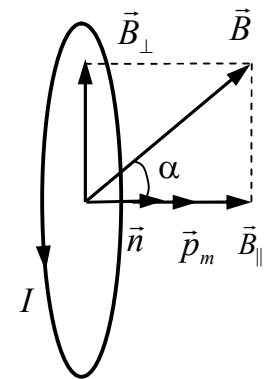


Рисунок 6.2 – Контур, нормаль \vec{n} до площини якого утворює з напрямком вектора \vec{B} кут α

у магнітному полі дозволяє визначити напрямок вектора індукції магнітного поля \vec{B} . Повернемо контур із цього положення на 90° . Обертальний момент у цьому разі стане максимальним. Вимірявши максимальний обертальний момент сил M_{\max} контура зі струмом, знаючи його магнітний момент, можна визначити модуль індукції магнітного поля, використавши формулу (6.9):

$$B = M_{\max} / p_m. \quad (6.10)$$

Отже, використовуючи контур із струмом, можна виміряти як напрямок, так і модуль вектора індукції магнітного поля.

§ 7 Робота під час переміщення контура зі струмом у магнітному полі

1 Розглянемо спочатку окремий випадок. Нехай паралельні провідники AN і CD (рис. 7.1) розміщені в однорідному сталому магнітному полі з індукцією \vec{B} , перпендикулярному до площини рисунка й спрямованому «до нас». Ліворуч розміщене джерело струму, яке не показано на рисунку. По проводах може вільно переміщуватися провідний місток KL , що замикає струм I , який проходить по проводах, розміщених ліворуч від містка. Якщо l – довжина містка, то на нього магнітне поле діє із силою Ампера $F = Il$. У разі переміщення містка на відстань dx ця сила виконає роботу

$$dA = Fdx = Il dx = Id(BS),$$

де S – площа прямокутника $AKLC$. Величина BS є магнітним потоком через той самий прямокутник. Позначивши його через $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S$, одержуємо для елементарної роботи співвідношення

$$dA = Id\Phi, \quad (7.1)$$

а для скінченної роботи у разі сталого електричного струму

$$A_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (7.2)$$

Отже, **робота, виконувана магнітним полем над струмом, дорівнює збільшенню магнітного потоку, помноженому на силу струму I** . Під час доведення передбачали, що струм I в разі переміщення містка KL підтримувався постійним.

2 Формули (7.1) та (7.2) є правильними і в тому разі, якщо магнітне поле спрямоване довільно. Ці формули є правильними також і для будь-якого витка зі струмом за довільного переміщення його в сталому неоднорідному магнітному полі. Виток може не лише переміщуватися як ціле, а й довільно деформуватися. Для доведення достатньо уявно розбити виток на нескінченно малі елементи струму й розглянути нескінченно малі їх переміщення. При нескінченно малому переміщенні елемента струму магнітне поле, в якому він переміщується, можна вважати однорідним. До такого переміщення можна застосувати вираз (7.1) для елементарної роботи. Додаванням таких елементарних робіт для всіх елементів струму, на які розбитий виток, знову одержимо вираз (7.1), у якому $d\Phi$ означає збільшення магнітного потоку через весь виток. Після цього перехід від формули (7.1) до формули (7.2) відбувається простим інтегруванням. Підкреслимо ще раз, що під час переміщення витка сила струму в ньому повинна підтримуватися сталою. Це досягається відповідним збільшенням електрорушійної сили джерела.

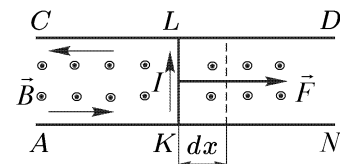


Рисунок 7.1 – До обчислення роботи під час переміщення провідного містка KL

**§ 8 Теорема Гаусса для магнітного поля у вакуумі.
Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції**

1 Як відомо, *елементарним потоком вектора* \vec{A} через площу $d\vec{S}$ називають величину

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Зважаючи на це, визначення, можемо записати елементарний потік вектора індукції магнітного поля \vec{B} через площу $d\vec{S}$ у вигляді

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (8.1)$$

Магнітний потік через довільну площу S за визначенням дорівнює

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (8.2)$$

Однією з особливостей магнітного поля є те, що його силові лінії завжди замкнені, тобто не мають ні початку, ні кінця. Внаслідок цього потік вектора \vec{B} через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю (доводити це не будемо):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (8.3)$$

Ця формула виражає *теорему Гаусса для вектора індукції магнітного поля \vec{B} в інтегральному вигляді*: потік вектора магнітної індукції через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

Теорема Гаусса є математичним виразом того, що в природі відсутні «магнітні заряди» – джерела магнітного поля, на яких би починалися або закінчувалися лінії магнітної індукції.

Зазначимо, що магнітний потік Φ вимірюють у веберах ($1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$).

2 Для того щоб одержати теорему Гаусса в диференціальному вигляді, використаємо теорему Остроградського–Гаусса:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} \cdot dV, \quad (8.4)$$

де об'єм інтегрування V знаходиться в середині замкненої поверхні інтегрування S .

3 Огляду на теорему Остроградського–Гаусса й (8.3), одержимо для індукції магнітного поля

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0,$$

або

$$\boxed{\text{div} \vec{B} = 0}. \quad (8.5)$$

Співвідношення (8.5) виражає *теорему Гаусса для вектора індукції магнітного поля \vec{B} в диференціальному вигляді*.

3 Тепер визначимо циркуляцію вектора \vec{B} . Нагадаємо, що *циркуляцією вектора \vec{B} за визначенням називають криволінійний інтеграл по замкненому контуру Γ* :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}, \quad (8.6)$$

де $d\vec{l}$ – елемент замкненого контура Γ , за яким виконують інтегрування.

Обчислимо циркуляцію вектора \vec{B} для випадку поля нескінченного прямого струму. Нехай замкнений контур Γ лежить у площині, перпендикулярній до провідника, по якому проходить такий електричний струм (рис. 8.1). У кожній точці контура вектор \vec{B}

спрямований за дотичною до кола, що проходить через цю точку. Через центр цього кола проходить електричний струм I , спрямований за площу рисунка. Подамо $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ у вигляді $B \cdot dl_B$ (dl_B – проекція $d\vec{l}$ на напрямок вектора \vec{B}). З рисунка 8.1 випливає, що dl_B дорівнює $b d\alpha$, де b – відстань від провідника зі струмом до $d\vec{l}$; $d\alpha$ – кут, на який повертається радіальна пряма під час переміщення уздовж контура на відрізок dl . Підставимо у (8.6) це значення dl_B , вираз для індукції B нескінченно довгого провідника зі струмом та одержимо

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B dl_B = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0 2I}{4\pi b} b d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\alpha.$$

При обході контура Γ , що охоплює струм (рис. 8.1 а), радіальна пряма увесь час повертається в одному напрямку, тому $\oint d\alpha = 2\pi$. Якщо струм не охоплюється контуром Γ (рис. 8.1 б), то радіальна пряма повертається спочатку в одному напрямку (ділянка 1–2), а потім – у протилежному (ділянка 2–1). Куту $d\alpha$, що відповідають поворотам у протилежні сторони, відрізняються знаком. Тому $\oint d\alpha = 0$. Обидва результати можна виразити формулою

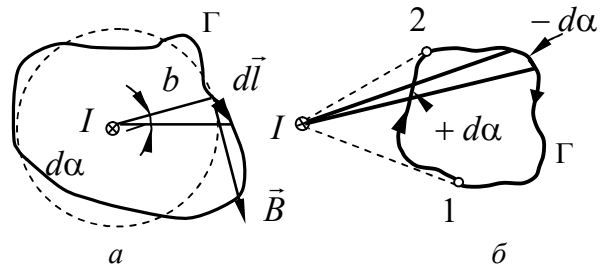


Рисунок 8.1 – До обчислення циркуляції поля прямого струму. Струм перпендикулярний до площини рисунка і спрямований за рисунок

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (8.7)$$

де I – струм, охоплений контуром Γ . Якщо контур Γ струму не охоплює, $I = 0$, і, отже, циркуляція також дорівнює нулю.

Знак циркуляції залежить від напрямку обходу контура. Якщо цей напрямок утворює з напрямком струму правогвинтову систему, то, як випливає з рисунка 8.1а, вираз (8.7) додатний, у протилежному разі – від’ємний. Знак можна врахувати, вважаючи I алгебраїчною величиною, причому додатним потрібно вважати струм, напрямком якого утворює з напрямком обходу контура правогвинтову систему; струм протилежного напрямку буде від’ємним.

Ми одержали формулу (8.7) для прямого струму й плоского контура. Проте можна довести, що ця формула є правильною й для неплоского контура, і для струму, що проходить по провіднику довільної форми.

За допомогою принципу суперпозиції одержаний результат легко узагальнити на випадок декількох струмів:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k \quad (8.8)$$

Формула (8.8) виражає **теорему про циркуляцію вектора індукції магнітного поля у вакуумі**: циркуляція вектора \vec{B} по довільному контуру Γ дорівнює алгебраїчній сумі струмів, охоплених контуром Γ , помножених на μ_0 .

Зазначимо, що формула (8.8) справедлива лише для поля у вакуумі й за умови відсутності змінних у часі електричних полів. Поле, циркуляція якого не дорівнює нулю, називають **вихровим**. Отже, магнітне поле є вихровим.

§ 9 Магнітне поле тороїда. Магнітне поле нескінченного соленоїда

1 У вченні про магнітне поле сталих струмів теорема про циркуляцію магнітного поля

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k, \quad (9.1)$$

де $\sum I_k$ дорівнює алгебраїчній сумі струмів, охоплених контуром Γ , та відіграє приблизно таку саму роль, що й теорема Гаусса в електростатиці. За умови наявності симетрії в розподілі електричних струмів теорема про циркуляцію дозволяє достатньо просто визначити індукцію магнітного поля.

2 Тороїдом називають провідник, намотаний на каркас, що має форму тора (рис. 9.1). Застосуємо теорему про циркуляцію магнітного поля (9.1) для визначення магнітного поля, яке створює електричний струм I , що проходить по тороїду. Візьмемо контур інтегрування Γ у вигляді кола радіуса r , центр якого збігається з центром тороїда (див. рис. 9.1). Унаслідок симетрії розподілу електричних струмів вектор \vec{B} у кожній точці контура Γ спрямований уздовж дотичної до нього. Отже, циркуляція вектора \vec{B} уздовж цього контура дорівнює

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r,$$

де \vec{B} – магнітна індукція в тих точках, де проходить контур Γ .

Якщо контур проходить усередині тороїда, він охоплює струм $\sum I_k = 2\pi R n I$, де R – радіус тороїда; n – число витків на одиницю його довжини. Тоді згідно з теоремою про циркуляцію магнітного поля (9.1) можемо записати

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot 2\pi R n I,$$

звідси знаходимо індукцію магнітного поля всередині тороїда

$$\boxed{B = \frac{R}{r} \mu_0 n I}. \quad (9.2 \text{ а})$$

Коли контур проходить за межами тороїда, то він струмів не охоплює. Тому в цьому разі $B \cdot 2\pi r = 0$. Отже, за межами тороїда поле дорівнює нулю

$$\boxed{B = 0}. \quad (9.2 \text{ б})$$

Отже, поле зосереджене всередині тороїда. Зазначимо, що поле тороїда не є однорідним, у точках із різним значенням r індукція магнітного поля, як це випливає з (9.2 а), є неоднаковою.

2 Соленоїдом називають провідник, намотаний на каркас, що має форму циліндра. Визначимо індукцію магнітного поля нескінченно довгого соленоїда з відомим числом витків на одиницю його довжини n , по якому проходить струм I .

Передусім зазначимо, що нескінченно довгий соленоїд є окремим випадком тороїда. Дійсно, коли радіус тороїда R збільшувати до нескінченності, то довільний відрізок тороїда перейде в соленоїд. Звідси випливає, що магнітне поле соленоїда можна визначити використовуючи формулу для індукції магнітного поля тороїда (9.2).

Розглядаючи будову тороїда (див. рис. 9.1), нескладно з'ясувати, що відстань від центра тороїда до його довільної точки r пов'язана з радіусом тороїда R таким співвідношенням:

$$r = R - h, \quad (9.3)$$

де h є відстанню від осі тороїда до його довільної точки (див. рис. 9.1). Підставимо (9.3) в (9.2), перейдемо до випадку $R \rightarrow \infty$ та одержимо формулу для індукції магнітного поля всередині соленоїда

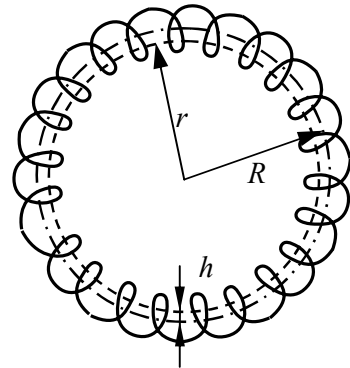


Рисунок 9.1 – Тороїд радіусом R . Штриховою лінією радіуса r показано контур інтегрування Γ

$$B = \mu_0 n I \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{R}{R-h} \right) = \mu_0 n I \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-h/R} \right) = \mu_0 n I \left(\frac{1}{1-0} \right) = \mu_0 n I .$$

Отже, індукція магнітного поля всередині соленоїда дорівнює

$$\boxed{B = \mu_0 n I} . \quad (9.4 \text{ а})$$

Зрозуміло, що за межами соленоїда, як і у разі тороїда, магнітного поля немає, тобто

$$\boxed{B = 0} . \quad (9.4 \text{ б})$$

Потрібно відмітити що, як випливає з (9.4), у різних внутрішніх точках соленоїда магнітне поле має однакове значення як за модулем, так і за напрямком, тобто всередині соленоїда магнітне поле є однорідним.

ТЕМА 2 МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

§ 10 Намагнічування речовини. Гіпотеза Ампера. Намагніченість

1 Якщо в магнітне поле \vec{B}_0 , створене у вакуумі, помістити будь-яку речовину, то магнітне поле зміниться. Це пояснюється тим, що будь-яка речовина є магнетиком, тобто здатна під дією магнітного поля *набувати магнітного моменту (намагнічуватися)*. Намагнічена речовина створює додаткове поле \vec{B}' , що разом із полем \vec{B}_0 утворює результуюче поле

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' . \quad (10.1)$$

Дійсне (мікроскопічне) поле в магнетику дуже змінюється в межах міжмолекулярних відстаней. Тому під індукцією \vec{B} розуміємо на увазі усереднене (макроскопічне) поле.

2 Для пояснення намагнічування тіл Ампер припустив (*гіпотеза Ампера*), що в молекулах речовини циркулюють колові струми (молекулярні струми). Кожний такий струм має магнітний момент і створює в навколишньому просторі магнітне поле. За умови відсутності зовнішнього поля молекулярні струми орієнтовані безладно, тому результуюче поле, обумовлене ними, в середньому дорівнює нулю. Внаслідок хаотичної орієнтації магнітних моментів окремих молекул сумарний магнітний момент тіла також дорівнює нулю. Під дією зовнішнього поля магнітні моменти молекул набувають переважної орієнтації в одному напрямку, внаслідок цього речовина намагнічується – його сумарний магнітний момент стає відмінним від нуля. Магнітні поля окремих молекулярних струмів у цьому разі вже не компенсують один одного, і тому виникає додаткове поле \vec{B}' . Гіпотеза Ампера, як виявилось пізніше, правильно описує намагнічування парамагнетиків.

3 Намагнічування речовини характеризують вектором намагніченості. **Вектором намагніченості** називають магнітний момент одиниці об'єму

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m , \quad (10.2)$$

де ΔV – фізично нескінченно малий об'єм, узятий біля деякої точки простору; \vec{p}_m – магнітний момент окремої молекули. Підсумовують за всіма молекулами, що містяться в об'ємі ΔV .

Як випливає зі співвідношення (10.2), намагніченість у системі СІ вимірюють в амперах, поділених на метр: ($[J] = A \cdot m^2 / m^3 = A / m$).

§ 11 Теорема Гаусса для індукції магнітного поля в речовині. Напруженість магнітного поля. Теорема про циркуляцію напруженості магнітного поля

1 Поле, створюване молекулярними струмами \vec{B}' , так само, як і поле у вакуумі \vec{B}_0 , не має джерел. Тому дивергенція результуючого поля в речовині

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (11.1)$$

дорівнює нулю:

$$\text{div}\vec{B} = \text{div}\vec{B}_0 + \text{div}\vec{B}' = 0. \quad (11.2)$$

Отже, одержуємо теорему Гаусса для індукції магнітного поля в речовині в диференціальному вигляді:

$$\boxed{\text{div}\vec{B} = 0}. \quad (11.3)$$

Використовуючи теорему Остроградського–Гаусса $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{A} \cdot dV$, знаходимо теорему Гаусса для індукції магнітного поля в речовині в інтегральному вигляді:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{B} \cdot dV = \int_V 0 \cdot dV = 0,$$

або

$$\boxed{\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0}. \quad (11.4)$$

Отже, для індукції магнітного поля в речовині теорему Гаусса записують у такому самому вигляді, як і для вакууму.

2 Визначимо циркуляцію індукції магнітного поля \vec{B} у речовині. Як відомо, індукція \vec{B} дорівнює векторній сумі додаткового поля \vec{B}' , створюваного молекулярними струмами, й поля, утвореного зовнішніми джерелами у вакуумі \vec{B}_0 (11.1). Використовуємо визначення циркуляції вектора та (11.1) й одержуємо

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint \vec{B}_0 d\vec{l} + \oint \vec{B}' d\vec{l}. \quad (11.5)$$

Відповідно до теореми про циркуляцію індукції магнітного поля у вакуумі можемо записати

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_0 d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k, \quad (11.6)$$

де $\mu_0 \sum I_k$ – алгебраїчна сума макроскопічних струмів, охоплених контуром Γ , за яким інтегрують, тобто алгебраїчна сума струмів, що проходять через довільну поверхню S , обмежену контуром Γ .

Для поля \vec{B}' , створюваного молекулярними струмами, повинне виконуватися аналогічне співвідношення:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}' d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_{\text{мол},k}, \quad (11.7)$$

де $\sum I_{\text{мол},k}$ – алгебраїчна сума молекулярних струмів, що проходять через поверхню S .

Підставимо вирази (11.6) і (11.7) у формулу (11.5) та одержимо

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k + \mu_0 \sum_k I_{\text{мол},k}. \quad (11.8)$$

Ми зіткнулися з труднощами: для того щоб знайти циркуляцію поля \vec{B} , потрібно знати суму молекулярних струмів, яка, також залежить від \vec{B} . Спосіб, що дозволяє обійти ці труднощі, полягає в такому: виявляється, можна знайти таку допоміжну величину,

циркуляція якої визначається лише сумою макроскопічних струмів. Розглянемо це питання більш детально.

Обчислимо алгебраїчну суму молекулярних струмів, що проходять через поверхню, обмежену деяким контуром. З рисунка 11.1 випливає, що до цієї суми входять лише ті молекулярні струми, які виявляються «нанизаними» на контур. Струми, які «не нанизані» на контур, або не перетинають поверхню зовсім, або перетинають поверхню двічі: перший раз в одному напрямку, другий раз – в іншому. Тому їх внесок до алгебраїчної суми струмів, охоплених контуром, дорівнює нулю.

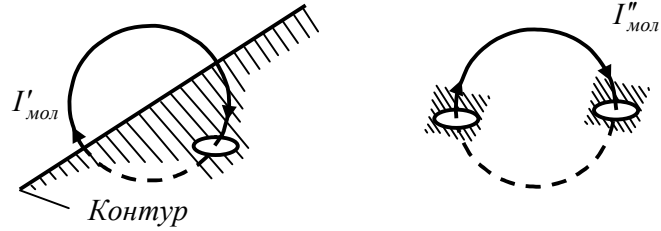


Рисунок 11.1 – Струм I''_{mol} перетинає поверхню двічі в протилежних напрямках, тому його внесок до суми струмів дорівнює нулю. Струм I'_{mol} перетинає поверхню лише один раз

З рисунка 11.2 бачимо, що елемент контура $d\vec{l}$, що утворює з напрямком намагніченості \vec{J} кут α , «нанизує» на себе лише ті молекулярні струми, центри яких потрапляють усередину косою циліндра з об'ємом $S_{mol} \cos \alpha dl$ (S_{mol} – площа, охоплена окремим молекулярним струмом). Якщо n – число молекул в одиниці об'єму, то сумарний струм, охоплений елементом dl , дорівнює $I_{mol} n S_{mol} \cos \alpha dl$. Добуток $I_{mol} S_{mol}$ дорівнює магнітному моменту p_m окремого молекулярного струму. Отже, вираз $I_{mol} S_{mol} n$ являє собою магнітний момент одиниці об'єму, тобто дає модуль вектора \vec{J} , а $I_{mol} S_{mol} n \cos \alpha dl$ – проєкцію вектора \vec{J} на напрямок елемента $d\vec{l}$. Отже, сумарний молекулярний струм, «нанизаний» на елемент $d\vec{l}$, визначають за виразом $J dl \cos \alpha = \vec{J} \cdot d\vec{l}$, а сума молекулярних струмів, «нанизаних» на весь контур (тобто сума молекулярних струмів, що проходять через поверхню, обмежену контуром), дорівнює

$$\sum_k I_{mol,k} = \oint \vec{J} \cdot d\vec{l}.$$

Підставивши цей вираз в (11.8), одержимо рівність

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k + \mu_0 \oint \vec{J} \cdot d\vec{l}. \quad (11.9)$$

Розділивши цю рівність на μ_0 та об'єднавши разом обидві циркуляції, одержимо формулу

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum_k I_k. \quad (11.10)$$

Величина, що знаходиться в дужках під знаком інтеграла, має таку властивість: її циркуляцію визначають лише макроскопічні струми. Цю допоміжну величину називають **напруженістю магнітного поля** й позначають буквою \vec{H} . Отже,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (11.11)$$

З урахуванням (11.11) співвідношення (11.10) можна написати у вигляді

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k. \quad (11.12)$$

Формула (11.12) виражає **теорему про циркуляцію вектора \vec{H}** : циркуляція вектора напруженості магнітного поля по деякому контуру Γ дорівнює алгебраїчній сумі макроскопічних струмів, охоплених цим контуром.

Напруженість магнітного поля \vec{H} є аналогом вектора індукції електричного поля \vec{D} . Спочатку вважали, що в природі є подібні до електричних зарядів магнітні маси, і вчення про магнетизм розвивалося за аналогією з електрикою. Тоді й були введені назви: «магнітна індукція» для \vec{B} й «напруженість поля» для \vec{H} . Згодом з'ясували, що магнітних мас у природі не існує й що величина, яку називають магнітною індукцією, в дійсності є аналогом не електричного зсуву \vec{D} , а напруженості електричного поля \vec{E} (відповідно \vec{H} – аналог не \vec{E} , а \vec{B}). Однак змінювати вже усталену термінологію не стали, тим більше що внаслідок різної природи електричного й магнітного полів (електростатичне поле потенціальне, магнітне соленоїдальне) величини \vec{B} і \vec{D} мають досить багато подібного щодо своїх властивостей (наприклад, лінії \vec{B} , як і лінії \vec{D} , не мають розривів на межі двох середовищ).

У вакуумі $\vec{J} = 0$, тому \vec{H} перетворюється на \vec{B}/μ_0 , і формула (11.12) переходить у формулу для циркуляції магнітного поля у вакуумі.

Як впливає з визначення напруженості магнітного поля (11.11), величину \vec{H} вимірюють в амперах, поділених на метр (А/м).

§ 12 Магнітна проникність, магнітна сприйнятливість

1 Із причин, які з'ясуються пізніше, намагніченість прийнято пов'язувати не з магнітною індукцією, а з напруженістю поля. Вважаємо, що в кожній точці магнетика

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (12.1)$$

де χ – характерна для цього магнетика величина, яку називають **магнітною сприйнятливістю**. Дослід показує, що для слабомагнітних (неферомагнітних) речовин за не занадто сильних полів χ не залежить від \vec{H} . Нескладно з'ясувати, що розмірність \vec{H} збігається з розмірністю \vec{J} . Отже, χ – безрозмірна величина.

Підставивши у формулу, що виражає означення напруженості магнітного поля, вираз (12.1) для \vec{J} , одержимо співвідношення

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

з якого знаходимо

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi)}. \quad (12.2)$$

Безрозмірну величину

$$\mu = 1 + \chi \quad (12.3)$$

називають **відносною магнітною проникністю**, або просто **магнітною проникністю речовини**.

На відміну від діелектричної сприйнятливості α , що може мати лише додатні значення (вектор поляризації \vec{P} в ізотропному діелектрику завжди спрямований уздовж поля

\vec{E}), магнітна сприйнятливість χ буває як додатною, так і від'ємною. Тому магнітна проникність μ може бути як більшою, так і меншою від одиниці.

З урахуванням (12.3) формула (12.2) може набирати вигляду

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (12.4)$$

Отже, напруженість магнітного поля \vec{H} є вектор, що має такий самий напрямок, що й вектор \vec{B} , але в $\mu_0 \mu$ разів менший за модулем. (В анізотропних середовищах вектори \vec{H} і \vec{B} в загальному випадку не збігаються за напрямком).

2 З'ясуємо фізичний зміст магнітної проникності. Припустимо, що є однорідне магнітне поле у вакуумі, яке ми будемо характеризувати за допомогою або вектора \vec{B}_0 або вектора $\vec{H}_0 = \vec{B}_0 / \mu_0$. Внесемо в це поле (яке ми будемо називати зовнішнім) нескінченно довгий круглий стрижень з однорідного й ізотропного матеріалу та розмістимо його вздовж ліній \vec{B}_0 (рис. 12.1). Під дією поля молекулярні струми встановляються так, що їх магнітні моменти розмістяться вздовж осі стрижня, а площини струмів будуть перпендикулярними до цієї осі. Розглянемо молекулярні струми, що лежать в одному з поперечних перерізів стрижня. У будь-якій точці всередині стрижня сусідні молекулярні струми проходять у протилежних напрямках так, що їх спільна дія дорівнює нулю. Некомпенсованими будуть лише ділянки струмів, що прилягають до поверхні стрижня. Отже, сумарна дія молекулярних струмів буде такою, яка б викликала макроскопічний струм, що проходить по поверхні стрижня перпендикулярно до його осі. Позначимо лінійну густину цього струму через $j_{\text{лін}}$. Проходження такого струму можна описати за допомогою моделі соленоїда, в якому лінійна густина має таке саме значення, тобто $j_{\text{лін}}$. Це має місце, якщо в цьому соленоїді добуток лінійної густини витків на силу струму буде дорівнювати $j_{\text{лін}}$, тобто $nI = j_{\text{лін}}$. Магнітну індукцію всередині такого соленоїда визначають за формулою $B = \mu_0 nI$. Отже, магнітна індукція додаткового поля, створюваного молекулярними струмами всередині стрижня, дорівнює

$$B' = \mu_0 j_{\text{лін}}. \quad (12.5)$$

Відповідно до правила правого гвинта напрямок \vec{B}' збігається з напрямком \vec{B}_0 (див. рис. 12.1). За межами стрижня \vec{B}' дорівнює нулю.

Виділимо уявно в стрижні перпендикулярний до його осі шар товщиною dl (рис. 12.1). Молекулярні струми, розміщені в цьому шарі, еквівалентні коловому струму сили $j_{\text{лін}} dl$. Згідно з означенням магнітний момент цього струму дорівнює

$$dp_m = j_{\text{лін}} S dl,$$

де S – площа поперечного перерізу стрижня. Поділивши dp_m на об'єм шару $dV = S dl$, одержимо згідно з означенням намагніченість стрижня:

$$J = j_{\text{лін}}. \quad (12.6)$$

Отже, модуль намагніченості стрижня дорівнює лінійній густині молекулярного струму, що обходить стрижень. З урахуванням (12.6) формула (12.5) набирає вигляду

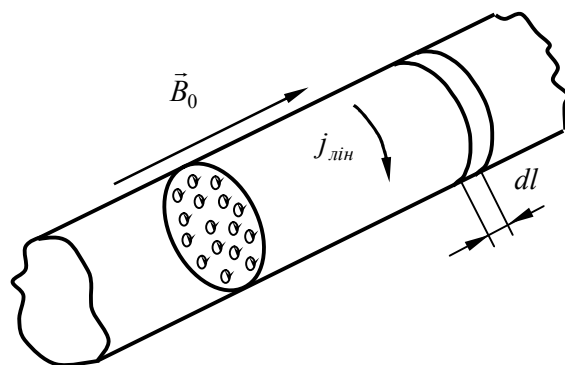


Рисунок 12.1 – Молекулярні струми в намагніченому стрижні

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J} \quad (12.7)$$

(ми змогли написати формулу у векторному вигляді, оскільки вектори \vec{B}' й \vec{J} збігаються за напрямком).

Додавши вектори \vec{B}_0 і \vec{B}' , визначимо магнітну індукцію результуючого поля всередині стрижня:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}.$$

Підставимо цей вираз у формулу, що є визначенням напруженості магнітного поля \vec{H} , і одержимо напруженість поля всередині стрижня:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{H}_0.$$

Отже, напруженість поля в стрижні виявляється такою, що збігається з напруженістю зовнішнього поля. Помноживши \vec{H} на $\mu_0 \mu$, одержимо магнітну індукцію всередині стрижня:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 \mu \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \mu \vec{B}_0, \text{ тобто } \boxed{\vec{B} = \mu \vec{B}_0}. \quad (12.8)$$

Звідси випливає, що магнітна проникність μ показує, в скільки разів підсилюється поле в магнетик. У цьому полягає **фізичний зміст магнітної проникності**. Нагадаємо, що діелектрична проникність ϵ показує, в скільки разів послаблюється поле в діелектрику.

Відзначимо, що оскільки поле \vec{B}' відмінне від нуля лише всередині стрижня, магнітне поле поза стрижнем залишається без змін.

Результат, який ми одержали, є правильним лише в тих випадках, коли однорідний та ізотропний магнетик заповнює об'єм, обмежений поверхнями, утвореними лініями напруженості зовнішнього поля.

Зазначимо, що оскільки \vec{H} (на відміну від \vec{B}) у разі додержання зазначених вище умов не залежить від μ (а отже, й від χ), то доцільно розглядати залежність \vec{J} від \vec{H} , а не від \vec{B} (див. формулу (12.1)).

§ 13 Умови для векторів індукції та напруженості магнітного поля на межі двох магнетиків

1 З'ясуємо, як змінюються вектори \vec{B} і \vec{H} у разі переходу з одного середовища з магнітною проникністю μ_1 до іншого з магнітною проникністю μ_2 . Розглянемо стаціонарний випадок, коли поля не змінюються з часом. Для вирішення вище сформульованої проблеми застосуємо теорему Гаусса для індукції магнітного поля в речовині

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (13.1)$$

та теорему про циркуляцію напруженості магнітного поля

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k. \quad (13.2)$$

2 Розглянемо на межі двох магнетиків із проникностями μ_1 і μ_2 уявну циліндричну поверхню висотою h з основами S_1 та S_2 , розміщеним по різні сторони від поверхні поділу (рис. 13.1). Потік вектора \vec{B} через цю замкнену поверхню дорівнює

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = B_{1n_1} S_1 + B_{2n_2} S_2 + \langle B_n \rangle S_{\text{бічн}}. \quad (13.3)$$

Відповідно до теореми Гаусса (13.1) потік вектора \vec{B} через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Тому прирівняємо до нуля вираз (13.3), виконаємо перехід $h \rightarrow 0$, і приходимо до співвідношення $B_{1n_1} = -B_{2n_2}$.

Якщо проєктувати \vec{B}_1 і \vec{B}_2 на одну й ту саму нормаль, наприклад $\vec{n} = \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ (див. рис. 13.1), то одержимо

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}. \quad (13.4)$$

Замінивши у (13.4) складові \vec{B} відповідними складовими вектора \vec{H} , помноженими на $\mu_0\mu$, одержимо співвідношення

$$\mu_0\mu_1 H_{1n} = \mu_0\mu_2 H_{2n},$$

з якого випливає, що

$$\boxed{\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}. \quad (13.5)$$

Формули (13.4) та (13.5) показують, як змінюються нормальні складові векторів \vec{B} та \vec{H} на межі поділу двох магнетиків.

3 Тепер розглянемо на межі магнетиків прямокутний контур (рис. 13.2) та обчислимо для нього циркуляцію \vec{H} . За малих розмірів контура циркуляцію можна подати у вигляді

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_{1\tau} a - H_{2\tau} a + \langle H_l \rangle 2b, \quad (13.6)$$

де $\langle H_l \rangle$ – середнє значення \vec{H} на перпендикулярних до межі ділянках контура. Якщо вздовж межі поділу не проходять макроскопічні струми $\sum I_k = 0$, то циркуляція вектора \vec{H} уздовж обраного контура відповідно до теореми (13.2) буде дорівнювати нулю. Взявши вираз (13.6) таким, що дорівнює нулю, й виконавши граничний перехід $b \rightarrow 0$, одержуємо співвідношення

$$\boxed{H_{1\tau} = H_{2\tau}}. \quad (13.7)$$

Замінивши складові \vec{H} відповідними складовими вектора \vec{B} , поділеними на $\mu_0\mu$, одержимо співвідношення

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0\mu_2},$$

з якого випливає, що

$$\boxed{\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}. \quad (13.8)$$

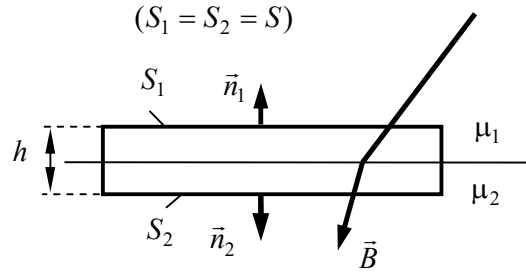


Рисунок 13.1 – До обчислення нормальних компонент вектора індукції магнітного поля на межі двох магнетиків

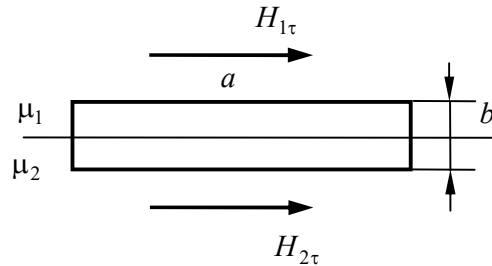


Рисунок 13.2 – До обчислення тангенціальних компонент вектора напруженості магнітного поля на межі двох магнетиків

Формули (13.7) та (13.8) показують, як змінюються тангенціальні складові векторів \vec{B} і \vec{H} на межі поділу двох магнетиків.

Підбиваючи підсумок, можна зазначити, що в разі переходу через межу поділу двох магнетиків нормальна складова вектора \vec{B} й тангенціальна складова вектора \vec{H} не змінюються. Тангенціальна ж складова вектора \vec{B} та нормальна складова вектора \vec{H} під час переходу через межу поділу зазнають розривів.

§ 14 Гіромагнітне відношення. Дослід Ейнштейна і де Хааса

1 Природа молекулярних струмів стала зрозумілою після того, як за допомогою дослідів Резерфорда було встановлено, що атоми всіх речовин складаються з додатно зарядженого ядра й від'ємно заряджених електронів, що рухаються навколо нього.

Рух електронів в атомах описаний законами квантової механіки. Однак магнетизм речовин удається задовільно пояснити, користуючись напівкласичною борівською моделлю, відповідно до якої електрони в атомах рухаються стаціонарними коловими орбітами. Стабільність таких орбіт суперечить законам класичної фізики, тому пояснити магнетизм речовини на основі чисто класичних уявлень неможливо. Вичерпне пояснення дає лише квантова механіка.

2 Розглянемо пояснення магнітних властивостей речовин на основі уявлення про стабільні електронні орбіти. Нехай електрон рухається зі швидкістю v по орбіті радіусом r (рис. 14.1). Через площадку, розміщену в будь-якому місці на шляху електрона, переноситься за одиницю часу заряд e/T , де e – елементарний заряд, а T – період обертання електрона навколо ядра. Отже, рух електрона по орбіті є еквівалентним коловому струму із силою електричного струму $I = e/T$. Оскільки заряд електрона від'ємний, то напрямок руху електрона й напрямок струму протилежні. Магнітний момент струму, створюваний електроном, дорівнює

$$p_m = IS = (e/T)\pi r^2.$$

Добуток $2\pi r/T$ є швидкістю електрона v . Тому можна записати, що

$$p_m = e\upsilon r / 2. \quad (14.1)$$

Цей момент обумовлений рухом електрона по орбіті, з огляду на це його називають **орбітальним магнітним моментом електрона**. Напрямок вектора \vec{p}_m утворює з напрямком струму правогвинтову, а з напрямком руху електрона лівогвинтову систему (див. рис. 14.1). Електрон, що рухається по орбіті, має момент імпульсу

$$L = m\upsilon r, \quad (14.2)$$

де m – маса електрона. Вектор \vec{L} називають **орбітальним механічним моментом електрона**. Він утворює з напрямком руху електрона правогвинтову систему. Отже, напрямки векторів \vec{p}_m і \vec{L} протилежні.

Відношення магнітного моменту елементарної частинки до її механічного моменту називають **гіромагнітним (магнітомеханічним) відношенням**. Для електрона, який рухається по орбіті, це відношення дорівнює

$$p_m / L = -e / 2m. \quad (14.3)$$

Знак мінус свідчить про те, що напрямки моментів протилежні.

3 Внаслідок обертання навколо ядра електрон виявляється подібним до дзиги. Це є основою так званих **магнітомеханічних явищ**, які полягають у тому, що намагнічування

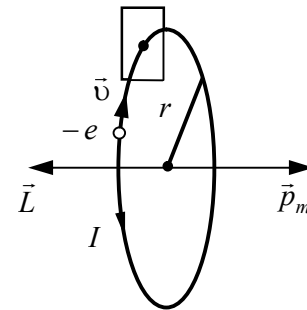


Рисунок 14.1 – Механічний і магнітний орбітальні моменти електрона

магнетика приводить до його обертання й, навпаки, обертання магнетика спричиняє його намагнічування. Існування першого явища було доведено експериментально Ейнштейном і де Хаасом, другого – Барнеттом.

Основою досліду Ейнштейна й де Хааса є такі міркування. Якщо помістити стрижень із магнетика в паралельне його осі магнітне поле, то магнітні моменти електронів установаються за напрямком поля, а механічні моменти – проти поля. У результаті сумарний механічний момент електронів $\sum \vec{L}_e$ стане відмінним від нуля (у вихідному положенні внаслідок хаотичної орієнтації окремих моментів він дорівнював нулю). Момент імпульсу системи стрижень + електрони відповідно до закону збереження моменту імпульсу повинен залишитися сталим. Тому стрижень набирає моменту імпульсу, протилежного моменту імпульсу електронів, тобто дорівнює $(-\sum \vec{L}_e)$, і, отже, починає обертатися. Зміна напрямку поля на зворотний приведе до зміни напрямку обертання стрижня.

Механічну модель цього досліду можна здійснити посадивши людину на стілець, що може обертатися, і давши їй у руки масивне обертове колесо. Повернувши колесо віссю вгору, людина починає обертатися протилежно до напрямку обертання колеса. Повернувши колесо віссю вниз, людина починає обертатися в інший бік.

Дослід Ейнштейна й де Хааса здійснювали отже (рис. 14.2). Тонкий залізний стрижень підвішували на пружній нитці й поміщали всередину соленоїда. Закручування нитки під час намагнічування стрижня сталим магнітним полем було дуже малим. Для посилення ефекту застосовували метод резонансу – соленоїд живився змінним струмом, частоту якого підбирали такою, яка дорівнювала власній частоті крутильних коливань стрижня. У цих умовах амплітуда коливань досягала значень, які можна було виміряти спостерігаючи зміщення світлового «зайчика», що відбивався від дзеркальця, закріпленого на нитці. З даних досліду було обчислене гіромагнітне відношення що дорівнювало $(-e/m)$. Отже, із досліду Ейнштейна і де Хааса випливає: знак заряду носіїв, що створюють молекулярні струми, збігся зі знаком заряду електрона, однак одержане гіромагнітне відношення перевищило вдвічі значення (14.3).

4 Надалі з'ясували, що, крім орбітальних моментів (14.1) і (14.2), електрон має власні механічний L_s і магнітний p_{ms} моменти, для яких гіромагнітне відношення дорівнює

$$p_{ms} / L_s = -e / m, \quad (14.4)$$

тобто збігається зі значенням, одержаним у дослідах Ейнштейна й де Хааса. Звідси випливає, що магнітні властивості заліза обумовлені не орбітальними, а власними магнітними моментами електронів.

Існування власних моментів електрона спочатку намагалися пояснити розглядаючи електрон як заряджену кульку, що обертається навколо своєї осі. Відповідно до цього власний механічний момент електрона одержав назву **спін** (від англійського *to spin* – обертатися). Однак незабаром з'ясувалося, що таке уявлення приводить до низки суперечностей і від гіпотези про електрон, який обертається відносно своєї осі, довелося відмовитися. Було визнано, що **власний механічний момент (спін) і пов'язаний із ним власний (спіновий) магнітний момент є такими самими невід'ємними властивостями електрона, як і його маса та заряд.**

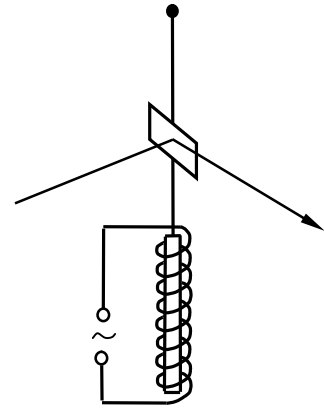


Рисунок 14.2 – Схема досліду Ейнштейна й де Хааса

§ 15 Типи магнетиків. Якісне пояснення магнітних властивостей речовини

1 Типи магнетиків. Абсолютно всі речовини мають магнітні властивості й тому вони є *магнетиками*. За своїми магнітними властивостями залежно від знака та числового значення магнітної сприйнятливості всі магнетики поділяють на три групи:

1) *діамагнетики*, що характеризуються від'ємною магнітною сприйнятливістю $\chi = \mu - 1 < 0$ (у цьому разі магнітна проникність є меншою за одиницю: $\mu < 1$, $\mu \approx 1$), її модуль набагато менший за одиницю: $|\chi| = |\mu - 1| \ll 1$;

2) *парамагнетики*, які характеризуються додатною магнітною сприйнятливістю $\chi = \mu - 1 > 0$ (у цьому разі магнітна проникність є більшою за одиницю: $\mu > 1$, $\mu \approx 1$), її модуль набагато менший за одиницю: $|\chi| = |\mu - 1| \ll 1$;

3) *феромагнетики*, що характеризуються додатною магнітною сприйнятливістю $\chi = \mu - 1 > 0$, її модуль набагато більший за одиницю: $|\chi| = |\mu - 1| \gg 1$, $\mu \approx 10^2 - 10^6$.

Окрім числових значень, ці види магнетиків відрізняються за своїми властивостями.

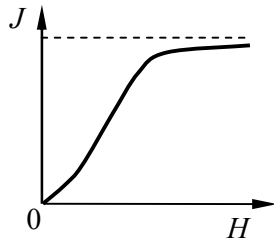


Рисунок 15.1 – Залежність намагніченості від напруженості магнітного поля

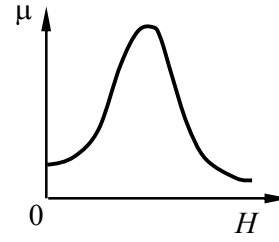


Рисунок 15.2 – Залежність магнітної проникності від напруженості магнітного поля

Діамагнетики та парамагнетики за відсутності магнітного поля завжди не намагнічені. Вони характеризуються лінійною однозначною залежністю намагніченості від напруженості магнітного поля $J = \chi \cdot H$, у цьому разі $\chi = const$ (для діамагнетиків $\chi < 0$, для парамагнетиків $\chi > 0$).

Феромагнетики за умови відсутності магнітного поля можуть бути намагніченими. Вони мають *нелінійну залежність намагніченості* від напруженості магнітного поля $J(H)$ (див. рис. 15.1), у цьому разі магнітна проникність залежить від напруженості магнітного поля $\mu = \mu(H)$ (див. рис. 15.2).

Інша відмінність феромагнетиків полягає в тому, що для них залежність індукції магнітного поля B (характеризує магнітне поле всередині речовини) від напруженості магнітного поля H (характеризує зовнішнє магнітне поле) або J від H є неоднозначною, а визначається попередньою історією намагнічування феромагнітного зразка. Це явище називають *магнітним гістерезисом*. Візьмемо феромагнітний зразок у ненамагніченому стані й будемо намагнічувати його, збільшуючи магнітне поле від нуля до якогось значення H_1 . Залежність $B = B(H)$ зобразиться кривою OA_1 (рис. 15.3). Потім будемо зменшувати H від $+H_1$ до $-H_1$. Крива намагнічування, як показує дослід, не буде проходити попереднім шляхом A_1O , а пройде вище – шляхом $A_1C_1D_1$. Якщо далі змінювати поле від $-H_1$ до $+H_1$, то крива намагнічування пройде нижче й повернеться в попередню точку

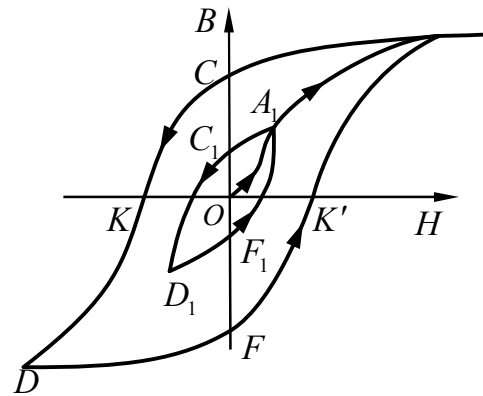


Рисунок 15.3 – Петлі гістерезису ($A_1C_1D_1F_1A_1$, $ACDFA$)

A_1 . Одержимо замкнену криву $A_1C_1D_1F_1A_1$, яку називають *петлею гістерезису*. Якщо вихідну криву OA_1 довести до точки A , де намагнічування вже досягло насичення, то описаним вище способом можемо одержати *найбільшу*, або *граничну*, *петлю гістерезису* $ACDFA$. З цієї кривої бачимо, що за $H = 0$ індукція B не дорівнює нулю, а зображується відрізком $OC = B_r$. Цю індукцію магнітного поля B_r називають *залишковою*. З наявністю такого залишкового намагнічування пов'язане існування *сталих магнітів*. Для того щоб розмагнітити зразок, необхідно довести криву намагнічування до точки K або K' . Цим точкам відповідає напруженість магнітного поля $H_c = |OK|$. Цю напруженість магнітного поля H_c називають *коерцитивною силою* феромагнетика. Значення залишкової індукції й коерцитивної сили для різних феромагнетиків змінюється в широких межах. Для м'якого заліза петля гістерезису вузька (коерцитивна сила мала), для сталі й усіх матеріалів, використовуваних для виготовлення постійних магнітів, – широка (коерцитивна сила велика).

Третя відмінність феромагнетиків від парамагнетиків і діаманетиків полягає в тому, що для довільного феромагнетика існує визначена температура $T = T_K$, яку називають *температурою Кюрі*, під час переходу через яку феромагнетик стає парамагнетиком.

2 Якісне пояснення магнітних властивостей речовини. Теорію магнітних властивостей речовини будують на базі квантово-механічних уявлень. Тут ми розглянемо ці властивості наближено з якісного погляду.

Парамагнетизм спостерігається в речовинах, атоми яких мають ненульові магнітні моменти за умови відсутності зовнішнього магнітного поля. Кожний атом, що має ненульовий магнітний момент, створює в оточуючому середовищі додаткове магнітне поле. Коли зовнішнє магнітне поле відсутнє, атоми хаотично рухаються, та їх магнітні моменти орієнтовані неупорядковано. Результуюче додаткове магнітне поле, створюване цими атомами, дорівнює нулю. Коли парамагнетик вносять до зовнішнього магнітного поля ($\vec{B}_0 \neq 0$), то магнітні моменти атомів орієнтуються вздовж вектора індукції цього магнітного поля. Тому результуюче додаткове магнітне поле вже не дорівнює нулю ($\vec{B}' \neq 0$). Воно накладається на зовнішнє магнітне поле, а це приводить до зміни загального магнітного поля в речовині ($\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \neq \vec{B}_0$). Так виникає намагнічування парамагнетиків. Про цей механізм намагнічування говорять як про гіпотезу Ампера. Парамагнітні властивості мають такі речовини, як хлорне залізо, кисень, алюміній, платина.

Діаманетизм спостерігається в таких речовинах, у яких атоми за умови відсутності зовнішнього магнітного поля не мають магнітного моменту. Коли такі атоми розміщують у зовнішньому магнітному полі, то на електрони атома починає діяти магнітна складова сили Лоренца, у результаті цього виникає додатковий рух електрона, що приводить до виникнення додаткового магнітного поля, спрямованого в протилежний бік від зовнішнього. Так виникає намагнічування діаманетиків. Зрозуміло, що цей механізм намагнічування має місце як у парамагнетиках, так і в феромагнетиках. Але їх внесок у намагнічування порівняно з іншими механізмами намагнічування в парамагнетиках та феромагнетиках дуже малий. Діаманітні властивості мають азот, вода, срібло, вісмут.

Феромагнетизм спостерігають у залізі, нікелі, кобальті та деяких інших речовинах у кристалічному стані. Відповідають за магнітні властивості феромагнетиків не магнітні моменти орбітального руху електронів, як у парамагнетиках і діаманетиках, а власні магнітні моменти електронів (спінові магнітні моменти). У феромагнітних речовинах взаємодія спінових магнітних моментів є істотною. У результаті цієї взаємодії спінові магнітні моменти орієнтуються паралельно один одному, виникають *області спонтанного намагнічування*. Ці області називають *доменами*. Феромагнетик зазвичай має велику кількість доменів. Під час нагрівання вони можуть руйнуватися. За умови відсутності зовнішнього магнітного поля домени орієнтуються хаотично й додаткового магнітного поля не створюють. У разі внесення феромагнетика в магнітне поле домени орієнтуються вздовж поля, створюють власне додаткове магнітне поле. Так намагнічується феромагнетик.

ТЕМА 3 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

§ 16 Досліди Фарадея. Закон Фарадея. Правило Ленца

У 1831 році Фарадей виявив, що в замкненому провідному контурі за умови зміни потоку магнітної індукції через поверхню, обмежену цим контуром, виникає електричний струм. Це явище одержало назву **електромагнітної індукції**, а електричний струм, що виникає в цьому разі, – **індукційним**.

1 Досліди Фарадея. Принципова схема установки Фарадея наведена на рисунку 16.1. На дерев'яний стрижень M намотано два довгі ізольовані мідні провідники, кінці одного з яких через ключ K приєднані до батареї гальванічних елементів B , а кінці іншого – до гальванометра G . За незмінної сили струму в першому колі гальванометр показував, що немає струму в другому електричному колі. Однак під час замикання й розмикання ключа K стрілка гальванометра злегка відхилилася й потім швидко поверталася до положення рівноваги, що свідчило про виникнення в провіднику 2 короточасного струму, який Фарадей назвав **індукційним струмом**. Напрямки індукційних струмів під час замикання й розмикання ключа K були прямо протилежними. Замінивши ключ K реостатом, Фарадей помітив, що за зміни сили струму I_1 в першому провіднику, в другому, як і раніше, наводиться індукційний струм, напрямок якого залежить від того, зменшується I_1 або збільшується.

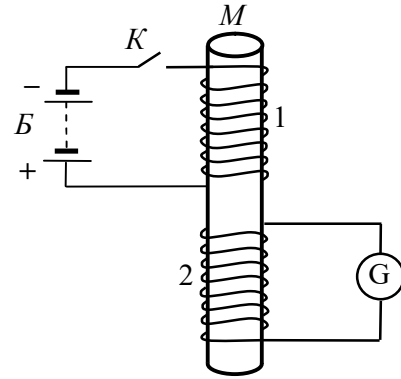


Рисунок 16.1 – Схема установки Фарадея

Зміна струму I_1 супроводжувалась одночасною зміною його магнітного поля. Тому незрозуміло було, що ж є причиною виникнення індукційного струму: зміна струму I_1 або його магнітного поля в тій частині простору, де знаходиться другий провідник? Відповідь на це запитання одержав Фарадей за допомогою таких дослідів. Потрібно взяти дві котушки (рисунку 16.2), одна з яких, K_1 , замкнена на батарею B ; у цій котушці проходить постійний струм: $I_1 = const$. Котушка K_2 замкнена на гальванометр. Якщо котушку K_1 наближати до K_2 , то в останній виникає індукційний струм I_2 , напрямок якого показаний на рисунку 16.2. У разі віддалення котушки K_1 від K_2 струм I_2 також виникає, але має протилежний напрямок.

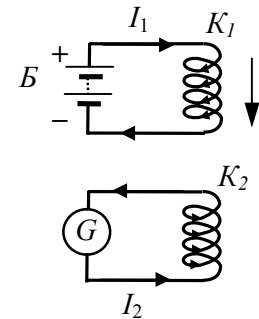


Рисунок 16.2 – Схема дослідів з двома котушками

Аналогічну картину спостерігають у разі віддалення або наближення котушки K_2 до нерухомої котушки K_1 . Нарешті, струм I_2 відсутній, коли взаємне розміщення котушок не змінюється.

Ці досліді чітко показали, що причиною виникнення індукційного струму I_2 є зміна магнітного поля, яке пронизує котушку K_2 . Щоб остаточно переконатися в цьому, Фарадей провів ще один дослід. Котушку зі струмом було замінено довгим магнітом (рис. 16.3). Під час переміщення магніту вздовж осі котушки K_2 було виявлене виникнення в ній індукційного струму, напрямок якого залежав від того, яким полюсом був повернутий до котушки магніт і віддалявся він від неї або наближався до неї. Результати дослідів повністю підтвердили зроблений вище висновок про причину виникнення індукційного струму.

2 Закон Фарадея (закон електромагнітної індукції).

Відкрите Фарадеєм явище, як зазначалося вище, одержало назву електромагнітної індукції. Електричний струм у замкненому колі може виникнути лише під дією сторонніх сил. Отже, в замкненому контурі, що знаходиться в змінному магнітному полі, з'являються сторонні сили, індуковані змінним магнітним полем. *Енергетичною мірою сторонніх сил, як відомо, є електрорушійна сила (ЕРС) або у випадку, що розглядається, ЕРС електромагнітної індукції \mathcal{E}_i .*

Подальші дослідження індукційного струму в контурах різної форми й розмірів довели, що ЕРС \mathcal{E}_i електромагнітної індукції в контурі пропорційна швидкості зміни магнітного потоку Φ , який проходить через поверхню, обмежену цим контуром (**закон Фарадея**):

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (16.1)$$

У цьому разі ЕРС електромагнітної індукції не залежить від того, чим саме спричинена зміна магнітного потоку: деформацією контура, його переміщенням у магнітному полі або зміною самого поля.

3 Правило Ленца. Е. Х. Ленц досліджував зв'язок між напрямком індукційного струму й характером зміни магнітного потоку, який був причиною появи такого струму. В 1834 році він установив такий закон (**правило Ленца**): *за будь-якої зміни магнітного потоку через поверхню, обмежену замкненим контуром, в останньому виникає індукційний струм такого напрямку, що його магнітне поле протидіє зміні магнітного потоку.* *Правилом Ленца обумовлений знак «-» у законі Фарадея (16.1).* При цьому потрібно брати до уваги, що вектор нормалі до поверхні, обмеженої контуром, та напрямком обходу цього контура пов'язані між собою правилом правого гвинта.

Так, у разі наближення магніту до котушки, замкненої на гальванометр (див. рис. 16.3), у ній наводять індукційний струм, що своєю магнітною дією перешкоджає наближенню магніту й пов'язаному з цим зростанню магнітного потоку через витки котушки. У разі віддалення магніту від котушки в ній наводять струм протилежного напрямку, що своєю магнітною дією також перешкоджає руху магніту. Легко перевірити, що всередині котушки вектори магнітної індукції поля магніту й поля індукційного струму в першому випадку спрямовані в протилежні боки, а в другому – в один і той самий бік.

4 Закон Фарадея для складного контура. Нехай контур, у якому індукується ЕРС, складається не з одного витка, а з N витків, наприклад, являє собою соленоїд. Оскільки витки з'єднуються послідовно, то загальна ЕРС \mathcal{E}_i у такому складному контурі буде дорівнювати сумі ЕРС, що індукуються в кожному з витків окремо:

$$\mathcal{E}_i = - \sum \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (\sum \Phi). \quad (16.2)$$

Величину

$$\Psi = \sum \Phi \quad (16.3)$$

називають **потокозчепленням, або повним магнітним потоком**. Його вимірюють у тих самих одиницях, що й магнітний потік Φ , тобто у веберах ($1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$). Якщо потік, що пронизує кожний із витків, однаковий, то

$$\Psi = N\Phi. \quad (16.4)$$

ЕРС, індуквану в такому складному контурі, визначають за формулою

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (16.6)$$

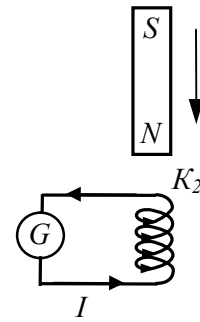


Рисунок 16.3 –
Схема дослідження з
магнітом та
котушкою

§ 17 Електрорушійна сила індукції (механізм виникнення) у рухомих і нерухомих контурах. Максвеллівське трактування закону електромагнітної індукції

1 Електрорушійна сила індукції (механізм виникнення) у рухомих контурах.

Можна за допомогою логічних міркувань визначити зв'язок між ЕРС індукції \mathcal{E}_i й швидкістю зміни магнітного потоку Φ , тобто закон Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (17.1)$$

Виконаємо це. Звернемо увагу в цьому разі на механізм виникнення явища електромагнітної індукції.

Розглянемо контур, що знаходиться в однорідному та постійному магнітному полі, індукція якого є перпендикулярною до площини контура (див. рис. 17.1). Нехай перемітка 1–2 рухається зі швидкістю \vec{v} . З тією самою швидкістю переміщуються разом із переміткою й носії струму – електрони. Унаслідок цього на кожний електрон із зарядом e діє магнітна сила

$$\vec{F}_m = e[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (17.2)$$

спрямована вздовж перемітки. Дія цієї сили є еквівалентною дії на електрон стороннього поля з напруженістю

$$\vec{E}_{cm} = \vec{F}_m / e = [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Це поле неелектростатичного походження. Його циркуляція по контуру приводить до значення ЕРС, індукованої в контурі:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} = \oint [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} = \int_1^2 [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} \quad (17.3)$$

(підінтегральна функція відмінна від нуля лише на ділянці, утвореної переміткою 1–2).

Вектори \vec{v} і \vec{B} взаємно перпендикулярні, а вектори $[\vec{v} \times \vec{B}]$ та $d\vec{l}$ спрямовані в протилежні сторони. Тому формула (17.3) спрощується:

$$\mathcal{E}_i = -\int_1^2 v B dl = -v B l = -\frac{dx}{dt} B l = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (17.4)$$

Тут ми подали v у вигляді dx/dt , добуток $B l dx$ являє собою збільшення магнітного потоку $d\Phi$ через контур за час dt . У результаті одержуємо із (17.4) закон Фарадея (17.1).

Отже, у разі якщо провідник рухається в постійному магнітному полі, ЕРС індукції виникає внаслідок дії магнітної складової сили Лоренца.

2 Максвеллівське трактування закону електромагнітної індукції. Якщо провідник рухається в постійному магнітному полі, індукційний струм спричиняє магнітна складова сили Лоренца $\vec{F}_m = e[\vec{v} \times \vec{B}]$. Яка ж сила збуджує індукційний струм у нерухомому провіднику, розміщеному в змінному магнітному полі? Відповідь була дана Максвеллом. Відповідно до трактування Максвелла *будь-яке змінне магнітне поле збуджує в навколишньому просторі вихрове електричне поле*. Останнє й є причиною виникнення індукційного струму в провіднику. Сила, з якою діє вихрове електричне поле з напруженістю \vec{E}_e на електричний заряд $\vec{F}_e = q\vec{E}_e$, має неелектростатичний характер, тобто вона є сторонньою силою. Напруженість поля сторонніх сил у цьому разі буде дорівнювати

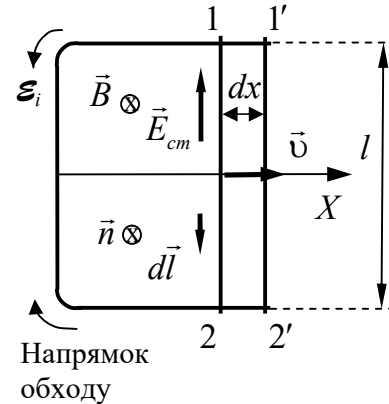


Рисунок 17.1 – Перемітка 1–2 довжиною l переміщується із сталою швидкістю \vec{v} . Вибірємо напрямком нормалі \vec{n} так, щоб цей вектор був спрямований за креслення. Напрямок ($d\vec{l}$) обходу контура вибираємо так, щоб він утворював із \vec{n} правогвинтову систему

напруженості вихрового електричного поля $\vec{E}_{cm} = \vec{F}_e / q = \vec{E}_e$. Тоді ЕРС вихрового поля буде дорівнювати $\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} = \oint \vec{E}_e d\vec{l}$. Підставляємо замість \mathcal{E}_i одержаний вираз у закон Фарадея (17.1) і приходимо до **максвеллівського формулювання закону електромагнітної індукції**: *будь-яка зміна магнітного поля в часі збуджує в навколишньому просторі вихрове електричне поле \vec{E}_e ; циркуляцію вектора напруженості \vec{E}_e цього поля по будь-якому нерухомому замкнутому контуру Γ визначають за виразом*

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_e d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (17.5)$$

де Φ – магнітний потік, що пронизує контур Γ . Ми тут використали для позначення швидкості зміни магнітного потоку знак частинної, а не повної похідної. Цим ми хочемо підкреслити, що контур Γ повинен бути нерухомим.

Між максвеллівським та фарадеївським розуміннями явища електромагнітної індукції є істотне розходження. Відповідно до формулювання Фарадея електромагнітна індукція полягає в *збудженні електричного струму*. Для її спостереження необхідна наявність замкнутого провідника. Максвелл, навпаки, вбачає сутність електромагнітної індукції насамперед у *збудженні вихрового електричного поля*, а не струму. Електромагнітна індукція може спостерігатися й тоді, коли в просторі взагалі немає ніяких провідників. Поява індукційного струму в замкнутому провіднику в разі внесення останнього до змінного магнітного поля є лише одним із проявів вихрового електричного поля, що виникає внаслідок зміни магнітного поля. Але вихрове електричне поле може виконувати й інші дії, наприклад, поляризувати діелектрик, спричиняти пробій конденсатора, прискорювати й гальмувати заряджені частинки і т. ін. Експерименти повністю підтверджують гіпотезу Максвелла.

3 У загальному випадку, якщо провідник рухається і магнітне поле змінюється, індукційний струм збуджується як електричною силою $e\vec{E}$, так і магнітною силою $e[\vec{v} \times \vec{B}]$. Поєднуючи обидві сили, можна сказати, що в усіх випадках індукційний струм спричиняє повна сила Лоренца

$$\vec{F} = e(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]). \quad (17.6)$$

Яку частину індукційного струму спричиняє електрична, а яку магнітна складова сили Лоренца, залежить від вибору системи відліку. Дійсно, чисто електричне поле (без магнітного) створює система нерухомих зарядів. Однак якщо заряди нерухомі відносно деякої інерціальної системи відліку, то відносно інших інерціальних систем ці заряди рухаються і, отже, створюють не лише електричне, а й магнітне поле. Нерухомий провідник із постійним струмом створює постійне магнітне поле. Однак відносно інших інерціальних систем цей провідник рухається, тому створюване ним магнітне поле в будь-якій точці буде змінюватися і, отже, породжувати вихрове електричне поле. Отже, поле, яке відносно деякої системи відліку є чисто електричним або чисто магнітним, відносно інших систем відліку являє собою сукупність електричного й магнітного полів, що утворюють єдине електромагнітне поле.

§ 18 Явище самоіндукції. Індуктивність. Індуктивність довгого соленоїда. ЕРС самоіндукції

1 Електричний струм I , який проходить у будь-якому контурі, створює повний магнітний потік Ψ , що пронизує цей контур (див. рис. 18.1). Зміна сили струму ΔI буде супроводжуватися зміною індукції магнітного поля ΔB , а отже, й зміною магнітного потоку $\Delta \Psi$. Унаслідок зміни магнітного потоку в контурі індукується ЕРС, яка також впливає на зміну сили струму. **Це явище називають самоіндукцією.**

2 Відповідно до закону Біо – Савара – Лапласа індукція магнітного поля пропорційна силі струму, що створює це поле. Звідси випливає, що струм I в контурі й повний магнітний потік Ψ , створюваний цим струмом у тому самому контурі, пропорційні один одному:

$$\boxed{\Psi = LI}. \quad (18.1)$$

Коефіцієнт пропорційності L між силою струму й повним магнітним потоком називають **індуктивністю контура**.

Пропорційність потоку Ψ силі струму I має місце лише в тому разі, якщо магнітна проникність μ середовища, яким оточений контур, не залежить від напруженості поля H , тобто за умови відсутності феромагнетиків. У протилежному разі μ є складною функцією від I , і залежність Ψ від I також буде складною, оскільки $B = \mu_0 \mu H$. Однак формулу (18.1) поширюють і на цей випадок, вважаючи індуктивність L функцією від I . За незмінної сили струму повний потік може змінюватися також унаслідок зміни форми й розмірів контура.

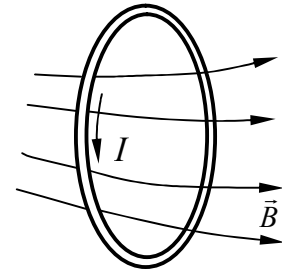


Рисунок 18.1 – До пояснення явища самоіндукції

Отже, індуктивність залежить від геометрії контура (тобто від його форми й розмірів), а також від магнітних властивостей (від μ) середовища навколо контура. Якщо контур жорсткий і поблизу нього немає феромагнітних тіл, індуктивність є сталою величиною.

Одиницею індуктивності є генрі (Гн), що дорівнює індуктивності такого провідника, в якому за сили струму 1 А в ньому виникає зчеплений із ним повний магнітний потік 1 Вб (1 Гн = 1 Вб/(1 А)).

3 *Визначимо індуктивність довгого соленоїда*. Розглянемо соленоїд такої довжини, щоб його можна було вважати нескінченним. Під час проходження через нього струму I всередині соленоїда збуджується однорідне поле з індукцією $B = \mu_0 \mu n I$ (див. відповідні формули для магнітного поля нескінченного соленоїда). Потік через кожний із витків дорівнює $\Phi = BS$, а повний магнітний потік, зчеплений із соленоїдом:

$$\Psi = N\Phi = n l B S = \mu_0 \mu n^2 l S I, \quad (18.2)$$

де l – довжина соленоїда; S – площа поперечного перерізу; n – число витків на одиницю довжини (добуток $n l$ дає повне число витків N соленоїда).

Порівняння формул (18.1) і (18.2) дає для *індуктивності дуже довгого соленоїда вираз*

$$\boxed{L = \mu_0 \mu n^2 l S = \mu_0 \mu n^2 V}, \quad (18.3)$$

де $V = S l$ – об'єм соленоїда.

4 Зміни сили струму в контурі супроводжуються виникненням електрорушійної сили самоіндукції \mathcal{E}_s , яку визначають за формулою

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt} = - \left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right). \quad (18.4)$$

Якщо в разі змін сили струму індуктивність залишається сталою (що можливо лише за умови відсутності феромагнетиків), вираз для **ЕРС самоіндукції** спрощується:

$$\boxed{\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}}. \quad (18.5)$$

Знак «мінус» у цій формулі обумовлений правилом Ленца, відповідно до якого індукційний струм спрямований так, щоб протидіяти причині, яка його викликає. У цьому разі причиною, що викликає \mathcal{E}_s , є зміна сили струму в електричному колі. Візьмемо за додатний напрямок обходу за годинниковою стрілкою. За цієї умови сила струму буде додатною, якщо струм проходить у контурі за годинниковою стрілкою, і від'ємною, якщо струм проходить проти

годинникової стрілки. Аналогічно \mathcal{E}_s буде додатною, коли вона діє в напрямку за годинниковою стрілкою, і від'ємною, коли вона діє в напрямку проти годинникової стрілки.

§ 19 Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність. ЕРС взаємної індукції

1 Розглянемо розміщені поряд контури 1 і 2 (рис. 1.19). Електричний струм силою I_1 , що проходить у контурі 1, створює в контурі 2 повний магнітний потік

$$\Psi_2 = L_{21}I_1. \quad (19.1)$$

Поле, що створює цей потік, зображене на рисунку суцільними лініями. За змін струму I_1 в контурі 2 індукується ЕРС:

$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21}dI_1 / dt \quad (19.2)$$

(ми припускаємо, що контури не деформуються й феромагнетиків поблизу них немає).

Аналогічно під час проходження в контурі 2 струму силою I_2 виникає в контурі 1 потік

$$\Psi_1 = L_{12}I_2 \quad (19.3)$$

(поле, що створює цей потік, зображене штриховими лініями). За змін струму I_2 в контурі 1 індукується ЕРС:

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_{12}dI_2 / dt. \quad (19.4)$$

Контури 1 і 2 називають **зв'язаними**, а явище виникнення ЕРС в одному з контурів за змін сили струму в іншому називають **взаємною індукцією**.

Коефіцієнти пропорційності L_{12} і L_{21} називають **взаємною індуктивністю** контурів. З відповідного розрахунку можемо одержати, що за умови відсутності феромагнетиків ці коефіцієнти дорівнюють один одному:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (19.5)$$

Вони залежать від форми, розмірів і взаємного розміщення контурів, а також магнітної проникності оточуючого середовища. Вимірюють взаємну індуктивність у тих самих одиницях, що й індуктивність, тобто генрі (Гн).

§ 20 Енергія магнітного поля. Енергія соленоїда

1 Розглянемо електричне коло, зображене на рисунку 20.1. Коли ключ замкнено, то в соленоїді встановиться струм I , що створює в середині його магнітне поле. Якщо розімкнути ключ, то в соленоїді виникне ЕРС індукції, і завдяки їй через опір R буде деякий час проходити, поступово зменшуючись, електричний струм. Робота, виконана струмом за час dt , дорівнює

$$dA = \mathcal{E}_s Idt = -\frac{d\Psi}{dt} Idt = -Id\Psi. \quad (20.1)$$

Ця робота виконується на збільшення внутрішньої енергії опору R , обмотки соленоїда й з'єднувальних проводів (тобто на їх нагрівання). Виконання роботи супроводжується ослабленням магнітного поля. Оскільки ніяких інших змін у тілах, що оточують електричне коло, не відбувається, то доходимо висновку, що магнітне поле є носієм енергії, за рахунок якої й виконується робота (20.1). Отже, позначивши енергію пов'язаного із соленоїдом магнітного поля через W , можна записати, що

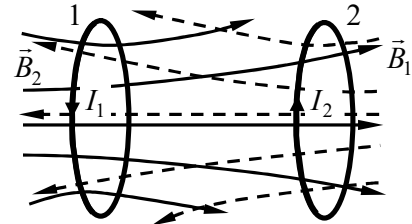


Рисунок 19.1 – До пояснення явища взаємної індукції

$$dW = -dA = Id\Psi \quad (20.2)$$

(робота dA дорівнює зменшенню енергії, тобто $(-dW)$).

Відомо, що напруженість поля в соленоїді $H = nI$, де n – число витків на одиницю довжини. Звідси одержуємо

$$I = H / n. \quad (20.3)$$

Пов'язаний із соленоїдом потік $\Psi = NSB = nlsB$, де l – довжина; S – площа поперечного перерізу соленоїда. Отже,

$$d\Psi = nlSdB. \quad (20.4)$$

Підставивши у вираз (20.2) значення (20.3) і (20.4) для I й $d\Psi$, одержимо співвідношення

$$dW = lSHdB = HdB \cdot V, \quad (20.5)$$

де V – об'єм соленоїда.

Відомо, що поле нескінченно довгого (практично – дуже довгого) соленоїда є однорідним й відмінним від нуля лише всередині соленоїда. Тому енергія магнітного поля зосереджена всередині соленоїда й розподілена по його об'єму зі сталою густиною $w = W / V$. З (20.5) випливає, що

$$dw = HdB. \quad (20.6)$$

Ми одержали вираз для збільшення dw густини енергії магнітного поля, що відповідає збільшенню dB магнітної індукції. Щоб знайти повну густину енергії, потрібно проінтегрувати вираз (20.6) у межах від 0 до B :

$$w = \int_0^B HdB. \quad (20.7)$$

Ми одержали формули (20.6) і (20.7), розглядаючи однорідне поле. Однак ці формули є правильними й для неоднорідного поля.

Замінивши H через $B/(\mu_0\mu)$, одержимо вираз

$$w = \int_0^B \frac{BdB}{2\mu_0\mu}. \quad (20.8)$$

Проникність μ у загальному випадку є функцією B (через зв'язок з H). У разі якщо μ не залежить від H , проникність можна винести за знак інтеграла:

$$w = \frac{1}{\mu_0\mu} \int_0^B BdB = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

Взявши до уваги, що $B = \mu_0\mu H$, вираз для густини енергії магнітного поля можна написати трьома способами:

$$\boxed{w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}}. \quad (20.9)$$

Підкреслимо, що ці формули є правильними лише в тому разі, якщо μ не залежить від H , тобто для діа- і парамагнетиків. Отже, одержали співвідношення (20.9), які визначають густину енергії магнітного поля. Щоб визначити повну енергію магнітного поля в будь-якому просторі, потрібно провести інтегрування

$$W = \int wdV \quad (20.10)$$

у межах цього простору.

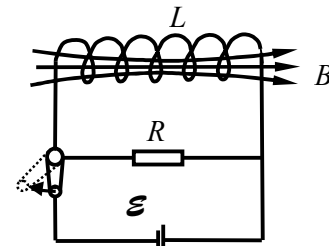


Рисунок 20.1 – Після розмикання ключа через індуктивність та опір проходить струм, обумовлений ЕРС самоіндукції. Цей струм нагріває елементи кола завдяки енергії магнітного поля

2 У разі соленоїда магнітне поле є однорідним, і тому (20.10) спрощується:

$$W = w \cdot V. \quad (20.11)$$

Підставимо у (20.11) перший вираз із (20.9), у якому використаємо відомий зв'язок між напруженістю магнітного поля в соленоїді та силою струму $H = nI$. Тоді енергію W магнітного поля соленоїда можна записати у вигляді

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 I^2 V = \frac{1}{2} LI^2. \quad (20.12)$$

Ми скористалися тим, що індуктивність соленоїда дорівнює $L = \mu_0 \mu n^2 V$. Формула (20.12) є правильною не лише для соленоїда, а й для провідника будь-якої форми. Отже, *провідник з індуктивністю L , по якому проходить струм силою I , має енергію*

$$\boxed{W = \frac{LI^2}{2}}. \quad (20.13)$$

§ 21 Струм після замикання та розмикання електричного кола

За правилом Ленца струми, що виникають унаслідок самоіндукції, спрямовані так, щоб протидіяти змінам струму в колі. Це приводить до того, що встановлення струму у разі замикання кола й зменшення струму під час розмикання кола відбуваються не миттєво, а поступово.

1 *Визначимо характер зміни струму після розмикання кола.* Нехай у колі, зображеному на рисунку 21.1, ключ K спочатку замикають. Тоді через індуктивність L буде проходити постійний струм силою

$$I = \mathcal{E} / R' \quad (21.1)$$

(опором джерела струму нехтуємо).

Під час розмикання ключа струм у колі 1-2-3-4 не може зникнути миттєво тому, що в індуктивності виникає ЕРС самоіндукції, спрямована так, щоб протидіяти зменшенню струму.

Якщо індуктивність постійна, то сила струму в колі після розмикання ключа буде задовольняти закон Ома для замкненого кола:

$$I(R + R') = \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt},$$

яке можна подати у вигляді

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R + R'}{L} I = 0. \quad (21.2)$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Поділивши змінні, одержимо рівняння

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R + R'}{L} dt,$$

інтегрування якого приводить до виразу

$$\ln I = -\frac{R + R'}{L} t + \ln(\text{const})$$

(тут доцільно сталу інтегрування позначити через $\ln(\text{const})$). Потенціювання цього виразу приводить до

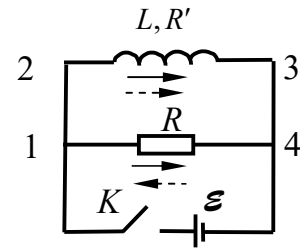


Рисунок 21.1 – До характеру зміни струму після розмикання електричного кола

$$I = const \cdot \exp\left(-\frac{R+R'}{L}t\right). \quad (21.3)$$

Функція (21.3) є загальним розв'язком диференціального рівняння (21.2). Значення константи визначають із початкових умов. За $t=0$ сила струму в індуктивності має значення (21.1). Отже, $const = I_0 = \mathcal{E} / R'$. Підставивши це значення в (21.3), одержимо формулу

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'} \exp\left(-\frac{R+R'}{L}t\right). \quad (21.4)$$

Отже, після вимкнення джерела ЕРС сила струму в колі не стає миттєво нульовою, а зменшується за експоненціальним законом. Графік зменшення струму наведено на рисунку 21.2 (крива 1). Швидкість зменшення визначають за величиною

$$\tau = \frac{L}{R+R'}, \quad (21.5)$$

що має розмірність часу, яку називають **сталюю часу кола**. Замінивши у (21.4) $(R+R')/L$ через $1/\tau$, одержимо формулу

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (21.6)$$

Відповідно до цієї формули τ є часом, упродовж якого сила струму зменшується в e разів. З (21.5) бачимо, що чим більша індуктивність кола й менший її опір, тим більша стала часу τ й тим повільніше зменшується струм у колі.

2 Проаналізуємо одержаний результат. Згідно з (21.4) ЕРС самоіндукції після розмикання кола визначають за виразом

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \frac{R+R'}{R'} \exp\left(-\frac{R+R'}{L}t\right).$$

У початковий момент

$$\mathcal{E}_s \approx \mathcal{E} \frac{R+R'}{R'} > \mathcal{E}. \quad (21.7)$$

З (21.7) випливає, що у разі якщо $R \gg R'$, ЕРС самоіндукції значно перевищує ЕРС \mathcal{E} , що діяла в колі до його розмикання. Якщо розірвати просте (послідовне) коло, то місце розриву буде мати дуже великий опір R . Відповідно до (21.7) у колі виникне висока індукована напруга, що створює іскру або дугу в місці розриву.

3 Визначимо характер зміни струму після замикання кола. Розглянемо коло, зображене на рисунку 21.3. Після замикання ключа K доти, поки сила струму не досягне сталого значення

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R+R'}, \quad (21.8)$$

у колі, крім ЕРС \mathcal{E} , буде діяти ЕРС самоіндукції. Отже, сила струму визначатиметься за законом Ома для замкненого кола

$$I(R+R') = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - LdI/dt,$$

звідси

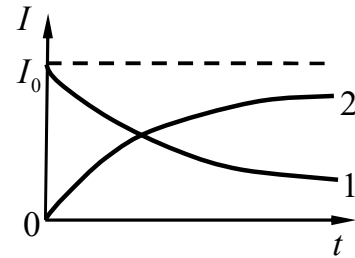


Рисунок 21.2 – Графік зміни струму під час розмикання (крива 1) і замикання (крива 2) кола

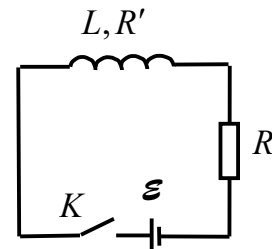


Рисунок 21.3 – Коло, що складається з індуктивності, опору і джерела ЕРС

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R+R'}{L}I = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad (21.9)$$

(опором джерела ЕРС нехтуємо).

Ми одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку, що відрізняється від рівняння (21.2) лише тим, що в правій частині замість нуля воно містить сталу величину. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння можна одержати додавши будь-яке його частинне розв'язання до загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (21.3). Легко переконатися безпосередньо підстановленням у тому, що вираз (21.8) є частинним розв'язком рівняння (21.9). Отже, загальним розв'язком рівняння (21.9) буде функція

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+R'} + \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{R+R'}{L}t\right) \quad (21.10)$$

(рекомендуємо перевірити підстановленням, що функція (21.10) задовольняє рівняння (21.9)).

У початковий момент сила струму дорівнює нулю. Підстановлення в (21.10) $I = 0$ і $t = 0$ приводить до значення константи, що дорівнює $(-\mathcal{E}/(R+R'))$. Отже,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+R'} \left[1 - \exp\left(-\frac{R+R'}{L}t\right) \right] \quad (21.11)$$

З урахуванням (21.5) і (21.8) ця формула набирає вигляду

$$I = I_0 [1 - \exp(-t/\tau)] \quad (21.12)$$

Функції (21.11) і (21.12) описують зростання струму колі після під'єднання до неї джерела ЕРС. Графік функції (21.12) наведено на рисунку 21.2 (крива 2).

ТЕМА 4 РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

§ 22 Вихрове електричне поле. Інтегральна й диференціальна форми закону електромагнітної індукції

1 Як ми вже знаємо, Максвелл узагальнив закон електромагнітної індукції Фарадея. Сутність узагальнення полягає у введенні вихрового електричного поля, створюваного змінним у часі магнітним полем. Закон електромагнітної індукції за Максвеллом має таке формулювання: *будь-яка зміна магнітного поля з часом збуджує в навколишньому просторі вихрове електричне поле. Циркуляція вектора напруженості \vec{E}_e цього поля по будь-якому нерухомому замкнутому контуру Γ визначають за виразом*

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_e d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (22.1)$$

де Φ – магнітний потік, що пронизує контур Γ . Ми використали для позначення швидкості зміни магнітного потоку знак частинної, а не повної похідної, й хочемо наголосити, що контур Γ повинен бути нерухомим.

Отже, Максвелл припустив, що магнітне поле, змінюване з часом, обумовлює появу в просторі вихрового електричного поля з напруженістю \vec{E}_e . Вихрове поле \vec{E}_e істотно відрізняється від електростатичного потенціального поля \vec{E}_n , створюваного нерухомими електричними зарядами. Як відомо, електростатичне поле \vec{E}_n є консервативним (потенціальним), його лінії напруженості починаються й закінчуються на електричних зарядах. З умови консервативності поля \vec{E}_n випливає, що робота, виконувана цим полем над

зарядом q під час його переміщення по будь-якій замкненій траєкторії Γ , дорівнює нулю, тобто

$$\oint_{\Gamma} q \vec{E}_n d\vec{l} = 0, \text{ або } \oint_{\Gamma} \vec{E}_n d\vec{l} = 0. \quad (22.2)$$

Як бачимо, циркуляція потенціального електричного поля по довільному замкненому контуру Γ дорівнює нулю. Циркуляція ж вектора напруженості вихрового електричного поля \vec{E}_e згідно з (22.1) відмінна від нуля. Отже, поле \vec{E}_e , як і магнітне поле, є вихровим. Лінії напруженості поля \vec{E}_e замкнені або прямують до нескінченності.

Отже, електричне поле може бути як потенціальним (\vec{E}_n), так і вихровим (\vec{E}_e). У загальному випадку електричне поле може складатися з потенціального поля \vec{E}_n , створюваного зарядами, й вихрового поля \vec{E}_e , обумовленого магнітним полем, змінюваним із часом:

$$\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_e. \quad (22.3)$$

Циркуляція сумарного електричного поля з урахуванням (22.1) і (22.2) буде дорівнювати

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_n d\vec{l} + \oint_{\Gamma} \vec{E}_e d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_e d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (22.4)$$

Врахуємо визначення потоку магнітного поля $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ і той факт, що у випадку нерухомої поверхні інтегрування операції диференціювання за часом та інтегрування по поверхні можна поміняти місцями: $\partial \Phi / \partial t = \partial \left(\int_S \vec{B} d\vec{S} \right) / \partial t = \int_S \partial \vec{B} / \partial t \cdot d\vec{S}$. Тоді рівняння (22.4) набуде вигляду

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}. \quad (22.5)$$

Підкреслимо, що співвідношенні (22.5) площа інтегрування S «натягнена» на контур інтегрування Γ . Рівняння (22.5) виражає закон електромагнітної індукції в інтегральній формі, воно є одним з основних в електромагнітній теорії Максвелла. В основу цього рівняння покладена ідея про створення вихрового електричного поля змінним за часом магнітним полем.

2 Запишемо закон електромагнітної індукції в диференціальній формі.

Використовуючи теорему Стокса для векторного поля \vec{A}

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad (22.6)$$

нескладно перетворити рівняння (22.5), що виражає закон електромагнітної індукції в інтегральній формі, на рівняння, яке має диференціальну форму:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

або

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}. \quad (22.7)$$

Рівняння (22.7) виражає закон електромагнітної індукції в диференціальній формі, воно є одним з основних в електромагнітній теорії Максвелла.

§ 23 Струм зміщення Максвелла

1 З'ясуємо вигляд законів електромагнетизму, що є правильними у разі змінних електромагнітних полів. Такі закони були встановлені Максвеллом. Рівняння, запропоновані Максвеллом, можна одержати послідовним узагальненням дослідних фактів. Потрібно вирішити, які з одержаних раніше рівнянь можуть бути збережені, які повинні бути відкинуті та які потрібно доповнити. Є один керівний принцип, що дозволяє просунутися в цьому напрямку. Варто виключити з основних такі рівняння, в основу яких покладене уявлення про безпосередню дію на відстані. До них відносять закони Кулона, Біо – Савара – Лапласа та ін. Ці закони несумісні з експериментально підтвердженим уявленням про скінченну швидкість поширення взаємодій, а тому не можуть залишатися правильними в всіх випадках. Потрібно зберегти лише такі рівняння, які не суперечать уявленням теорії поля. Відмітимо, що якщо рівняння задовольняє вимоги теорії поля, то його можна подати як в інтегральному, так і в диференціальному вигляді. Максвелл висунув гіпотезу, яка згодом була підтверджена експериментально: загальними законами електродинаміки (тобто справедливими й для постійних, і для змінних у часі полів) є такі закони:

- теорема Гаусса для електричного поля в діелектрику в інтегральному

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad (23.1)$$

і диференціальному

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (23.2)$$

виглядах.

- теорема Гаусса для магнітного поля в інтегральному

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (23.3)$$

і диференціальному вигляді

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (23.4)$$

виглядах.

- закон електромагнітної індукції в інтегральному

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (23.5)$$

і диференціальному

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (23.6)$$

вигляді.

До основних рівнянь електродинаміки він також відніс закон збереження електричного заряду. У диференціальній формі він має вигляд рівняння неперервності електричного заряду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{j}) = 0, \quad (23.7)$$

де ρ – густина електричного заряду в деякій точці простору; \vec{j} – густина електричного струму в тій самій точці простору.

2 Теорему про циркуляцію магнітного поля в речовині в інтегральній формі

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k, \quad (23.8)$$

яку отримали для стаціонарного випадку, можна перетворити до диференціального вигляду. Для цього використаємо теорему Стокса:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S}, \quad (23.9)$$

а також те, що струми, охоплені контуром Γ , можна визначити як інтеграл від густини електричного струму по поверхні S , обмеженій контуром інтегрування Γ :

$$\sum_k I_k = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (23.10)$$

Тобто підставивши (23.9) та (23.10) у (23.8), одержимо

$$\oint_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \text{ або } \boxed{\text{rot} \vec{H} = \vec{j}}. \quad (23.11)$$

Вираз (23.11) являє собою диференціальну форму теореми (23.8).

З'ясуємо, чи є правильною теорема про циркуляцію магнітного поля в речовині (23.8), (23.11) для полів, змінюваних із часом.

Для цього розглянемо магнітне поле, створюване струмом, що проходить у разі розрядження зарядженого конденсатора (рис. 23.1). Цей струм змінюється з часом. Лінії струму мають розрив на проміжку між обкладками конденсатора. Застосуємо до цього випадку теорему про циркуляцію магнітного поля (23.8). Циркуляція $\oint \vec{H} d\vec{l}$, що міститься в лівій частині рівняння (23.8), залежить лише від форми й розміщення контура Γ . Вона є цілком визначеною величиною. З іншого боку, сума струмів $\sum I_k$, що міститься в правій частині того самого рівняння, такої властивості не має. Продемонструємо це. Для визначення $\sum I_k$ потрібно уявно натягнути на контур Γ деяку поверхню інтегрування й знайти струм, що пронизує цю поверхню. Виберемо поверхню інтегрування S_1 такою, щоб вона перетинала провідник із струмом (див. рис. 23.1). У цьому разі

$$\sum_k I_k = I. \quad (23.12)$$

Якщо ж візьмемо як поверхню інтегрування поверхню S_2 , що проходить між обкладками конденсатора, яка не перетинає провідник із струмом, то визначимо, що

$$\sum_k I_k = 0. \quad (23.13)$$

Суперечність між (23.12) і (23.13), яку ми одержали, свідчить про те, що в разі змінних із часом полів рівняння (23.8) а отже, й (23.11) виявляються неправильними.

Про несправедливість рівності (23.11) для випадку нестаціонарних полів свідчать також такі міркування. Візьмемо дивергенцію від обох частин рівняння (23.11):

$$\text{div}(\text{rot} \vec{H}) = \text{div} \vec{j}.$$

Відомо, що дивергенція ротора завжди дорівнює нулю: $\text{div}(\text{rot} \vec{H}) = 0$. Звідси випливає, що дивергенція вектора \vec{j} також повинна завжди дорівнювати нулю: $(\text{div} \vec{j} = 0)$. Однак цей висновок суперечить рівнянню (23.7), з якого випливає $\text{div} \vec{j} = -\partial \rho / \partial t \neq 0$. Дійсно, за нестаціонарних процесів густина заряду ρ може змінюватися з часом (це, зокрема,

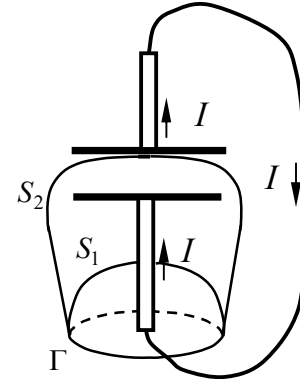


Рисунок 23.1 – До обчислення напруженості магнітного поля під час розрядження зарядженого конденсатора

відбувається з густиною заряду на обкладках конденсатора в разі його розрядження). У цьому випадку згідно з (23.7) дивергенція \vec{j} не дорівнює нулю.

4 Щоб рівняння (23.8) і (23.11) були правильними для змінних у часі полів, Максвелл увів у праву частину рівняння (23.11) ще один доданок. Природно, що цей доданок повинен мати розмірність густини струму. Максвелл назвав його **густиною струму зміщення**. Отже, відповідно до припущення Максвелла рівняння (23.11) повинне мати вигляд

$$\boxed{\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}}. \quad (23.14)$$

Суму струму провідності й струму зміщення називають **повним струмом**. Густина повного струму дорівнює

$$\vec{j}_{\text{повн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}. \quad (23.15)$$

Якщо взяти дивергенцію від обох частин рівняння (23.14), то одержимо

$$\text{div}\vec{j} + \text{div}\vec{j}_{\text{зм}} = 0, \quad (23.16)$$

де враховано, що $\text{div}(\text{rot}\vec{H}) = 0$.

Замінивши в (23.16) $\text{div}\vec{j}$, згідно з (23.7) через $(-\partial\rho/\partial t)$ одержимо для дивергенції густини струму зміщення вираз

$$\text{div}\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial\rho}{\partial t}. \quad (23.17)$$

Щоб пов'язати струм зміщення з величинами, що характеризують зміну електричного поля з часом, використаємо співвідношення (23.2). Продиференціювавши співвідношення (23.2) за часом, одержимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{D} = \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Тепер змінимо в лівій частині порядок диференціювання за часом і за координатами. У результаті одержимо рівність

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right).$$

Підставлення цього виразу у формулу (23.17) приводить до

$$\text{div}\vec{j}_{\text{зм}} = \text{div}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right),$$

звідси

$$\boxed{\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}. \quad (23.18)$$

Отже, відповідно до (23.18) густина струму зміщення дорівнює похідній за часом від індукції електричного поля. Підставивши вираз (23.18) у формулу (23.14), одержимо рівняння

$$\boxed{\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}, \quad (23.19)$$

що є одним з основних у теорії Максвелла.

Підкреслимо, що термін «струм зміщення» є умовним. По суті, струм зміщення – це доданок, пов'язаний із похідною від електричного поля за часом. Підставою для того, щоб назвати «струмом» величину (23.12), є лише те, що розмірність цієї величини збігається з

розмірністю густини струму. З усіх фізичних властивостей, що має струм провідності, струм зміщення має лише одне – здатність створювати магнітне поле.

Уведення струму зміщення привело до того, що електричне й магнітне поля «зрівнялися». З явища електромагнітної індукції випливає, що змінне в часі магнітне поле породжує електричне поле. З рівняння (23.19) випливає, що змінне в часі електричне поле, створює магнітне поле.

5 Проінтегрувавши по поверхні праву й ліву частини рівняння (23.19) та використавши теорему Стокса нескладно перейти до *інтегрального вигляду теореми (23.19)* (порівняйте з (23.8)):

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (23.20)$$

§ 24 Система фундаментальних рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формах. Матеріальні рівняння

1 Відкриття струму зміщення дозволило Максвеллу створити єдину теорію електричних і магнітних явищ. Ця теорія пояснила всі відомі на той час експериментальні факти й передбачила низку нових явищ, існування яких підтвердилося з часом. Основним наслідком теорії Максвелла був висновок про існування електромагнітних хвиль, поширюваних із швидкістю світла. Теоретичне дослідження властивостей цих хвиль привело Максвелла до створення електромагнітної теорії світла.

Основу теорії утворюють рівняння Максвелла. У вченні про електромагнетизм ці рівняння відіграють ту саму роль, що й закони Ньютона в механіці або основні закони (принципи) в термодинаміці.

До *системи фундаментальних рівнянь Максвелла входять чотири рівняння*. В інтегральній формі вони мають такий вигляд:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (24.1)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (24.2)$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q, \quad (24.3)$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (24.4)$$

Диференціальна форма цих рівнянь:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (24.5)$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (24.6)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad (24.7)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (24.8)$$

Рівняння (24.1) та (24.5) – теорема про циркуляцію магнітного поля, що була доповнена Максвеллом струмом зміщення. Фізична сутність цих рівнянь: електричні струми та змінне в часі електричне поле створюють магнітне поле.

Рівняння (24.2) та (24.6) – закон електромагнітної індукції. Фізична сутність цих рівнянь: змінне в часі магнітне поле створює вихрове електричне поле.

Рівняння (24.3) та (24.7) – теорема Гаусса для електричного поля в речовині. Фізична сутність цих рівнянь: електричні заряди є джерелами електричного поля.

Рівняння (24.4) та (24.8) – теорема Гаусса для магнітного поля. Фізична сутність цих рівнянь: магнітні заряди в природі відсутні.

До фундаментальних рівнянь не входить рівняння неперервності, що виражає закон збереження електричного заряду, тому що це рівняння є наслідком рівнянь (24.1) і (24.3) (або (24.5) та (24.7)).

2 Фундаментальні рівняння Максвелла у формі (24.1)–(24.4) або (24.5)–(24.8) не утворюють повної системи рівнянь електромагнітного поля, серед яких два векторних і два скалярних рівняння. Якщо їх записати в координатній формі, то одержимо вісім рівнянь, що пов'язують 16 величин: п'ятнадцять складових векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} , \vec{j} і скаляр ρ . Зрозуміло, що для 16 величин вісім рівнянь недостатньо. Фундаментальні рівняння Максвелла не містять ніяких сталих, що характеризують властивості середовища, в якому збуджено електромагнітне поле. Необхідно доповнити ці рівняння такими співвідношеннями, до яких входили б величини, що характеризують індивідуальні властивості середовища. Ці співвідношення називають **матеріальними рівняннями**.

Найбільш прості матеріальні рівняння в випадку слабких електромагнітних полів, що порівняно повільно змінюються у просторі й часі. У цьому розі для ізотропних неферромагнітних і не сегнетоелектричних середовищ матеріальні рівняння можуть бути записані в такому вигляді:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (24.9)$$

де ϵ , μ , σ – сталі, що характеризують електромагнітні властивості середовища. Їх називають діелектричною й магнітною проникністю й електричною провідністю середовища.

Сукупність фундаментальних і матеріальних рівнянь складають **повну систему рівнянь Максвелла**. Ця система повністю описує електромагнітне поле. Вона дозволяє за відомими початковими та граничними умовами визначити електромагнітне поле й причому єдиним способом.

РОЗДІЛ 2

АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЬ РІЗНОЇ ПРИРОДИ

ТЕМА 5 КОЛИВАЛЬНІ ПРОЦЕСИ

§ 25 Гармонічні коливання та їх характеристики. Диференціальне рівняння гармонічних коливань. Зміна енергії під час гармонічного коливання

1 Загальні відомості про коливання. *Коливаннями називають рухи або процеси, що так чи інакше повторюються в часі.* Таку властивість мають, наприклад, рух маятника годинника, коливання струни або ніжок камертона, напруга між обкладками конденсатора в контурі радіоприймача і т. ін.

Коливання часто спостерігають у природі й техніці. Коливання можуть бути різної природи, наприклад, механічними, електромагнітними і т. ін.

Залежно від характеру впливу на коливальну систему розрізняють вільні (або власні) коливання, вимушені коливання, автоколивання й параметричні коливання.

Вільними, або власними, називають такі коливання, які відбуваються в системі, що надана сама собі, після виведення її з положення рівноваги. Прикладом можуть бути коливання кульки, підвішеної на нитці (маятник). Для того щоб викликати коливання, можна або штовхнути кульку, або, відвівши вбік, відпустити її.

Вимушеними називають такі коливання, в процесі яких на коливальну систему діє зовнішня періодична сила. Прикладом є коливання моста, що виникають під час проходження по ньому людей, які крокують у ногу.

Автоколивання, як і вимушені коливання, супроводжуються впливом на коливальну систему зовнішньої сили, однак моменти часу, коли здійснюються ці впливи, задаються самою коливальною системою, тобто система сама керує зовнішнім впливом. Прикладом автоколивальної системи є годинник, у якому маятник одержує поштовхи завдяки енергії піднятої гирі або закрученої пружини. При цьому ці поштовхи відбуваються в моменти проходження маятника через середнє положення.

У разі **параметричних коливань** унаслідок зовнішнього впливу відбувається періодична зміна будь-якого параметра системи. Наприклад, періодично можуть змінюватися довжина нитки, до якого підвішена кулька, що виконує коливання, або ємність конденсатора в коливальному контурі.

Найпростішими є **гармонічні коливання**, тобто такі коливання, за яких характеристика системи змінюється з часом за законом синуса або косинуса. Цей вид коливань особливо важливий із таких причин: по-перше, коливання в природі й техніці часто мають характер, дуже близький до гармонічних коливань, і, по-друге, періодичні процеси іншої форми (з іншою залежністю від часу) можуть бути подані як суперпозиція декількох гармонічних коливань.

2 Гармонічні коливання та їх характеристики. У разі гармонічних коливань зміни з часом величини x описують формулою

$$\boxed{x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)} \quad \text{або} \quad \boxed{x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)}. \quad (25.1)$$

Надалі ми будемо віддавати перевагу записуванню гармонічних коливань за допомогою косинуса.

Величина x характеризує зміщення величини, що коливається, від положення рівноваги й називається **зміщенням**.

Найбільше значення величини, що коливається, називають **амплітудою коливань**. Амплітуда A – стала додатна величина. Надалі, крім букви A , ми будемо позначати амплітуду символом коливальної величини з індексом m , наприклад x_m .

Величину $(\omega_0 t + \alpha)$ під знаком косинуса (або синуса) називають **фазою коливань**.

Сталу величину α – значення фази на момент часу $t = 0$ – називають **початковою фазою коливань**. Через те що значення x не змінюється під час додавання або віднімання з фази цілого числа 2π , завжди можна виконати умову, щоб початкова фаза була за модулем меншою ніж π . Тому зазвичай розглядають лише значення α , що лежать у межах від $-\pi$ до $+\pi$.

Найменший проміжок часу, через який коливальна величина повертається до вихідного положення, називають **періодом коливань** T . Оскільки косинус – періодична функція з періодом 2π , то однаковим станам коливальної системи, повторюваним через період T , відповідає зміна фази на 2π . Звідси визначаємо, що

$$[\omega_0(t+T) + \alpha] = (\omega_0 t + \alpha) + 2\pi,$$

або

$$\boxed{T = 2\pi / \omega_0}. \quad (25.2)$$

Кількість коливань за одиницю часу називають **частотою коливань** ν . Очевидно, що частота ν пов'язана з періодом коливань T співвідношенням

$$\boxed{\nu = 1/T}. \quad (25.3)$$

Частоту вимірюють в системі СІ в 1/с, або герцах (Гц), $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

З (25.2) випливає, що

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi / T}. \quad (25.4)$$

Величину ω_0 із співвідношення (25.1) називають **коловою, або циклічною, частотою**. Вона пов'язана зі звичайною частотою ν співвідношенням

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi\nu}. \quad (25.5)$$

3 Диференціальне рівняння гармонічних коливань. Розглянемо тіло, що виконує коливання вздовж осі X . У цьому разі вираз

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (25.6)$$

визначає зміщення тіла відносно положення рівноваги.

Продиференціюємо (25.6) за часом та одержимо вираз для проекції швидкості тіла на вісь X :

$$v_x = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2). \quad (25.7)$$

Із цієї формули випливає, що швидкість також змінюється за гармонічним законом, причому амплітуда швидкості дорівнює $A\omega_0$. З порівняння виразів (25.6) і (25.7) випливає, що швидкість випереджає зміщення за фазою на $\pi/2$.

Продиференціюємо (25.7) ще раз за часом і визначимо вираз для проекції прискорення на вісь X :

$$a_x = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (25.8)$$

Порівнюючи (25.8) з (25.6), можна зробити висновок, що прискорення й зміщення знаходяться в протилежних фазах (різниця відповідних фаз дорівнює π). Це означає, що на той момент, коли зміщення досягає найбільшого додатного значення, прискорення досягає найбільшого за модулем від'ємного значення й навпаки.

Замінімо у (25.8) $A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ через x (див. (25.6)) та одержимо

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \text{ або } \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}. \quad (25.9)$$

Співвідношення (25.9) називають **диференціальним рівнянням гармонічних коливань**. Очевидно, що функція (25.6) є загальним розв'язком цього рівняння. Величини A й α – довільні сталі, значення яких для кожного конкретного коливання визначають із початкових

умов. В усіх випадках, коли з'ясовують, що деяка величина x задовольняє рівняння $\ddot{x} + bx = 0$ (де $b > 0$), можна стверджувати, що ця величина змінюється з часом за гармонічним законом, причому корінь із b дає колову частоту коливань.

4 Зміна енергії під час гармонічного коливання. Визначимо силу \vec{F} , що діє на тіло масою m , яке виконує гармонічні коливання. Відповідно до другого закону Ньютона проєкція сили на вісь X дорівнює $F_x = m\ddot{x}$. Skorиставшись співвідношенням (25.9), одержимо, що

$$F_x = -m\omega_0^2 x = -kx, \quad (25.10)$$

де

$$k = m\omega_0^2. \quad (25.11)$$

Отже, сила пропорційна зміщенню. Знак «мінус» означає, що напрямки сили й зміщення протилежні. Умову (25.10) задовольняє сила пружності. Тому сили, що мають вигляд (25.10), незалежно від їх природи називають **квазіпружними**.

Квазіпружна сила обумовлює наявність у тілі потенціальної енергії

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (25.12)$$

Кінетична енергія тіла

$$W_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (25.13)$$

Як відомо, повна енергія системи дорівнює сумі потенціальної та кінетичної енергій. Додавши вирази (25.12) і (25.13) і взявши до уваги рівність (25.11), одержуємо для повної енергії системи вираз

$$W = W_k + W_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} (\cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \sin^2(\omega_0 t + \alpha)) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cdot 1 = \frac{kA^2}{2} = const. \quad (25.14)$$

Отже, у процесі коливань повна енергія системи залишається постійною, відбувається перетворення кінетичної енергії на потенціальну й навпаки.

§ 26 Періоди коливань фізичного, математичного та пружинного маятників

1 Пружинний маятник. Пружинним маятником називають систему, що складається з тіла масою m , підвішеного на невагомій пружині жорсткістю k (рис. 26.1). У стані рівноваги сила тяжіння mg , що діє на тіло масою m , урівноважується пружною силою $k\Delta l_0$:

$$mg = k\Delta l_0, \quad (26.1)$$

де Δl_0 – видовження пружини. Будемо характеризувати зміщення тіла від положення рівноваги координатою x , причому вісь X спрямуємо вертикально вниз, а нуль осі розмістимо в положенні рівноваги (див. рис. 26.1). Якщо змістити тіло в положення, що характеризується координатою x , то видовження пружини буде дорівнювати $\Delta l_0 + x$, і проєкція на вісь X результуючої сили, що діє на тіло, набуде значення

$$F_x = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

Врахувавши умову (26.1), одержимо

$$F_x = -kx. \quad (26.2)$$

Отже, результуюча сили тяжіння й пружної сили має характер квазіпружної сили.

Змістимо тіло на відстань $x = A$ від положення рівноваги й відпустимо. Під дією квазіпружної сили тіло почне рухатися в напрямку положення рівноваги зі зростаючою швидкістю \dot{x} . У цьому разі потенціальна енергія системи буде зменшуватись, але натомість з'явиться всезростаюча кінетична енергія $W_k = m\dot{x}^2 / 2$ (масою пружини нехтуємо). Проїшовши через положення рівноваги, тіло буде рухатися далі за інерцією. Цей рух припиниться тоді, коли кінетична енергія повністю перетвориться на потенціальну, тобто коли зміщення тіла буде дорівнювати $(-A)$. Потім такі самі перетворення енергії будуть відбуватися під час руху тіла у зворотному напрямку. Якщо тертя в системі немає, енергія системи повинна зберігатися, й тіло буде рухатися в межах від $x = A$ до $x = -A$ необмежено довго.

Знайдемо рівняння, що описує рух тіла в пружинному маятнику. Для цього використаємо рівняння другого закону Ньютона з урахуванням (26.2) та одержимо

$$m\ddot{x} = -kx,$$

або

$$\ddot{x} + (k/m)x = 0 \quad (26.3)$$

$(k/m) > 0$. Ми одержали диференціальне рівняння гармонічних коливань. Відомо, що розв'язком цього рівняння є функція

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (26.4)$$

де циклічна частота

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (26.5 \text{ а})$$

Отже, тіло буде виконувати гармонічні коливання відносно положення рівноваги, що описуються співвідношенням (26.4). Частоту цих коливань визначають за (26.5 а), вона буде тим більшою, чим більша жорсткість пружини k й чим менша маса тіла m . Період коливань пружинного маятника можна визначити використовуючи формулу (26.5 а):

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{m/k}. \quad (26.5 \text{ б})$$

2 Математичний маятник. *Математичним маятником* називають систему, яка складається з невагомої нитки, що не розтягується й до якої підвішене тіло, яке можна вважати матеріальною точкою. Досить гарним наближенням математичного маятника є невелика важка кулька, підвішена на довгій тонкій нитці.

Відхилення маятника від положення рівноваги можна характеризувати кутом φ , який утворює нитка з вертикаллю (рис. 26.2). Тіло рухається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ та сили натягу нитки \vec{F}_n . У разі відхилення маятника від положення рівноваги на кут φ виникає момент сили тяжіння відносно осі обертання O , модуль якого дорівнює $mg l \sin \varphi$ (m – маса; l – довжина маятника; $l \sin \varphi$ – плече сили $m\vec{g}$). Плече сили натягу нитки в цьому разі дорівнює нулю, тому що лінія сили \vec{F}_n проходить через точку обертання O , звідси випливає, що й момент сили натягу нитки також дорівнює нулю. Отже, результуючий момент сил

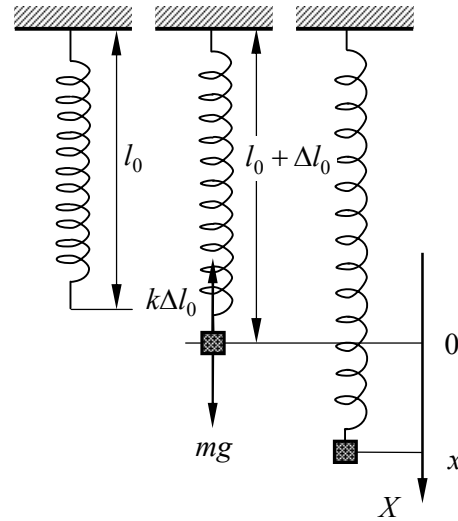


Рисунок 26.1 – Пружинний маятник:
 l_0 – довжина недеформованої пружини; Δl_0 – видовження пружини, що відповідає положенню рівноваги; x – зміщення кульки від положення рівноваги

визначають моментом сили тяжіння. Дія моменту сил спрямована так, щоб повернути маятник у положення рівноваги. Подібне відбувається й у разі квазіпружної сили. Через це результуючому моменту M й кутовому зміщенню φ потрібно приписувати протилежні знаки. Отже, вираз для результуючого моменту сили, що діє на математичний маятник, має вигляд

$$M = -mgl \sin \varphi. \quad (26.6)$$

Використаємо для маятника рівняння динаміки обертального руху $I\beta = M$. Позначивши кутове прискорення через $\beta = \ddot{\varphi}$ і врахувавши, що момент інерції матеріальної точки дорівнює $I = ml^2$, одержуємо співвідношення

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

яке можна звести до вигляду

$$\ddot{\varphi} + (g/l) \sin \varphi = 0. \quad (26.7)$$

У разі малих коливань $\varphi \ll 1$ і $\sin \varphi \approx \varphi$. Тоді рівняння (26.7) набуде вигляду

$$\boxed{\ddot{\varphi} + (g/l) \varphi = 0}. \quad (26.8)$$

Отже, ми знову одержали диференціальне рівняння гармонічних коливань. Його розв'язком є функція

$$\boxed{\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha)}, \quad (26.9)$$

де φ_m – амплітуда коливань (найбільший кут, на який відхиляється маятник від положення рівноваги). Отже, за малих коливань кутове відхилення математичного маятника змінюється з часом за гармонічним законом.

З порівняння рівняння (26.8) і рівняння гармонічних коливань (25.9) одержуємо для циклічної частоти математичного маятника вираз

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/l}}, \quad (26.10)$$

з якого випливає, що частота коливань математичного маятника залежить лише від довжини маятника й прискорення вільного падіння та не залежить від маси маятника. Період коливань математичного маятника буде дорівнювати

$$\boxed{T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{l/g}}. \quad (26.11)$$

Чим довший маятник, тим повільніше він коливається.

3 Фізичний маятник. *Фізичним маятником* називають тверде тіло, яке може обертатися під дією сили тяжіння відносно нерухомої осі, що не проходить через центр тяжіння тіла. У разі відхилення маятника від положення рівноваги на кут φ виникає момент сили, що прагне повернути маятник до положення рівноваги. Цей момент дорівнює

$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (26.12)$$

де m – маса маятника; l – відстань від точки підвісу O до центра мас маятника C (рис. 26.3). Знак «мінус» пов'язаний із тим, що момент сили діє так, щоб повернути тверде тіло до положення рівноваги.

Позначивши момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу O , через I , можна записати

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (26.13)$$

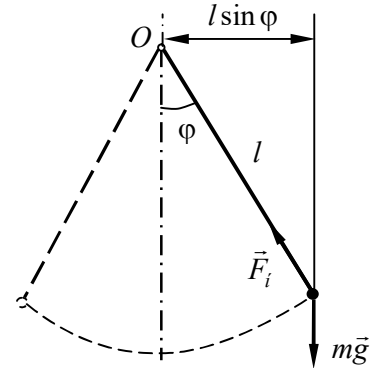


Рисунок 26.2 –
Математичний маятник:
 $l \sin \varphi$ – плече сили $m\vec{g}$;
плече сили \vec{F}_n дорівнює нулю тому, що лінія сили \vec{F}_n проходить через точку обертання O

У разі малих коливань ($\varphi \ll 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$) рівняння (26.13) перетворюється на диференціальне рівняння гармонічних коливань:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (26.14)$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{mgl / I}. \quad (26.15)$$

З формул (26.14) і (26.15) випливає, що за малих відхилень від положення рівноваги фізичний маятник виконує гармонічні коливання, частота яких залежить від маси маятника, моменту інерції маятника відносно осі підвісу й відстані від точки O підвісу до центра мас C маятника. Використовуючи (26.15), нескладно визначити період коливань фізичного маятника:

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{I / mgl}. \quad (26.16)$$

За теоремою Штейнера момент інерції маятника I може бути поданий у вигляді

$$I = I_C + ml^2,$$

де I_C – момент інерції відносно осі, паралельної осі підвісу й що проходить через центр мас C . Тоді циклічна частота (26.15) і період коливань (26.16) можуть бути подані у вигляді

$$\omega_0 = \sqrt{mgl / (I_C + ml^2)}, \quad T = 2\pi \sqrt{(I_C + ml^2) / (mgl)}. \quad (26.17)$$

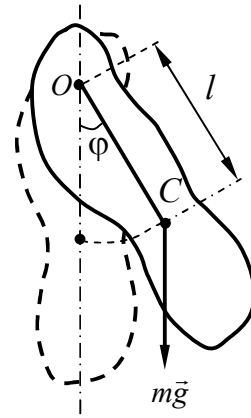


Рисунок 26.3 – Фізичний маятник: l – відстань від точки підвісу до центра мас C

§ 27 Електричний коливальний контур. Частота коливань

1 Під час розгляду електричних коливань ми маємо справу зі струмами, змінюваними в часі. Закон Ома й правила Кірхгофа були встановлені для постійного струму. Однак вони залишаються справедливими й для миттєвих значень змінних струмів і напруг, якщо їх зміни відбуваються не занадто швидко. Електромагнітні збурювання поширюються вздовж електричного кола з величезною швидкістю, що дорівнює швидкості світла c . Якщо за час $t = l / c$ (l – довжина кола; c – швидкість світла), необхідний для передавання збурення в найвіддаленішу точку кола, сила змінного струму майже не змінюється, то миттєві значення сили струму в усіх перерізах кола можна вважати однаковими. Струми, що задовольняють таку умову, називають **квазістаціонарними**. Для періодично змінних струмів **умова квазістаціонарності** має вигляд

$$t = l / c \ll T,$$

де T – період коливальних процесів. Миттєві значення квазістаціонарних струмів задовольняють закон Ома, отже, для них справедливі й правила Кірхгофа. Під час вивчення електричних коливань ми будемо припускати, що струми, які ми розглянули, є квазістаціонарними.

2 Коливальним контуром називають коло, що складається з котушки з індуктивністю L і конденсатора з ємністю C .

Визначимо рівняння коливань у контурі, в якому опір дорівнює нулю ($R = 0$). Застосуємо закон Ома для ділянки кола 1-3-2 (див. рис. 27.1):

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s. \quad (27.1)$$

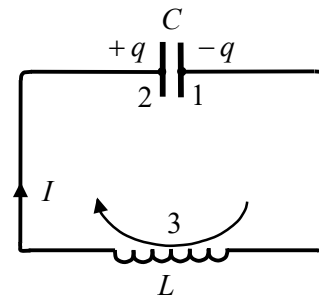


Рисунок 27.1 – Схема коливального контуру

Різницю потенціалів на конденсаторі визначимо із співвідношення

$$\varphi_1 - \varphi_2 = q_1 / C = (-q) / C. \quad (27.2)$$

Ми використали заряд пластини конденсатора $I \ q_1 = -q$ (див. рис. 27.1).

Сила струму I є додатною, якщо напрямок струму збігається з напрямком обходу ділянки кола 1-3-2, тобто за годинниковою стрілкою. У цьому разі заряд на пластині конденсатора $q_2 = q$ пов'язаний із силою струму в ділянці кола таким співвідношенням:

$$I = +dq / dt = +\dot{q}. \quad (27.3)$$

Знак «+» обумовлений тим, що, якщо струм I є додатним, заряд $q_2 = q$ збільшується ($\dot{q} > 0$).

Підставимо у (27.1) закон самоіндукції $\mathcal{E}_s = -L di / dt$, співвідношення (27.2) й (27.3), умову $R = 0$ та одержимо

$$0 = -q / C - L \ddot{q}. \quad (27.4)$$

Далі, виконавши прості перетворення, одержимо *диференціальне рівняння гармонічних коливань*

$$\ddot{q} + (1/(LC)) q = 0. \quad (27.5)$$

Отже, заряд на обкладках конденсатора змінюється за гармонічним законом

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (27.6)$$

із частотою

$$\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}. \quad (27.7)$$

Цю частоту називають *власною частотою контура*. Для періоду коливань визначаємо так звану *формулу Томсона*:

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (27.8)$$

Зрозуміло, що напруга на конденсаторі та сила струму в коливальному контурі також змінюються за гармонічним законом.

§ 28 Векторна діаграма. Додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й частоти

1 Розгляд багатьох питань, зокрема додавання декількох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти, значно полегшується й стає наочним, якщо зображувати коливання графічно у вигляді векторів на площині. Схему, в якій коливання зображуються графічно у вигляді векторів на площині, називають *векторною діаграмою*.

Візьмемо вісь X , уздовж якої будемо відкладати коливальну величину x (рис. 28.1). З узятій на осі точки O відкладемо вектор довжиною A , що утворює з віссю X кут α . Якщо обертати цей вектор із кутовою швидкістю ω_0 відносно точки O , то проекція кінця вектора \vec{A} на вісь X буде змінюватися за законом

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (28.1)$$

Отже, гармонічне коливання може бути

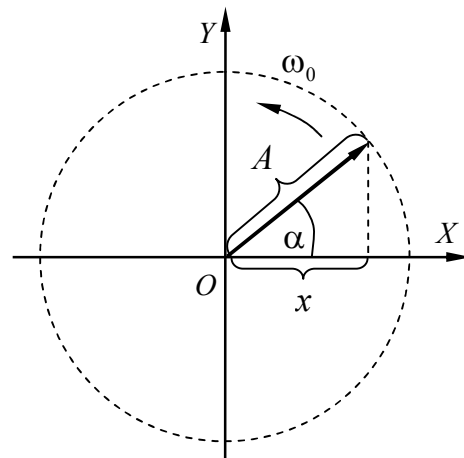


Рисунок 28.1 – Векторна діаграма гармонічного коливання з амплітудою A й початковою фазою α

заданим за допомогою вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а напрямок утворює з віссю X кут, що дорівнює початковій фазі коливань. Схема, зображена на рисунку 28.1, є векторною діаграмою гармонічного коливання (28.1).

2 Розглянемо додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти. Визначимо параметри результуючого коливання x , що буде сумою коливань x_1 і x_2 , які визначають за функціями

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (28.2)$$

З фізичних міркувань зрозуміло, що результуюче коливання

$$x = x_1 + x_2 \quad (28.3)$$

буде гармонічним коливанням із частотою коливань ω_0 (як і коливання x_1 та x_2), амплітудою A та початковою фазою α :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (28.4)$$

Отже, задача про додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти зводиться до визначення невідомої амплітуди A й невідомої початкової фази α результуючого коливання x .

Використаємо метод векторних діаграм. Подамо обидва коливання за допомогою векторів \vec{A}_1 і \vec{A}_2 (рис. 28.2). Побудуємо за правилами додавання векторів результуючий вектор \vec{A} . З рисунка випливає, що проекція цього вектора на вісь X дорівнює сумі проекцій векторів: $x = x_1 + x_2$, яка збігається з (28.3). Отже, вектор \vec{A} пов'язаний із результуючим коливанням x . Цей вектор обертається з тією самою кутовою швидкістю ω_0 , як і вектори \vec{A}_1 й \vec{A}_2 , тобто сума x_1 і x_2 є гармонічним коливанням із частотою ω_0 , амплітудою A й початковою фазою α .

Визначимо невідомі амплітуду A й початкову фазу α результуючого коливання x , зважаючи на геометричні міркування (див. рис. 28.2). Розглянемо трикутник $\triangle OMK$, застосуємо теорему косинусів та одержимо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (28.5)$$

Ми використали кут $\angle OMK = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$. Далі позначивши через y_1, y_2 та x_1, x_2 проекції векторів \vec{A}_1, \vec{A}_2 , відповідно на осі Y, X можна визначити з трикутника $\triangle OVK$ на рисунку 28.2, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (28.6)$$

Співвідношення (28.5) та (28.6) є розв'язанням вище поставленої задачі. Отже, метод векторних діаграм дозволяє додавання гармонічних функцій (коливань) замінити додаванням векторів.

Формули (28.2) і (28.3) можна зазвичай одержати з тригонометричних міркувань, розв'язавши тригонометричне рівняння:

$$A \cos(\omega_0 t + \alpha) = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) \quad (x = x_1 + x_2),$$

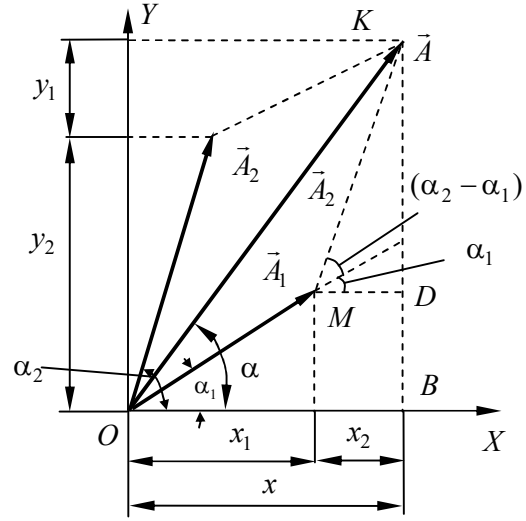


Рисунок 28.2 – Векторне додавання двох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти

відносно амплітуди A та фази α . Але графічний спосіб одержання цих формул є більш простим і наочним. Ці переваги особливо є корисними в разі, якщо доводиться додавати велику кількість коливань.

§ 29 Биття

1 Розглянемо випадок, коли два гармонічних коливання одного напрямку, які додаються, **мало відрізняються за частотою**. Процес, який в цьому разі виникає, можна розглядати як квазігармонічне коливання з пульсуючою амплітудою. Таке коливання називається **биттям**.

Позначимо частоту одного з коливань через ω , частоту іншого коливання через $\omega + \Delta\omega$. За умовою $\Delta\omega \ll \omega$. Амплітуди коливань будемо вважати однаковими й такими, що дорівнюють A . Щоб спростити математичні перетворення, припустимо, що початкові фази обох коливань дорівнюють нулю. Зважаючи на це, рівняння коливань будуть мати вигляд

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos[(\omega + \Delta\omega)t].$$

Додавши ці вирази й застосувавши формулу для суми косинусів $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos((\alpha + \beta)/2) \cdot \cos(\alpha - \beta)/2$, одержуємо

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t, \quad (29.1)$$

де в другому множнику ми знехтували доданком $\Delta\omega/2$ порівняно з ω . Графік функції (29.1) зображений на рисунку 29.1 а.

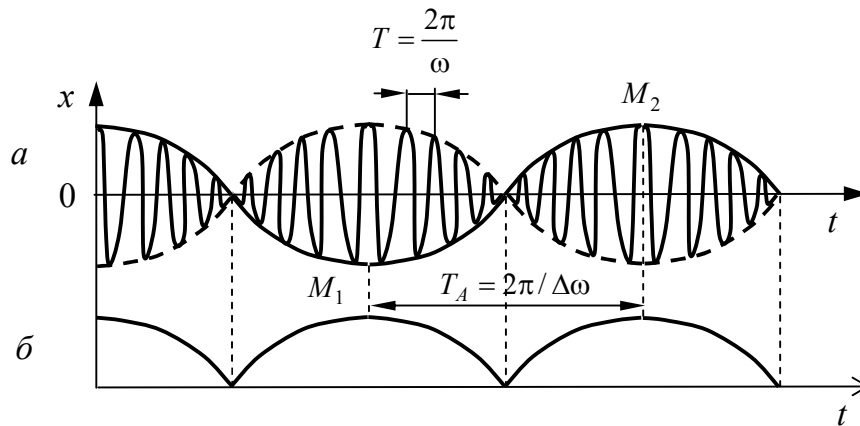


Рисунок 29.1 – Графік биття, побудований для $\omega/\Delta\omega = 10$ (а); графік змін амплітуди (б)

Множник у дужках у формулі (29.1) змінюється набагато повільніше, ніж інший множник. Через умову $\Delta\omega \ll \omega$ упродовж часу, за який $\cos \omega t$ робить кілька повних коливань, множник у дужках майже не змінюється. Це дає підставу розглядати процес (29.1) як майже гармонічне коливання частоти ω , амплітуда якого змінюється за деяким періодичним законом. Множник у дужках не може виражати закон зміни амплітуди, тому що він змінюється в межах від $-2A$ до $+2A$, у той час як амплітуда за визначенням є додатною величиною. Графік амплітуди подано на рисунку 29.1 б. Аналітичний вираз амплітуди має такий вигляд:

$$\text{амплітуда} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (29.2)$$

Цей вираз є періодичною функцією з частотою, яка вдвічі перевищує частоту гармонічної функції, що знаходиться під знаком модуля, тобто з частотою $\Delta\omega$ (див. рис. 29.1 б). Отже, частота пульсацій амплітуди – *частота биття* – дорівнює різниці частот коливань, що додаються.

Зазначимо, що множник $2A\cos(\Delta\omega/2)t$ не лише визначає амплітуду, але й впливає на фазу коливання. Це проявляється, наприклад, у тому, що відхилення, які відповідають сусіднім максимумам амплітуди, мають протилежні знаки (див. точки M_1 і M_2 на рисунку 29.1 а).

§ 30 Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу

1 Припустимо, що є дві взаємно перпендикулярні векторні величини \vec{x} та \vec{y} , що змінюються з часом з однаковою частотою ω за гармонічним законом

$$\vec{x} = \vec{e}_x A \cos \omega t, \quad \vec{y} = \vec{e}_y B \cos(\omega t + \alpha), \quad (30.1)$$

де \vec{e}_x і \vec{e}_y – орти координатних осей X та Y ; A і B – амплітуди коливань. Величинами \vec{x} та \vec{y} можуть бути, наприклад, зміщення матеріальної точки від положення рівноваги або напруженості двох взаємно перпендикулярних електричних полів (\vec{E}_x і \vec{E}_y) та ін.

Для частинки, що коливається, величини

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos(\omega t + \alpha) \quad (30.2)$$

визначають координати частинки на площині XY . У разі електричних полів величини (30.2) визначають координати кінця результуючого вектора напруженості поля \vec{E} .

Частинка або кінець вектора \vec{E} буде рухатися по деякій траєкторії, вид якої залежить від різниці фаз обох коливань α . Вирази (30.2) фактично задають у параметричній формі рівняння цієї траєкторії. Щоб одержати рівняння траєкторії у звичайному вигляді, потрібно виключити з рівнянь (30.2) параметр t . З першого рівняння впливає, що

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}. \quad (30.3)$$

Зважаючи на це,

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (30.4)$$

Розкладемо косинус у другому рівнянні (30.2) за формулою для косинуса суми:

$$\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha,$$

водночас підставляючи замість $\cos \omega t$ і $\sin \omega t$ їх значення (30.3) та (30.4). У результаті одержимо

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Це рівняння за допомогою простих перетворень можна звести до вигляду

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha}. \quad (30.5)$$

Ми одержали рівняння еліпса, осі якого повернуті відносно координатних осей X і Y . Орієнтація еліпса та його півосі залежать від амплітуд A і B та різниці фаз α .

2 Проведемо дослідження одержаного результату (30.5). Визначимо форму траєкторії для низки окремих випадків.

1 Різниця фаз α дорівнює нулю. У цьому разі рівняння (30.5) можна спростити отже:

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0.$$

Відповідно до цього одержуємо рівняння прямої

$$y = \frac{B}{A}x. \quad (30.6)$$

Результуючий рух є гармонічним коливанням уздовж цієї прямої з частотою ω та амплітудою, що дорівнює $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 30.1 а).

2 Різниця фаз α дорівнює $\pm\pi$. Рівняння (30.5) набирає вигляду

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0.$$

Отже, результуючий рух є гармонічним коливанням уздовж прямої

$$y = -\frac{B}{A}x \quad (30.7)$$

(рис. 30.1 б).

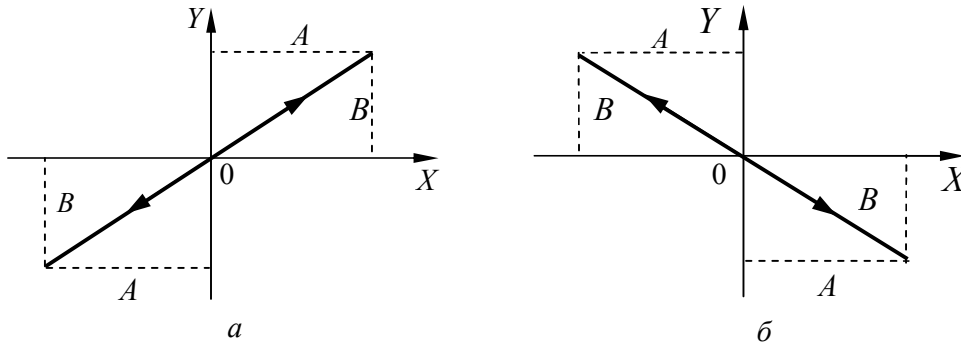


Рисунок 30.1 – Траєкторії частинки за різниці фаз, що дорівнює нулю (а) і $\pm\pi$ (б)

3 За $\alpha = \pm\pi/2$ рівняння (30.5) переходить у рівняння еліпса, приведенного до координатних осей:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (30.8)$$

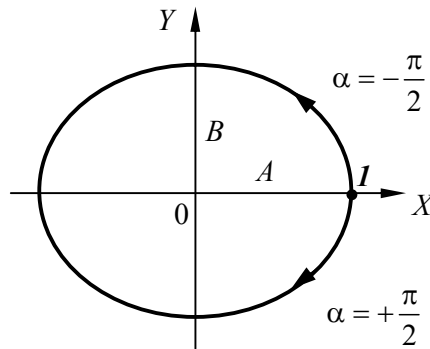


Рисунок 30.2 – Траєкторія частинки за різниці фаз $\alpha = \pm\pi/2$

Півосі еліпса дорівнюють відповідним амплітудам коливань. У разі рівності амплітуд A і B еліпс перетворюється на коло.

Випадки $\alpha = +\pi/2$ та $\alpha = -\pi/2$ відрізняються напрямком руху по еліпсу або колу. Якщо $\alpha = +\pi/2$, рівняння (30.2) можна записати отже:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = -B \sin \omega t. \quad (30.9)$$

У момент $t = 0$ тіло перебуває в точці I (рис. 30.2). У наступні моменти часу координата x зменшується, а координата y стає від'ємною. Отже, рух відбувається за годинниковою стрілкою.

За $\alpha = -\pi/2$ рівняння (30.2) мають вигляд

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin \omega t.$$

Зважаючи на це, робимо висновок, що рух відбувається проти годинникової стрілки. З цього випливає, що рівномірний рух по колу радіуса R із кутовою швидкістю ω може бути поданий як сума двох взаємно перпендикулярних коливань

$$x = R \cos \omega t, \quad y = \pm R \sin \omega t \quad (30.10)$$

(знак плюс у виразі для y відповідає руху проти годинникової стрілки, знак мінус – руху за годинниковою стрілкою).

3 Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань відрізняються на дуже малу величину $\Delta\omega$, їх можна розглядати як коливання однакової частоти, але з повільно змінною різницею фаз. Дійсно, рівняння коливань можна подати у вигляді

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)]$$

і вираз $\Delta\omega t + \alpha$ розглядати як різницю фаз, що повільно змінюється з часом за лінійним законом. Результируючий рух у цьому разі відбувається по повільно змінній кривій, яка буде послідовно набирати форми, що відповідає всім значенням різниці фаз від $-\pi$ до $+\pi$.

4 Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не однакові, то траєкторії результируючого руху мають вигляд досить складних кривих, які називаються **фігурами Ліссажу**. На рисунку 30.3 і 30.4 наведені приклади таких фігур. Іноді фігурами Ліссажу називають також траєкторії (зокрема, еліптичні криві), які виникають у результаті додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти.

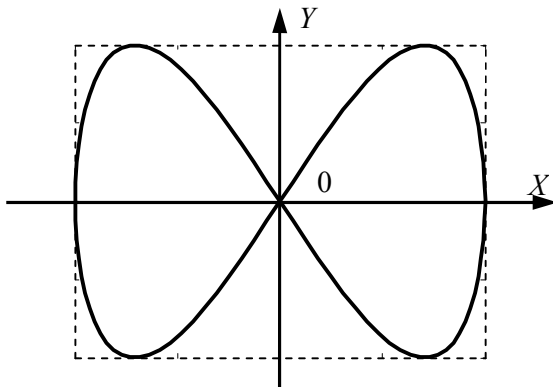


Рисунок 30.3 – Фігура Ліссажу для відношення частот 1 : 2 і різниці фаз $\pi/2$

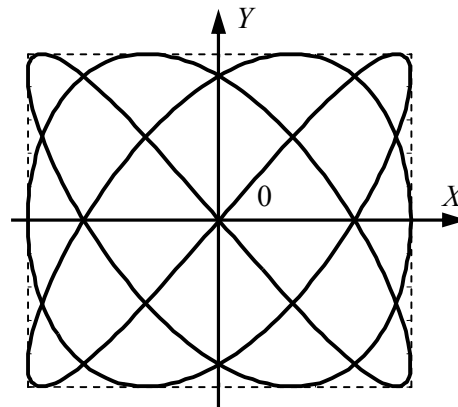


Рисунок 30.4 – Фігура Ліссажу для відношення частот 3 : 4 і різниці фаз $\pi/2$

§ 31 Диференціальне рівняння загасальних коливань

У всякій реальній коливальній системі завжди є або сила тертя (у механічній системі), або активний електричний опір (у коливальному контурі), дія яких приводить до зменшення енергії системи. Якщо зменшення енергії не компенсується, то коливання будуть загасати.

1 Розглянемо механічні загасальні коливання. У найпростішому прикладі сила тертя (наприклад, сила в'язкого тертя) пропорційна швидкості:

$$F_x = -r\dot{x}, \quad (31.1)$$

де r – стала, яку ми будемо називати **коефіцієнтом тертя**. Знак мінус обумовлений тим, що сила \vec{F} і швидкість \vec{v} спрямовані в протилежні сторони, унаслідок чого їх проекції на вісь X мають різні знаки.

Рівняння другого закону Ньютона за наявності сили тертя має вигляд

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (31.2)$$

Використаємо позначення

$$\boxed{\beta = r/(2m)}, \quad \boxed{\omega_0^2 = k/m} \quad (31.3)$$

і напишемо рівняння (31.2) у вигляді

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}. \quad (31.4)$$

Зазначимо, що величину β у (31.4) називають **коефіцієнтом загасання**; ω_0 є **власною частотою** коливальної системи, тобто тією частотою, з якою коливалася б система за умови відсутності тертя. Ми одержали диференціальне рівняння (31.4), що визначає поведінку коливальної величини x за наявності сили тертя. Це рівняння називають **диференціальним рівнянням загасальних коливань**.

2 Розглянемо загасальні електричні коливання. Нехай у коливальному контурі, крім ємності C та індуктивності L , є активний опір R (рис. 31.1). Застосуємо закон Ома для ділянки кола 1 – 3 – 2 (див. рис. 31.1):

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s. \quad (31.5)$$

Різницю потенціалів на конденсаторі визначимо зі співвідношення

$$\varphi_1 - \varphi_2 = q_1 / C = (-q) / C. \quad (31.6)$$

У ньому використали, що заряд пластини конденсатора 1 $q_1 = -q$ (див. рис. 31.1).

Сила струму I є додатною, коли напрямок струму збігається з напрямком обходу ділянки кола 1 – 3 – 2, тобто за годинниковою стрілкою. У цьому разі заряд на пластині конденсатора $q_2 = q$ пов'язаний із силою струму в ділянці кола таким співвідношенням:

$$I = +dq / dt = +\dot{q}. \quad (31.7)$$

Знак «+» обумовлений тим, що, коли струм I є додатним, заряд $q_2 = q$ збільшується ($\dot{q} > 0$).

Підставимо в (31.5) закон самоіндукції $\mathcal{E}_s = -L dI / dt$, співвідношення (31.6) і (31.7) та одержимо

$$R\dot{q} = -q / C - L \ddot{q}. \quad (31.8)$$

Після цього вводимо позначення

$$\boxed{\beta = R/(2L)}, \quad \boxed{\omega_0^2 = 1/(LC)}, \quad (31.9)$$

і перетворюємо рівняння (31.8) до такого вигляду:

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0}. \quad (31.10)$$

Одержане рівняння подібне до (31.4), що описує механічні коливання й має таку саму назву – **диференціальне рівняння загасальних коливань**. Величину β у (31.10), як і у разі механічної системи, називають **коефіцієнтом загасання**; ω_0 є **власною частотою контуру**, тобто

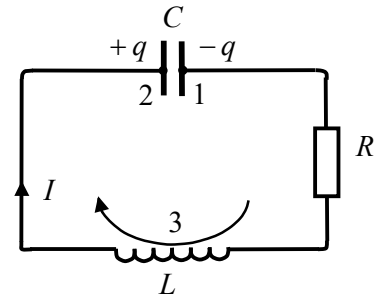


Рисунок 31.1 – Коливальний контур з опором

тією частотою, з якою відбувалися б коливання за умови відсутності активного опору. Отже, одержали диференціальне рівняння (31.10), що визначає поведінку коливальної величини q за наявності активного опору в коливальному контурі.

Із порівняння формул (31.3) і (31.9) випливає, що опір R відіграє роль коефіцієнта тертя r , індуктивність L – роль маси, величина, зворотна ємності C , – роль коефіцієнта квазіпружної сили k .

§ 32 Розв'язування диференціального рівняння загасальних коливань. Коефіцієнт загасання, декремент загасання, логарифмічний декремент загасання, добротність

1 Знайдемо розв'язок диференціального рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (32.1)$$

У цьому рівнянні β – коефіцієнт загасання; ω_0 – власна частота коливальної системи (тобто та частота, з якою коливалася б система за умови відсутності загасання). Величина x може бути механічним зміщенням частинки, електричним зарядом на конденсаторі та ін. Коефіцієнти β і ω_0 обумовлені параметрами коливальної системи.

Будемо шукати розв'язок рівняння (32.1) у вигляді

$$x = u \exp(-\beta t), \quad (32.2)$$

де u – деяка, поки що невідома, функція від t . Диференціювання функції x (32.2) за змінною t дає

$$\dot{x} = \dot{u} \exp(-\beta t) - u\beta \exp(-\beta t) = (\dot{u} - \beta u) \exp(-\beta t),$$

$$\ddot{x} = (\ddot{u} - \beta\dot{u}) \exp(-\beta t) - (\dot{u} - \beta u)\beta \exp(-\beta t) = (\ddot{u} - 2\beta\dot{u} + \beta^2 u) \exp(-\beta t).$$

Після підстановки виразів для x , \dot{x} і \ddot{x} у рівняння (32.1) та скорочення на відмінний від нуля множник $\exp(-\beta t)$ одержимо диференціальне рівняння для u

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \beta^2)u = 0. \quad (32.3)$$

Розв'язання рівняння (32.3) залежить від знака коефіцієнта, що стоїть біля u . Розглянемо випадок, коли цей коефіцієнт є додатним (тобто $\beta < \omega_0$). Уведемо позначення

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (32.4)$$

та одержимо рівняння

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0. \quad (32.5)$$

Рівняння (32.5) є диференціальним рівнянням гармонічних коливань, тому його розв'язок можемо записати у вигляді

$$u = A_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

де ω є **частотою загасальних коливань** (див.

також (32.4)). Після цього підставляємо одержаний вираз для u в (32.2) і знаходимо за малого тертя ($\beta < \omega_0$) розв'язок диференціального рівняння загасальних коливань (32.1):

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (32.6)$$

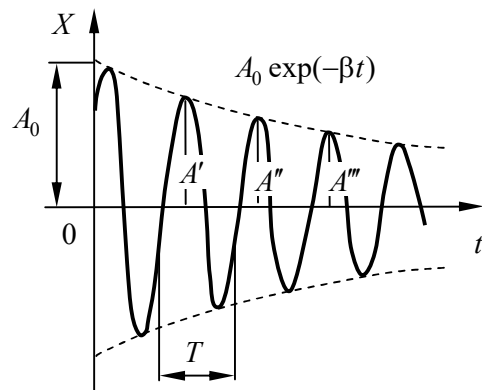


Рисунок 32.1 – Графік загасального коливання. Верхня штрихова крива – графік зміни амплітуди з часом

де A_0 і α – сталі, значення яких залежать від початкових умов; ω – частота загасальних коливань, що визначають за формулою (32.4).

2 Проведемо дослідження одержаного результату (32.6), з'ясуємо характеристики загасальних коливань. Графік функції (32.6) наведений на рисунку 32.1. Штриховими лініями зображені межі, у яких перебуває зміщення змінної величини x .

Відповідно до виду функції (32.6) величину x можна розглядати як квазігармонічне коливання частоти ω з амплітудою, що змінюється за законом

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (32.7)$$

Величину (32.7) називають **амплітудою загасальних коливань**. Верхня зі штрихових кривих на рисунку 32.1 дає графік цієї функції, водночас A_0 є амплітудою в початковий момент часу.

Розглянемо послідовні найбільші відхилення величини x (вони відбуваються через період загасальних коливань T), наприклад, A' , A'' , A''' і т.д. на рисунку 32.1. Нескладно з'ясувати, що відношення двох послідовних найбільших відхилень мають одне й те саме значення. Дійсно, коли $A' = A_0 \exp(-\beta t)$, то

$$\frac{A'}{A''} = \frac{A_0 \exp[-\beta(t)]}{A_0 \exp[-\beta(t+T)]} = \exp(\beta T),$$

$$\frac{A''}{A'''} = \frac{A_0 \exp[-\beta(t+T)]}{A_0 \exp[-\beta(t+2T)]} = \exp(\beta T)$$

і т. д. Це означає, що таке відношення може бути характеристикою загасального коливання. Отже, відношення значень амплітуди, що відповідають моментам часу, яка відрізняється на період, дорівнює

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \exp(\beta T).$$

Це відношення називають **декрементом загасання**, а його логарифм – **логарифмічним декрементом загасання**:

$$\lambda = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right) = \beta T. \quad (32.8)$$

Відповідно до формули (32.4) період загасальних коливань відрізняється від періоду вільних коливань:

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (32.9)$$

У разі незначного тертя ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) період коливань майже дорівнює періоду вільних коливань $T_0 = 2\pi / \omega_0$. Зі збільшенням коефіцієнта загасання період коливань зростає.

Для характеристики коливальної системи використовують також величину

$$Q = \pi / \lambda, \quad (32.10)$$

що називається **добротністю коливальної системи**.

З'ясуємо фізичний зміст коефіцієнта загасання β . Знайдемо час τ , за який амплітуда зменшується в e раз. З визначення величини τ випливає, що $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, звідси $\beta\tau = 1$. Отже, коефіцієнт загасання β є оберненим до проміжку часу τ , за який амплітуда зменшується в e разів ($\beta = 1/\tau$). У цьому полягає фізичний зміст коефіцієнта загасання.

З'ясуємо фізичний зміст логарифмічного декременту загасання λ . Виразивши відповідно до (32.8) β через λ і T , можна записати закон зменшення амплітуди з часом у вигляді

$$A(t) = A_0 e^{-(\lambda/T)t}.$$

Упродовж часу τ , за який амплітуда зменшується в e раз, система встигає виконати $N_e = \tau/T$ коливань. З умови $\exp(-\lambda\tau/T) = \exp(-1)$ маємо, що $\lambda\tau/T = \lambda N_e = 1$. Отже, логарифмічний декремент загасання є оберненим до числа коливань, за час яких амплітуда зменшується в e разів ($\lambda = 1/N_e$). У цьому полягає фізичний зміст логарифмічного декременту загасання.

Фізичний зміст добротності полягає в тому, що вона прямо пропорційна числу коливань, за час яких амплітуда зменшується в e разів ($Q = \pi/\lambda = \pi N_e$).

§ 33 Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язання

1 Розглянемо механічну коливальну систему із загасанням, яка перебуває під дією зовнішньої сили, що змінюється з часом за гармонічним законом

$$F_x = F_0 \cos \Omega t. \quad (33.1)$$

Під дією зовнішньої періодичної сили в системі виникають вимушені коливання. Знайдемо диференціальне рівняння, що описує вимушені коливання. Для цього застосуємо другий закон Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t.$$

Увівши позначення

$$\beta = r/(2m), \quad \omega_0^2 = k/m,$$

перетворимо рівняння до такого вигляду:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \Omega t, \quad (33.2)$$

де β – коефіцієнт загасання; ω_0 – власна частота коливальної системи; Ω – частота зовнішньої періодичної сили. Рівняння (33.2) описує вимушені коливання й називається **диференціальним рівнянням вимушених коливань**.

2 Розглянемо вимушені електричні коливання в коливальному контурі з активним опором. Увімкнемо до коливального контуру з ємністю C , індуктивністю L та активним опором R зовнішнє джерело змінної напруги:

$$U = U_m \cos \Omega t \quad (33.3)$$

(див. рис. 33.1). Під дією зовнішньої змінної напруги в контурі виникають вимушені коливання. Одержимо диференціальне рівняння, що описує процеси в контурі. Для цього застосуємо закон Ома для ділянки кола 1–3–2 (див. рис. 33.1):

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (33.4)$$

Варто зазначити, що змінну напругу зовнішнього джерела U у цьому разі потрібно враховувати разом з ЕРС самоіндукції. Тобто загальна ЕРС, що діє в контурі, дорівнює

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_s + U = -L \, dI/dt + U. \quad (33.5)$$

Різницю потенціалів на конденсаторі визначимо зі співвідношення

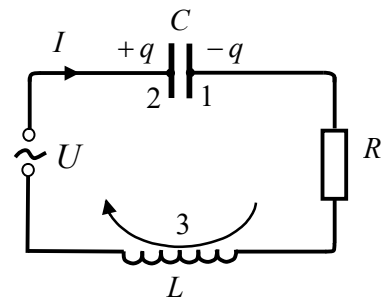


Рисунок 33.1 – Коливальний контур з опором та зовнішнім джерелом змінної напруги

$$\varphi_1 - \varphi_2 = q_1 / C = (-q) / C. \quad (33.6)$$

У ньому використали, що заряд пластини конденсатора I $q_1 = -q$ (див. рис. 33.1).

Сила струму I є додатною, коли напрямок струму збігається з напрямком обходу ділянки кола $I-3-2$, тобто за годинниковою стрілкою. У цьому разі заряд на пластині конденсатора $q_2 = q$ пов'язаний із силою струму в ділянці кола таким співвідношенням:

$$I = +dq / dt = +\dot{q}. \quad (33.7)$$

Знак «+» обумовлений тим, що, коли струм I є додатним, заряд $q_2 = q$ збільшується ($\dot{q} > 0$).

Підставимо у (33.4) співвідношення (33.5)–(33.6) з урахуванням (33.7) і (33.3) та одержуємо

$$R\dot{q} = -q / C - L \ddot{q} + U_m \cos \Omega t. \quad (33.8)$$

Після цього вводимо позначення

$$\boxed{\beta = R / (2L)}, \quad \boxed{\omega_0^2 = 1 / (LC)}, \quad (33.9)$$

і перетворюємо рівняння (33.8) до такого вигляду:

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = (U_m / L) \cos \Omega t}, \quad (33.10)$$

де β – коефіцієнт загасання; ω_0 – власна частота коливального контуру; Ω – частота коливань зовнішнього джерела. Рівняння (33.10) описує вимушені коливання й називається **диференціальним рівнянням вимушених коливань**.

Порівнявши диференціальне рівняння вимушених коливань для механічної системи (33.2) та для електричного коливального контуру (33.10), можемо зробити висновок, що з математичної точки зору вони є однаковими.

3 Знайдемо розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань (33.10) (такий самий розв'язок буде й для рівняння (33.2)).

Рівняння на зразок (33.10) називають неоднорідними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. З теорії лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами відомо, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (тобто рівняння, у правій частині якого стоїть функція від t , яка не дорівнює тотожно нулю) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (тобто того самого рівняння, у якому права частина дорівнює тотожно нулю) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаємо (розв'язок диференціального рівняння загасальних коливань). Він має вигляд

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (33.11)$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота загасальних коливань.

Залишається знайти частинний (який не має довільних сталих) розв'язок рівняння (33.10). Будемо шукати цей розв'язок у вигляді

$$q = A \cos(\Omega t - \varphi), \quad (33.12)$$

де φ – зсув фаз між зовнішньою напругою й зумовленими нею коливаннями в контурі. Спробуємо з'ясувати, чи не існує таких значень A і φ , за яких функція (33.12) задовольняє рівняння (33.10). Для цього підставимо в рівняння (33.10) вираз (33.12) і його похідні:

$$\dot{q} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi), \quad (33.13)$$

$$\ddot{q} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi), \quad (33.14)$$

розкладаючи одночасно $\sin(\Omega t - \varphi)$ та $\cos(\Omega t - \varphi)$ за формулами для синуса й косинуса різниці:

$$-A\Omega^2[\cos\varphi\cos\Omega t + \sin\varphi\sin\Omega t] - 2\beta A\Omega[\cos\varphi\sin\Omega t - \sin\varphi\cos\Omega t] + \omega_0^2 A[\cos\varphi\cos\Omega t + \sin\varphi\sin\Omega t] = (U_m/L)\cos\Omega t,$$

відповідно згрупувавши члени рівняння, одержимо

$$[A(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\varphi + 2\beta A\Omega\sin\varphi]\cos\Omega t - [A(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\varphi - 2\beta A\Omega\cos\varphi]\sin\Omega t = (U_m/L)\cos\Omega t. \quad (33.15)$$

Для того щоб рівняння (33.15) задовольнялося за будь-яких значень t , коефіцієнти при $\cos\Omega t$ і $\sin\Omega t$ в обох частинах рівняння повинні бути однаковими. З огляду на це знаходимо умови

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\varphi + 2\beta A\Omega\sin\varphi = (U_m/L), \quad (33.16)$$

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\varphi - 2\beta A\Omega\cos\varphi = 0. \quad (33.17)$$

Із цих співвідношень можна знайти значення A й φ , за яких функція (33.11) задовольняє рівняння (33.10). Піднісши рівності (33.16) та (33.17) у квадрат і додавши їх одна до одної, одержимо

$$A^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 A^2 \Omega^2 = (U_m/L)^2,$$

звідси

$$A = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (33.18)$$

З рівняння (33.17) випливає, що

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (33.19)$$

Підставивши в (33.12) значення A й φ , що визначають за формулами (33.18) і (33.19), одержуємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (33.10):

$$q = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \cos\left(\Omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right). \quad (33.20)$$

Функція (33.20) у сумі з (33.11) дає загальне розв'язання рівняння (33.10). Доданок (33.11) відіграє помітну роль лише на початковій стадії процесу, під час встановлення коливань. Із часом через експонентний множник $\exp(-\beta t)$ роль доданка (33.11) зменшується, і через деякий час ним можна знехтувати, зберігши в розв'язку лише доданок (33.20).

Отже, співвідношення (33.20) описує усталені вимушені коливання.

§ 34 Резонанс. Резонансна частота

1 Резонанс напруги (зміщення). Як відомо, усталені вимушені коливання заряду конденсатора коливального контуру (рис. 34.1) описують рівнянням

$$q = A\cos(\Omega t - \varphi), \quad (34.1)$$

де

$$A = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (34.2)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (34.3)$$

У цих рівняннях U_m , Ω – амплітуда напруги й частота зовнішнього джерела змінної напруги; ω_0 , β , L – відповідно власна частота, коефіцієнт загасання та індуктивність коливального контуру.

Проведемо дослідження амплітуди вимушених коливань A (див. (34.2)) залежно від частоти вимушених коливань Ω . Залишаючи амплітуду U_m зовнішнього джерела постійною, будемо змінювати його частоту Ω . За $\Omega = 0$ під дією постійної напруги одержимо статичне відхилення q_0 . Зі зростанням частоти Ω амплітуда A також зростає, має різкий максимум в області частот, близьких до власної частоти коливальної системи ω_0 , потім асимптотично прямує до нуля (рис. 34.1).

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань у коливальній системі, що відбувається під час наближення частоти періодичного зовнішнього впливу Ω до власної частоти системи ω_0 , називається **резонансом**. Частота, на якій забезпечується максимум, є **резонансною частотою**. Сукупність графіків функції (34.2), зображеної на рисунку 34.1, називається **резонансними кривими**. Про резонанс заряду на конденсаторі зазвичай говорять як про резонанс напруги, тому що заряд і напруга на конденсаторі пов'язані між собою прямо пропорційно ($U_C = q/C$). Резонансу напруги в механічній моделі відповідає резонанс зміщення.

Щоб визначити резонансну частоту в разі резонансу напруги $\Omega_{\text{рез}}$, потрібно знайти максимум функції (34.2) або мінімум виразу, що стоїть під коренем (34.2) у знаменнику. Продиференціювавши цей вираз за Ω і прирівнявши знайдену похідну до нуля, одержимо умову, що визначає резонансну частоту $\Omega_{\text{рез}}$:

$$-4(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 8\beta^2\Omega = 0.$$

Це рівняння має три розв'язки: $\Omega = 0$, $\Omega = +\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ та $\Omega = -\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Розв'язок, що дорівнює нулю, відповідає максимуму знаменника (тобто мінімуму амплітуди). З інших двох розв'язків, той що є від'ємним, потрібно відкинути, як такий, що не має фізичного змісту (частота не може бути від'ємною). Отже, для **резонансної частоти одержуємо**

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (34.4)$$

Підставивши це значення в (34.2), знаходимо вираз для амплітуди під час резонансу:

$$A_{\text{рез}} = \frac{U_m / L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (34.5)$$

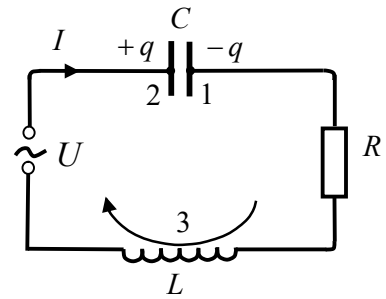


Рисунок 34.1 – Коливальний контур з опором та зовнішнім джерелом змінної напруги

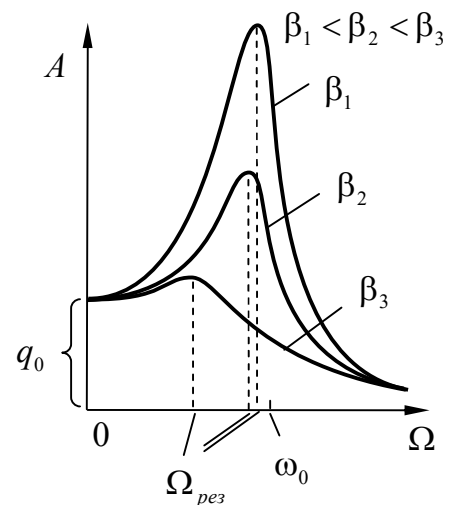


Рисунок 34.2 – Резонансні криві для заряду конденсатора (зміщення)

Із цього виразу випливає, що за умови відсутності опору (тертя) ($\beta = 0$) амплітуда під час резонансу дорівнювала б нескінченності. Згідно з (34.4) резонансна частота за тих самих умов ($\beta = 0$) збігалася б із власною частотою коливань системи ω_0 .

Знайдемо відношення амплітуди під час резонансу ($\Omega = \Omega_{рез}$) до амплітуди, коли частота зовнішнього впливу дорівнює нулю ($\Omega = 0$). У разі прямування частоти до нуля заряд на конденсаторі дорівнює, як це випливає з (34.2), $q_0 = U_m / (L\omega_0^2) = CU_m$ (у цьому рівнянні використали, що $\Omega = 0$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$). Це значення відповідає заряду на конденсаторі, що виникає під дією постійної напруги U_m . З іншого боку, відповідно до формули (34.5) за малого загасання (тобто $\beta \ll \omega_0$) амплітуда під час резонансу дорівнює

$$A_{рез} \approx \frac{U_m / L}{2\beta\omega_0}.$$

Поділимо цей вираз на величину заряду на конденсаторі $q_0 = U_m / (L\omega_0^2) = CU_m$, що виникає під постійною зовнішньою напругою. У результаті одержимо, що

$$\boxed{\frac{A_{рез}}{q_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q}. \quad (34.6)$$

Отже, добротність показує, у скільки разів амплітуда заряду конденсатора під час резонансу перевищує заряд, що виникає на конденсаторі під дією постійної напруги, модуль якої дорівнює амплітуді змінної напруги.

2 Резонанс струмів (швидкості). Для електричного струму в коливальному контурі також характерне явище резонансу, про яке говорять як про резонанс струмів (для механічної моделі – резонанс швидкості).

Знайдемо резонансну частоту для резонансу струмів. Базуючись на (34.1), нескладно одержати вираз для електричного струму в коливальному контурі під час ustalених вимушених коливань:

$$I = \dot{q} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) = I_m \cos(\Omega t - \varphi + \pi/2), \quad (34.7)$$

де

$$I_m = \frac{\Omega U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 / \Omega^2 + 4\beta^2}}. \quad (34.8)$$

З (34.8) випливає, що амплітуда коливань струму має іншу залежність від частоти зовнішнього періодичного джерела (див. рис. 34.2). Зрозуміло, що під час резонансу амплітуда I_m буде максимальною. Максимум I_m буде тоді, коли знаменник (34.8) набуде мінімального значення. Нескладно з'ясувати, що це буде, якщо $\Omega = \omega_0$. Отже, у разі резонансу струмів (резонансу швидкості) резонансну частоту визначають зі співвідношення

$$\boxed{\Omega'_{рез} = \omega_0}. \quad (34.9)$$

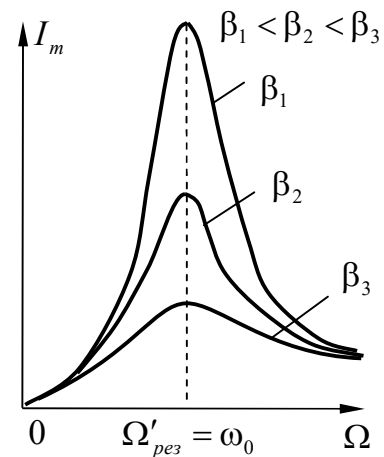


Рисунок 34.3 – Резонансні криві для струму у коливальному контурі (швидкості)

§ 35 Закон Ома для змінних струмів. Імпеданс. Ємнісний та індуктивний опори

1 Знайдемо зв'язок між амплітудами змінної напруги та змінного електричного струму в коливальному колі (рис. 34.1). Описані в попередніх параграфах ustalені вимушені

коливання можна розглядати як проходження в колі, що має ємність C , індуктивність L та активний опір R , змінного струму, обумовленого змінною напругою

$$U = U_m \cos \Omega t. \quad (35.1)$$

Відповідно до одержаних раніше результатів цей струм змінюється за законом

$$I = \dot{q} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) = I_m \cos(\Omega t - \varphi + \pi/2) = I_m \cos(\Omega t - \psi), \quad (35.2)$$

де амплітуду струму I_m та фази ψ визначають співвідношеннями:

$$I_m = A\Omega = \frac{U_m \Omega / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (35.3)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}(\varphi - \pi/2) = -1 / \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta \Omega}. \quad (35.4)$$

Якщо взяти до уваги, що власна частота й коефіцієнт загасання пов'язані з параметрами контуру співвідношеннями

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad (35.5)$$

то для амплітуди сили струму в контурі I_m та фази ψ можемо записати

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}}, \quad (35.6)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\Omega L - 1/(\Omega C)}{R}. \quad (35.7)$$

Формула (35.6) є подібною до закону Ома в тому розумінні, що амплітуда струму I_m пропорційна амплітуді напруги U_m . Тому формулу (35.6) іноді називають **законом Ома для змінного струму**. Проте потрібно пам'ятати, що ця формула встановлює співвідношення лише між амплітудами, але не миттєвими значеннями U і I .

За постійного струму відношення напруги до сили струму визначає опір провідника. Подібно до цього за змінного струму відношення амплітуди повної напруги до амплітуди струму

$$Z = \sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} \quad (35.8)$$

називають **повним електричним опором, або імпедансом**.

2 Усяке реальне електричне коло має скінченні R, L і C . За певних умов деякі з цих параметрів бувають такими, що їх впливом на струм можна знехтувати. Проаналізуємо низку таких прикладів.

Розглянемо електричне коло, що складається лише з активного опору R . Використовуючи закон Ома, можемо знайти силу струму

$$I = U / R = (U_m / R) \cos \Omega t = I_m \cos \Omega t.$$

Звідси випливає, що **струм у цьому разі змінюється у фазі з напругою, тобто відповідний зсув фаз дорівнює нулю** $\psi = 0$, а амплітуда сили струму становить

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (35.9)$$

Порівняння одержаного виразу з (35.6) показує, що заміна конденсатора закороченою ділянкою кола означає перехід не до $C = 0$, а до $C = \infty$, також, що заміна котушки індуктивності закороченою ділянкою кола означає перехід до $L = 0$.

Розглянемо електричне коло, що складається лише з котушки з індуктивністю L . Це означає, що активним опором кола можна знехтувати за $R = 0$, ємність конденсатора можна взяти такою, що дорівнює нескінченності $C = \infty$. З огляду на це, використовуючи формули (35.6) та (35.7), одержуємо

$$I_m = \frac{U_m}{\Omega L}, \quad (35.10)$$

а $\operatorname{tg}\psi = +\infty$ (відповідно $\psi = +\pi/2$). Величину

$$X_L = \Omega L \quad (35.11)$$

називають **реактивним індуктивним опором, або просто індуктивним опором кола**. Як можна помітити, $\psi = +\pi/2$, тобто **напруга на індуктивності випереджає струм на $\pi/2$** .

Розглянемо електричне коло, що складається лише з конденсатора з ємністю C . Тобто припускаємо, що R і L можна взяти такими, які дорівнюють нулю. У результаті цього відповідно до формул (35.6) та (35.7)

$$I_m = \frac{U_m}{1/(\Omega C)}, \quad (35.12)$$

$\operatorname{tg}\psi = -\infty$ (тобто $\psi = -\pi/2$). Величину

$$X_C = \frac{1}{\Omega C} \quad (35.13)$$

називають **реактивним ємнісним опором, або просто ємнісним опором**. Оскільки $\psi = -\pi/2$, **напруга на конденсаторі відстає від струму на $\pi/2$** .

3 Як можемо помітити, на конденсаторі й котушці напруга та струм зміщені за фазою на $\pi/2$. Це приводить до того, що середня потужність, яка виділяється на цих елементах, дорівнює нулю. Дійсно,

$$\langle P_C \rangle = \langle I \cdot U_C \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} I_m \cos(\Omega t - (-\pi/2)) U_m \cos(\Omega t) dt = -\frac{\Omega}{4\pi} I_m U_m \int_0^{2\pi/\Omega} \sin(2\Omega t) dt = 0,$$

$$\langle P_L \rangle = \langle I \cdot U_L \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} I_m \cos(\Omega t - (+\pi/2)) U_m \cos(\Omega t) dt = \frac{\Omega}{4\pi} I_m U_m \int_0^{2\pi/\Omega} \sin(2\Omega t) dt = 0.$$

Саме через цю особливість ємнісний X_C та індуктивний X_L опори називають реактивними, на конденсаторі й котушці індуктивності тепло не виділяється.

На протигагу реактивним опорам X_C та X_L на опорі R струм і напруга змінюються синфазно. Тому середня потужність, що виділяється на опорі R , не дорівнює нулю:

$$\langle P_R \rangle = \langle I \cdot U_R \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} I_m \cos(\Omega t) U_m \cos(\Omega t) dt = \frac{\Omega}{2\pi} I_m U_m \cdot \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{I_m U_m}{2}. \quad (35.14)$$

Саме через цю особливість опір R називають активним, на опорі R виділяється тепло.

Позначимо через I_{ef} та U_{ef} силу й напругу постійного струму, який виділяє на опорі R таку саму середню потужність, що й за змінного електричного струму. Зважаючи на це,

$$\langle P_R \rangle = I_{ef} U_{ef} = R I_{ef}^2 = U_{ef}^2 / R.$$

Порівнюючи цей вираз із виразом для потужності змінного струму (35.14), можемо записати

$$I_{ef} = I_m / \sqrt{2}, \quad U_{ef} = U_m / \sqrt{2}. \quad (35.15)$$

Сила струму I_{ef} з (35.15) називається **ефективною (діючою) силою змінного струму**, а U_{ef} з (35.15) – **ефективною (діючою) напругою**.

Загалом середню потужність, яка виділяється на елементах контуру, що складається з котушки індуктивності, конденсатора та опору, визначають за таким співвідношенням:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle U \cdot I \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} U_m \cos(\Omega t) \cdot I_m \cos(\Omega t - \psi) dt = \\ &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \frac{U_m \cdot I_m}{2} (\cos(\Omega t + \Omega t - \psi) + \cos(\Omega t - \Omega t + \psi)) dt = \\ &= \frac{I_m U_m \cos(\psi)}{2} = I_{ef} U_{ef} \cos(\psi). \end{aligned}$$

У ньому використали співвідношення (35.1), (35.2), (35.15). Отже, *потужність, що виділяється на елементах електричного контуру, обумовлена різницею фаз напруги й струму ψ (35.7), ефективною силою струму I_{ef} у контурі та ефективною напругою U_{ef} , яка подається на контур:*

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{I_m U_m \cos(\psi)}{2} = I_{ef} U_{ef} \cos(\psi)}. \quad (35.16)$$

4 Використовуючи розглянуті вище властивості окремих елементів контуру, можна достатньо легко аналізувати змінні струми й змінні напруги в довільному контурі за допомогою методу векторних діаграм. Розглянемо, наприклад, контур, зображений на рисунку 35.1. З цього рисунка випливає, що повна напруга U дорівнює сумі напруг на кожному з елементів контуру:

$$U_R + U_C + U_L = U. \quad (35.16)$$

Зрозуміло, що в цьому разі маємо справу з гармонічними коливаннями U_R , U_C , U_L однакової частоти та напрямку. Тому додавання цих гармонічних коливань проведемо за допомогою методу векторних діаграм.

Візьмемо до уваги, що електричні струми, які проходять через усі елементи контуру, що з'єднані послідовно, є однаковими. Нам відомо, що напруга на ємності відстає за фазою від сили струму на $\pi/2$, а напруга на індуктивності випереджає струм на $\pi/2$. Напруга на активному опорі має таку саму фазу, як струм. Амплітудні значення відповідних напруг визначають за співвідношеннями (35.9), (35.10), (35.12).

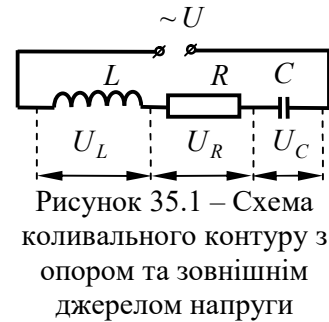


Рисунок 35.1 – Схема коливального контуру з опором та зовнішнім джерелом напруги

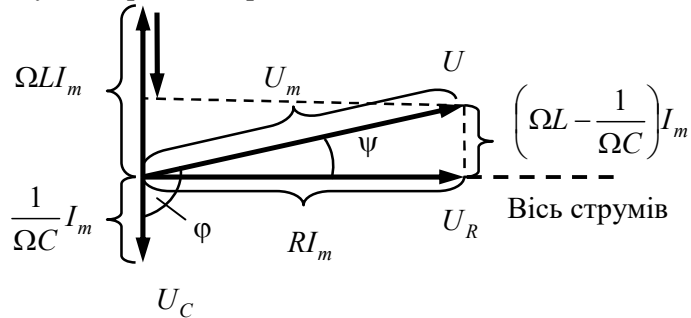


Рисунок 35.2 – Векторна діаграма напруг у коливальному контурі з опором та зовнішнім джерелом напруги

Нагадаємо, що гармонічне коливання можна задати за допомогою вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а напрямок вектора утворює з деякою віссю кут, який

дорівнює початковій фазі коливання. Візьмемо за пряму, від якої відлічують початкову фазу, вісь струмів.

Відкладемо вектори, пов'язані з гармонічними коливаннями U_R , U_C , U_L з урахуванням вищезазначених властивостей (див. рис. 35.2). Згідно з (35.16) три функції U_R , U_C і U_L у сумі повинні дорівнювати прикладеній напрузі U . Відповідно до цього напругу U зображено на діаграмі вектором, що дорівнює сумі векторів U_R , U_C і U_L .

Одержана діаграма наочно відображає процеси, що відбуваються в контурі. Зазначимо, що з прямокутного трикутника, утвореного на діаграмі векторами U , U_R та різницею $U_L - U_C$, за допомогою теореми Піфагора впливає закон Ома для змінних струмів (35.6).

ТЕМА 6 ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

§ 36 Хвилі в пружному середовищі. Поперечні й поздовжні хвилі. Довжина хвилі. Рівняння біжучої хвилі. Фазова швидкість, хвильове число

1 Хвилями називаються збурення, що поширюються в речовині або вакуумі та несуть із собою енергію. Характерна властивість хвиль полягає в тому, що перенесення енергії хвилею виконується без перенесення речовини.

Хвилі можуть мати різну форму.

Поодинокую хвилею, або імпульсом, називається коротке збурення, що не має регулярного характеру (рис. 36.1а). Обмежена низка збурень називається **цугом**. Зазвичай під цугом розуміють відрізок синусоїди (рис. 36.1б). Особливе значення в теорії хвиль має **гармонічна хвиля**, тобто нескінченна синусоїдальна хвиля, у якій стану середовища змінюється за законом синуса або косинуса (рис. 36.1в).

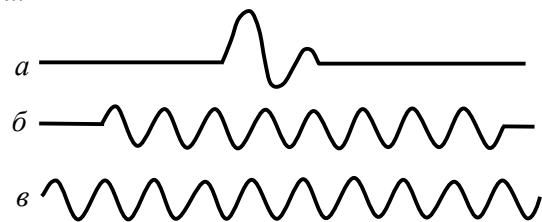


Рисунок 36.1 – Деякі форми хвиль: поодинокую хвилю, або імпульс, (а); цуг хвиль (б) і синусоїдальна хвиля (в)

Розглянемо пружні гармонічні хвилі. Якщо в будь-якому місці пружного (твердого, рідкого або газоподібного) середовища збудити коливання його частинок, то в результаті взаємодії між частинками це коливання буде поширюватися в середовищі від частинки до частинки з деякою швидкістю v – виникає **біжуча хвиля**.

Частинки середовища, у якому поширюється хвиля, не втягуються хвилею в поступальний рух, вони лише виконують коливання біля своїх положень рівноваги. Залежно від напрямку коливань частинок відносно напрямку, у якому поширюється хвиля, розрізняють **поперечні й поздовжні хвилі**. У поперечній хвилі частинки середовища коливаються в напрямках, перпендикулярних до напрямку її поширення. У поздовжній хвилі частинки середовища коливаються вздовж напрямку її поширення. Пружні поперечні хвилі можуть виникнути лише в середовищі, що має опір зсуву. Тому в рідкому й газоподібному середовищах можуть виникати лише поздовжні хвилі. У твердому середовищі можливе виникнення як поперечних, так і поздовжніх хвиль.

На рисунку 36.2 зображений рух частинок під час поширення пружної поперечної хвилі зі швидкістю v . Номерами 1, 2 і т. д. позначені частинки, що знаходяться одна від одної на відстані, яка дорівнює $vT/4$, тобто на відстані, яку проходить хвиля за чверть періоду коливань. У момент часу, взятий за нульовий, хвиля, поширюючись уздовж осі X зліва направо, досягла частинки 1, унаслідок чого ця частинка почала зміщуватися з положення рівноваги вгору, захоплюючи за собою подальші частинки. Через чверть періоду частинка 1 досягає крайнього верхнього положення; одночасно починає зміщуватися з положення рівноваги частинка 2. Після закінчення ще чверті періоду перша частинка буде

проходити положення рівноваги, рухаючись у напрямку зверху вниз, друга частинка досягне крайнього верхнього положення, а третя частинка почне зміщуватися вгору з положення рівноваги. У момент часу, що дорівнює T , перша частинка завершить повний цикл коливання й буде перебувати в такому самому стані, як і в початковий момент. Хвиля в момент часу T , пройшовши шлях vT , досягне частинки 5.

Вище ми розглядали коливання частинок, положення рівноваги яких лежать на осі X . Проте коливаються не лише частинки, розміщені на осі X , а й сукупність частинок, що містяться у деякому об'ємі. Поширюючись від джерела коливань, хвильовий процес охоплює все нові й нові частини простору. Геометричне місце точок, до яких доходять коливання в момент часу t , називається **фронтом хвилі (або хвильовим фронтом)**. Фронт хвилі є поверхнею, що відокремлює частину простору, вже залучену до хвильового процесу, від області, у якій коливання ще не виникли.

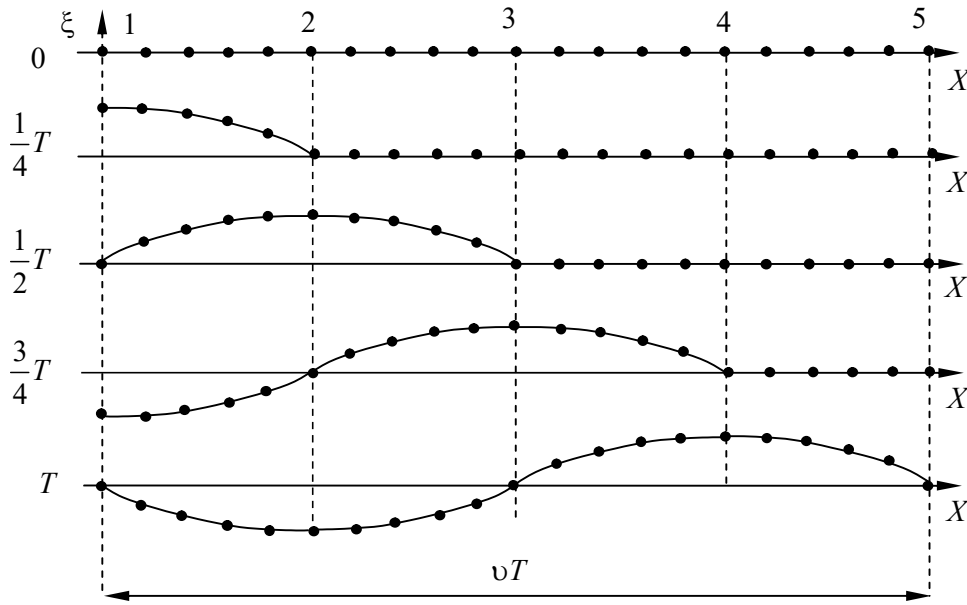


Рисунок 36.2 – Механізм утворення поперечної пружної хвилі

Геометричне місце точок, що коливаються в однаковій фазі, називається **хвильовою поверхнею**. Існує нескінченна множина хвильових поверхонь, у той час як хвильовий фронт у кожний момент часу лише один. Хвильові поверхні залишаються нерухомими (вони проходять через положення рівноваги частинок, що коливаються в однаковій фазі). Хвильовий фронт увесь час переміщується.

Хвильові поверхні можуть бути будь-якої форми. У найпростішому варіанті вони мають форму площини або сфери. Відповідно хвилю в цьому разі називають **плоскою або сферичною**. У плоскій хвилі хвильові поверхні являють собою множину паралельних одна одній площин, у сферичній – множину концентричних сфер.

Візьмемо напрямок поширення плоскої хвилі за вісь X . Тоді всі точки середовища, положення рівноваги яких мають однакову координату x (але різні значення координат y і z), коливаються в однаковій фазі. На рисунку 36.3 зображена крива, що дає зміщення ξ із положення рівноваги точок із різними x у деякий момент часу.

Відстань λ , на яку поширюється хвиля за час, що дорівнює періоду коливань частинок середовища, називається **довжиною хвилі**.

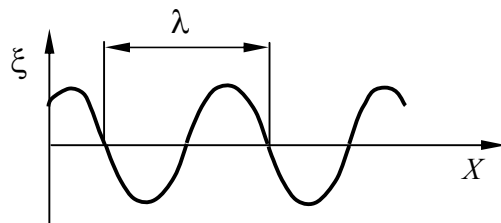


Рисунок 36.3 – Залежність зміщення частинок ξ від координати x , побудованої для певного моменту часу t ; λ – довжина хвилі

Очевидно, що

$$\boxed{\lambda = \nu T}, \quad (36.1)$$

де ν – швидкість хвилі; T – період коливань. Довжину хвилі можна визначити також як відстань між найближчими точками середовища, що коливаються з різницею фаз, яка дорівнює 2π (див. рис. 36.3).

2 Рівнянням хвилі називається вираз, що визначає зміщення частинок ξ , які коливаються, як функцію їх координат рівноважного положення x, y, z і часу t :

$$\xi = \xi(x, y, z, t). \quad (36.2)$$

Ця функція повинна бути періодичною як за часом t , так і за координатами x, y, z . Періодичність за часом випливає з того, що функція ξ описує коливання частинки з координатами x, y, z . Періодичність за координатами випливає з того, що точки, віддалені одна від одної на відстань λ , коливаються однаково.

Знайдемо вигляд функції ξ у разі плоскої гармонічної хвилі. Для спрощення спрямуємо осі координат так, щоб вісь X збігалася з напрямком поширення хвилі (див. рис. 36.4). У результаті цього хвильові поверхні будуть перпендикулярними до осі X і, оскільки всі точки хвильової поверхні коливаються однаково, зміщення ξ залежатиме лише від x та t : $\xi = \xi(x, t)$. Нехай коливання точок, що лежать у площині $x = 0$ (рис. 36.4), мають вигляд

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Знайдемо вигляд коливань точок у площині, що відповідає довільному значенню x . Для того щоб пройти шлях від площини $x = 0$ до цієї площини, хвилі потрібний час $\tau = x/\nu$ (ν – швидкість поширення хвилі). Тому коливання частинок, що лежать у площині x , будуть відставати за часом на τ від коливань частинок у площині $x = 0$, а отже, матимуть вигляд

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] = A \cos[\omega(t - x/\nu) + \alpha].$$

Отже, **рівняння плоскої біжучої хвилі** (і поперечної, і поздовжньої), що поширюється в напрямку осі X , визначають рівнянням

$$\boxed{\xi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{\nu} \right) + \alpha \right]}. \quad (36.3)$$

Величина A є **амплітудою хвилі**. Початкова фаза хвилі α обумовлена вибором початку відліку x та t .

Знайдемо фізичний зміст швидкості хвилі ν . Зафіксуємо деяке значення фази в рівнянні (36.3), припустивши

$$\omega \left(t - \frac{x}{\nu} \right) + \alpha = \text{const}. \quad (36.4)$$

Продиференціюємо це співвідношення та одержимо

$$dt - \frac{1}{\nu} dx = 0,$$

а також

$$dx/dt = \nu.$$

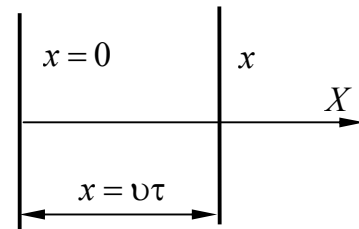


Рисунок 36.4 – Плоска хвиля, що поширюється вздовж осі X зі швидкістю ν . За час τ хвиля проходить шлях від $x = 0$ до $x = \nu\tau$

Ліва частина цієї рівності визначає швидкість переміщення цього значення фази. Отже, швидкість поширення хвилі v у рівнянні (36.3) є швидкістю переміщення фази, зважаючи на що її називають **фазовою швидкістю**.

Згідно з (36.4) значення x із часом зростає. Отже, рівняння (36.3) описує хвилю, що поширюється в бік зростання x . Хвилю, що поширюється в протилежному напрямку, можна описувати рівнянням

$$\xi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \alpha \right]. \quad (36.5)$$

Це впливає з того, що, зафіксувавши в (36.5) значення фази, ми знайдемо, що зі збільшенням t координата x зменшується.

Рівнянню (36.3) можна надати симетричного щодо x і t вигляду. Для цього введемо величину

$$k = 2\pi/\lambda, \quad (36.6)$$

що називається **хвильовим числом**. Помноживши чисельник і знаменник виразу (36.5) на період T , можна подати хвильове число у вигляді

$$k = \omega/v. \quad (36.7)$$

Розкривши в (36.3) круглі дужки й узявши до уваги (36.7), одержимо рівняння

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega t - kx + \alpha]. \quad (36.8)$$

Це співвідношення також є рівнянням хвилі. Рівняння хвилі, що поширюється в бік зменшення x , відрізняється від (36.7) лише знаком біля kx .

Якщо напрямок поширення плоскої хвилі утворює з осями координат X, Y, Z відмінні від нуля кути, то рівняння хвилі буде мати складніший вигляд. Нескладно показати, що в цьому разі воно буде таким

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha), \quad (36.9)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений у розглянуту точку простору; $\vec{k} = k\vec{n}$ – **хвильовий вектор**, напрямлений у бік поширення хвилі (\vec{n} – вектор нормалі до хвильової поверхні в конкретній точці простору).

Функція (36.9) дає зміщення з положення рівноваги точки з радіусом-вектором \vec{r} у момент часу t (нагадаємо, що \vec{r} визначає рівноважне положення точки). Щоб перейти від радіуса-вектора точки до її координат x, y, z , виразимо скалярний добуток $\vec{k}\vec{r}$ через компоненти векторів на координатні осі:

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Відповідно до цього рівняння плоскої біжучої хвилі набире вигляду

$$\xi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha), \quad (36.10)$$

де k_x, k_y, k_z – проєкції хвильового вектора на відповідні координатні осі.

Під час розгляду рівняння плоскої хвилі ми припускали, що амплітуда коливань не залежить від x . Для плоскої хвилі це справедливо тоді, коли енергія хвилі не поглинається середовищем. У разі поширення в поглинаючому енергію середовищі інтенсивність хвилі поступово зменшується – вона загасає. Дослід показує, що в однорідному середовищі загасання відбувається за експонентним законом $A = A_0 \exp(-\gamma x)$. Тому **рівняння плоскої загасаючої хвилі, що поширюється вздовж осі X , має вигляд**

$$\xi(x, t) = A_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (36.11)$$

де A_0 – амплітуда в площині $x = 0$.

Знайдемо рівняння сферичної хвилі. Будь-яке реальне джерело хвиль має кінцеву довжину. Проте, якщо обмежитися розглядом хвилі на відстанях від джерела, що значно перевищують його розміри, то джерело можна вважати точковим. У результаті центральної симетрії в однорідному й ізотропному середовищах хвиля, створювана точковим джерелом, буде сферичною. Припустимо, що фаза коливань джерела дорівнює $(\omega t - \alpha)$. Тоді точки, що лежать на хвильовій поверхні радіуса r , будуть коливатися з фазою

$$\omega(t - r/v) + \alpha = \omega t - kr + \alpha$$

(щоб пройти шлях r , хвилі потрібний час $\tau = r/v$). Амплітуда сферичної хвилі, навіть якщо енергія хвилі не поглинається середовищем, не залишається сталою – вона зменшується з відстанню від джерела за законом $1/r$ (це буде показано далі). Отже, **рівняння сферичної хвилі має вигляд**

$$\xi(x, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (36.12)$$

§ 37 Хвильове рівняння. Фазова швидкість поширення хвиль у твердому тілі й газі

1 Хвильовим рівнянням називається лінійне однорідне диференціальне рівняння в частинних похідних, що описує поширення хвиль у середовищі або вакуумі. Знайдемо вигляд цього рівняння, базуючись на рівнянні плоскої гармонічної хвилі

$$\xi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (37.1)$$

Другі частинні похідні функції (37.1) за кожною із змінних мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha) = -\omega^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi. \end{aligned}$$

Сума похідних за координатами

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi$$

відрізняється від похідної за часом множником k^2 / ω^2 , що дорівнює $1/v^2$. Отже,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Це і є **хвильове рівняння**. Його можна записати у вигляді

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (37.2)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Зазначимо, що для плоскої хвилі, яка поширюється вздовж осі X , хвильове рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (37.3)$$

Незважаючи на те, що ми одержали рівняння (37.2), відповідно до функції, яка описує плоску гармонічну хвилю, це рівняння описує й хвилі іншого вигляду. Наприклад, легко переконатися в тому, що будь-яка функція типу

$$f(x, y, z, t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha) \quad (37.4)$$

задовольняє хвильове рівняння (37.2).

Також можна стверджувати: *будь-яка функція, що задовольняє рівняння типу (37.2), описує певну хвилю, водночас квадратний корінь із величини, обернений коефіцієнту при $\partial^2 \xi / \partial t^2$, дає фазову швидкість цієї хвилі.*

2 Використовуючи вище сформульовану властивість, можна одержати вирази для швидкості хвиль у різних середовищах.

Фазова швидкість поздовжньої пружної хвилі визначають за співвідношенням

$$v = \sqrt{E / \rho}, \quad (37.5)$$

де ρ – густина речовини; E – модуль Юнга цієї речовини.

Фазова швидкість поперечної пружної хвилі має вигляд

$$v = \sqrt{G / \rho}, \quad (37.6)$$

де G – модуль зсуву.

Швидкість поширення звукових хвиль описується такою формулою:

$$v = \sqrt{\gamma R T / \mu}, \quad (37.7)$$

де γ – стала адіабати; R – універсальна газова стала; T – абсолютна температура; μ – молярна маса газу.

§ 38 Густина енергії пружної хвилі

Розглянемо циліндричний стрижень з однорідного й ізотропного матеріалу, уздовж осі якого поширюється плоска гармонічна хвиля. У такому стрижні частинки змінюють своє положення й швидкість за гармонічним законом. Це означає, що в стрижні завдяки хвилі виникають додаткові потенціальна та кінетична енергії. Потенціальна енергія пов'язана з розтягуванням (стисканням) стрижня хвилею. Кінетична обумовлена швидкостями його окремих частинок. Повна енергія пружної хвилі дорівнює сумі потенціальної й кінетичної енергій. Визначимо густину повної енергії.

1 Знайдемо потенціальну енергію пружно-деформованого стрижня, коли хвиля відсутня. Якщо стрижень довжиною l_0 та поперечним перерізом S має видовження Δl , то в ньому виникає сила пружності, що визначають за співвідношенням

$$F_{np} = S\sigma = SE \frac{\Delta l}{l_0} = \kappa \Delta l,$$

де σ – механічна напруга в стрижні; E – модуль Юнга; $\kappa = SE / l_0$ – коефіцієнт пружності.

Відомо, що потенціальну енергію пружно-деформованого тіла визначають виразом

$$W_p = \frac{\kappa \cdot \Delta l^2}{2} = \frac{SE}{l_0} \frac{\Delta l^2}{2} = \frac{E}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 (S l_0) = \frac{E \varepsilon^2}{2} V, \quad (38.1)$$

де ε – відносне видовження, а V – об'єм стрижня.

2 Одержимо співвідношення для відносної деформації стрижня ε , коли вздовж нього поширюється плоска гармонічна хвиля. У цьому разі частинки, що лежать у поперечному перерізі стрижня, який визначається координатою x , будуть мати зміщення ξ , обчислювальні за функцією

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (38.2)$$

Виділимо в стрижні елемент довжини Δx , обмежений за умови відсутності хвилі перерізами x та $x + \Delta x$ (рис. 38.1). Якщо переріз із координатою x в певний момент часу має зміщення ξ , то зміщення перерізу з координатою $x + \Delta x$ буде дорівнює $\xi + \Delta \xi$. Оскільки зміщення перерізів із різними значеннями координати x неоднакові, розглянутий елемент стрижня виявляється деформованим – він набирає видовження $\Delta \xi$. Відношення $\Delta \xi / \Delta x$ дає середнє значення $\langle \varepsilon \rangle$ відносного видовження елемента стрижня Δx . Щоб одержати деформацію ε в перерізі x , потрібно спрямувати Δx до нуля. Отже,

$$\boxed{\varepsilon = \partial \xi / \partial x} \quad (38.3)$$

(символ частинної похідної взятий тому, що ξ залежить не лише від x , а й від t).

3 Знайдемо густину енергії хвилі, що поширюється в стрижні. Виділимо в середовищі елементарний об'єм ΔV , настільки малий, щоб швидкість руху та деформацію в усіх його точках можна було вважати однаковими й такими, що дорівнюють відповідно $\partial \xi / \partial t$ і $\partial \xi / \partial x$ (див. (38.2)). Виділений об'єм має кінетичну енергію

$$\Delta W_k = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V, \quad (38.4)$$

де $\rho \Delta V$ – маса об'єму; $\partial \xi / \partial t$ – його швидкість.

Розглянутий об'єм має також потенціальну енергію пружної деформації (див. (38.1))

$$\Delta W_p = \frac{E \varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V,$$

де $\varepsilon = \partial \xi / \partial x$ – відносна деформація об'єму; E – модуль Юнга середовища. Фазову швидкість поширення пружної хвилі в стрижні визначають за співвідношенням $v = \sqrt{E / \rho}$.

Виразимо модуль Юнга з цього співвідношення $E = \rho v^2$ (ρ – густина середовища). Зважаючи на це, вираз для потенціальної енергії об'єму ΔV набирає вигляду

$$\Delta W_p = \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V. \quad (38.5)$$

Сума виразів (38.4) і (38.5) дає повну енергію ΔW об'єму ΔV :

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V.$$

Поділивши цю енергію на ΔV , одержимо густину енергії:

$$w = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (38.6)$$

Диференціювання рівняння (38.1) один раз за t , інший раз за x дає

$$\begin{aligned} \partial \xi / \partial t &= -A \omega \sin(\omega t - kx + \alpha), \\ \partial \xi / \partial x &= Ak \sin(\omega t - kx + \alpha). \end{aligned}$$

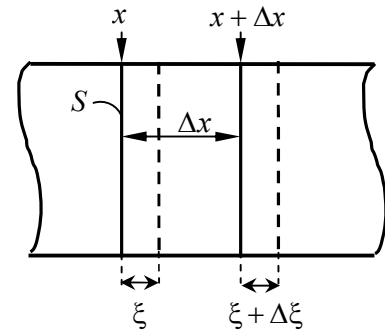


Рисунок 38.1 – Деформація елемента стрижня внаслідок поширення в ньому поздовжньої пружної хвилі

Підставивши ці вирази у формулу (38.6) і врахувавши, що $k^2 v^2 = \omega^2$, знаходимо **густину енергії**, що виникає в пружному середовищі під час поширення в ній плоскої поздовжньої хвилі:

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (38.7)$$

Можна показати, що для поперечної хвилі густину енергії визначають за такою самою формулою, як і для поздовжньої. У разі хвильових поверхонь будь-якої форми в межах малого об'єму хвилю можна приблизно вважати плоскою. Отже, вираз (38.7) є правильним для гармонічних хвиль будь-якого вигляду (сферичних, циліндричних та ін.). Він є правильний також для загасальних хвиль.

З (38.7) випливає, що густина енергії в кожний момент часу в різних точках простору різна. В одній і тій самій точці густина енергії змінюється з часом за законом квадрата синуса. Середнє значення квадрата синуса становить 1/2. Відповідно середнє за часом значення густини енергії в цій точці середовища дорівнює

$$\langle w \rangle = (1/2) \rho A^2 \omega^2. \quad (38.8)$$

Отже, густина енергії (38.7) і її середнє значення (38.8) пропорційні густині середовища ρ , квадрату амплітуди A й квадрату частоти ω хвилі.

§ 39 Густина потоку енергії. Інтенсивність

1 Середовище, у якому поширюється пружна хвиля, має додаткову механічну енергію. Ця енергія передається від джерела коливань у різні точки середовища самою хвилею. Отже, хвиля переносить із собою енергію. *Кількість енергії, що переноситься хвилею через деяку поверхню за одиницю часу, називається **потокем енергії** через цю поверхню. Якщо через поверхню за час dt переноситься енергія dW , то потік енергії Φ дорівнює*

$$\Phi = dW / dt. \quad (39.1)$$

Потік енергії – скалярна величина, як випливає зі співвідношення (39.1), він вимірювана у системі СІ у ватах (1 Вт = 1 Дж/с).

2 Перенесення енергії в різних точках простору може бути неоднаковим. Для характеристики перенесення енергії в різних точках простору використовують векторну величину, що називається **густиною потоку енергії**. Ця величина чисельно дорівнює потоку енергії через поверхню одиничної площі, яка розміщена в цій точці перпендикулярно до напрямку, у якому переноситься енергія. Напрямок вектора густини потоку енергії збігається з напрямком перенесення енергії.

Якщо через поверхню площею ΔS_{\perp} , перпендикулярну до напрямку поширення хвилі, за час Δt переноситься енергія ΔW , то густина потоку енергії дорівнює

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}} = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t}. \quad (39.2)$$

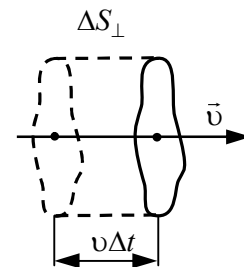


Рисунок 39.1 – Через поверхню площею ΔS_{\perp} за час Δt проходить енергія, що знаходиться в циліндрі висотою $v \Delta t$

Через поверхню площею ΔS_{\perp} (рис. 39.1) за час Δt буде перенесена енергія ΔW , що знаходиться в об'ємі циліндра з основою ΔS_{\perp} і висотою $v \Delta t$ (v – фазова швидкість хвилі). Якщо ΔS_{\perp} та $v \Delta t$ достатньо малі, щоб густину енергії в усіх точках циліндра можна було вважати однаковою, то ΔW дорівнює добутку густини енергії w на об'єм циліндра $\Delta S_{\perp} v \Delta t$:

$$\Delta W = w \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

Підстановка цього виразу в (39.2) дає для модуля густини потоку енергії формулу

$$j = wv. \quad (39.3)$$

Нарешті, якщо ввести вектор \vec{v} , модуль якого дорівнює фазовій швидкості хвилі, а напрямок збігається з напрямком поширення хвилі (і перенесення енергії), одержимо

$$\vec{j} = w\vec{v}. \quad (39.4)$$

Ми знайшли вираз для вектора густини потоку енергії. Для пружних хвиль цей вектор був уведений Н.О.Умовим і називається **вектором Умова**. Загалом випадку він є різним у різних точках простору, а в цій точці змінюється з часом за законом квадрата синуса. Його середнє значення дорівнює

$$\langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \quad (39.5)$$

Вираз (39.5) є правильним для хвиль будь-якого типу (сферичних, загасальних і та ін.). За визначенням під **інтенсивністю** хвилі в цій точці розуміють середнє за часом значення модуля вектора густини потоку енергії, що переноситься хвилею. Тому співвідношення (39.5) визначає інтенсивність хвилі (часто її позначають через $I = \langle j \rangle$).

3 Якщо вектор \vec{j} є відомим в усіх точках довільної поверхні S , то можна обчислити потік енергії через цю поверхню. Поділимо поверхню на елементарні ділянки dS . За час dt через поверхню площею dS пройде енергія dW , що знаходиться в зображеному на рисунку 39.2 косому циліндрі об'ємом $dV = v dt dS \cos \varphi$. У циліндрі міститься енергія $dW = w dV = w v dt dS \cos \varphi$ (w – миттєве значення густини енергії в тому місці, в якому розміщена dS). Подамо енергію у вигляді

$$dW = j dt dS \cos \varphi = \vec{j} d\vec{S} dt$$

($d\vec{S} = dS \vec{n}$, $\vec{j} = w\vec{v}$). На основі цього для потоку енергії $d\Phi$ через площадку dS одержуємо вираз

$$d\Phi = dW / dt = \vec{j} d\vec{S}. \quad (39.6)$$

Повний потік енергії через поверхню S дорівнює сумі елементарних потоків (39.6):

$$\Phi = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (39.7)$$

Замінивши в цій формулі вектор \vec{j} його середнім за часом значенням, одержуємо середнє значення потоку енергії:

$$\langle \Phi \rangle = \int_S \langle \vec{j} \rangle d\vec{S}. \quad (39.8)$$

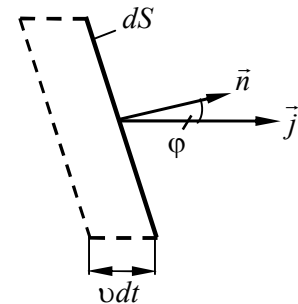


Рисунок 39.2 – До обчислення потоку енергії $d\Phi$ через поверхню площею dS

4 Знайдемо середнє значення потоку енергії через одну з хвильових поверхонь незагасаючої сферичної хвилі. У кожній точці цієї сферичної поверхні вектори \vec{j} та $d\vec{S}$ збігаються за напрямком. Крім того, модуль вектора \vec{j} для всіх точок поверхні однаковий. Отже,

$$\langle \Phi \rangle = \oint_S \langle j \rangle dS = \langle j \rangle S = \langle j \rangle \cdot 4\pi r^2.$$

(r – радіус хвильової поверхні). Згідно з (39.5) $\langle j \rangle = (1/2) \rho A^2 \omega^2 v$. Тому

$$\langle \Phi \rangle = 2\pi r \omega^2 v A_r^2 r^2$$

(A_r – амплітуда хвилі на відстані r від джерела). Оскільки енергія хвилі не поглинається середовищем, середній потік енергії через сферу будь-якого радіуса повинен мати однакове значення, тобто повинна виконуватися умова

$$A_r^2 r^2 = \text{const}.$$

З огляду на це випливає, що амплітуда A_r незагасаючої сферичної хвилі обернено пропорційна відстані r від джерела $A_r = (1/r) \cdot \sqrt{\text{const}}$.

§ 40 Звукові хвилі та їх використання. Висота, тембр і гучність звуку. Рівень гучності. Ефект Доплера для звукових хвиль

1 Характеристики звуку. Якщо пружні хвилі в повітрі мають частоту в межах від 16 до 20 000 Гц, то, досягнувши людського вуха, вони викликають відчуття звуку. Тому пружні хвилі в будь-якому середовищі, які мають частоту, що перебуває в зазначених межах, називають *звуковими хвилями*, або просто *звуком*. Пружні хвилі з частотами, меншими за 16 Гц, називаються *інфразвуком*, а з частотами понад 20 000 Гц – *ультразвуком*. Інфра- та ультразвукові хвилі людське вухо не чує.

Люди розрізняють звуки за *висотою, тембром і гучністю*. Кожній із цих суб'єктивних оцінок відповідає певна фізична характеристика звукової хвилі.

Будь-який реальний звук є накладенням гармонічних коливань із певним набором частот. Цей набір називається *акустичним спектром звуку*. Якщо у звуці є коливання всіх частот, що містяться у певному інтервалі частот від ν' до ν'' , то спектр називається *суцільним*. Якщо звук складається з коливань дискретних частот ν_1, ν_2, ν_3 і т. д., то спектр називається *лінійчастим*. Суцільний акустичний спектр мають шуми. Коливання з лінійчастим спектром викликають відчуття звуку з більш-менш певною висотою. Такий звук називається *тональним*.

Висота тонального звуку обумовлена основною (найменшою) частотою. Відносна інтенсивність *обертонів* (тобто коливань із частотами ν_2, ν_3 і т. д.) визначає забарвлення, або *тембр* звуку. Різний спектральний склад звуків, створюваних різними музичними інструментами, дає змогу відрізнити на слух, наприклад, флейту від скрипки або роаяля.

Як і для всякої хвилі, під інтенсивністю звуку розуміють середнє за часом значення густини потоку енергії, що несе із собою звукова хвиля. Для того щоб викликати звукове відчуття, хвиля повинна мати деяку мінімальну інтенсивність, яка називається *порогом чутності*. Порог чутності різний для різних людей і залежить від частоти звуку. Найбільш чутливе людське вухо до частот від 1 000 до 4 000 Гц. У цій області частот поріг чутності становить у середньому близько 10^{-12} Вт/м². За інших частот поріг чутності лежить вище (див. рис. 40.1).

За інтенсивностей приблизно 1–10 Вт/м² хвиля перестає сприйматися як звук, спричиняючи у вусі лише відчуття болю й тиску. Значення інтенсивності, за якого це відбувається, називається *порогом болювого відчуття* (див. рис. 40.1; дані, які наведені на цьому рисунку, стосуються середнього нормального слуху).

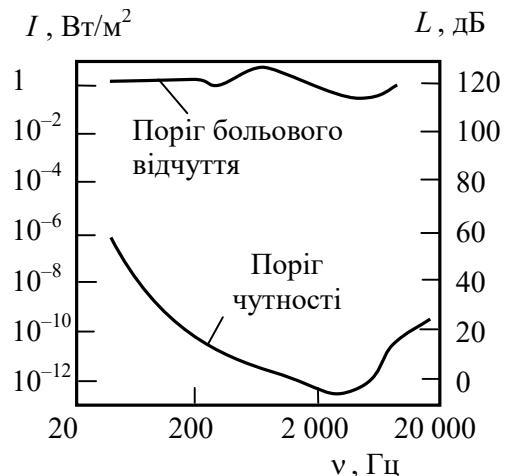


Рисунок 40.1 – Залежність порога чутності (нижня крива) і порога болювого відчуття (верхня крива) від частоти звуку

Суб'єктивно оцінювана гучність звуку зростає набагато повільніше, ніж інтенсивність звукових хвиль. Зі зростанням інтенсивності в геометричній прогресії гучність зростає приблизно в арифметичній прогресії, тобто лінійно. Тому *рівень гучності* L визначають як логарифм відношення інтенсивності I цього звуку до інтенсивності I_0 , узятій за вихідну:

$$L = \lg(I / I_0). \quad (40.1)$$

Вихідну інтенсивність I_0 беруть такою, що дорівнює 10^{-12} Вт/м², так що поріг чутності за частоти приблизно 1 000 Гц перебуває на нульовому рівні ($L = 0$).

Одиниця рівня гучності, що визначають за формулою (40.1), називається **белом** (Б). Зазвичай користуються вдесятеро меншою одиницею – **децибелом** (дБ). Значення L у децибелах обчислюють за формулою

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (40.2)$$

Відношення двох будь-яких інтенсивностей I_1 і I_2 також може бути виражене в децибелах:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (40.3)$$

За допомогою цієї формули можна виразити в децибелах зменшення інтенсивності (загасання) хвилі на деякому шляху. Наприклад, загасання 20 дБ означає, що інтенсивність зменшується в 100 разів.

Діапазон інтенсивностей, за яких хвиля викликає в людському вусі звукове відчуття (від 10^{-12} до 10 Вт/м²), відповідає значенням рівня гучності від 0 до 130 дБ. Нижче наведені орієнтовні значення рівня гучності для певних звуків (табл. 40.1).

Таблиця 40.1 – Значення рівня гучності для певних звуків

Звук	Рівень гучності, дБ
Цокання годинника	20
Шепіт на відстані 1 м	30
Тиха розмова	40
Розмова середньої гучності	60
Голосна розмова	70
Крик	80
Шум двигуна літака на відстані 5 м	120
Шум двигуна літака на відстані 3 м	130

2 Ефект Доплера для звукових хвиль. вважаємо приймачем пристрій, функціонально здатний сприймати звукові коливання середовища. Якщо джерело й приймач нерухомі щодо середовища, у якому поширюється хвиля, то частота коливань, яка сприймається приймачем, дорівнює частоті ν_0 коливань джерела. Якщо джерело або приймач чи вони обое рухаються, то частота ν , що сприймається приймачем, може виявитися відмінною від ν_0 . Це явище називається **ефектом Доплера**.

Припустимо, що джерело та приймач рухаються вздовж прямої, яка їх з'єднує. Швидкість джерела $\nu_{дж}$ будемо вважати додатною, якщо воно рухається в напрямку до приймача, і від'ємною, якщо воно рухається в напрямку від приймача. Аналогічно швидкість приймача $\nu_{пр}$ будемо вважати додатною, якщо він рухається в напрямку до джерела, і від'ємною, якщо в протилежному.

Розглянемо процеси поширення хвилі за час Δt . Якщо джерело нерухоме й коливається з частотою ν_0 , то до моменту закінчення проміжку часу Δt , коли він буде

завершувати $v_0 \cdot \Delta t$ коливання, створене першим коливанням, «гребінь» хвилі встигне пройти в середовищі шлях $v \cdot \Delta t$ (v – швидкість поширення хвилі щодо середовища). Тому створені джерелом за час Δt $v_0 \cdot \Delta t$ «гребенів» і «впадин» хвилі вкладаються на довжині $v \cdot \Delta t$. Якщо джерело рухається відносно середовища зі швидкістю $v_{дж}$, то в момент, коли джерело буде завершувати $v_0 \cdot \Delta t$ коливання, «гребінь», створений першим коливанням, буде знаходитиметься від джерела на відстані $v - v_{дж}$ (рис. 40.2). Отже, $v_0 \cdot \Delta t$ «гребенів» і «впадин» хвилі вкладаються на відрізок $(v - v_{дж}) \cdot \Delta t$. Тому довжина хвилі (довжина, що в середньому припадає на один «гребінь» або «впадину») буде дорівнювати

$$\lambda = \frac{(v - v_{дж}) \cdot \Delta t}{v_0 \cdot \Delta t} = \frac{v - v_{дж}}{v_0}. \quad (40.4)$$

Через нерухомий приймач за час Δt пройдуть «гребені» та «впадини», що укладаються на довжині $v \cdot \Delta t$. Якщо приймач рухається зі швидкістю $v_{пр}$, то наприкінці проміжку часу Δt він буде сприймати «впадину», що на початку цього проміжку знаходилася від його теперішнього положення на відстань $v \cdot \Delta t$. Отже, за час Δt приймач сприйме коливання, що відповідають «гребеням» і «впадинам», які вкладаються на довжині $(v + v_{пр}) \cdot \Delta t$ (рис. 40.3), і число цих коливань буде дорівнювати $v \cdot \Delta t$ або ж

$$v \cdot \Delta t = \frac{(v + v_{пр}) \cdot \Delta t}{\lambda},$$

де λ – довжина звукової хвилі, що визначають за формулою (40.4). Підставивши вираз (40.4), одержимо формулу

$$v = v_0 \frac{v + v_{пр}}{v - v_{дж}}. \quad (40.5)$$

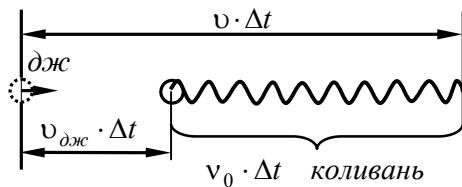


Рисунок 40.2 – Якщо джерело рухається в напрямку поширення хвилі щодо нерухомого середовища, то створені ним за час Δt $v_0 \cdot \Delta t$ «гребенів» і «впадин» хвилі укладаються на довжині, що чисельно дорівнює $(v - v_{дж}) \cdot \Delta t$

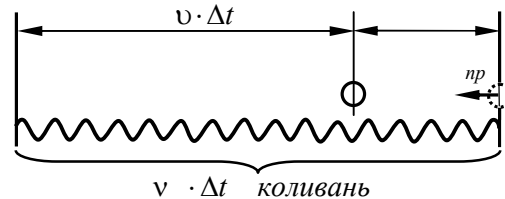


Рисунок 40.3 – Якщо приймач рухається назустріч хвилі щодо нерухомого середовища, то за час Δt $v \cdot \Delta t$ він сприймає «гребенів» і «впадин», що вкладаються на довжині, що чисельно дорівнює $(v + v_{пр}) \cdot \Delta t$

Із цієї формули випливає, що під час руху джерела й приймача, за якого відстань між ними зменшується, приймачем сприймається частота v , яка виявляється більшою за частоту джерела v_0 . Якщо відстань між джерелом і приймачем збільшується, v буде меншою за v_0 .

Якщо напрямки швидкостей $v_{дж}$ та $v_{пр}$ не збігаються з прямою, яка проходить через джерело й приймач, замість $v_{дж}$ та $v_{пр}$ у формулу (40.5) потрібно підставляти проєкції векторів $v_{дж}$ і $v_{пр}$ на напрямок цієї прямої.

Ефект Доплера для звукових хвиль обумовлений швидкостями руху джерела й приймача щодо середовища, у якому поширюється звукова хвиля. Для світлових хвиль також спостерігається ефект Доплера, але формула для зміни частоти має інший вигляд, ніж

(40.5). Це обумовлено тим, що для світлових хвиль не існує матеріального середовища, коливання якого являли б собою світло. Тому швидкості джерела й приймача щодо «середовища» не мають змісту. У разі світла можна говорити лише про відносну швидкість приймача та джерела. Ефект Доплера залежить від модуля й напрямку цієї швидкості.

§ 41 Стоячі хвилі

1 За одночасного поширення декількох хвиль коливання частинок середовища виявляються геометричною сумою коливань, що виконували б частинки у разі поширення кожної з хвиль окремо. Отже, хвилі просто накладаються одна на одну, не збурюючи одна одну. Це твердження називається **принципом суперпозиції** (накладення) хвиль.

Принцип суперпозиції виконується здебільшого з великою точністю й порушується, лише якщо амплітуда хвилі дуже велика. У цьому разі виникають нелінійні ефекти, зокрема порушується пропорційність між деформацією й напругою в середовищі (порушується закон Гука).

Якщо коливання, обумовлені окремими хвилями в кожній із точок середовища, мають постійну різницю фаз, то хвилі називаються **когерентними**. У разі додавання когерентних хвиль виникає явище **інтерференції**, що полягає в тому, що результуюче коливання в одних точках підсилюється, а в інших послаблюється.

Важливий випадок інтерференції спостерігається у разі накладення двох зустрічних плоских хвиль з однаковою амплітудою. Коливальний процес, що виникає в результаті цього, називається **стоячою хвилею**.

2 Знайдемо рівняння стоячої хвилі. Напишемо рівняння двох плоских хвиль, що поширюються вздовж осі X у протилежних напрямках:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Перетворивши суму цих виразів за формулою для суми косинусів

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

одержимо рівняння стоячої хвилі

$$\xi = \xi_2 + \xi_1 = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right). \quad (41.1)$$

Щоб спростити рівняння, виберемо початок відліку X так, щоб різниця $\alpha_2 - \alpha_1$ дорівнювала нулю, а початок відліку t – так, щоб дорівнювала нулю сума $\alpha_1 + \alpha_2$. Крім того, замінимо хвильове число k його значенням $2\pi/\lambda$. Тоді **рівняння стоячої хвилі** набере вигляду

$$\xi = \left(2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos \omega t. \quad (41.2)$$

З рівняння (41.2) можна зробити висновок, що в кожній точці стоячої хвилі відбуваються гармонічні коливання тієї самої частоти, що й у зустрічних хвиль, водночас амплітуда залежить від x :

$$\text{амплітуда} = \left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|.$$

У точках, координати яких задовольняють умову

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (41.3)$$

амплітуда коливань максимальна. Ці точки називаються **пучностями** стоячої хвилі. З (41.3) знаходимо значення координат пучностей:

$$x_{пучн} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (41.4)$$

Маємо на увазі, що пучність являє собою не точку, а площину, точки якої мають значення x , визначені формулою (41.4).

У точках, координати яких задовольняють умову

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

амплітуда дорівнює нулю. Ці точки називаються **вузлами** стоячої хвилі. Точки середовища, що містяться у вузлах, не здійснюють коливань. Координати вузлів мають значення:

$$x_{вузл} = \pm \left(n \pm \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (41.5)$$

Вузол, як і пучність, являє собою не точку, а площину, точки якої мають значення координати x , визначені формулою (41.5).

Із (41.4) та (41.5) випливає, що відстань між сусідніми пучностями, так само як відстань між сусідніми вузлами, дорівнює $\lambda/2$. Відстань між сусідніми вузлами (пучностями) називають **довжиною стоячої хвилі**. Отже, довжина стоячої хвилі дорівнює $\lambda/2$, де λ – довжина біжучої хвилі. Пучності й вузли зміщені один щодо одного на чверть довжини хвилі.

Множник $2A \cos(2\pi x/\lambda)$ у разі переходу через нульове значення змінює знак, унаслідок чого фаза коливань у різних сторонах від вузла відрізняється на π . Це означає, що точки, що лежать у різних сторонах від вузла, коливаються в протилежних фазах. Усі точки, що знаходяться між двома сусідніми вузлами, коливаються синфазно (тобто в однаковій фазі). На рисунку 41.1 наведено низку «моментальних фотографій» відхилень точок від положень рівноваги. Перша з них відповідає моменту, коли відхилення досягли найбільшого значення. Наступні зроблені з інтервалами у чверть періоду.

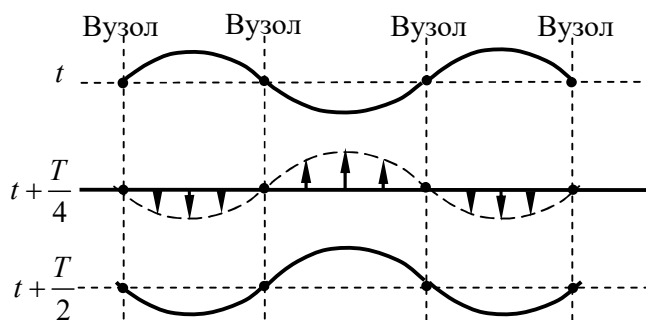


Рисунок 41.1 – По вертикалі відкладені відхилення частинок середовища від положення рівноваги в стоячій хвилі для моментів часу, що відрізняються на чверть періоду. Стрілками зображені швидкості частинок

Вузли зміщення ніби розділяють стоячу хвилю на автономні області, у яких відбуваються незалежні гармонічні коливання. Ніякого передавання руху від однієї області до іншої, а отже, перетікання енергії через вузли не відбувається. Інакше кажучи, немає ніякого поширення збурення вздовж хвилі. От чому збурювання, подані виразом (41.2), називаються **стоячою хвилею**. Зазначимо ще, що у вузлах зміщення похідні $\partial \xi / \partial x$, тобто відносна деформація, є максимальною, а в пучностях зміщення $\partial \xi / \partial x = 0$. Тому вузли зміщення є пучностями деформації, а пучності зміщення – вузлами деформації.

3 У закріпленій з обох кінців натягнутій струні під час збудження поперечних коливань устанавлюється стояча хвиля, водночас у місцях закріплення струни утворюються вузли. Тому в струні з помітною інтенсивністю збуджуються лише такі коливання, половина довжини хвилі яких укладається на струні ціле число раз (див. рис. 41. 2). З огляду на це впливає умова

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \text{ або } \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (41.6)$$

(l – довжина струни). Цим довжинам хвиль відповідають частоти

$$v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (41.7)$$

(v – фазова швидкість хвилі, обумовлена силою натягу струни й масою одиниці довжини, тобто лінійною густиною струни).

Частоти v_n називаються **власними частотами** струни. Вони є кратними частоті

$$v_1 = v / 2l,$$

яку називають **основною частотою**.

Гармонічні коливання з частотами (41.7) називаються *власними, або нормальними, коливаннями*. Їх називають також *гармоніками*. Зазвичай коливання струни являє собою накладення різних гармонік.

Колівання струни вирізняються тим, що для них із класичних уявлень одержуємо дискретні значення однієї з величин, що характеризує коливання (частоти). Для класичної фізики така дискретність є винятком. Для квантової фізики дискретність є, більше, правилом, ніж винятком.

§ 42 Хвильовий пакет. Групова швидкість

1 *Хвиля, що має форму короткого імпульсу («сплеску»), може бути розглянута як суперпозиція (накладення) гармонічних хвиль, частоти яких перебувають у деякому інтервалі $\Delta\omega$. Таке утворення називається **хвильовим пакетом** (або групою хвиль) (рис. 42.1). Рівняння хвильового пакета має вигляд*

$$\xi = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega) d\omega,$$

де A_ω – амплітуда, що відповідає одиничному інтервалу частот; ω_0 – основна частота; $\Delta\omega$ – інтервал частот, поданих у пакеті. У межах пакета гармонічні хвилі, що його утворюють, більше або менше підсилюють одна одну. Поза пакетом ці хвилі практично гасять одна одну.

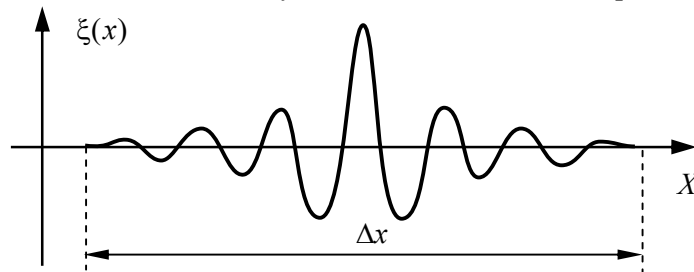


Рисунок 42.1 – Хвильовий пакет, що поширюється вздовж осі X : Δx – ширина пакета

Інтервалу частот $\Delta\omega$ відповідає інтервал хвильових чисел Δk . Із розрахунку випливає, що ширина пакета Δx пов'язана з інтервалом хвильових чисел Δk співвідношенням

$$\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi. \quad (42.1)$$



Рисунок 41.2 – Нормальні коливання (гармоніки) струни

Відомо, що фазову швидкість хвилі визначають за співвідношенням

$$v = \omega / k . \quad (42.2)$$

З огляду на це впливає, що чим більше $\Delta\omega$, тим більше Δk . Отже, чим вужче хвильовий пакет, тим більшим повинен бути інтервал частот гармонічних хвиль, поданих у пакеті.

2 Знайдемо швидкість поширення центра хвильового пакета. Під час додавання біжучих хвиль різної частоти потрібно мати на увазі можливість **дисперсії хвиль**, тобто залежності фазової швидкості гармонічної хвилі від частоти ω (або, що те саме, від довжини хвилі λ).

Дисперсія зазвичай характеризується дисперсійним співвідношенням

$$k = k(\omega) = \omega / v(\omega), \quad (42.3)$$

де k – хвильове число; $v(\omega)$ – фазова швидкість. Для хвиль, що поширюються в недиспергуючих середовищах, швидкість v не залежить від частоти, і k є пропорційним до ω . Для диспергуючих середовищ k залежить від ω за нелінійним законом.

За умови відсутності дисперсії всі хвилі, що утворюють пакет, поширюються з однаковою фазовою швидкістю. Очевидно, що з такою самою швидкістю переміщується й хвильовий пакет, водночас його форма не змінюється. Можна показати, що в диспергуючому середовищі пакет із часом розпливається – його ширина збільшується. Якщо дисперсія невелика, розпливання пакета відбувається не занадто швидко. У цьому разі пакету можна «приписати» швидкість u , під якою розуміємо швидкість переміщення центра пакета, тобто точки з максимальним значенням амплітуди. Цю швидкість називають **груповою**.

У диспергуючих середовищах групова швидкість виявляється відмінною від фазової. Покажемо це на прикладі накладення двох хвиль із частотами $\omega_0 - \Delta\omega/2$ і $\omega_0 + \Delta\omega/2$ (відповідно з хвильовими числами $k_0 - \Delta k/2$ та $k_0 + \Delta k/2$). Амплітуди хвиль будемо вважати однаковими. У цьому разі рівняння результуючої хвилі має вигляд

$$\xi = A \cos[(\omega_0 - \Delta\omega/2)t - (k_0 - \Delta k/2)x] + A \cos[(\omega_0 + \Delta\omega/2)t - (k_0 + \Delta k/2)x].$$

Скориставшись формулою для суми косинусів, перетворимо цей вираз:

$$\xi = 2A \cos[(\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x] \cos(\omega_0 t - k_0 x).$$

Одержаний вираз можна розглядати як рівняння біжучої гармонічної хвилі з амплітудою, що змінюється за законом

$$\text{амплітуда} = 2A \cos[(\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x].$$

Максимальне значення амплітуди одержуємо за умови, що величина, яка стоїть під знаком косинуса, дорівнює нулю. Зважаючи на це, впливає, що координату x_m центра хвильового пакета в момент часу t можна визначити зі співвідношення

$$(\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x_m = 0.$$

Поділивши x_m на t , знайдемо швидкість переміщення центра хвильового пакета, тобто групову швидкість:

$$u = x_m / t = \Delta\omega / \Delta k .$$

У разі накладення хвиль із неперервним набором частот **групову швидкість визначають за виразом**

$$\boxed{u = d\omega / dk} \quad (42.4)$$

(порівняйте з формулою (42.2)).

Замінивши згідно з (42.2) ω на $v \cdot k$, вираз (42.4) можна подати у вигляді

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}. \quad (42.5)$$

За визначенням $k = 2\pi/\lambda$, тобто $\lambda = 2\pi/k$. Отже, $d\lambda/dk = -2\pi/k^2 = -\lambda/k$. Підстановка цього значення $d\lambda/dk$ у (42.5) приводить до формули

$$u = v - \lambda(dv/d\lambda). \quad (42.6)$$

За умови відсутності дисперсії $dv/d\lambda = 0$ і $u = v$. Формула (42.6) дає змогу знайти групову швидкість u за відомою залежністю фазової швидкості v від довжини хвилі λ .

Енергія хвилі пропорційна квадрату амплітуди. Тому швидкість перенесення енергії хвилі дорівнює груповій швидкості.

Варто мати на увазі, що поняття групової швидкості можна вживати лише за умови, що поглинання енергії хвилі в цьому середовищі невелике. За значного загасання хвилі поняття групової швидкості втрачає свій зміст.

§ 43 Хвильове рівняння для електромагнітної хвилі. Фазова швидкість поширення електромагнітної хвилі

1 З рівнянь Максвелла

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (43.1)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad (43.2)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (43.3)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (43.4)$$

впливає, що змінні електричне й магнітне поля взаємно створюють одне одного: змінне магнітне поле створює електричне (див. рівняння (43.1)), а змінне електричне – магнітне (див. рівняння (43.3)). Отже, якщо за допомогою коливальних електричних зарядів збудити змінне електромагнітне поле, то в просторі виникне послідовність взаємних перетворень електричного й магнітного полів, що поширюватимуться від точки до точки. Цей процес буде періодичним і в часі, і в просторі а, отже, являтиме собою хвилю.

2 Покажемо, що існування електромагнітних хвиль впливає з рівнянь Максвелла (43.1)–(43.4). Виконаємо це на прикладі плоскої хвилі, що поширюється в однорідному й ізотропному нейтральному ($\rho = 0$) непровідному ($j = 0$) середовищі зі сталими проникностями ϵ та μ .

Спрямуємо вісь X перпендикулярно до хвильових поверхонь. Тоді вектори \vec{E} і \vec{H} , а отже, їх проєкції на координатні осі не будуть залежати від координат y та z . Тому рівняння (43.1)–(43.4) спрощуються:

$$0 = \mu_0\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (43.5)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu_0\mu \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (43.6)$$

$$0 = \epsilon_0\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon_0\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (43.7)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \epsilon_0\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (43.8)$$

Перше з рівнянь (43.7) і рівняння (43.8) показують, що E_x не залежить ні від t , ні від x . Перше з рівнянь (43.5) та рівняння (43.6) дають такий самий результат для H_x . Отже,

відмінні від нуля E_x і H_x можуть бути обумовлені лише сталими однорідними полями, що накладаються на електромагнітне поле хвилі. Саме поле хвилі не має складових уздовж осі X . Це означає, що вектори \vec{E} та \vec{H} перпендикулярні до напрямку поширення хвилі, тобто електромагнітні хвилі є поперечними. Надалі ми будемо вважати постійні поля відсутніми: $E_x = H_x = 0$.

Два останніх рівняння (43.5) і два останніх рівняння (43.7) можна об'єднати у дві взаємно незалежні групи:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (43.9)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (43.10)$$

Перша група рівнянь зв'язує компоненти E_y та H_z , друга – компоненти E_z і H_y . Для розгляду плоскої електромагнітної хвилі досить узяти одну із систем рівнянь (43.9) або (43.10), вважаючи проєкції, що фігурують в іншій системі, такими, які дорівнюють нулю.

Візьмемо для опису хвилі рівняння (43.9), поклавши $E_z = H_y = 0$. Продиференціюємо перше рівняння за змінною x та виконаємо заміну: $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x}$. Підставивши потім $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ із другого рівняння, одержимо для E_y рівняння

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}. \quad (43.11)$$

Продиференціюємо за змінною x друге з рівнянь (43.9), знайдемо після аналогічних перетворень рівняння для H_z :

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}}. \quad (43.12)$$

Потрібно мати на увазі, що рівняння (43.11) та (43.12) варто розглядати спільно, тому що вони одержані з рівнянь (43.9), кожне з яких містить і \vec{E} , і \vec{H} .

Рівняння (43.11) та (43.12) є типовими хвильовими рівняннями. Будь-яка функція, що задовольняє таке рівняння, описує деяку хвилю, водночас квадратний корінь із величини, оберненої коефіцієнту при похідній за часом, дає фазову швидкість цієї хвилі. Отже, рівняння (43.11) і (43.12) показують, що електромагнітні поля можуть існувати у вигляді електромагнітних хвиль, фазова швидкість яких дорівнює

$$\boxed{v = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} = c / \sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (43.13)$$

У співвідношенні (43.13) увели позначення $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Розрахунки показують, що за своєю розмірністю й числовим значенням вищенаведена величина c є швидкістю світла у вакуумі. Отже, у вакуумі (тобто за $\epsilon = \mu = 1$) швидкість електромагнітних хвиль збігається зі швидкістю світла c .

§ 44 Напруженість електричних і магнітних полів у лінійно поляризованій електромагнітній хвилі

13 рівнянь Максвелла для плоскої хвилі, що поширюється в однорідному й ізотропному нейтральному ($\rho = 0$) непровідному ($j = 0$) середовищі зі сталими

проникностями ϵ та μ , впливає (вісь X напрямлена перпендикулярно до хвильових поверхонь):

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (44.1)$$

Цю систему рівнянь нескладно перетворити до такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (44.2)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (44.3)$$

Рівняння (44.2) і (44.3) є типовими хвильовими рівняннями. Знайдемо розв'язок цих рівнянь. Як відомо, будь-яка функція, що задовольняє таке рівняння, описує деяку хвилю, водночас квадратний корінь із величини, оберненої коефіцієнту при похідній за часом, дає фазову швидкість цієї хвилі

$$v = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} = c / \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (44.4)$$

У співвідношенні (44.4) увели позначення $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Розрахунки показують, що за своєю розмірністю та числовим значенням вищенаведена величина c є швидкістю світла у вакуумі. Отже, у вакуумі (тобто за $\epsilon = \mu = 1$) швидкість електромагнітних хвиль збігається зі швидкістю світла c .

Розв'язками рівнянь (44.2) та (44.3) є функції

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad (44.5)$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (44.6)$$

У цих формулах ω – частота хвилі; k – хвильове число, що дорівнює ω/v (v – фазова швидкість, що визначають за (44.4)); α_1 і α_2 – початкові фази коливань у точках із координатою $x = 0$.

Підстановка функцій (44.5) та (44.6) у рівняння (44.1) приводить до співвідношень

$$kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu_0 \mu \omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \epsilon_0 \epsilon \omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Для того щоб ці співвідношення задовольнялися за будь-яких значень t і x , необхідно, щоб початкові фази α_1 та α_2 були однаковими. Крім того, повинні виконуватися рівності

$$kE_m = \mu_0 \mu \omega H_m, \quad \epsilon_0 \epsilon \omega E_m = kH_m.$$

Перемноживши ці рівності, знайдемо, що

$$\epsilon_0 \epsilon E_m^2 = \mu_0 \mu H_m^2. \quad (44.7)$$

Отже, коливання електричного й магнітного векторів відбуваються з однаковою фазою ($\alpha_1 = \alpha_2$), а амплітуди цих векторів пов'язані співвідношенням

$$\boxed{E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}}. \quad (44.8)$$

Помноживши рівняння (44.5) на орт осі Y ($E_y \vec{e}_y = \vec{E}$), а рівняння (44.6) на орт осі Z ($H_z \vec{e}_z = \vec{H}$), одержимо рівняння плоскої електромагнітної хвилі у векторному вигляді:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx)},$$

$$\boxed{\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx)} \quad (44.9)$$

(ми взяли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Отже, амплітуди напруженості електричного та магнітного полів у плоскій електромагнітній хвилі пов'язані між собою співвідношенням (44.8), миттєві значення – виразом (44.9).

2 Базуючись на (44.9), побудуємо розподіл напруженості електричного й магнітного полів як функції координати x для деякого фіксованого моменту часу (див. рис. 44.1). З рисунка 44.1 випливає, що вектори \vec{E} та \vec{H} утворюють із напрямком поширення хвилі правогвинтову систему. У фіксованій точці простору вектори \vec{E} та \vec{H} змінюються з часом за гармонічним законом. Вони одночасно збільшуються від нуля, потім через $1/4$ періоду досягають найбільшого значення, водночас якщо \vec{E} напрямлено вгору, то \vec{H} напрямлений вправо (дивимосья вздовж напрямку поширення хвилі). Ще через $1/4$ періоду обидва вектори одночасно перетворюються на нуль. Потім знову досягають найбільшого значення, але цього разу \vec{E} напрямлений униз, а \vec{H} уліво. І, нарешті, під час завершення періоду коливання вектори знову перетворюються на нуль. Такі зміни векторів \vec{E} та \vec{H} відбуваються в усіх точках простору, але зі зміщенням за фазою, обумовленою відстанню між точками вздовж осі X .

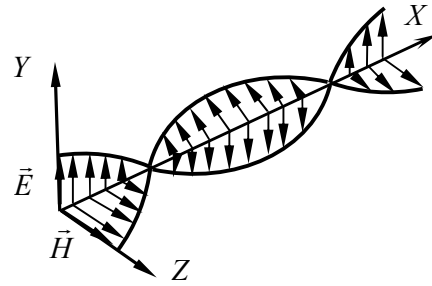


Рисунок 44.1 – «Моментальна фотографія» плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі X . Вектор \vec{E} коливається вздовж осі Y , вектор \vec{H} – уздовж осі Z . Із часом уся картина переміщується в напрямку осі X із фазовою швидкістю хвилі v

3 Максвелл теоретично передбачив існування електромагнітних хвиль ще в 1865 р. Перші досліди з невітловими електромагнітними хвилями були здійснені Г. Герцем у 1888 р. Для випромінювання хвиль Герц використав винайдений ним вібратор, що складався з двох стрижнів, розділених іскровим проміжком (рис. 44.2). Під час подавання на вібратор високої напруги від індукційної котушки в проміжку проскакувала іскра. Вона закорочувала проміжок, і у вібраторі виникали загасальні електричні коливання. За час горіння іскри встигала відбутися велика кількість коливань, що створювала цуг електромагнітних хвиль, довжина яких приблизно удвічі перевищувала довжину вібратора. Приймання хвиль Герц здійснював за допомогою такого самого вібратора (без індуктора) з невеликим іскровим проміжком посередині. У разі розміщення такого вібратора паралельно вектору напруженості електричного поля хвилі в ньому збуджувалися коливання струму й напруги. Оскільки довжина вібратора була вибраною такою, що дорівнювала $\lambda/2$, коливання в ньому внаслідок резонансу досягали такої інтенсивності, що викликали проскакування в іскровому проміжку невеликих іскор. Спостереження цих невеликих іскор свідчило про наявність у цій точці простору електромагнітної хвилі.

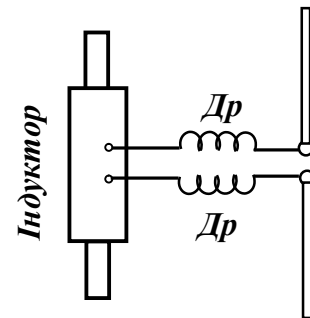


Рисунок 44.2 – Вібратор Герца, підключений через дроселі Dr до індукційної котушки. Дроселі запобігали проходженню високочастотного струму в обмотці індуктора

§ 45 Вектор Пойнтінга

1 Поширення будь-якої хвилі пов'язане з перенесенням енергії. Електромагнітні хвилі також переносять енергію. За умови відсутності дисперсії швидкість перенесення енергії дорівнює фазовій швидкості v , і густину потоку енергії можна одержати, помноживши

густину енергії w на v (використано формулу для вектора Умова). У разі електромагнітних хвиль вектор густини потоку енергії прийнято позначати буквою \vec{S} . Отже, модуль вектора \vec{S} дорівнює

$$S = wv. \quad (45.1)$$

Густина енергії електромагнітного поля складається з густини енергії електричного поля й густини енергії магнітного поля:

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (45.2)$$

У вакуумі та непровідному середовищі вектори \vec{E} і \vec{H} змінюються в кожній точці простору в однаковій фазі. Тому співвідношення між амплітудами напруженості електричного та магнітного полів справедливе й для їх миттєвих значень:

$$E\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H\sqrt{\mu_0 \mu}.$$

Тому можна записати, що

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{EH}{2} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} = \frac{EH}{2c} \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{EH}{2v},$$

де v – фазова швидкість хвилі ($\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$; c – швидкість світла у вакуумі; $c/\sqrt{\epsilon \mu} = v$).

Отже, вираз (45.2) можна подати у вигляді

$$w = \frac{EH}{v}.$$

Помноживши знайдений вираз для w на швидкість хвилі v , одержимо модуль густини потоку енергії:

$$S = wv = EH. \quad (45.3)$$

Вектори \vec{E} та \vec{H} взаємно перпендикулярні й утворюють із напрямком поширення хвилі правоюгвинтову систему. Тому напрямок вектора $[\vec{E} \times \vec{H}]$ збігається з напрямком перенесення енергії, а модуль цього вектора дорівнює EH . Отже, *вектор густини потоку електромагнітної енергії можна подати як векторний добуток \vec{E} і \vec{H}* :

$$\boxed{\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]}. \quad (45.4)$$

Вектор \vec{S} називається **вектором Пойнтінга**.

Оскільки вектори \vec{E} та \vec{H} змінюються з часом за законом косинуса, модуль вектора Пойнтінга в кожній точці змінюється за законом квадрата косинуса. За період \vec{S} двічі досягає максимального значення й двічі дорівнює нулю. Середнє за період значення модуля \vec{S} дорівнює $EH/2$.

§ 46 Випромінювання диполя

1 Найпростішою системою, що випромінює електромагнітні хвилі, є коливальний електричний диполь. Прикладом такої системи може бути нерухомий точковий заряд $+q$ і точковий заряд $-q$, що коливається біля нього (рис. 46.1).

Дипольний електричний момент цієї системи змінюється з часом за законом

$$\vec{p} = -q\vec{r} = -ql\vec{e} \cos \omega t = -\vec{p}_m \cos \omega t, \quad (46.1)$$

де \vec{r} – радіус-вектор заряду $-q$; l – амплітуда коливань; \vec{e} – одиничний вектор, напрямлений уздовж осі диполя; $\vec{p}_m = -ql\vec{e}$.

2 Розглянемо випромінювання диполя, розміри якого малі порівняно з довжиною хвилі ($l \ll \lambda$). Такий диполь називається **елементарним**. У безпосередній близькості від диполя картина електромагнітного поля дуже складна. Вона значно спрощується в так званій **хвильовій зоні диполя**, яка починається на відстані r , що значно перевищує довжину хвилі ($r \gg \lambda$). Якщо хвиля поширюється в однорідному й ізотропному середовищі, то хвильові поверхні в хвильовій зоні мають сферичну форму (рис. 46.2). Вектори \vec{E} та \vec{H} у кожній точці перпендикулярні до променя, тобто радіуса-вектора, проведеного в цю точку з центра диполя.

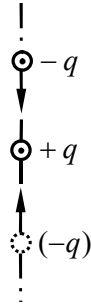


Рисунок 46.1 – Електричний диполь, утворений нерухомим зарядом $+q$ і зарядом $-q$, що коливається біля нього

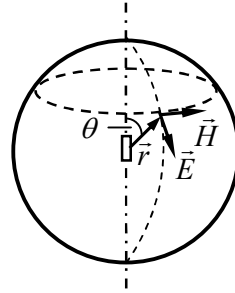


Рисунок 46.2 – Структура електромагнітної хвилі в хвильовій зоні

Назвемо переріз хвильових поверхонь площинами, що проходять через вісь диполя, меридіанами, а площинами, перпендикулярними до осі диполя, – паралелями. У цьому разі можна стверджувати, що вектор \vec{E} у кожній точці хвильової зони напрямлений за дотичною до меридіана, а вектор \vec{H} – за дотичною до паралелі. Якщо дивитися вздовж променя, то картина хвилі буде такою самою, як на рисунку 44.1, із тією відмінністю, що амплітуда під час переміщення вздовж променя поступово зменшується.

У кожній точці вектори \vec{E} та \vec{H} коливаються за законом $\cos(\omega t - kr)$. Амплітуди E_m і H_m залежать від відстані r до випромінювача й кута θ між напрямком радіуса-вектора \vec{r} та віссю диполя (див. рис. 46.2). Для вакууму ця залежність має вигляд

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \theta.$$

Середнє значення густини потоку енергії $\langle S \rangle$ пропорційно добутку $E_m H_m$, отже,

$$\langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (46.2)$$

Із цієї формули випливає, що інтенсивність хвилі змінюється вздовж променя (за $\theta = \text{const}$) обернено пропорційно квадрату відстані від випромінювача. Крім того, вона залежить від кута θ . Найінтенсивніше диполь випромінює в напрямках, перпендикулярних до його осі ($\theta = \pi/2$). У напрямку осі ($\theta = 0$ і π) диполь не випромінює. Залежність інтенсивності випромінювання від кута θ можна наочно зобразити за допомогою **діаграми спрямованості диполя** (рис. 46.3).

Теоретичний розрахунок показує, що **потужність випромінювання диполя P** (тобто енергія, випромінювана в усіх напрямках за одиницю часу) **пропорційна квадрату другої похідної дипольного моменту за часом:**

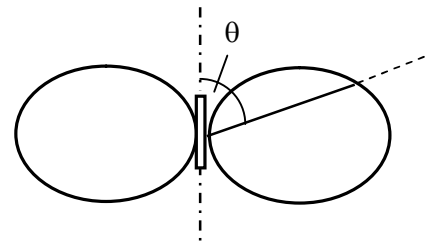


Рисунок 46.3 – Діаграма спрямованості випромінювання диполя. Відрізок, що відтинається діаграмою на промені, характеризує інтенсивність випромінювання в цьому напрямку. Повну «діаграму» одержимо тоді, коли надамо пелюсткам обертання навколо осі диполя

$$P \sim \ddot{p}^2. \quad (46.3)$$

Відповідно до формули (46.1) $\ddot{p}^2 = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$. Підстановка цього значення в (46.3) дає

$$P \sim p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (46.4)$$

Провівши усереднення цього виразу за часом, одержимо

$$\langle P \rangle \sim p_m^2 \omega^4. \quad (46.5)$$

Отже, середня потужність випромінювання диполя пропорційна квадрату амплітуди електричного моменту диполя й четвертого ступеня частоти. Тому за малої частоти випромінювання електричних систем (наприклад, ліній передавання змінного струму промислової частоти) буває незначним.

Згідно з (46.1) $\ddot{p} = -q\ddot{r} = -q\ddot{a}$, де \ddot{a} – прискорення коливального заряду. Підстановка цього виразу для \ddot{p} у формулу (46.3) приводить до того, що потужність випромінювання пропорційна квадрату заряду й квадрату його прискорення:

$$P \sim q^2 a^2. \quad (46.6)$$

Ця формула визначає потужність випромінювання не лише під час коливань, а й під час довільного руху заряду. **Будь-який заряд, що рухається з прискоренням, збуджує електромагнітні хвилі, водночас потужність випромінювання пропорційна квадрату заряду й квадрату прискорення.**

Заряд, що виконує гармонічні коливання, випромінює монохроматичну хвилю з частотою, що дорівнює частоті коливання заряду. Якщо прискорення заряду \ddot{a} змінюється не за гармонічним законом, випромінювання складається з набору хвиль різних частот.

§ 47 Ефект Доплера для електромагнітних хвиль

1 Електромагнітні хвилі поширюються у вакуумі зі швидкістю світла. У різних інерційних системах відліку швидкість електромагнітної хвилі однакова, вона не залежить від швидкості його джерела. Це твердження є наслідком електромагнітної теорії Максвелла, воно експериментально перевірено. У спеціальній теорії відносності це твердження є одним із основних постулатів. Проте в різних інерційних системах відліку такі параметри електромагнітної хвилі, як частота, довжина хвилі, напруженість електричного й магнітного полів мають різні значення. Зміну частоти електромагнітної хвилі під час переходу від однієї системи відліку до іншої називають **ефектом Доплера для електромагнітних хвиль**.

Як відомо, не існує особливого матеріального середовища, коливання якого являють собою електромагнітну хвилю (такого, як повітря, коливання якого є звуковою хвилею). Тому зміна частоти електромагнітних (світлових) хвиль обумовлена лише відносною швидкістю джерела та приймача. Їх можна описати таким співвідношенням:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v \cdot \cos \theta / c}, \quad (47.1)$$

де ω – частота електромагнітної хвилі в системі, пов'язаній із приймачем; ω_0 – частота електромагнітної хвилі в системі, пов'язаній із джерелом; v – модуль відносної швидкості джерела світла S відносно приймача P (див. рис. 47.1); θ – кут у системі відліку, пов'язаній із приймачем, між напрямком руху джерела електромагнітної хвилі та лінією, що з'єднує джерело й приймач (див.

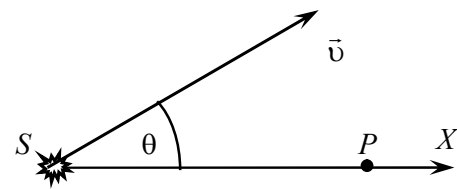


Рисунок 47.1 – До ефекту Доплера для електромагнітних хвиль

рис. 47.1); c – швидкість світла.

Формула (47.1) описує ефект Доплера для електромагнітних хвиль. Крім цього розрізняють **поздовжній ефект Доплера**, за якого джерело світла (електромагнітних хвиль) рухається вздовж лінії, що з'єднує джерело S і приймач P , ($\theta=0$ або $\theta=\pi$) та **поперечний ефект Доплера**, за якого $\theta = \pi/2$.

Для поздовжнього ефекту Доплера відповідно до (47.1) можемо записати

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 \pm v/c}. \quad (47.2)$$

Знак « \rightarrow » у знаменнику формули (47.2) свідчить про те, що джерело й приймач зближуються ($\theta=0$). Знак « $+$ » – що джерело і приймач віддаляються ($\theta=\pi$). Бачимо, що в разі релятивістських швидкостей, коли джерело та приймач зближуються, істотно підвищується частота електромагнітної хвилі:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v/c} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + (v/c)}{1 - (v/c)}} \gg \omega_0, \text{ коли } (1 - (v/c)) \ll 1. \quad (47.3)$$

Для поперечного ефекту Доплера ($\theta = \pi/2$) відповідно (47.1), можемо записати

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (47.4)$$

РОЗДІЛ 3

ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ХВИЛЬОВОЇ ОПТИКИ

ТЕМА 7 ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

§ 48 Інтерференція монохроматичного світла від двох джерел. Умови, за яких спостерігається інтерференція монохроматичного світла. Умови інтерференційного мінімуму й максимуму

Попередні відомості

1 Оптикою називається розділ фізики, що вивчає властивості й взаємодію з речовиною світла, тобто електромагнітних хвиль, довжина яких перебуває в межах від 1 до 10^5 нм, що охоплює ультрафіолетову, видиму та інфрачервону області спектра.

Світло є складним явищем: за певних умов воно проявляє себе як електромагнітна хвиля, за інших – як потік особливих частинок (фотонів). Така властивість називається **корпускулярно-хвильовим дуалізмом** (корпускула – частинка, дуалізм – подвійність). У цьому розділі будемо розглядати хвильову оптику, тобто коло явищ, в основі яких лежить хвильова природа світла.

Довжина хвилі видимого світла перебуває в межах

$$\lambda_0 = 400\text{--}700 \text{ нм.} \quad (48.1)$$

Ультрафіолетовим називається випромінювання з довжиною хвилі, меншою за 400 нм, інфрачервоним – з довжиною, більшою за 760 нм.

2 Відношення швидкості c світлової хвилі у вакуумі до фазової швидкості v в деякому середовищі називається абсолютним показником заломлення цього середовища й позначається буквою n :

$$n = c/v. \quad (48.2)$$

У результаті порівняння з формулою для швидкості електромагнітної хвилі одержуємо $n = \sqrt{\epsilon\mu}$. Для переважної більшості прозорих речовин μ фактично не відрізняється від одиниці. Тому можна вважати, що

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (48.3)$$

Ця формула зв'язує оптичні властивості речовини з її електричними властивостями.

Показник заломлення характеризує **оптичну густину середовища**. Середовище з більшим n називається оптично більш густим, ніж середовище з меншим n .

3 Значення довжин хвиль (48.1) належить до світлових хвиль у вакуумі. У речовині довжина світлових хвиль інша. У разі коливань частоти ν довжина хвилі у вакуумі дорівнює $\lambda_0 = c/\nu$. У середовищі, у якому фазова швидкість світлової хвилі $v = c/n$, довжина хвилі має значення $\lambda = v/\nu = c/(n\nu) = \lambda_0/n$. Отже, довжина λ світлової хвилі у середовищі з показником заломлення n пов'язана з довжиною λ_0 хвилі у вакуумі співвідношенням

$$\lambda = \lambda_0/n. \quad (48.4)$$

4 Найпростіші оптичні явища (виникнення тіні, одержання зображень в оптичних приладах тощо) можна зрозуміти з геометричної оптики. Геометрична оптика базується на чотирьох законах: 1) законі прямолінійного поширення світла; 2) законі незалежності світлових променів; 3) законі відбиття; 4) законі заломлення.

Закон прямолінійного поширення стверджує, що в однорідному середовищі світло поширюється прямолінійно.

Закон незалежності світлових променів стверджує, що промені під час перетинання не збурюють один одного. Перетинання променів не заважають кожному з них поширюватися незалежно один від одного.

Закон відбиття світла стверджує, що відбитий промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до відбивної поверхні в точці падіння; кут відбивання α дорівнює куту падіння β (див. рис. 48.1):

$$\alpha = \beta.$$

Закон заломлення світла стверджує, що заломлений промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до поверхні розподіл середовищ, проведеною в точку падіння; відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення – стала величина для речовин (див. рис. 48.2):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{12},$$

де $n_{12} = n_2 / n_1$ – відносний показник заломлення другого середовища щодо першого.

5 Дія світла на людське око залежить від довжини (частоти) хвилі. Для характеристики світла з урахуванням його здатності викликати зорові відчуття вводять *фотометричні величини*: світловий потік, освітленість, яскравість, сила світла.

6 В електромагнітній хвилі коливаються вектори \vec{E} та \vec{H} . Дослід показує, що фізіологічну, фотохімічну, фотоелектричну й інші дії світла викликають коливання електричного вектора. Відповідно до цього говорять про *світловий вектор*, маючи на увазі вектор напруженості електричного поля.

Амплітуду світлового коливання здебільшого позначають буквою A (іноді E_m). Відповідно зміну в часі й просторі проекції світлового вектора на напрямок, уздовж якого він коливається, описують рівнянням

$$E = A \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (48.5)$$

де k – хвильове число; r – відстань, відлічувана вздовж напрямку поширення світлової хвилі. Для плоскої хвилі, що поширюється в непоглинаючому світло середовищі, $A = const$, для сферичної хвилі A зменшується як $1/r$.

7 Частота видимих світлових хвиль перебуває в межах

$$\nu = (0,39 - 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Гц}. \quad (48.6)$$

Частота зміни амплітуди, енергії світлової хвилі є дуже високою. Ні око, ні будь-який інший приймач світлової енергії не можуть простежити за дуже швидкі зміни, унаслідок чого вони реєструють усереднений за часом потік енергії. Модуль середнього за часом значення густини потоку енергії, що переноситься світловою хвилею, називається *інтенсивністю світла* I в цій точці простору. Густина потоку електромагнітної енергії визначається вектором Пойнтінга \vec{S} . Отже,

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = |\langle [\vec{E} \times \vec{H}] \rangle|. \quad (48.7)$$

Відомо, що модулі амплітуд векторів \vec{E} і \vec{H} в електромагнітній хвилі пов'язані співвідношенням $E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu} = H_m \sqrt{\mu_0}$ (ми взяли $\mu = 1$). З огляду на це

$$H_m = \sqrt{\epsilon} E_m \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = n E_m \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0},$$

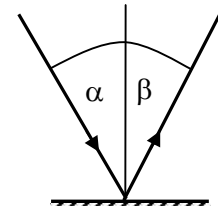


Рисунок 48.1 – До закону про відбиття світла

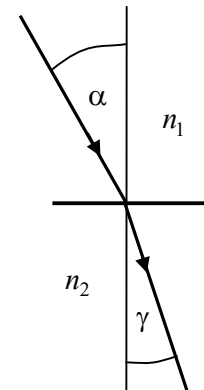


Рисунок 48.2 – До закону про відбиття світла

де n – показник заломлення середовища, у якому поширюється хвиля. Отже, H_m пропорційна E_m та n : $H_m \sim nE_m$. Модуль середнього значення вектора Пойнтинга пропорційний $E_m H_m$. Тому можна вважати, що

$$I \sim nE_m^2 = nA^2. \quad (48.8)$$

Отже, інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди світлової хвилі й показнику заломлення середовища.

Інтерференція монохроматичного світла від двох джерел

8 Інтерференція світла – явище, за якого під час накладання пучків світла результуюча інтенсивність не дорівнює сумі інтенсивностей окремих пучків, має постійні в часі темні та світлі ділянки – інтерференційні максимуми й мінімуми.

З'ясуємо, за яких умов можливе явище інтерференції.

Розглянемо випадок, коли два джерела S_1 і S_2 випромінюють монохроматичні хвилі (див. рис. 48.3). У точці спостереження P кожна хвиля збуджує коливання, що описуються такими виразами:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{m1} \cos[\omega_1(t - l_1/v_1) + \alpha_1], \quad (48.9)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{m2} \cos[\omega_2(t - l_2/v_2) + \alpha_2], \quad (48.10)$$

де ω_1 , α_1 та ω_2 , α_2 – відповідно частоти й початкові фази коливань джерел S_1 і S_2 ; l_1 та l_2 – відстані, що проходять хвилі від своїх джерел до точки спостереження P ; v_1 та v_2 – їх фазові швидкості. Зрозуміло, що в точці P результуюче коливання світлового вектора буде дорівнювати

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

а результуюча інтенсивність визначається як

$$I \sim \langle E^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1)^2 \rangle + \langle (\vec{E}_2)^2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle. \quad (48.11)$$

Доданок $2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$ у (48.11) називається **інтерференційним доданком**. З (48.11) випливає, що, коли інтерференційний доданок дорівнює нулю, результуюча інтенсивність дорівнюватиме сумі інтенсивностей окремих світлових пучків, тобто явища інтерференції не буде.

Розглянемо більш детально інтерференційний доданок і з'ясуємо, за яких умов він не дорівнює нулю. Використовуючи (48.9) та (48.10), нескладно одержати

$$2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = 2 \langle \vec{E}_{m1} \vec{E}_{m2} \cos[\omega_1(t - l_1/v_1) + \alpha_1] \cos[\omega_2(t - l_2/v_2) + \alpha_2] \rangle = \vec{E}_{m1} \vec{E}_{m2} \times \\ \times \left\langle \cos \left[(\omega_1 + \omega_2)t - \left(\frac{\omega_1 l_1}{v_1} + \frac{\omega_2 l_2}{v_2} \right) + \alpha_1 + \alpha_2 \right] + \cos \left[(\omega_1 - \omega_2)t - \left(\frac{\omega_1 l_1}{v_1} - \frac{\omega_2 l_2}{v_2} \right) + \alpha_1 - \alpha_2 \right] \right\rangle. \quad (48.12)$$

Аналізуючи вираз (48.12), варто зазначити, що, **щоб інтерференційний доданок був відмінним від нуля, необхідно, по-перше, виконати умову $\vec{E}_{m1} \vec{E}_{m2} \neq 0$, тобто вектори \vec{E}_{m1} та \vec{E}_{m2} не повинні бути перпендикулярними один до одного. По-друге, потрібно, щоб різниця фаз хвиль була постійною в часі.** Це можливо, як випливає з (48.12), коли частоти обох хвиль є однаковими й різниця початкових фаз хвиль не залежить від часу:

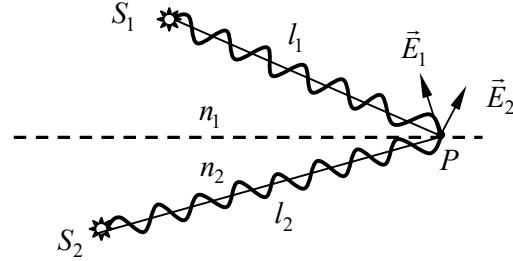


Рисунок 48.3 – Схема досліду з інтерференції від двох джерел монохроматичних хвиль

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2} \text{ і } \boxed{\alpha_1 - \alpha_2 = const}. \quad (48.13)$$

Хвилі, для яких різниця фаз є постійною в часі, називають **когерентними**. Умова (48.13) є умовою для когерентності хвиль.

9 Умови інтерференційного максимуму та мінімуму. Далі будемо вважати, що умови спостереження інтерференції є виконаними. З'ясуємо, за яких умов у точці спостереження P спостерігають максимум, а за яких – мінімум. З виразу (48.11) випливає, що, коли інтерференційний доданок набирає максимального значення, то ми будемо спостерігати максимум, а коли мінімального – мінімум. Ураховуючи (48.13), для інтерференційного доданка можемо записати

$$2 < \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 > = E_{m1} E_{m2} \cos \delta, \quad (48.14)$$

де різниця фаз хвиль визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \delta &= [\omega_1(t - l_1/v_1) + \alpha_1] - [\omega_2(t - l_2/v_2) + \alpha_2] = [(\omega_1 - \omega_2)t - (\omega_1 l_1/v_1 - \omega_2 l_2/v_2) + \alpha_1 - \alpha_2] = \\ &= [(\omega l_2/v_2 - \omega l_1/v_1) + \alpha_1 - \alpha_2]. \end{aligned} \quad (48.15)$$

У ньому враховано, що згідно з (48.13) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, вектори \vec{E}_{m1} та \vec{E}_{m2} вважаємо паралельними. Далі використаємо співвідношення для фазових швидкостей хвиль $v_1 = c/n_1$ і $v_2 = c/n_2$, початкові фази вважатимемо такими, що дорівнюють нулю $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тоді можемо записати

$$\delta = \omega \left(\frac{l_2}{v_2} - \frac{l_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (l_2 n_2 - l_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (48.16)$$

де

$$\boxed{\Delta = n_2 l_2 - n_1 l_1 = L_2 - L_1} \quad (48.17)$$

є величиною, що дорівнює різниці **оптичних довжин** $n \cdot l$, які проходять хвилі, і називається **оптичною різницею ходу**.

З формули (48.14) випливає, що максимум буде спостерігатися тоді, коли

$$\boxed{\delta = \pm 2\pi m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)}. \quad (48.18)$$

У цьому разі $\cos \delta = 1$, тобто набирає максимального значення. Якщо використати (48.16) та (48.17), одержимо, що максимум є тоді, коли **оптична різниця ходу дорівнює цілому числу довжин хвиль у вакуумі**:

$$\boxed{\Delta = \pm m \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)}. \quad (48.19)$$

Отже, умови (48.18) і (48.19) є умовами інтерференційного максимуму.

Мінімальне значення інтерференційного доданка буде тоді, коли $\cos \delta = -1$, тобто

$$\boxed{\delta = \pm (m + 1/2) 2\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)}. \quad (48.20)$$

Ця умова відповідає тому, що Δ дорівнює напівцілому числу довжин хвиль у вакуумі:

$$\boxed{\Delta = \pm (m + 1/2) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)}. \quad (48.21)$$

Отже, умови (48.20) та (48.21) є умовами інтерференційного мінімуму.

§ 49 Когерентність. Механізм випромінювання світла атомами. Час когерентності. Довжина когерентності. Радіус когерентності

1 Як з'ясовано вище, необхідною умовою існування інтерференції є постійність у часі різниці фаз хвиль. Тобто частоти хвиль, що беруть участь в інтерференції, повинні бути однаковими, різниця початкових фаз хвиль не повинна залежати від часу.

Хвилі, для яких виконується умова постійності в часі різниці фаз, називають **когерентними**. **Когерентністю** називають узгоджене проходження декількох коливальних або хвильових процесів.

2 У природній світловій хвилі амплітуда, частота й початкова фаза за достатньо тривалий проміжок часу неперервно хаотично змінюються. Тобто різниця фаз з однаковою ймовірністю набирає будь-яких значень. Тому інтерференційний доданок дорівнює нулю. Отже, природне світло є некогерентним і інтерференції не створює.

Причини некогерентності природного світла пов'язані з механізмом випромінювання світла атомами. Атом випромінює світло протягом $\sim 10^{-8}$ с, коли переходить із збудженого стану в звичайний. За цей час створюється цуг хвилі довжиною ~ 3 м. Через деякий час атом знову випромінює новий цуг світлової хвилі. Але початкова фаза нового цугу має випадковий характер і не пов'язана з фазою попереднього цугу. Також зрозуміло, що цуги, утворювані різними атомами, мають різні початкові фази. *Отже, природне світло, створюване як різними цугами одного й того самого атома, так і різними цугами різних атомів, є некогерентним.*

3 Виберемо певну точку та будемо спостерігати, як у ній змінюються початкові фази світлових хвиль. Зрозуміло, що фаза світлової хвилі, випромінюваного одним атомом, залишається незмінною лише в межах одного цугу. Розглянемо світло, створюване багатьма атомами. Якщо вибрати достатньо малий час спостереження, то може статися, що основна кількість цугів (від різних атомів) проходить через точку спостереження, не перериваючись і пам'ятаючи свої початкові фази. Лише невелика кількість цугів змінює одна одну. Завдяки цьому буде змінюватиметься результуюча початкова фаза. *Час, за який випадкова зміна фази досягає значення π , називають часом когерентності.*

Розрахунок показує, що час когерентності можна визначити за співвідношенням

$$t_{\text{ког}} = 1 / \Delta\nu,$$

де $\Delta\nu$ – інтервал частот світлової хвилі. Для сонячного світла час когерентності дорівнює $\sim 10^{-12}$ с.

4 Відстань $l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}}$, на яку переміщується хвиля за час когерентності, називається **довжиною когерентності**. Зрозуміло, що довжина когерентності дорівнює відстані між двома точками вздовж напрямку поширення світла, у яких випадкова зміна фази досягає значення π . Для сонячного світла довжина когерентності становить $\sim 0,3$ мм.

5 У світловій хвилі амплітуда та фаза коливань змінюються не лише вздовж напрямку поширення, а й у площині, перпендикулярній до цього напрямку. Це пов'язано з тим, що різні ділянки джерела світла в поперечній площині випромінюють неузгоджено – з випадково змінною фазою. Випадкові зміни різниці фаз коливань у двох точках цієї площини збільшуються з відстанню між ними. Відстань $\rho_{\text{ког}}$ між двома точками, що лежать у площині, перпендикулярній до напрямку поширення світла, у яких різниця фаз досягає значення приблизно π , називається **радіусом когерентності**. Якщо джерело світла має форму диска, діаметр якого бачимо з точки спостереження під кутом φ , то, як показують розрахунки,

$$\rho_{\text{ког}} \sim \lambda / \varphi,$$

де λ – довжина хвилі. Для сонячного світла радіус когерентності має значення приблизно 0,05 мм.

§ 50 Дослід Юнга. Ширина інтерференційних смуг

1 Томас Юнг уперше в 1803 році спостерігав явище інтерференції світла, вперше визначив довжину світлової хвилі. Схема досліду зображена на рисунку 50.1. Яскравий пучок світла від Сонця падав на екран із малою вузькою щілиною S . Світло від щілини S ішло до

другого екрана з двома вузькими щілинами S_1 і S_2 , були розміщені одна щодо іншої на відстані d . Перший екран з отвором S був призначений для збільшення радіуса когерентності. Завдяки цьому, щілини S_1 та S_2 можна було розмістити одна щодо іншої на відстані декількох міліметрів і світло від цих джерел залишалось когерентним. Джерела S_1 та S_2 випромінювали пучки когерентного світла, що перекривалися на екрані. На екрані в місці перекриття пучків спостерігалися паралельні інтерференційні смуги. Вимірявши ширину дифракційної смуги, Юнг зміг обчислити довжину світлової хвилі.

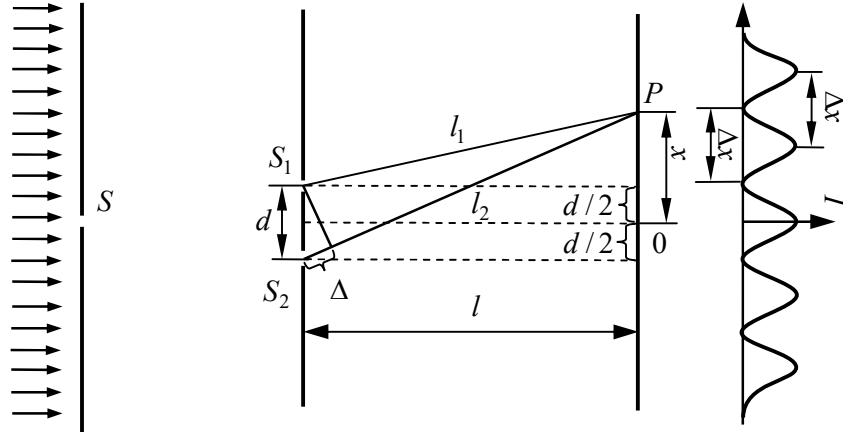


Рисунок 50.1 – Схема досліду Юнга

2 Обчислимо ширину інтерференційної смуги в досліді Юнга. Розглянемо дві циліндричні когерентні світлові хвилі, що виходять із джерел S_1 і S_2 , які мають вигляд паралельних тонких світних ниток або вузьких щілин (рис. 50.1). Область, у якій ці хвилі перекриваються, називається полем інтерференції. Якщо в поле інтерференції внести екран E , то на ньому буде спостерігатись інтерференційна картина, що має вигляд світлих і темних смуг, які чергуються між собою. Обчислимо координати цих смуг. Для цього припустимо, що екран є паралельним до площини, у якій лежать джерела S_1 та S_2 . Візьмемо на екрані координатну вісь X , паралельну до прямої, що проходить через S_1 та S_2 . Початок координат помістимо в точці O , відносно якої симетрично розміщені S_1 та S_2 . Джерела S_1 і S_2 випромінюють хвилі в однаковій фазі. Знайдемо різницю ходу світла Δ у точці спостереження P від цих джерел. Зрозуміло, що різниця ходу дорівнює

$$\Delta = nl_2 - nl_1, \quad (50.1)$$

де l_1 та l_2 – відстані від точки P до джерел S_1 і S_2 (див. рис. 50.1); n – показник заломлення середовища між джерелами й екраном E . Знайдемо $l_2 - l_1$ з урахуванням геометричних міркувань. Застосовуючи теорему Піфагора, можемо записати

$$l_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2, \quad l_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2. \quad (50.2)$$

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 + l_1)(l_2 - l_1) = 2xd. \quad (50.3)$$

Для одержання помітної інтерференційної картини відстань між джерелами повинна бути значно меншою за відстань l до екрана. Відстань x , у межах якої утворюються інтерференційні смуги, також повинна бути значно меншою за l . За таких умов можна припустити, що $l_2 + l_1 \approx 2l$. У цьому разі з (50.3) можемо записати $l_2 - l_1 = xd/l$. Помноживши $l_2 - l_1$ на показник заломлення середовища n , знайдемо оптичну різницю ходу

$$\Delta = n \frac{xd}{l}. \quad (50.4)$$

Підстановка цього значення Δ в умову інтерференційного максимуму

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

показує, що максимуми інтенсивності будуть спостерігатися за значень x , що дорівнюють

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (50.5)$$

де $\lambda = \lambda_0/n$ – довжина хвилі в середовищі, що заповнює простір між джерелами світла й екраном.

Відстань між двома сусідніми максимумами інтенсивності називають **відстанню між інтерференційними смугами**, а відстань між сусідніми мінімумами інтенсивності – **шириною інтерференційної смуги**. Нескладно з'ясувати, що відстань між смугами й ширина смуги мають однакове значення, що дорівнює, як це випливає з (50.5),

$$\Delta x = m \frac{l}{d} \lambda - (m-1) \frac{l}{d} \lambda = \frac{l}{d} \lambda. \quad (50.6)$$

Припустимо, що відстань між щілинами S_1 та S_2 становить $d = 1$ мм, а відстань $l = 1,5$ м. Вимірюючи експериментально $\Delta x = 0,93$ мм, можна знайти з (50.6), що довжина світла дорівнює $\lambda = 620$ нм. Таким способом Юнг уперше виміряв довжини світлових хвиль.

§ 51 Дзеркала Френеля. Ширина інтерференційних смуг

1 Розглянемо інтерференційну схему, у якій для розподіл світлової хвилі на дві частини використовують відбиття. Ця схема одержала назву **дзеркал Френеля**.

Два плоских дотичні дзеркала OM та ON розміщують так, що їх поверхні, які відбивають, утворюють кут, близький до π (рис. 51.1). Відповідно кут φ (див. рис. 51.1) дуже малий. Паралельно лінії перетинання дзеркал O на відстані r від неї розміщене прямолінійне джерело світла S (наприклад, вузька щілина, яка світиться). Дзеркала відбивають на екран E дві циліндричні когерентні хвилі, що поширюються так, ніби вони вийшли з уявних джерел S_1 і S_2 . Непрозорий екран E_1 знаходиться на шляху світла від джерела S до екрана E .

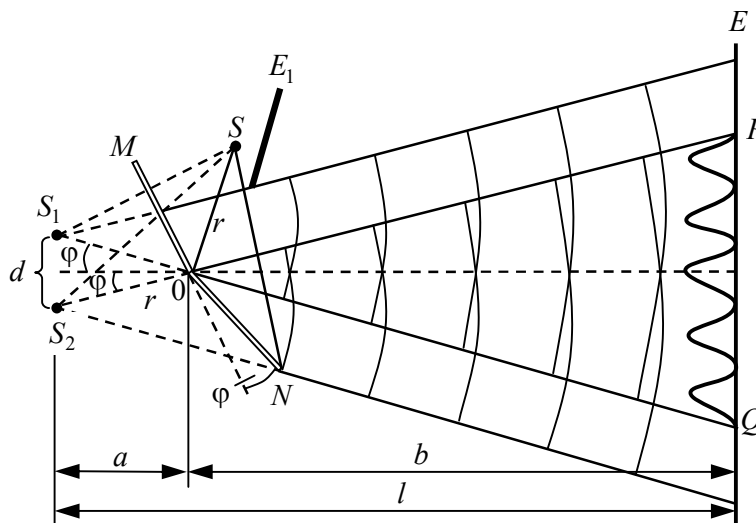


Рисунок 51.1 – Дзеркала Френеля. Інтерференція спостерігається в області OPQ , у якій відбиті хвилі накладаються одна на одну

Промінь OQ являє собою відбиття променя SO від дзеркала OM , промінь OP – відбиття променя SO від дзеркала ON . Кут між $\angle S_1SS_2$ дорівнює φ (як кути між

відповідними взаємно перпендикулярними прямими). Оскільки S та S_1 розміщені симетрично щодо дзеркала OM , довжина відрізка OS_1 дорівнює OS , тобто r . Аналогічні міркування приводять до того ж результату для відрізка OS_2 . Отже, відстані від точки O до точок S_1, S_2 і S дорівнюють r . Це означає, що ці точки лежать на колі радіусом r із центром у точці O . Отже, кут $\angle S_1SS_2$ є вписаним у коло радіусом r із центром у точці O і тому $\angle S_1SS_2 = \frac{1}{2}\angle S_1OS_2$. Відповідно до цього $\angle S_1OS_2 = 2\varphi$. Нескладно знайти відстань d між уявними джерелами S_1 та S_2 , використовуючи те, що $OS_1 = OS_2 = r$ і кут $\angle S_1OS_2 = 2\varphi$,

$$d = 2r \sin \varphi \approx 2r\varphi.$$

На рисунку 51.1 можна помітити, що $a = r \cos \varphi \approx r$. Отже, відстань l між уявними когерентними джерелами та екраном E буде дорівнювати

$$l = a + b \approx r + b,$$

де b – відстань від лінії перетину дзеркал O до екрана E .

Підстановка знайдених значень d і l у формулу для ширини інтерференційної смуги в досліді Юнга дає ширину інтерференційної смуги в разі дзеркал Френеля:

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda = \frac{r+b}{2r\varphi} \lambda. \quad (51.1)$$

§ 52 Інтерференція світла в разі відбиття від тонких плівок. Різниця ходу променів. Смуги рівного нахилу. Смуги рівної товщини

1 Під час падіння світлової хвилі на тонку прозору пластинку (або плівку) відбувається відбиття від її обох поверхонь. У результаті виникають дві світлові хвилі, що за певних умов можуть інтерферувати між собою.

Нехай на прозору плоскопаралельну пластинку падає плоска світлова хвиля, що можна розглядати як паралельний пучок променів (рис. 52.1). Пластинка відбиває вгору два паралельних пучки світла, один із яких утворився в результаті відбиття від верхньої поверхні пластинки, другий – у результаті відбиття від нижньої поверхні (на рисунку 52.1 кожний із цих пучків зображений лише одним променем). Під час входу в пластинку й виходу з неї другий пучок заломлюється. Крім цих двох пучків, пластинка відбиває вгору пучки, що виникають у результаті три-, п'яти- і т. д. кратного відбиття від поверхонь пластинки. Проте через їх малу інтенсивність ми не будемо брати їх до уваги. Не будемо також цікавитися пучками, що пройшли через пластинку.

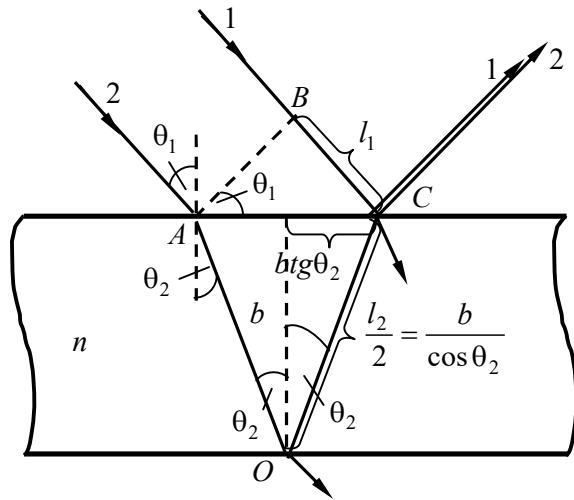


Рисунок 52.1 – Інтерференція в тонкій плівці

Різниця ходу, одержувана променями 1 і 2 до того, як вони зійдуться в точці C , дорівнює

$$\Delta = nl_2 - l_1, \quad (52.1)$$

де l_1 – довжина відрізка BC ; l_2 – сумарна довжина відрізків AO та OC ; n – показник заломлення пластинки. Показник заломлення середовища, що оточує пластинку, беремо

таким, що дорівнює одиниці. З рисунка 52.1 можна зробити висновок, що $l_1 = 2b \cdot \operatorname{tg}\theta_2 \sin \theta_1$, $l_2 = 2b / \cos \theta_2$ (b – товщина пластинки). Підстановка цих значень у вираз (52.1) дає, що

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos \theta_2} - 2b \cdot \operatorname{tg}\theta_2 \sin \theta_1 = 2b \frac{n^2 - n \sin \theta_2 \sin \theta_1}{n \cos \theta_2}.$$

Використавши закон заломлення $n \sin \theta_2 = \sin \theta_1$ і врахувавши, що

$$n \cos \theta_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \theta_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1},$$

легко привести формулу для Δ до вигляду

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}. \quad (52.2)$$

Під час обчислення різниці фаз δ між коливаннями в променях 1 і 2 потрібно, крім оптичної різниці ходу Δ , врахувати можливість зміни фази хвилі в разі відбиття. У точці C (див. рис. 52.1) відбиття проходить від оптично більш густого середовища. Тому фаза хвилі 1 змінюється на π . У точці O відбиття проходить від менш густого середовища, тому стрибка фази не відбувається. У результаті між променями 1 і 2 виникає додаткова різниця фаз, що дорівнює π . Її можна врахувати, додавши до Δ (або віднявши від неї) половину довжини хвилі у вакуумі. У результаті одержимо **різницю ходу променів, що інтерферують у плівці**:

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \lambda_0 / 2. \quad (52.3)$$

За $\Delta = m\lambda_0$ знаходимо інтерференційні максимуми, за $\Delta = (m + 1/2)\lambda_0$ – інтерференційні мінімуми (m – ціле число). Умова максимуму:

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} = (m + 1/2)\lambda_0. \quad (52.4)$$

Рівність (52.3) виражає умову максимуму інтерференції світла від тонкої прозорої пластинки або плівки.

2 Нескладно зрозуміти, що, коли товщина b і кут падіння θ_1 скрізь однакові, в усіх точках на поверхні пластинки може виникати максимум інтерференції для світла певної однієї довжини хвилі λ ; інакше кажучи, в разі освітлення пластинки білим світлом вона матиме один колір. Можливі інші випадки.

*Коли кут падіння θ_1 скрізь однаковий, а товщина пластинки різна, тоді максимум інтерференції світла довжини хвилі λ_1 буде в точках, що відповідають товщині пластинки d_1 , а максимум для хвилі λ_2 – у точках, що відповідають товщині d_2 і т. д. У результаті інтерференції на пластинці утворюються кольорові смуги, що позначатимуть місця однакової товщини пластинки або плівки, їх називають **смугами однакової товщини**. Такі кольорові смуги можна спостерігати на дорогах після дощу, де розлите мастило чи пальне, плоскій мильній плівці тощо.*

*Може бути, що кут падіння θ_1 у різних точках набирає різних значень (наприклад, у разі освітлення пластинки точковим джерелом світла), а товщина пластинки d водночас залишається незмінною. з огляду на це максимум для хвиль λ_1 виникатиме в точках, у яких кут падіння θ_1 , а для хвиль λ_2 – у яких кут падіння θ_2 і т. д. У результаті інтерференції на пластинці утворюються кольорові смуги, що позначатимуть місця однакового нахилу світлових променів; їх називають **смугами однакового нахилу**.*

§ 53 Кільця Ньютона. Радіуси темних і світлих кілець

1 Класичним прикладом смуг однакової товщини є **кільця Ньютона** (див. рис. 53.1). Вони спостерігаються під час відбивання світла від системи, що складається з дотичних

товстої плоскопаралельної пластинки й плоскоопуклої лінзи з великим радіусом кривизни (рис. 53.2). Роль тонкої плівки, від поверхонь якої відбиваються когерентні хвилі, відіграє повітряний зазор між пластинкою й лінзою (внаслідок великої товщини пластинки й лінзи інтерференційні смуги, відбиваючись від інших поверхонь, не виникають). Під час нормального падіння світла на поверхню пластини кільця Ньютона мають вигляд концентричних кіл (див. рис. 53.1).

З'ясуємо більш детально, яким чином виникають кільця Ньютона. Розглянемо промінь *I* (див. рис. 53.2), який падає на межу плоскоопукла лінза – повітря (точка *A*). У цьому разі частина променя відбивається (промінь *2*), а частина проходить далі й відбивається (промінь *3*) від межі повітря – плоскоопукла пластинка (точка *B*). Промені *2* і *3* є когерентними, тому що створені з одного й того самого променя *I*, інтерферують між собою та формують частину інтерференційної картини, яку називають кільцями Ньютона.

Визначимо різницю ходу променів *3* і *2*. Через те що кут повітряного клину (зазору) між пластинкою й лінзою дуже малий, промені *1*, *2* і *3* можна вважати паралельними, падіння – перпендикулярним, повітряний зазор – плоским. З огляду на це оптична різниця ходу променів *2* та *3* буде дорівнювати

$$\Delta = 2 \cdot b \cdot 1 + \lambda_0 / 2, \quad (53.1)$$

де товщина зазору $b = |AB|$, показник заломлення в зазорі $n = 1$. Також у разі відбиття від плоскопаралельної пластини в точці *B* (відбиття від оптично більш щільного середовища) фаза коливання світлового вектора змінюється на π . Це враховано способом додавання (віднімання) половини довжини хвилі світла у вакуумі до оптичної різниці ходу.

Якщо ця різниця ходу буде задовольняти умову максимуму

$$\Delta = m\lambda_0, \quad (53.2)$$

то промені *2* і *3* формуватимуть світлу частину кільця Ньютона. Якщо ця різниця ходу буде задовольняти умову мінімуму

$$\Delta = m\lambda_0 + \lambda_0 / 2, \quad (53.3)$$

то промені *2* та *3* формуватимуть темну частину кільця Ньютона.

Знайдемо радіуси r кілець Ньютона (див. рис. 53.1), що виникають у разі падіння світла перпендикулярно до пластини. З рисунка 53.2 випливає, що

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rb + r^2, \quad (53.4)$$

де R – радіус кривизни лінзи; r – радіус кола, усім точкам якого відповідає однакова товщина зазору b . Оскільки b є малою порівняно з R , ми знехтували b^2 порівняно з $2Rb$. Відповідно до (53.4) $b = r^2 / 2R$. Зважаючи на це, з (53.1) одержуємо

$$\Delta = r^2 / R + \lambda_0 / 2. \quad (53.5)$$

Підставивши це значення в умову максимуму (53.2), знаходимо умову

$$r^2 / R = (m - 1/2)\lambda_0, \text{ або } r = \sqrt{R\lambda_0(2m - 1)/2} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (53.6)$$

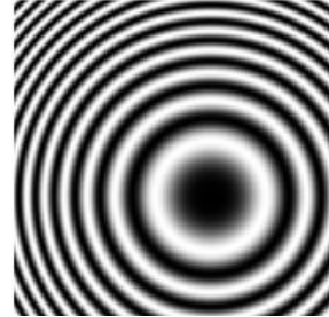


Рисунок 53.1 – Кільця Ньютона

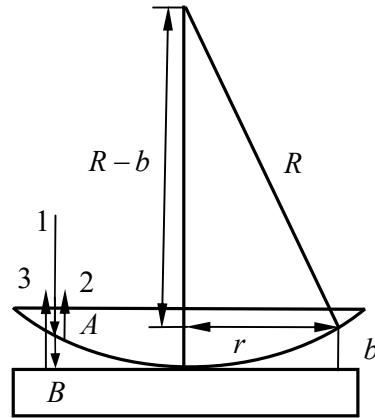


Рисунок 53.2 – Кільця Ньютона виникають у результаті накладення хвиль, відбитих від сферичної поверхні лінзи й верхньої поверхні плоскої скляної пластинки

для *світлич кілець*. Підставивши значення (53.5) в умову мінімуму (53.3), одержимо

$$r^2 / R = m\lambda_0, \text{ або } r = \sqrt{R\lambda_0 2m / 2}, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (53.7)$$

для *темних кілець*. Обидві умови (53.6) та (53.7) можна об'єднати в одну:

$$r = \sqrt{R\lambda_0 m' / 2}, \quad (m' = 1, 2, \dots). \quad (53.8)$$

Непарні m' відповідають радіусам світлич кілець, парні – радіусам темних. Значенню $m' = 0$ відповідає $r = 0$, тобто точка в місці дотику пластинки й лінзи. У цій точці спостерігається мінімум інтенсивності, який обумовлений зміною фази на π під час відбивання світлової хвилі від пластинки (див. рис. 53.1).

ТЕМА 8 ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

§ 54 Принцип Гюйгенса – Френеля

1 Дифракцією називається сукупність явищ, які спостерігаються в разі поширення світла у середовищі з різкими неоднорідностями (поблизу границь тіл, крізь малі отвори тощо) і пов'язані з відхиленнями від законів геометричної оптики. Дифракція, зокрема, приводить до огинання світловими хвилями перешкод та проникнення світла в область геометричної тіні.

Розрізняють два види дифракції.

Якщо джерело світла S і точка спостереження P розміщені від перешкоди настільки далеко, що промені, які падають на перешкоду, та промені, які йдуть у точку P , утворюють майже паралельні пучки, то говорять про **дифракцію в паралельних променях**, або **дифракцію Фраунгофера**. В іншому разі мова йде про **дифракцію Френеля**. Дифракцію Фраунгофера можна спостерігати, помістивши за джерелом світла S і перед точкою спостереження P лінзи так, щоб точки S й P знаходились у фокальній площині відповідної лінзи (рис. 54.1).

Дифракцію можна пояснити **принципом Гюйгенса – Френеля**: кожний елемент хвильової поверхні S (рис. 54.2) є джерелом вторинної сферичної хвилі, амплітуда якої пропорційна площі елемента dS ; результуюче коливання в довільній точці P є суперпозицією, інтерференцією сферичних хвиль вторинних джерел усієї хвильової поверхні S .

Запишемо аналітичний вираз принципу Гюйгенса – Френеля. Для цього згадаємо, що амплітуда сферичної хвилі зменшується з відстанню r від джерела за законом $1/r$. Отже, від кожного елемента dS хвильової поверхні в точку P , що лежить перед цією поверхнею, надходить коливання

$$dE = K(\varphi) \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (54.1)$$

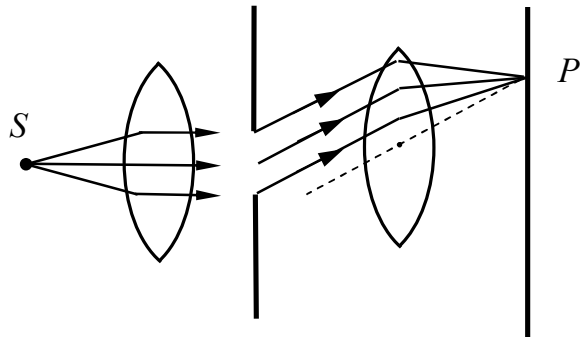


Рисунок 54.1 – Схема спостереження дифракції в паралельних променях

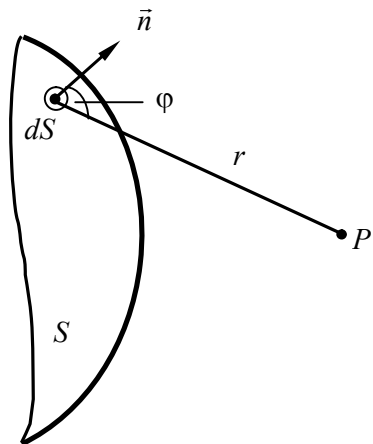


Рисунок 54.2 – До знаходження амплітуди коливання в точці P , що збуджується елементом хвильової поверхні dS

У цьому виразі $(\omega t + \alpha)$ – фаза коливання в місці розміщення хвильової поверхні S ; k – хвильове число; r – відстань від елемента поверхні dS до точки P . Множник A визначається амплітудою світлового коливання в тому місці, у якому знаходиться dS . Коефіцієнт $K(\varphi)$ залежить від кута φ між нормаллю \vec{n} до площини dS і напрямком від dS до точки P . За $\varphi = 0$ цей коефіцієнт максимальний, за $\varphi = \pi/2$ він перетворюється на нуль. Відповідно до принципу Гюйгенса – Френеля результуюче коливання в точці P є суперпозицію коливань (54.1), узятих для всієї хвильової поверхні S :

$$E = \int_S K(\varphi) \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS. \quad (54.2)$$

Ця формула є аналітичним виразом принципу Гюйгенса – Френеля.

Отже, між інтерференцією й дифракцією немає істотної фізичної різниці. Обидва явища полягають у перерозподілі світлового потоку в результаті суперпозиції хвиль. Через історичні причини перерозподіл інтенсивності в результаті суперпозиції хвиль, які збуджуються скінченим числом дискретних когерентних джерел, називають інтерференцією хвиль. Перерозподіл інтенсивності в результаті суперпозиції хвиль, які збуджуються когерентними неперервно розміщеними джерелами, називають дифракцією хвиль. Тому говорять, наприклад, про інтерференційну картину від двох вузьких щілин і дифракційну картину від однієї щілини.

§ 55 Метод зон Френеля. Радіус зони Френеля. Амплітуда коливань світлової хвилі від точкового ізотропного джерела

1 Обчислення явищ дифракції із застосуванням принципу Гюйгенса – Френеля з математичної точки зору загалом є дуже важким завданням. Проте, як довів Френель, за умов, що характеризуються симетрією, знаходження амплітуди результуючого коливання може бути виконано простим алгебраїчним або геометричним підсумовуванням.

Щоб зрозуміти сутність методу, розробленого Френелем (методу зон Френеля), визначимо амплітуду світлового коливання, яке збуджується в точці P сферичною хвилею, що поширюється в однорідному й ізотропному середовищі із точкового джерела S (рис. 55.1). Хвильові поверхні такої хвилі симетричні щодо прямої SP . Скориставшись цим, поділимо зображену на

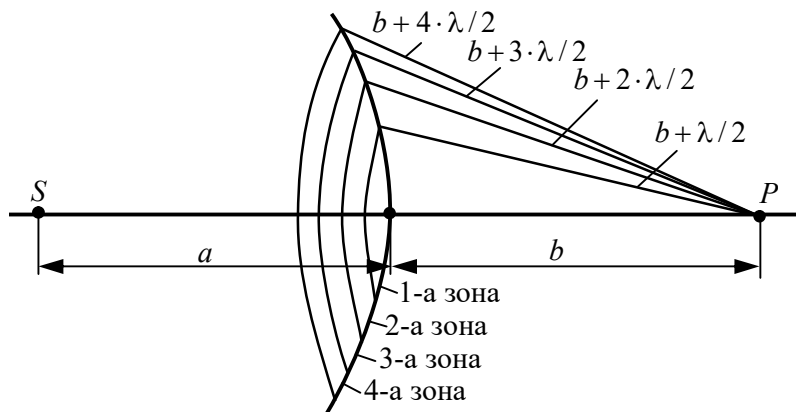


Рисунок 55.1 – Розбивання сферичного хвильового фронту на зони Френеля

рисунку хвильову поверхню на кільцеві зони, побудовані так, що відстані від країв кожної зони до точки P відрізняються на $\lambda/2$ (λ – довжина хвилі в тому середовищі, у якому поширюється хвиля). Зони, що мають таку властивість, називаються **зонами Френеля**.

2 З рисунка 55.1 випливає, що відстань b_m від зовнішнього краю m -ї зони до точки P дорівнює

$$b_m = b + m \frac{\lambda}{2}, \quad (55.1)$$

де b – відстань від вершини хвильової поверхні до точки P .

Коливання, що надходять у точку P від аналогічних точок двох сусідніх зон (тобто точок, що лежать усередині зон або біля їх зовнішніх країв зон тощо), перебувають у протилежних фазах. Тому *результуючі коливання, створювані кожною із зон загалом, будуть відрізнятися за фазою на π для сусідніх зон.*

3 Обчислимо площу й радіус зон Френеля.

Зовнішня границя m -ї зони виділяє на хвильовій поверхні сферичний сегмент висоти h_m (рис. 55.2). Позначимо площу цього сегмента через S_m . Завдяки цьому площу m -ї зони можна подати у вигляді

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1},$$

де S_{m-1} – площа сферичного сегмента, виділеного зовнішньою границею $(m-1)$ -ї зони.

З рисунка 55.2 випливає, що

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2,$$

де a – радіус хвильової поверхні; r_m – радіус зовнішньої межі m -ї зони. Підвівши вирази в дужках до квадрата, одержимо

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2 - 2bh_m - h_m^2. \quad (55.2)$$

Відповідно до цього

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2}{2(a+b)}. \quad (55.3)$$

Обмежившись розглядом не занадто великих m , оскільки довжина хвилі λ є малою величиною, можна знехтувати доданками, що містять λ^2 . У цьому наближенні

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \quad (55.4)$$

Площа сферичного сегмента дорівнює $2\pi Rh$ (R – радіус сфери; h – висота сегмента). Отже,

$$S_m = 2\pi ah_m = \frac{\pi ab}{a+b} m\lambda,$$

а площа m -ї зони

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b} [m - (m-1)] = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Одержаний вираз не залежить від m . Це означає, що за не занадто великих m площі зон Френеля приблизно однакові.

З рівності (55.2) можна знайти радіуси зон. За не занадто великих m висота сегмента $h_m \ll a$. Тому можна вважати, що $r_m^2 = 2ah_m$. Підставивши значення (55.4) для h_m , для **радіуса зовнішньої межі m -ї зони Френеля** одержимо вираз

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}. \quad (55.5)$$

Якщо взяти $a = b = 1$ м і $\lambda = 500$ нм, то для радіуса першої (центральної) зони одержимо значення $r_1 = 0,5$ мм. Радіуси наступних зон зростають як \sqrt{m} .

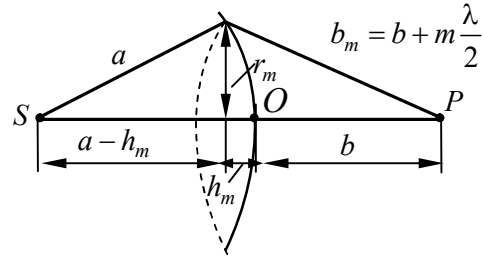


Рисунок 55.2 – До обчислення площі зон Френеля

4 Знайдемо амплітуду результуючого коливання в точці P , що збуджується сферичною хвилею. Згідно з принципом Гюйгенса – Френеля амплітуда коливань dE , що збуджується елементом хвильової поверхні dS , який знаходиться на відстані r від точки спостереження, визначають за співвідношенням

$$dE = K(\varphi) \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (55.6)$$

Ми з'ясували, що площі зон Френеля приблизно однакові. Відстань b_m від зони до точки P повільно зростає з номером зони m (величині b_m у (55.6) відповідає r). Кут φ між нормаллю до елементів зони й напрямком до точки P також зростає з m . Усе це приводить до того, що амплітуда A_m коливання, яке збуджується m -ю зоною в точці P , відповідно до (55.6) монотонно зменшується зі зростанням m . Навіть за дуже великих m , коли площа зони починає помітно зростати з m (див. (55.3)), зменшення множника $K(\varphi)$ переважає зростання ΔS_m , тому A_m продовжує зменшуватися. Отже, амплітуди коливань, що збуджуються в точці P зонами Френеля, утворюють послідовність, яка монотонно зменшується:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$$

Фази коливань, що збуджуються сусідніми зонами, як ми з'ясували вище, відрізняються на π . Тому амплітуда A результуючого коливання в точці P може бути подана у вигляді

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$$

У цей вираз усі амплітуди від непарних зон входять з одним знаком, а від парних – з іншим. Запишемо цей вираз таким чином:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (55.7)$$

З огляду на монотонне зменшення A_m можна вважати, що

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Відповідно до цього вирази в дужках (55.7) будуть дорівнювати нулю, а формулу (55.7) можемо спростити:

$$\boxed{A = \frac{A_1}{2}}. \quad (55.8)$$

Згідно з (55.8) амплітуда, створювана в певній точці P усією сферичною хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди, що створює лише одна центральна зона. Якщо на шляху хвилі поставити непрозорий екран з отвором, що залишає відкритою лише центральну зону Френеля, амплітуда в точці P буде дорівнювати A_1 , тобто удвічі перевищить амплітуду (55.8). Відповідно інтенсивність світла в точці P у цьому разі вчетверо буде більшою, ніж за умови відсутності перешкоди між точками S та P .

5 Розв'яжемо задачу про поширення світла від джерела S до точки P методом графічного додавання амплітуд. Поділимо хвильову поверхню на кільцеві зони, аналогічні зонам Френеля, але набагато менші за шириною (різниця ходу від країв зони до точки P становить однакову для всіх зон малу частину λ). Коливання, створювані в точці P такою зоною, зобразимо у вигляді вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а кут, утворений таким вектором із напрямком, узятим за початок відліку, буде дорівнювати початковій фазі коливання (застосуємо метод векторних діаграм). Амплітуда коливань, створюваних такими зонами в точці P , повільно зменшується з переходом від зони до зони. Кожне наступне коливання відстає від попереднього за фазою на одну й ту саму величину.

Отже, векторна діаграма, яку ми одержуємо в результаті додавання коливань, збуджуваних окремими зонами, має вигляд, зображений на рисунку 55.3.

Якби амплітуди, створювані окремими зонами, були однаковими, кінець останнього із зображених на рисунку 55.3 векторів збігся б із початком першого вектора. У дійсності значення амплітуди, хоча й дуже слабко, але зменшується, унаслідок чого вектори утворюють не замкнену фігуру, а ламану спіралеподібну лінію.

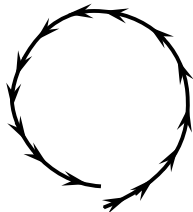


Рисунок 55.3 – Векторна діаграма для знаходження коливань, збуджуваних елементами першої й другої зон Френеля

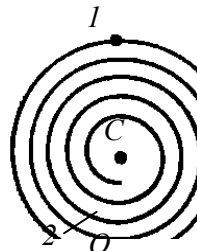


Рисунок 55.4 – Векторна діаграма для знаходження коливань, збуджуваних усіма зонами Френеля

У границі в разі прямування ширини кільцевих зон до нуля (їх кількість водночас буде необмежено зростати) векторна діаграма набире вигляду спіралі, що закручується до точки C (рис. 55.4). Фази коливань у точках O і I відрізняються на π (нескінченно малі вектори, що утворюють спіраль, напрямлені в цих точках у протилежні боки). Отже, ділянка спіралі $O-I$ відповідає першій зоні Френеля. Вектор, проведений із точки O в точку I (рис. 55.5 а), зображує коливання, збуджуване в точці P цією зоною. Аналогічно вектор, проведений із точки I у точку 2 (рис. 55.5б), зображує коливання, збуджуване другою зоною Френеля. Коливання від першої й другої зон перебувають у протилежних фазах; відповідно до цього вектори $O1$ і $I2$ напрямлені в протилежні сторони.

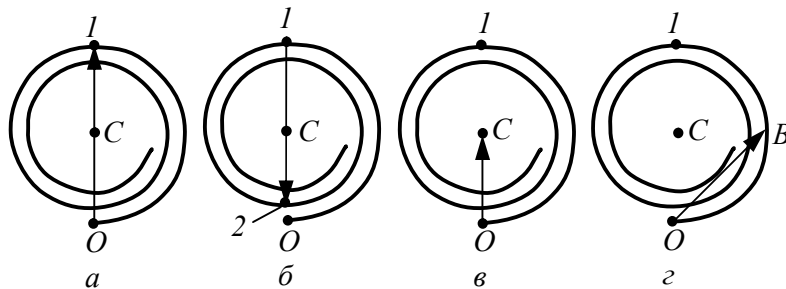


Рисунок 55.5 – Векторна діаграма для знаходження амплітуди в центрі дифракційної картини на круглому отворі

Коливання, збуджуване в точці P усією хвильовою поверхнею, зображене вектором OC (рис. 55.5 в). З рисунка випливає, що амплітуда в цьому разі дорівнює половині амплітуди, що створює перша зона. Цей результат ми раніше одержали алгебраїчно (див. формулу (55.8)). Значимо, що коливання, збуджувані внутрішньою половиною першої зони Френеля, зображено вектором OB (рис. 55.5 г). Отже, дія внутрішньої половини першої зони Френеля не еквівалентна половині дії першої зони. Вектор OB у $\sqrt{2}$ разів більший за вектор OC . Отже, інтенсивність світла, створювана внутрішньою половиною першої зони Френеля, удвічі перевищує інтенсивність, створювану всією хвильовою поверхнею.

§ 56 Дифракція Френеля на круглому отворі. Амплітуда світлового вектора в центрі дифракційної картини. Характер дифракційної картини

1 Розмістимо на шляху сферичної світлової хвилі непрозорий екран із вирізаним у ньому круглим отвором радіусом R , розмістивши його так, щоб перпендикуляр, опущений із джерела світла S , потрапив у центр отвору (рис. 56.1). На продовженні цього перпендикуляра візьмемо точку P . За радіуса отвору R , значно меншого за зазначені на рисунку довжини a й b , довжину a можна вважати такою, що дорівнює відстані від джерела S до перешкоди, а довжину b – відстані від перешкоди до точки P . Якщо відстані a та b задовольняють співвідношення

$$R = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda, \quad (56.1)$$

де m – ціле число, то отвір залишить відкритими рівно m перших зон Френеля, побудованих для точки P (див. формулу для радіуса зони Френеля). Отже, число відкритих зон Френеля визначають за виразом

$$m = \frac{R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (56.2)$$

З огляду на це амплітуда в точці P буде дорівнювати

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m. \quad (56.3)$$

Перед A_m беруть знак плюс, якщо m непарне, і мінус, якщо парне. Зобразимо (56.3) у такому вигляді

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \frac{A_m}{2} \quad (m \text{ непарне}),$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m \text{ парне}).$$

Амплітуди сусідніх зон майже однакові. Тому вирази в дужках можна вважати такими, що дорівнюють нулю. У результаті цього одержимо:

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \quad (m \text{ непарне}),$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m \text{ парне}).$$

Амплітуди від двох сусідніх зон майже однакові. Тому $(A_{m-1}/2) - A_m$ можна замінити на $(-A_m/2)$. У результаті знайдемо

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2} = \frac{A_1}{2} - (-1)^m \frac{A_m}{2}, \quad (56.4)$$

де знак плюс береться для непарних, а мінус – для парних m . Отже, формула (56.4) визначає амплітуду в точці спостереження P для випадку, коли отвором відкрито ціле число зон Френеля.

Для малих m амплітуда A_m мало відрізняється від A_1 . Отже, за непарних m амплітуда в точці P буде приблизно дорівнювати A_1 , за парних m – нулю.

Якщо прибрати перешкоду, амплітуда в точці P буде, як відомо, дорівнювати $A_1/2$. Отже, перешкода з отвором, що відкриває невелике непарне число зон Френеля, не лише не послабляє освітленість у точці P , а й, навпаки, приводить до збільшення амплітуди майже вдвічі, а інтенсивності – майже вчетверо.

2 З'ясуємо характер дифракційної картини, що буде спостерігатися на екрані, поміщеному за перешкодою (див. рис. 56.1). З огляду на симетричне розміщення отвору щодо прямої SP освітленість у різних точках екрана буде залежати лише від відстані r до точки P . У самій цій точці інтенсивність досягатиме максимуму або мінімуму залежно від того, яким – парним або непарним – є число відкритих зон Френеля. Нехай, наприклад, це число дорівнює трьом. Тоді в центрі дифракційної картини буде максимум інтенсивності. Картина зон Френеля для точки P подана на рисунку 56.2 а. Тепер змістимося по екрану в точку P' . Обмежена краями отвору картина зон Френеля для точки P' буде мати вигляд, зображений на рисунку 56.2 б. Краї отвору закриють частину 3-ї зони, одночасно частково відкриється 4-та зона. У результаті інтенсивність світла зменшиться й за деякого положення точки P' досягне мінімуму. Якщо змістимося по екрану в точку P'' , краї отвору частково закриють не лише 3-тю, а й 2-гу зони Френеля, одночасно частково відкриється 5-та зона (рис. 56.2 в). У результаті вплив відкритих ділянок непарних зон переважатиме вплив відкритих ділянок парних зон та інтенсивність досягне максимуму, щоправда, більш слабкого, ніж максимум, що спостерігається в точці P .

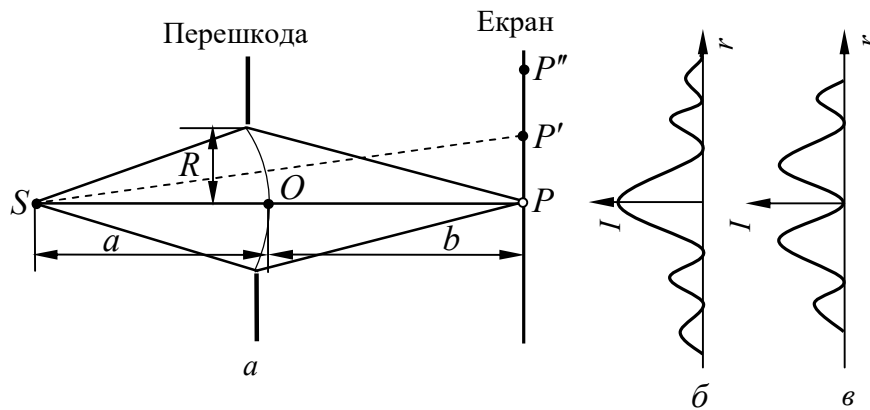


Рисунок 56.1 – Схема дифракції на круглому отворі (а) й графіки інтенсивності за непарного (б) і парного (в) чисел відкритих зон Френеля

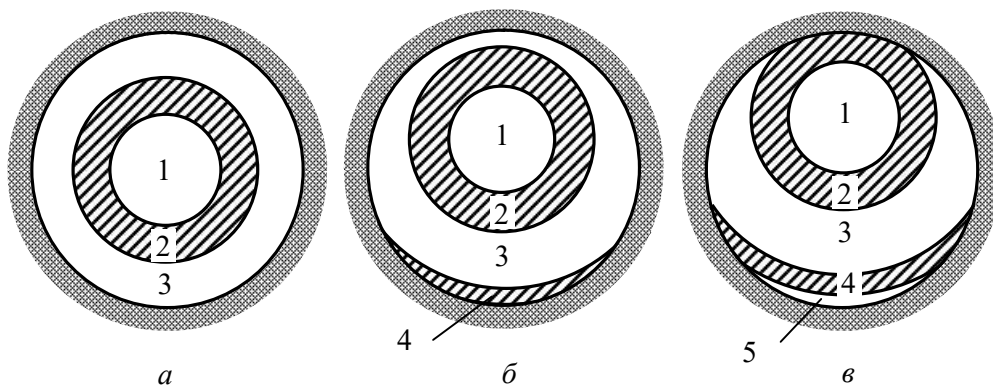
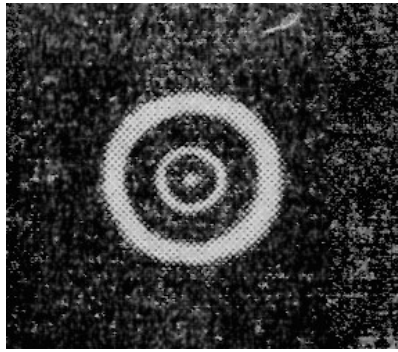


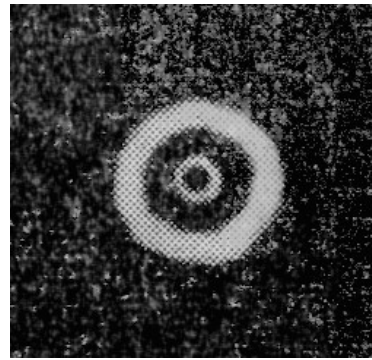
Рисунок 56.2 – Картина відкритих зон Френеля для точок $P(a)$, $P'(б)$ і $P''(в)$
Точки P , P' та P'' ті самі, що й на рисунку 56.1

Отже, дифракційна картина від круглого отвору має вигляд світлих і темних концентричних кілець. У центрі картини буде або світла (m непарне), або темна (m парне) пляма (рис. 56.3). Зміна інтенсивності I від відстані r від центра картини зображена на рисунку 56.1. У разі переміщення екрана паралельно самому собі вздовж прямої SP картини

зображення на рисунку 56.3 будуть змінювати одна одну (згідно з (56.2) зі зміною b значення m стають то непарними, то парними).



Непарне m



Парне m

Рисунок 56.3 – Картина, одержана під час дифракції на круглому отворі

Якщо отвір відкриває лише частину центральної зони Френеля, на екрані одержуємо розмиту світлу пляму; чергування світлих і темних кілець у цьому разі не виникає. Якщо отвір відкриває велику кількість зон, чергування світлих та темних кілець спостерігається лише в дуже вузькій області на межі геометричної тіні; усередині цієї області освітленість виявляється майже рівномірною.

§ 57 Дифракція Френеля на круглому диску. Амплітуда світлового вектора в центрі дифракційної картини. Характер дифракційної картини

1 Помістимо між джерелом світла S і точкою P непрозорий диск радіусом R (див. рис. 57.1). Якщо диск закрийє m перших зон Френеля, амплітуда в точці P буде дорівнювати

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots$$

Амплітуди сусідніх зон майже однакові. Тому вирази в дужках можна вважати такими, що дорівнюють нулю. Отже, в центрі дифракційної картини завжди буде максимум

$$A = A_{m+1}/2. \quad (57.1)$$

2 З'ясуємо характер картини, одержуваної на екрані. Очевидно, що освітленість може залежати лише від відстані r до точки P (рис. 57.1). За невеликого числа закритих зон амплітуда A_{m+1} мало відрізняється від A_1 . Тому інтенсивність у точці S буде майже такою самою, як за умови відсутності перешкоди між джерелом S і точкою P . Для точки P' , зміщеної щодо точки P у будь-якому радіальному напрямку, диск буде перекривати частину $(m+1)$ -ї зони Френеля, одночасно відкриється частина m -ї зони. Це приведе до зменшення інтенсивності. За деякого положення точки P' інтенсивність досягає мінімуму. Якщо зміститися від центра картини ще далі, диск додатково перекрийє частину $(m+2)$ -ї зони, одночасно відкриється частина $(m-1)$ -ї зони. У результаті інтенсивність зростатиме й у точці P'' досягне максимуму.

Отже, у разі непрозорого диска дифракційна картина має вигляд світлих і темних концентричних кілець, що чергуються. У центрі дифракційної картини знаходиться світла пляма (рис. 57.2). Зміна інтенсивності світла I залежно від відстані r від центра картини зображена на рисунку 57.1 б.

Якщо диск закрийє лише невелику частину центральної зони Френеля, він зовсім не відкидає тіні – освітленість екрана всюди залишається такою самою, як і за умови

відсутності перешкоди. Якщо диск закриває багато зон Френеля, чергування світлих та темних кілець спостерігається лише у вузькій області на межі геометричної тіні. У цьому разі $A_{m+1} \ll A_1$, світла пляма в центрі відсутня, і освітленість в області геометричної тіні майже всюди дорівнює нулю.

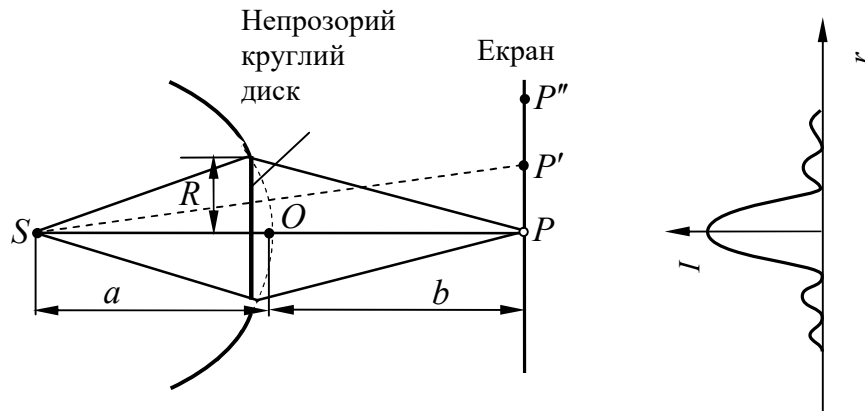


Рисунок 57.1 – Схема одержання дифракції на диску (а) й графік інтенсивності (б)

3 Світла пляма в центрі тіні, відкиненої диском, стала причиною інциденту, який відбувся між Пуассоном і Френелем. Паризька академія наук запропонувала дифракцію світла як тему для одержання премії за 1818 р. Засновники конкурсу були прихильниками корпускулярної теорії світла й розраховували, що конкурсні роботи принесуть остаточну перемогу їх теорії. Проте Френелем була подана праця, у якій усі відомі на той час оптичні явища пояснювалися з точки зору хвильової теорії. Розглядаючи її, Пуассон, який був членом конкурсної комісії, звернув увагу на те, що з теорії Френеля випливає «безглуздий» висновок: у центрі тіні від невеликого диска повинна знаходитися світла пляма. Араго відразу зробив дослід і з'ясував, що така пляма дійсно існує. Це принесло перемогу й загальне визнання хвильової теорії світла.

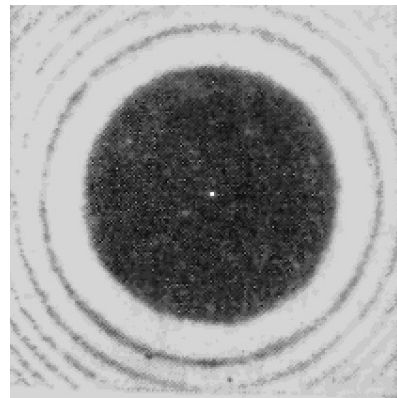


Рисунок 57.2 – Картина дифракції на диску

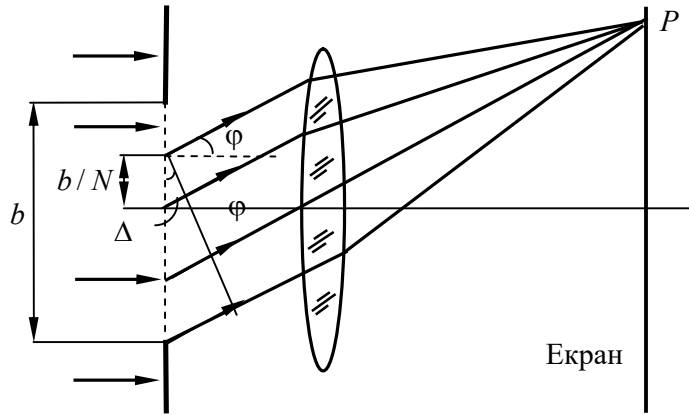
§ 58 Дифракція Фраунгофера на щілині. Амплітуда й інтенсивність світла, максимуми та мінімуми

1 Розглянемо дифракцію Фраунгофера на щілині (дифракцією Фраунгофера називають дифракцію в паралельних променях). Візьмемо дуже довгу вузьку прямокутну щілину шириною b , на яку падає нормально плоска світлова хвиля (рис. 58.1). Помістимо за щілиною збиральну лінзу, а у фокальній площині лінзи – екран. Хвильові поверхні падаючої хвилі, площина щілини й екран паралельні один одному. Відповідно до принципу Гюйгенса – Френеля елементарні ділянки відкритої частини хвильової поверхні є джерелами вторинних хвиль, а світлове поле за щілиною знаходиться як результат інтерференції цих когерентних вторинних хвиль. Знайдемо, використовуючи принцип Гюйгенса – Френеля, амплітуду й інтенсивність світла на екрані як функцію кута відхилення від прямолінійного напрямку поширення φ .

Поділимо відкриту частину хвильової поверхні на N однакових паралельних краям щілини елементарних зон шириною b/N . Кожна однакова зона створює в точці P (рис. 88.1) коливання з однаковими амплітудами, обернено пропорційними числу зон N :

$$\Delta A = A_0 / N \quad (58.1)$$

(зміст коефіцієнта A_0 з'ясовано нижче). Лінза збирає у фокальній площині плоскі хвилі від елементарних зон, що інтерферують між собою. Різницю ходу для двох сусідніх зон, відстань між якими b/N , знаходимо з рисунка 58.1: $\Delta = (b/N)\sin\varphi$. Відповідна різниця фаз коливань, збуджуваних у точці P сусідніми зонами, дорівнює



$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi b \sin\varphi}{\lambda N} \quad (58.2)$$

Рисунок 58.1 – Схема спостереження дифракції Фраунгофера на щілині

Отже, у точці P інтерферують N хвиль з однаковою амплітудою A_0/N , що мають зміщення за фазою одна щодо одної на кут δ . У цьому разі результуюче коливання визначатимуть за сумою коливань, що створюють N елементарних зон:

$$A_\varphi \cos(\omega t + \alpha) = \Delta A \cos(\omega t) + \Delta A \cos(\omega t + \delta) + \dots + \Delta A \cos(\omega t + (N-1)\delta). \quad (58.3)$$

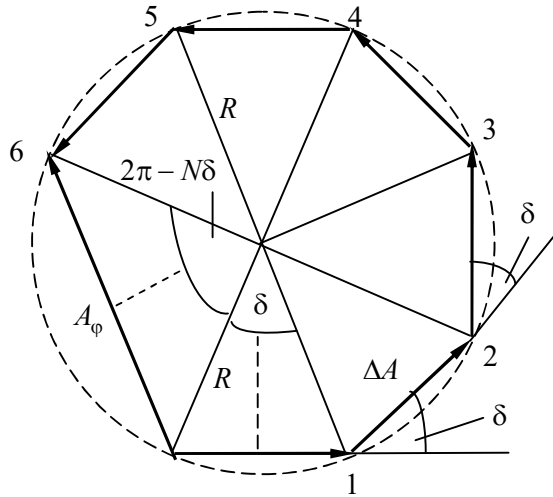


Рисунок 58.2 – Векторна діаграма для визначення амплітуди A_φ суми N коливань з однаковою амплітудою ΔA , зміщених за фазою одна щодо одної на кут δ . Рисунок виконаний для $N = 6$

2 Знайдемо амплітуду результуючого коливання A_φ (58.3), застосовуючи метод векторних діаграм (рис. 58.2). Згідно з методом векторних діаграм кожне коливання зображують вектором, модуль якого дорівнює амплітуді коливання, а кут між напрямком цього вектора та напрямком, узятим за вихідний, – початковій фазі коливання. Відповідно до (58.3) вектори всіх коливань мають однакову амплітуду ΔA . Початкові фази коливань є різними та відрізняються на одну й ту саму величину, що дорівнює δ . Якщо скласти ці вектори геометрично, то нескладно помітити, що вони утворюють частину багатокутника, вписаного в коло радіусом R (рис. 58.2). З рисунка 58.2 випливає, що:

$$\Delta A / 2 = R \sin(\delta / 2),$$

$$A_{\varphi} / 2 = R \sin[(2\pi - N\delta) / 2] = R \sin(\pi - N\delta / 2) = R \sin(N\delta / 2).$$

Виключивши R із цих рівнянь, одержимо співвідношення

$$A_{\varphi} = \Delta A \frac{\sin(N\delta / 2)}{\sin(\delta / 2)}, \quad (58.4)$$

яке виражає амплітуду A_{φ} через амплітуду ΔA й зміщення за фазою δ .

3 Коли замість ΔA у формулу (58.4) підставимо вираз (58.1), а замість δ – вираз (58.2), то одержимо

$$A_{\varphi} = \frac{A_0}{N} \frac{\sin[(\pi b / \lambda) \sin \varphi]}{\sin[(\pi b / N\lambda) \sin \varphi]}.$$

Цей вираз є наближеним. Він буде тим більш точним, чим меншими будуть елементарні зони, тобто чим більшим буде N . З огляду на це знаменник набуде вигляду

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{N \sin[(\pi b / N\lambda) \sin \varphi]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin[(\pi b / N\lambda) \sin \varphi]}{(\pi b / N\lambda) \sin \varphi} \right\} (\pi b / \lambda) \sin \varphi = 1 \cdot (\pi b / \lambda) \sin \varphi.$$

У цьому співвідношенні використали, що $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{\sin \alpha / \alpha\} = 1$. Отже, вираз для амплітуди в точці P можемо записати так:

$$A_{\varphi} = A_0 \frac{\sin[(\pi b / \lambda) \sin \varphi]}{(\pi b / \lambda) \sin \varphi}. \quad (58.5)$$

З'ясуємо фізичний зміст константи A_0 . Для цього розглянемо вираз (58.5) для випадку, коли кут φ прямує до нуля. Використовуючи $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{\sin \alpha / \alpha\} = 1$, знаходимо, що в цьому разі A_{φ} дорівнює A_0 . З огляду на це впливає, що A_0 є амплітудою усередині дифракційної картини (проти центра лінзи).

Інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди. Отже,

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2[(\pi b / \lambda) \sin \varphi]}{[(\pi b / \lambda) \sin \varphi]^2}, \quad (58.6)$$

де I_0 – інтенсивність усередині інтерференційної картини (за $\varphi = 0$); I_{φ} – інтенсивність у точці, положення якої обумовлене цим значенням φ .

4 Проаналізуємо одержаний результат. Як з'ясували вище, коли $\varphi = 0$, то $I_{\varphi} = I_0$. Далі, прирівнюючи чисельник до нуля, знаходимо умову мінімуму інтенсивності:

$$\sin^2[(\pi b / \lambda) \sin \varphi] = 0, \quad (\pi b / \lambda) \sin \varphi = \pm k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

тобто

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (58.7)$$

Отже, умова (58.7) визначає положення **мінімумів інтенсивності**.

Між мінімумами інтенсивності, обумовленими (58.7), знаходяться максимуми різних порядків. Досліджуючи функцію (58.6) на екстремум, можемо знайти їх положення. Наближено можна вважати, що максимуми знаходяться посередині між сусідніми мінімумами.

Графік функції (58.6) зображений на рисунку 58.3. Уздовж осі абсцис відкладені значення $\sin \varphi$, а вздовж осі ординат – інтенсивність I_{φ} .

З умови (58.7) випливає, що $\sin \varphi = \pm k\lambda / b$. Модуль синуса не може перевищити одиницю. Тому $k\lambda / b < 1$, зважаючи на що

$$k \leq b/\lambda. \quad (58.8)$$

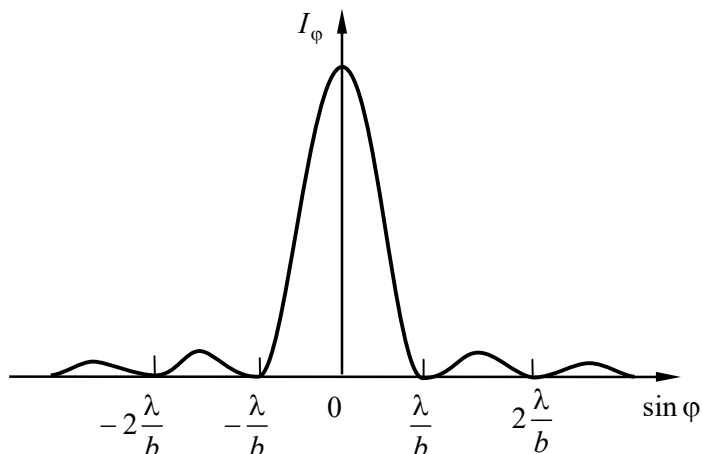


Рисунок 58.3 – Дифракційна картина від однієї щілини (залежність I_ϕ від $\sin \phi$)

Отже, кількість мінімумів інтенсивності визначають за відношенням ширини щілини b до довжини хвилі λ . За ширини щілини меншої за довжину хвилі, мінімуми взагалі не виникають. У цьому разі інтенсивність світла монотонно зменшується від середини дифракційної картини до її країв.

§ 59 Дифракція Фраунгофера на дифракційних ґратках. Амплітуда й інтенсивність світла, максимуми та мінімуми

1 Дифракційною ґраткою називається оптичний прилад, що складається з великої кількості однакових, віддалених одна від одної на однакову відстань щілин (рис. 59.1). Відстань між серединами сусідніх щілин називається **періодом ґратки**.

Розмістимо паралельно ґратці збиральну лінзу, у фокальній площині якої помістимо екран. З'ясуємо характер дифракційної картини, що утворюються на екрані під час падіння на ґратку плоскої світлової хвилі (для спрощення математичних розрахунків будемо вважати, що хвиля падає на ґратку нормально). Дифракційна картина, яку дає на екрані одна щілина, відома нам із попереднього параграфа. Дифракційну картину від усіх щілин знайдемо, використовуючи принцип Гюйгенса – Френеля.

Будемо припускати, що довжина просторової когерентності хвилі, яка падає, набагато перевищує довжину ґратки, так що коливання від усіх щілин можна вважати когерентними. У цьому разі результуюче коливання в точці P , положення якої визначається кутом ϕ , являє собою суперпозицію N коливань, які мають однакову амплітуду A_ϕ та зміщені одне щодо одного за фазою на однакову величину δ . Отже, амплітуду результуючого коливання від ґратки будемо визначатися за співвідношенням

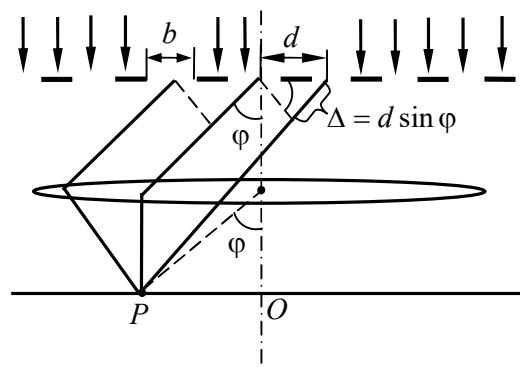


Рисунок 59.1 – Схема спектрального приладу з дифракційною ґраткою

$$A_{\phi p} \cos(\omega t + \alpha) = A_\phi \cos(\omega t) + A_\phi \cos(\omega t + \delta) + \dots + A_\phi \cos(\omega t + (N-1)\delta).$$

Методом векторних діаграм нескладно знайти результуючу амплітуду A_p (як у попередньому параграфі):

$$A_p = A_\varphi \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}.$$

Зрозуміло, що інтенсивність у цьому разі можна обчислити за такою формулою:

$$I_p = I_\varphi \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}. \quad (59.1)$$

З рисунка 59.1 можемо зробити висновок, що різниця ходу від сусідніх щілин $\Delta = d \sin \varphi$. Отже, різниця фаз

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad (59.2)$$

де λ – довжина хвилі в середовищі.

Підставивши у формулу (59.1) (59.2) для δ і вираз для I_φ (див. попередній параграф), одержимо

$$I_p = I_0 \frac{\sin^2[(\pi b/\lambda)\sin \varphi]}{[(\pi b/\lambda)\sin \varphi]^2} \cdot \frac{\sin^2[(N\pi d/\lambda)\sin \varphi]}{\sin^2[(\pi d/\lambda)\sin \varphi]}, \quad (59.3)$$

де I_0 – інтенсивність, створювана однією щілиною проти центра лінзи.

2 Проведемо дослідження одержаного результату (59.3). Перший множник у (59.3) перетворюється на нуль у точках, для яких

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (59.4)$$

У цих точках інтенсивність, створювана кожною із щілин окремо, дорівнює нулю. *Вираз (59.4) визначає умову мінімумів дифракційної ґратки.*

Коли $d \sin \varphi = \pm m\lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то чисельник і знаменник другого множника стають такими, що дорівнюють нулю. Тобто вираз (59.3) стає невизначеним. Розкриваючи невизначеність за допомогою правила Лопітала, одержуємо

$$\begin{aligned} \lim_{d \sin \varphi \rightarrow m\lambda} \left(\frac{\sin[(N\pi d/\lambda)\sin \varphi]}{\sin[(\pi d/\lambda)\sin \varphi]} \right) &= \lim_{x \rightarrow m\pi} \left(\frac{\sin(Nx)}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow m\pi} \left(\frac{(\sin(Nx))'_x}{(\sin(x))'_x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow m\pi} \left(\frac{N \cos(Nx)}{\cos(x)} \right) = \frac{N \cos(Nm\pi)}{\cos(m\pi)} = \pm \frac{N \cdot 1}{1} = \pm N. \end{aligned}$$

Це означає, що другий множник у (59.3) набирає значення N^2 у точках, що задовольняють умову

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (59.5)$$

З фізичної токи зору це означає, що для напрямків, які визначають за умовою (59.5), коливання від окремих щілин взаємно підсилюються, з огляду на що амплітуди коливань у відповідній точці екрана додаються:

$$A_{\max} = NA_\varphi, \quad (59.6)$$

де A_φ – амплітуда коливання, утворюваного однією щілиною під кутом φ .

Умова (59.5) визначає положення максимумів інтенсивності, що називаються головними. Число m дає порядок головного максимуму.

Піднісши рівність (59.6) до квадрата, одержимо, що інтенсивність I_{\max} у N^2 раз більша за інтенсивність I_{ϕ} , створювана в напрямку ϕ однією щілиною:

$$I_{\max} = N^2 I_{\phi}. \quad (59.7)$$

Зрозуміло, що, коли умови (59.5) та (59.4) збігаються, то є мінімум інтенсивності. Це пов'язано з тим, що в цьому разі інтенсивність від кожної щілини дорівнює нулю. Сума нульових інтенсивностей дасть також нульову інтенсивність.

Крім мінімумів, обумовлених співвідношенням (59.4), у проміжках між сусідніми головними максимумами є $N-1$ додаткових мінімумів. Вони виникають у тих напрямках, для яких коливання від окремих щілин взаємно гасять одне одного. Умову додаткових мінімумів можна легко знайти, прирівнявши чисельник другого множника (59.3) до нуля:

$$\sin[(N\pi d / \lambda)\sin \phi] = 0.$$

З урахуванням цього знаходимо умову додаткових мінімумів

$$d \sin \phi = \pm \frac{k'}{N} \lambda, \quad (59.8)$$

де $k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, 2N-1, 2N+1, \dots$. У формулі (59.8) k' набирає всіх цілих значень, крім $0, N, 2N, \dots$, тобто крім тих, за яких умова (59.8) переходить у (59.5).

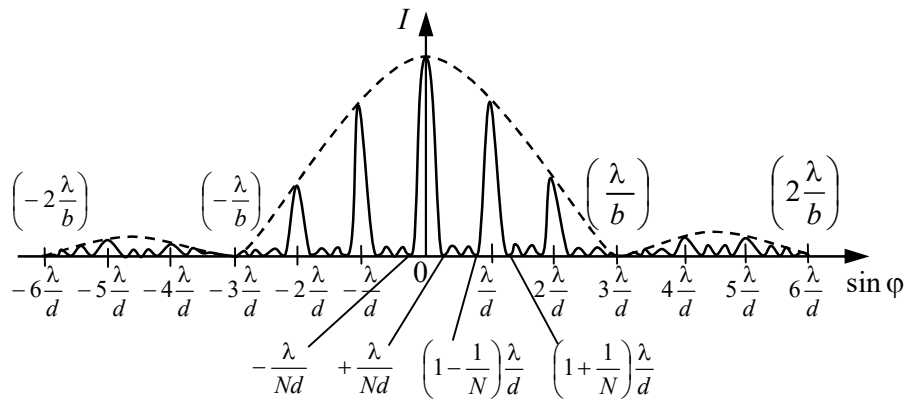


Рисунок 59.2 – Дифракційна картина від ґратки для $N = 4$ і $d/b = 3$.

Штриховою лінією зображена інтенсивність I_{ϕ} від однієї щілини, помножена на N^2 . Головні максимуми 3-го й 6-го порядків збіглися з мінімумами інтенсивності від однієї щілини

Між додатковими мінімумами розміщені слабкі вторинні максимуми. Кількість таких максимумів, що знаходяться на проміжку між сусідніми головними максимумами, дорівнює $N-2$.

На рисунку 59.2 наведений графік функції (59.3) для $N = 4$ та $d/b = 3$. Штрихова лінія, що проходить через вершини головних максимумів, зображує інтенсивність від однієї щілини, помножену на N^2 (див. (59.7)). За $d/b = 3$ головні максимуми 3-го, 6-го й т. д. порядків збігаються з мінімумами інтенсивності від однієї щілини, у результаті чого ці максимуми зникають.

Кількість головних максимумів, що можна спостерігати, визначають за відношенням періоду ґратки до довжини хвилі. З огляду на те, що модуль $\sin \phi$ не може перевищити одиниці, з формули (59.5) одержуємо

$$m \leq d / \lambda. \quad (59.9)$$

§ 60 Дисперсія й роздільна здатність дифракційних ґраток. Роздільна здатність об'єктива

1 Дисперсія дифракційної ґратки. Відомо, що дифракційна ґратка, як і призма, розкладає світло на спектр. Характеристиками спектрального приладу є його дисперсія й роздільна здатність. *Дисперсія* визначає кутову (або лінійну) відстань між двома спектральними лініями, що відрізняються за довжиною хвилі на одиницю (наприклад, 1 нм).

Кутовою дисперсією називається величина

$$D = \delta\varphi / \delta\lambda, \quad (60.1)$$

де $\delta\varphi$ – кутова відстань між спектральними лініями, що відрізняються за довжиною хвилі на $\delta\lambda$.

Лінійною дисперсією називають величину

$$D_{\text{лин}} = \delta l / \delta\lambda,$$

де δl – відстань на екрані або фотопластинці між спектральними лініями, довжини хвиль яких відрізняються на $\delta\lambda$.

Щоб знайти кутову дисперсію дифракційної ґратки, продиференціюємо умову головного максимуму за φ :

$$d \sin \varphi = m\lambda,$$

вважаючи, що $\lambda = \lambda(\varphi)$ є функцією від φ . Опустивши знак мінус, одержимо

$$d \cos \varphi = m(\delta\lambda / \delta\varphi).$$

Зважаючи на це,

$$D = \delta\varphi / \delta\lambda = m / (d \cos \varphi).$$

У межах невеликих кутів $\cos \varphi \approx 1$, тому можна вважати, що

$$D \approx m / d. \quad (60.2)$$

Отже, *кутова дисперсія дифракційної ґратки* обернено пропорційна періоду d . Чим вище порядок спектра m , тим більше дисперсія.

2 Роздільна здатність дифракційної ґратки. Роздільна здатність визначає мінімальну різницю довжин хвиль $\delta\lambda$, за якої дві лінії сприймаються в спектрі роздільно. *Роздільною здатністю* спектрального приладу називають безрозмірну величину

$$R = \lambda / \delta\lambda, \quad (60.3)$$

де $\delta\lambda$ – мінімальна різниця довжин хвиль двох спектральних ліній, за якої ці лінії сприймаються роздільно.

Можливість роздільного сприйняття двох близьких спектральних ліній залежить не лише від відстані між ними (обумовленою дисперсією приладу), а й від ширини спектрального максимуму. На рисунку 60.1 зображена результуюча інтенсивність (суцільні криві), що спостерігається в разі накладення двох близьких максимумів (штрихові криві). У випадку *a* обидва максимуми сприймаються як один. У випадку *б* між максимумами лежить мінімум. Два близьких максимуми сприймаються оком роздільно, якщо інтенсивність у проміжку між ними становить не більше ніж 80 % від інтенсивності максимуму. Відповідно до *критерію, запропонованого Релеєм*, таке співвідношення

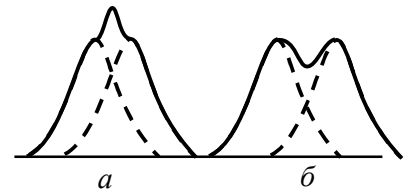


Рисунок 60.1 – Дві близькі спектральні лінії зливаються в одну (*a*); – якщо край одного максимуму збігається із серединою іншого, спектральні лінії сприймаються роздільно (*б*)

інтенсивності справедливе тоді, коли середина одного максимуму збігається з краєм іншого (рис. 60.1б). Таке взаємне розміщення максимумів можливе за певного (для конкретного приладу) значення $\delta\lambda$.

Знайдемо роздільну здатність дифракційної ґратки. Положення середини m -го максимуму для довжини хвилі $\lambda + \delta\lambda$ визначається умовою

$$d \sin \varphi_{\max} = m(\lambda + \delta\lambda).$$

Краї m -го максимуму для довжини хвилі λ розміщують під кутами, обумовленими співвідношенням

$$d \sin \varphi_{\min} = (m \pm 1/N)\lambda.$$

Середина максимуму для довжини хвилі $\lambda + \delta\lambda$ збігається з краєм максимуму для довжини хвилі λ тоді, коли

$$m(\lambda + \delta\lambda) = (m + 1/N)\lambda.$$

З огляду на це,

$$m\delta\lambda = \lambda / N.$$

Знайшовши з цієї рівності відношення λ до $\delta\lambda$, одержимо вираз для *роздільної здатності дифракційної ґратки*

$$\boxed{R = mN}. \quad (60.4)$$

Отже, роздільна здатність дифракційної ґратки пропорційна числу щілин N і порядку спектра m .

Дифракційні ґратки виготовляють нанесенням алмазним різцем на поверхню скляної пластинки рівновіддалених штрихів. Роль щілин відіграють проміжки між штрихами. Кращі ґратки мають до 1 200 штрихів на 1 мм ($d \approx 800$ нм).

3 Роздільна здатність об'єктива.

Роздільною здатністю об'єктива називається величина R , зворотна найменшій кутовій відстані $\delta\psi$ між точками, за якої вони ще сприймаються роздільно:

$$\boxed{R = 1/\delta\psi}. \quad (60.5)$$

На рисунку 60.2 зображена картина дифракції Фраунгофера на круглому отворі. Вона має вигляд центральної світлої плями, оточеної темними й світлими кільцями, які чергуються між собою. Відповідний розрахунок показує, що перший мінімум віддалений від центра дифракційної картини на кутову відстань

$$\varphi_{\min} = \arcsin(1,22\lambda / D), \quad (60.6)$$

де D – діаметр отвору. Коли $D \gg \lambda$, то можна вважати, що

$$\varphi_{\min} = 1,22\lambda / D. \quad (60.7)$$

Переважає частина (близько 84 %) світлового потоку, що проходить через отвір, потрапляє в область центральної світлої плями.

Інтенсивність першого світлого кільця становить усього 1,74 %, а другого – 0,41 % від інтенсивності центральної плями. Інтенсивність інших світлих кілець ще менше. Тому в першому наближенні дифракційну картину можна вважати такою, що складається з однієї лише світлої плями з кутовим радіусом, яка визначається формулою (60.6). Ця пляма є, по

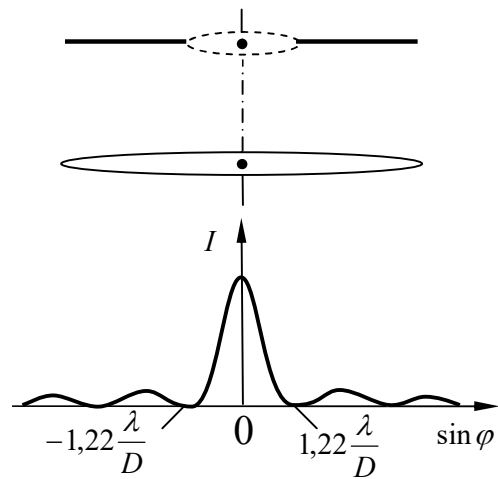


Рисунок 60.2 – Плоска світлова хвиля падає перпендикулярно на перешкоду з круглим отвором. Унизу зображена інтенсивність світла на екрані, розміщеному в фокальній площині лінзи

суті, зображенням нескінченно віддаленого точкового джерела світла (на отвір падає плоска світлова хвиля).

Дифракційна картина не залежить від відстані між отвором і лінзою. Зокрема, вона буде такою самою і у разі, коли краї отвору суміщені з краями лінзи. Звідси випливає, що найдосконаліша лінза не може дати ідеального оптичного зображення. Внаслідок хвильової природи світла зображення точки, яка дається лінзою, має вигляд плями, що являє собою центральний максимум дифракційної картини. Кутовий розмір цієї плями зменшується під час збільшення діаметра оправы лінзи.

За дуже малої кутової відстані між двома точками їх зображення, яке одержуємо за допомогою якого-небудь оптичного приладу, накладаються один на одного й дають одну пляму. Отже, дві дуже близькі точки не будуть сприйматися за допомогою приладу роздільно, або, як кажуть, не будуть розділятися приладом. Тому, яким би великим не було зображення, на ньому не видно відповідних деталей.

Знайдемо роздільну здатність об'єктива зорової труби або фотоапарата для випадку, коли розглядаються або фотографуються дуже віддалені предмети. За цієї умови промені, які йдуть в об'єктив від кожної точки предмета, можна вважати паралельними й користуватися формулою (60.6). Відповідно до критерію Релея дві близькі точки будуть ще розрізнені, якщо середина центрального дифракційного максимуму для однієї точки збігається із краєм центрального максимуму (тобто першим мінімумом) для іншої точки. На рисунку 60.3 видно, що це відбудеться, коли кутова відстань між точками $\delta\psi$ буде дорівнювати їх кутовому радіусу (60.6). Діаметр оправы об'єктива D набагато більше від довжини хвилі λ . Тому можна вважати, що

$$\delta\psi = 1,22\lambda / D \approx \lambda / D.$$

Звідси

$$\boxed{R \approx D / \lambda} \quad (60.9)$$

Отже, роздільна здатність об'єктива пропорційна його діаметру.

Діаметр зіниці ока за нормального освітлення дорівнює приблизно 2 мм. Підставивши це значення у формулу (60.8) і взявши $\lambda = 500$ нм, одержимо

$$\delta\psi \approx 500 \cdot 10^{-9} / (2 \cdot 10^{-3}) = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 1'.$$

Отже, мінімальна кутова відстань між точками, які око сприймає ще роздільно, дорівнює одній кутовій хвилині. Цікаво, що відстань між сусідніми світлочутливими елементами сітківки ока відповідає цій кутовій відстані.

§ 61 Дифракція на просторових структурах. Закон Вульфа – Бреґґа. Рентгенівська спектроскопія. Рентгеноструктурний аналіз

1 Розмістимо дві дифракційні ґратки одну за одною так, щоб їх штрихи були взаємно перпендикулярними. Перша ґратка (штрихи якої, скажімо, вертикальні) дасть у горизонтальному напрямку низку максимумів, положення яких визначаються умовою

$$d_1 \sin \varphi_1 = \pm m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots). \quad (61.1)$$

Друга ґратка (з горизонтальними штрихами) розіб'є кожний із утворених першою ґраткою пучків на розміщені вздовж вертикалі максимуми, положення яких визначаються умовою

$$d_2 \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots). \quad (61.2)$$

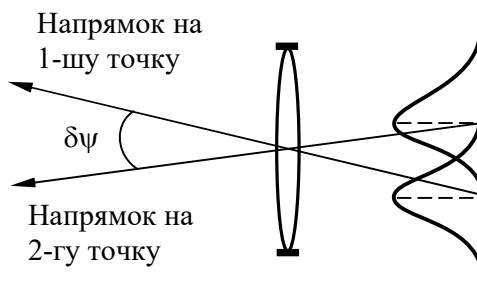


Рисунок 60.3 – Край одного максимуму збігається з серединою іншого, точки сприймаються роздільно

У наслідок дифракційна картина буде мати вигляд правильно розміщених плям, кожній з яких відповідають два цілих індекси m_1 й m_2 (рис. 61.1).

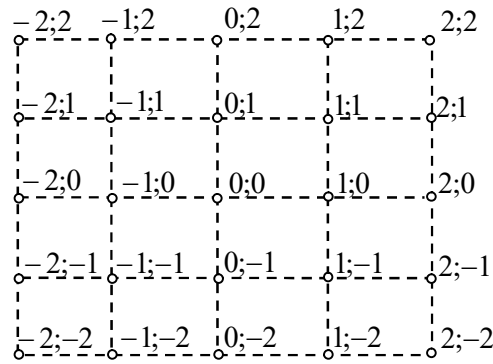


Рисунок 61.1 – Дифракційна картина від двовимірної періодичної структури

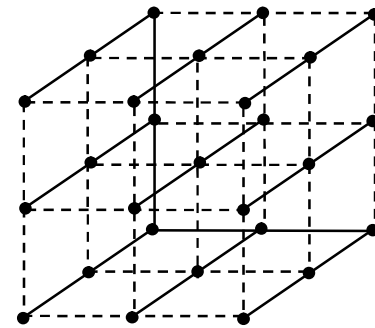


Рисунок 61.2 – Тривимірна періодична структура (кристал)

Таку саму дифракційну картину одержимо, коли замість двох різних ґраток взяти одну прозору пластинку з нанесеними на неї двома системами взаємно перпендикулярних штрихів. Подібна пластинка являє собою двовимірну періодичну структуру (звичайна ґратка – одновимірну структуру). Вимірявши кути φ_1 і φ_2 , які визначають положення максимумів, і знаючи довжину хвилі λ , можна знайти за формулами (61.1) і (61.2) періоди структури d_1 і d_2 . Якщо напрямки, в яких структура періодична (наприклад, напрямки, які перпендикулярні до штрихів ґраток), утворять кут α , відмінний від нуля, дифракційні максимуми розмістяться не у вершинах прямокутників (як на рисунку 61.1), а у вершинах паралелограмів. У цьому разі за дифракційною картиною можна визначити не лише періоди d_1 і d_2 , але й кут α .

Дифракційну картину, аналогічну до зображеної на рисунку 61.1, дають будь-які двовимірні періодичні структури, наприклад, система невеликих отворів або система непрозорих маленьких кульок.

Для виникнення дифракційних максимумів необхідно, щоб період структури d був більше λ . В іншому разі умови (61.1) і (61.2) можуть бути задоволені лише за значень m_1 і m_2 , які дорівнюють нулю (модуль $\sin \varphi$ не може перевищувати одиниці).

Дифракція спостерігається також на тривимірних структурах, тобто просторових системах, які мають періодичність у трьох напрямках, що не лежать в одній площині (рис. 61.2). Подібними структурами є всі кристалічні тіла. Проте їх період (приблизно 0,1 нм) занадто малий для того, щоб можна було спостерігати дифракцію у видимому світлі. У разі кристалів умова $d > \lambda$ виконується лише для рентгенівських променів. Уперше дифракція рентгенівських променів на кристалах спостерігалася в 1913 р. у досліді Лауе, Фрідріха й Кніппінга (Лауе належить ідея, іншим авторам – реалізація досліду).

2 Російський учений Г.В. Вульф і англійські вчені У.Г. Брегг і У.Л. Брегг показали незалежно один від одного, що розрахунок дифракційної картини від кристалічної ґратки можна здійснити у такий спосіб. Проведемо через вузли кристалічної ґратки паралельні рівновіддалені площини (рис. 61.3), які ми будемо називати атомними шарами. Якщо хвиля, яка падає на кристал, є плоскою, то обвідна вторинних хвиль, що створюються атомами, які лежать у такому шарі, також буде плоскою. Отже, сумарну дію атомів, що лежать в одному і тому самому шарі, можна подати у вигляді плоскої хвилі, яка відбилася від атомного шару за звичайним законом відбиття.

Плоскі вторинні хвилі, що відбилися від різних атомних шарів, когерентні й будуть інтерферувати одна з одною подібно до хвиль, які посилаються в цьому напрямку різними щілинами дифракційної ґратки. Водночас, як і у разі ґратки, вторинні хвилі будуть

практично гасити один одну у всіх напрямках, крім тих, для яких різниця ходу між сусідніми хвилями є кратною λ . На рисунку 61.3 бачимо, що різниця ходу двох хвиль, які відбилися від сусідніх атомних шарів, дорівнює $2d \sin \theta$, де d – період кристала в напрямку, перпендикулярному до розглянутих шарів; θ – кут, додатковий до кута падіння, який називають **кутом ковзання** падаючих променів. Отже, напрямки, в яких одержуємо дифракційні максимуми, визначаються умовою

$$2d \sin \theta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (61.3)$$

Це співвідношення називається **формулою Вульфа – Брегга (закон Вульфа – Брегга)**.

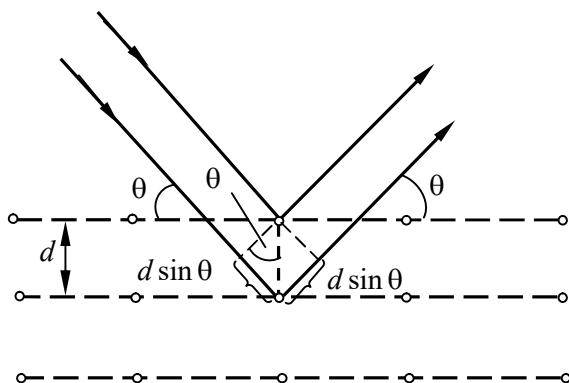


Рисунок 61.3 – Різниця ходу хвиль, відбитих від двох сусідніх атомних шарів, дорівнює $2d \sin \theta$

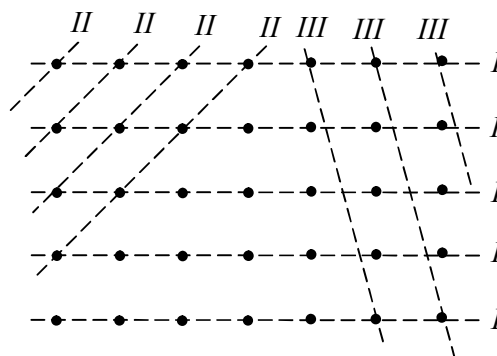


Рисунок 61.4 – Три системи атомних шарів, які відрізняються густиною атомів

Атомні шари в кристалі можна провести великою кількістю способів (рис. 61.4). Кожна система шарів може дати дифракційний максимум, якщо для неї виявиться виконаною умова (61.3). Проте помітну інтенсивність будуть мати лише ті максимуми, які одержуємо за рахунок відбиття від шарів, які досить густо «засіяні» атомами (наприклад, від шарів I і II на рисунку 61.4).

3 Дифракція рентгенівського випромінювання на кристалах застосовується в двох основних випадках. Вона використовується для дослідження спектрального складу рентгенівського випромінювання (**рентгенівська спектроскопія**) і для вивчення структури кристалів (**рентгеноструктурний аналіз**).

Визначаючи напрямки максимумів, які утворюються під час дифракції досліджуваного рентгенівського випромінювання на кристалах з відомою структурою, можна обчислити довжини хвиль. Спочатку для визначення довжин хвиль були використані кристали кубічної системи, причому міжплощинні відстані визначалися з густини й відносної молекулярної маси кристала.

У методі структурного аналізу, запропонованому Лауе, пучок «білого» (тобто з різними довжинами хвиль) рентгенівського випромінювання спрямовувався на монокристал. Для кожної системи шарів, досить густо «засіяних» атомами, знаходимо довжину хвилі, для якої виконується умова (61.3). Тому на поміщеній за кристалом фотопластинці утворюється (після проявлення) сукупність темних плям. Взаємне розміщення плям відображає симетрію кристала. За відстанями між плямами й за їх інтенсивностями вдається знайти розміщення атомів у кристалі й відстані між ними. На рисунку 61.5 наведена лауєграма берилу (мінералу із групи силікатів).

У методі структурного аналізу, розробленому Дебаєм і Шерером, використовуються монохроматичне рентгенівське випромінювання й полікристалічні зразки. Досліджувана речовина подрібнюється в порошок, з якого пресується зразок у вигляді дротинки. Зразок установлюється вздовж осі циліндричної камери, на бічну поверхню якої укладається фотоплівка (рис. 61.6). У величезній кількості хаотично орієнтованих кристаликів знайдеться багато таких, для яких виявиться виконаною умова (61.3). Причому дифрагований промінь

для різних кристаликів буде лежати в різних площинах. У результаті для кожної системи атомних шарів і кожного значення m вийде не один напрямок максимуму, а конус напрямків, вісь якого збігається з напрямком пучка (див. рис. 61.6). Картина, яку одержимо на плівці (дебаєграма), має вигляд, як на рисунку 61.7. Кожна пара симетрично розміщених ліній відповідає одному з дифракційних максимумів, які задовольняють умову (61.3) за деякого значення m . Розшифрування рентгенограми дозволяє визначити структуру кристала.

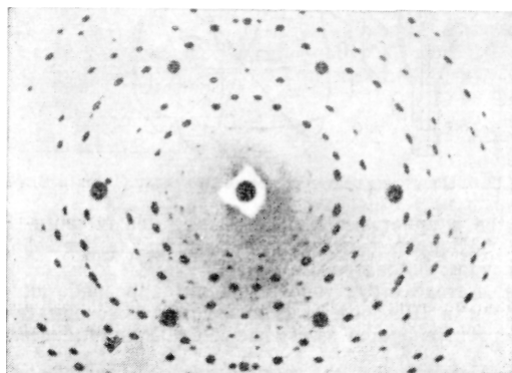


Рисунок 61.5 – Лауєграма берилу

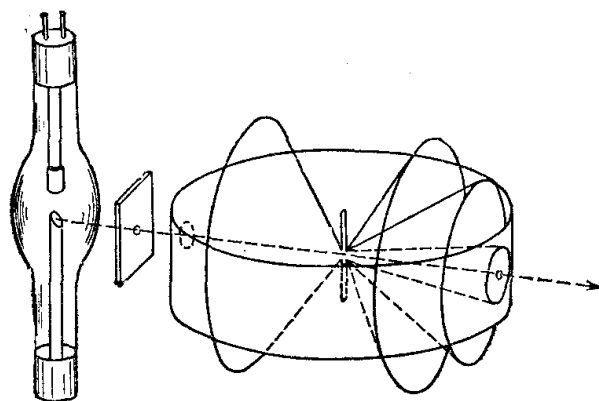


Рисунок 61.6 – Одержання рентгенограми за методом Дебая й Шерера

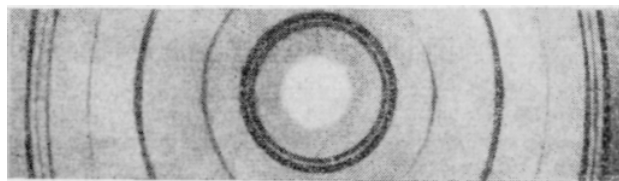


Рисунок 61.7 – Дебаєграма

ТЕМА 9 ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

§ 62 Поляризоване й природне світло. Поляризатор. Ступінь поляризації

1 Під час вивчення інтерференції й дифракції ми не звертали уваги на поперечність світлових коливань, припускаючи, що коливання мають один і той самий напрямок. Перейдемо тепер до вивчення явищ поляризації світла, тобто таких явищ, які пов'язані з поперечністю електромагнітних хвиль.

Світло, в якого напрямки коливань упорядковані будь-яким чином, називається **поляризованим**.

Якщо коливання світлового вектора відбуваються лише в одній площині, яка проходить через напрямок поширення променя, то таке світло називається **плоско- (або лінійно) поляризованим**. Площина, в якій відбуваються коливання світлового вектора, називається **площиною коливань**, або **площиною поляризації** (див. рис. 62.1).

Упорядкованість коливань може полягати й у тому, що вектор \vec{E} може обертатися відносно променя, одночасно змінюючись за величиною. У результаті кінець вектора \vec{E} описує еліпс (див. рис. 62.2). Таке світло називається **еліптично поляризованим**. Якщо кінець вектора \vec{E} описує коло, то таке світло називається **поляризованим по колу**. Зрозуміло, що еліптично поляризоване світло можна подати як сукупність двох взаємно перпендикулярних лінійно поляризованих променів світла.

2 У природному світлі коливання різних перпендикулярних до променя напрямків неупорядковано змінюють один одного. Всі напрямки коливань природного світла мають однакову ймовірність. Отже, природне світло можна подати як сукупність двох некогерентних електромагнітних хвиль, які поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах і мають однакові інтенсивності. Таке уявлення про природне світло істотно спрощує розгляд проходження природного світла через поляризаційні пристрої.

3 Плоскополяризоване світло можна одержати із природного за допомогою приладів, які називаються поляризатори. **Поляризатори** вільно пропускають коливання, паралельні площині, яку називають **площиною поляризатора**, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні до цієї площини. Поляризатор, що затримує перпендикулярні до його площини коливання лише частково, будемо називати **неідеальним**. Просто поляризатором ми будемо називати **ідеальний поляризатор**, який повністю затримує коливання, перпендикулярні до його площини, і не послабляє коливань, паралельних площині.

На виході з неідеального поляризатора одержуємо світло, в якому коливання одного напрямку переважають над коливаннями інших напрямків. Таке світло називається **частково поляризованим**. Його можна розглядати як суміш природного й плоскополяризованого. Частково поляризоване світло, як і природне, можна подати у вигляді накладення двох некогерентних плоскополяризованих хвиль із взаємно перпендикулярними площинами коливань. Відмінність полягає в тому, що у разі природного світла інтенсивність цих хвиль однакова, а у разі частково поляризованого – різна.

Зазначимо, що поляризатор, який використовуваний для дослідження характеру поляризації світла, називають аналізатором.

4 Якщо пропустити частково поляризоване світло через поляризатор, то під час його обертання навколо напрямку поширення світлового променя інтенсивність світла на

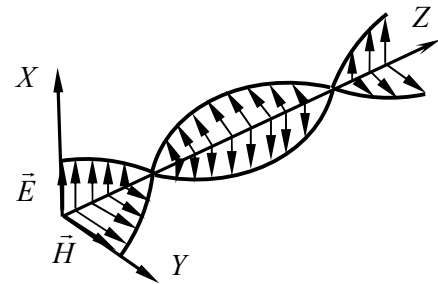


Рисунок 62.1 – «Моментальна фотографія» плоскої лінійно поляризованої світлової хвилі, що поширюється вздовж осі Z . Вектор \vec{E} коливається в площині XZ , вектор \vec{H} – уздовж осі YZ . Площина XZ – площина поляризації

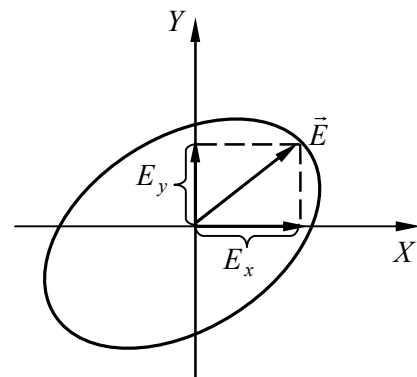


Рисунок 62.2 – В еліптично поляризованому світлі кінець вектора \vec{E} рухається по еліпсу в площині XY , перпендикулярній до напрямку поширення світла (вздовж осі Z)

виході буде змінюватися в межах від I_{\max} до I_{\min} , причому перехід від одного з цих значень до іншого буде відбуватися під час повороту на кут, що дорівнює $\pi/2$. Вираз

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (62.1)$$

визначає **ступінь поляризації**. Для плоскополяризованого світла $I_{\min} = 0$ і $P = 1$; для природного світла $I_{\max} = I_{\min}$ і $P = 0$. До еліптично поляризованого світла поняття ступеня поляризації не застосовується.

§ 63 Закон Малюса. Проходження природного світла через поляризатор

1 Розглянемо, як змінюється інтенсивність лінійно поляризованого світла під час проходження через поляризатор. Нехай на поляризатор падає світло, в якому коливання амплітуди A_0 відбувається в площині, що утворює з площиною поляризатора кут φ (див. рис. 63.1). Розкладемо амплітуду коливання \vec{A}_0 на два коливання з амплітудами

$$A_{\parallel} = A_0 \cos \varphi \text{ і } A_{\perp} = A_0 \sin \varphi. \quad (63.1)$$

Зрозуміло, що коливання, яке є паралельним площині поляризатора, повністю пройде через поляризатор, а коливання, яке є перпендикулярним до площини поляризатора, буде затримано (див. рис. 63.2). Інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди. Тому, якщо на поляризатор падає плоскополяризоване світло інтенсивності $I_0 \sim A_0^2$, то інтенсивність світла на виході поляризатора буде визначатися виразом

$$I \sim (A_{\parallel})^2 = A_0^2 \cos^2 \varphi, \text{ або } I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (63.2)$$

де I_0 – інтенсивність плоскополяризованого світла, що падає на поляризатор. Співвідношення (63.2) називають **законом Малюса**.

2 Розглянемо, як змінюється інтенсивність природного світла під час проходження через поляризатор. У цьому разі також подамо амплітуду світлового вектора \vec{A}_0 , що падає на поляризатор, у вигляді (63.1). Зрозуміло, що і у разі природного світла через поляризатор пройде лише складова $A_{\parallel} = A_0 \cos \varphi$, яка паралельна площині поляризатора. Тому інтенсивність на виході з поляризатора буде пропорційною середньому значенню квадрата паралельної складової світлового вектора

$$I \sim \langle A_{\parallel}^2 \rangle = A_0^2 \langle \cos^2 \varphi \rangle. \quad (63.3)$$

У природному світлі кут φ з часом змінюється, усі значення φ мають однакову ймовірність. Тому частина світла, що пройшла через поляризатор, буде пропорційною середньому значенню $\langle \cos^2 \varphi \rangle$, тобто $1/2$. Отже, *інтенсивність природного світла після проходження поляризатора дорівнює*

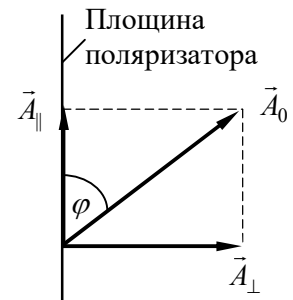


Рисунок 63.1 – До проходження поляризованого світла через поляризатор

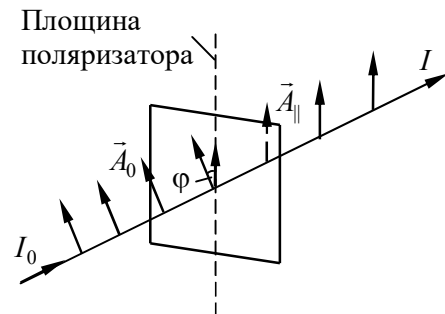


Рисунок 63.2 – Поляризатор пропускає лише складову світлового коливання, яка паралельна площині пропускання поляризатора і дорівнює $A_{\parallel} = A_0 \cos \varphi$

$$I = I_0 / 2, \quad (63.4)$$

де I_0 – інтенсивність природного світла, що падає на поляризатор.

§ 64 Поляризація світла під час відбиття та заломлення. Закон Брюстера

1 З'ясуємо, за яких умов можлива поляризація світла. Коли кут падіння світла на межу розділу двох прозорих діелектриків (наприклад, на поверхню скляної пластинки) відмінний від нуля, то відбитий і заломлений промені виявляються частково поляризованими. У відбитому промені переважають коливання, що перпендикулярні до площини падіння, в заломленому промені – коливання, які паралельні площині падіння (рис. 64.1). Ступінь поляризації залежить від кута падіння.

Позначимо через θ_{Br} кут, який визначається умовою

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta_{Br} = n_{12}} \quad (64.1)$$

(n_{12} – показник заломлення другого середовища відносно першого). За умови, що кут падіння дорівнює θ_{Br} , відбитий промінь є повністю поляризованим (він містить лише коливання, які перпендикулярні до площини падіння). Ступінь поляризації заломленого променя за умови, що кут падіння дорівнює θ_{Br} , досягає найбільшого значення, проте цей промінь залишається поляризованим лише частково. Співвідношення (64.1) називають **законом Брюстера**, а кут θ_{Br} – **кутом Брюстера**.

2 Легко переконатися у тому, що під час падіння світла під кутом Брюстера відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні (див. рис. 64.2). Для цього, крім закону Брюстера (64.1), використаємо закон заломлення

$$\frac{\sin \theta_{Br}}{\sin \gamma} = n_{12}. \quad (64.2)$$

Прирівнюючи (64.1) і (64.2), одержуємо

$$\frac{\sin \theta_{Br}}{\sin \gamma} = n_{12} = \operatorname{tg} \theta_{Br} \equiv \frac{\sin \theta_{Br}}{\cos \theta_{Br}},$$

або

$$\cos \theta_{Br} = \sin \gamma = \cos (\pi / 2 - \gamma).$$

Отже,

$$\theta_{Br} + \gamma = \pi / 2.$$

Звідси випливає, що кут α між відбитим і заломленим променями (див. рис. 64.2) дорівнює

$$\alpha = \pi - (\theta_{Br} + \gamma) = \pi - \pi / 2 = \pi / 2. \quad (64.3)$$

3 Явище поляризації світла під час відбиття й заломлення пояснює електромагнітна теорія Максвелла. Ми обмежимося *якісним поясненням* цього явища. Припустимо, що відбиття й заломлення відбуваються на межі діелектрика з вакуумом. Падаюча світлова

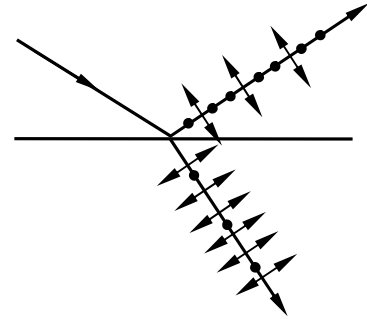


Рисунок 64.1 – У відбитому світлі переважають коливання, що перпендикулярні до площини падіння (вони зображені точками), у заломленому світлі – коливання, які паралельні площині падіння (вони зображені двосторонніми стрілками)

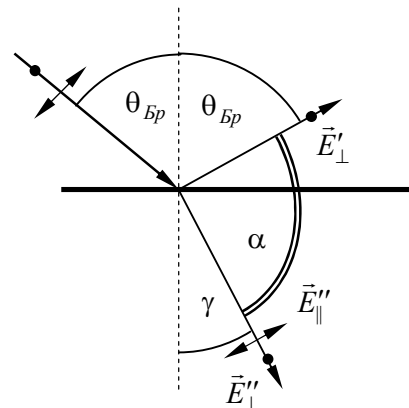


Рисунок 64.2 – Напрямки падаючого, заломленого та відбитого променів за умови падіння світла під кутом Брюстера

хвиля, проникнувши в діелектрик, змушує оптичні електрони атомів виконувати вимушені коливання. Електрони, які коливаються, випромінюють електромагнітні хвилі, які назвемо вторинними. За межами діелектрика вторинні хвилі формують відбиту хвилю. Усередині діелектрика вторинні хвилі накладаються на падаючу (первинну) хвилю. Результуюча первинної і вторинної хвиль утворюють заломлену хвилю. *Вимушені коливання електронів у діелектрику відбуваються в напрямку вектора*

$$\vec{E}'' = \vec{E}_{\parallel}'' + \vec{E}_{\perp}''$$

цієї результуючої заломленої хвилі (див. рис. 64.2). Тут позначено: \vec{E}_{\parallel}'' – компонента заломленої хвилі, паралельна площини падіння; \vec{E}_{\perp}'' – компонента заломленої хвилі, перпендикулярна до площини падіння.

Зрозуміло, що електрон, який коливається, можна розглядати як електричний диполь. Як відомо, електричний диполь найбільш інтенсивно випромінює в напрямку, який перпендикулярний до дипольного моменту (напрямку коливань електрона). Випромінювання ж у напрямку, який збігається з напрямком коливань електрона, дорівнює нулю.

У разі, коли світло падає під кутом Брюстера, кут між заломленою та відбитою хвилями дорівнює 90°. Електрони речовини коливаються в напрямку вектора $\vec{E}'' = \vec{E}_{\parallel}'' + \vec{E}_{\perp}''$.

У цьому разі напрямок \vec{E}_{\parallel}'' збігається з напрямком відбитої хвилі (див. рис. 64.2). Це означає, що складова хвилі, яка паралельна площині падіння, у відбитій хвилі дорівнює нулю. Тобто у відбитій хвилі буде лише перпендикулярна компонента до площини падіння $\vec{E}' = 0 + \vec{E}_{\perp}'$, а отже, відбита хвиля буде повністю поляризована.

У природному падаючому промені інтенсивність коливань різних напрямків однакова. Енергія цих коливань розподіляється між відбитою й заломленою хвилями. Тому, якщо у відбитому промені буде більша інтенсивність коливань одного напрямку (\vec{E}_{\perp}'), то внаслідок закону збереження енергії в заломленому промені повинна бути більша інтенсивність коливань іншого напрямку (\vec{E}_{\parallel}''). Звідси випливає, що заломлений промінь буде частково поляризованим.

§ 65 Явище подвійної променезаломлюваності. Призма Ніколя. Чвертьхвильова пластинка. Явище дихроїзму

1 Під час проходження світла через усі прозорі кристали, за винятком тих, що належать до кубічної системи, спостерігається явище, яке полягає в тому, що падаючий на кристал промінь розділяється всередині кристала на два промені, які поширюються в загальному випадку з різними швидкостями й у різних напрямках. Це явище одержало **назву подвійної променезаломлюваності**.

Кристали, в яких спостерігається явище подвійної променезаломлюваності, розділяються на **одновісні й двовісні**. В одновісних кристалах один із заломлених променів підлягає звичайному закону заломлення. Цей промінь називається **звичайним** і позначається буквою *o*. Для іншого променя, який називають **незвичайним** (його позначають буквою *e*), відношення синусів кута падіння й кута заломлення не залишається сталим під час зміни кута падіння. Навіть за нормального падіння світла на кристал незвичайний промінь у загальному разі відхиляється від нормалі (рис. 65.1). Крім того, незвичайний промінь не лежить зазвичай в одній площині з падаючим променем і нормаллю до заломлювальної поверхні. Прикладами одновісних кристалів можуть бути ісландський шпат, кварц і турмалін. У двовісних кристалів (слюда, гіпс) обидва промені незвичайні – показники заломлення в них залежать від напрямку в кристалі. Надалі ми обмежимося розглядом лише одновісних кристалів.

В одновісних кристалах є напрямок, уздовж якого звичайний і незвичайний промені поширюються, не розділяючись, і з однаковою швидкістю. Цей напрямок називається **оптичною віссю кристала**. Варто мати на увазі, що оптична вісь – це не пряма лінія, що проходить через якусь точку кристала, а певний напрямок у кристалі. Будь-яка пряма, що є паралельною цьому напрямку, є оптичною віссю кристала.

Будь-яка площина, що проходить через оптичну вісь, називається **головним перерізом, або головною площиною кристала**. Зазвичай використовують головний переріз, що проходить також і через світловий промінь.

Дослідження звичайного й незвичайного променів показує, що **обидва промені повністю поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках** (див. рис. 65.1). Площина коливань звичайного променя перпендикулярна до головного перерізу кристала. У незвичайному промені коливання світлового вектора відбуваються в площині, що збігається з головним перерізом. Після виходу з кристала обидва промені відрізняються один від одного лише напрямком поляризації, так що назви «звичайний» і «незвичайний» промені мають сенс лише всередині кристала.

Подвійна променезаломленість пояснюється **анізотропією кристалів**. У кристалах некубічної системи діелектрична проникність ϵ виявляється залежною від напрямку. В одновісних кристалах ϵ у напрямку оптичної осі й у напрямках, перпендикулярних до неї, має значення ϵ_{\parallel} та ϵ_{\perp} . В інших напрямках ϵ має проміжні значення. Відомо, що показник заломлення має такий зв'язок із діелектричною проникністю: $n = \sqrt{\epsilon}$. Отже, з анізотропії ϵ випливає, що електромагнітним хвилям із різними напрямками коливань вектора \vec{E} відповідають різні значення показника заломлення n . Тому швидкість світлових хвиль залежить від напрямку коливань світлового вектора \vec{E} .

Одновісні кристали характеризують показником заломлення звичайного променя $n_o = c/v_o$ й показником заломлення незвичайного променя, який поширюється перпендикулярно до оптичної осі, $n_e = c/v_e$. Останню величину називають просто показником заломлення незвичайного променя.

У разі, коли світло падає перпендикулярно на поверхню кристала і водночас оптична вісь кристала перпендикулярна до або паралельна поверхні кристала, то звичайний та незвичайний промені не заломлюються і поширюються не розділяючись. Коли оптична вісь перпендикулярна до поверхні кристала, то промені рухаються вздовж оптичної осі з однаковою швидкістю. Коли оптична вісь паралельна поверхні кристала, то звичайний і незвичайний промені йдуть в одному й тому самому напрямку, але поширюються з різною швидкістю, внаслідок чого між ними виникає все зростаюча різниця фаз.

2 Явище подвійної променезаломленості можна використати для одержання поляризованого світла. Для цього в досліді типу, що зображений на рисунку 65.1, досить затримати один із двох лінійно поляризованих пучків світла, що вийшли з кристала. Проте набагато зручніше користуватися не простими кристалами, а їхніми комбінаціями, які одержали назву **поляризаційні призми**.

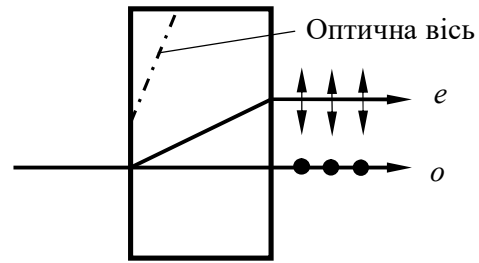


Рисунок 65.1 – Звичайний промінь o є поляризованим у площині, яка перпендикулярна до головного перерізу кристала (площини рисунка), незвичайний промінь e є поляризованим у площині головного перерізу

Перша поляризаційна призма була винайдена в 1828 р. шотландським фізиком Ніколем (1768–1851). Її скорочено називають *ніколем* (*призма Ніколя*). Для виготовлення призми Ніколя у ромбоєдра, який одержано сколюванням з шматка ісландського шпату, шліфують основи так, щоб нові основи утворювали з бічними ребрами кут 68° (замість 71° у природного кристала). Потім кристал розрізають уздовж площини, яка перпендикулярна до нових основ і до головного перерізу кристала (останній перпендикулярний до цих основ і проходить через оптичну вісь кристала). Відполірувавши площини розрізу, обидва шматки склеюють у попередньому положенні тонким шаром канадського бальзаму. Переріз призми Ніколя площиною головного перерізу показаний на рисунку 65.2. Подвійна стрілка, нахилена під кутом 64° до довгого ребра, показує напрямок оптичної осі.

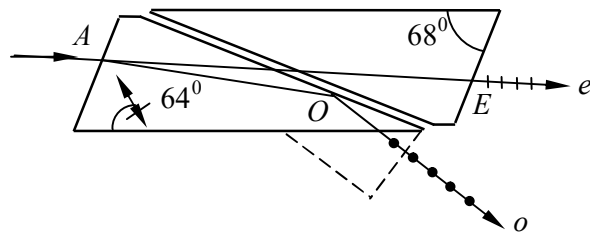


Рисунок 65.2 – Призма Ніколя

Промінь світла, падаючи на виготовлену основу кристала, розділяється всередині кристала на звичайний AO і незвичайний AE . Показник заломлення канадського бальзаму ($n = 1,550$) має проміжне значення між звичайним ($n_o = 1,658$) і незвичайним ($n_e = 1,486$) показниками заломлення ісландського шпату. Кути в призмі Ніколя розраховані так, щоб незвичайний промінь пройшов через шар канадського бальзаму, а звичайний зазнав на ньому повного внутрішнього відбиття й поглинувся зачерненою бічною гранню. У результаті світло, яке виходить із призми, виявляється лінійно поляризованим.

3 Розглянемо проходження лінійно поляризованого світла через кристалічну пластинку, яка вирізана паралельно оптичній осі OO (див. рис. 65.3). За нормального падіння світла на грань кристала промінь перетвориться в звичайний і незвичайний. Ці промені поширюються в кристалі, не розділяючись із різною швидкістю. Вони, як відомо, мають взаємно перпендикулярну поляризацію: площина коливань звичайного променя перпендикулярна до головної площини кристала (площина, що проходить через оптичну вісь і світловий промінь), площина коливань незвичайного променя паралельна головній площині кристала. Через те, що ці промені рухаються з різною швидкістю, між ними виникає різниця ходу

$$\Delta = (n_o - n_e)d \quad (65.1)$$

або різниця фаз

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0} = 2\pi \frac{(n_o - n_e)d}{\lambda_0}, \quad (65.2)$$

де d – шлях, який промені пройшли в кристалі (товщина пластинки); λ_0 – довжина хвилі у вакуумі; n_o , n_e – показники заломлення звичайного й незвичайного променів відповідно.

Отже, за нормального падіння плоскополяризованого світла на пластинку товщиною d , яка вирізана паралельно оптичній осі, з неї вийдуть два когерентних промені, що поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках. Відомо, що під час додавання взаємно перпендикулярних коливань (див. параграф «Додавання взаємно перпендикулярних коливань») у загальному

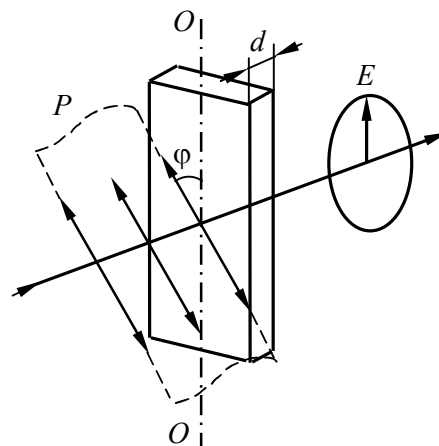


Рисунок 65.3 – Схема одержання еліптично поляризованого світла й світла, яке поляризоване по колу. Рисунок виконаний для випадку, коли $\varphi = 45^\circ$, тобто для колової поляризації

випадку кінець результуючого вектора \vec{E} в поперечній площині рухається по еліпсу. Отже, світло, яке виходить з пластинки, буде еліптично поляризованим. В окремому випадку може вийти світло, яке поляризоване по колу, або плоскополяризоване світло. Яка з цих трьох можливостей реалізується, залежить від товщини кристалічної пластинки, показників заломлення n_o та n_e , а також від співвідношення амплітуд звичайного й незвичайного променів.

Вирізана паралельно оптичній осі пластинка, для якої $(n_o - n_e)d = \lambda_0 / 4$, називається **чвертьхвильовою пластинкою**. Використовуючи пластинку з чверть хвилі, можна одержати еліптично поляризоване світло (а також світло, яке поляризоване по колу). Пропустимо плоскополяризоване світло через пластинку з чверть хвилі (рис. 65.3). Якщо розмістити пластинку так, щоб кут φ між площиною коливань P у падаючому промені й віссю пластинки OO дорівнював 45° (див. рис. 65.3), амплітуди звичайного й незвичайного променів будуть однакові. Різниця фаз між коливаннями на виході з пластинки у цих променях становитиме $\pi/2$. Отже, світло, яке вийшло з пластинки, буде поляризованим по колу. За іншого значення кута φ амплітуди променів, які вийшли з пластинки, будуть неоднаковими. Тому ці промені утворять еліптично поляризоване світло. За φ , який дорівнює 0 або $\pi/2$, у пластинці буде поширюватися лише один промінь (у першому випадку – незвичайний, у другому – звичайний), на виході з пластинки світло залишиться плоскополяризованим із площиною коливань, що збігається з P .

Якщо на шляху еліптично поляризованого світла (або світла, поляризованого по колу) поставити пластинку з чверть хвилі, розмістивши її оптичну вісь уздовж однієї з півосей еліпса, то така пластинка внесе додаткову різницю фаз $\pi/2$. У результаті загальна різниця фаз двох складових із взаємно перпендикулярною поляризацією дорівнюватиме 0 або π , так що суперпозиція цих компонент утворить плоскополяризовану хвилю. Отже, належним чином повернута пластинка з чверть хвилі перетворює еліптично поляризоване світло в плоскополяризоване.

4 У деяких кристалах один із променів поглинається сильніше за інший. Це явище одержало назву **дихроїзму**. Дуже сильний дихроїзм у видимих променях спостерігається у кристалах турмаліну. У ньому звичайний промінь практично повністю поглинається на довжині 1 мм. У кристалах сульфату йодистого хініну один із променів поглинається на шляху приблизно 0,1 мм. Ця обставина використана для виготовлення поляризаційного пристрою, який називається **поляроїдом**. Він являє собою целулоїдну плівку, в яку введена велика кількість однаково орієнтованих кристаликів сульфату йодистого хініну.

ТЕМА 10 ПОШИРЕННЯ СВІТЛА В РЕЧОВИНІ

§ 66 Дисперсія світла. Аномальна та нормальна дисперсія. Показник заломлення світла з погляду електронної теорії речовини

1 **Дисперсією світла** називається явище залежності показника заломлення n речовини від частоти ω (або довжини хвилі λ). Цю залежність можна охарактеризувати функцією

$$n = f(\omega). \quad (66.1)$$

Для всіх прозорих безбарвних речовин функція (66.1) має у видимій частині спектра характер, що показаний на рисунку 66.1. Зі збільшенням частоти показник заломлення зростає: $dn/d\omega > 0$. У цьому разі **дисперсія називається нормальною**.

Якщо речовина поглинає частину променів, то в області поглинання дисперсія виявляє аномалію – показник заломлення під час збільшення частоти зменшується: $dn/d\omega < 0$ (рис. 66.2). Такий хід залежності n від ω називається **аномальною дисперсією**.

2 Дисперсію світла можна пояснити на основі електромагнітної теорії й електронної теорії речовини. Для цього потрібно розглянути процес взаємодії світла з речовиною. Рух

електронів у атомі підлягає законам квантової механіки. Проте, як показав Г. А. Лоренц, для якісного розуміння багатьох оптичних явищ можна застосувати методи класичної фізики і використати гіпотезу про існування всередині атомів електронів, які пов'язані квазіпружно. Будучи виведеними з положення рівноваги, такі електрони починають коливатися, поступово втрачаючи енергію коливання на випромінювання електромагнітних хвиль. Зрозуміло, що такі коливання будуть загасаючими. Загасання можна врахувати, ввівши «силу тертя випромінювання», яка є пропорційною швидкості електрона.

3 Під час проходження електромагнітної хвилі через речовину кожний електрон опиняється під впливом сили Лоренца

$$\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v} \times \vec{B}] = e\vec{E} + e\mu_0[\vec{v} \times \vec{H}], \quad (66.2)$$

де e – заряд електрона; а v – його швидкість. Як відомо, в електромагнітній хвилі відношення напруженостей магнітного й електричного полів у хвилі дорівнює $H/E = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$. Отже, відношення магнітної й електричної складових сил, що діють на електрон, буде дорівнювати

$$\frac{\mu_0 v H}{E} = \mu_0 v \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = v \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{v}{c},$$

де c – швидкість світла. Навіть, якщо б амплітуда коливань електрона A досягла значення приблизно 10^{-10} м, тобто приблизно розмірів атома, амплітуда швидкості електрона $A\omega$ становила б приблизно $10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{15} = 3 \cdot 10^5$ м/с (циклічна частота світлової хвилі $\omega = 2\pi\nu$ дорівнює приблизно $3 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$). Отже, відношення v/c менше 10^{-3} , тому другим доданком у (66.2) можна знехтувати.

4 Отже, можна вважати, що під час проходження через речовину електромагнітної хвилі на кожний електрон діє сила

$$F = eE_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (66.3)$$

де E_0 – амплітуда напруженості електричного поля хвилі; ω – частота електромагнітної хвилі; φ_0 – початкова фаза коливань електрона.

Видиме світло помітно впливає лише на зовнішні, що слабше від інших пов'язані з атомом електрони, які називають валентними або оптичними електронами. Власні частоти внутрішніх електронів сильно відрізняються від частот оптичного діапазону. Тому коливання внутрішніх електронів світловою хвилею практично не збуджуються.

Для простоти розглянемо випадок, коли в атомі є лише один оптичний електрон. Крім того, будемо вважати, що атоми не взаємодіють один з одним (що в першому наближенні справедливо для газоподібних речовин).

Щоб полегшити обчислення, загасанням за рахунок випромінювання спочатку знехтуємо. Рівняння руху електрона у цьому разі має вигляд

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = (e/m)E_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (66.4)$$

де ω_0 – власна частота коливань електрона.

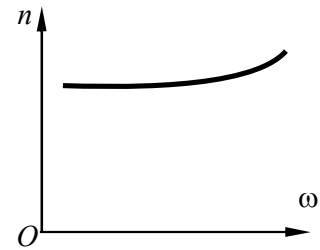


Рисунок 66.1 – Залежність показника заломлення n від частоти світла ω для випадку нормальної дисперсії

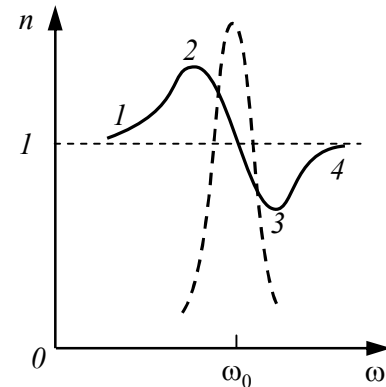


Рисунок 66.2 – Аномальний хід функції $n(\omega)$ в області поглинання. Штриховою лінією зображена залежність коефіцієнта поглинання світла від частоти

Легко перевірити підстановкою, що розв'язком рівняння (66.4) буде функція

$$r(t) = \frac{(e/m)E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{(e/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} E(t),$$

де $E(t)$ – напруженість електричного поля світлової хвилі.

Щоб спростити завдання, будемо вважати молекули неполярними. Крім того, оскільки маси ядер великі порівняно з масою електрона, знехтуємо зміщенням ядер з положень рівноваги під дією поля хвилі. У цьому наближенні дипольний електричний момент молекули можна подати у вигляді

$$p(t) = e \cdot r(t) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E(t). \quad (66.5)$$

Позначимо число молекул в одиниці об'єму буквою N . Добуток $Np(t)$ дає вектор поляризації речовини $P(t)$. Відомо, що діелектрична проникність дорівнює

$$\varepsilon = 1 + \alpha = 1 + \frac{P(t)}{\varepsilon_0 E(t)} = 1 + \frac{N p(t)}{\varepsilon_0 E(t)}.$$

Підставивши сюди відношення $p(t)/E(t)$, які одержуємо з (66.5), і замінивши ε через n^2 одержуємо формулу

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2/m}{\varepsilon_0 \omega_0^2 - \omega^2}. \quad (66.6)$$

Якщо врахувати, що до складу молекули входить декілька валентних електронів, які мають різні власні частоти коливань ω_{0k} , то з (66.6) одержимо

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{N_k e^2}{m \varepsilon_0 (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}. \quad (66.7)$$

За частот ω , що помітно відрізняються від власної частоти ω_{0k} , вираз (66.7) буде малим порівняно з одиницею, так що $n^2 \approx 1$. Поблизу власної частоти функція (66.7) має розриви: під час прямування ω до ω_{0k} зліва вона обертається в $+\infty$, під час прямування ω до ω_{0k} справа – ($-\infty$) (див. рис. 66.3). Така поведінка функції обумовлена тим, що ми знехтували тертям випромінювання (нагадаємо, що під час нехтування тертям амплітуда вимушених коливань за резонансу прагне до нескінченності). Врахування тертя випромінювання приводить до залежності n^2 від ω , що зображена на рисунку 66.3 суцільною кривою. Перейшовши від n^2 до n , одержимо криву, що зображена на рисунку 66.2. Ділянка 1–2 є аналогічною до кривої, що наведена на рисунку 66.1. Ділянки 1–2 і 3–4 відповідають нормальній дисперсії ($dn/d\omega > 0$). На ділянці 2–3 дисперсія є аномальною ($dn/d\omega < 0$).

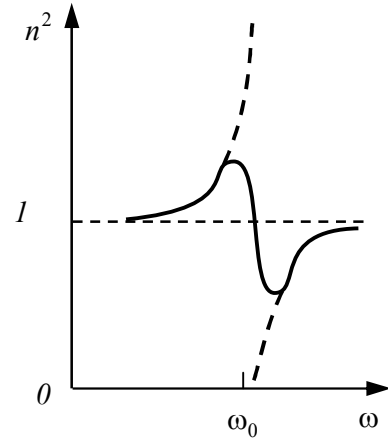


Рисунок 66.3 – Залежність n^2 від ω в області поглинання. Якщо знехтувати тертям випромінювання, функція $n^2(\omega)$ має розриви за резонансної частоти ω_0 коливань оптичного електрона атома

РОЗДІЛ 4

МОДЕЛІ ДЛЯ ОПИСУ КВАНТОВОЇ ПРИРОДИ ВИПРОМІНЮВАННЯ

ТЕМА 11 ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

§ 67 Теплове випромінювання, енергетична світність, поглинальна та випромінювальна здатності тіла. Зв'язок між випромінювальною здатністю як функцією частоти та випромінювальною здатністю як функцією довжини хвилі

1 Тепловим випромінюванням називається електромагнітне випромінювання, що випускається тілами за рахунок їх внутрішньої енергії. Світіння, що збуджується завдяки іншим видам енергії (крім внутрішньої), називають люмінесценцією. На відміну від люмінесценції, теплове випромінювання здатне перебувати в термодинамічній рівновазі з речовиною. Ця властивість є характерною ознакою теплового випромінювання. Тому теплове випромінювання називають рівноважним випромінюванням.

До рівноважних станів і процесів можна застосовувати закони термодинаміки. Тому теплове випромінювання повинне підкорятися деяким загальним закономірностям, що впливають із принципів термодинаміки.

2 Теплове випромінювання будемо характеризувати потоком енергії $\Phi = dW / dt$, тобто кількістю енергії, що випромінюється за одиницю часу. Потік енергії, що випускається одиницею поверхні випромінюючого тіла в усіх напрямках (у межах тілесного кута 2π), називають **енергетичною світністю тіла**:

$$R = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Чим вища температура тіла, тим більше буде випромінюватися енергії за одиницю часу з одиниці поверхні. Отже, енергетична світність R є функцією абсолютної температури T .

Випромінювання складається з хвиль різних частот ω (або довжин λ). Позначимо потік енергії, що випускається одиницею поверхні тіла (тобто світність) в інтервалі частот $d\omega$, через dR_ω . За малого інтервалу $d\omega$ світність dR_ω буде пропорційною $d\omega$:

$$dR_\omega = r_\omega d\omega. \quad (67.1)$$

Величина r_ω у співвідношенні (67.1) називається **випромінювальною здатністю тіла**. Як і енергетична світність, випромінювальна здатність сильно залежить від температури тіла. Отже, r_ω є функція частоти ω й температури T . Щоб підкреслити, що енергетична світність залежить також і від температури, її інколи записують у такому вигляді: $r_{\omega T}$.

Енергетична світність пов'язана з випромінювальною здатністю формулою

$$R = \int dR_\omega = \int_0^\infty r_\omega d\omega. \quad (67.2)$$

3 Випромінювання можна характеризувати замість частоти ω довжиною хвилі λ . Ділянці спектра $d\omega$ буде відповідати інтервал довжин хвиль $d\lambda$. Величини $d\omega$ й $d\lambda$, які визначають одну й ту саму ділянку, пов'язані простим співвідношенням, що впливає з формули $\lambda = 2\pi c / \omega$. Диференціювання дає

$$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega. \quad (67.3)$$

Знак мінус у цьому виразі не має істотного значення, він лише свідчить про те, що зі зростанням однієї з величин, ω або λ , інша величина зменшується. Тому мінус надалі ми не будемо писати.

Частина енергетичної світності, що припадає на інтервал $d\lambda$, може бути за аналогією з (67.1) подана у вигляді

$$\boxed{dR_\lambda = r_\lambda d\lambda}. \quad (67.4)$$

Величину r_λ зі співвідношення (67.4) також називають **випромінювальною здатністю тіла**. Якщо інтервали $d\omega$ і $d\lambda$, що входять у вирази (67.1) і (67.4), пов'язані співвідношенням (67.3), тобто належать до однієї й тієї самої ділянки спектра, то величини dR_ω і dR_λ повинні збігатися:

$$r_\omega d\omega = r_\lambda d\lambda.$$

Замінивши в останній рівності $d\lambda$, згідно з (67.3) одержимо

$$r_\omega d\omega = r_\lambda \frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega,$$

звідси

$$\boxed{r_\omega = r_\lambda \frac{2\pi c}{\omega^2} = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c}}. \quad (67.5)$$

За допомогою формули (67.5) можна перейти від r_λ до r_ω і навпаки.

4 Нехай на елементарну площадку поверхні тіла падає потік енергії теплового випромінювання $d\Phi_\omega$, що обумовлений електромагнітними хвилями, частота яких належить інтервалу $d\omega$. Частина цього потоку $d\Phi'_\omega$ буде поглинута тілом. Безрозмірна величина

$$\boxed{a_{\omega T} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega}} \quad (67.6)$$

називається **поглинальною здатністю тіла**. Поглинальна здатність тіла є функцією частоти й температури.

Для тіла, що повністю поглинає випромінювання всіх частот, яке падає на нього, поглинальна здатність дорівнює одиниці: $a_{\omega T} = 1$. Таке тіло називається **абсолютно чорним**. Тіло, для якого $a_{\omega T} \equiv a_T = \text{const} < 1$, називають **сірим**.

§ 68 Закон Кірхгофа. Універсальна функція Кірхгофа. Експериментальне дослідження універсальної функції Кірхгофа

1 Між випромінювальною та поглинальною здатностями будь-якого тіла є зв'язок. У цьому можна переконатися, розглянувши такий експеримент. Нехай усередину замкненої оболонки, яка підтримується за сталої температури T , поміщені кілька тіл (рис. 68.1). Порожнина всередині оболонки евакуйована, так що тіла можуть обмінюватися енергією між собою й з оболонкою лише шляхом випромінювання й поглинання електромагнітних хвиль. Дослід показує, що така система через деякий час набуде стану теплової рівноваги – усі тіла матимуть одну й ту саму температуру, що дорівнює температурі оболонки T . У такому стані тіло, що має більшу випромінювальну здатність $r_{\omega T}$, втрачає за одиницю часу з одиниці поверхні більше енергії, ніж тіло, що має меншу $r_{\omega T}$. Оскільки температура (а отже, і енергія) тіл не змінюється, то тіло, що випромінює більше енергії, повинне й більше поглинати, тобто мати більшу $a_{\omega T}$. Отже, чим більша випромінювальна здатність тіла $r_{\omega T}$, тим більша і його поглинальна здатність $a_{\omega T}$. Звідси випливає співвідношення

$$\left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_2 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_3 = \dots, \quad (68.1)$$

де індекси 1, 2, 3, ... характеризують різні тіла.

Співвідношення (68.1) виражає **закон Кірхгофа**: відношення випромінювальної та поглинальної здатностей не залежить від природи тіла, воно є для всіх тіл однією й тією самою універсальною функцією частоти (довжини хвилі) і температури:

$$\boxed{r_{\omega T} / a_{\omega T} = f(\omega, T)}. \quad (68.2)$$

Для абсолютно чорного тіла за визначенням $a_{\omega T} = 1$. Отже, з формули (68.2) випливає, що $r_{\omega T}$ для такого тіла дорівнює $f(\omega, T)$. Отже, **універсальна функція Кірхгофа** $f(\omega, T)$ є випромінювальною здатністю абсолютно чорного тіла.

2 Під час теоретичних досліджень для характеристики спектрального складу рівноважного теплового випромінювання зручніше користуватися функцією частоти $f(\omega, T)$. В експериментальних роботах зручніше користуватися функцією довжини хвилі $\varphi(\lambda, T)$. Обидві функції пов'язані одна з одною формулою

$$f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2} \varphi(\lambda, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \varphi(\lambda, T), \quad (68.3)$$

яка випливає з відповідних співвідношень між випромінювальними здатностями $r_{\omega T}$ і $r_{\lambda T}$. Згідно з (68.3) для того, щоб за відомою функцією $f(\omega, T)$ знайти $\varphi(\lambda, T)$, необхідно замінити в $f(\omega, T)$ частоту через $2\pi c / \lambda$ і одержаний вираз помножити на $2\pi c / \lambda^2$:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right). \quad (68.4)$$

Для знаходження $f(\omega, T)$ за відомою $\varphi(\lambda, T)$ потрібно скористатися співвідношенням

$$f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2} \varphi\left(\frac{2\pi c}{\omega}, T\right). \quad (68.5)$$

3 Абсолютно чорних тіл у природі не існує. Сажа має поглинальну здатність $a_{\omega T}$, яка є близькою до одиниці лише в обмеженому інтервалі частот; у далекій інфрачервоній області їх поглинальна здатність помітно менша одиниці. Проте можна створити пристрій, який є дуже близьким за своїми властивостями до абсолютно чорного тіла. Такий пристрій являє собою майже замкнену порожнину з малим отвором (рис. 68.2). Випромінювання, що проникло всередину через отвір, перш ніж вийти назад з отвору, багато разів відбивається від внутрішніх стінок. Під час кожного відбиття частина енергії поглинається, внаслідок чого практично все випромінювання будь-якої частоти такою порожниною поглинається. Відповідно до закону Кірхгофа випромінювальна здатність такого пристрою дуже близька до $f(\omega, T)$, причому T означає температуру стінок порожнини. Отже, якщо стінки порожнини підтримувати за деякої температури T , то з отвору виходить випромінювання, яке є досить близьким за спектральним складом до випромінювання абсолютно чорного тіла за тієї самої температури. Розкладаючи це випромінювання в спектр за допомогою дифракційної ґратки й

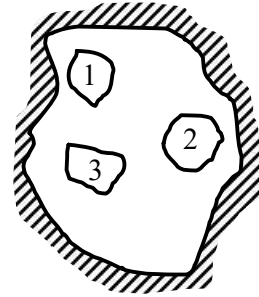


Рисунок 68.1 – Тіла, поміщені в евакуйовану порожнину, стінки якої підтримуються за незмінної температури

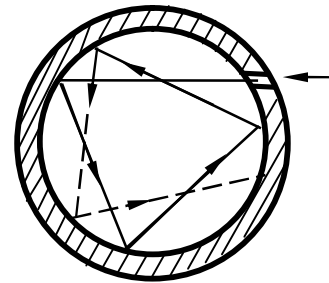


Рисунок 68.2 – Модель абсолютно чорного тіла

вимірюючи інтенсивність різних ділянок спектра, можна знайти експериментально вигляд функції $f(\omega, T)$ або $\varphi(\lambda, T)$. Результати таких дослідів наведені на рисунку 68.3. Різні криві відносять до різних значень температури T абсолютно чорного тіла. Площа, яку охоплює крива, дає енергетичну світність абсолютно чорного тіла за відповідної температури.

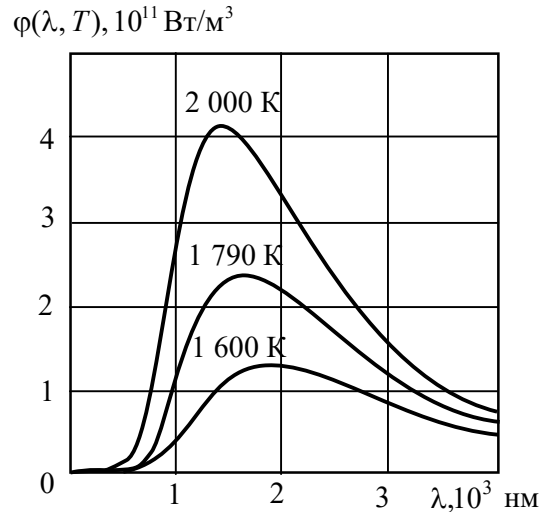


Рисунок 68.3 – Експериментальні криві залежності випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла від довжини хвилі для трьох значень температури

Із рисунка 68.3 випливає, що енергетична світність абсолютно чорного тіла сильно зростає з температурою. Максимум випромінювальної здатності зі збільшенням температури зміщується вбік більш коротких хвиль.

§ 69 Закон Стефана – Больцмана, формула Віна, закон зміщення Віна

1 Теоретичне пояснення законів випромінювання абсолютно чорного тіла мало величезне значення в історії фізики – воно привело до поняття квантів енергії.

Довгий час спроби одержати теоретично вигляд функції $f(\omega, T)$ не давали загального вирішення проблеми. В 1879 р. Стефан, аналізуючи експериментальні дані, дійшов висновку, що енергетична світність будь-якого тіла пропорційна четвертому ступеню термодинамічної температури. Проте наступні більш точні виміри показали помилковість його висновків.

У 1884 р. Больцман, виходячи з термодинамічних міркувань, одержав теоретично для енергетичної світності абсолютно чорного тіла значення

$$R^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (69.1)$$

де σ – стала величина; T – термодинамічна температура. (Щоб підкреслити, що мова йде про енергетичну світність *абсолютно чорного тіла*, ми позначили R зірочкою.) Отже, висновок, до якого Стефан прийшов для нечорних тіл (з абсолютно чорними тілами він не експериментував), виявився справедливим лише для абсолютно чорних тіл.

Співвідношення (69.1) між енергетичною світністю абсолютно чорного тіла та його термодинамічною температурою одержало назву **закону Стефана – Больцмана**. Константу σ називають сталою Стефана – Больцмана. Її експериментальне значення дорівнює

$$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4). \quad (69.2)$$

2 У 1893 р. Він, користуючись, крім термодинаміки, електромагнітною теорією, показав, що універсальна функція Кірхгофа повинна мати вигляд

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (69.3)$$

де F – деяка функція відношення частоти до температури. Співвідношення (69.3) одержало назву **формули Віна**.

3 Використовуючи зв'язок між $f(\omega, T)$ і $\varphi(\lambda, T)$

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right),$$

а також (69.3) знайдемо

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda T), \quad (69.4)$$

де $\psi(\lambda T)$ – деяка функція добутку λT .

Співвідношення (69.4) дозволяє встановити залежність між довжиною хвилі λ_m максимуму функції $\varphi(\lambda, T)$ і температурою. Продиференціюємо це співвідношення за λ :

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda T)\right)' = \frac{1}{\lambda^5} T \psi'(\lambda T) - \frac{5}{\lambda^6} \psi(\lambda T) = \frac{1}{\lambda^6} [\lambda T \psi'(\lambda T) - 5\psi(\lambda T)]. \quad (69.5)$$

Вираз у квадратних дужках є деякою функцією $\Psi(\lambda T)$. За довжини хвилі λ_m , що відповідає максимуму функції $\varphi(\lambda, T)$, вираз (69.5) повинен дорівнювати нулю:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_m} = \frac{1}{\lambda^6} \Psi(\lambda_m T) = 0.$$

Із досліду відомо, що λ_m є скінченною ($\lambda_m \neq \infty$). Тому повинна виконуватися умова $\Psi(\lambda_m T) = 0$. Розв'язок останнього рівняння відносно невідомого $\lambda_m T$ дасть для цього невідомого деяке число, яке позначимо буквою b . Отже, одержали співвідношення

$$\lambda_m T = b, \quad (69.6)$$

яке називають **законом зміщення Віна**. Експериментальне значення константи b дорівнює

$$b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (69.7)$$

§ 70 Формула Релея – Джинса. Ультрафіолетова катастрофа

1 Загальний метод теоретичного визначення функції $f(\omega, T)$ у рамках класичної фізики був запропонований Релеєм і пізніше розвинений Джинсом. Із позицій класичної фізики доведення Релеєм і Джинсом універсальної функції Кірхгофа було бездоганим, проте з дослідом одержаний результат не узгоджувався. Ця розбіжність одержала назву ультрафіолетової катастрофи.

Функцію Кірхгофа $f(\omega, T)$, яка точно відповідає експериментальним даним, вдалося знайти М. Планку в 1900 р. Водночас йому довелося використати далеке від класичних уявлень припущення, що електромагнітне випромінювання випускається у вигляді окремих порцій енергії (квантів). Це було народженням квантової фізики.

2 Розглянемо схему доведення функції Кірхгофа, що є справедливою як і у разі доведення Релея – Джинса, так і у разі доведення Планка.

- 1 Універсальна функція Кірхгофа $f(\omega, T)$, яка є випромінювальною здатністю абсолютно чорного тіла (усереднена за напрямками спектральна густина потоку енергії), пов'язана зі спектральною густиною енергії теплового випромінювання u_ω співвідношенням подібним до формули вектора Умова

$$f(\omega, T) = c \cdot u_\omega / 4, \quad (70.1)$$

де c – швидкість світла.

- 2 Теплове випромінювання є сукупністю власних коливань системи. Визначаємо спектральну кількість власних коливань в одиниці об'єму n_ω .
- 3 Знаходимо середню енергію одного коливання $\langle \varepsilon \rangle$.
- 4 Спектральну густиною енергії теплового випромінювання визначаємо як добуток спектральної кількості коливань в одиниці об'єму на середню енергію одного коливання

$$u_\omega = n_\omega \langle \varepsilon \rangle. \quad (70.2)$$

Далі, підставляючи вираз (70.2) у співвідношення (70.1), знаходимо шукану універсальну функцію Кірхгофа

$$f(\omega, T) = c \cdot n_\omega \langle \varepsilon \rangle / 4.$$

Доведення універсальної функції Кірхгофа Релеєм – Джинсом і Планком відрізняються лише способом знаходження середньої енергії одного коливання $\langle \varepsilon \rangle$.

3 Розглянемо доведення універсальної функції Кірхгофа Релеєм – Джинсом.

Перший пункт схеми

Спектральною густиною енергії теплового випромінювання називають функцію u_ω , яка пов'язана з густиною енергії таким співвідношенням:

$$w = \int_0^\infty u_\omega d\omega, \quad (70.3)$$

де ω – циклічна частота електромагнітної хвилі. Як відомо, енергетична світність абсолютно чорного тіла (потік енергії, що випускається одиницею поверхні випромінювального тіла в

усіх напрямках) пов'язана з універсальною функцією Кірхгофа: $R^* = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega$. З іншого

боку, спрямований потік енергії через одиницю поверхні (густина потоку j) пов'язаний із густиною енергії вектором Умова $j = w \cdot c$. Це означає, що маємо зв'язок

$$R^* = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega \sim w \cdot c = c \cdot \int_0^\infty u_\omega d\omega, \text{ або } f(\omega, T) \sim c \cdot u_\omega. \quad (70.4)$$

Останній вираз у (70.4) пояснює співвідношення (70.1). Коефіцієнт 1/4 у формулі (70.1) пов'язаний з тим, що теплове випромінювання поширюється у всіх напрямках у межах тілесного кута 2π , а вектор Умова визначає співвідношення між величинами хвилі, яка поширюється в одному визначеному напрямку.

Другий пункт схеми

Розглянемо одновимірний випадок. Із вчення про коливання й хвилі відомо, що в закріпленій на кінцях струні найбільш інтенсивними є коливання лише таких частот, коли на довжині струни вкладається ціле число напівхвиль. Ці коливання мають характер стоячих хвиль, причому на кінцях струни розміщені вузли хвилі. Кількість стоячих хвиль і визначає кількість власних коливань системи. Якщо довжина одновимірної області (об'єм одновимірної області) дорівнює a , то тоді можемо записати $a = N \cdot \lambda / 2$, де N – кількість стоячих хвиль (кількість власних коливань), що виникають у досліджуваній системі.

Використаємо зв'язок між довжиною хвилі та частотою $\lambda = 2\pi c/\omega$, і знайдемо кількість власних коливань в одиниці об'єму:

$$n = \frac{N}{a} = \frac{2a}{\lambda a} = \frac{2\omega}{2\pi c} = \frac{\omega}{\pi c}. \quad (70.5)$$

Далі знаходимо спектральну густину коливань (кількість коливань на одиницю частоти)

$$n_\omega = \frac{dn}{d\omega} = \frac{d\omega}{\pi c d\omega} = \frac{1}{\pi c}. \quad (70.6)$$

Розглянемо тривимірний випадок. Аналогічно як і в одновимірній ситуації можна знайти

$$n_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (70.7)$$

Тут враховано, що електромагнітні хвилі теплового випромінювання мають дві взаємно перпендикулярні лінійні поляризації.

Третій пункт схеми

Релей і Джинс визначили середню енергію одного коливання, виходячи з теореми класичної статистичної фізики про рівномірний розподіл кінетичної енергії за ступенями вільності. Згідно з цією теоремою на кожен ступінь вільності припадає однакова кінетична енергія, що дорівнює $kT/2$, де T – абсолютна температура; k – стала Больцмана. Якщо ступінь вільності коливальна, то потрібно врахувати ще й потенціальну енергію. У разі гармонічних коливань середнє значення потенціальної енергії дорівнює також $kT/2$. Отже, в стані статистичної рівноваги на кожний коливальний ступінь вільності припадає середня енергія, що дорівнює kT . Тобто

$$\langle \varepsilon \rangle = kT. \quad (70.8)$$

Четвертий пункт схеми

Енергію в одиниці об'єму $u_\omega d\omega$, що припадає на спектральний інтервал $d\omega$, можемо знайти, перемножуючи кількість коливань $n_\omega d\omega$ у цьому самому спектральному інтервалі на середню енергію такого коливання $\langle \varepsilon \rangle = kT$. Отже, використовуючи (70.7) і (70.8), знаходимо

$$u_\omega = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}. \quad (70.9)$$

Далі використовуючи (70.1), знаходимо шукану універсальну функцію Кірхгофа за Релеєм – Джинсом:

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT \quad (70.10)$$

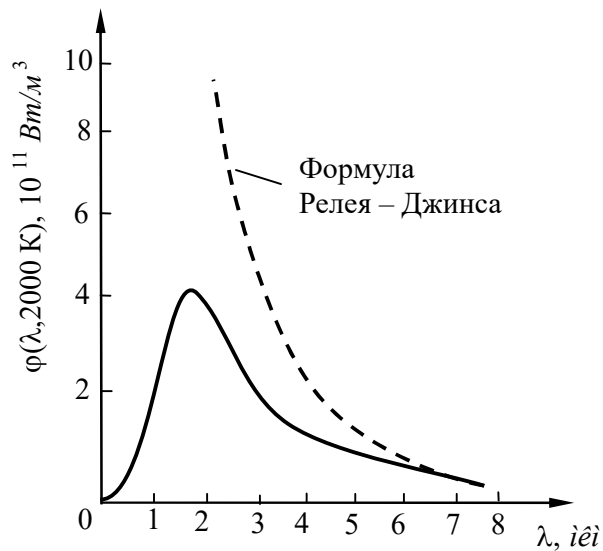


Рисунок 70.1 – Криві залежності випромінювальної здатності $\varphi(\lambda)$ абсолютно чорного тіла від довжини хвилі. Суцільна крива одержана експериментально, штрихова крива побудована за формулою Релея – Джинса

Співвідношення (70.9) та (70.10) називаються **формулами Релея – Джинса** для теплового випромінювання.

4 Формули Релея – Джинса (70.9), (70.10) для теплового випромінювання задовільно узгоджуються з експериментальними даними лише за великих довжин хвиль і різко розходяться з дослідом для малих довжин хвиль (див. рис. 70.1, на якому суцільною лінією зображена експериментальна крива, штриховою – крива, побудована за формулою Релея – Джинса).

Інтегрування виразу (70.10) за ω у межах від 0 до ∞ дає для енергетичної світності абсолютно чорного тіла R нескінченно велике значення. Цей результат, який одержав назву *ультрафіолетової катастрофи*, також суперечить досліду.

Із класичної точки зору доведення формули Релея – Джинса є бездоганним. Тому розбіжність цієї формули з дослідом свідчило про існування якихось закономірностей, несумісних з уявленнями класичної фізики.

§ 71 Гіпотеза Планка. Формула Планка

1 Схема доведення формули для універсальної функції Кірхгофа $f(\omega, T)$ така сама, як і у разі доведення формули Релея – Джинса:

$$f(\omega, T) = c \cdot n_\omega \langle \varepsilon \rangle / 4. \quad (71.1)$$

Тут

$$n_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (71.2)$$

є спектральною густиною власних коливань теплового випромінювання; c – швидкість світла; $\langle \varepsilon \rangle$ – середня енергія одного коливання.

Відмінність полягає лише у визначенні середньої енергії одного коливання $\langle \varepsilon \rangle$.

2 Розглянемо, як М. Планк визначив середню енергію власного коливання теплового випромінювання, і потім знайдемо формулу Планка для універсальної функції Кірхгофа.

Щоб одержати функцію Кірхгофа $f(\omega, T)$, яка узгоджується з експериментальними даними, М. Планку довелося використати далеке від класичних уявлень припущення (*гіпотеза Планка*): **електромагнітне випромінювання випускається у вигляді окремих порцій енергії (квантів), які пропорційні частоті випромінювання:**

$$\boxed{\varepsilon = \hbar\omega = h\nu}, \quad (71.3)$$

де $\omega = 2\pi\nu$; ν – частота електромагнітної хвилі, коефіцієнти пропорційності \hbar та h одержали з часом назву **сталі Планка**. Визначене з досліду значення цієї сталої дорівнює

$$\hbar = 1,0545915 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}, \quad h = 2\pi\hbar = 6,6261937 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}. \quad (71.4)$$

Гіпотеза Планка дала початок новому напрямку розвитку фізики, який одержав назву квантової фізики. Гіпотеза Планка дала початок зміні уявлень людства про мікроскопічний світ.

Якщо випромінювання випускається порціями $\hbar\omega$, то енергія такої хвилі ε_n повинна бути кратною цій величині:

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (71.5)$$

У стані теплової рівноваги розподіл коливань за значеннями енергії повинен підкорятися розподілу Больцмана

$$N_n = A \exp(-\varepsilon_n / (kT)), \quad (71.6)$$

де N_n – кількість коливань, енергія кожного з якого дорівнює ε_n ; A – нормувальний множник; k – стала Больцмана.

У цьому разі середню енергію коливання знаходять так:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{N_0 \cdot 0 + N_1 \cdot \varepsilon_1 + N_2 \cdot \varepsilon_2 + \dots}{N_0 + N_1 + N_2 + \dots} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N_n \varepsilon_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N_n}. \quad (71.7)$$

Тут N_n – число коливань, енергія яких $\varepsilon_n = n\hbar\omega$. Вважаємо, що число можливих значень енергії не обмежено. У чисельнику стоїть сумарна енергія коливань, у знаменнику – повне число коливань.

Підстановка в (71.7) значення (71.5) для ε_n й (71.6) для N_n приводить до формули

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega A \exp(-n\hbar\omega/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} A \exp(-n\hbar\omega/kT)}. \quad (71.8)$$

Щоб виконати обчислення, позначимо $\hbar\omega/(kT) = x$ й припустимо, що x може змінюватися, набуваючи неперервного ряду значень. Тоді вираз (71.8) можна написати у вигляді

$$\langle \varepsilon \rangle = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-nx)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)} = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left(\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) \right) \right). \quad (71.9)$$

Під знаком логарифма у формулі (71.9) стоїть сума членів нескінченної геометричної прогресії з першим доданком, що дорівнює одиниці ($b_1 = 1$), і знаменником прогресії, що дорівнює $q = \exp(-x)$. Через те, що знаменник менше одиниці, прогресія буде спадною, і сума цієї прогресії буде дорівнювати

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\exp(-x)}. \quad (71.10)$$

Підставивши це значення суми в (71.9) і виконавши диференціювання, одержимо

$$\langle \varepsilon \rangle = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left(\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) \right) \right) = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left(\ln \left(\frac{1}{1-\exp(-x)} \right) \right) = \hbar\omega \frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)} = \frac{\hbar\omega}{\exp(x)-1}. \quad (71.11)$$

Нарешті, замінивши x його значенням $\hbar\omega/(kT)$, одержимо остаточний вираз для середньої енергії випромінювання частоти ω :

$$\boxed{\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/(kT))-1}}. \quad (71.12)$$

Зазначимо, що за умови, коли \hbar прямує до нуля, формула (71.12) переходить у класичний вираз $\langle \varepsilon \rangle = kT$. У цьому можна переконатися, поклавши $\exp(\hbar\omega/(kT)) \approx 1 + \hbar\omega/(kT)$, яке виконується тим точніше, чим менше \hbar . Отже, якщо б енергія могла набувати безперервного ряду значень, її середнє значення дорівнювало б kT .

Підставимо одержаний вираз для середньої енергії коливання у (71.1), використаємо (71.2) і одержуємо **формулу Планка** для універсальної функції Кірхгофа

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \cdot \frac{1}{\exp(\hbar\omega/(kT)) - 1}. \quad (71.13)$$

Формула Планка (71.13) точно узгоджується з експериментальними даними у всьому інтервалі частот від 0 до ω . Функція (71.13) задовольняє формулі Віна $\left(f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) \right)$.

За умови, що $\hbar\omega/(kT) \ll 1$ (малі частоти, або великі довжини хвиль), експоненту $\exp(\hbar\omega/(kT))$ можна вважати такою, що приблизно дорівнює $1 + \hbar\omega/(kT)$. Унаслідок цього формула Планка переходить у формулу Релея – Джинса. Це впливає також з того, що за зазначеної вище умови вираз (71.12) наближено дорівнює kT .

Із формули Планка випливають закони Стефана – Больцмана й Віна. Отже, формула Планка дає вичерпний опис рівноважного теплового випромінювання.

Тому ідея про те, що випромінювання випускається у вигляді окремих порцій енергії (квантів), а не неперервно привела до результату, який повністю узгоджується з експериментом.

ТЕМА 12 ФОТОНИ

§ 72 Гальмівне рентгенівське випромінювання. Короткохвильова межа рентгенівського випромінювання

1 У 1895 р. Рентген виявив, що під час бомбардування скла й металів швидкими електронами виникає випромінювання, яке має велику проникну здатність. Сам Рентген назвав відкрите ним випромінювання *X-променями* (ікс-променями). Потім воно одержало назву **рентгенівських променів**. Подальші дослідження показали, що рентгенівське випромінювання є електромагнітним випромінюванням із довжиною хвилі в межах від 10^{-2} нм до 10 нм.

2 Сучасна **рентгенівська трубка** (рис. 72.1) складається з евакуйованого балона з декількома електродами. Катод K є джерелом вільних електронів, які випромінюються внаслідок термоелектронної емісії. Циліндричний електрод Γ призначений для фокусування електронного пучка. Мішенню є анод A , який називають також антикатодом. Його виготовляють із важких металів (W , Cu , Pt тощо). Прискорення електронів здійснюється високою напругою, що створюється між катодом і антикатодом. Майже вся енергія електронів виділяється на антикатоді у вигляді теплоти (у випромінювання перетворюється лише 1–3 % енергії). Тому в потужних трубках антикатод доводиться інтенсивно охолоджувати. З цією метою в тілі антикатада роблять канали, якими циркулює охолоджувальна рідина (вода або масло).

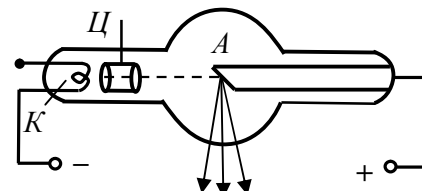


Рисунок 72.1 – Схема рентгенівської трубки

3 Якщо між катодом і антикатодом прикладені напруга U , електрони розганяються до енергії eU . Потрапивши в речовину антикатада, електрони сильно гальмуються, тобто рухаються з великим прискоренням і тому стають джерелом електромагнітних хвиль. За достатньо великої початкової швидкості електронів, крім **гальмівного випромінювання** (тобто випромінювання, яке обумовлене гальмуванням електронів), збуджується також **характеристичне випромінювання** (викликане збудженням внутрішніх електронних оболонок атомів антикатада). У цьому параграфі нас буде цікавити лише гальмівне випромінювання. Відповідно до класичної електродинаміки під час гальмування електрона повинні виникати хвилі всіх довжин – від нуля до нескінченності. Довжина хвилі, на яку припадає максимум потужності випромінювання, повинна зменшуватися зі збільшенням швидкості електронів, тобто напруги U на трубці. На рисунку 72.2 подані експериментальні

криві розподілу потужності гальмівного рентгенівського випромінювання за довжинами хвиль, які одержані для різних значень U . З рисунка випливає, що висновки теорії в основному підтверджуються на досліді. Проте є одне принципове неузгодження з класичною електродинамікою. Воно полягає у тому, що *криві розподілу потужності не йдуть до початку координат, а обриваються за скінченних значень довжини хвилі λ_{\min}* . Ці значення довжини хвиль називають **короткохвильовою межею рентгенівського випромінювання**.

Експериментально встановлено, що короткохвильова межа гальмівного рентгенівського спектра λ_{\min} (у нанометрах) пов'язана з прискорювальною напругою U (у вольтах) співвідношенням

$$\lambda = 1239 / U. \quad (72.1)$$

Існування короткохвильової межі є одним з підтверджень уявлень про випромінювання електромагнітних хвиль порціями $\hbar\omega$. Дійсно, якщо випромінювання виникає за рахунок енергії, що втрачається електроном під час гальмування, то величина кванта $\hbar\omega$ не може перевищувати енергію електрона eU :

$$\hbar\omega \leq eU.$$

Звідси випливає, що частота випромінювання не може перевищувати $\omega_{\max} = eU / \hbar$, а отже, довжина хвилі не може бути меншою ніж

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi\hbar c}{e}. \quad (72.2)$$

Порівнюючи чисельники формул (72.1) і (72.2), прийдемо до рівності $2\pi\hbar c / e = 1239 \cdot 10^{-9}$ (ми перейшли від нанометрів до метрів). Звідси для \hbar одержуємо значення

$$\hbar = \frac{1239 \cdot 10^{-9} e}{2\pi c} = 1,053 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

яке збігається зі значенням, що випливає із законів теплового випромінювання.

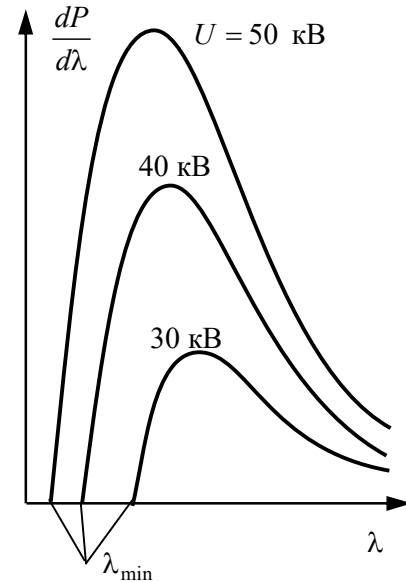


Рисунок 72.2 – Криві розподілу потужності гальмівного рентгенівського випромінювання за довжинами хвиль

§ 73 Зовнішній фотоэффект. Закони фотоэффекту. Формула Ейнштейна для фотоэффекту

1 **Фотоелектричним ефектом, або фотоелектром** називається вибивання електронів речовини під дією світла. Це явище було відкрито Г.Герцом у 1887 р. Він помітив, що проскакування іскри між кульками розрядника значно полегшується, коли одну з кульок освітити ультрафіолетовими променями.

У 1888–1889 рр. А. Г. Столетов провів систематичне дослідження фотоелектру за допомогою установки, схема якої зображена на рисунку 73.1. Конденсатор, що утворений дротяною сіткою й суцільною пластинною, був ввімкнений послідовно з гальванометром G у ланцюг батареї. Світло, проходячи через сітку, падало на суцільну пластину. Унаслідок цього в електричному колі виникав струм, який реєструвався гальванометром. На базі своїх дослідів Столетов дійшов до таких висновків: 1) найбільшу дію мають ультрафіолетові промені; 2) сила струму зростає

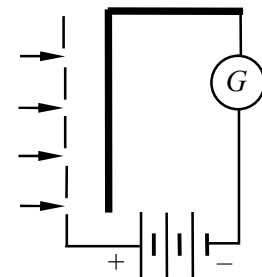


Рисунок 73.1 – Схема дослідів для спостереження фотоелектру

зі збільшенням освітленості пластини; 3) заряди, що випускаються під дією світла, мають від'ємний знак.

Через 10 років (у 1898 р.) Ленард і Томсон, вимірявши питомий заряд частинок, які вибиваються під дією світла, встановили, що ці частинки є електронами (електрон був відкритий Томсоном у 1897 р.).

2 Ленард й інші дослідники вдосконалили прилад Столетова, помістивши електроди в евакуйований балон (рис. 73.2). Світло, що проникає через кварцове віконце $Kв$, освітлює катод K , який виготовлений з досліджуваного матеріалу. Електрони, вибиті внаслідок фотоефекту, рухаються під дією електричного поля до анода A . Внаслідок цього в електричному колі приладу проходить фотострум, який вимірюється гальванометром G . Напругу між анодом і катодом можна змінювати за допомогою потенціометра Π .

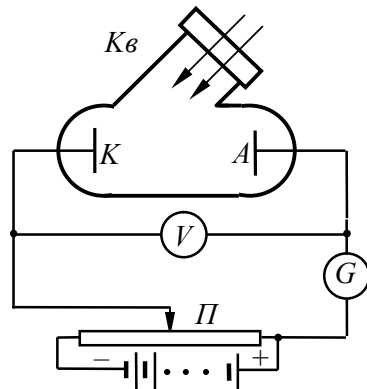


Рисунок 73.2 – Вдосконалена схема дослідження фотоефекту

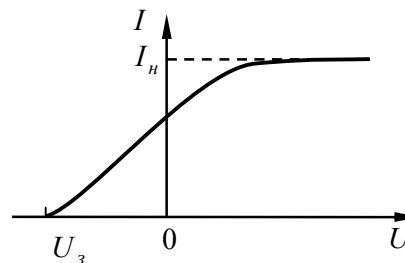


Рисунок 73.3 – Залежність фотоструму I від напруги між електродами U

Одержана на такому приладі вольт-амперна характеристика (тобто крива залежності фотоструму I від напруги між електродами U) наведена на рисунку 73.3. Зрозуміло, що вольт-амперна характеристика знімається за незмінного потоку світла Φ . Із цієї кривої видно, що за деякої не дуже великої напруги фотострум досягає насичення – всі електрони, які випущені катодом, потрапляють на анод. Отже, сила струму насичення I_n визначається кількістю електронів, які випускаються катодом за одиницю часу під дією світла.

Пологий хід кривої свідчить про те, що електрони вилітають із катода з різними за величиною швидкостями. Частина електронів, що відповідає силі струму за $U = 0$, має швидкості, які є достатніми для того, щоб долетіти до анода «самостійно», без допомоги прискорювального поля. Для того щоб сила струму стала дорівнювати нулю, потрібно прикласти **затримувальну напругу** $U_з$. За такої напруги жодному з електронів, який навіть має під час вильоту з катода **найбільше значення швидкості** v_m , не вдається перебороти затримувальне поле й досягти анода. Тому можна написати, що

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eU_з, \quad (73.1)$$

де m – маса електрона. Отже, вимірявши затримувальну напругу $U_з$, можна визначити максимальне значення швидкості фотоелектронів.

До 1905 р. було експериментально з'ясовано, що максимальна швидкість фотоелектронів не залежить від інтенсивності світла, а залежить лише від його частоти – збільшення частоти приводить до зростання швидкості. Також було визначено, що струм насичення I_n є пропорційним до інтенсивності світла, яке падає на поверхню досліджуваного матеріалу.

Отже, дослідним шляхом були встановлені **три закони фотоефекту**:

1) Максимальна початкова швидкість фотоелектронів визначається частотою світла й не залежить від його інтенсивності.

2) Для кожної речовини існує червона межа фотоефекту, тобто така найменша частота світла ω_0 , за якої ще можливий фотоефект.

3) Число фотоелектронів, що вириваються з катода за одиницю часу (струм насичення I_n), прямо пропорційне інтенсивності світла.

Установлені експериментально залежності не вкладаються в межі класичних уявлень. Наприклад, швидкість фотоелектронів за класичними поняттями повинна зростати з амплітудою, а отже, і з інтенсивністю електромагнітної хвилі.

3 У 1905 р. А. Ейнштейн показав, що всі закономірності фотоефекту легко пояснюються, якщо припустити (гіпотеза Ейнштейна), що світло поглинається такими самими порціями $\hbar\omega$ (квантами), якими воно, за припущенням Планка, випромінюється. На думку Ейнштейна, енергія, одержана електроном, передається йому у вигляді кванта $\hbar\omega$, який ним поглинається повністю. Частина цієї енергії, яка дорівнює роботі виходу A , витрачається на те, щоб електрон міг покинути тіло. Якщо електрон звільняється світлом не біля поверхні, а на деякій глибині, то частина енергії, яка дорівнює E' , може бути загублена внаслідок випадкових зіткнень у речовині. Залишок енергії утворює кінетичну енергію E_k електрона, який покинув речовину. Енергія E_k буде максимальною, коли $E' = 0$. У цьому разі повинно виконуватися співвідношення

$$\hbar\omega = \frac{1}{2} m v_m^2 + A \quad (73.2)$$

яке називається **формулою Ейнштейна** для фотоефекту.

Фотоефект і робота виходу залежать від стану поверхні металу (зокрема, від окисів, що розміщені на ній, адсорбованих речовин). Тому довгий час не вдавалося перевірити формулу Ейнштейна з достатньою точністю. У 1916 р. Міллікен створив прилад, в якому досліджувані поверхні піддавалися очищенню у вакуумі, після чого вимірялася робота виходу й досліджувалася залежність максимальної кінетичної енергії фотоелектронів від частоти світла (ця енергія визначалася шляхом вимірювання затримувального потенціалу U_s). Результати виявилися в повній відповідності до формули (73.2).

Підставивши у формулу (73.2) виміряні значення A й $m v_m^2 / 2$ (за певної ω), Міллікен визначив значення сталої Планка \hbar , яка збігалася зі значеннями, знайденими зі спектрального розподілу рівноважного теплового випромінювання й з короткохвильової межі гальмівного рентгенівського спектра.

Із формули (73.2) випливає, що у разі, коли робота виходу A перевищує енергію кванта $\hbar\omega$, електрони не можуть покинути метал. Отже, для виникнення фотоефекту необхідне виконання умови $\hbar\omega \geq A$, або

$$\omega \geq \omega_0 = A / \hbar. \quad (73.3)$$

Відповідно для довжини хвилі маємо умову

$$\lambda \leq \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A}. \quad (73.4)$$

Частота ω_0 або довжина хвилі λ_0 називається **червоною межею фотоефекту**.

Кількість електронів, які вивільняються внаслідок фотоефекту, повинна бути пропорційна кількості падаючих на поверхню квантів світла. Водночас світловий потік Φ визначається кількістю квантів світла, що падають на поверхню за одиницю часу. Відповідно до цього струм насичення I_n повинен бути пропорційний падаючому світловому потоку:

$$I_n \sim \Phi. \quad (73.5)$$

Зазначимо, що лише мала частина квантів передає свою енергію фотоелектронам. Енергія інших квантів витрачається на нагрівання речовини, яка поглинає світло.

Крім розглянутого нами вище зовнішнього фотоефекту (який називають просто фотоефектом), існує також внутрішній фотоефект, який спостерігаємо в діелектриках і напівпровідниках. Про нього буде йти мова пізніше.

§ 74 Фотони. Дослід Боте. Властивості фотонів. Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла

1 Щоб пояснити розподіл енергії у спектрі рівноважного теплового випромінювання, досить, як показав Планк, припустити, що світло лише випромінюється порціями $\hbar\omega$. Для пояснення фотоефекту досить припустити, що світло поглинається такими самими порціями. Проте Ейнштейн пішов значно далі. Він висунув гіпотезу, що світло й поширюється у вигляді дискретних частинок, які спочатку назвали світловими квантами. Потім ці квазічастинки одержали назву **фотонів**.

2 Найбільш безпосереднє підтвердження гіпотези Ейнштейна дав **дослід Боте**. Тонка металева фольга Φ (рис. 74.1) розміщувалася між двома газорозрядними лічильниками L . Фольга опромінювалася слабким пучком рентгенівських променів, під дією яких вона сама ставала джерелом рентгенівських променів (це явище називається рентгенівською флуоресценцією). Внаслідок малої інтенсивності первинного пучка кількість квантів, що випромінювалася фольгою, була невеликою. Під час попадання рентгенівських променів на лічильник він спрацьовував і пускав у хід особливий механізм M , що робив відмітку на рухомій стрічці C . Якби випромінювана енергія поширювалася рівномірно в усі сторони, як це впливає із хвильових уявлень, обидва лічильники повинні були б спрацьовувати одночасно й відмітки на стрічці розміщувалися б одна проти одної. У дійсності ж спостерігалось абсолютне невпорядковане розміщення відміток. Це можна пояснити лише тим, що в окремих актах випромінювання виникають світлові частинки, які летять то в одному, то в іншому напрямку.

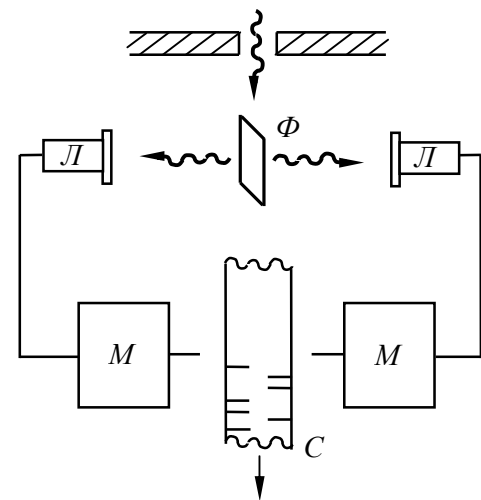


Рисунок 74.1 – Схема досліду Боте

Отже, було експериментально доведено існування особливих частинок світла – фотонів.

3 Розглянемо властивості фотонів. Енергія фотона відповідно до гіпотези Ейнштейна визначається його частотою

$$E = \hbar\omega. \quad (74.1)$$

Фотон рухається з такою самою швидкістю, як і електромагнітна хвиля у вакуумі. Це означає, що швидкість фотона

$$v = c$$

дорівнює швидкості світла. Необхідно взяти до уваги, що фотони рухаються зі швидкістю c не лише у вакуумі, а й у речовині. «Сповільнення» світла в речовині обумовлене тим, що під час проходження через речовину фотони поглинаються атомами, а потім випромінюються знову. Між актами поглинання й випромінювання проходить деякий час, унаслідок чого середня швидкість фотонів у речовині виявляється меншою ніж c .

Енергія E й імпульс частинки p , як впливає зі спеціальної теорії відносності, пов'язані між собою таким виразом:

$$p = \frac{E}{c^2} v. \quad (74.2)$$

Підставивши у цю формулу вираз для енергії (74.1), одержимо для імпульсу фотона зв'язок з частотою світла

$$p = \frac{E}{c^2} c = \frac{\hbar \omega}{c}. \quad (74.3)$$

Замінивши у формулі (74.3) частоту ω через довжину хвилі λ , одержимо для імпульсу фотона вираз

$$p = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad (74.4)$$

(k – хвильове число). Фотон летить у напрямку поширення електромагнітної хвилі. Тому напрямки імпульсу \vec{p} і хвильового вектора \vec{k} збігаються. Отже, формулу (74.4) можна записати у векторному вигляді:

$$\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k}}. \quad (74.5)$$

Зі спеціальної теорії відносності також відоме співвідношення, яке пов'язує імпульс p , повну енергію E та масу спокою m частинки:

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4. \quad (74.6)$$

Підставимо в (74.6) формули (74.1) та (74.3) і одержимо для маси спокою

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - c^2 p^2}}{c^2} = \frac{\sqrt{(\hbar \omega)^2 - c^2 (\hbar \omega / c)^2}}{c^2} = 0. \quad (74.7)$$

Отже, маса спокою фотона дорівнює нулю.

Під час взаємодії з речовиною фотони можуть випромінюватися, поглинатися й розсіюватися. Збереження числа фотонів не має місця. Але закони збереження енергії й імпульсу для фотонів повинні виконуватися.

Отже, фотон є частинкою особливого роду, яка відрізняється від таких частинок, як електрон, протон тощо, що можуть існувати, рухаючись зі швидкостями, меншими за швидкість світла c , і навіть перебувати в стані спокою.

4 Ми розглянули низку явищ, в яких світло є потоком частинок (фотонів). Проте не потрібно забувати, що такі явища, як інтерференція й дифракція світла, можуть бути пояснені лише на основі хвильових подань. **Отже, світло виявляє корпускулярно хвильовий дуалізм (подвійність): в одних явищах проявляється його хвильова природа, і він веде себе як електромагнітна хвиля, в інших явищах проявляється корпускулярна природа світла, і він є потоком фотонів.** Далі ми побачимо, що корпускулярно-хвильовий дуалізм властивий не лише квантам світла (фотонам), а й частинкам речовини (електронам, протонам, атомам тощо).

З'ясуємо, як пов'язані між собою хвильова й корпускулярна картина. Відповідь на це питання можна одержати, розглянувши з обох точок зору освітленість деякої поверхні. Відповідно до хвильових уявлень освітленість у деякій точці поверхні пропорційна квадрату амплітуди світлової хвилі. З корпускулярної точки зору освітленість пропорційна густині потоку фотонів. Отже, між квадратом амплітуди світлової хвилі й густиною потоку фотонів є пряма пропорційність. Тому хвильові властивості світла пов'язані з кількістю фотонів, що потрапляють у цю точку простору. *Тобто хвильові властивості світла з точки зору корпускулярних уявлень пов'язані зі статистичними властивостями потоку фотонів.*

§ 75 Ефект Комптона. Зміна довжини хвилі фотона під час його розсіювання на електроні

1 Особливо виразно проявляються корпускулярні властивості світла в явищі, яке одержало назву *ефекту Комптона*. У 1923 р. Комптон, досліджуючи розсіювання рентгенівських променів різними речовинами, виявив, що в розсіяних променях разом із випромінюванням початкової довжини хвилі λ містяться також промені більшої довжини хвилі λ' . Різниця $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ виявилася залежною лише від кута θ між напрямками розсіяного випромінювання та первинного пучка. Виявилось, що від довжини хвилі λ й від природи речовини, на якій відбувається розсіювання, $\Delta\lambda$ не залежить.

2 Схема досліду Комптона зображена на рисунку 75.1. Діафрагмами D виділяється вузький пучок монохроматичного (характеристичного) рентгенівського випромінювання й спрямовується на розсіювальну речовину PP . Спектральний склад розсіяного випромінювання досліджується за допомогою рентгенівського спектрографа, який складається з кристала Kp й іонізаційної камери IK .

На рисунку 75.2 наведені результати дослідження розсіювання монохроматичного рентгенівського випромінювання (лінія K_α молібдену) на графіті. Крива a характеризує первинне випромінювання. Інші криві належать до різних кутів розсіювання θ , значення яких подані на рисунку. Вздовж осі ординат відкладена інтенсивність випромінювання, вздовж осі абсцис – довжина хвилі.

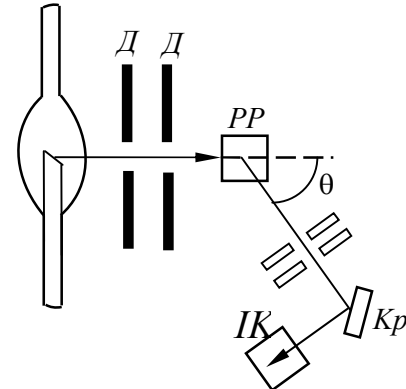


Рисунок 75.1 – Схема досліду Комптона

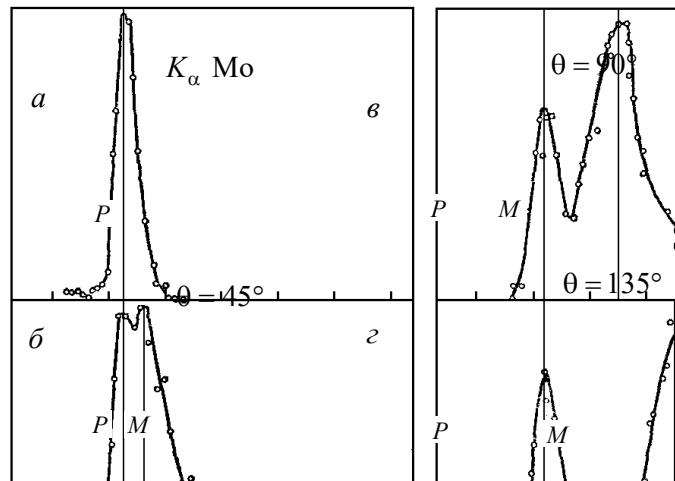


Рисунок 75.2 – Залежність інтенсивності розсіяного на графіті рентгенівського випромінювання від довжини хвилі

3 Усі особливості ефекту Комптона можна пояснити, розглядаючи розсіювання як процес пружного зіткнення рентгенівських фотонів із практично вільними електронами. Вільними можна вважати електрони, які слабо зв'язані з атомами, енергія зв'язку яких значно менша від тієї енергії, яку фотон може передати електрону під час зіткнення.

Нехай на вільний електрон, який у початковому стані перебуває в стані спокою, падає фотон з енергією $\hbar\omega$ й імпульсом $\hbar\vec{k}$ (рис. 75.3). Енергія електрона до зіткнення дорівнює mc^2 (m – маса електрона), імпульс дорівнює нулю. Після зіткнення електрон буде мати імпульс \vec{p} й енергію, яка дорівнює $c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ (див. відповідну формулу спеціальної теорії

відносності). Енергія й імпульс фотона також зміняться й будуть дорівнювати $\hbar\omega'$ й $\hbar\vec{k}'$. Із законів збереження енергії й імпульсу випливають дві рівності:

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \quad (75.1)$$

$$\hbar\vec{k} = \vec{p} + \hbar\vec{k}' \quad (75.2)$$

Розділимо першу рівність на c й напишемо її у вигляді

$$\sqrt{p^2 + m^2c^2} = \hbar(k - k') + mc$$

($\omega/c = k$). Піднесення до квадрата дає

$$p^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar mc(k - k'). \quad (75.3)$$

З (75.2) випливає, що

$$p^2 = \hbar^2(\vec{k} - \vec{k}')^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta) \quad (75.4)$$

(θ – кут між векторами \vec{k} й \vec{k}' , див. рис. 75.3). Із порівняння виразів (75.3) і (75.4) одержуємо

$$mc(k - k') = \hbar kk'(1 - \cos \theta).$$

Помножимо цю рівність на 2π й розділимо на $mckk'$:

$$\frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos \theta).$$

Нарешті, врахувавши, що $2\pi/k = \lambda$, прийдемо до формули

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta), \quad (75.5)$$

де

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}. \quad (75.6)$$

Обумовлена цим виразом величина λ_C називається **комтонівською довжиною хвилі** тієї частинки, про масу m якої йде мова. У розглянутому нами випадку λ_C – комтонівська довжина хвилі електрона. Підстановка значень \hbar , m і c дає для λ_C електрона значення

$$\lambda_C = 0,00243 \text{ нм}. \quad (75.7)$$

Результати вимірювань Комптона є у повній узгодженості з формулою (75.5), якщо підставити в неї значення (75.7) для λ_C .

- 1 Під час розсіювання фотонів на електронах, зв'язок яких з атомом достатньо сильний, обмін енергією й імпульсом відбувається з атомом як цілим. Оскільки маса атома набагато перевершує масу електрона, комтонівське зміщення у цьому разі є дуже малим й λ' практично збігається з λ . Через зростання атомного номера збільшується відносне число електронів із сильним зв'язком, чим і обумовлюється ослаблення зміщеної лінії.

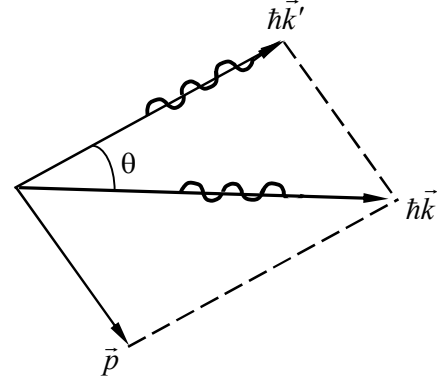


Рисунок 75.3 – Розсіювання рентгенівського фотона на електроні, який спочатку перебував у стані спокою: \vec{p} – імпульс електрона; $\hbar\vec{k}$ – імпульс фотона до зіткнення з електроном; $\hbar\vec{k}'$ – імпульс фотона після зіткнення; θ – кут розсіювання

РОЗДІЛ 5

ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЕЙ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ

ТЕМА 13 БОРІВСЬКА ТЕОРІЯ АТОМА

§ 76 Дослід Резерфорда. Ядерна модель атома. Залежність кількості α -частинок в одиниці тілесного кута від кута розсіювання. Проблема стабільності атома з погляду ядерної моделі атома

1 Дослід Резерфорда. Цікавість людини є безмежною. Яка внутрішня структура атома – найдрібнішої частинки хімічного елемента? Атом є електрично нейтральним, як усередині атома розподілені додатні та від’ємні електричні заряди? Відповіді на ці запитання шукали Резерфорд і його співробітники за допомогою α -частинок, спостерігаючи зміну напрямку їх польоту (розсіювання), під час проходження через тонкі шари речовини.

Саме тоді, коли Резерфорд розпочинав свої досліді, було відомо, що α -частинки випромінюються деякими речовинами за радіоактивного розпаду. Швидкості α -частинок мають порядок 10^7 м/с. Вони мають додатний заряд, що дорівнює подвоєному елементарному заряду. Під час втрати цього заряду (під час приєднання двох електронів) α -частинка перетворюється в атом гелію.

Дослід виконувався так (рис. 76.1): α -частинки випромінювалися радіоактивною речовиною P , проходили через вузький отвір і потрапляли на тонку металеву фольгу Φ . Під час проходження через фольгу α -частинки відхилялися від початкового напрямку руху на різні кути. Розсіяні α -частинки вдарялися об екран E , який був покритий сірчистим цинком, і викликане ударами світіння спостерігалися в мікроскоп M . Мікроскоп і екран можна було обертати навколо осі, що проходить через центр розсіювальної фольги, і встановлювати під будь-яким кутом θ . Весь прилад розміщувався у посудині, з якої було відкачано повітря. Це було зроблено для того, щоб усунути розсіювання α -частинок за рахунок зіткнень із молекулами повітря.

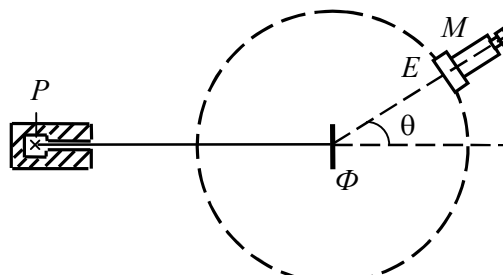


Рисунок 76.1 – Схема дослідів Резерфорда

2 Ядерна модель атома.

Виявилося, що деяка кількість α -частинок розсіюється на дуже великі кути (майже до 180°). Проаналізувавши результати дослідів, Резерфорд дійшов висновку, що настільки сильне відхилення α -частинок можливо лише в тому разі, коли всередині атома є надзвичайно сильне електричне поле, що створюється зарядом, який пов’язаний з великою масою й сконцентрований у дуже малому об’ємі. Грунтуючись на цьому висновку, Резерфорд запропонував у 1911 р. **ядерну модель атома**. Відповідно до Резерфорда атом являє собою систему зарядів, у центрі якої розміщене важке додатне

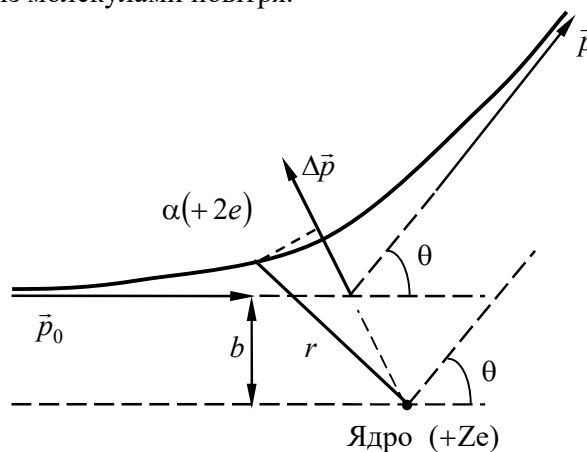


Рисунок 76.2 – Траєкторія руху α -частинки під час розсіювання на ядрі

ядро з зарядом Ze з розміром не більше ніж 10^{-14} м, а навколо ядра розміщені Z електронів, що розподілені в усьому об'ємі атома. Майже вся маса атома зосереджена в ядрі.

3 Залежність кількості α -частинок в одиниці тілесного кута від кута розсіювання.

Виходячи з таких припущень, Резерфорд розробив кількісну теорію розсіювання α -частинок і довів формулу для розподілу розсіяних частинок залежно від кута θ . Під час доведення формули Резерфорд міркував так. Відхилення α -частинок обумовлені впливом на них атомних ядер. Помітного відхилення через взаємодію з електронами не може бути, оскільки маса електрона на чотири порядки менша від маси α -частинки.

Коли частинка пролітає поблизу ядра, на неї діє кулонівська сила відштовхування

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2}. \quad (76.1)$$

У цьому разі траєкторія частинки являє собою гіперболу. Кут між асимптотами гіперболи позначимо буквою θ (рис. 76.2). Цей кут характеризує відхилення частинки від первісного напрямку. Відстань b від ядра до первісного напрямку польоту α -частинки називається прицільним параметром. Чим ближче пролітає частинка від ядра (чим менше b), тим, природно, сильніше вона відхиляється (тим більше θ). Величини b і θ пов'язані між собою співвідношенням

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}{2Ze^2} b, \quad (76.2)$$

яке можна довести, використовуючи закон збереження повної механічної енергії та моменту імпульсу.

Розглянемо настільки тонкий шар розсіювальної речовини, щоб кожна частинка під час проходження через нього пролітала поблизу лише одного ядра, тобто щоб кожна частинка мала лише однократне розсіювання. Для того щоб частинка відхилилася на кут, що лежить у межах від θ до $\theta + d\theta$, вона повинна пролетіти поблизу одного з ядер по траєкторії, прицільний параметр якої міститься в межах від b до $b + db$ (рис. 76.3), причому db і $d\theta$, як випливає з (76.2), пов'язані співвідношенням

$$-\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \frac{d\theta}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}{2Ze^2} db. \quad (76.3)$$

Знак мінус у цьому виразі обумовлений тим, що зі збільшенням b (тобто за $db > 0$) кут відхилення зменшується ($d\theta < 0$). Надалі нас буде цікавити лише абсолютне значення db у функції від θ , і тому знак мінус ми не будемо враховувати.

Позначимо площу поперечного перерізу пучка α -частинок буквою S . Тоді кількість атомів фольги на шляху пучка можна подати у вигляді nSa , де n – число атомів в одиниці об'єму; a – товщина фольги. Якщо α -частинки розподілені рівномірно по перерізу пучка й число їх дуже велике (що насправді можливо), то відносна кількість α -частинок, що пролітають поблизу одного з ядер по траєкторії із прицільним параметром від b до $b + db$ (і, отже, які відхиляються в межах кутів від θ до $\theta + d\theta$), буде дорівнювати відношенню відповідних площ (див. рис. 76.4):

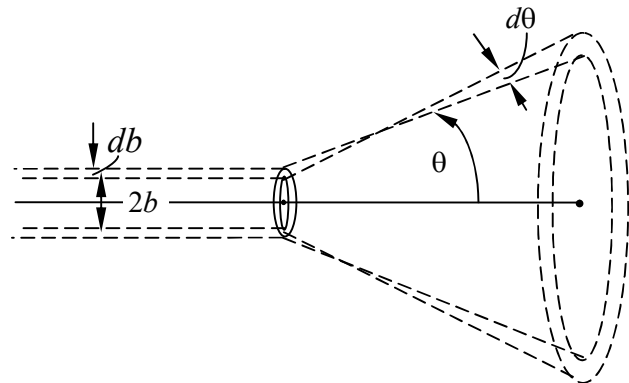


Рисунок 76.3 – До залежності кута розсіювання θ від прицільного параметру b

$$\frac{dN_\theta}{N} = \frac{nSa \cdot 2\pi b db}{S} = na2\pi b db. \quad (76.4)$$

У цьому виразі dN_θ – потік частинок, що розсіюються в межах кутів від θ до $\theta + d\theta$, N – повний потік частинок у пучку.

Замінивши у формулі (76.4) b і db через θ і $d\theta$ відповідно до (76.2) і (76.3), одержимо

$$\frac{dN_\theta}{N} = na \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \right)^2 2\pi \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{1}{2 \sin^2(\theta/2)} \frac{d\theta}{2}. \quad (76.5)$$

Перетворимо множники, що містять кут θ :

$$\frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = \frac{\cos(\theta/2) \sin(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{\sin \theta}{2 \sin^4(\theta/2)}.$$

З урахуванням цього перетворення

$$\frac{dN_\theta}{N} = na \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4 \sin^4(\theta/2)}.$$

Вираз $2\pi \sin \theta d\theta$ дає тілесний кут $d\Omega$, у межах якого містяться напрямки, що відповідають кутам розсіювання від θ до $\theta + d\theta$. Тому можна написати

$$\boxed{\frac{dN_\theta}{N} = na \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{4 \sin^4(\theta/2)}}. \quad (76.6)$$

Ми одержали **формулу Резерфорда** для розсіювання α -частинок. У 1913 р. співробітники Резерфорда зробили перевірку цієї формули шляхом підрахунку точок світіння на екрані, що спостерігалися під різними кутами θ за однакові проміжки часу. В умовах досліду (див. рис. 76.1) враховувалися α -частинки, які розміщувалися в межах одного і того самого тілесного кута (який визначається відношенням площі екрана E до квадрата відстані його від фольги), тому кількість точок світіння, що спостерігалися під різними кутами, повинна була бути, відповідно до формули Резерфорда, пропорційною $1/(\sin(\theta/2))^4$. Цей результат теорії добре підтвердився на досліді. Залежність розсіювання від товщини фольги й швидкості α -частинок також виявилася узгодженою з формулою (76.6).

Справедливість теорії, що впливає з кулонівської взаємодії між α -частинкою і ядром атома, свідчить про те, що α -частинка, яка відбивається у зворотному напрямку, не проникає в область додатного заряду атома. Разом з тим α -частинка, що летить точно у напрямку ядра, підійшла б до його центра на відстань, яку можна визначити, прирівнявши кінетичну енергію α -частинки до потенціальної енергії взаємодії α -частинки з ядром у момент повного зупинення частинки

$$\frac{m_\alpha v^2}{2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}},$$

де r_{\min} – мінімальна відстань між центрами α -частинки та ядра. Поклавши $Z = 47$ (срібло), $v = 10^7$ м/с і $m_\alpha = 6,6 \cdot 10^{-27}$ кг, одержимо

$$r_{\min} = \frac{4Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \approx 6 \cdot 10^{-14} \text{ м.}$$

4 Проблема стабільності атома з погляду ядерної моделі атома. Отже, результати дослідів із розсіювання α -частинок свідчать на користь запропонованої Резерфордом ядерної моделі атома. Проте ядерна модель виявилася суперечливою щодо законів класичної

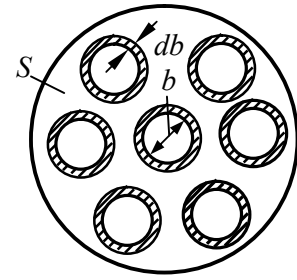


Рисунок 76.4 – Поперечний переріз пучка α -частинок S , в заштрихованих кільцях містяться α -частинки, які пролітають поблизу ядер по траєкторії з прицільним параметром від b до $b + db$

механіки й електродинаміки. Оскільки система нерухомих зарядів не може перебувати в стійкому стані, то Резерфорду довелося відмовитися від статичної моделі атома й припустити, що електрони рухаються навколо ядра, описуючи викривленні траєкторії. Але в цьому разі електрон буде рухатися з прискоренням, у зв'язку з чим відповідно до класичної електродинаміки він повинен безперервно випромінювати електромагнітні (світлові) хвилі. Процес випромінювання супроводжується втратою енергії, так що електрон повинен в остаточному підсумку впасти на ядро.

§ 77 Постулати Бора. Правило квантування орбіт. Досліди Франка й Герца

1 Постулати Бора. Правило квантування орбіт. У попередньому параграфі було з'ясовано, що ядерна модель атома з точки зору класичної механіки й електродинаміки виявилася нездатною пояснити стійкість атома. Вихід із цієї ситуації був знайдений у 1913 р. датським фізиком Нільсом Бором, хоча, ціною введення припущень, що суперечать класичним уявленням. Припущення, запропоновані Бором, містяться у двох сформульованих ним постулатах (*постулати Бора*).

1) Атом (і будь-яка атомна система) може перебувати не у всіх станах, що допускаються класичною механікою, а лише в деяких вибраних (квантових) станах, що характеризуються певними перервними, дискретними значеннями енергії E_1, E_2, E_3, \dots . У цих станах, всупереч класичній електродинаміці, атом не випромінює. Тому вони називаються стаціонарними станами.

2) Випромінювання випускається або поглинається у вигляді світлового кванта енергії $\hbar\omega$ під час переходу електрона з одного стаціонарного стану в інший. Величина світлового кванта дорівнює різниці енергій стаціонарних станів, між якими відбувається квантовий перехід електрона:

$$\hbar\omega = E_n - E_m. \quad (77.1)$$

Які ж орбіти потрібно вважати стаціонарними? На це питання відповідає **правило квантування орбіт**: у стаціонарному стані атома електрон, рухаючись орбітою, повинен мати дискретні, квантовані значення моменту імпульсу:

$$L = m_e v r = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (77.2)$$

Тут m_e – маса електрона; v – його швидкість; r – радіус колової орбіти; n – ціле число, що з часом одержало назву головного квантового числа. Правило квантування орбіт Бор одержав, виходячи з гіпотези Планка, відповідно до якої реалізуються лише такі стани гармонічної коливальної системи (гармонічного осцилятора), енергія яких дорівнює $n\hbar\omega'$, де ω' – частота коливальної системи. Одержане правило для гармонічного осцилятора Бор поширив і на інші механічні системи.

Постулати Бора стали обґрунтуванням планетарної (ядерної) моделі атома, пояснили низку експериментів.

2 Досліди Франка й Герца. Існування дискретних енергетичних рівнів атома підтверджується дослідями, виконаними в 1914 р. Франком і Герцом. Схема їх установки наведена на рисунку 77.1. У трубці, яка заповнена парами ртуті під невеликим тиском (~ 1 мм рт. ст.), розміщені три електроди: катод K , сітка C й анод A . Електрони, що вилітають із катода внаслідок термоелектронної емісії, прискорюються різницею потенціалів U , яка прикладена між катодом і сіткою. Цю різницю потенціалів можна плавно змінювати за допомогою потенціометра Π . Між сіткою й анодом створювалося слабе електричне поле

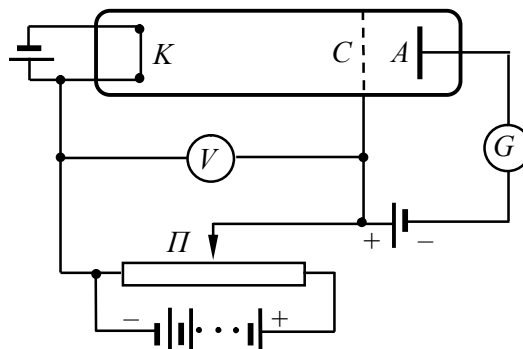


Рисунок 77.1 – Схема дослідження Франка й Герца

(різниця потенціалів приблизно 0,5 В), яке гальмувало рух електронів до анода. На рисунку 77.2 зображена зміна потенціальної енергії електрона $E_p = -e\varphi$ у зазорі між електродами за умови різних значень напруги U між катодом і сіткою (φ – потенціал у відповідній точці поля).

Досліджувався струм I в колі анода залежно від напруги U між катодом і сіткою. Сила струму вимірялася гальванометром G , напруга – вольтметром V . Одержані результати подані на рисунку 77.3. Бачимо, що сила струму спочатку монотонно зростала, досягаючи максимуму за $U = 4,9$ В, після чого з подальшим збільшенням U різко спадала, досягаючи мінімуму, і знову починала зростати. Максимуми сили струму повторювалися за таких значень напруги U : 9,8 В, 14,7 В тощо.

Такий хід кривої пояснюється тим, що внаслідок дискретності енергетичних рівнів атоми можуть поглинати енергію лише порціями:

$$\Delta E_1 = E_2 - E_1 \text{ або } \Delta E_2 = E_3 - E_1 \text{ і так далі,}$$

де E_1, E_2, E_3, \dots – енергія 1-го, 2-го тощо стаціонарних станів.

Доти, поки енергія електрона менша за ΔE_1 , зіткнення між електроном і атомом ртуті мають пружний характер, причому оскільки маса електрона набагато менша від маси атома ртуті, енергія електрона під час зіткнень практично не змінюється. Частина електронів потрапляє на сітку, інші ж, проскочивши через сітку, досягають анода, створюючи струм у колі гальванометра G . Чим більша швидкість, з якої електрони досягають сітки (чим більше U), тим більше буде електронів, які проскочили через сітку, і, отже, тим більшою буде сила струму I .

Якщо енергія, яку одержують електрони у проміжку катод-сітка, досягає значення ΔE_1 , зіткнення перестають бути пружними – електрони під час ударів об атоми передають їм енергію ΔE_1 й продовжують потім рухатися з меншою швидкістю. Тому кількість електронів, що досягають анода, зменшується. Наприклад, за $U = 5,3$ В електрон передає атому енергію, що відповідає 4,9 В (перший потенціал збудження атома ртуті), і продовжує рухатися з енергією 0,4 еВ. Якщо навіть такий електрон з'явиться між сіткою й анодом, він не зможе перебороти затримувальну напругу 0,5 В і буде повернутий назад на сітку.

Атоми, що одержали під час зіткнення з електронами енергію ΔE_1 , переходять у збуджений стан, з якого вони через час приблизно 10^{-8} с повертаються в основний стан, випромінюючи фотон із частотою $\omega = \Delta E_1 / \hbar$.

За напруги, що перевищує 9,8 В, електрон на шляху катод-анод може двічі перетерпіти непружне зіткнення з атомами ртуті, втрачаючи водночас енергію 9,8 еВ, внаслідок чого сила струму I знову почне зменшуватися. За ще більшої напруги можливі трикратні непружні зіткнення електронів з атомами, що приводить до виникнення максимуму при $U = 14,7$ В тощо.

За достатнього розрідження парів ртуті й відповідної величин прискорювальної напруги електрони за час до зіткнення з атомами можуть одержати швидкість, достатню для переведення атома в стан з енергією E_3 . У цьому разі на кривій $I = f(U)$ будуть

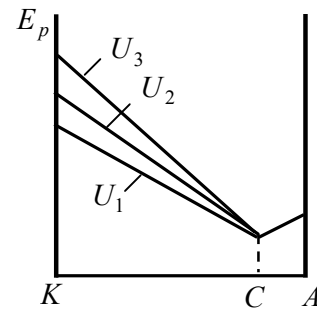


Рисунок 77.2 – Зміна потенціальної енергії електрона $E_p = -e\varphi$ у зазорі між електродами за умови різних значень напруги U між катодом і сіткою

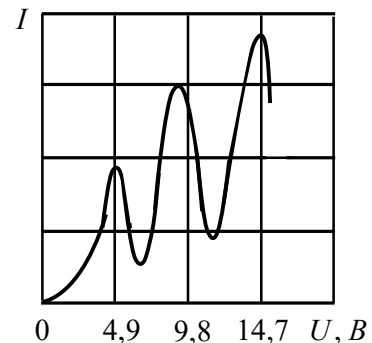


Рисунок 77.3 – Залежність струму I в колі анода від напруги U між катодом і сіткою.

спостерігатися максимуми за напруги, кратних другому потенціалу збудження атома (для ртуті цей потенціал дорівнює 6,7 В), або за напруги, що дорівнюють сумі першого й другого потенціалів збудження тощо.

Отже, в дослідах Франка й Герца безпосередньо спостерігається існування в атомів дискретних енергетичних рівнів.

§ 78 Спектральні закономірності у випромінюванні атома водню. Терми. Комбінаційний принцип Рітца

1 Випромінювання невзаємодіючих один з одним атомів складається з відокремлених спектральних ліній. Відповідно до цього спектр випромінювання атомів називається **лінійчастим**.

Вивчення атомних спектрів стало ключем до пізнання будови атомів. Насамперед було помічено, що лінії в спектрах атомів розміщені не безсистемно, а поєднуються в групи або, як їх називають, **серії ліній**. Краще всього це проявляється в спектрі найпростішого атома – водню. На рисунку 78.1 подана частина спектра атомарного водню у видимій і близькій ультрафіолетовій області. Символами H_α , H_β , H_γ і H_δ позначені видимі лінії.

H_∞ свідчить про межу серії (див. нижче). Очевидно, що лінії розміщені в певному порядку. Відстань між лініями закономірно зменшується під час переходу від більш довгих хвиль до більш коротких.

Швейцарський фізик Бальмер (1885) виявив, що довжини хвиль цієї серії ліній водню можуть бути точно подані формулою

$$\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots), \quad (78.1)$$

де n – ціле число, що набирає значень 3, 4, 5 і т. д.; R – константа, названа на честь шведського спектроскопіста **сталою Рідберга**. Вона дорівнює

$$R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}. \quad (78.2)$$

Формула (78.1) називається **формулою Бальмера**¹⁾, а відповідна серія спектральних ліній водневого атома – **серією Бальмера**. Подальші дослідження показали, що в спектрі водню є ще кілька серій. В ультрафіолетовій частині спектра розміщена серія Лаймана. Інші серії лежать в інфрачервоній області. Лінії цих серій можуть бути подані у вигляді формул, аналогічних до (78.2):

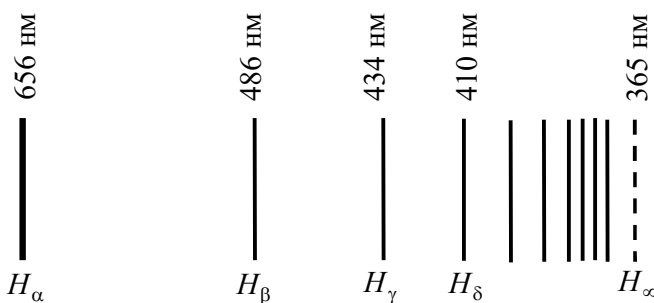


Рисунок 78.1 – Спектр атомарного водню у видимій і близькій ультрафіолетовій області

¹ У спектроскопії спектральні лінії характеризують не частотою, а величиною, оберненою до довжини хвилі

$$1/\lambda = \omega/(2\pi c).$$

Формула Бальмера, що написана для цієї величини, має такий самий вигляд, як (78.1):

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots).$$

Стала Рідберга набирає у цьому разі значення $R' = 10973731,77 \pm 0,83$ 1/м.

$$\text{серія Лаймана } \omega = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

$$\text{серія Пашена } \omega = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, 6, \dots),$$

$$\text{серія Брекета } \omega = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, 7, \dots),$$

$$\text{серія Пфунда } \omega = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 6, 7, 8, \dots).$$

Частоти усіх ліній спектра водневого атома можна подати однією формулою

$$\omega = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (78.3)$$

де m має значення 1 для серії Лаймана; 2 – для серії Бальмера тощо. Для заданого m число n набирає всіх цілих значень, починаючи з $m+1$. Вираз (78.3) називають **узагальненою формулою Бальмера**.

Під час зростання n частота лінії в кожній серії прямує до граничного значення R/m^2 , яке називається **межею серії** (на рисунку 78.1 символом H_∞ позначена межа серії Бальмера).

2 Візьмемо ряд значень виразів $T(n) = R/n^2$:

$$\frac{R}{1^2}, \frac{R}{2^2}, \frac{R}{3^2}, \dots \quad (78.4)$$

Частота будь-якої лінії спектра водню може бути подана у вигляді різниці двох чисел ряду (78.4). Ці числа називають **спектральними термами**, або просто **термами**. Так, наприклад, частота першої лінії серії Бальмера дорівнює $T(2) - T(3)$, другої лінії серії Пфунда $T(5) - T(7)$ і т. д.

Вивчення спектрів інших атомів показало, що частоти ліній і в цьому разі можуть бути подані у вигляді різниці двох термів:

$$\omega = T_1(m) - T_2(n). \quad (78.5)$$

Формула (78.5) виражає основний закон спектроскопії, встановлений емпірично в 1908 р., який називається **комбінаційним принципом Рітца**. Принцип Рітца полягає в тому, що вся різноманітність спектральних ліній атома може бути одержане шляхом попарних комбінацій набагато меншого числа величин, які називаються спектральними термами. Частота кожної спектральної лінії дорівнює різниці двох термів (78.5). Проте терм $T(n)$ для інших атомів звичайно має більш складний вигляд, ніж для водневого атома. Крім того, перший і другий члени формули (78.5) беруться з різних рядів термів.

§ 79 Борівська теорія воднеподібного атома. Узагальнена формула Бальмера. Стала Рідберга. Недоліки теорії Бора

1 Використовуючи постулати (Бора), умови квантування орбіт і деякі закони класичної механіки Бор створив напівкласичну теорію воднеподібного атома. Розглянемо детально цю теорію.

Відповідно до моделі атома Резерфорда електрон у воднеподібному атомі рухається в полі атомного ядра з зарядом Ze по колу під дією сили Кулона. За $Z=1$ така система відповідає атому водню, за інших Z – воднеподібному іону, тобто атому з порядковим номером Z , в якого вилучені всі електрони, крім одного. В атомі електрон під дією сили

Кулона рухається по коловій орбіті радіуса r зі швидкістю v з доцентровим прискоренням $a_{доц} = v^2 / r$. Рівняння другого закону Ньютона для електрона в цьому разі має вигляд

$$m_e a_{доц} = F_K, \text{ або } m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}. \quad (79.1)$$

Також згідно з першим постулатом Бора електрон може рухатися лише по стаціонарних орбітах, для яких момент імпульсу електрона $L = m_e v r$ відповідно до правила квантування орбіт задовольняє умову

$$m_e v r = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (79.2)$$

Число n у виразі (79.1) називається *головним квантовим числом*, де m_e – маса електрона; v – швидкість; r – радіус орбіти; \hbar – стала Планка.

Система рівнянь (79.1) і (79.2) повністю описує поведінку електрона у воднеподібному атомі.

Прибравши швидкість v із рівнянь (79.1) і (79.2), одержимо вираз для радіусів стаціонарних орбіт:

$$r \equiv r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e Ze^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (79.3)$$

Радіус першої орбіти ($n = 1$) атома водню ($Z = 1$) називається борівським радіусом. Його значення дорівнює

$$r_1 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (79.4)$$

Відзначимо, що борівський радіус має порядок значення газокінетичних розмірів атома.

Внутрішня енергія атома складається з кінетичної енергії електрона (ядро є нерухомим) та енергії електростатичної взаємодії електрона з ядром:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}.$$

З (79.1) випливає, що

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}.$$

Отже,

$$E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}.$$

Підставивши сюди вираз (79.3) для r , знайдемо значення енергії атома на стаціонарних орбітах:

$$E \equiv E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (79.5)$$

Як бачимо, повна енергія воднеподібного атома визначається числом n . Саме тому число n одержало назву головного квантового числа.

Під час переходу атома водню ($Z = 1$) зі стану n в стан m випромінюється фотон, енергія якого визначається другим постулатом Бора

$$\hbar\omega = E_n - E_m = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Частота випромінюваного світла дорівнює

$$\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Ми прийшли до узагальненої формули Бальмера, причому для сталої Рідберга одержали значення

$$R = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^3} = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}. \quad (79.6)$$

Як бачимо, при підстановці у вираз (79.6) числових значень m_e , e і \hbar одержуємо величину, що дуже добре узгоджується з експериментальним значенням сталої Рідберга.

2 Теорія Бора була великим кроком у розвитку теорії атома. Вона пояснила низку експериментальних фактів, стала потужним стимулом для проведення багатьох експериментальних досліджень, які мали важливі результати. Навіть у тому разі (а таких випадків була більшість), коли теорія не могла кількісно пояснити багато явищ, два постулати Бора були керівною ниткою під час класифікації та якісної інтерпретації цих явищ. На їх основі, наприклад, був класифікований величезний емпіричний матеріал атомної й молекулярної спектроскопії.

Після перших успіхів теорії Бора все чіткіше проявлялися її недоліки. Особливо тяжкою була невдача під час побудови теорії атома гелію – одного з найпростіших атомів після атома водню.

Найслабшою стороною теорії Бора була її внутрішня логічна суперечливість: вона не була ні послідовно класичною, ні послідовно квантовою теорією. Після відкриття хвильових властивостей речовини стало зрозуміло, що теорія Бора, яка опирається на класичну механіку, є перехідним етапом на шляху до створення послідовної квантової теорії атомних явищ.

ТЕМА 14 ХВИЛЬОВІ ВЛАСТИВОСТІ МІКРОЧАСТИНОК

§ 80 Гіпотеза де Бройля. Довжина хвилі де Бройля для електрона, що вільно рухається

1 Унаслідок поширення уявлень про природу світла з'ясувалося, що світло виявляє корпускулярно хвильовий дуалізм (подвійність). В одних явищах проявляється його хвильова природа, і він поводить себе як електромагнітна хвиля (інтерференція, дифракція), в інших явищах проявляється корпускулярна природа світла, і він поводить себе як потік фотонів (фотоефект, явище Комптона).

У 1924 р. **де Бройль висунув сміливу гіпотезу**, що дуалізм не є особливістю лише світла. Він припустив, що і частинки речовини поряд з корпускулярними властивостями мають також і хвильові (**корпускулярно-хвильовий дуалізм частинок**). Де Бройль переніс на частинки речовини такі самі правила переходу від корпускулярних характеристик до хвильових, які є справедливими у разі світла.

Так відомо, що фотон світла має енергію

$$E = \hbar\omega \quad (80.1)$$

й імпульс

$$p = 2\pi\hbar / \lambda, \quad (80.2)$$

які пов'язані з частотою ω та довжиною λ світлової хвилі.

За гіпотезою де Бройля рух будь-якої частинки пов'язаний із хвильовим процесом, довжина хвилі визначається аналогічно до (80.2)

$$\boxed{\lambda = 2\pi\hbar / p} \quad (80.3)$$

а частота – аналогічно до (80.1)

$$\boxed{\omega = E / \hbar} \quad (80.4)$$

Формули (80.3) і (80.4) визначають довжину та частоту хвилі де Бройля (хвилі, що відповідає частинці речовини).

2 Все викладене вище є гіпотетичним і тому не має доказової сили. Точним доведенням або спростуванням одержаних результатів може бути лише дослід. В яких саме явищах природи можуть виявитися хвильові властивості речовини, якщо вони дійсно існують? Незалежно від фізичної природи хвиль до таких явищ відносять інтерференцію й дифракцію. Безпосередньо величиною, яка тут досліджується, є довжина хвилі λ . У всіх випадках довжини хвиль де Бройля визначаються формулою (80.3). Застосуємо її до нерелятивістського руху частинок. Для електронів із масою m_e , які прискорені різницею потенціалів U , імпульс визначається з закону збереження енергії

$$\frac{p^2}{2m_e} = \frac{m_e v^2}{2} = eU,$$

тобто

$$p = \sqrt{2eUm_e}. \quad (80.5)$$

Тоді з (80.3) одержимо

$$\lambda = 2\pi\hbar / \sqrt{2eUm_e}. \quad (80.6)$$

Визначимо довжину хвилі де Бройля для електронів, які прискорені напругою від 100 В до 10 кВ. Підставивши у співвідношення (80.6) відповідні числа, одержимо, що довжина хвилі де Бройля такого електрона змінюється від 0,39 нм до 0,012 нм, тобто відповідає рентгенівському діапазону.

Отже, довжина хвилі де Бройля для електронів, які прискорені напругою від 100 В до 10 кВ, мають такий самий порядок, що й довжини хвиль рентгенівських променів. Тому дифракцію таких електронів потрібно намагатися шукати методами, аналогічними до тих, які застосовуються у разі рентгенівських променів. Проте гіпотеза де Бройля уявлялась настільки фантастичною, що порівняно довго ніхто з експериментаторів не намагався піддати її експериментальній перевірці.

§ 81 Досліди Девісона й Джермера. Досліди Томсона і Тартаковського

1 Гіпотеза де Бройля була підтверджена експериментально в дослідах Девісона й Джермера, а також Томсона (1927) і Тартаковського.

Девісон і Джермер досліджували в 1927 р. відбиття електронів від монокристалу нікелю, що належить до кубічної системи. Вузкий пучок моноенергетичних електронів спрямовувався на поверхню монокристалу, який був відшліфований перпендикулярно до великої діагоналі кристалічної комірки. Відбиті електрони вловлювалися циліндричним електродом, який був приєднаний до гальванометра (рис. 81.1). Інтенсивність відбитого пучка оцінювалася за силою електричного струму, що проходить через гальванометр. Змінювалися швидкість електронів і кут φ . На рисунку 81.2 зображена залежність сили струму, яка вимірювалася гальванометром, від кута φ за різних енергій електронів.

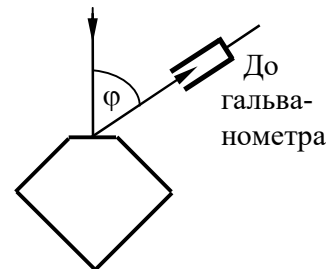


Рисунок 81.1 – Схема досліду Девісона й Джермера

Вертикальна вісь на графіках визначає напрямок електронного пучка, що падає на монокристал. Сила струму в заданому напрямку відображається довжиною відрізка, який проведено від початку координат до точки перетину з кривою. З рисунка бачимо, що розсіювання виявилось особливо інтенсивним за певного значення кута φ . Цей кут відповідав відбиттю від атомних площин, відстань d між якими була відома з

рентгенографічних досліджень. За даного φ сила струму виявилася особливо значною за прискорювальної напруги, яка дорівнювала 54 В. Обчислена за формулою де Бройля довжина хвилі електрона

$$\lambda = h / p = h / \sqrt{2meU}, \quad (81.1)$$

яка відповідає цій напрузі, дорівнює 0,167 нм. Бреггівська довжина хвилі, що відповідає умові (див. питання «Дифракція на просторових структурах. Закон Вульфа – Брегга»)

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

дорівнювала 0,165 нм. Зазначимо, що кут ковзання θ пов'язаний із кутом φ співвідношенням $\theta = (\pi - \varphi) / 2$. Збіг цих довжин хвиль настільки вражаючий, що досліди Девісона й Джермера визнано блискучим підтвердженням ідеї де Бройля.

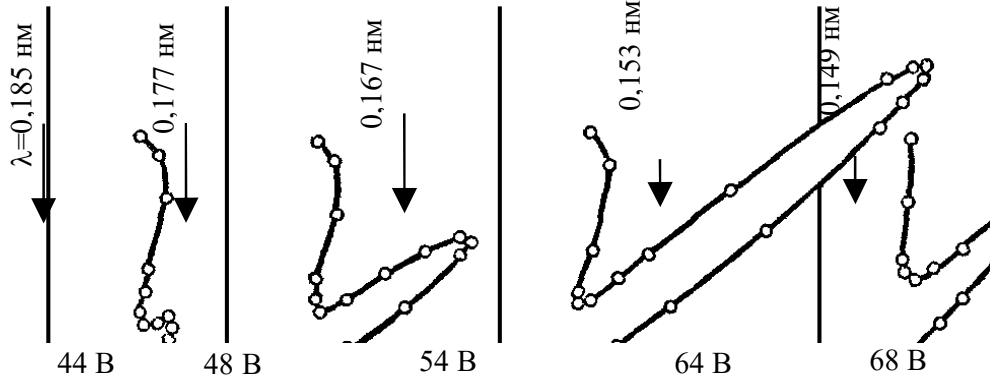


Рисунок 81.2 – Залежність сили струму, яка вимірювалася гальванометром, від кута φ за різних енергій електронів

2 Г. П. Томсон (1927) і незалежно від нього П. С. Тартаковський одержали дифракційну картину під час проходження електронного пучка через металеву фольгу. Схема дослідження подана на рисунку 81.3. Пучок електронів, прискорений різницею потенціалів приблизно декількох десятків кіловольт, проходив через тонку металеву фольгу й попадав на фотопластинку. Електрон під час удару об фотопластинку відіграє таку саму роль, як і фотон. Одержана таким способом електроннограма золота (рис. 81.4 а) подібна до рентгенограми алюмінію (рис. 81.4 б), яка одержана в аналогічних умовах.

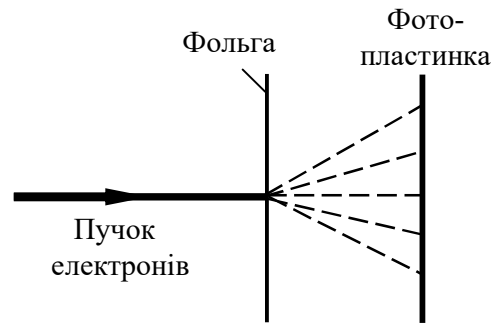
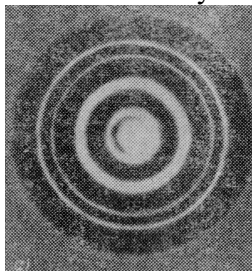
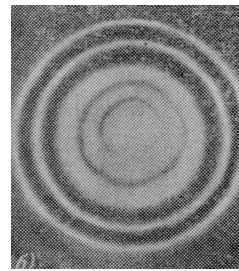


Рисунок 81.3 – Схема дослідження Томсона і Тартаковського



а



б

Рисунок 81.4 – Електроннограма золота (а); рентгенограма алюмінію (б)

Подібність обох картин вражає. Штерн і його співробітники показали, що дифракційні явища можливі також і для атомних і молекулярних пучків. У всіх перелічених випадках дифракційна картина відповідає довжині хвилі, яка визначається співвідношенням (81.1).

§ 82 Статистична інтерпретація хвиль де Бройля

Який же фізичний зміст хвиль де Бройля і який їх зв'язок із частинками речовини? Об'єкти мікросвіту є частинками, чи хвилями?

1 *Одна з хибних гіпотез*, за допомогою якої Шредінгер спробував відповісти на це запитання, а потім швидко відмовився від неї, полягає в такому. Ніякого дуалізму хвиль і частинок у дійсності не існує. Існують лише хвилі. Частинки ж є суперпозицією хвиль. Справа в тому, що через математичну теорему Фур'є з хвиль різних частот і напрямків завжди можна скласти *хвильовий пакет*, тобто таке хвильове утворення, що під час накладення в певний момент часу хвилі будуть підсилювати одна одну в деякій малій області простору, а поза цією областю відбудеться їх повне гасіння. *Такий хвильовий пакет і є частинка*. Інтенсивність хвиль де Бройля розглядається тут як величина, яка пропорційна густині середовища, з якої утворюється частинка. Здавалося, що підтвердженням такої точки зору є та обставина, що центр хвильового пакета, подібно до центра групи хвиль, повинен у вакуумі поширюватися з груповою швидкістю. А групова швидкість хвиль де Бройля і дорівнює швидкості частинки. Проте хвильовий пакет не може поводитися як частинка тривалий час. Причиною цього є те, що навіть у вакуумі хвилі де Бройля мають *дисперсію*. Внаслідок дисперсії такий хвильовий пакет буде еволюціонувати в часі. Монохроматичні хвилі різних частот, з яких утворений пакет, будуть розходитися з різними фазовими швидкостями. Це призведе до деформації, розпливання і зрештою до *розпаду* первісного хвильового пакета. Отже, частинка, якщо вона була хвильовим утворенням, була б нестійкою й швидко розпадалася б. Це жодною мірою не відповідає дійсності. ***Тому частинка не може бути хвильовим пакетом, утвореним із хвиль де Бройля.***

2 *Не можна згодитися з протилежною точкою зору: первинними є частинки, а хвилі є їхніми утвореннями, тобто виникають у середовищі, що складається з частинок, подібних до звуку, що поширюється в повітрі.* Дійсно, таке середовище повинно бути досить щільним, тому що про хвилі в середовищі частинок має сенс говорити лише тоді, коли середня відстань між частинками є дуже малою порівняно з довжиною хвилі. А в типових випадках для хвиль де Бройля ця умова не виконується. Але якщо б навіть ми перебороли це утруднення, то все-таки зазначена точка зору повинна бути відкинута. Насправді вона означає, що *хвильові властивості притаманні системам багатьох часток, а не окремим частинкам*. Тим часом хвильові, інтерференційні властивості часток не зникають і за малих інтенсивностей пучків, що падають. Це було доведено прямими дослідями Бібермана, Сушкіна й Фабриканта з електронами. У дослідях Бібермана, Сушкіна й Фабриканта застосовувалися настільки слабкі пучки електронів, що середній проміжок часу між двома послідовними проходженнями електрона через дифракційну систему був приблизно в 30 000 разів більше часу, яке витрачається одним електроном на проходження всього приладу. За таких умов взаємодія між електронами звичайно не відіграла ніякої ролі. Тим часом за досить тривалої експозиції виникала дифракційна картина, яка нічим не відрізнялася від картини, що отримували за короткої експозиції з пучками електронів, інтенсивність яких була приблизно у 10^7 разів більше. Важливим є те, що в обох випадках загальне число електронів, які потрапили на фотопластинку, було однакове. Це показує, що й ***окремі частинки мають хвильові властивості***. Побічним доказом цього є також те, що хвильові властивості мають електрони атомних оболонок, наприклад, єдиний електрон атома водню, і водночас про середовище, що утворене електронами, говорити не доводиться.

3 Так який же фізичний зміст хвиль де Бройля? Щоб відповісти на вище поставлене питання, розглянемо такий експеримент. Припустимо, що пучок частинок (для визначеності будемо говорити про електрони) падає на деякий дифракційний пристрій, наприклад кристал. Як показують експерименти, дифракція властива й хвилям де Бройля, що відповідають лише одній частинці. Тому можна припустити, що у пучок, який падає, складається всього з одного електрона. Під час проходження відповідної електронної хвилі де Бройля через кристал вона розбивається на кілька дифракційних пучків. *Не можна припускати, що в кожному з таких пучків розміщена якась частинка електрона. Електрон*

діє завжди як ціле й ніколи не проявляється частина електрона, – у цьому проявляється атомізм, що властивий мікросвіту. Припустимо, що на шляху одного з дифрагованих пучків поставлений лічильник для вловлювання електронів. Якщо лічильник спрацює, то він завжди виявляє цілий електрон, а аж ніяк не його частину. Із цього не можна зробити висновок, що до виявлення електрон містився лише в одному розглянутому дифрагованому пучку, а тому всі інші дифраговані пучки ніякої ролі не відіграли – їх просто не існувало. Така точка зору означала б, що електрон проходить через експериментальний пристрій як матеріальна точка класичної механіки. *Це є несумісним з явищами інтерференції й дифракції електронів.* Якщо повторити той самий дослід з іншим електроном, то електрон виявиться також в одному з дифрагованих пучків, але в загальному разі не в тому самому. Подібні труднощі змусили Борна запропонувати **статистичну інтерпретацію хвиль де Бройля**, що дозволяє об'єднати атомізм частинок з їх хвильовими властивостями.

4 Відповідно до статистичної інтерпретації хвилі де Бройля потрібно розглядати як хвилі ймовірності. А саме: **інтенсивність хвилі де Бройля в будь-якому місці простору пропорційна ймовірності виявити частинку в цьому місці.** Але статистичні або ймовірнісні властивості частинок можуть бути встановлені на досліді не з однією частинкою, а лише з багатьма частинками або лише з однією частинкою, якщо дослід за певних умов повторений багаторазово. Говорити про статистику й ймовірність має сенс лише щодо певної сукупності елементів, до яких ці поняття належать. Це може бути або сукупність багатьох одночасних елементів, які спостерігаються, або один елемент, який спостерігається в послідовні моменти часу. Такі сукупності елементів у квантовій механіці називаються **квантовими ансамблями**. Квантовий ансамбль, і це є одним з основних положень квантової механіки, реалізується шляхом установаження деяких макроскопічних параметрів. Це, звичайно, не означає, що хвильові властивості властиві ансамблям частинок, а не самим частинкам. Ансамблі необхідні лише для виявлення таких властивостей.

5 Як зі статистичної точки зору пояснюється дифракція частинок, наприклад електронів? Перед влученням на дифракційний пристрій електрони проходять певну прискорювальну різницю потенціалів, якій відповідає одне і те саме значення довжини хвилі де Бройля. Прискорювальний потенціал і є тим макроскопічним параметром, що виділяє квантовий ансамбль частинок. Нехай реєстрація електронів виконується за допомогою фотопластинки. В яке місце фотопластинки потрапить індивідуальний електрон, достовірно передбачити неможливо; це можна зробити лише з тим або іншим ступенем ймовірності. Ймовірність влучення електрона в те або інше місце фотопластинки пропорційне інтенсивності хвилі де Бройля в цьому місці. Окремий електрон залишає на фотопластинці (після її прояву) пляму. Якщо електронів мало, то фотопластинка буде нагадувати мішень, що прострелена невеликою кількістю куль. У розміщенні плям на фотопластинці не виявиться ніякої закономірності. Закономірність буде статистичною, коли на пластинку потрапить дуже багато електронів. У цьому разі вони переважно потраплять у ті місця фотопластинки, де повинні бути дифракційні максимуми хвиль де Бройля. Сукупність відповідних плям і є дифракційною картиною, що одержується на досліді. Поки електростатичне відштовхування між електронами несуттєве, дифракційна картина буде однією й тією самою незалежно від того, чи утвориться вона електронами, що послідовно проходять по одному через прилад, або відразу інтенсивним пучком однаково прискорених електронів, який складається з такого самого числа частинок.

§ 83 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга

1 У класичній механіці стан матеріальної точки в довільний момент часу характеризується її положенням й імпульсом, тобто можна одночасно встановити їх точні значення координат та імпульсу. Для реальних мікрочастинок миттєвий стан не можна характеризувати точними значеннями їх координат й імпульсу. Причина цього полягає в тому, що будь-яка мікрочастинка має як корпускулярні, так і хвильові властивості.

Не можна сказати, що в певній точці простору довжина хвилі дорівнює λ , якщо про хвильове поле у всіх інших точках простору нічого не відомо. Довжина хвилі є *характеристикою синусоїди*, а синусоїда – *нескінченна періодична крива*. Вираз «довжина хвилі в цій точці простору x дорівнює λ » або «частота хвильового процесу в цей момент часу t дорівнює ω » не мають ніякого змісту – величина λ не є функцією x , а величина ω – функцією t .

З іншого боку, якщо деяке хвильове утворення займає обмежену область простору, то його завжди можна подати синусоїдами. Лише однієї синусоїди для цього недостатньо. Необхідний хвильовий пакет – суперпозиція великої кількості синусоїд різних частот, які підсилювалися б у певному інтервалі простору й взаємно гасили б один одного поза цим інтервалом. Якщо довжина хвильового пакета дорівнює Δx (через спрощення ми обмежуємося одним виміром), то хвильові числа k , які необхідні для його утворення, не можуть займати будь-який вузький інтервал Δk . Мінімальна ширина інтервалу хвильових чисел хвильового пакета Δk , як доводять математики, повинна приблизно задовольняти співвідношення

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 2\pi. \quad (83.1)$$

Це – *чисто хвильове співвідношення*.

Розглянемо тепер хвильовий пакет із хвиль де Бройля, розміри якого й відповідні межі хвильових чисел задовольняють умову (83.1). Відповідно до статистичної інтерпретації ймовірність виявлення частинки буде відмінна від нуля лише в межах пакета. А чому буде дорівнювати імпульс частинки? Кожній хвилі де Бройля із хвильовим числом k відповідає значення імпульсу $p_x = \hbar k$ (через спрощення ми розглядаємо випадок руху вздовж осі X). Певного імпульсу для всього пакета не існує. Існує набір імпульсів, що заповнюють інтервал $p_x = \hbar k$ до $p_x + \Delta p_x = \hbar(k + \Delta k)$. Невідомо, який імпульс буде виявлений у хвильовому пакеті під час вимірювання. У найкращому разі можна з'ясувати лише його ймовірність. Під час вимірювання імпульс буде виявлений із тією або іншою ймовірністю між $p_x = \hbar k$ і $p_x + \Delta p_x = \hbar(k + \Delta k)$. Тому, виражаючи k через p_x , співвідношення (83.1) можна переписати у вигляді

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq 2\pi\hbar = h}. \quad (83.2)$$

Це співвідношення називається *співвідношенням або принципом невизначеностей Гейзенберга для координати й імпульсу частинки*.

Співвідношення Гейзенберга визначає допустиму *принципову межу неточностей* Δx і Δp_x , з якими стан частинки можна характеризувати класично, тобто координатою x й імпульсом p_x . Чим точніше x , тим із меншою точністю можливо характеризувати p_x , і навпаки. Але співвідношення Гейзенберга жодним чином не можна тлумачити в тому розумінні, що частинка в кожний момент часу має певні значення x і p_x , але ми їх принципово не можемо визначити з більшою точністю, чим це дозволяє співвідношення невизначеностей (83.2). Така точка зору зовсім не відповідає природі досліджуваних мікрооб'єктів. *Справжній зміст співвідношення (83.2) відображає той факт, що в природі об'єктивно не існує станів частинок із точно визначеними значеннями обох змінних x і p_x .*

Принцип невизначеностей був сформульований Гейзенбергом у 1927 р. і став важливим кроком в інтерпретації закономірностей мікросвіту й побудові квантової механіки.

2 У тривимірному випадку класична частинка характеризується трьома прямокутними координатами x, y, z і пов'язаними з ними імпульсами p_x, p_y, p_z . У цьому разі *співвідношення невизначеностей Гейзенберга* виражаються трьома нерівностями

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h}, \quad \boxed{\Delta y \cdot \Delta p_y \geq h}, \quad \boxed{\Delta z \cdot \Delta p_z \geq h}. \quad (83.3)$$

Ніяких обмежень на добутки типу $\Delta x \cdot \Delta p_y, \Delta y \cdot \Delta p_x$ співвідношення невизначеностей не накладають. Величини x і p_y, x і p_x одночасно можуть мати й зовсім точні значення.

3 Разом зі співвідношенням (83.1) у хвильовій теорії виводиться також формула

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq 2\pi. \quad (83.4)$$

Зміст цього співвідношення полягає в тому, що обмежений у часі хвильовий процес не може бути монохроматичним. Якщо процес триває впродовж часу Δt , то розкид частот $\Delta \omega$ хвиль, якими цей процес характеризується, у найкращому разі задовольняє співвідношенню (83.4). Тому якщо для спостереження навіть монохроматичного процесу надано малий час Δt , то частота процесу принципово буде знайдена в найкращому разі з помилкою, що підпорядковується співвідношенню (83.4).

Якщо частоті зіставити енергію за формулою $E = \hbar\omega$, то вираз (83.4) перейде в

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq 2\pi\hbar = h. \quad (83.5)$$

Формула (83.5) називається *співвідношенням невизначеностей Гейзенберга для часу й енергії*.

4 Вимірювання в квантовій області принципово відрізняються від класичних вимірювань. Звичайно і ті й інші вимірювання супроводжуються помилками. Проте класична фізика вважала, що шляхом поліпшення методики й техніки вимірювань помилки в принципі можуть бути зроблені як завгодно малими. Навпаки, **відповідно до квантової фізики існує принципова межа точності вимірювань. Вона лежить у природі речей і не може бути зменшена ніяким удосконалюванням приладів і методів вимірювань.** Співвідношення невизначеностей Гейзенберга й встановлюють одну з таких меж. Взаємодію між макроскопічним вимірювальним приладом і мікрочастинкою під час вимірювання принципово не можна зробити як завгодно малою. Якщо вимірюється, наприклад, координата частинки, то вимірювання неминуче призводить до принципово непереборної неконтрольованої зміни початкового стану частинки, а отже, і до невизначеності в значенні імпульсу за подальшого вимірювання. Те саме відбувається, якщо порядок вимірювання координати та імпульсу частинки поміняти місцями.

ТЕМА 15 КВАНТУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

§ 84 Хвильова функція. Фізична сутність ψ -функції. Стандартні умови для хвильової функції

1 Розглянемо частинку, яка рухається вільно в просторі з сталим імпульсом p уздовж осі X . Де Бройль припустив, що з такою частинкою пов'язана деяка плоска монохроматична хвиля

$$\xi = A \cos(\omega t - kx),$$

яка поширюється в напрямку тієї самої осі X . Сутність цієї хвилі спочатку залишалась незрозумілою. Замінивши відповідно до гіпотези де Бройля ω і λ через E і p , рівняння хвилі де Бройля для вільної частинки запишемо у вигляді

$$\Psi = A \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]. \quad (84.1)$$

Функцію Ψ називають *хвильовою функцією (або псі-функцією)*. Вона описує стан частинки. Функція Ψ , зазвичай, буває комплексною й у низці випадків (коли частинка рухається в силовому полі) має не властивий для хвилі неперіодичний характер. Незважаючи на це, її й у цих випадках називають хвильовою.

2 Правильну інтерпретацію хвильової функції дав у 1926 р. Борн. Згідно з Борном *квадрат модуля хвильової функції визначає ймовірність dP того, що частинка буде виявлена в межах об'єму dV* :

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi^* \Psi dV. \quad (84.2)$$

Співвідношення визначає фізичну сутність хвильової функції: квадрат модуля хвильової функції в деякій точці простору є густиною ймовірності знаходження частинки в цій точці простору ($dP/dV = |\Psi|^2$).

Виходячи з фізичного змісту квадрата модуля хвильової функції можемо знайти, що інтеграл від виразу (84.2), узятий в усьому просторі, повинен дорівнювати одиниці:

$$\int \Psi^* \Psi dV = 1. \quad (84.3)$$

Дійсно, цей інтеграл дає ймовірність того, що частинка розміщена в одній із точок простору, що є подією достовірною. Відомо, що ймовірність достовірної події дорівнює одиниці. Співвідношення (84.3) називають умовою нормування.

З інтерпретації Борна (84.2) випливає, що квадрат модуля хвильової функції є густиною ймовірності (ймовірністю, віднесеною до одиниці об'єму) знаходження частинки у відповідному місці простору. З цього випливають такі властивості хвильової функції. Псі-функція повинна:

- 1) бути однозначною, неперервною й скінченною (інколи ця умова порушується в особливих точках);
- 2) мати однозначну, неперервну та скінченну похідну;
- 3) інтеграл $\int \Psi^* \Psi dV$, узятий по всьому простору, повинен бути скінченним.

Сукупність перелічених вище вимог називають **стандартними умовами для хвильової функції**.

§ 85 Загальне й стаціонарне рівняння Шредінгера

1 Розвиваючи ідеї де Бройля про хвильові властивості речовини, Шредінгер одержав у 1926 р. рівняння для визначення хвильової функції. Воно дозволяє знайти хвильові функції частинок, які рухаються в різних силових полях. Рівняння виглядає так:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (85.1)$$

Тут m – маса частинки; i – уявна одиниця; U – потенціальна енергія частинки; Δ – оператор Лапласа, результат дії якого на деяку функцію є сумою других частинних похідних за координатами:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (85.2)$$

Рівняння (85.1) називають **загальним рівнянням Шредінгера**. З рівняння (85.1) випливає, що вигляд хвильової функції визначається потенціальною енергією U , тобто в остаточному підсумку характером сил, що діють на частинку.

Рівняння Шредінгера є основним рівнянням нерелятивістської квантової механіки. Воно не може бути доведене з інших співвідношень. Його варто розглядати як вихідне основне припущення, справедливості якого доводиться тим, що всі наслідки, які випливають із нього, точно узгоджуються з дослідними фактами.

Шредінгер установив своє рівняння, виходячи з оптико-механічної аналогії. Ця аналогія полягає в подібності рівнянь, які описують хід світлових променів, із рівняннями, що визначають траєкторії частинок у класичній механіці.

Пояснимо, як можна прийти до загального рівняння Шредінгера. Для простоти обмежимося однимірним випадком. Розглянемо частинку, яка вільно рухається.

Відповідно до ідеї де Бройля такій частинці потрібно поставити у відповідність плоску хвилю

$$\Psi = A \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right].$$

Продиференціюємо цю функцію один раз за t , а інший раз – двічі за x й одержимо

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 p^2 \Psi.$$

Звідси

$$E = \frac{1}{\Psi} i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad p^2 = -\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (85.3)$$

У нерелятивістській класичній механіці енергія E й імпульс p вільної частинки пов'язані співвідношенням

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Підставивши в це співвідношення вираз (85.3) для E і p^2 і скоротивши потім на Ψ , одержимо рівняння

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

яке збігається з рівнянням (85.1), якщо в останньому покласти $U = 0$.

У разі частинки, що рухається в силовому полі, яке характеризується потенціальною енергією U , енергія E й імпульс p пов'язані співвідношенням

$$\frac{p^2}{2m} = E - U.$$

Поширивши й на цей випадок вираз (85.3) для E і p^2 , одержимо

$$-\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\Psi} i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - U.$$

Помножимо це співвідношення на Ψ і перенесемо доданок $U\Psi$ ліворуч і прийдемо до рівняння

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

яке збігається з рівнянням (85.1).

Викладені міркування не мають доказової сили й не можуть розглядатися як доведення загального рівняння Шредінгера. Їх мета – пояснити, яким чином можна було прийти до встановлення цього рівняння.

2 Якщо силове поле, в якому рухається частинка, є стаціонарним (тобто сталим у часі), то функція U не залежить явно від t . У цьому разі розв'язок рівняння Шредінгера розпадається на два множники, один із яких залежить лише від координат, інший – лише від часу:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp[-i(E/\hbar)t]. \quad (85.4)$$

Тут E – повна енергія частинки, яка у разі стаціонарного поля залишається сталою. Щоб переконатися в справедливості виразу (85.4), підставимо його в рівняння (85.1). Унаслідок цього одержимо співвідношення

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \exp[-i(E/\hbar)t] \Delta\psi + U\psi \exp[-i(E/\hbar)t] = i\hbar[-i(E/\hbar)]\psi \exp[-i(E/\hbar)t] .$$

Скоротивши на загальний множник $\exp[-i(E/\hbar)t]$, прийдемо до диференціального рівняння, що визначає функцію ψ :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi = E\psi} . \quad (85.5)$$

Рівняння (85.5) називається **рівнянням Шредінгера для стаціонарних станів (стаціонарне рівняння Шредінгера)**. Надалі ми будемо мати справу лише з цим рівнянням і для стислості будемо називати його просто рівнянням Шредінгера. Рівняння (85.5) часто пишуть у вигляді

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0 . \quad (85.6)$$

У разі стаціонарного силового поля хвильова функція має вигляд (85.4). Тоді

$$\Psi^* \Psi = \exp[i(E/\hbar)t] \psi^* \cdot \exp[-i(E/\hbar)t] \psi = \psi^* \psi .$$

Отже, густина імовірності дорівнює $\psi^* \psi$ й, отже, від часу не залежить. Саме тому стани, які описуються хвильовими функціями вигляду (85.4), називають стаціонарними.

3 У класичній механіці стан частинки (матеріальної точки) визначається заданням положення і швидкості (або імпульсу) частинки. Якщо є відомим стан у початковий момент часу й силове поле, в якому розміщена частинка, то, розв'язавши рівняння Ньютона, можна знайти положення й швидкість частинки в будь-який наступний момент часу. У цьому полягає сутність причинності в класичній механіці.

У квантовій механіці класичне поняття стану позбавлене змісту, тому що координата й швидкість частинки принципово не можуть мати одночасно певних значень. Тому класичне поняття причинності також не можна застосовувати в квантовій теорії. Стан частинки задається в квантовій механіці хвильовою функцією. Якщо відомі хвильова функція в початковий момент часу й силове поле, в якому рухається частинка, то, розв'язавши рівняння Шредінгера, можна знайти хвильову функцію в наступні моменти часу. У цьому полягає сутність причинності в квантовій механіці. Отже, квантова механіка не скасувала принцип причинності. Вона лише надала йому форму, яка відповідає дійсній природі речей.

§ 86 Рівняння Шредінгера та квантування енергії

1 Квантування енергії виникає тому, що на хвильові функції ψ , які є розв'язками рівняння Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi = E\psi , \quad (86.1)$$

накладаються певні обмеження – стандартні умови для хвильової функції. За цих обмежень рівняння (86.1) має розв'язки, у загальному випадку, не за всіх, а лише за вибраних значень параметра E (E визначає енергію частинки). Тут маємо випадок, аналогічний до того, що є місце в задачі про вільні коливання струни з закріпленими кінцями. Через закріпленість кінців ці коливання є стоячими хвилями з такими вибраними частотами, що на довжині струни вкладається ціле число напівхвиль.

Стандартні умови для хвильової функції, що накладаються на розв'язки рівняння Шредінгера, полягають у тому, що хвильова функція $\psi(x, y, z)$ і її перші просторові похідні повинні бути скінченними, однозначними й неперервними, інтеграл від $\psi(x, y, z)$ за всім

простором повинен бути скінченним. Вибрані значення параметра E , для яких рівняння Шредінгера має розв'язки, що задовольняють стандартні умови, називаються **власними значеннями** величини E для диференціального рівняння (86.1), а відповідні їм розв'язки – **власними функціями** того самого рівняння. Власні значення E і беруть за можливі значення енергії в стаціонарних станах. Власні значення енергії E можуть бути дискретними, а можуть неперервно заповнювати скінченний або нескінченний інтервал. У першому випадку говорять, що енергетичний спектр *дискретний*, а в другому – *неперервний*.

Отже, квантування енергії випливає з основних положень квантової механіки без будь-яких додаткових припущень.

§ 87 Частинка в одновимірній потенціальній ямі. Енергія та хвильова функція частинки в потенціальній ямі

1 У нерелятивістській квантовій механіці основним принципом є рівняння Шредінгера. Пошук розв'язків цього рівняння, які задовольняють стандартні умови, приводить до дискретності енергетичних рівнів. Продемонструємо це на прикладі задачі про частинку, яка розміщена в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі.

Знайдемо власні значення енергії й відповідні їм власні функції для частинки, розміщеної в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі. Припустимо, що частинка може рухатися лише уздовж осі X . Нехай рух обмежений непроникними для частинки стінками з такими координатами: $x=0$ і $x=l$. Потенціальна енергія U має в цьому разі такий вигляд (рис. 87.1а): вона дорівнює нулю за $0 \leq x \leq l$ й перетворюється у нескінченність за $x < 0$ і $x > l$. Для розв'язання задачі використаємо стаціонарне рівняння Шредінгера

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (87.1)$$

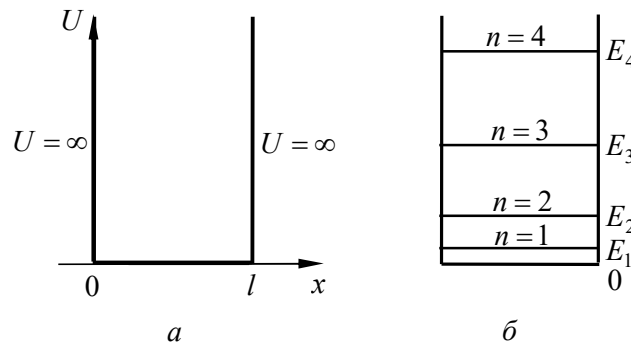


Рисунок 87.1 – Нескінченно глибока потенціальна яма (а); схема рівнів енергії частинки, що розміщена в такій ямі (б)

2 Оскільки хвильова функція залежить лише від координати x , то рівняння (87.1) спрощується:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (87.2)$$

За межі потенціальної ями частинка потрапити не може (там потенціальна енергія дорівнює нескінченності $U = \infty$). Тому ймовірність виявлення частинки за межами ями дорівнює нулю. Відповідно й функція ψ за межами ями дорівнює нулю. З умови неперервності випливає, що ψ повинна дорівнювати нулю й на межах ями, тобто

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (87.3)$$

Це і є одна з стандартних умов, яку повинен задовольняти розв'язок рівняння (87.2). В області, де ψ не дорівнює тотожно нулю, рівняння (87.2) має вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad (87.4)$$

(у цій області $U = 0$). Увівши позначення

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad (87.5)$$

прийдемо до рівняння

$$\psi'' + k^2 \psi = 0,$$

яке в теорії коливань називають диференціальним рівнянням гармонічних коливань. Розв'язок такого рівняння має вигляд

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha) \quad (87.6)$$

(у цьому разі зручніше взяти синус замість косинуса). Умови (87.3) можна задовольнити відповідним вибором сталих k і α . Насамперед з умови $\psi(0) = 0$ одержуємо

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0,$$

звідси випливає, що α повинна дорівнювати нулю. Також повинна виконуватися умова

$$\psi(l) = A \sin(kl) = 0,$$

що можливо лише у разі, коли

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (87.7)$$

($n = 0$ не беремо до уваги, оскільки при цьому виходить, що $\psi = 0$ – частинка в потенціальній ямі відсутня).

Прибравши k з рівнянь (87.5) і (87.7), знайдемо *власні значення енергії частинки*:

$$E = E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (87.8)$$

Спектр енергії виявився дискретним. На рисунку 87.1б зображена схема енергетичних рівнів.

Відповідно до формули (87.8) мінімальна енергія, яку може мати частинка, що розміщена в потенціальній ямі, відмінна від нуля. Цей результат обумовлений хвильовими властивостями частинки й може бути одержаний зі співвідношення невизначеностей.

3 Далі знайдемо власну хвильову функцію рівняння Шредінгера. Підставивши в (87.6) значення k , яке одержали з умови (87.7), знайдемо власні хвильові функції:

$$\psi = \psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$$

(нагадаємо, що $\alpha = 0$). Для знаходження коефіцієнта A використаємо умову нормування, яку у цьому разі запишемо так:

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1.$$

Нескладно одержати, що

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l \frac{1 - \cos(2n\pi x/l)}{2} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2n\pi x/l)}{2 \cdot (2n\pi/l)} \right) \Big|_0^l = \frac{l}{2}.$$

Звідси $A^2 \cdot l/2 = 1$, або $A = \sqrt{2/l}$. Отже, *власні функції частинки в потенціальній ямі* мають вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (87.9)$$

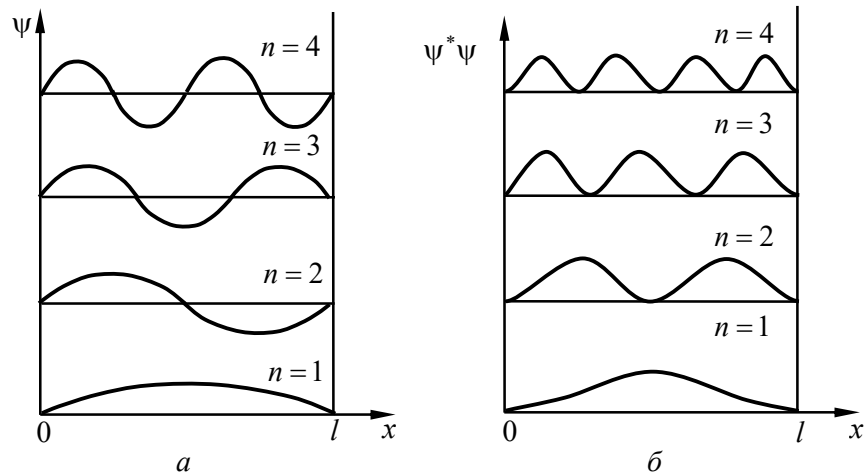


Рисунок 87.2 – Графіки власних функцій частинки, що розміщені в потенціальній ямі, яка зображена на рисунку 87.1 а (а); густина ймовірності знаходження частинки в точках із різними значеннями координати x (б)

Графіки власних функцій зображені на рисунку 87.2 а. На рисунку 87.2 б подана густина ймовірності виявлення частинки на різних відстанях від стінок ями, що дорівнює $\psi^* \psi$. Із графіків, наприклад, випливає, що в стані із $n=2$ частинка не може бути виявлена всередині ями й разом із цим однаково часто буває як у лівій, так і в правій половині ями. Така поведінка частинки є несумісною з класичними уявленнями про траєкторії. Відзначимо, що відповідно до класичних уявлень усі положення частинки в ямі мають однакову ймовірність.

§ 88 Тунельний ефект. Коефіцієнт проходження

1 Нехай частинці, яка рухається зліва направо, трапляється на своєму шляху потенціальний бар'єр висотою U_0 й шириною l (рис. 88.1). За класичними уявленнями частинка повинна вести себе так. Якщо енергія частинки більша за висоту бар'єра ($E > U_0$), частинка безперешкодно проходить над бар'єром (на ділянці $0 \leq x \leq l$ лише зменшується швидкість частинки, але потім за $x > l$ знову набуде початкового значення). Якщо ж E менше U_0 (як зображено на рисунку), то частинка відбивається від бар'єра й летить у зворотний бік; крізь бар'єр частинка проникнути не може.

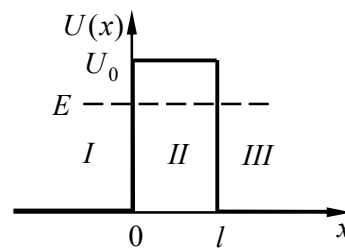


Рисунок 88.1 – До проходження частинки через потенціальний бар'єр

Зовсім інакше виглядає поведінка частинки з точки зору до квантової механіки. По-перше, навіть за $E > U_0$ є відмінна від нуля ймовірність того, що частинка відіб'ється від бар'єра й полетить у зворотний бік. По-друге, за $E < U_0$ є відмінна від нуля ймовірність того, що частинка проникне «крізь» бар'єр і опиниться в області, де $x > l$. Така поведінка є цілком

неможливою з класичної точки зору. Ця поведінка мікрочастинки впливає безпосередньо з рівняння Шредінгера.

2 Розглянемо випадок $E < U_0$. Рівняння Шредінгера має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0, \quad (88.1)$$

для областей I і III ,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\psi = 0 \quad (88.2)$$

для області II , причому $E - U_0 < 0$.

Будемо шукати розв'язок рівняння (88.1) у вигляді $\psi = e^{\lambda x}$. Підстановка цієї функції в (88.1) приводить до характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0.$$

Звідси $\lambda = \pm i\alpha$, де

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}. \quad (88.3)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (88.1) має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x} \text{ для області } I, \\ \psi_3 &= A_3 e^{i\alpha x} + B_3 e^{-i\alpha x} \text{ для області } III. \end{aligned} \quad (88.4)$$

Вирішивши підстановкою $\psi = e^{\beta x}$ рівняння (88.2), одержимо загальний розв'язок цього рівняння у вигляді

$$\psi_2 = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} \text{ для області } II. \quad (88.5)$$

Тут

$$\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}. \quad (88.6)$$

Зазначимо, що розв'язок вигляду $e^{i\alpha x}$ відповідає хвилі, яка поширюється в додатному напрямку осі X , а розв'язок вигляду $e^{-i\alpha x}$ – хвилі, яка поширюється в протилежному напрямку. Щоб це зрозуміти, згадаємо, що звичайна (звукова, електромагнітна тощо) плоска хвиля, яка поширюється в напрямку зростання x , описується дійсною частиною виразу $e^{i(\omega t - kx)}$, а хвиля, яка поширюється в напрямку зменшення x , – дійсною частиною виразу $e^{i(\omega t + kx)}$. Частинці, яка рухається в додатному напрямку осі X , зіставляється функція $\Psi = ae^{(i/\hbar)(px - Et)}$. Якщо відкинути в цій функції часовий множник, то для ψ одержимо вираз $\psi = ae^{i(p/\hbar)x}$. Для частинки, яка рухається в протилежному напрямку, буде $\psi = ae^{-i(p/\hbar)x}$.

В області III є лише хвиля, яка пройшла через бар'єр і поширюється зліва направо. Тому коефіцієнт B_3 у виразі (88.4) для ψ_3 потрібно покласти таким, що дорівнює нулю. Для знаходження інших коефіцієнтів скористаємося стандартними умовами, які повинна задовольняти хвильова функція ψ . Для того щоб ψ була безперервною у всій області x від $-\infty$ до $+\infty$, повинні виконуватися умови $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ і $\psi_2(l) = \psi_3(l)$. Для того щоб ψ була гладкою, тобто не мала зломів, повинні виконуватися умови $\psi'_1(0) = \psi'_2(0)$ і $\psi'_2(l) = \psi'_3(l)$. Із цих умов впливають співвідношення:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2,$$

$$\begin{aligned}
A_2 e^{\beta l} + B_2 e^{-\beta l} &= A_3 e^{i\alpha l}, \\
i\alpha A_1 - i\alpha B_1 &= \beta A_2 - \beta B_2, \\
\beta A_2 e^{\beta l} - \beta B_2 e^{-\beta l} &= i\alpha A_3 e^{i\alpha l}.
\end{aligned} \tag{88.7}$$

Розділимо всі рівняння на A_1 й введемо позначення:

$$b_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad b_2 = \frac{B_2}{A_1}, \quad a_3 = \frac{A_3}{A_1},$$

а також

$$n = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}. \tag{88.8}$$

Тоді рівняння (88.7) наберуть вигляду

$$\begin{aligned}
1 + b_1 &= a_2 + b_2, \\
a_2 e^{\beta l} + b_2 e^{-\beta l} &= a_3 e^{i\alpha l}, \\
i - i b_1 &= n a_2 - n b_2, \\
n a_2 e^{\beta l} - n b_2 e^{-\beta l} &= i a_3 e^{i\alpha l}.
\end{aligned} \tag{88.9}$$

Відношення квадратів модулів амплітуд відбитої й хвилі, що падає,

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = |b_1|^2$$

визначає ймовірність відбиття частинки від потенціального бар'єра й називається **коефіцієнтом відбиття**.

Відношення квадратів модулів амплітуд хвилі, що пройшла, й хвилі, що падає,

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = |a_3|^2 \tag{88.10}$$

визначає ймовірність проходження частинки через бар'єр і називається **коефіцієнтом проходження (або коефіцієнтом прозорості)**.

Нас буде цікавити лише проходження частинок через бар'єр, і ми обмежимося знаходженням величини D . Необхідно зазначити, знаючи D , легко знайти R , оскільки ці коефіцієнти пов'язані очевидним співвідношенням $R + D = 1$.

Помножимо перше з рівнянь (88.9) на i й складемо з третім. Унаслідок цього одержимо

$$2i = (n+i)a_2 - (n-i)b_2. \tag{88.11}$$

Тепер помножимо друге з рівнянь (88.9) на i й віднімемо його від четвертого. Одержимо:

$$(n-i)e^{\beta l} a_2 - (n+i)e^{-\beta l} b_2 = 0. \tag{88.12}$$

Вирішивши спільно рівняння (88.11) і (88.12), знайдемо, що

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{2i(n+i)e^{-\beta l}}{(n+i)^2 e^{-\beta l} - (n-i)^2 e^{\beta l}}, \\
b_2 &= \frac{2i(n-i)e^{\beta l}}{(n+i)^2 e^{-\beta l} - (n-i)^2 e^{\beta l}}.
\end{aligned}$$

Нарешті, підставивши знайдені нами значення a_2 й b_2 у друге з рівнянь (88.9), одержимо вираз для a_3 :

$$a_3 = \frac{4ni}{(n+i)^2 e^{-\beta l} - (n-i)^2 e^{\beta l}} e^{-i\alpha l}.$$

Величина

$$\beta l = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} l,$$

зазвичай, є набагато більшою за одиницю. Тому в знаменнику виразу для a_3 доданком, який містить множник $e^{-\beta l}$, можна знехтувати порівняно з доданком, який містить множник $e^{\beta l}$ (комплексні числа $n+i$ й $n-i$ мають однаковий модуль). Отже, можна припустити

$$a_3 \approx -\frac{4nie^{-i\alpha l}}{(n-i)^2} e^{-\beta l}.$$

Згідно з (88.10) квадрат модуля цієї величини дає ймовірність проходження частинки через потенціальний бар'єр. Урахувавши, що $|n-i| = \sqrt{n^2 + 1}$, одержимо

$$D = |a_3|^2 \approx \frac{16n^2}{(n^2 + 1)^2} e^{-2\beta l},$$

де

$$n^2 = \frac{U_0 - E}{E} = \frac{U_0}{E} - 1$$

(див. формулу (88.8)).

Вираз $16n^2 / (n^2 + 1)^2$ має величину приблизно одиниці. Тому можна вважати, що

$$D \approx e^{-2\beta l} = \exp\left[-\frac{2 \cdot l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right]. \quad (88.13)$$

З одержаного нами виразу випливає, що ймовірність проходження частинки через потенціальний бар'єр істотно залежить від ширини бар'єра l й від величини $U_0 - E$. Якщо за якоїсь ширини бар'єра коефіцієнт проходження D дорівнює, припустимо, 0,01, то під час збільшення ширини у два рази D буде дорівнювати $0,01^2 = 0,0001$, тобто зменшується в 100 разів. Той самий ефект у цьому разі викликало б зростання в чотири рази величини $U_0 - E$. Коефіцієнт проходження різко зменшується під час збільшення маси частинки m .

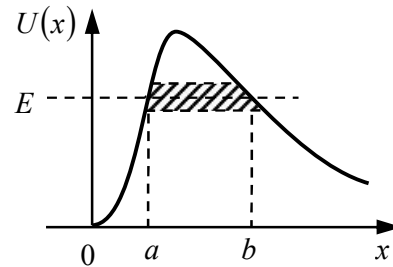


Рисунок 88.2 – До проходження частинки через потенціальний бар'єр

3 Подібний розрахунок можна виконати у разі потенціального бар'єра довільної форми (рис. 88.2). У цьому разі формула (88.13) повинна бути замінена більше загальною:

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U - E)} dx\right], \quad (88.14)$$

де $U = U(x)$.

Під час подолання потенціального бар'єра частинка ніби проходить через «тунель» у цьому бар'єрі (див. заштриховану область на рисунку 88.2). У зв'язку з цим розглянуте нами явище називають **тунельним ефектом**.

§ 89 Оператори фізичних величин. Власні функції та власні значення. Принцип суперпозиції

Операторний метод широко використовується у більшості досліджень із квантової механіки. Розглянемо сутність цього методу.

1 Оператори. У квантовій механіці кожній фізичній величині ставиться у відповідність оператор. Під **оператором** мається на увазі правило, за допомогою якого одній функції (позначимо її через φ) зіставляється інша функція (позначимо її через f). Символічно це записується так:

$$f = \hat{Q}\varphi. \quad (89.1)$$

Тут \hat{Q} – позначення оператора. Для того щоб відрізнити оператори від чисел, їх позначають через \hat{Q} , тобто ставлять кришечку над Q або використовують інше позначення.

Отже, під символом оператора розуміють сукупність дій, за допомогою яких вихідна функція (φ) перетворюється в іншу функцію (f).

Наприклад, символ **оператора Лапласа** $\Delta = \hat{Q}_1$ позначає дворазове частинне диференціювання за усіма трьома координатами x , y і z з подальшим підсумовуванням одержаних виразів. Тобто оператор Лапласа можна подати у вигляді

$$\Delta = \hat{Q}_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

За допомогою оператора можемо подати множення вихідної функції φ на деяку функцію U . Тоді наступне перетворення $f = U \cdot \varphi$ можна записати у вигляді $f = \hat{Q}_2\varphi$, де $\hat{Q}_2 = U$.

Використовуючи операторний підхід, рівняння Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi \quad (89.2)$$

можна записати в операторному вигляді

$$\boxed{\hat{H}\psi = E\psi}. \quad (89.3)$$

У цьому рівнянні символом \hat{H} позначений оператор, який дорівнює

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U. \quad (89.4)$$

Цей оператор називають **гамільтоніаном**, або **оператором Гамільтона**. Гамільтоніан є оператором енергії E .

2 Сутність операторного методу. У квантовій механіці кожній фізичній величині ставиться у відповідність оператор. Розглядаються оператори координат, імпульсу, моменту імпульсу тощо. Для кожної фізичної величини q складається рівняння, аналогічне до рівняння Шредінгера в операторному вигляді (89.3). Воно має вигляд

$$\boxed{\hat{Q}\psi = q\psi}, \quad (89.5)$$

де \hat{Q} – оператор, який ставиться у відповідність фізичній величині q .

Значення q , за яких розв'язок рівняння (89.5) задовольняє стандартні умови для хвильової функції, називаються **власними значеннями величини q** , а самі розв'язки – **її власними функціями**. Власні значення величини q і беруться за можливі значення цієї величини, які спостерігаються в експерименті.

Розглядаючи з цих позицій рівняння Шредінгера (89.3), можемо стверджувати, що воно є рівнянням для власних значень енергії ($q = E$). Оператор енергії визначається співвідношенням (89.4) ($\hat{Q} = \hat{H}$).

3 Принцип суперпозиції. Спектр власних значень може бути як дискретним, так і суцільним. У разі дискретного спектра власні значення й власні функції можна пронумерувати:

$$\begin{aligned} q_1, q_2, \dots, q_n, \dots \\ \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots \end{aligned} \quad (89.6)$$

За умови дискретного спектра власних значень фізичної величини спостерігаємо дві ситуації. Можливі стани, для яких під час вимірювання деякої величини q завжди одержуємо однакові значення q_n . Про такі стани говорять як про стани, в яких *величина q має певне значення*. Цей стан описується функцією Ψ_n . Проте можливі також стани, для яких під час вимірювань одержуємо з різною ймовірністю різні власні значення оператора \hat{Q} . Про такі стани говорять як про стани, в яких *величина q не має певного значення*.

Хвильова функція стану, в якому q не має певного значення, є суперпозицією (накладенням) власних функцій величини q :

$$\Psi = \sum_n c_n \Psi_n, \quad (89.7)$$

де c_n , у загальному разі, є комплексними числами, які не залежать від координат. Кількість доданків у сумі дорівнює числу різних власних функцій величини q .

Формула (89.7) виражає **принцип суперпозиції хвильових функцій**: коли хвильові функції $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$ описують деякі стани, то і функція $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \dots + c_n\Psi_n + \dots$ подає деяку хвильову функцію, що описує деякий стан системи. Обґрунтуванням принципу суперпозиції є узгодженість із дослідом наслідків, які випливають з нього. Так, за допомогою принципу суперпозиції квантова механіка пояснює дифракцію та інтерференцію частинок.

Квадрати модулів коефіцієнтів c_n дорівнюють імовірності того, що під час вимірювань, які виконуються над системою, що перебуває в стані Ψ , будуть одержані відповідні значення величини q . Оскільки сума всіх таких ймовірностей повинна дорівнювати одиниці, коефіцієнти c_n задовольняють умову

$$\sum_n |c_n|^2 = 1.$$

§ 90 Середні значення фізичних величин із погляду операторного підходу. Оператори радіуса-вектора, імпульсу, енергії. Зв'язок між власними й середніми значеннями

1 Як визначають середнє значення фізичної величини в квантовій механіці, використовуючи операторний підхід? Для відповіді на це запитання розглянемо приклад. Припустимо, що багаторазово проводиться вимірювання координати x частинки, причому частинка кожного разу перебуває в однакових макроскопічних умовах. Тоді стан частинки в цих дослідах можна характеризувати хвильовою функцією $\Psi(x)$, яку для спрощення будемо вважати функцією лише однієї просторової координати x . Середнє значення координати, яке буде знайдено внаслідок вимірювань, можна записати у вигляді

$$\langle x \rangle = \int x dP = \int x \Psi^* \Psi dx = \int \Psi^* x \Psi dx. \quad (90.1)$$

Тут використано, що $dP = |\psi|^2 dV = \psi^* \psi dx$ є, виходячи з фізичного змісту квадрата модуля хвильової функції, ймовірністю того, що частинка буде знайдена в інтервалі $x, x + dx$.

Використовуючи операторний підхід, вираз для середнього значення $\langle x \rangle$ записують інакше:

$$\langle x \rangle = \int \psi^* \hat{x} \psi dx, \quad (90.2)$$

де \hat{x} оператор величини x . Порівнюючи вирази (90.1) і (90.2), бачимо, що **оператор x -ї координати** має вигляд

$$\boxed{\hat{x} = x}. \quad (90.3)$$

Аналогічно можна показати, що **оператори y і z -координат** виражаються формулами

$$\boxed{\hat{y} = y}, \quad \boxed{\hat{z} = z}. \quad (90.4)$$

Отже, **оператор радіуса-вектора** можна записати так:

$$\boxed{\hat{\vec{r}} = \vec{e}_x \hat{x} + \vec{e}_y \hat{y} + \vec{e}_z \hat{z} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z = \vec{r}}. \quad (90.5)$$

Абсолютно так само обчислюється середнє значення довільної функції від координат $f(x, y, z)$:

$$\langle f(x, y, z) \rangle = \int \psi^* \hat{f} \psi dx dy dz, \quad (90.6)$$

де оператор функції $f(x, y, z)$ знаходять так, як і оператор радіуса-вектора (див. (90.5)):

$$\hat{f} = f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = f(x, y, z). \quad (90.7)$$

Вищевикладений метод знаходження середніх значень поширюють у квантовій механіці на будь-яку фізичну величину (яка залежить не лише від координат, а і від імпульсів). Для будь-якої фізичної величини $F(\vec{r}, \vec{p})$ **середнє значення** визначається як

$$\boxed{\langle F \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi dV}, \quad (90.8)$$

де \hat{F} – оператор величини $F(\vec{r}, \vec{p})$, який має вигляд

$$\boxed{\hat{F} = F(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}})}. \quad (90.9)$$

2 Знайдемо в явному вигляді оператор імпульсу.

Як відомо, енергія частинки дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергії та визначається функцією

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + U(x, y, z). \quad (90.10)$$

Використовуючи правило (90.9), енергії (90.10) можна поставити у відповідність оператор

$$\hat{H} = H(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{r}}) = \frac{(\hat{\vec{p}})^2}{2m} + U(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \frac{(\hat{\vec{p}})^2}{2m} + U(x, y, z). \quad (90.11)$$

Порівняємо оператор (90.11) з **оператором Гамільтона (оператор енергії, який визначили з рівняння Шредінгера)**

$$\boxed{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z)}. \quad (90.12)$$

Із порівняння співвідношень (90.11) та (90.12) випливає

$$\frac{(\hat{p})^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla})^2 \equiv \frac{(-i\hbar\vec{\nabla})^2}{2m}.$$

Тут використали зв'язок між оператором Лапласа Δ та оператором набла $\vec{\nabla}$: $\Delta = (\vec{\nabla})^2$. Звідси можемо стверджувати, що **оператор імпульсу має вигляд**

$$\boxed{\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \equiv -i\hbar\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)}. \quad (90.13)$$

Зрозуміло, що оператор енергії визначається співвідношенням (90.12).

3 З'ясуємо, як пов'язані між собою середні значення, що визначаються способом (90.8) та власні значення фізичних величин.

Для спрощення математичних перетворень розглянемо випадок стану системи, в яких величина q має певне значення. Це означає, що цей стан описується хвильовою функцією $\psi = \psi_n$, яка відповідає власному значенню q_n . Хвильова функція ψ_n і власне значення q_n задовольняють рівнянню

$$\hat{Q}\psi_n = q_n\psi_n, \quad (90.14)$$

де \hat{Q} – оператор величини q . Середнє значення величини q в цьому разі відповідає власному значенню, тобто $\langle q \rangle = q_n$.

З іншого боку, середнє значення можемо також визначити у спосіб (90.8). Тому

$$\langle q \rangle = \int \psi_n^* \hat{Q} \psi_n dV.$$

Використаємо в цьому співвідношенні рівняння (90.14) і одержимо

$$\langle q \rangle = \int \psi_n^* q_n \psi_n dV = q_n \int \psi_n^* \psi_n dV = q_n. \quad (90.15)$$

Тут використали, що власне значення q_n не залежить від координат, а також умову нормування для хвильової функції $\int \psi_n^* \psi_n dV = 1$.

Отже, **середні значення, що визначаються способом (90.8) та за допомогою власних значень, мають одне і те саме значення.**

§ 91 Комутативність операторів. Умови, за яких дві фізичні величини можуть бути виміряні одночасно

1 Розглянемо дві фізичні величини a та b , яким відповідають оператори \hat{A} і \hat{B} . Чи завжди існує стан ψ , в якому обидва оператори мають визначені власні значення a і b ? Тобто, чи завжди хвильова функція ψ є власною функцією одночасно як для оператора \hat{A} , так і для оператора \hat{B} ? Іншими словами, чи можливо обидві фізичні величини a і b точно виміряти одночасно?

Для відповіді на це запитання припустимо, що ψ є власною функцією як оператора \hat{A} , так і оператора \hat{B} . Тобто

$$\hat{A}\psi = a\psi, \quad \hat{B}\psi = b\psi,$$

де a і b – власні значення операторів \hat{A} і \hat{B} в стані, якому відповідає одна і та сама хвильова функція ψ . Помножимо першу рівність на оператор \hat{B} . Одержимо

$$\hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}a\psi = a\hat{B}\psi = a \cdot b \cdot \psi.$$

Аналогічно

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}b\psi = b\hat{A}\psi = b \cdot a \cdot \psi.$$

Звідси випливає, що

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi = 0,$$

або

$$\boxed{\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}}. \quad (91.1)$$

Оператори, які мають властивість (91.1), називають **комутативними**.

Отже, якщо всі власні функції операторів \hat{A} і \hat{B} збігаються, то ці оператори комутують між собою. Справедлива й зворотна теорема: якщо оператори \hat{A} і \hat{B} комутують між собою, то збігаються і їх власні функції.

Наведеній теоремі можна надати й інше формулювання. Дві величини a і b можна виміряти одночасно, тоді й лише тоді, коли відповідні їм оператори \hat{A} і \hat{B} комутують між собою.

2 Розглянемо приклади. Так, координату x й відповідний їй імпульс p_x одночасно виміряти неможливо, оскільки оператори \hat{x} і \hat{p}_x не є комутативними між собою. Переконаємося у цьому. Як відомо,

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p}_x = -i\hbar\partial/\partial x.$$

Тоді

$$\begin{aligned} (\hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x)\psi &= -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \psi) - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\psi\right) = \\ &= -i\hbar\left(\psi + x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\psi - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\psi\right) = -i\hbar\psi \neq 0. \end{aligned}$$

Тобто $\hat{p}_x\hat{x} \neq \hat{x}\hat{p}_x$, оператори \hat{x} і \hat{p}_x не комутують між собою. Звідси випливає, що одночасно точно визначити координату x та її проекцію імпульсу p_x неможливо. Це твердження узгоджується з принципом невизначеностей Гейзенберга.

Аналогічно можна впевнитись у тому, що координати x і y можна виміряти одночасно, тому що оператори \hat{x} і \hat{y} комутують.

§ 92 Квантування моменту імпульсу. Модуль та одна з проєкцій моменту імпульсу. Азимутальне і магнітне квантові числа

1 Момент імпульсу частинки \vec{L} відносно початку координат O у класичній механіці визначається векторним добутком

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}. \quad (92.1)$$

У квантовій механіці моменту імпульсу частинки \vec{L} відповідає оператор

$$\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} & -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} & -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (92.2)$$

Тут використали, що оператор радіуса-вектора дорівнює самому радіусу-вектору, а оператор імпульсу визначається виразом $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ ($\vec{\nabla}$ – оператор набла).

Можна виділити чотири величини, які пов'язані з моментом імпульсу частинки. Це три проєкції та квадрат моменту імпульсу: L_x , L_y , L_z і $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. *Виникає запитання: чи можна одночасно виміряти усі вище перелічені чотири величини? Щоб відповісти на це запитання, потрібно перевірити: чи комутують один з одним оператори цих фізичних величин? А саме, чи комутують оператори проєкцій*

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \hat{L}_y = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right), \hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (92.3)$$

і оператор квадрата моменту імпульсу

$$\hat{L}^2 = (\hat{L}_x)^2 + (\hat{L}_y)^2 + (\hat{L}_z)^2 \quad (92.4)$$

між собою? Нескладно провести розрахунки й переконатися, що комутують між собою лише дві величини: оператор z -компоненти моменту імпульсу частинки й оператор квадрата моменту імпульсу. Це означає, що **одночасно можливо визначити лише z -компоненту моменту імпульсу частинки й оператор квадрата моменту імпульсу**. Дві інші проєкції виявляються абсолютно невизначеними. Це означає, що «вектор» моменту не має певного напрямку й, отже, не може бути зображений як у класичній механіці за допомогою спрямованого відрізка прямої.

2 Знайдемо квадрат модуля моменту імпульсу. Для цього потрібно розв'язати рівняння на визначення власних значень квадрата моменту імпульсу

$$\hat{L}^2\psi = L^2\psi,$$

де \hat{L}^2 – оператор квадрата моменту імпульсу частинки (див. вираз (92.4)); L^2 – власне значення квадрата моменту імпульсу частинки. Розв'язання цього рівняння є досить складним. Тому ми обмежимося наведенням лише кінцевих результатів: власні значення оператора квадрата моменту імпульсу дорівнюють

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (92.5)$$

Тут l – **квантове число, яке одержало назву азимутального**. Отже, модуль моменту імпульсу може мати лише дискретні значення, які описуються формулою

$$|L| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (92.6)$$

3 Знайдемо z -компоненту моменту імпульсу. Для цього потрібно розв'язати рівняння на визначення власних значень z -компоненти моменту імпульсу

$$\hat{L}_z\psi = L_z\psi, \quad (92.7)$$

де \hat{L}_z – оператор z -компоненти моменту імпульсу частинки; L_z – власне значення цієї величини. У сферичних координатах (r, θ, φ) оператор проєкції моменту імпульсу на полярну вісь Z (від якої відлічується полярний кут θ) має достатньо простий вигляд

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Отже, рівняння (92.7) набирає вигляду:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = L_z\psi. \quad (92.8)$$

Підстановка $\psi = \exp(i\alpha\varphi)$ в рівняння (92.8) приводить після скорочення на загальний множник $\exp(i\alpha\varphi)$ до алгебраїчного рівняння

$$-i\hbar\alpha = L_z,$$

з якого для α одержуємо значення iL_z / \hbar . Отже, розв'язок рівняння (92.8) має вигляд

$$\psi = C \exp[i(L_z / \hbar)\varphi].$$

Для того щоб ця функція була однозначною (одна зі стандартних умов для хвильової функції), необхідно виконати умову $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$, або

$$\exp[i(L_z / \hbar)(\varphi + 2\pi)] = \exp[i(L_z / \hbar)(\varphi)].$$

Ця умова буде виконаною, коли буде виконуватися співвідношення $\exp[i(L_z / \hbar) \cdot 2\pi] = 1$, або $L_z = m\hbar$, де m – ціле додатне або від'ємне число або нуль. Отже, власні значення z -компоненти моменту імпульсу мають дискретний спектр:

$$L_z = m\hbar \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (92.9)$$

Із причин, з'ясованих далі, число m називають *магнітним квантовим числом*.

Оскільки проекція вектора не може перевищувати модуль цього вектора, то повинна виконуватися умова

$$|m\hbar| \leq \hbar\sqrt{l(l+1)}.$$

Звідси випливає, що максимальне можливе значення $|m|$ дорівнює l . Отже, можемо записати

$$\begin{aligned} &|L| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \\ &L_z = m\hbar \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l). \end{aligned} \quad (92.10)$$

Із цих формул випливає, що $|L_z|$ завжди менше $|L|$. Отже, напрямок моменту імпульсу не може збігатися з виділеним у просторі напрямком Z . Це узгоджується з тією обставиною, що напрямок моменту в просторі є невизначеним.

Необхідно зазначити, що з правил квантування моменту випливає, що стала Планка \hbar можна розглядати як природну одиницю моменту імпульсу.

4 Момент імпульсу системи, що складається з декількох мікрочастинок, дорівнює сумі моментів окремих часток. Сумарний момент, як і будь-який момент узагалі, визначається виразом

$$|L_{\text{рез}}| = \hbar\sqrt{L(L+1)}, \quad (92.11)$$

де L – азимутальне квантове число результуючого моменту. У разі системи, що складається з двох частинок, число L може мати такі значення:

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|, \quad (92.12)$$

де l_1 й l_2 – числа, що визначають модулі моментів, які складаються, за формулою

$$|L_i| = \hbar\sqrt{l_i(l_i+1)}.$$

ТЕМА 16 ФІЗИКА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ

§ 93 Атом водню з погляду квантової механіки. Квантові числа: n , l , m . Кратність виродження. Правило відбору

1 Розглянемо систему, що складається з нерухомого ядра із зарядом Ze (Z – ціле число) та електрона, який рухається навколо нього. За умови $Z > 1$, таку систему називають воднеподібним іоном; при $Z = 1$ вона є атомом водню.

Потенціальна енергія електрона дорівнює

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r},$$

де r – відстань електрона від ядра. Отже, рівняння Шредінгера має вигляд

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0, \quad (93.1)$$

де m_e – маса електрона.

Поле, у якому рухається електрон, є центральносиметричним. Тому доцільно скористатися сферичною системою координат: r, θ, ϕ . Підставивши в (93.1) вираз оператора Лапласа у сферичних координатах, прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (93.2)$$

Можна показати, що рівняння (93.2) має розв'язки для хвильової функції, які задовольняють стандартні умови (тобто однозначні, скінченні й безперервні), у таких прикладах: 1) при будь-яких додатних енергіях E ; 2) при дискретних від'ємних значеннях енергії, що дорівнюють

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (93.3)$$

Приклад $E > 0$ відповідає електрону, що пролітає поблизу ядра й віддаляється знову на нескінченність. Приклад $E < 0$ відповідає електрону, що рухається навколо ядра. Порівняння з виразом для енергії, одержане в теорії Бора, показує, що квантова механіка приводить до таких самих значень енергії водневого атома. Проте у квантовій механіці ці значення утворюються як наслідок основних положень цієї науки. Бору ж для одержання такого результату довелося вводити спеціальні додаткові припущення.

Власні функції рівняння (93.2) містять три цілих параметри n, l й m :

$$\psi = \psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi). \quad (93.4)$$

Параметр n , що називають **головним квантовим числом**, збігається з номером рівня енергії (див. формулу (93.3)). Параметри l і m є **азимутальним і магнітним квантовим числом**, що визначають за відповідними формулами модуль моменту імпульсу та проєкцію моменту на деякий напрямок Z .

Розв'язки для хвильової функції, що задовольняють стандартні умови, задовольняють лише значення l , які не перевищують $n-1$. Отже, при заданому n квантове число l може набувати n різних значень

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

При заданому l квантове число m може набувати $2l+1$ різних значень

$$m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l.$$

2 Згідно з (93.3) енергія електрона залежить лише від головного квантового числа n . Отже, кожному власному значенню енергії E_n (крім E_1) відповідає кілька власних функцій $\psi_{n,l,m}$, що відрізняються значеннями квантових чисел l і m . Це означає, що атом водню може мати одне й те саме значення енергії, перебуваючи в декількох різних станах. У таблиці 93.1 наведені стани, що відповідають першим трьом енергетичним рівням.

Стани з однаковою енергією називають **виродженими**, а число різних станів із яким-небудь значенням енергії називають **кратністю виродження** відповідного енергетичного рівня.

Кратність виродження рівнів водню легко обчислити, беручи до уваги можливі значення для l й m . Кожному з n значень квантового числа l відповідає $2l+1$ значень квантового числа m . Отже, число різних станів, що відповідають даному n , дорівнює

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \quad (93.5)$$

(див. також пункт 5 цього параграфа). Для обчислення суми в (93.5) використали формулу арифметичної прогресії.

Таблиця 93.1 – Стани, що відповідають першим трьом енергетичним рівням

Рівень енергії E_n	Псі-функція $\Psi_{n,l,m}$	Значення			Рівень енергії E_n	Псі-функція $\Psi_{n,l,m}$	Значення		
		n	l	m			n	l	m
E_1	$\Psi_{1,0,0}$	1	0	0	E_3	$\Psi_{3,0,0}$	3	0	0
E_2	$\Psi_{2,0,0}$	2	0	0		$\Psi_{3,1,-1}$	3	1	-1
	$\Psi_{2,1,-1}$	2	1	-1		$\Psi_{3,1,0}$	3	1	0
	$\Psi_{2,1,0}$	2	1	0		$\Psi_{3,1,+1}$	3	1	+1
	$\Psi_{2,1,+1}$	2	1	+1		$\Psi_{3,2,-2}$	3	2	-2
						$\Psi_{3,2,-1}$	3	2	-1
				$\Psi_{3,2,0}$		3	2	0	
				$\Psi_{3,2,+1}$		3	2	+1	
				$\Psi_{3,2,+2}$		3	2	+2	

Отже, кратність виродження енергетичних рівнів водневого атома дорівнює n^2 (див. також табл. 1, п.5 цього параграфа).

3 Стани з різними значеннями азимутального квантового числа l відрізняються величиною моменту імпульсу. В атомній фізиці застосовують запозичені зі спектроскопії умовні позначення станів електрона з різними значеннями моменту імпульсу. Електрон, що перебуває в стані з $l=0$, називають **s-електроном** (відповідний стан – s-станом), з $l=1$ – **p-електроном**, з $l=2$ – **d-електроном**, з $l=3$ – **f-електроном**, потім ідуть g, h тощо вже за алфавітом. Значення головного квантового числа записують перед умовною позначкою квантового числа l . Отже, електрон у стані з $n=3$ і $l=1$ позначають символом $3p$.

Оскільки l завжди менше n , можливі такі стани електрона:

$$1s, \\ 2s, 2p, \\ 3s, 3p, 3d, \\ 4s, 4p, 4d, 4f$$

Схема рівнів енергії зображена на рисунку 93.1. На цій схемі відображено (правда, частково) виродження рівнів, крім того, вона має ще ряд істотних переваг, які скоро стануть очевидними.

4 Ми знаємо, що випромінювання й поглинання світла відбувається під час переходу електрона з одного рівня на інший. У квантовій механіці доводять, що для **азимутального квантового числа l** є **правило відбору**

$$\Delta l = \pm 1. \quad (93.6)$$

Це означає, що можливі лише такі переходи, за яких l змінюється на одиницю. Правило (93.5) обумовлене тим, що фотон має власний момент імпульсу (спін). Під час випромінювання фотон виносить з атома цей момент, а в разі поглинання приносить, так що правило відбору (93.6) є просто наслідком закону збереження моменту імпульсу.

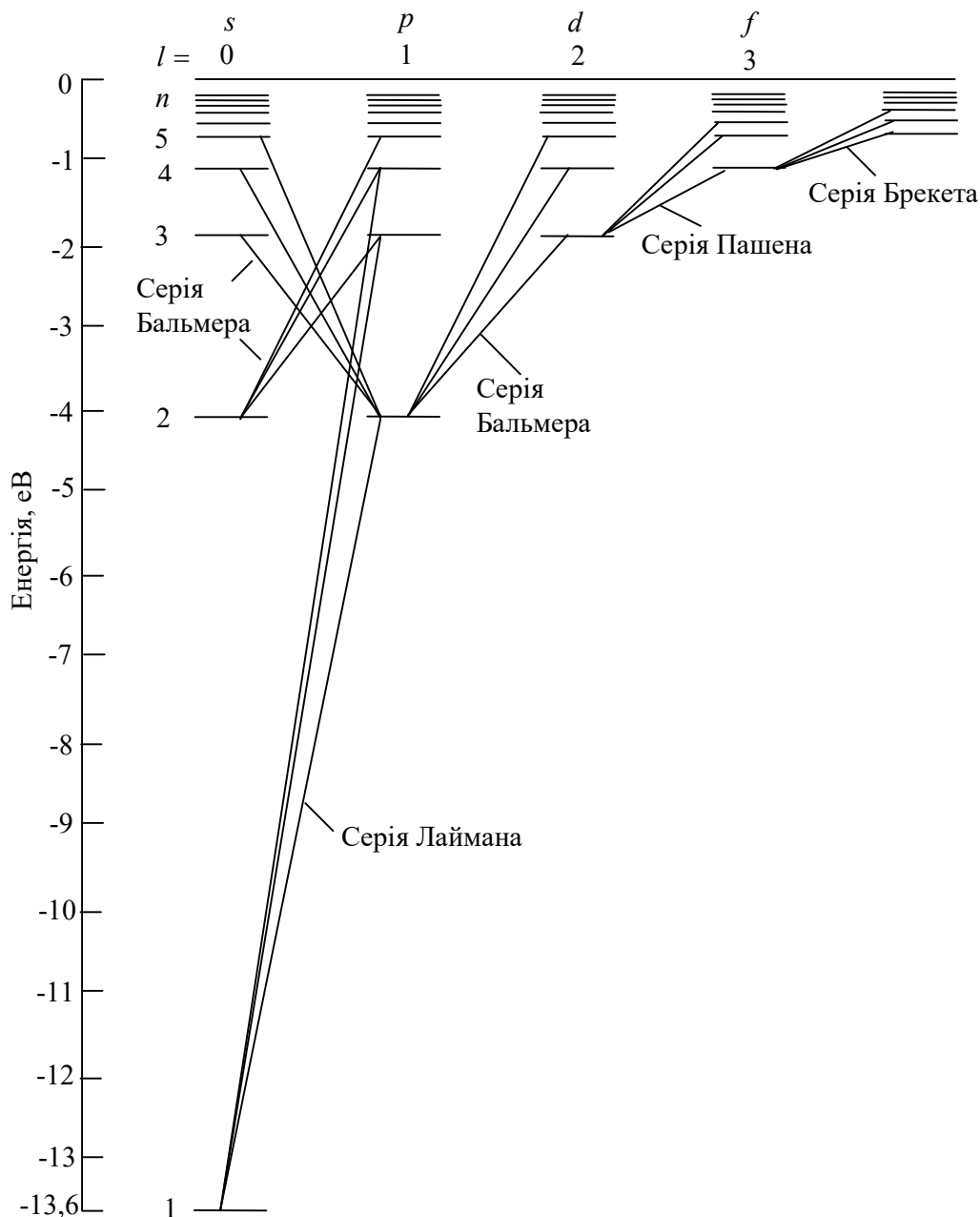


Рисунок 93.1 – Переходи між енергетичними рівнями, що дозволені правилом (93.6)

На рисунку 93.1 показані переходи, дозволені правилом (93.6). Користуючись умовними позначками станів електрона, переходи, що приводять до виникнення серії Лаймана, можна записати у вигляді

$$np \rightarrow 1s \quad (n = 2, 3, \dots);$$

серії Бальмера відповідають переходи

$$np \rightarrow 2s, \quad ns \rightarrow 2p, \quad nd \rightarrow 2p \quad (n = 3, 4, \dots) \text{ тощо.}$$

Стан $1s$ є основним станом атома водню. У ньому атом має мінімальну енергію. Щоб перевести атом з основного стану в збуджений (тобто в стан з більшою енергією), йому необхідно передати енергію. Це може бути здійснено за рахунок теплового зіткнення атомів (із цієї причини нагріті тіла світяться – атоми випромінюють, повертаючись зі збудженого в основний стан), або за рахунок зіткнення атома з досить швидким електроном, або, зрештою, за рахунок поглинання атомом фотона.

Фотон під час його поглинання атомом зникає, передаючи атому всю свою енергію. Атом не може поглинути лише частину фотона, тому що фотон, як і електрон, як інші елементарні частинки, є неподільним. Оскільки атом, що поглинає, зазвичай, знаходиться в основному стані, спектр поглинання водневого атома повинен складатися з ліній, що відповідають переходам

$$1s \rightarrow np \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Цей результат повністю узгоджується з дослідом.

2 Потрібно зазначити, що в цьому параграфі не було враховано, що електрон також має власний момент імпульсу (спін електрона). Спін електрона характеризується квантовим числом $s = 1/2$ (аналог орбітального квантового числа l). Водночас власний момент імпульсу електрона дорівнює $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\sqrt{3}/2$. Проекція на виділену вісь Z власного моменту імпульсу може набувати $2s + 1 = 2$ дискретних значень. Тобто проекція власного моменту імпульсу дорівнює $L_{s_z} = m_s \hbar$, де спінове квантове число m_s (аналог магнітного квантового числа m) може набувати двох значень $+s = 1/2$ і $-s = -1/2$. Щоб урахувати спінове виродження, необхідно формулу (93.5) помножити на 2. Тобто **виродження в атомі водню дорівнює $2n^2$** .

§ 94 Магнетизм атомів. Дослід Штерна й Герлаха. Спін електрона

1 Магнетизм атомів. Із часу Ампера магнетизм пояснювався електричними струмами, які, за його уявленнями, циркулюють усередині малих частинок речовини (атомів і молекул). Природа цих струмів була встановлена з появою електронних уявлень про будову речовини й теорії Бора. Вважалося, що молекулярні струми Ампера створюються електронами, які обертаються навколо ядра атома.

Оскільки електрони, що утворюють оболонку атома, електрично заряджені й мають маси, з їх рухом в оболонці (такий рух називають орбітальним) пов'язаний не лише момент імпульсу $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, але й магнітний момент атома $\vec{p}_m = I \cdot \vec{S}$. Зв'язок між цими двома моментами вже розглянуто раніше. Для одного електрона, що рухається по коловій орбіті, використовуючи методи класичної фізики, було одержано

$$\vec{p}_m = \Gamma \vec{L}, \quad (94.1)$$

де

$$\Gamma = -\frac{|e|\hbar}{2m_e}. \quad (94.2)$$

У цьому разі відношення магнітного моменту електрона до моменту імпульсу p_m/L називають **гіромагнітним відношенням** для орбітального руху електрона.

Такий самий зв'язок між магнітним моментом і моментом імпульсу зберігається й у квантовій механіці. Проте тепер необхідно класичні уявлення замінити квантовими. Як і в разі моменту імпульсу квантова механіка розв'язує задачу про магнітний момент атома з використанням операторного методу. Отже, вивчення магнітного моменту частинки зводиться до вивчення властивостей оператора \hat{p}_m , який відповідно до (94.1) має вигляд

$$\hat{p}_m = \Gamma \hat{L}. \quad (94.3)$$

Оскільки оператори \hat{L} й \hat{p}_m відрізняються лише сталим множником Γ , то їх властивості подібні. Магнітний момент і момент імпульсу квантуються за однаковими правилами. Складові магнітного моменту на будь-які два різних напрямки не можуть одночасно мати визначеного значення. У стаціонарному стані визначені значення можуть мати лише квадрат магнітного моменту й одна з його проєкцій на координатні осі. За таку проєкцію беруть проєкцію на вісь Z . Із формул (94.3), (94.2) і того, що для орбітального руху електрона $L_z = m\hbar$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) безпосередньо випливає

$$p_{m,z} = \Gamma L_z = -\frac{|e|\hbar}{2m_e} L_z = -\mu_B \cdot m, \quad (94.4)$$

де

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}. \quad (94.5)$$

Сталу μ_B називають **магнетоном Бора**.

2 Схема досліду Штерна й Герлаха. Наявність в атомів магнітних моментів і їх квантування було доведено прямими дослідженнями Штерна й Герлаха в 1921 р. У посудині з високим вакуумом створювався за допомогою діафрагм D і D' (рис. 94.1) різко обмежений атомний пучок досліджуваного елемента, що випаровувався з печі K . Пучок проходив через сильне магнітне поле з індукцією B між полюсними наконечниками N й S електромагніта. Один із наконечників (N) мав вигляд призми з гострим ребром, а вздовж іншого (S) була виточена канавка. Завдяки такій конструкції полюсних наконечників магнітне поле було сильно неоднорідним. Після проходження через магнітне поле пучок попадав на фотопластинку P й залишав на ній слід.

3 Розрахунок поведінки атомного пучка. Якщо \vec{p}_m – магнітний момент атома, то на атом у неоднорідному магнітному полі діє сила (див. (6.4))

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \nabla) \vec{B}.$$

Спрямуємо вісь Z уздовж магнітного поля (тобто від N до S перпендикулярно до полюсних наконечників). Тоді проєкція сили в цьому напрямку буде

$$F_z = p_{m,x} \frac{\partial B_z}{\partial x} + p_{m,y} \frac{\partial B_z}{\partial y} + p_{m,z} \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Можна показати, що першими двома доданками в цьому виразі можна знехтувати. Тоді середнє за часом значення z -компоненти сили, що діє на атом із магнітним моментом \vec{p}_m , дорівнює

$$\bar{F}_z = p_{m,z} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (94.6)$$

Під дією цієї сили атоми будуть зміщуватися вздовж осі Z (див. рис. 94.1).

Варто очікувати різних результатів досліду з класичного та квантового поглядів. У досліджах Штерна й Герлаха спочатку одержували слід атомного пучка на фотопластинці при виключеному магнітному полі, а потім при включеному. Якщо б проєкція $p_{m,z}$ могла

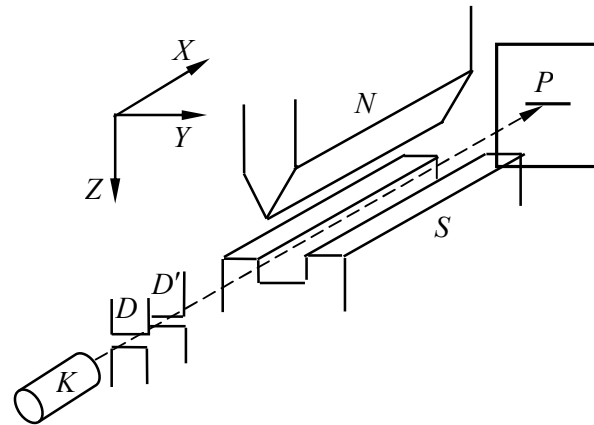


Рисунок 94.1 – Схема досліду Штерна й Герлаха

набувати будь-яких неперервних значень, як того вимагає *класична теорія*, то сила \vec{F}_z також набувала б будь-яких неперервних значень. Включення магнітного поля приводило б тоді лише до *розширення пучка вздовж осі Z*.

Іншого результату варто очікувати, беручи до уваги *квантову теорію*. У цьому разі проєкція $p_{m,z}$, а з нею й середня сила \vec{F}_z можуть набувати лише *ряду дискретних вибраних значень*. Якщо орбітальне квантове число атома дорівнює l , то за квантовою теорією пучок уздовж осі Z розщепиться на $2l+1$ пучків (кількість таких пучків дорівнює числу можливих значень, яких може набути квантове число m). Отже, залежно від значення числа l варто було б очікувати, що пучок розщепиться на 1,3,5,... складових. Очікуване число складових пучка **повинно було б бути завжди непарним**.

4 Результати досліду Штерна й Герлаха. У результаті досліду на фотопластинці спостерігалось розщеплення пучка атомів. *Отже, досліди Штерна й Герлаха довели квантування проєкції $p_{m,z}$. Проте їх результати не завжди відповідали теорії, викладеній вище*. Так, у дослідях використовувалися пучки атомів срібла, для яких орбітальне квантове число дорівнювало нулю ($l=0$). Відповідно до квантової теорії, викладеної вище, розщеплення пучків не повинно було відбуватися (розщеплених пучків повинно бути $2l+1=2\cdot 0+1=1$). В експерименті ж спостерігалось, що в магнітному полі пучок розщеплювався вздовж осі Z на дві складові. Аналогічний результат було одержано для атомів водню. Для атомів інших хімічних елементів була одержана більш складна картина розщеплення, проте число розщеплених пучків було не лише непарним, як це передбачала теорія, але й парним, що суперечило їй. Отже, *в квантову теорію необхідно було внести корективи*.

5 Спін. Розглядаючи невідповідність теорії та експерименту Штерна та Герлаха також потрібно взяти до уваги результати дослідів Ейнштейна й де Гааза з визначення гіромагнітного відношення. Для заліза виявилось, що гіромагнітне відношення дорівнює

$$\frac{p_m}{L} = \left| \frac{e}{m_e} \right|, \quad (94.7)$$

тобто є удвічі більшим, ніж впливає з класичної теорії (див. співвідношення (94.1) та (94.2)).

Також виявилось, що спектральні терми лужних металів мають так звану дублетну структуру, тобто складаються з двох близько розміщених рівнів. Для опису цієї структури трьох квантових чисел n, l, m виявилось недостатньо – необхідно було ввести четверте квантове число. Це було основним мотивом, через який Уленбек і Гаудсміт у 1925 р. ввели *гіпотезу про спін електрона*. Сутність цієї гіпотези полягає в тому, що в електрона є не лише момент імпульсу й магнітний момент, пов'язані з переміщенням цієї частинки як цілого. *Електрон має також власний, або внутрішній механічний момент імпульсу. Цей власний момент імпульсу й називають спіном* (від англійського слова *to spin* – *вертїтисся*). Відповідний йому магнітний момент називають **спіновим магнітним моментом**. Ці моменти позначаються відповідно через L_s і $p_{m,s}$ на відміну від орбітальних моментів L_l і $p_{m,l}$. *Четверте квантове число позначають просто через s і називають спіном*.

Самі Уленбек і Гаудсміт припускали, що спін виникає через обертання електрона навколо власної осі. Через це наявна в той час модель атома одержала ще більшу подібність до Сонячної системи. Електрони (планети) не лише обертаються навколо ядра (Сонця), але й навколо власних осей, однак відразу ж з'ясували хибність такого класичного уявлення про спін (такі уявлення не змогли пояснити результат (94.7)). У 1928 р. Дірак показав, що спін електрона автоматично впливає з його теорії електрона, що ґрунтується на релятивістському хвильовому рівнянні. У теорії Дірака було одержано гіромагнітне відношення для власних моментів, яке збігалось з дослідом (див. (94.7)). Отже, спін електрона є квантово-релятивістським ефектом, який не має класичного тлумачення. Потім

концепція спіну як внутрішнього моменту імпульсу була поширена на інші елементарні й складні частинки та знайшла підтвердження й широке застосування в сучасній фізиці.

6 Спін електрона. У загальному курсі фізики немає можливості викласти докладну теорію спіну. Ми візьмемо як вихідне положення, що спіновому моменту імпульсу відповідає векторний оператор, проєкції якого мають властивості, подібні до властивостей оператора орбітального моменту імпульсу. Із цього випливає, що визначені значення в одному й тому самому стані можуть мати лише квадрат повного спіну й одна з його проєкцій на визначену вісь (вісь Z). Якщо максимальне значення проєкції $L_{z,s}$ дорівнює $s \cdot \hbar$ (s – спінове квантове число, співвідношення написано за аналогією з $L_{z,l} = m_{\max} \hbar$, де $m_{\max} = l$), то число всіх можливих проєкцій, що відповідають даному квантовому числу s , буде дорівнює $2s + 1$ (у разі орбітального руху має місце аналогічне співвідношення $2l + 1$).

У Дослідах Штерна й Герлаха атоми водню перебували в s -стані, тобто їх орбітальні моменти дорівнювали нулю ($l = 0$). Тому Уленбек і Гаудсміт припустили, що розщеплення пучка обумовлене не орбітальним, а спіновим магнітним моментом. Те саме стосується й дослідів з атомами срібла. Атом срібла має єдиний зовнішній електрон. Атомний остов через його симетрію спінового й магнітного моментів не має. Увесь магнітний момент атома срібла створюється лише одним зовнішнім електроном. Коли атом перебуває в нормальному, тобто s -стані, то орбітальний момент валентного електрона дорівнює нулю – весь момент є спіновим. Тому результати дослідів у цьому разі визначалися виключно спіновими моментами електрона.

Досліди Штерна й Герлаха показали, що для атома срібла та водню ($l = 0$) пучок розщеплювався на два пучки. Це означає, що $2s + 1 = 2$. Звідси одержуємо для електрона $s = 1/2$.

Отже, для електрона спінове квантове число дорівнює $1/2$:

$$\boxed{s = 1/2}. \quad (94.8)$$

Для власного моменту імпульсу є справедливим співвідношення, аналогічне орбітальному моменту імпульсу електрона

$$\boxed{L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)} = \hbar \sqrt{3}/2}. \quad (94.9)$$

Проєкцію власного моменту імпульсу на вісь Z визначають співвідношенням

$$\boxed{L_{z,s} = \hbar m_s \quad (m_s = \pm s = \pm 1/2)}. \quad (94.10)$$

Вимірювання проєкції магнітного моменту $p_{m,z}$ в досліді Штерна й Герлаха показали, що для атомів водню й срібла величина $p_{m,z}$ дорівнює магнетону Бору μ_B . Отже, було одержано гіромагнітне відношення для електрона

$$\left| \frac{p_{m,z}}{L_z} \right| = \frac{\mu_B}{\hbar/2} = \left| \frac{e}{m_e} \right|, \quad (94.11)$$

що відповідає результату, що був знайденому Ейнштейном і де Гаазом (див. (94.7)).

§ 95 Принцип Паулі. Періодична система елементів Д. І. Менделєєва з погляду квантової механіки

1 У класичній механіці частинки однакової природи (наприклад, електрони) можна розрізняти. Пронумерувавши їх у деякий момент часу t_0 , можна спостерігати за кожною з них під час її руху по траєкторії та на будь-який момент часу t зазначити, який номер було привласнено тій або іншій частинці.

У квантовій механіці цю проблему розглядають принципово інакше. Через принцип невизначеності (співвідношення невизначеностей Гейзенберга) поняття траєкторії частинки

втрачає зміст. Тому стежити за кожною з однакових частинок і тим самим розрізнати їх неможливо. Отже, у квантовій механіці частинки однакової природи повністю втрачають свою «індивідуальність» – вони виявляються нерозрізненими. Це твердження називають **принципом нерозрізненості**, або **принципом тотожності однакових частинок**.

2 Принцип нерозрізненості однакових частинок приводить до глибоких фізичних наслідків. Нехай є система з двох тотожних частинок. Позначивши сукупність координат і проєкції спіну частинок буквами ξ_1 й ξ_2 , розглянемо хвильову функцію системи $\psi(\xi_1, \xi_2)$. Оскільки частинки нерозрізнені, перестановка ξ_1 й ξ_2 не повинна приводити до зміни фізичних властивостей системи, тобто змінювати квадрат модуля хвильової функції. Отже, повинна виконуватися рівність

$$|\psi(\xi_1, \xi_2)|^2 = |\psi(\xi_2, \xi_1)|^2.$$

Водночас можливі два випадки:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1) \text{ і } \psi(\xi_1, \xi_2) = -\psi(\xi_2, \xi_1).$$

У першому випадку функція ψ виявляється симетричною відносно зміни ξ_1 й ξ_2 , у другому випадку – антисиметричною.

Виявляється, що частинки з нульовим або цілим спіном описуються симетричними, а частинки з напівцілим спіном – антисиметричними хвильовими функціями. Подальший аналіз, який через його складність ми викладати тут не маємо можливості, приводить до таких результатів.

Частинки із цілим або нульовим спіном можуть перебувати в межах даної системи в однаковому стані в необмеженій кількості. Вони підкоряються статистиці, розробленій Бозе й Ейнштейном, і тому називаються **бозонами**. Можна сказати, що бозони є «колективістами», їм «подобається» накопичуватися в одному й тому самому стані.

Частинки з напівцілим спіном можуть перебувати у квантових станах лише поодиноці. Вони підкоряються статистиці, розробленій Фермі й Діраком, і називаються **ферміонами**. Ферміони є «індивідуалістами».

У 1925 р. Паулі сформулював **принцип, що має його ім'я, відповідно до якого в одному й тому самому атомі (або в якій-небудь іншій квантовій системі) не може бути двох електронів (або інших частинок із напівцілим спіном), що мають однакову сукупність квантових чисел**. Іншими словами, у одному й тому самому стані не можуть перебувати одночасно два електрони.

3 **Розподіл електронів за енергетичними станами в атомі**. Нагадаємо, що стан електрона в атомі характеризується такими чотирма квантовими числами:

- головним n ($n = 1, 2, 3, \dots$);
- азимутальним l ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$);
- магнітним m_l ($m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$);
- спіновим m_s ($m_s = +1/2, -1/2$).

Енергія стану атома загалом залежить від чисел n і l . Крім того, є слабка залежність енергії від чисел m_l і m_s , оскільки їх значення пов'язані зі взаємною орієнтацією моментів імпульсів, від якої залежить енергія спин-орбітальної взаємодії. Енергія стану сильніше зростає зі збільшенням числа n , ніж зі збільшенням l . Зазвичай стан із більшим n має незалежно від значення l більшу енергію.

В основному (незбудженому) стані атома електрони повинні розміщуватися на найнижчих доступних для них енергетичних рівнях. Пояснення характеру заповнення основних станів атомів дає принцип Паулі. Стосовно електронів в атомі цей принцип можна сформулювати так: *в одному й тому самому атомі не може бути двох електронів, що мають однакову сукупність квантових чисел n, l, m_l і m_s .*

Аналізуючи атом водню з погляду квантової механіки було показано, що даному n відповідає n^2 станів, що відрізняються значеннями l й m_l . Квантове число m_s може набувати двох значень: $\pm 1/2$. Тому в станах із даним значенням n можуть знаходитися в атомі не більше $2n^2$ електронів:

- стани з $n = 1$ можуть мати 2 електрони;
- стани з $n = 2$ можуть мати 8 електронів;
- стани з $n = 3$ можуть мати 18 електронів;
- стани з $n = 4$ можуть мати 32 електрона;
- стани з $n = 5$ можуть мати 50 електронів тощо.

Сукупність електронів, що мають однакові значення квантового числа n , утворюють **оболонку**. Оболонки підрозділяються на **підоболонки**, що відрізняються значенням квантового числа l . Відповідно до значень n оболонкам дають позначення, запозичені зі спектроскопії рентгенівських променів (див. табл. 95.1):

Таблиця 95.1 – Відповідність квантових чисел n позначенням оболонки

Значення n	1	2	3	4	5	6	7	...
Позначення оболонки	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	...

Розподіл можливих станів електрона в атомі на оболонки й підоболонки показаний у таблиці 95.2, у якій замість позначень $m_s = \pm 1/2$ застосовані для наочності символи $\uparrow\downarrow$. Підоболонки, як зазначено в таблиці, можуть позначатися двома способами, наприклад, L_1 (нижній індекс 1 позначає номер підоболонки) або $2s$ ($n = 2, l = 0$).

Для повністю заповненої підоболонки характерна рівність нулю сумарних орбітальних і сумарного спінового моментів ($L = 0, S = 0$). Отже, момент імпульсу такої підоболонки дорівнює нулю. Переконаємося в цьому на прикладі $3d$ -підоболонки. Спіни всіх десяти електронів, що входять у цю підоболонку, попарно компенсують один одного, унаслідок чого квантове число сумарного спінового моменту $S = 0$. Квантове число проєкції **результуючого орбітального моменту імпульсу** цієї підоболонки на вісь Z має єдине значення $m_L = \sum m_l = 0$. Отже, квантове число результуючого орбітального моменту імпульсу L також дорівнює нулю. Тим самим під час визначення L й S атома заповнені підоболонки можна не брати до уваги.

4 Принцип Паулі дає пояснення періодичної повторюваності властивостей атомів. Простежимо побудову **періодичної системи елементів Д. І. Менделєєва**. Почнемо з атома водню, що має один електрон. Кожний наступний атом будемо одержувати, збільшуючи заряд ядра попереднього атома на одиницю й додаючи один електрон, який ми будемо розміщувати в доступний для нього відповідно до принципу Паулі стан із найменшою енергією.

В атомі водню є в основному стані один $1s$ -електрон із довільною орієнтацією спіну. Квантові числа атома мають значення $L = 0, S = 1/2, J = 1/2$. Тут квантове число J характеризує результуючий момент імпульсу атома, що складається з орбітального й спінового моментів імпульсу. Відповідно символ основного стану водневого атома має вигляд $^2S_{1/2}$ ($2 = 2S + 1$, де $S = 1/2$; символ S позначає, що $L = 0$; індекс $1/2 = J$; не потрібно плутати спінове квантове число S із позначенням S , яке вказує, що орбітальне квантове число дорівнює нулю $L = 0$).

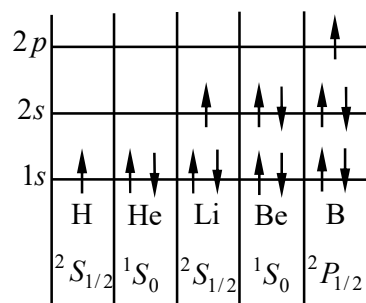


Рисунок 95.1 – Схема заповнення електронами енергетичних рівнів

Якщо заряд ядра атома водню збільшити на одиницю й додати ще один електрон, одержимо атом гелію. Обидва електрони в цьому атомі можуть перебувати в K -оболонці, але з антипаралельною орієнтацією спінів. Так звана **електронна конфігурація** атома може бути записана як $1s^2$ (два $1s$ -електрони). Основним станом буде $^1S_0 (L=0, S=0, J=0)$.

На атомі гелію закінчується заповнення K -оболонки. Третій електрон атома літію може зайняти лише рівень $2s$ (рис. 95.1). Утворюється електронна конфігурація $1s^2 2s$. Основний стан характеризується квантовими числами $L=0, S=1/2, J=1/2$. Тому основним станом, як і у водню, буде $^2S_{1/2}$. Третій електрон атома літію, займаючи більш високий енергетичний рівень, ніж інші два електрони, виявляється слабкіше, ніж вони, пов'язаним із ядром атома. У результаті він визначає оптичні й хімічні властивості атома.

У четвертого елемента, берилію, повністю заповнюється підоболонка $2s$. У наступних шести елементах (B, C, N, O, F і Ne) відбувається заповнення електронами підоболонки $2p$, у результаті чого неон має повністю заповнені оболонки K (двама електронами) і L (вісьма електронами), що утворюють стійку систему, подібну до системи гелію, чим обумовлюються специфічні властивості інертних газів.

Процес забудови електронних оболонок перших 36 елементів періодичної системи поданий у таблиці 95.3. Одинадцятий елемент – натрій, крім заповнених оболонок K і L , має один електрон у підоболонці $3s$. Електронна конфігурація має вигляд $1s^2 2s^2 2p^2 3s$. Основним станом буде $^2S_{1/2}$. Електрон $3s$ пов'язаний із ядром слабкіше від інших і є **валентним**, або **оптичним електроном**. У зв'язку із цим хімічні й оптичні властивості натрію подібні до властивостей літію.

Таблиця 95.2 – Можливі стани електрона в атомі

Оболонка	n	l	m_l	m_s	Підоболонка	Оболонка	n	l	m_l	m_s	Підоболонка	
K	1	0	0	$\uparrow\downarrow$	$K(1s)$	N	4	0	0	$\uparrow\downarrow$	$N_1(4s)$	
L	2	0	0	$\uparrow\downarrow$	$L_1(2s)$			1	-1 0 +1	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$N_2(4p)$	
		1	-1 0 +1	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$L_2(2p)$			2	-2 -1 0 +1 +2	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$N_3(4d)$	
M	3	0	0	$\uparrow\downarrow$	$M_1(3s)$			3	3	-3 -2 -1 0 +1 +2 +3	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$N_4(4f)$
		1	-1 0 +1	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$M_2(3p)$							
		2	-2 -1 0 +1 +2	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	$M_3(3d)$							

У наступних за натрієм елементах нормально заповнюються підоболонки $3s$ й $3p$. Підоболонка $3d$ у разі цієї загальної конфігурації виявляється енергетично вищою від підоболонки $4s$, у зв'язку з чим при незавершеному в цілому заповненні оболонки M

починається заповнення оболонки N . Підоболонка $4p$ лежить уже вище, ніж $3d$, так що після $4s$ заповнюється підоболонка $3d$.

З аналогічними відступами від звичайної послідовності, що повторюються час від часу, здійснюється забудова електронних рівнів усіх атомів. До того ж періодично повторюються подібні електронні конфігурації (наприклад, $1s, 2s, 3s$ тощо) понад повністю заповнених підоболонок, чим обумовлюється періодична повторюваність хімічних та оптичних властивостей атомів.

Таблиця 95.2 – Електронні оболонки перших 36 елементів періодичної системи

Елемент	K		L			M		N	
	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	
1 H	1	–	–	–	–	–	–	–	
2 He	2	–	–	–	–	–	–	–	
3 Li	2	1	–	–	–	–	–	–	
4 Be	2	2	–	–	–	–	–	–	
5 B	2	2	1	–	–	–	–	–	
6 C	2	2	2	–	–	–	–	–	
7 N	2	2	3	–	–	–	–	–	
8 O	2	2	4	–	–	–	–	–	
9 F	2	2	5	–	–	–	–	–	
10 Ne	2	2	6	–	–	–	–	–	
11 Na	2	8	1	–	–	–	–	–	
12 Mg	2	8	2	–	–	–	–	–	
13 Al	2	8	2	1	–	–	–	–	
14 Si	2	8	2	2	–	–	–	–	
15 P	2	8	2	3	–	–	–	–	
16 S	2	8	2	4	–	–	–	–	
17 Cl	2	8	2	5	–	–	–	–	
18 Ar	2	8	2	6	–	–	–	–	
19 K	2	8	8	–	1	–	–	–	
20 Ca	2	8	8	–	2	–	–	–	
21 Sc	2	8	8	1	2	–	–	–	
22 Ti	2	8	8	2	2	–	–	–	
23 V	2	8	8	3	2	–	–	–	
24 Cr	2	8	8	5	1	–	–	–	
25 Mn	2	8	8	5	2	–	–	–	
26 Fe	2	8	8	6	2	–	–	–	
27 Co	2	8	8	7	2	–	–	–	
28 Ni	2	8	8	8	2	–	–	–	
29 Cu	2	8	8	10	1	–	–	–	
30 Zn	2	8	8	10	2	–	–	–	
31 Ga	2	8	8	10	2	1	–	–	
32 Ge	2	8	8	10	2	2	–	–	
33 As	2	8	8	10	2	3	–	–	
34 Se	2	8	8	10	2	4	–	–	
35 Br	2	8	8	10	2	5	–	–	
36 Kr	2	8	8	10	2	6	–	–	

§ 96 Спонтанне й вимушене випромінювання. Коефіцієнти Ейнштейна

1 Відповідно до теорії Бора можуть бути два види переходів атомів між енергетичними рівнями. Перший вид – перехід із більш високого енергетичного рівня E_n на більш низький E_m із випромінюванням фотона $\hbar\omega = E_n - E_m$. Такі переходи будемо називати **спонтанними** (атом спонтанно, самочинно переходить із більш високого енергетичного рівня на більш низький) (див. рис. 96.1а). Другий вид – перехід із більш низького енергетичного рівня E_m на більш високий E_n під дією випромінювання (поглинання фотона $\hbar\omega = E_n - E_m$, що падає на атом). Такі переходи називають **вимушеним поглинанням** (перехід залежить від наявності й інтенсивності поля випромінювання, тому називається вимушеним) (див. рис. 96.1б).

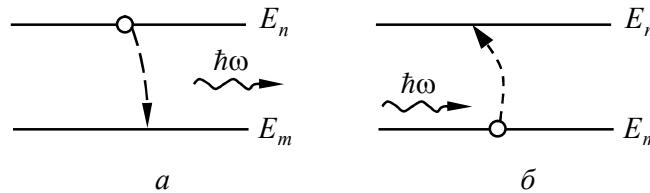


Рисунок 96.1 – Схеми: *a* – спонтанного випромінювання; *б* – вимушеного поглинання

2 У 1916 р. Ейнштейн звернув увагу на те, що двох зазначених вище видів випромінювання недостатньо для пояснення існування стану теплової рівноваги між випромінюванням і речовиною. Дійсно, імовірність спонтанних переходів визначається лише внутрішніми властивостями атомів, а отже, не може залежати від інтенсивності падаючого випромінювання, у той час, як імовірність «поглинальних» переходів залежить як від властивостей атомів, так і від інтенсивності падаючого випромінювання. Для можливості встановлення рівноваги за довільної інтенсивності падаючого випромінювання необхідно існування «випромінювальних» переходів, імовірність яких зростала б зі збільшенням інтенсивності випромінювання. Тобто «випромінювальних» переходів, які залежать, спричиняються випромінюванням. Випромінювання, що виникає в результаті таких переходів, називають **вимушеним**, або **індукованим випромінюванням**.

Вимушене випромінювання має досить важливі властивості. Напрямок його поширення в точності збігається з напрямком поширення зовнішнього випромінювання, що спричинило перехід. Також збігаються частоти, фази й поляризації цих випромінювань. Отже, вимушене випромінювання й те, яке спричинило перехід, виявляються строго когерентними. Ця особливість вимушеного випромінювання лежить в основі дії підсилювачів і генераторів світла, яких називають лазерами.

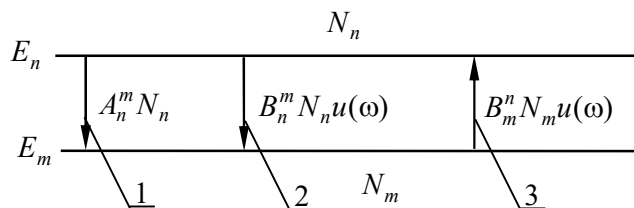


Рисунок 96.2 – Переходи атома: 1 – спонтанне випромінювання; 2 – вимушене випромінювання; 3 – вимушене поглинання

3 Опишемо якісно стан термодинамічної рівноваги між випромінюванням і речовиною. Досліджуємо перехід атомів між станами з енергіями E_n й E_m (див. рис. 96.2). Нехай N_n і N_m – число атомів у станах E_n і E_m , причому стани E_n й E_m можуть бути взяті

якими завгодно з ряду припустимих станів. Середнє число переходів атомів зі стану E_n у стан E_m за одиницю часу через спонтанне випромінювання буде пропорційне вихідному числу атомів N_n . Подамо його у вигляді $A_n^m N_n$. Ейнштейн постулював, що через індуковане випромінювання середнє число переходів між тими самими рівнями буде, як і раніше, пропорційне N_n , а також спектральній густині випромінювання $u(\omega_{mn})$ за частоти світла, яка випромінюється в розглянутому переході. Позначимо це число через $B_n^m N_n u(\omega_{mn})$. Аналогічно, середнє число переходів із рівня E_m на рівень E_n через поглинання світла можемо подати як $B_m^n N_m u(\omega_{mn})$. Величини A_n^m , B_n^m , B_m^n називаються **коефіцієнтами Ейнштейна**. Вони є характеристиками лише самого атома й можуть залежати лише від частоти ω_{mn} .

4 Визначимо зв'язок між B_n^m і B_m^n . Припустимо, що поле випромінювання, у якому знаходяться атоми, рівноважне й має температуру T . Тоді система перебуває у стані термодинамічної рівноваги й тому

$$A_n^m N_n + B_n^m N_n u(\omega_{mn}) = B_m^n N_m u(\omega_{mn}). \quad (96.1)$$

Будемо підвищувати температуру системи. Коефіцієнти Ейнштейна при цьому змінюватися не будуть, оскільки вони від температури не залежать. Спектральна густина електромагнітного випромінювання $u(\omega_{mn})$ буде зростати. Тому спонтанне випромінювання (не залежить від $u(\omega_{mn})$) буде відігравати все меншу й меншу роль порівняно з вимушеним. За умови $T \rightarrow \infty$ ним можна знехтувати. Тоді умова детальної рівноваги за $T \rightarrow \infty$ набуде вигляду

$$B_n^m N_n u(\omega_{mn}) = B_m^n N_m u(\omega_{mn}). \quad (96.2)$$

Відповідно до формули Больцмана $N = N_0 \exp(-E/(kT))$. Тому

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{N_0 \exp(-E_n/(kT))}{N_0 \exp(-E_m/(kT))} = \exp\left(-\frac{E_n - E_m}{kT}\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{E_n - E_m}{\infty}\right) = \exp(-0) = 1.$$

Тобто, якщо $T \rightarrow \infty$, заселеність рівнів N_n , N_m повинна зрівнятися. Звідси й із формули (96.2) випливає, що

$$B_n^m = B_m^n. \quad (96.3)$$

Отже, існують три види переходу атомів: спонтанне випромінювання, вимушене (індуковане) поглинання, вимушене (індуковане) випромінювання. Ці переходи характеризуються коефіцієнтами Ейнштейна A_n^m , B_n^m , B_m^n , причому $B_n^m = B_m^n$.

§ 97 Інверсна заселеність. Лазери

1 У 50-х роках ХХ ст. були створені пристрої, під час проходження через які електромагнітні хвилі підсилюються за рахунок відкритого Ейнштейном вимушеного випромінювання. У 1953 р. Басовим і Прохоровим та незалежно від них Таунсом були створені перші молекулярні генератори, що працюють у діапазоні сантиметрових хвиль і які одержали назву мазерів. (У 1964 р. Басову, Прохорову й Таунсу за це було присуджено Нобелівську премію.) Слово «мазер» походить від перших букв англійської назви Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation (підсилення мікрохвиль за допомогою вимушеного випромінювання).

У 1960 р. Мейманом було створено перший аналогічний прилад, що працює в оптичному діапазоні, – **лазер** (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation –

підсилення світла за допомогою вимушеного випромінювання). Лазери називають також **оптичними квантовими генераторами**. У цей час термін «лазер» поєднує в собі не лише оптичні квантові генератори.

2 Лазер працює за **принципом індукованого випромінювання**. Припустимо, що на атом падає фотон з енергією $\hbar\omega = E_2 - E_1$, де E_2 й E_1 – деякі два енергетичні рівні атома. Якщо атом знаходиться на нижньому рівні E_1 , то фотон, що падає на нього, може поглинутися. Якщо ж атом знаходиться на верхньому рівні E_2 , то може відбутися вимушений перехід на нижній рівень E_1 із випромінюванням другого фотона. Індуковано випромінений фотон характеризується не лише тією самою частотою ω (як і під час спонтанного випромінювання), але також тими самими фазою, поляризацією та напрямком поширення. Замість одного падаючого фотона утворюються два тотожних фотони. Цю особливість індукованого випромінювання й використовують у лазерах.

Розглянемо тепер не одиничний атом, а середовище з атомів. Позначимо через N_1 і N_2 числа атомів в одиниці об'єму на рівнях E_1 і E_2 відповідно. Припустимо, що в середовищі поширюється плоска монохроматична хвиля, частота якої визначається умовою $\hbar\omega = E_2 - E_1$. За час dt із нижнього рівня на верхній переходить у середньому $u(\omega)B_1^2 N_1 dt$ атомів і таке саме число фотонів поглинається. Через індуковане випромінювання з верхнього рівня на нижній перейде $u(\omega)B_2^1 N_2 dt$ атомів та утвориться таке саме число фотонів тієї самої поляризації й напрямку поширення, що й у розглянутій хвилі. Фотони, випромінені спонтанно, а також фотони, індуковані іншими хвилями, можна не враховувати, тому що серед них лише незначна частина поширюється в потрібному напрямку й має потрібну поляризацію. Збільшення числа фотонів в одиниці об'єму за час dt можна подати виразом

$$dN_{\text{фот}} = (B_2^1 N_2 - B_1^2 N_1) u(\omega) dt = B_2^1 (N_2 - N_1) u(\omega) dt. \quad (97.1)$$

Тут урахували, що коефіцієнти Ейнштейна B_1^2 й B_2^1 пов'язані співвідношенням $B_2^1 = B_1^2$. Із (97.1) випливає, щоб хвиля підсилювалася ($dN_{\text{фот}} > 0$), необхідне виконання умови

$$N_2 - N_1 > 0, \text{ або } N_2 > N_1. \quad (97.2)$$

У звичайних умовах, коли середовище перебуває в термодинамічній рівновазі, співвідношення (97.2) не виконується. Тобто є вірним зворотнє співвідношення $N_2 < N_1$, на кожному **простому верхньому рівні перебуває менше атомів, ніж на нижньому**. Це безпосередньо впливає з формули Больцмана

$$N = N_0 \exp(-E/(kT)). \quad \frac{N_1}{N_2} = \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right) = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) > 1, \text{ тому що } E_2 > E_1.$$

Можна штучно одержати **термодинамічно нерівноважне середовище**, у якому виконується співвідношення (97.2). Таке середовище називають **активним**, або середовищем з **інверсною заселеністю відносно енергетичних рівнів** E_1 і E_2 . Отже, для посилення світлової хвилі необхідно, щоб середовище, у якому хвиля поширюється, було активним. Ідея використання індукованого випромінювання для посилення хвилі була вперше висловлена в 1939 р. В. А. Фабрикантом. У той час на ідею Фабриканта не було звернено належної уваги. Здавалося, що створення систем з інверсною заселеністю енергетичних рівнів – справа безперспективна.

Посилення світла в активному середовищі звичайно порівнюють зі сходженням лавини, зображуючи фотони у вигляді кульок. Фотон-кулька, що летить, породжує другий фотон-кульку з переходом атома з верхнього рівня на нижній. Утворюються дві однакових кульки, що летять у попередньому напрямку, потім чотири кульки тощо.

3 Щоб активне середовище перетворити на генератор світлових коливань, необхідно здійснити *зворотний зв'язок* (другий принцип, що використовують під час роботи лазера). Ідея реалізації зворотного зв'язку вперше була висловлена в 1957 р. А. М. Прохоровим і Н. Г. Басовим і незалежно від них Ч. Таунсом. Необхідно, щоб частина випроміненого світла увесь час перебувала в зоні активної речовини й викликала вимушене випромінювання все нових і нових атомів. Для цього активну речовину поміщають між двома паралельними дзеркалами. Припустимо, наприклад, що воно являє собою циліндр, а площини дзеркал S_1 і S_2 перпендикулярні до осі цього циліндра (рис. 97.1).

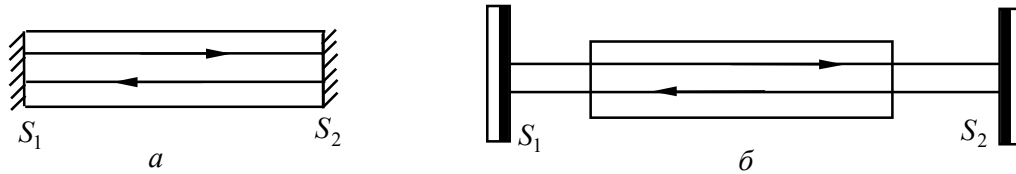


Рисунок 97.1 – До реалізації зворотного зв'язку в лазері

Тоді промінь світла, зазнаючи багаторазового відбиття від дзеркал S_1 і S_2 , буде проходити багато разів через активну речовину, водночас підсилюючись в результаті вимушених переходів атомів із вищого енергетичного рівня E_2 на більш низький рівень E_1 .

Такий резонатор буде не лише підсилювати світло, але також звужувати й монохроматизувати його. Для простоти припустимо спочатку, що дзеркала S_1 й S_2 ідеальні. Тоді промені, паралельні осі циліндра, будуть проходити через активну речовину туди й назад необмежену кількість разів. Тоді промені, які поширюються похило, зрештою потраплять на бічну стінку циліндра, де вони розсіюються або вийдуть назовні. Зрозуміло, що максимально підсиляться промені, які поширюються паралельно осі циліндра. Цим і пояснюється колімація (зужування) променів.

Пояснимо тепер, як відбувається *монохроматизація світла*. Для простоти проведемо міркування стосовно рисунка 97.1а, коли роль дзеркал S_1 і S_2 виконують відполіровані й посріблені торці циліндра активної речовини, перпендикулярні до його геометричної осі. Нехай L – довжина циліндра. Якщо $2L = m\lambda$, тобто на довжині L укладається ціле число m напівхвиль, то світлова хвиля, вийшовши від S_1 , після проходження через циліндр туди й назад повернеться до S_1 у тій самій фазі. Така хвиля підсилиться під час другого та всіх наступних проходжень через активну речовину в прямому та зворотному напрямках. Ця хвиля буде підсилюватися максимально.

У реальному лазері частину світла виводять назовні. Для цього одне із дзеркал роблять напівпрозорим.

4 Рубіновий лазер. Створення лазера стало можливим після того, як було знайдено способи здійснення інверсної заселеності рівнів у деяких речовинах. Перший квантовий генератор світла був створений у 1961 р. Мейманом на рубіні. Рубін – це твердий кристал, основою якого є корунд, тобто кристал окису алюмінію (Al_2O_3), у якому невелика частина атомів алюмінію (близько 0,05 %) заміщена іонами хрому Cr^{3+} . Іони хрому відіграють основну роль у роботі квантового генератора. Корунд – це діелектрик із широкою забороненою енергетичною зоною між валентною зоною та зоною провідності. Енергетичні рівні хрому в корунді лежать у цій забороненій зоні. Основним (незбудженим) рівнем є рівень E_1 (рис. 97.2). Він має складну структуру, що, проте, не відіграє ролі в роботі квантового генератора. Вище лежать збуджені рівні E_{2a} й E_{2b} . Це рівні мають близькі енергії. Під час переходу з них на основний рівень E_1 випромінюється червоне світло з довжинами хвиль $\lambda = 694,3$ і $692,9$ нм. Він і надає рубіну характерне рожеве або червоне фарбування (залежно від концентрації йонів хрому). Більш інтенсивна лінія $\lambda = 694,3$ нм. Із

цієї причини лише вона й підсилюється під час роботи лазера. Друга лінія не відіграє ролі. Вище рівнів E_{2a} і E_{2b} розміщені дві порівняно широкі смуги енергій E_3 і E_4 .

Інверсна заселеність створюється між рівнями E_1 й E_2 . Для цього використовують так зване оптичне накачування, тобто освітлення кристала рубіну потужним спалахом світла. Рубіну надають форми циліндричного стрижня з діаметром 0,1–2 см і довжиною від 2 см до 20 см і більше. Кінці стрижня ретельно відполіровані. Вони можуть бути дзеркалами. Тоді їх сріблять, як показано на рисунку 97.1а. Дзеркала можуть бути й зовнішніми (рис. 97.1б), тоді сріблення не потрібно. Для висвітлення рубінового стрижня застосовують імпульсні ксенонові газорозрядні лампи, через які розряджаються батареї високовольтних конденсаторів (напруга 2–3 кВ). Тривалість спалаху приблизно однієї мілісекунди.

Якщо б енергетичний спектр складався лише із двох рівнів E_1 і E_2 , то за допомогою оптичного накачування створити інверсну заселеність було б неможливо. Дійсно, індуковані переходи атомів із нижнього рівня на верхній і назад ідуть з однаковими швидкостями. Тому лампа якнайбільше могла б лише зрівняти заселеності обох рівнів. Наявність же спонтанного випромінювання приводила б до збіднення (атомами) верхнього рівня порівняно з нижнім.

Положення змінюється завдяки наявності третього, широкого енергетичного рівня, що складається зі смуг E_3 і E_4 . Лампа переводить атоми хрому з незбудженого стану в збуджений, тобто в енергетичні смуги E_3 й E_4 . Значна ширина цих смуг має велике практичне значення. Лампа випромінює світло, близьке до білого. Якщо б рівні E_3 й E_4 були дуже вузькими, то лише незначна частина енергії лампи могла б бути використана для їх збудження. Завдяки ж значній ширині смуг E_3 і E_4 на їх збудження припадає 10–15 % енергії випромінювання лампи. На рівнях E_3 і E_4 збуджені атоми хрому перебувають дуже короткий час ($\sim 10^{-8}$ с). За цей час вони переходять на один із рівнів E_2 . Під час такого переходу атоми хрому не випромінюють, а витрачають свою енергію на збудження коливачів кристалічної ґратки. Можливість зворотного повернення атома зі смуг E_3 і E_4 на рівень E_1 хоча й існує, але ймовірність такого процесу дуже мала порівняно з ймовірністю переходу на рівні E_2 . Рівні E_2 метастабільні. Час життя атома на них $\sim 10^{-3}$ с, що за атомними масштабами є дуже великим. Це дозволяє накопичувати атоми на рівнях E_2 . Якщо переводити атоми з рівня E_1 на рівні E_3 й E_4 досить швидко, то на рівень E_2 можна перевести більше половини атомів хрому. Тоді на рівнях E_2 виявиться більше атомів, ніж на рівні E_1 , тобто виникне інверсна заселеність.

На наступному етапі роботи лазера відбувається перехід з рівня E_2 на рівень E_1 . Його використовують для генерації світла в рубіновому лазері.

5 Випромінювання лазерів відрізняється рядом чудових особливостей. Для нього характерні: 1) велика монохроматичність ($\Delta\lambda \sim 0,01$ нм); 2) висока часова й просторова когерентність; 3) велика інтенсивність і 4) вузькоспрямованість пучка. Кутова ширина світлового пучка, згенерованого лазером, настільки мала, що, використовуючи телескопічне фокусування, можна одержати на місячній поверхні пляму світла діаметром усього лише 3 км. Велика потужність і вузькоспрямованість пучка дозволяють під час фокусування за

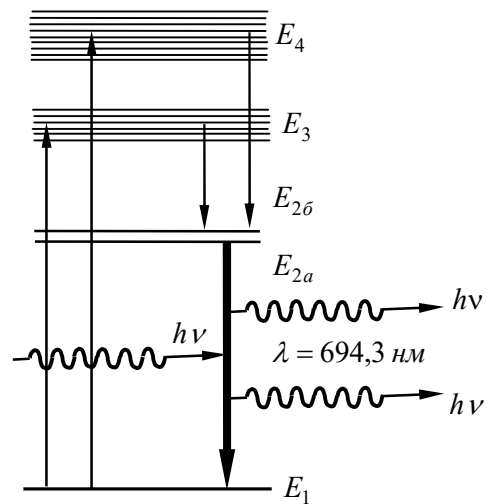


Рисунок 97.2 – Схема енергетичних рівнів рубінового лазера

допомогою лінзи одержати густину потоку енергії, що в 1 000 разів перевищує густину потоку енергії, яку можна одержати фокусуванням сонячного світла.

Лазери мають численні застосування. Їх використовують у техніці для зварювання, різання й плавлення металів; у медицині – як безкровні скальпелі, під час лікування очних і шкірних хвороб. Лазерна локація дозволила виміряти швидкість обертання планет, уточнити характеристики руху Місяця й планети Венера. Лазери використовують також у різних приладах для тонких фізичних досліджень.

ТЕМА 17 СТАТИСТИКИ БОЗЕ – ЕЙНШТЕЙНА ТА ФЕРМІ – ДІРАКА ТВЕРДИХ ТІЛ

§ 98 Розподіли Фермі – Дірака та Бозе – Ейнштейна

Одним з основних завдань статистичної фізики є знаходження закону розподілу частинок за різними квантовими станами. *Знайдемо такі розподіли для фермі- та бозе-частинок.*

Розглянемо систему тотожних частинок, що практично не взаємодіють одна з одною. Кожна частинка може перебувати в станах з енергіями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. Припускаємо, що стани є невідродженими, тобто кожному значенню енергії відповідає лише один стан. Якщо система перебуває в рівноважному стані, то розподіл частинок за енергіями характеризується середніми числами заповнення $\langle n_1 \rangle, \langle n_2 \rangle, \dots$, тобто середніми числами частинок, що знаходяться в станах із відповідними значеннями енергії. Оскільки мова йде про середні числа, то вони можуть бути не лише цілими, але й дробовими.

Ми встановили, що частинки підрозділяються на два класи: **ферміони** (тобто частинки з напівцілим спіном) і **бозони** (тобто частинки із цілим або нульовим спіном). За умови великих чисел заповнення закони розподілу для ферміонів і бозонів виявляються неоднаковими.

Уведемо уявний шестивимірний простір зі взаємно перпендикулярними осями x, y, z, p_x, p_y, p_z . Його називають фазовим μ -простором. Розіб'ємо цей простір на комірки, що мають об'єм приблизно h^3 . Такий об'єм комірки вибраний із міркувань урахування принципу невизначеності Гейзенберга

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \sim h^3 \quad (98.1)$$

У цьому разі стан частинки визначається номером комірки μ -простору, у якій «перебуває» частинка. Задача полягає в тому, щоб знайти найбільш імовірний розподіл частинок у комірках μ -простору.

Поведінка ферміонів і бозонів під час розміщення в комірках μ -простору є істотно різною. Ферміони можуть знаходитися в комірках лише поодиноці (можна сказати, що вони є індивідуалістами). Бозони можуть знаходитися в одній комірці у будь-якій кількості (вони є колективістами).

Розподіл Фермі Дірака

Розглянемо ідеальний фермі-газ, тобто систему, що складається з N ферміонів (наприклад, електронів), поміщених у посудину зі сталим об'ємом. (Ідеальність газу полягає в тому, що взаємодією між частинками можна знехтувати.) Знайдемо число Ω способів, якими ці N ферміонів можуть бути розміщені у Z комірках. Очевидно, що повинна виконуватися умова $Z \geq N$; до речі, коли $Z = N$ ферміони можуть бути розміщені в комірках лише одним способом. Нагадаємо, що частинки є нерозрізненими. Кожний спосіб розміщення є мікростаном системи частинок. Отже, Ω є не що інше, як статистична вага макростану системи. Позначимо комірку, зайняту частинками, чорними кружками, а незайняті комірки – світлими кружками (рис. 98.1). Виконаємо всі можливі перестановки чорних і світлих кружків. Число таких перестановок дорівнює $Z!$. Проте внаслідок

нерозрізненості тотожних частинок перестановки чорних кружків не приводять до нового розподілу. Таких перестановок $N!$. Перестановки світлих кружків також нічого не змінюють. Таких перестановок $(Z - N)!$. Отже, число фізично різних розподілів N ферміонів у Z комірках дорівнює

$$\Omega = \frac{Z!}{N!(Z - N)!} \quad (98.2)$$

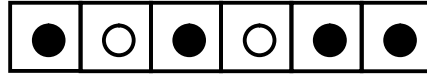


Рисунок 98.1. – Розподіл ферміонів (чорні кружки) у комірках. Білими позначені незаповнені комірки

Енергія ε частинки залежить від її координат (якщо є зовнішнє поле) й компонент імпульсу

$$\varepsilon = f(x, y, z, p_x, p_y, p_z).$$

У звичайному тривимірному просторі рівняння $f(x, y, z) = const$ є рівнянням деякої поверхні. Наприклад, рівняння $ax + by + cz = const$ є рівняння площини, а рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = const$ є рівнянням сфери. Аналогічно, рівняння $f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = const = \varepsilon$ визначає гіперповерхню в μ -просторі, усі точки якої відповідають одній і тій самій енергії частинки. Розіб'ємо весь μ -простір на тонкі енергетичні шари. Будемо вважати, що i -й шар обмежений поверхнями $f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \varepsilon_i$ й $f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \varepsilon_{i+1}$. Тонким вважають шар, для якого $(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) \ll \varepsilon_i$.

Нехай до i -го шару попадає Z_i комірок і N_i частинок. Тоді згідно з (98.2) статистична вага підсистеми із N_i частинок буде дорівнювати

$$\Omega_i = \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}.$$

Статистична вага всієї системи дорівнює добутку статистичних ваг підсистем

$$\Omega = \prod_i \Omega_i = \prod_i \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}. \quad (98.3)$$

У статистичній фізиці приймають гіпотезу, підтверджену експериментом, що всі мікростани мають однакову ймовірність. Тому статистична вага пропорційна ймовірності конкретного макростану.

Відомо, що стан рівноваги відповідає найбільш імовірному розподілу частинок. Щоб знайти найбільш імовірний розподіл частинок у комірках, потрібно знайти максимум виразу (98.3) за умови

$$\sum_i N_i = N \quad \text{і} \quad \sum_i \varepsilon_i N_i = E, \quad (98.4)$$

де E – енергія системи.

Замість максимуму статистичної ваги будемо шукати максимум ентропії $S = k \ln \Omega$. З урахуванням (98.3)

$$S = k \sum_i [\ln Z_i! - \ln N_i! - \ln(Z_i - N_i)!] \quad (98.5)$$

У математиці доведено формулу Стірлінга, відповідно до якої

$$\ln n! \approx n \ln n - n.$$

(це справедливо для $n \gg 1$, що виконується для чисел Z_i і N_i). Перетворивши вираз (98.5) за формулою Стірлінга, одержимо

$$\begin{aligned} S &= k \sum_i [Z_i \ln Z_i - Z_i - N_i \ln N_i + N_i - (Z_i - N_i) \ln(Z_i - N_i) + Z_i - N_i] = \\ &= -k \sum_i [N_i \ln N_i + (Z_i - N_i) \ln(Z_i - N_i)] + const, \end{aligned} \quad (98.6)$$

де $const = \sum_i Z_i \ln Z_i$ (змінюються лише числа частинок N_i).

Потрібно знайти максимум виразу (98.6) за умови сталості повного числа частинок N та енергії E системи (див. (98.4)). Цю задачу на умовний екстремум розв'язують методом множників Лагранжа, сутність якого полягає в такому: нехай потрібно знайти екстремум функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, на аргументи якої накладені умови $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1$, $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2$, ... де C_1, C_2, \dots – константи. У математиці доведено, що в цьому разі потрібно прирівняти до нуля частинні похідні за всіма змінними x_i від функції

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots,$$

приймаючи невизначені множники Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ сталими. Розв'язавши систему одержаних n рівнянь, знаходимо значення x_1, x_2, \dots, x_n змінних, за яких досягають умовного екстремуму. Відповідно до методу множників Лагранжа утворимо функцію

$$F = S + \alpha N - \beta E = -k \sum_i [N_i \ln N_i + (Z_i - N_i) \ln(Z_i - N_i)] + const + \alpha \sum_i N_i - \beta \sum_i \varepsilon_i N_i \quad (98.7)$$

(α і $-\beta$ – множники Лагранжа) й прирівняємо частинні похідні цієї функції за змінними N_i до нуля

$$\frac{\partial F}{\partial N_i} = -k \left[\ln N_i + N_i \frac{1}{N_i} - \ln(Z_i - N_i) - (Z_i - N_i) \frac{1}{Z_i - N_i} \right] + \alpha - \beta \varepsilon_i = 0.$$

З одержаних рівнянь випливає, що

$$\frac{1 - N_i / Z_i}{N_i / Z_i} = \frac{Z_i - N_i}{N_i} = \exp\left(\frac{\beta \varepsilon_i - \alpha}{k}\right). \quad (98.8)$$

Відношення N_i / Z_i є середнім числом частинок $\langle n_i \rangle$, що знаходяться в одній комірці, тобто в одному квантовому стані. Розв'язавши рівняння (98.8) відносно величин $\langle n_i \rangle = N_i / Z_i$, прийдемо до формули

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp((\beta \varepsilon_i - \alpha) / k)}. \quad (98.9)$$

Значення множника β можна знайти, скориставшись тим, що рівність усіх частинок похідних за N_i функції (98.7) рівнозначна рівності нулю диференціала цієї функції

$$dF = dS - \beta dE = 0 \quad (98.10)$$

(число частинок N залишається постійним, тому $dN = 0$). Припустимо, що система одержує в оборотному процесі кількість теплоти dQ , у результаті чого ентропія системи одержує збільшення $dS = dQ / T$. Оскільки об'єм системи залишається сталим, робота в процесі одержання теплоти не виконується; отже, $dQ = dE$. Відповідно

$$dS = dE / T. \quad (98.11)$$

Зі співвідношень (98.10) і (98.11) випливає, що $\beta = 1/T$. Підставивши в (98.9) знайдене значення β й подавши множник α у вигляді μ/T , одержуємо остаточний вираз для розподілу Фермі – Дірака

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp((\epsilon_i - \mu)/(kT)) + 1} \quad (98.12)$$

Параметр розподілу μ називають хімічним потенціалом. Він є функцією макроскопічних параметрів стану фермі-газу, зокрема температури. Енергія частинки визначається з точністю до довільної адитивної сталої. Очевидно, що з точністю до тієї самої сталої визначають і хімічний потенціал μ (інакше від вибору цієї сталої, тобто від нашого вибору, залежали б числа заповнення). Зазвичай адитивну сталу вибирають так, щоб найменше значення енергії ϵ_i дорівнювало нулю. Тоді й хімічний потенціал стає однозначним.

При абсолютному нулі температури μ може бути лише додатнім. В іншому разі експонента в знаменнику (98.12) перетворилася б за умови $T = 0$ на нескінченність, а числа заповнення – на нуль.

Розподіл Бозе – Ейнштейна

Перейдемо до доведення закону розподілу для ідеального бозе-газу, тобто системи, в якій взаємодії бозонів немає. Спочатку розв'яжемо допоміжну задачу. Візьмемо N нерозрізнених об'єктів, поміщених у деякий довгий ящик (пенал).

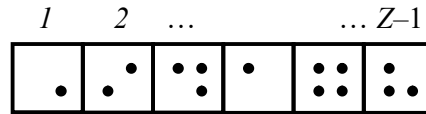


Рисунок 98.3. – Розподіл N нерозрізнених об'єктів у Z комірках, розділених одна від іншої $Z - 1$ перегородкою

Розділимо цей ящик за допомогою $Z - 1$ перегородок на Z комірок (рис. 98.3) та знайдемо кількість способів, якими бозони можуть бути розміщені в комірках, незалежно від числа бозонів у кожній комірці.

Виконаємо всі можливі перестановки $N + Z - 1$ елементів системи, що складається з бозонів і перегородок (підкреслимо, що переставляють не лише частинки із частинками або перегородки з перегородками, але й частинки з перегородками). Число таких перестановок дорівнює $(N + Z - 1)!$. Проте внаслідок нерозрізненості бозонів їх перестановки не призводять до нового розподілу. Таких перестановок $N!$. Перестановки перегородок також нічого не змінюють. Таких перестановок $(Z - 1)!$. Отже, число способів, якими N нерозрізнених бозонів можуть бути розподілені в Z комірках, дорівнює

$$\Omega = \frac{(N + Z - 1)!}{N!(Z - 1)!} \quad (98.13)$$

Розділимо, як і під час доведення розподілу Фермі – Дірака, μ -простір на тонкі енергетичні шари, у кожному з яких знаходиться N_i частинок і Z_i станів. Тоді ентропія бозе-газу буде визначатися виразом

$$S = k \ln \prod_i \frac{(N_i + Z_i - 1)!}{N_i!(Z_i - 1)!}$$

Щоб знайти максимум ентропії за умови (98.4), потрібно виконати перетворення формул, аналогічні тим, які привели нас до формули (98.8). У результаті одержимо співвідношення

$$\frac{N_i + Z_i - 1}{N_i} = \frac{\langle n_i \rangle + 1 - 1/Z_i}{\langle n_i \rangle} = \exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right)$$

(як і у разі ферміонів $\beta = 1/T$, $\mu = \alpha T$). Числа Z_i набагато більші від одиниці, тому доданком $-1/Z_i$ у чисельнику можна знехтувати. Розв'язуючи одержану рівність відносно $\langle n_i \rangle$, маємо для середнього числа бозонів у стані з енергією ε_i формулу

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp((\varepsilon_i - \mu)/(kT)) - 1} \quad (98.14)$$

яку називають **розподілом Бозе – Ейнштейна**. Ця формула відрізняється від (98.12) лише знаком перед одиницею в знаменнику.

Хімічний потенціал μ бозе-газу не може бути додатнім, тому що за умови, якщо $\mu > 0$, деякі з чисел заповнення виявилися б від'ємними, що неможливо.

За малих (порівняно з одиницею) чисел заповнення експонента в знаменнику формул (98.12) і (98.4) набагато більше одиниці. Тому одиницею в знаменнику можна знехтувати, у результаті чого обое розподілів набувають вигляду

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp((\varepsilon_i - \mu)/(kT))} = A \exp(-\varepsilon_i/(kT)), \quad (98.15)$$

де $A = \exp(\mu/kT)$. Отже, за малих чисел заповнення розподіл Фермі – Дірака й розподіл Бозе – Ейнштейна переходять у розподіл Больцмана.

Під час доведення розподілів (98.12) і (98.14) ми припускали, що повне число частинок N є наперед заданим та незмінним. У разі якщо число частинок змінюється, умова $\sum_i N_i = N$ не виконується. Тому у формулі, аналогічній (98.7), відсутній доданок $\alpha \sum_i N_i$. Це означає, що $\alpha = 0$, відповідно й $\mu = 0$. Отже, хімічний потенціал бозе-газу зі змінним числом частинок дорівнює нулю, унаслідок чого розподіл (98.14) набуває вигляду

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp(\varepsilon_i/(kT)) - 1}. \quad (98.16)$$

§ 99 Фотонний газ. Густина енергії фотонного газу

За звичайних (нелазерних) інтенсивностей світлові хвилі не збурюють одна одну. Це означає, що фотони, які можна зіставити з хвилям, які не взаємодіють між собою. Тому випромінювання, що перебуває в рівновазі зі стінками порожнини, у якій воно знаходиться, можна подати як ідеальний фотонний газ.

Спін фотона дорівнює одиниці. Отже, фотони є бозонами. Стінки порожнини безупинно випромінюють і поглинають фотони. Тому число фотонів не є наперед заданим (воно визначається об'ємом порожнини й температурою її стінок). Через те, що число фотонів змінюється, впливає, що їх розподіл описують формулою

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_i/(kT)) - 1} \quad (99.1)$$

(див. (98.16); ми виконали заміну $\varepsilon_i = \hbar\omega_i$). Беручи це до уваги, спробуємо одержати формулу Планка, тобто обчислити енергію випромінювання, віднесена до одиниці об'єму й до одиничного інтервалу частот.

Енергія фотона не залежить від координат і напрямку його руху. У цьому разі енергія частинки визначається лише модулем її імпульсу: $\varepsilon = f(p)$. Тому ізоенергетична поверхня (тобто поверхня, усі точки якої відповідають однакової енергії) є сферою радіуса p . Звідси впливає, що об'єм $\Delta\tau$ в μ -просторі тонкого енергетичного шару дорівнює об'єму

кульового шару радіуса p й товщини Δp , помноженому на об'єм посудини, у якій знаходиться фотонний газ

$$\Delta\tau = V \cdot 4\pi p^2 \Delta p. \quad (99.2)$$

Оскільки в розглянутій нами задачі енергія фотона не залежить від координат x, y, z , у $\Delta\tau$ увійшла множником уся область зміни координат, тобто об'єм V .

Знайдемо число станів Z_i фотона в i -му тонкому енергетичному шарі об'єму $\Delta\tau_i = V \cdot 4\pi p_i^2 \Delta p_i$. Об'єм комірки в μ -просторі дорівнює h^3 . Тому число комірок дорівнює $\sim \Delta\tau_i / h^3$. У кожній комірці «міститься» два стани фотона, що відрізняються напрямком поляризації. Отже,

$$Z_i = 2 \frac{\Delta\tau_i}{h^3} = V \cdot 8\pi \frac{p_i^2 \Delta p_i}{8\pi^3 h^3} = V \cdot \frac{p_i^2 \Delta p_i}{\pi^2 h^3}, \quad (99.3)$$

ми врахували, що $h = 2\pi\hbar$.

Імпульс фотона $p = \hbar\omega/c$. Відповідно $p^2 \Delta p = \hbar^3 \omega^2 \Delta\omega / c^3$. Підстановка цього виразу в (99.3) дає, що

$$Z_i = V \cdot \frac{\omega_i^2 \Delta\omega_i}{\pi^2 c^3}. \quad (99.4)$$

Помноживши Z_i на середнє число заповнення $\langle n_i \rangle$, знайдемо число фотонів, частоти яких містяться в інтервалі $\Delta\omega$, а помноживши це число на енергію фотона $\varepsilon_i = \hbar\omega_i$, одержимо енергію фотонів

$$\Delta E_i = Z_i \langle n_i \rangle \hbar\omega_i.$$

Підстановка виразів (99.1) і (99.4) приводить до формули

$$\Delta E_i = V \cdot \frac{\hbar\omega_i^3 \Delta\omega_i}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega_i / (kT)) - 1}. \quad (99.5)$$

Нарешті, розділивши ΔE_i на V й на $\Delta\omega_i$, знайдемо густину енергії електромагнітного випромінювання, віднесену до одиничного інтервалу частот, тобто величину $u(\omega, T)$. Отже, опустивши індекс i , одержимо формулу

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega / (kT)) - 1}, \quad (99.6)$$

яка співпадає з формулою Планка.

§ 100 Фононний газ. Теплоємність кристалічної ґратки

Відповідно до класичних уявлень кристал, що складається з N атомів, є системою з $3N$ коливальними ступенями вільності, на кожен з яких приходить в середньому енергія kT ($kT/2$ як кінетична й $kT/2$ як потенційна енергія). Із цих уявлень впливає закон *Дюлонга й Пті*, що стверджує, що молярна теплоємність усіх хімічно простих тіл у кристалічному стані однакова й дорівнює $3R$. Цей закон приблизно виконується лише для порівняно високих температур. За низьких температур теплоємність кристалів зменшується, прямує до нуля за умови наближення до 0°K .

В 1907 р. Ейнштейн створив теорію теплоємності кристалів, у якій він урахував той факт, що енергія гармонічного осцилятора квантується, тобто може набувати лише дискретних значень

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (100.1)$$

Припустивши, що розподіл осциляторів за станами з різною енергією задовольняє закону Больцмана, Ейнштейн обчислив середнє значення енергії (100.1). Множення цього значення на число осциляторів $3N$ привело до формули, що давала якісно правильний хід теплоємності за низьких температур. Проте відповідно до формули Ейнштейна теплоємність змінювалася біля 0°K за експонентним законом, у той час як згідно з експериментальними даними теплоємність поблизу абсолютного нуля змінюється за законом T^3 .

Кількісної згоди з дослідом вдалося досягти Дебаю в 1912 р. Дебай урахував, що коливання атомів у кристалічній ґратці не є незалежними. Зсув одного з атомів із положення рівноваги спричиняє зсув інших сусідніх із ним атомів. Отже, кристал є системою N пружно зв'язаних один з одним атомів, що має $3N$ ступенями вільності. Коливання такої системи мають характер стоячих хвиль із дискретними частотами ω_i . Можна показати, що в кристалі, що складається із N частинок, існує $3N$ типів найпростіших коливань, які називають **нормальними коливаннями або модами**. У кристалі можуть існувати одночасно всі можливі нормальні коливання, причому кожне відбувається так, ніби інших коливань не існує. Згідно з (100.1) енергія i -го нормального коливання може мати значення

$$E_i = (n_i + 1/2)\hbar\omega_i \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots) \quad (100.2)$$

Енергію кристала можна подати як суму енергій нормальних коливань

$$E = \sum_i^{3N} (n_i + 1/2)\hbar\omega_i = E_0 + \sum_i^{3N} n_i\hbar\omega_i, \quad (100.3)$$

де $E_0 = (1/2)\sum \hbar\omega_i$ – енергія нульових коливань ґратки.

Із (100.2) випливає, що за винятком енергії нульових коливань енергія нормального коливання частоти ω_i складається з порцій

$$\varepsilon_i = \hbar\omega_i, \quad (100.4)$$

які можна назвати квантами звуку. Це дає підставу зіставити нормальному коливанню квазічастинку, яку назвали **фононом**. Не потрібно розуміти термін «частинка» буквально. Фонон є збудженим станом, розподіленим в усьому кристалі.

Велика кількість процесів у кристалах (наприклад, розсіювання рентгенівських променів або нейтронів) відбуваються так, ніби фонон мав імпульс $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, де \vec{k} – хвильовий вектор. Модуль імпульсу

$$p = \hbar k = \hbar\omega/v. \quad (100.5)$$

Тут k – хвильове число, що відповідає нормальному коливанню, v – швидкість пружних хвиль у кристалі.

Фонон здебільшого поводить ся так, ніби він є частинкою з енергією (100.4) та імпульсом (100.5). Однак, на відміну від звичайних частинок (електронів, протонів, фотонів тощо) фонон не може виникнути у вакуумі: для свого виникнення й існування він повинен перебувати в деякому середовищі. Такого типу частинки називають **квазічастинками**. Отже, фонон є квазічастинкою.

Імпульс фонона має певні властивості. Під час взаємодії фононів один з одним їх імпульс може дискретними порціями передаватися кристалічній ґратці а, отже, не зберігається. У зв'язку із цим величину (100.5) у разі фононів називають не імпульсом, а **квазіімпульсом**.

З (100.2) випливає, що в кристалі може одночасно збуджуватися необмежене число однакових фононів. Отже, принцип Паулі на фонони не поширюється, і вони є бозонами.

Колівання кристалічної ґратки можна подати як фононний газ, що знаходиться в межах кристалу, подібно тому як електромагнітне випромінювання можна подати як фотонний газ, який заповнює порожнину. Формально обидва явлення досить схожі: і фотони,

і фонони підкоряються одній й тій самій статистиці. Проте між фотонами й фононами є істотні розбіжності: фотони є частинками, а фонони є квазічастинками.

Застосувавши до фононного газу розподіл Бозе – Ейнштейна, можна одержати вираз для енергії коливань кристалічної ґратки, а отже, і для теплоємності кристалів. Число фононів змінюється (вони можуть виникати й зникати). Тому потрібно взяти розподіл Бозе – Ейнштейна у вигляді (99.1).

Обчислення енергії кристала, тобто енергії фононного газу, є аналогічним наведеному в попередньому параграфі обчисленню енергії фотонного газу. У твердому середовищі уздовж деякого напрямку можуть поширюватися три різні хвилі з однаковими значеннями ω , що відрізняються напрямком поляризації: одна поздовжня й дві поперечні з взаємно перпендикулярними напрямками коливань. Тому у формулі (99.3) множник 2 (що, враховує дві взаємно перпендикулярні поляризації фотонів) потрібно замінити множником 3 (ми вважаємо швидкість поздовжніх і поперечних хвиль однаковими). У результаті число станів в енергетичному шарі товщиною Δp_i виявиться таким, що дорівнює

$$Z_i = 3 \frac{\Delta \tau_i}{h^3} = V \cdot \frac{3 p_i^2 \Delta p_i}{2 \pi^2 h^3}$$

З (100.5) випливає, що $p_i^2 \Delta p_i = \hbar^3 \omega_i^2 \Delta \omega_i / v^3$. Отже,

$$Z_i = V \cdot \frac{3 \omega_i^2 \Delta \omega_i}{2 \pi^2 v^3}. \quad (100.6)$$

Помноживши Z_i на середнє число заповнення станів $\langle n_i \rangle$ і на енергію фонуна $\hbar \omega_i$, знайдемо ту частину енергії (за винятком енергії нульових коливань), що відповідає інтервалу частот $\Delta \omega_i$

$$\Delta E_i = Z_i \langle n_i \rangle \hbar \omega_i = V \cdot \frac{3 \hbar \omega_i^3 \Delta \omega_i}{2 \pi^2 v^3} \frac{1}{\exp(\hbar \omega_i / (kT)) - 1} \quad (100.7)$$

Одержаний вираз відрізняється від (99.5) лише тим, що в ньому є множник 3/2 і замість швидкості світла c використовуємо швидкість пружних хвиль v .

Підсумовування виразу (100.7) за індексами i дасть енергію кристала (за винятком нульової енергії). Замінивши підсумовування інтегруванням, подамо вираз для енергії у вигляді

$$E = E_0 + V \frac{3 \hbar}{2 \pi^2 v^3} \cdot \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar \omega / (kT)) - 1}. \quad (100.8)$$

Тут ω_m – найбільша частота нормальних коливань ґратки, яку можна оцінити, з огляду на подальші міркування. Довжина хвилі, збудженої тепловими коливаннями в кристалі, обмежена знизу значенням $\lambda_{\min} = 2d$, де d – відстань між сусідніми атомами в ґратці. Хвилі меншої довжини не мають фізичного змісту. Звідси максимальна частота можливих стоячих хвиль

$$\omega_m = \frac{2\pi v}{\lambda_{\min}} \approx \frac{2\pi v}{2d} = \frac{\pi v}{d}.$$

Якщо атоми розташовані у вузлах кубічної кристалічної ґратки, то $d^3 = 1/n$, де n – число атомів в одиниці об'єму. Отже,

$$\omega_m \approx \pi v \sqrt[3]{n}. \quad (100.9)$$

Точний розрахунок приводить до значення

$$\omega_m = v \sqrt[3]{6\pi^2 n}. \quad (100.10)$$

Енергія (100.8) пропорційна об'єму кристала V . Тому, розділивши (100.8) на V , одержимо енергію одиничного об'єму. Продиференціювавши одержаний вираз за температурою, знайдемо теплоємність C одиниці об'єму речовини

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3\hbar}{2\pi^2\nu^3} \cdot \int_0^{\omega_m} \frac{\exp(\hbar\omega/kT)(\hbar\omega/kT)^2 \omega^3 d\omega}{[\exp(\hbar\omega/kT)-1]^2}$$

Замінімо відповідно до (100.10) ν^3 через $\omega_m^3/(6\pi^2n)$ і введемо змінну $x = \hbar\omega/kT$. Тоді вираз для теплоємності набуде вигляду

$$C = 9nk \frac{T^3}{(\hbar\omega_m/kT)^3} \cdot \int_0^{x_m} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}, \quad (100.11)$$

де $x_m = \hbar\omega_m/kT$.

Величину θ , обумовлену $\hbar\omega_m = k\theta$, називають *характеристичною температурою Дебая*. За визначенням,

$$\theta = \hbar\omega_m/k. \quad (100.12)$$

Температура Дебая вказує для кожної речовини ту область, де стає істотним квантування енергії коливань.

З урахуванням (100.12) формулу (100.11) можна написати в такий спосіб:

$$C = 9nk \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \cdot \int_0^{\theta/T} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}, \quad (100.13)$$

За умови, якщо $T \ll \theta$, верхня межа інтеграла буде дуже великою, тому її можна приблизно покласти такою що дорівнює нескінченності. Тоді інтеграл буде дорівнювати деякому числу, і теплоємність C виявиться пропорційною кубу температури: $C \propto T^3$. Ця наближена залежність відома як закон T^3 Дебая. За досить низьких температур цей закон виконується в багатьох випадках дуже добре.

Коли $T \gg \theta$, тобто при $(\hbar\omega_m/kT) \ll 1$, формулу (100.8) можна спростити, поклавши $\exp(\hbar\omega/kT) \approx 1 + \hbar\omega/kT$.

Тоді для енергії одержуємо вираз

$$E = E_0 + V \frac{3\hbar}{2\pi^2\nu^3} \cdot \int_0^{\omega_m} \frac{kT}{\hbar} \omega^2 d\omega = E_0 + V \frac{kT}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{\omega_m}{\nu}\right)^3 = E_0 + V 3nkT$$

(ми скористалися співвідношенням (100.10)). Звідси $C = V \cdot 3nk$. Якщо як V взяти об'єм моля, то добуток $V \cdot n$ буде дорівнювати сталій Авогадро N_A , а $N_A k$ є газова стала R . Отже, $C_m = 3R$. Ми прийшли до закону Дюлонга й Пті.

Теорія Дебая чудово узгоджується з дослідями за всіх температур.

§ 101 Електронний газ у металах

Вільні електрони в металах ведуть себе подібно до молекул ідеального газу. Тому їх називають електронним газом.

Ми з'ясували, що енергія частинки, які містяться в одновимірній потенційній ямі, квантується. Аналогічний результат одержуємо й для вільних електронів у металі. Частина металу є для електронів тривимірною потенціальною ямою. Розв'язок рівняння Шредінгера для частинки, яка знаходиться в такій ямі, дає те, що енергія частинки може мати лише дискретні (квантовані) значення.

Електрони є ферміонами (їх спин дорівнює 1/2); тому розподіл електронів за енергетичними рівнями описує функція Фермі – Дірака. Під час доведення формули (98.12) ми вважали рівні енергії невиродженими, тобто не враховували можливості того, що однакової енергії можуть відповідати кілька різних квантових станів частинки. Електрони мають однакову енергію у двох станах, що відрізняються орієнтацією спіну (тобто значеннями квантового числа m_s , що може дорівнювати $\pm 1/2$). У зв'язку із цим середнє число електронів, що мають енергію ϵ_i , визначається виразом

$$\langle n_i \rangle = \frac{2}{\exp((\epsilon_i - \epsilon_F)/(kT)) + 1}. \quad (101.1)$$

Параметр μ у формулі (98.12), що має розмірність енергії, часто позначають через ϵ_F і називають рівнем Фермі або енергією Фермі. У формулі (101.1) ми скористалися цим позначенням. Відзначимо, що $\epsilon_F > 0$, інакше деякі числа заповнення виявилися б за умови $T = 0$ К від'ємними.

За умови абсолютного нуля електрони розташовуються попарно на найнижчих доступних для них рівнях. Відповідно до цього залежність $\langle n_i \rangle$ від ϵ_i має вигляд, поданий на рисунку 101.1 (унаслідок дискретності рівнів горизонтальна ділянка графіка складається з окремих точок; проте рівні розташовані настільки густо, що ці точки зливаються в безперервну лінію). Такий самий результат випливає і з формули (101.1). Коли $T = 0$ К

$$\begin{aligned} \langle n_i \rangle &= 2, \quad \text{коли } \epsilon_i < \epsilon_F, \\ \langle n_i \rangle &= 0, \quad \text{коли } \epsilon_i > \epsilon_F. \end{aligned}$$

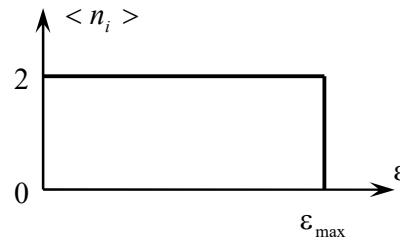


Рисунок 101.1 – Розподіл електронів на енергетичних рівнях за абсолютного нуля температури

Отже, за умови абсолютного нуля рівень Фермі ϵ_F збігається з верхнім заповненим електронами рівнем ϵ_{\max} . Незалежно від значення температури, при $\epsilon_i = \epsilon_F$ середнє число заповнення $\langle n_i \rangle$ дорівнює одиниці. Знайдемо вираз для рівня Фермі. Кожній комірці μ -простору відповідають два стани електрона, що відрізняються напрямком спіну. Тому, як і у разі фотонів, число станів у тонкому енергетичному шарі об'єму $\Delta\tau_i$ визначають формулою

$$Z_i = 2 \frac{\Delta\tau}{h^3} = V \cdot \frac{p_i^2 \Delta p_i}{\pi^2 \hbar^3} \quad (101.2)$$

(див. (99.3)).

Імпульс електрона пов'язаний із його енергією співвідношенням $\epsilon_i = p_i^2 / 2m$. Звідси $p_i = \sqrt{2m\epsilon_i}$, а $p_i \Delta p_i = m \Delta \epsilon_i$. Перемноживши ці вирази, знайдемо, що $p_i^2 \Delta p_i = m \sqrt{2m\epsilon_i} \Delta \epsilon_i$. Зробивши в (101.2) таку заміну, одержимо

$$Z_i = V \cdot \frac{m\sqrt{2m\varepsilon_i}\Delta\varepsilon_i}{\pi^2\hbar^3} = V \cdot \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \varepsilon_i^{1/2} \Delta\varepsilon_i. \quad (101.3)$$

Увівши позначення

$$A = V \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}, \quad (101.4)$$

подамо формулу (101.3) у вигляді

$$Z_i = A\varepsilon_i^{1/2}\Delta\varepsilon_i. \quad (101.5)$$

За умови абсолютного нуля виявляються заповненими N нижніх станів, де N – число електронів у зразку металу. Отже, сума чисел Z_i , що відповідає енергіям від 0 до ε_{\max} , повинна дорівнювати N :

$$N = \sum_i Z_i = A \sum_0^{\varepsilon_F} \varepsilon_i^{1/2} \Delta\varepsilon_i \quad (101.6)$$

(ми врахували, що при абсолютному нулі $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_F$). Взявши до уваги, що $\Delta\varepsilon_i \ll \varepsilon_i$, можна у формулі (101.6) замінити підсумовування інтегруванням. Тоді

$$N = A \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{2}{3} A \varepsilon_F^{3/2} \quad (101.7)$$

Підстановка виразу (101.4) для A дає, що

$$N = \frac{2}{3} V \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \varepsilon_F^{3/2}.$$

Звідси з урахуванням того, що $N/V = n$ є концентрація вільних електронів, тобто їх число в одиниці об'єму металу, одержуємо формулу для рівня Фермі за умови абсолютного нуля

$$\varepsilon_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}. \quad (101.8)$$

Оцінимо значення $\varepsilon_F(0)$. Концентрація вільних електронів у металах лежить у межах від 10^{28} до 10^{29} м^{-3} . Узвзявши для n середнє значення $5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, одержимо

$$\varepsilon_F(0) = 5 \text{ еВ}. \quad (101.9)$$

Величину

$$T_F = \varepsilon_F(0)/k \quad (101.10)$$

називають **температурою Фермі**. Для $\varepsilon_F(0) = 5 \text{ еВ}$ температура Фермі дорівнює приблизно 60 000 К, тобто в 200 разів перевищує кімнатну температуру.

Тепер можна знайти середню енергію електронів за умови абсолютного нуля температури. Для цього потрібно помножити число станів Z_i на енергію ε_i і знайти суму таких добутків за значенням індексу i . У результаті одержимо сумарну енергію E вільних електронів в об'ємі V

$$E = \sum_i Z_i \varepsilon_i = A \sum_0^{\varepsilon_F} \varepsilon_i^{3/2} \Delta\varepsilon_i.$$

Заміна підсумовування інтегруванням дає

$$E = A \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{2}{5} A \varepsilon_F^{5/2}. \quad (101.11)$$

Розділивши сумарну енергію E на число електронів N , тобто взявши відношення виразів (101.11) і (101.7), знайдемо середню енергію вільних електронів при абсолютному нулі;

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{5} \varepsilon_F(0). \quad (101.12)$$

З урахуванням (101.9) для середньої енергії вільних електронів при абсолютному нулі одержимо приблизно 3 еВ. Це величезна величина. Щоб передати класичному електронному газу таку енергію, його потрібно нагріти до температури 25 000 К.

Рівень Фермі, хоча й дуже слабко, але залежить від температури. Для температур, що задовольняють умову $kT \ll \varepsilon_F$, цю залежність описують наближеною формулою

$$\varepsilon_F \approx \varepsilon_F(0) \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F(0)} \right)^2 \right]. \quad (101.13)$$

Для кімнатних температур $kT \approx 0,025$ еВ, у той час, як $\varepsilon_F(0) = 5$ еВ. Отже, за температури приблизно 300 К ε_F відрізняється від $\varepsilon_F(0)$ усього лише на 0,002 %. Тому здебільшого можна приймати ε_F такою, що дорівнює $\varepsilon_F(0)$. Проте для розуміння деяких явищ залежність ε_F від T має принципове значення.

За температур, відмінних від нуля, графік функції (101.1) має вигляд, поданий на рисунку 101.2. Помітна відмінність від графіка, зображеного на рисунку 101.1 спостерігається лише в області приблизно kT . Чим вища температура, тим менш нахилена спадна ділянка кривої.

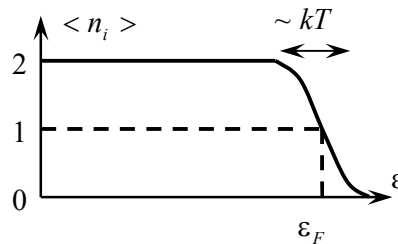


Рисунок 101.2 – Розподіл Фермі – Дірака за температури, відмінної від нуля

Поведінка електронного газу дуже сильно залежить від співвідношення між температурою кристала й температурою Фермі (див. (101.10)). Розрізняють два граничних випадки.

1. Якщо $T \ll T_F$, тобто $kT \ll \varepsilon_F$, електронний газ називають **виродженим**.
2. Якщо $T \gg T_F$, тобто $kT \gg \varepsilon_F$, електронний газ називають **невиродженим**.

Температура Фермі для металів становить кілька десятків тисяч кельвін. Тому навіть за температури, близької до температури плавлення металу ($\sim 10^3$ К), електронний газ у металі є виродженим. У напівпровідниках концентрація вільних електронів виявляється багато меншою, ніж у металах. Відповідно рівень Фермі малий (згідно (101.8) ε_F пропорційний $n^{2/3}$). Тому вже за кімнатної температури електронний газ у багатьох напівпровідниках є неvirодженим та підкоряється класичній статистиці.

Раніше нами була розглянута класична електронна теорія металів. Там було зазначено, що одне з принципових ускладнень цієї теорії полягає в тому, що за класичними уявленнями, електронний газ повинен мати молярну теплоємність, яка дорівнює $(3/2)R$. Відповідно до закону Дюлонга й Пті молярна теплоємність кристалічної ґратки становить $3R$. Отже, теплоємність металів повинна була б перевищувати теплоємність діелектриків приблизно в півтора рази. Проте у дійсності теплоємність металів не відрізняється істотно від теплоємності неметалічних кристалів. Це протиріччя усувається квантовою теорією.

Середня енергія теплового руху дорівнює приблизно kT , за кімнатної температури становить 1/40 еВ. Така енергія може збудити лише електрони, що знаходяться на верхніх рівнях, дотичних до рівня Фермі. Основна частина електронів, розміщених на більш глибоких рівнях, залишаються в незмінних станах, поглинати енергію під час нагрівання не будуть. Отже, у процесі нагрівання металу бере участь незначна частина електронів провідності, чим і можна пояснити малу теплоємність електронного газу в металах.

ТЕМА 18 ЗОННА ТЕОРІЯ ТВЕРДИХ ТІЛ

§ 102 Енергетичні зони в кристалах. Зона провідності, заборонена зона, валентна зона. Метали, напівпровідники, діелектрики з погляду зонної теорії

1 Виявляється, що в кристалі спектр можливих значень енергії електронів розпадається на ряд дозволених і заборонених зон (рис. 102.1). У межах дозволених зон енергія змінюється квазінеперервно. Значення енергії, що належать забороненим зонам, не можуть реалізуватися. Це пов'язано з тим, що на електрони в кристалі діє періодичне поле кристалічної ґратки.

Щоб зрозуміти походження зон, розглянемо уявний процес об'єднання атомів у кристал. Нехай спочатку є N ізолюваних атомів якої-небудь речовини. Поки атоми ізолювані один від одного, вони мають схеми енергетичних рівнів, які повністю збігаються. Заповнення рівнів електронами здійснюється в кожному атомі незалежно від заповнення аналогічних рівнів в інших атомах. Коли електрони об'єднуються в одну квантову систему, то між ними виникає взаємодія. Відповідно до принципу Паулі в одній і тій самій квантовій системі не може бути двох електронів, що перебувають в одному q тому самому квантовому стані. Отже, зі зближенням атомів між ними виникає взаємодія, що посилюється і яка приводить до зміни положення рівнів. Замість одного однакового для всіх атомів рівня виникають N дуже близьких рівнів, що не збігаються. Отже, кожний рівень ізолюваного атома розщеплюється в кристалі на N густо розміщених рівнів, що утворюють **зону**.

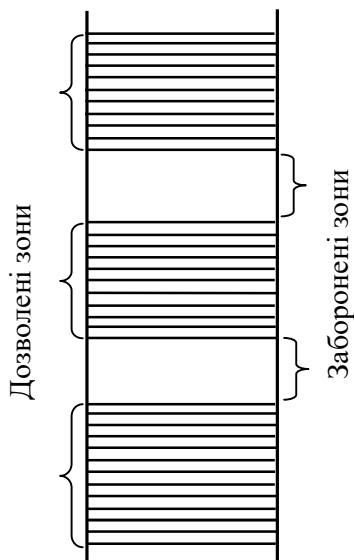


Рисунок 102.1 – Енергетичні зони в кристалі

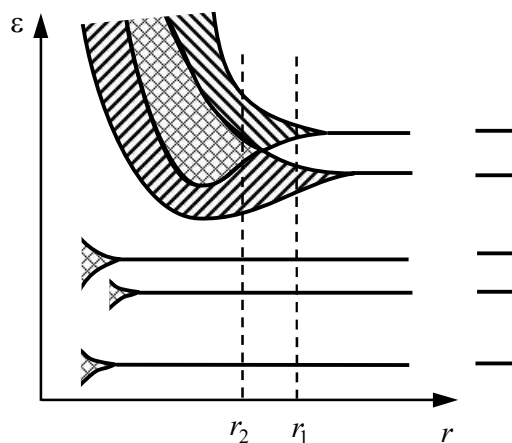


Рисунок 102.2 – Утворення енергетичних зон під час зближення атомів

Розщеплення різних рівнів не є однаковим. Сильніше збурюються рівні, заповнені в атомі зовнішніми електронами. Рівні, заповнені внутрішніми електронами, збурюються мало. На рисунку 102.2 показано розщеплення рівнів як функції відстані r між атомами. Зі схеми

бачимо, що виникаюче в кристалі розщеплення рівнів, які зайняті внутрішніми електронами, дуже мале. Помітно розщеплюються лише рівні, зайняті валентними електронами. Таке саме розщеплення відбувається й з більш високими рівнями, не зайнятими електронами в основному стані атома.

Залежно від конкретних властивостей атомів рівноважна відстань між сусідніми атомами в кристалі може бути або типу r_1 , або типу r_2 (див. рис. 102.2). У разі відстані типу r_1 між дозволеними зонами, що виникають із сусідніх рівнів атома, існує заборонена зона. У разі відстані типу r_2 відбувається перекривання сусідніх зон. Число рівнів у такій об'єднаній зоні дорівнює сумі кількостей рівнів, на які розщеплюються обидва рівні атома.

Отже, спектр можливих значень енергії валентних електронів у кристалі розпадається на ряд **дозволених** і **заборонених зон**. Ширина зон не залежить від розмірів кристала. Вона залежить від кількості атомів у кристалі. Чим більше атомів містить кристал, тим тісніше розміщуються рівні в зоні. Дозволені зони мають ширину приблизно декількох електронвольт. Отже, якщо кристал містить 10^{23} атомів, відстань між сусідніми рівнями в зоні становить приблизно 10^{-23} еВ.

На кожному енергетичному рівні можуть знаходитися два електрони, що мають протилежно спрямовані спіни.

2 Існування енергетичних зон дозволяє пояснити з єдиного погляду існування металів, напівпровідників і діелектриків.

Дозволену зону, що виникла з того рівня, на якому знаходяться валентні електрони в основному стані атома, ми будемо називати **валентною зоною**. За умови абсолютного нуля валентні електрони заповнюють попарно нижні рівні валентної зони. Більш високі дозволені зони будуть вільними від електронів. Залежно від ступеня заповнення валентної зони й ширини забороненої зони можливі три випадки, що зображені на рисунку 102.3. У разі *a* електрони заповнюють валентну зону не повністю. Тому досить передати електронам, які знаходяться на верхніх рівнях, зовсім невелику енергію ($\sim 10^{-23} - 10^{-22}$ еВ) для того, щоб перевести їх на більш високі рівні. Енергія теплового руху (kT) становить при $1K$ величину приблизно 10^{-4} еВ. Отже, за температури, відмінної від абсолютного нуля, частина електронів переводиться на більш високі рівні. Додаткова енергія, викликана дією на електрон електричного поля, також виявляється достатньою для переведення електрона на більш високі рівні. Тому електрони можуть прискорюватися електричним полем і одержувати додаткову швидкість у напрямку, протилежному до напрямку поля. Отже, кристал із подібною схемою енергетичних рівнів є металом.

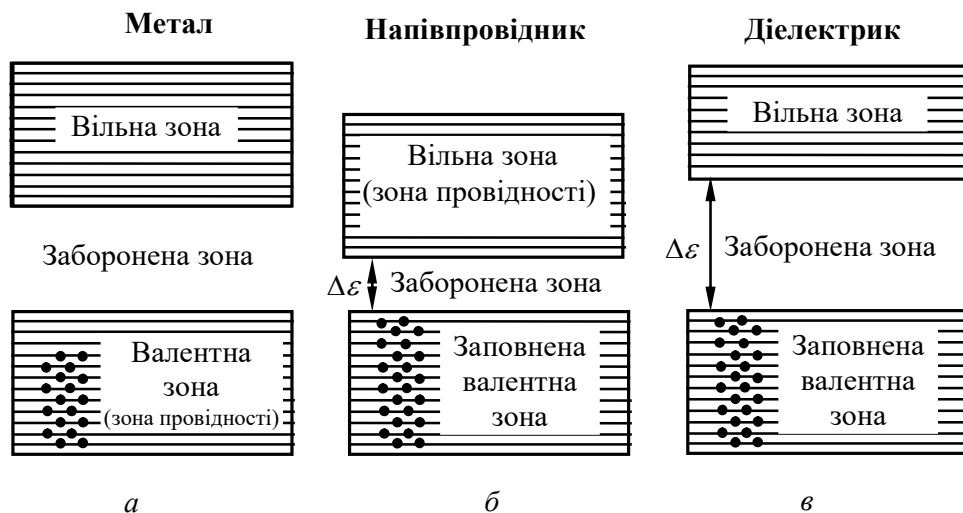


Рисунок 102.3 – Ширина забороненої зони визначає електричні властивості кристала

Часткове заповнення валентної зони (у разі металу її називають також *зоною провідності*) спостерігається в тих ситуаціях, коли на останньому зайнятому рівні в атомі знаходиться лише один електрон або коли відбувається перекривання зон (див. рис. 102.2, відстань r_2). У першому випадку N електронів провідності заповнюють попарно лише половину рівнів валентної зони. У другому – число рівнів у зоні провідності буде більше N , так що, навіть, якщо кількість електронів провідності дорівнює $2N$, вони не зможуть зайняти всі рівні зони.

У випадках *б* і *в* (див. рис. 102.3) рівні валентної зони повністю зайняті електронами, вони заповнені. Для того щоб збільшити енергію електрона, необхідно передати йому кількість енергії, не менше, ніж ширина забороненої зони $\Delta\varepsilon$. Електричне поле (за якого не відбувається електричного пробоя кристала) передати електрону таку енергію не може. За цих умов електричні властивості кристала визначаються шириною забороненої зони $\Delta\varepsilon$. Якщо ця ширина невелика (приблизно декілька десятків електронвольт), енергія теплового руху виявляється достатньою для того, щоб перевести частину електронів у верхню вільну зону. Вони будуть знаходитися в умовах, аналогічних тим, у яких знаходяться валентні електрони в металі. Вільна зона виявиться для них *зоною провідності*. Одночасно стане можливим перехід електронів валентної зони на її верхні звільнені рівні. Таку речовину називають *власним напівпровідником*.

Якщо ширина забороненої зони $\Delta\varepsilon$ велика (приблизно декілька електрон-вольт), тепловий рух не зможе перекинути у вільну зону помітну кількість електронів. У цьому разі кристал є діелектриком.

§ 103 Напівпровідники. Власні, домішкові напівпровідники. Рух електронів та дірок. Рівень Фермі. Залежність провідності власних напівпровідників від температури

1 Напівпровідниками є кристалічні речовини, у яких при $0^\circ K$ валентна зона повністю заповнена електронами, а ширина забороненої зони невелика. Напівпровідники зобов'язані своєю назвою тій обставині, що за електропровідністю вони посідають проміжне місце між металами й діелектриками. Проте характерним для них є не значення провідності, а те, що їх провідність збільшується з підвищенням температури (нагадаємо, що в металах вона зменшується).

Розрізняють *власні й домішкові* напівпровідники. До власних належать хімічно чисті напівпровідники. Електричні властивості домішкових напівпровідників визначаються наявними в них домішками, уведеними штучно.

2 Під час розгляду електричних властивостей напівпровідників велику роль відіграє поняття «*дірок*». Зупинимося на з'ясуванні фізичного змісту цього поняття.

У власному напівпровіднику в разі абсолютного нуля всі рівні валентної зони повністю заповнені електронами, а в зоні провідності електрони відсутні (рис. 103.1*а*). Електричне поле не може перевести електрони з валентної зони в зону провідності. Тому власні напівпровідники поведуться при абсолютному нулі як діелектрики. За температур, відмінних від $0^\circ K$, частина електронів із верхніх рівнів валентної зони переходить у результаті теплового збудження на нижні рівні зони провідності (рис. 103.1*б*). У цих умовах електричне

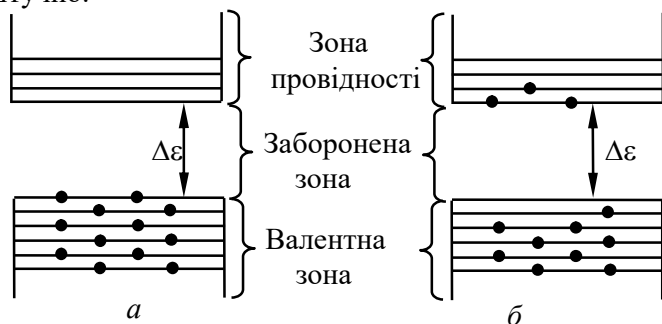


Рисунок 103.1 – Утворення вакантних рівнів у валентній зоні напівпровідника

поле одержує можливість змінювати стан електронів, що знаходяться в зоні провідності. Крім того, унаслідок утворення вакантних рівнів у валентній зоні електрони цієї зони також можуть змінювати свою швидкість під впливом зовнішнього поля. У результаті електропровідність напівпровідника стає відмінною від нуля й визначається процесами двох типів: рухом вільних електронів у зоні провідності й рухом валентних електронів (зв'язаних електронів із кристалічною ґраткою) у валентній зоні.

Рух електронів різного типу має свої особливості. Щоб розрізнити ці два типи електронів, *рух валентних електронів ставлять у відповідність рух додатно заряджених квазічастинок із зарядом $+e$, які мають швидкість вакансії в кристалічній ґратці. Ці квазічастинки одержали назву «дірок», їх швидкість спрямована в протилежний бік відносно швидкості валентних електронів.* Електричний струм дірок дорівнює електричному струму валентних електронів. Про рух електронів, що відірвалися від кристалічної ґратки (електронів у зоні провідності), говорять як про рух вільних електронів.

Підкреслимо, що рух дірки не є переміщенням якоїсь реальної додатно зарядженої частинки. Уявлення про дірки відображає характер руху валентних електронів у напівпровіднику.

4 Власна провідність напівпровідників. Власна провідність виникає в результаті переходу електронів із верхніх рівнів валентної зони в зону провідності. Водночас у зоні провідності з'являється деяке число носіїв струму – електронів, що займають енергетичні рівні поблизу дна зони; одночасно у валентній зоні звільняється така сама кількість місць на верхніх рівнях, у результаті чого з'являються дірки.

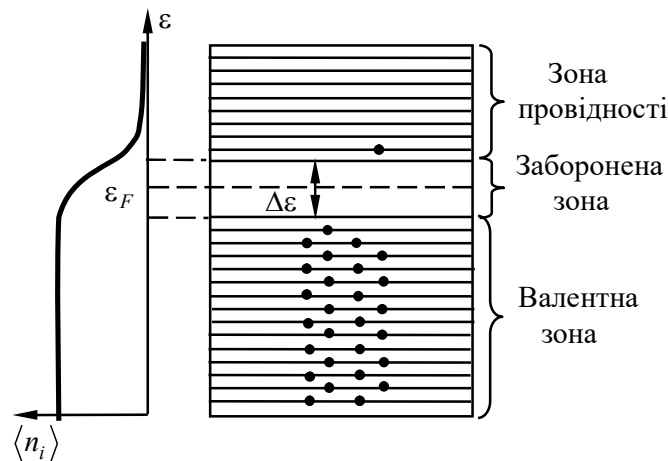


Рисунок 103.2 – Розподіл електронів за рівнями валентної зони й зони провідності у власному напівпровіднику

Розподіл електронів за енергетичними рівнями валентної зони й зони провідності описують не розподілом Больцмана, який використовують у класичній фізиці, а його аналогом у квантовій механіці – розподілом Фермі – Дірака, що є правильним для частинок із напівцілим спіном:

$$\langle n_i \rangle = \frac{2}{\exp[(\varepsilon_i - \varepsilon_F) / kT] + 1} \quad (103.1)$$

Тут $\langle n_i \rangle$ – середнє значення числа електронів на i -му енергетичному рівні; ε_i – енергія i -го рівня; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура; ε_F – параметр системи, який називають енергією Фермі. *Енергією Фермі називають таку енергію, імовірність знаходження частинки з якою дорівнює 0,5.* У формулі (103.1) також ураховано, що на

кожному енергетичному рівні можуть знаходитися два електрони, які відрізняються один від одного орієнтацією спіну.

Розподіл Фермі можна зробити наочним, зобразивши, як це зроблено на рисунку 103.2, де подано графік його функції разом зі схемою енергетичних зон.

Відповідний розрахунок дає, що у власних напівпровідниках енергія Фермі, що відрахована відносно верхнього краю валентної зони, дорівнює

$$\varepsilon_F \approx \frac{1}{2} \Delta\varepsilon, \quad (103.2)$$

де $\Delta\varepsilon$ – ширина забороненої зони. Це означає, що рівень Фермі лежить посередині забороненої зони (див. рис. 103.2). Отже, для електронів, які перейшли в зону провідності, величина $\varepsilon_i - \varepsilon_F$, що входить до формули (103.1), мало відрізняється від половини ширини забороненої зони.

Рівні зони провідності лежать на «хвості» кривої розподілу (див. рис. 103.2). Тому середні числа заповнення для них малі порівняно з одиницею. У цьому разі одиницею в знаменнику розподілу (103.1) можна знехтувати та вважати, що

$$\langle n_i \rangle \approx 2 \exp[-(\varepsilon_i - \varepsilon_F) / kT] \quad (103.3)$$

Поклавши в цій формулі $\varepsilon_i - \varepsilon_F \approx \Delta\varepsilon / 2$, одержимо, що

$$\langle n_i \rangle \approx 2 \exp(-\Delta\varepsilon / 2kT). \quad (103.4)$$

Кількість електронів, що перейшли в зону провідності, а отже, і кількість дірок, які утворилися, будуть пропорційні виразу (103.4). Ці електрони й дірки є носіями електричного струму. Оскільки провідність пропорційна числу носіїв, вона також повинна бути пропорційна виразу (103.4). Тобто $\sigma = \sum_{\alpha=e,d} e_{\alpha} n_{\alpha} \nu_{\alpha}$, $n_e \sim \langle n_i \rangle$, $n_d \sim \langle n_i \rangle$. Отже $\sigma \sim \langle n_i \rangle$. Отже,

електропровідність власних напівпровідників швидко збільшується з температурою, змінюючись за законом

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-\Delta\varepsilon / 2kT), \quad (103.5)$$

де $\Delta\varepsilon$ – ширина забороненої зони; σ_0 – величина, що змінюється з температурою набагато повільніше, ніж експонента, у зв'язку з чим її можна в першому наближенні вважати константою.

Якщо на графіку відкласти залежність $\ln \sigma$ від $1/T$, то для власних напівпровідників одержуємо пряму лінію, зображену на рисунку 103.3. За нахилом цієї прямої можна визначити ширину забороненої зони $\Delta\varepsilon$.

5 Типовими напівпровідниками є елементи IV групи періодичної системи Менделєєва – германій і кремній. Вони утворюють ґратку типу алмаза, у якій кожний атом зв'язаний ковалентними (парноелектронними) зв'язками з чотирма рівновіддаленими від нього сусідніми атомами. Умовно таке взаємне розміщення атомів можна подати у вигляді плоскої структури, зображеної на рисунку 103.4. Кільця зі знаком «+» позначають додатно заряджені атомні залишки (тобто ту частину атома, що залишається після видалення валентних електронів), кільця зі знаком «-» – електрони, подвійні лінії – ковалентні зв'язки.

За досить високої температури тепловий рух може розірвати окремі пари, звільнивши один електрон. Покинуте електроном місце перестає бути нейтральним, у його околі виникає надлишковий додатний заряд $+e$, тобто утвориться дірка (на рисунку 103.4 вона зображена пунктирним кільцем). На це місце може перескочити електрон однієї із сусідніх пар (валентний електрон). У результаті дірка починає також мандрувати по кристалу, як і електрон, що вивільнився (вільний електрон).

Під час зустрічі вільного електрона з діркою вони **рекомбінують** (з'єднуються). Це означає, що електрон нейтралізує надлишковий додатний заряд, розміщений біля дірки, і втрачає можливість пересуватись доти, поки знову не одержить від кристалічної ґратки

енергію, достатню для свого вивільнення. Рекомбінація приводить до одночасного зникнення вільного електрона й дірки. На схемі рівнів (рис. 103.2) процесу рекомбінації відповідає перехід електрона із зони провідності на один із вільних рівнів валентної зони.

Отже, у власному напівпровіднику проходять одночасно два процеси: народження попарно вільних електронів і дірок та рекомбінація, що призводить до попарного їх зникнення. Імовірність першого процесу швидко зростає з температурою. Імовірність рекомбінації пропорційна як числу вільних електронів, так і числу дірок. Отже, кожній температурі відповідає певна рівноважна концентрація електронів і дірок, що змінюється з температурою пропорційно виразу (103.4).

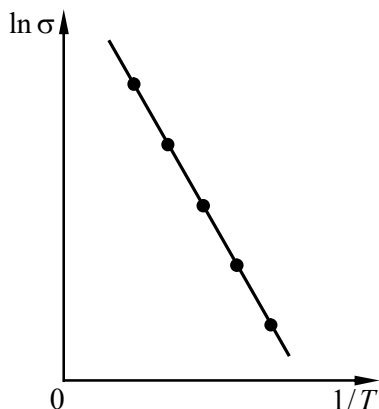


Рисунок 103.3 – Температурна залежність власної провідності напівпровідника

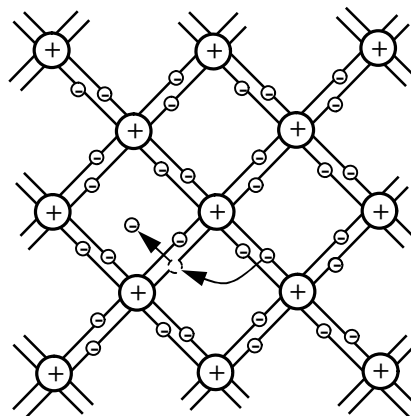


Рисунок 103.4 – Умовна схема кристала типу алмаза. Тут дірка зображена пунктирним кільцем

Коли зовнішнє електричне поле відсутнє, електрони провідності й дірки рухаються хаотично. Під час увімкнення поля на хаотичний рух накладається впорядкований рух: електронів проти поля й дірок – у напрямку поля. Обидва рухи (і дірок, і електронів) приводять до перенесення заряду вздовж кристала. Отже, власна електропровідність обумовлюється ніби носіями заряду двох знаків – від'ємними електронами й додатними дірками.

Відзначимо, що за умови досить високої температури власна провідність спостерігається в усіх без винятку напівпровідниках. Проте у напівпровідниках, що містять домішки, електропровідність складається з власної й домішкової провідності.

§ 104 Домішкова провідність напівпровідників. Донорні рівні, акцепторні рівні

1 Домішкова провідність виникає, якщо деякі атоми напівпровідника замінити у вузлах кристалічної ґратки атомами, валентність яких відрізняється на одиницю від валентності основних атомів. На рисунку 104.1 умовно зображено ґратку германію з домішкою п'ятивалентних атомів фосфору. Для утворення ковалентних зв'язків із сусідами атома фосфору достатньо чотирьох електронів. Отже, п'ятий валентний електрон виявляється зайвим і легко від'єднується від атома за рахунок енергії теплового руху, створюючи вільний електрон.

У цьому разі утворення вільного електрона не супроводжується розривом ковалентних зв'язків, тобто утворенням дірки. Хоча біля атома домішки виникає надлишковий додатний електричний заряд, але він пов'язаний із цим атомом і переміститися в ґратці не може. Завдяки цьому заряду атом домішки може захопити електрон, що наблизився до нього, але зв'язок захопленого електрона з атомом буде неміцним і легко може бути зруйнованим знову за рахунок теплових коливань ґратки.

Отже, у напівпровіднику з домішкою, валентність якої на одиницю більша валентності основних атомів, є лише один вид носіїв струму – електрони. Тому говорять, що такий напівпровідник має електронну провідність, або є *напівпровідником n-типу* (від

слова negative – від’ємний). Атоми домішки, що поставляють електрони провідності, називають **донорними**.

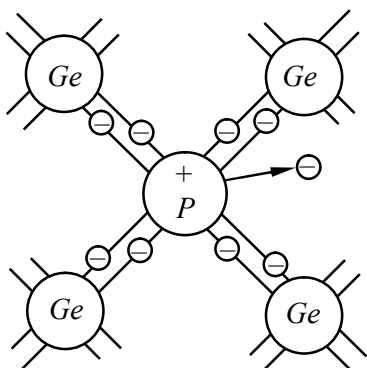


Рисунок 104.1 – Ґратка германію з домішкою п’ятивалентних атомів фосфору

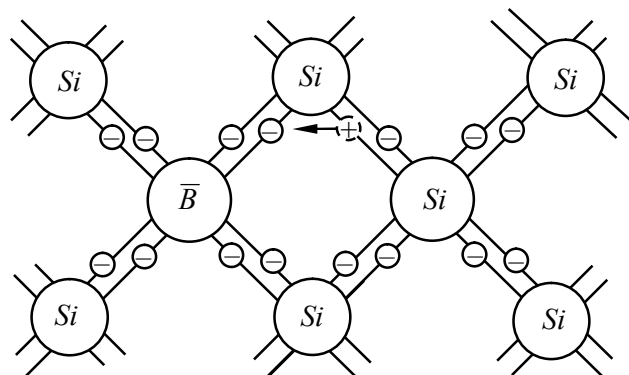


Рисунок 104.2 – Ґратка кремнію з домішкою тривалентних атомів бору

2 Тепер розглянемо випадок, коли валентність домішки на одиницю менша валентності основних атомів. На рисунку 104.2 умовно зображена ґратка кремнію з домішкою тривалентних атомів бору. Тривалентних електронів атома бору недостатньо для утворення зв’язків з усіма чотирма сусідами. Тому один зі зв’язків виявиться неукмплектованим і буде являти собою місце, здатне захопити електрон. Під час переходу на це місце електрона однієї із сусідніх пар (ковалентного зв’язку) виникне дірка, що буде переміщуватися в кристалі. Поблизу атома домішки виникне надлишковий від’ємний заряд, але він буде пов’язаний із даним атомом і не може стати носієм струму.

Отже, у напівпровіднику з домішкою, валентність якої на одиницю менша від валентності основних атомів, виникають носії струму лише одного виду – дірки. Провідність у цьому разі називають дірковою, а про **напівпровідник говорять, що він належить до p-типу** (від слова positive – додатний). Домішки, що викликають виникнення дірок, називають **акцепторними**.

3 Домішки змінюють поле ґратки, що приводить до виникнення на енергетичній схемі **домішкових рівнів**, розміщених у забороненій зоні кристала. У разі напівпровідників **n-типу** домішкові рівні називають **донорними** (рис. 104.3a), у разі напівпровідників **p-типу** – **акцепторними** (рис. 104.3б).

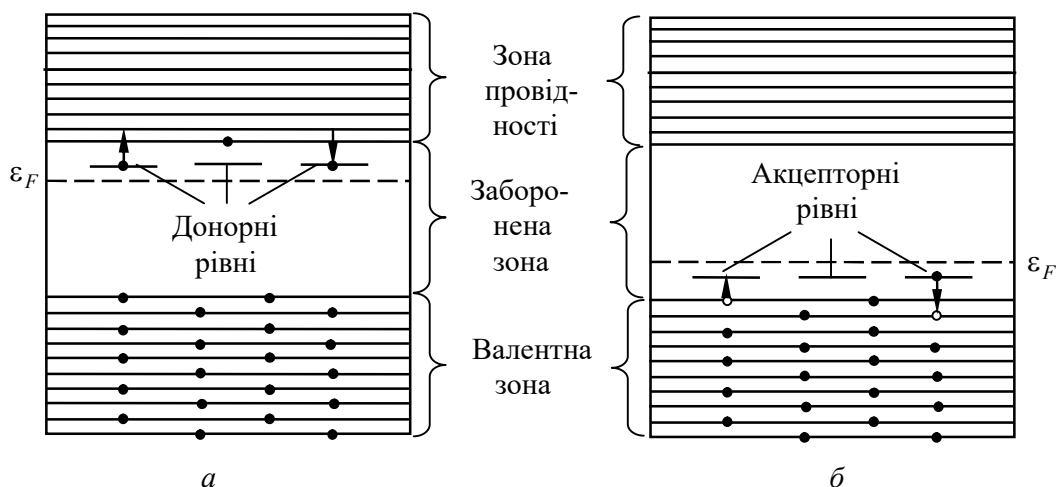


Рисунок 104.3 – Схема енергетичних рівнів напівпровідника n-типу (a) і p-типу (б)

Рівень Фермі в напівпровідниках n -типу розміщений у верхній половині забороненої зони, а в напівпровідниках p -типу – у нижній половині забороненої зони. Під час підвищення температури рівень Фермі в напівпровідниках обох типів зміщується до середини забороненої зони.

Якщо донорні рівні розміщені недалеко від верхньої межі валентної зони, вони не можуть істотно вплинути на електричні властивості кристала. Інакше відбувається, коли відстань таких рівнів від дна зони провідності набагато менша від ширини забороненої зони. У цьому разі енергія теплового руху навіть за звичайних температур виявляється достатньою для того, щоб перевести електрон із донорного рівня в зону провідності (див. рис. 104.3а). Цьому процесу відповідає відщеплення п'ятого валентного електрона від атома домішки. Захопленню вільного електрона атомом домішки відповідає на рисунку 104.3 перехід електрона із зони провідності на один із донорних рівнів.

Акцепторні рівні впливають на електричні властивості кристала в тому разі, якщо вони розміщені недалеко від межі валентної зони (див. рис. 104.3б). Утворенню дірки відповідає перехід електрона з валентної зони на акцепторний рівень. Зворотний перехід відповідає розриву однієї з чотирьох ковалентних зв'язків атома домішки з його сусідами й рекомбінації електрона, що утворився при цьому, і дірки.

Під час підвищення температури концентрація домішкових носіїв струму швидко досягає насичення. Це означає, що практично звільняються всі донорні або заповнюються електронами всі акцепторні рівні. Водночас зі збільшенням температури все більше починає позначатися власна провідність напівпровідника, обумовлена переходом електронів безпосередньо з валентної зони в зону провідності. Отже, за високих температур провідність напівпровідника буде складатися з домішкової й власної провідностей. За низьких температур переважає домішкова, а за високих – власна провідність.

§ 105 Контакт електронного та діркового напівпровідників. Електричне поле p - n -переходу. Потенціальний бар'єр p - n -переходу. Вольт-амперна характеристика. Напівпровідниковий діод

1 Контакт напівпровідників різного типу, що називають *p - n -переходом*, лежить в основі пристроїв, які одержали назву транзисторів та напівпровідникових діодів. Цей перехід являє собою тонкий шар на межі між двома областями одного й того самого кристала, що відрізняються типом домішкової провідності. Для виготовлення такого переходу беруть, наприклад, монокристал із дуже чистого германію з електронним механізмом провідності (обумовленим незначними залишками домішок). У вирізану з кристала тонку пластинку вплавають з одного боку шматочок індію. Під час цієї операції, здійснюваної у вакуумі або в атмосфері інертного газу, атоми індію дифундують у германії на деяку глибину. У тій області, у яку проникають атоми індію, провідність германію стає дірковою. На межі цієї області виникає p - n -перехід. Існують й інші способи одержання p - n -переходів.

2 На рисунку 105.1 показано зміну концентрації домішок у напрямку, перпендикулярному до межі напівпровідників різного типу. В p -області основними носіями струму є дірки, що утворилися в результаті захоплення електронів атомами домішки; акцептори при цьому стають від'ємними йонами (рис. 105.2). Крім того, в p -області є невелика кількість неосновних носіїв – електронів, що виникають унаслідок переведення тепловим рухом електронів із валентної зони безпосередньо в зону провідності (цей процес трохи збільшує й число дірок). У n -області основні носії струму – електрони, передані донорами в зону провідності (донори в цей час перетворюються на додатні іони); перехід електронів, що відбувається за рахунок теплового руху, із валентної зони в зону провідності приводить до утворення невеликої кількості дірок – неосновних носіїв для цієї області.

Дифундуючи в зустрічних напрямках через межовий шар, дірки й електрони рекомбінують один з одним. Тому p - n -перехід стає сильно збідненим носіями струму й одержує великий опір. Одночасно на межі між областями виникає подвійний електричний шар, утворений від'ємними йонами акцепторної домішки, заряд яких тепер не компенсується

дірками й додатними іонами донорної домішки, заряд яких тепер не компенсується електронами (див. рис. 105.2). **Електричне поле** у цьому шарі спрямоване так, що протидіє подальшому переходу через шар основних носіїв. Рівноваги досягають за такої напруженості електричного поля, коли перехід основних носіїв струму через p - n -перехід за рахунок дифузії припиняється.

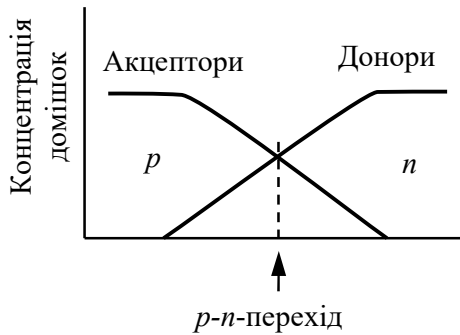


Рисунок 105.1 – Зміна концентрації акцепторних і донорних домішок в області p - n -переходу

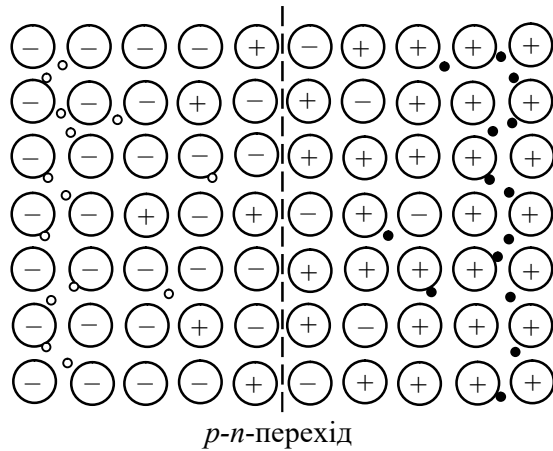


Рисунок 105.2 – Розподіл акцепторів і донорів біля p - n -переходу. Більші кільця зі знаком «плюс» або «мінус» – іони, малі кільця – дірки, чорні точки – електрони

З погляду зонної теорії рівноважний стан на p - n -переході досягається за такої висоти потенціального бар'єра, за якої рівні Фермі обох областей розміщені на однаковій висоті (рис. 105.3).

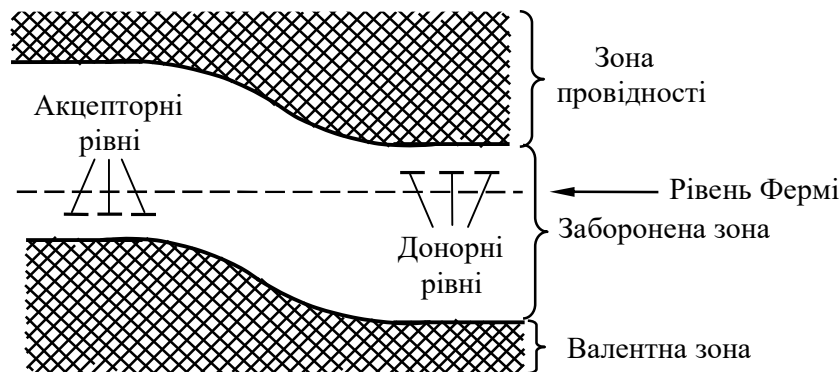


Рисунок 105.3 – Згинання енергетичних зон в області p - n -переходу

Згинання енергетичних зон в області переходу викликане тим, що потенціал p -області в стані рівноваги нижчий, ніж потенціал n -області; відповідно потенціальна енергія електрона в p -області більша, ніж в n -області. Нижня межа валентної зони дає хід потенціальної енергії електрона в напрямку, перпендикулярному до переходу (див. рис. 105.3). Заряд дірок протилежний заряду електрона, тому їх потенціальна енергія більша там, де менша енергія електрона, і навпаки.

У стані рівноваги деякій кількості основних носіїв вдається перебороти потенціальний бар'єр, унаслідок чого через перехід проходить невеликий струм $I_{осн}$. Цей струм компенсується зустрічним струмом $I_{неосн}$, обумовленим неосновними носіями. Неосновних

носіїв дуже мало, але вони легко проникають через межу областей, «скочуючись» із потенціального бар'єра. Величина $I_{неосн}$ визначається числом неосновних носіїв, що з'являються за одиницю часу, і від висоти потенціального бар'єра майже не залежить. Величина $I_{осн}$, навпаки, залежить від висоти бар'єра. Рівновага встановлюється саме за такої висоти потенціального бар'єра, за якої обидва струми $I_{осн}$ й $I_{неосн}$ компенсують один одного.

4 Подамо на кристал зовнішню напругу такого напрямку, щоб плюс був під'єднаний до p -області, а мінус – до n -області (таку напругу називають прямою). Це приведе до зростання потенціалу p -області й зниження потенціалу n -області. У результаті висота потенціального бар'єра зменшиться й струм $I_{осн}$ зросте. Струм же $I_{неосн}$ залишиться практично без змін (він, як відзначалося, від висоти бар'єра майже не залежить). Отже, результуючий електричний струм буде відмінним від нуля. Зниження потенціального бар'єра пропорційне прикладеній напрузі (вона дорівнює eU). Під час зменшення висоти бар'єра струм основних носіїв, а отже, і результуючий струм швидко зростають. Отже, у напрямку від p -області до n -області p - n -перехід пропускає струм, сила якого швидко зростає під час збільшення прикладеної напруги. Цей напрямок називають *прямим (або пропускним, або прохідним)*.

5 На рисунку 105.4 наведено вольт-амперну характеристику p - n -переходу. Електричне поле, що виникає в кристалі в разі прямої напруги «підтискує» основні носії до межі між областями, унаслідок чого ширина перехідного шару, збідненого носіями, скорочується. Відповідно зменшується й опір переходу, причому тим сильніше, чим більша напруга. Тому вольт-амперна характеристика в пропускній області не є прямою (див. праву гілку кривої на рисунку 105.4).

Тепер прикладемо до кристала напругу такого напрямку, щоб плюс був під'єднаний до n -області, а мінус – до p -області (таку напругу називають зворотною). Це приведе до підвищення потенціального бар'єра й відповідного зменшення струму основних носіїв $I_{осн}$. Виникаючий при цьому результуючий струм (називають зворотним) швидко досягає насичення (тобто перестає залежати від U) і дорівнює $I_{неосн}$. Отже, у напрямку від n -області до p -області (який називається зворотним або запірним) p - n -перехід пропускає слабкий струм, цілком обумовлений неосновними носіями. Лише за дуже великої зворотної напруги сила струму починає різко зростати, що обумовлено електричним пробоем переходу (див. ліву гілку на рисунку 105.4). Кожний p - n -перехід характеризується своїм граничним значенням зворотної напруги, яку він здатний витримати без руйнування.

Із рисунка 105.4 випливає, що p - n -перехід має у зворотному напрямку набагато більший опір, ніж у прямому. Це можна пояснити тим, що поле, яке виникає в кристалі під час накладення зворотної напруги, «відтягує» основні носії від межі між областями, що приводить до зростання ширини перехідного шару, збідненого носіями. Відповідно збільшується й опір переходу.

Неоднаковість опору в прямому й зворотному напрямках дозволяє використовувати p - n -переходи для випрямлення змінного струму. На рисунку 105.5 показано графік струму, що проходить через перехід, коли прикладена

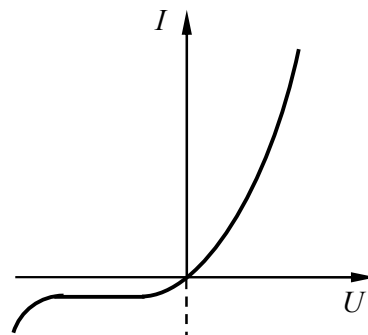


Рисунок 105.4 – Вольт-амперна характеристика p - n -переходу

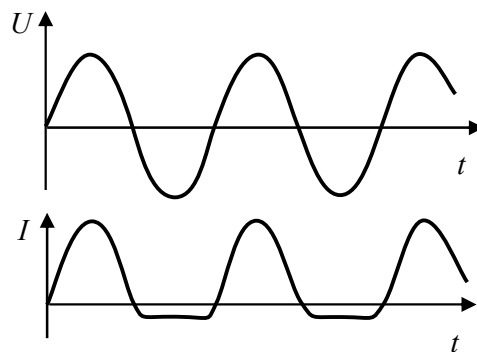


Рисунок 105.5 – Випрямлення змінного струму за допомогою p - n -переходу

напруга змінюється за гармонічним законом. У цьому разі ширина шару, збідненого носіями, і опір переходу пульсують, змінюючись у такт зі змінами напруги.

§ 106 Транзистор. База, емітер, колектор. Транзисторний підсилювач напруги

1 Напівпровідниковий триод, або **транзистор**, являє собою кристал із двома *p-n*-переходами. Залежно від порядку, у якому чергуються області з різними типами провідності, розрізняють *n-p-n*- і *p-n-p*- транзистори. Середню частину транзистора називають його **базою**. Прилягаючі до бази по обидва боки області з іншим, ніж у неї, типом провідності утворюють **емітер** та **колектор**.

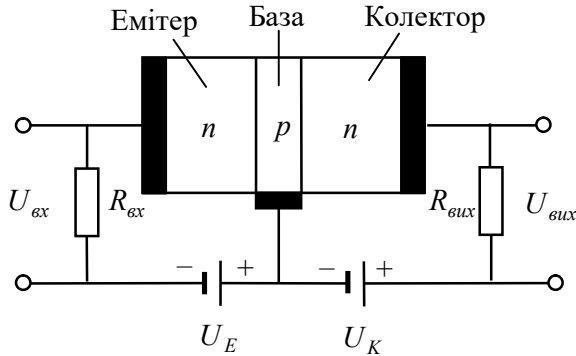


Рисунок 106.1 – Схема *n-p-n*-транзистора

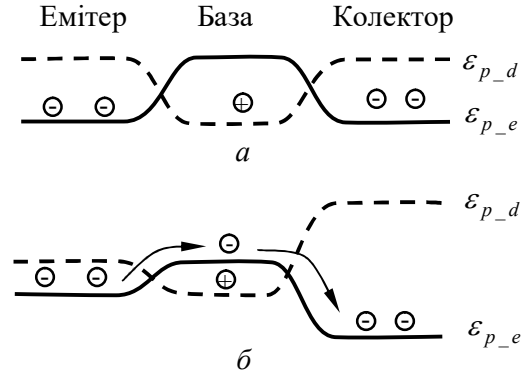


Рисунок 106.2 – Потенціальна енергія електронів і дірок в *n-p-n*-транзисторі

2 Розглянемо принцип роботи *n-p-n*-транзистора. На рисунку 106.1 зображена схема **транзисторного підсилювача напруги** (можливі й інші схеми увімкнення транзистора). На перехід емітер–база подається постійна напруга U_E у прямому напрямку, а на перехід база–колектор – постійна напруга U_K у зворотному напрямку. Підсилювана змінна напруга $U_{вх}$ подається на невеликий вхідний опір $R_{вх}$. Підсилена напруга $U_{вих}$ знімається з вихідного опору $R_{вих}$. При зазначених на схемі знаках напруг опір переходу емітер–база невеликий, опір же переходу база–колектор, навпаки, дуже великий. Це дозволяє взяти як $R_{вих}$ опір великої величини.

На рисунку 106.2а показаний хід потенціальної енергії електронів (суцільна крива) й дірок (пунктирна крива) у разі, що коли напруги й вхідний сигнал відсутні. Під'єднання прямої напруги U_E знижує потенціальний бар'єр на першому переході, а під'єднання зворотної напруги U_K підвищує потенціальний бар'єр на другому переході (рис. 106.2б). Проходження струму в колі емітера супроводжується проникненням електронів в область бази. Електрони, що проникли в базу, дифундують у напрямку колектора. Якщо товщина бази невелика майже всі електрони, не встигають рекомбінувати, «скочуються» з потенціальної гірки, яка знаходиться на межі база–колектор, і надходять у коло колектора.

Обумовлена вхідною напругою зміна струму I_E в колі емітера приводить до зміни кількості електронів, які проникають у колектор, і, отже, до майже такої самої зміни струму I_K в колі колектора. Припустимо, що $I_K \approx I_E$. Виразивши ці струми через відповідні напруги й опори, одержимо, що $U_{вх} / R_{вх} \approx U_{вих} / R_{вих}$. Звідси

$$U_{вих} : U_{вх} \approx R_{вих} : R_{вх}.$$

Оскільки $R_{вих} \gg R_{вх}$, напруга $U_{вих}$ значно перевершує вхідну напругу $U_{вх}$. Отже, транзистор підсилює напругу й потужність. Підвищена потужність з'являється за рахунок джерела струму, увімкненого в коло колектора.

РОЗДІЛ 6

МОДЕЛІ ФІЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА Й ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК

ТЕМА 19 АТОМНЕ ЯДРО Й ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ

§ 107 Склад і характеристика атомного ядра. Ізотопи, ізобари, ізотони, ізомери

1 Склад атомного ядра. У 1911 р. Резерфордом у результаті проведення дослідів із розсіювання α -частинок була запропонована *ядерна модель атома*. Відтоді почався відлік ядерної фізики. На той час були відомими лише дві елементарні частинки – *електрон і протон*. Тому й була висунута гіпотеза про те, що ядро складається з електронів і протонів. Проте така гіпотеза виявилася суперечливою, вона не узгоджувалася з експериментальними фактами.

Через 21 рік у 1932 р. *український фізик Дм. Іваненко* вперше висловив ідею про те, що **ядра атомів складаються з протонів і нейтронів**. У цьому самому році англійським фізиком Дж. Чедвіком був експериментально відкритий **нейтрон** (*елементарна частинка із зарядом, що дорівнює нулю, маса нейтрона приблизно дорівнює масі протона*). Частинки, що входять до складу атомного ядра: протон і нейтрон, одержали назву **нуклонів**.

Розглянемо основні характеристики нуклонів.

Протон (p). Заряд протона дорівнює елементарному заряду $+e$, його маса

$$m_p = 938,28 \text{ MeV.} \quad (107.1)$$

Для порівняння зазначимо, що маса електрона

$$m_e = 0,511 \text{ MeV.} \quad (107.2)$$

Із порівняння (107.1) і (107.2) випливає, що $m_p = 1836 m_e$.

Протон має спін, що дорівнює $1/2$ ($s = 1/2$), і власний магнітний момент

$$\mu_p = +2,79\mu_y, \quad (107.3)$$

де

$$\mu_y = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл} \quad (107.4)$$

– одиниця магнітного моменту, яку називають *ядерним магнетомом*. Порівнюючи ядерний магнетон μ_y із магнетомом Бора $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$, можна зробити висновок, що μ_y у 1836 разів менше μ_B . Отже, власний магнітний момент протона приблизно в 660 разів менший, ніж власний магнітний момент електрона.

Нейтрон (n). Електричний заряд нейтрона дорівнює нулю, а маса

$$m_n = 939,57 \text{ MeV} \quad (107.5)$$

дуже близька до маси протона. Різниця мас нейтрона й протона $m_n - m_p$ становить 1,3 MeV, тобто $2,5 m_e$. Нейтрон має спін, що дорівнює $1/2$ ($s = 1/2$), і, незважаючи на відсутність електричного заряду, власний магнітний момент

$$\mu_n = -1,91\mu_y. \quad (107.6)$$

Знак мінус свідчить про те, що напрямки власних механічного й магнітного моментів протилежні. Це досить дивний факт: незаряджена частинка має магнітний момент.

У вільному стані нейтрон нестабільний (радіоактивний) – він самочинно розпадається, перетворюючись на протон і випромінює електрон (e^-) та ще одну частинку, яку називають

антинейтрино ($\tilde{\nu}_e$). Період піврозпаду (тобто час, за який розпадається половина вихідної кількості нейтронів) дорівнює приблизно 12 хв. Схему розпаду можна записати так:



2 Характеристики атомного ядра. Однією з найважливіших характеристик атомного ядра є **зарядове число** Z . Воно дорівнює кількості протонів, що входять до складу ядра, і визначає його заряд, що дорівнює $+Ze$. Ми вже відзначали, що Z також визначає порядковий номер хімічного елемента в періодичній таблиці Менделєєва. Тому його також називають атомним номером ядра.

Число нуклонів (тобто сумарне число протонів і нейтронів) у ядрі позначають буквою A й називають **масовим числом ядра**. Число нейтронів у ядрі дорівнює $N = A - Z$.

Для позначення ядер застосовують символ



де під X мають на увазі хімічний символ даного елемента. Ліворуч угорі ставлять масове число, ліворуч унизу – атомний номер (останній значок часто опускають).

Ядра з однаковим Z , але різними A називають ізотопами. Більшість хімічних елементів має декілька ізоотопів. Так, наприклад, у водню є три ізоотопи:

${}^1_1 H$ – звичайний водень, або протій ($Z = 1, N = 0$),

${}^2_1 H$ – важкий водень, або дейтерій ($Z = 1, N = 1$),

${}^3_1 H$ – тритій ($Z = 1, N = 2$).

Дейтерій позначають також символом D , а тритій – символом T . Протій і дейтерій стабільні, тритій є радіоактивним.

Ядра з однаковим масовим числом A називають ізобарами. Як приклад ізобар можна навести ${}^{40}_{18} Ar$ й ${}^{40}_{20} Ca$.

Ядра з однаковим числом нейтронів $N = A - Z$ називають ізотонами (${}^{13}_6 C, {}^{14}_7 N$).

Нарешті, існують радіоактивні ядра з однаковими Z й A , що відрізняються періодом піврозпаду. Вони називаються **ізомерами**. Наприклад, є два ізомери ядра ${}^{80}_{35} Br$, в одного з них період піврозпаду дорівнює 18 хв, в іншого – 4,4 години.

У природі трапляються елементи з атомним номером Z від 1 до 92, крім технецію ($Tc, Z = 43$) і прометію ($Pm, Z = 61$). Плутоній ($Pu, Z = 94$) після одержання його штучним методом був виявлений у незначних кількостях у природному мінералі – смолянній обманці. Інші трансуранові елементи (з Z від 93 до 107) були одержані штучним методом за допомогою різних ядерних реакцій.

3 Розміри ядер. У першому наближенні ядро можна вважати кулею, радіус якої досить точно визначають формулою

$$r = 1,3 \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ м}. \quad (107.8)$$

Із (107.8) випливає, що об'єм ядра є пропорційним числу нуклонів у ядрі. Отже, густина речовини в усіх ядрах приблизно однакова.

4 Спін ядра. Спіни нуклонів складаються в результуючий спін ядра. Спін нуклона дорівнює $1/2$. Тому квантове число спіну ядра буде напівцілим при непарному числі нуклонів A і цілим або нулем при парному A . Спіни ядер не перевищують декількох одиниць. Це свідчить про те, що спіни більшості нуклонів у ядрі взаємно компенсують один одного, розташовуючись антипаралельно. В усіх парнопарних ядер (тобто ядер із парним числом протонів і парним числом нейтронів) спін дорівнює нулю.

§ 108 Дефект маси й енергія зв'язку ядра. Залежність питомої енергії зв'язку ядра від масового числа

1 Маса ядра $m_{\text{я}}$ менша від суми мас частинок, що входять до його склад. Цей факт відображає та обставина, що для того щоб розщепити ядро на протони й нейтрони, із яких це ядро складається, необхідно витратити деяку енергію. Цю енергію називають енергією зв'язку ядра.

Енергія зв'язку ядра чисельно дорівнює роботі, яку необхідно витратити, щоб розщепити ядро на нуклони, із яких це ядро складається (кінетична енергія нуклонів при цьому повинна дорівнювати нулю).

Енергія спокою частинки пов'язана з її масою відомим зі спеціальної теорії відносності співвідношенням

$$E_0 = mc^2.$$

Отже, енергія ядра, що перебуває в стані спокою, менша від сумарної енергії незв'язаних нуклонів, які перебувають у стані спокою, на величину

$$E_{\text{зв}} = c^2 \left[(Zm_p + (A - Z)m_n) - m_{\text{я}} \right]. \quad (108.1)$$

Ця величина і є енергією зв'язку нуклонів у ядрі.

Рівність (108.1) практично не зміниться, коли замінити масу протона m_p масою атома водню m_H , а масу ядра $m_{\text{я}}$ – масою атома m_a . Дійсно, якщо знехтувати порівняно незначною енергією зв'язку електронів з ядрами, зазначена заміна буде означати додавання до зменшуваного й від'ємника однакової величини, що дорівнює Zm_e . Отже, формулі (108.1) можна надати вигляду

$$E_{\text{зв}} = c^2 \left[(Zm_H + (A - Z)m_n) - m_a \right]. \quad (108.2)$$

Ця формула є більш зручною, ніж (108.1), тому що в таблицях зазвичай подають не маси ядер, а маси атомів.

*Енергію зв'язку, що припадає на один нуклон, тобто $E_{\text{зв}} / A$, називають **питомою енергією зв'язку нуклонів у ядрі**.*

Величину

$$\Delta m = \left[(Zm_p + (A - Z)m_n) - m_{\text{я}} \right] \quad (108.3)$$

*називають **дефектом маси ядра***. Дефект маси пов'язаний з енергією зв'язку співвідношенням

$$E_{\text{зв}} = \Delta mc^2.$$

Зрозуміло, що енергія зв'язку ядра є мірою його міцності. Чим вища енергія зв'язку ядра, тим міцнішим є ядро.

2 Розглянемо залежність питомої енергії зв'язку $E_{\text{зв}} / A$ від масового числа A (див. рис. 108.1). Бачимо, що найміцніше сильно зв'язані нуклони в ядрах, масові числа яких мають порядок 50–60 (тобто для елементів від Cr до Zn). Енергія зв'язку для цих ядер досягає 8,7 МеВ/нуклон. Зі збільшенням A питома енергія зв'язку поступово зменшується; для найважчого природного елемента – урану – вона становить 7,5 МеВ/нуклон. Завдяки такій залежності питомої енергії зв'язку від масового числа стають *енергетично можливими такі два процеси:*

- 1) поділ важких ядер на більш легкі;
- 2) злиття (синтез) легких ядер в одне.

Обидва процеси повинні супроводжуватися виділенням великої кількості енергії. Так, наприклад, поділ одного ядра з масовим числом $A = 240$ (питома енергія зв'язку дорівнює 7,5 МеВ) на два ядра з масовими числами $A = 120$ (питома енергія зв'язку дорівнює 8,5 МеВ)

привело б до вивільнення енергії в 240 MeV. Злиття двох ядер важкого водню ${}^2_1\text{H}$ у ядро гелію ${}^4_2\text{H}$ привело б до виділення енергії, що дорівнює 24 MeV. Для порівняння зазначимо, що під час з'єднання одного атома вуглецю з двома атомами кисню (згоряння вугілля до CO_2) виділяється енергія, що дорівнює ~ 5 eV.

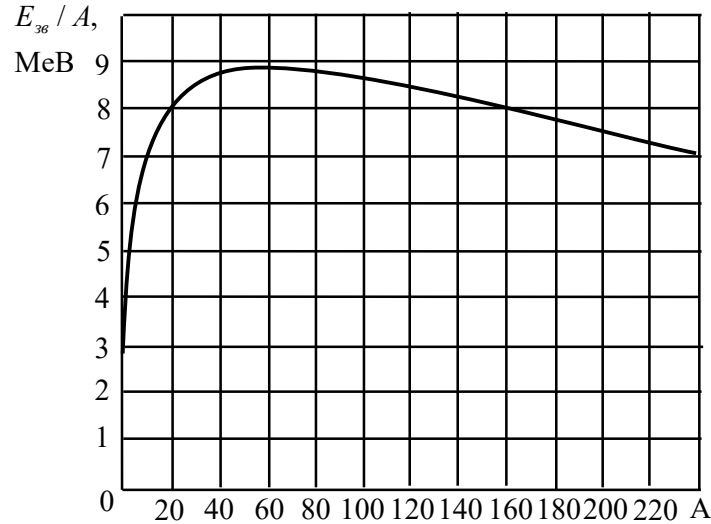


Рисунок 108.1 – Залежність енергії зв'язку, що припадає на один нуклон, від масового числа

Ядра зі значеннями масового числа A від 50 до 60 є енергетично найбільш вигідними. У зв'язку із цим виникає запитання: чому ядра з іншими значеннями A виявляються стабільними? Відповідь полягає в такому. Для того щоб розділитися на кілька частин, важке ядро повинне пройти через ряд проміжних станів, енергія яких перевищує енергію основного стану ядра. Отже, для процесу поділу ядра потрібна додаткова енергія (енергія активації), що потім повертається назад, додаючись до енергії, що виділяється під час поділу за рахунок зміни енергії зв'язку. У звичайних умовах ядро не має можливості одержати енергію активації, унаслідок чого у важких ядрах не відбувається спонтанного поділу. Енергія активації може бути передана важкому ядру захопленим ним додатковим нейтроном. Процес поділу ядер урану або плутонію під дією захоплених ядрами нейтронів лежить в основі дії ядерних реакторів і звичайної атомної бомби.

Для злиття легких ядер в одне вони повинні підійти один до одного на дуже малу відстань ($\sim 10^{-15}$ м). Такому зближенню ядер перешкоджає кулонівське відштовхування між ними. Для того щоб перебороти це відштовхування, ядра повинні рухатися з величезними швидкостями, що відповідають температурам приблизно кількох сотень мільйонів кельвін. Через це процес синтезу легких ядер називають **термоядерною реакцією**. Термоядерні реакції проходять у надрах Сонця й зірок. У земних умовах поки що були здійснені некеровані термоядерні реакції під час вибухів водневих бомб. Учені ряду країн наполегливо працюють над пошуком способів здійснення керованого термоядерного синтезу.

§ 109 Краплинна та оболонкова моделі ядра

Під час спроб побудови теорії ядра стикаються з такими труднощами: 1) недостатністю знань про сили, що діють між нуклонами; 2) величезною громіздкістю квантової задачі багатьох тіл (ядро з масовим числом A є системою з A тіл). Ці труднощі змушують іти шляхом створення ядерних моделей, що дозволяють описувати за допомогою порівняно простих математичних засобів певну сукупність властивостей ядра. Жодна з

подібних моделей не може дати вичерпного опису ядра. Тому доводиться користуватися декількома моделями, кожна з яких описує свою сукупність властивостей ядра й своє коло явищ. У кожній моделі містяться довільні параметри, значення яких підбираються так, щоб одержати узгодженість з експериментом.

Обмежимося коротким викладенням лише двох моделей: краплинної та оболонкової.

1 Краплинна модель. Ця модель була запропонована Я. І. Френкелем в 1939 р. і розвинена потім Н. Бором та іншими вченими. Френкель звернув увагу на подібність атомного ядра із крапелькою рідини, яка полягає в тому, що в обох випадках сили, які діють між складовими частинками (молекулами в рідині й нуклонами в ядрі), є короткодійними. Крім того, практично однакова густина речовини в різних ядрах говорить про вкрай малу можливість стиснення ядерної речовини. Настільки ж мала можливість стиснення є і в рідинах. Зазначена подібність дала підставу вважати ядро подібним до зарядженої крапельки рідини.

Краплинна модель дозволила вивести напівемпіричну формулу для енергії зв'язку частинок у ядрі. Крім того, ця модель допомогла пояснити багато інших явищ, зокрема процес поділу важких ядер.

2 Оболонкова модель. Оболонкова модель ядра була розвинена Марією Гепперт-Майєр та іншими вченими. У цій моделі нуклони вважають такими, що рухаються незалежно один від одного в усередненому центрально-симетричному полі. Відповідно до такого руху виникають дискретні енергетичні рівні (подібні до рівнів атома), що заповнюються нуклонами з урахуванням принципу Паулі (нагадаємо, що спин нуклонів дорівнює $1/2$). Ці рівні групуються в оболонки, у кожній із яких може знаходитися певна кількість нуклонів. Повністю заповнена оболонка утворює особливо стійке утворення.

Відповідно до дослідів особливо стійкими виявляються ядра, у яких число протонів, або нейтронів (або обоє ці числа) дорівнює

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.$$

Ці числа одержали назву магічних. Ядра, у яких число протонів Z або число нейтронів N є магічним (тобто особливо стійкі ядра), також називають магічними.

§ 110 Ядерні сили

1 Величезна енергія зв'язку нуклонів у ядрі свідчить про те, що між нуклонами існує дуже інтенсивна взаємодія, що має характер притягання. Ця взаємодія втримує нуклони на відстанях приблизно 10^{-15} м один від одного, незважаючи на потужне кулонівське відштовхування між протонами. Ядерна взаємодія між нуклонами одержала назву **сильної взаємодії**. Її можна описати за допомогою **поля ядерних сил**. Перелічимо **характерні властивості ядерних сил**.

1 Ядерні сили є **короткодійними**. Їх радіус дії має порядок 10^{-15} м. На відстанях, істотно менших за 10^{-15} м, притягання нуклонів змінюється відштовхуванням.

2 Сильна взаємодія не залежить від заряду нуклонів. Ядерні сили, що діють між двома протонами, протоном і нейтроном і двома нейтронами, мають однакову величину. Цю властивість називають **зарядовою незалежністю ядерних сил**.

3 Ядерні сили залежать від **взаємної орієнтації спінів нуклонів**. Так, наприклад, нейтрон і протон утримуються разом, утворюючи ядро важкого водню дейтрон, лише у тому разі, коли їх спіни паралельні один одному.

4 Ядерні сили не є **центральною**. Їх не можна уявити спрямованими вздовж прямої, що з'єднує центри нуклонів, що взаємодіють. Нецентральність ядерних сил впливає, зокрема, з того факту, що вони залежать від орієнтації спінів нуклонів.

5 Ядерні сили мають **властивість насичення** (це означає, що кожний нуклон у ядрі взаємодіє з обмеженою кількістю нуклонів). Насичення проявляється в тому, що питома енергія зв'язку нуклонів у ядрі під час збільшення числа нуклонів не зростає, а залишається

приблизно сталою. Крім того, про насичення ядерних сил свідчить також пропорційність об'єму ядра кількості нуклонів, що утворюють його.

За сучасними уявленнями сильна взаємодія обумовлена тим, що нуклони віртуально обмінюються частинками, що одержали назву мезонів.

§ 111 Закон радіоактивного розпаду. Середній час життя, період піврозпаду, активність радіоактивної речовини. Види радіоактивного розпаду

1 Радіоактивністю (радіоактивним розпадом) називають самочинне перетворення одних ядер атомів на інші, що супроводжується випромінюванням елементарних частинок.

Радіоактивність, яка спостерігається в існуючих у природних умовах ядрах, називають **природною**. Радіоактивність ядер, одержаних за допомогою ядерних реакцій, називають **штучною**. Між штучною й природною радіоактивністю немає принципової різниці. Процес радіоактивного перетворення в обох випадках описують однаковими законами.

2 Закон радіоактивного розпаду. Окремі ядра під час радіоактивного перетворення розпадаються незалежно один від одного. Тому можна вважати, що кількість ядер dN , яка розпадається за малий проміжок часу dt , є пропорційною як числу ядер N , так і проміжку часу dt (це є результат експерименту):

$$dN = -\lambda N dt . \quad (111.1)$$

Тут λ – характерна для радіоактивної речовини стала, яка називають **сталою розпаду**. Знак мінус узятий для того, щоб можна було розглядати dN як збільшення числа ядер N , які не розпалися.

Інтегрування виразу (111.1) приводить до співвідношення

$$\boxed{N = N_0 \exp(-\lambda t)}, \quad (111.2)$$

де N_0 – кількість ядер у початковий момент; N – кількість атомів, що не розпалися, на момент часу t . Формула (111.2) виражає **закон радіоактивного розпаду**. Цей закон досить простий: кількість ядер, які не розпалися, зменшується експоненціально.

Кількість ядер, що розпалися за час t , визначається виразом

$$N_0 - N = N_0 [1 - \exp(-\lambda t)] . \quad (111.3)$$

Час, за який розпадається половина початкової кількості ядер, називають **періодом піврозпаду** T . Його легко визначити з умови

$$N_0 / 2 = N_0 \exp(-\lambda T),$$

звідси

$$\boxed{T = \ln 2 / \lambda = 0,693 / \lambda}. \quad (111.4)$$

Період піврозпаду для відомих на цей час радіоактивних ядер знаходиться в межах від $3 \cdot 10^{-7}$ с до $5 \cdot 10^{15}$ років.

3 Знайдемо середній час життя радіоактивного ядра. Кількість ядер, що розпадаються за проміжок часу від t до $t+dt$, визначається модулем виразу (111.1): $|dN(t)| = \lambda N(t) dt$. Час життя кожного із цих ядер дорівнює t . Отже, суму часу життя всіх ядер N_0 одержуємо методом інтегрування виразу $t |dN(t)|$. Розділивши цю суму на вихідне число ядер N_0 , одержуємо **середній час життя** τ радіоактивного ядра

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t |dN(t)| dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N(t) dt .$$

Підставимо сюди вирази (111.2) для $N(t)$ і одержимо

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N_0 \exp(-\lambda t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

(тут перейшли до змінної $x = \lambda t$ й виконали інтегрування частинами). Отже, *середнім часом життя є величина, зворотна сталій розпаду λ*

$$\boxed{\tau = 1/\lambda}. \quad (111.5)$$

Порівняння з (111.4) показує, що період піврозпаду T відрізняється від τ числовим множником, що дорівнює $\ln 2$.

4 Активністю радіоактивного препарату називають число розпадів, що відбуваються в препараті за одиницю часу. Якщо за час dt розпадається $dN_{\text{розп}}$ ядер, то активність дорівнює $dN_{\text{розп}}/dt$. Згідно з (111.1)

$$dN_{\text{розп}} = |dN| = \lambda N dt.$$

Звідси випливає, що *активність радіоактивного препарату дорівнює*

$$\boxed{A = dN_{\text{розп}} / dt = \lambda N dt / dt = \lambda N},$$

тобто добутку сталої розпаду на кількість у препараті ядер, які не розпалися.

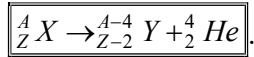
У системі СІ одиницею активності є беккерель (Бк), що дорівнює одному розпаду за 1 секунду. Допускається застосування внесистемних одиниць разп/хв і кюрі (Ки). Одиницю активності, що називають кюрі, визначають як активність такого препарату, у якому відбувається $3,700 \cdot 10^{10}$ актів розпаду за 1 секунду. Використовують дробові одиниці (мілікюрі, мікрокюрі тощо), а також кратні одиниці (кілокіюрі, мегакіюрі).

5 Часто буває, що ядра, які виникають у результаті радіоактивного перетворення, зі свого часу виявляються радіоактивними й розпадаються зі швидкістю, яка характеризується сталою розпаду λ' . Нові продукти розпаду також можуть виявитися радіоактивними тощо. У результаті виникає цілий ряд радіоактивних перетворень. У природі існує *три радіоактивних ряди* (або *сімейства*), родоначальниками яких є ^{238}U (ряд урану), ^{232}Th (ряд торію) і ^{235}U (ряд актиноурану). Кінцевими продуктами в усіх трьох випадках є ізотопи свинцю: у першому – ^{206}Pb , у другому – ^{208}Pb й, нарешті, у третьому – ^{207}Pb .

Природна радіоактивність була відкрита в 1896 р. Беккерелем. Великий внесок у вивчення радіоактивних речовин зробили П'єр Кюрі й Склодовська-Кюрі. Ними було виявлено три з п'яти *видів радіоактивного розпаду*. В одному з них, що одержав назву α -*розпад*, випромінюються α -частинки, які відхиляються під дією магнітного поля в такий самий бік, куди відхилявся б потік додатно заряджених частинок. У другому розпаді, який одержав назву β -*розпад*, випромінюються β -частинки, які відхиляються магнітним полем у протилежний бік, тобто так, як відхилявся б потік від'ємно заряджених частинок. У третьому розпаді, що має назву γ -*розпад*, випромінюються γ -частинки, які ніяк не реагують на дію магнітного поля. Із часом з'ясувалося, що γ -промені є електромагнітним випромінюванням досить малої довжини хвилі (від 10^{-4} нм до 0,1 нм), β -промені є потоком електронів, α -промені – потоком ядер гелію ^4_2He . Пізніше було відкрито ще два *види радіоактивного розпаду*: *спонтанний поділ важких ядер та протонну радіоактивність*.

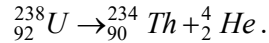
§ 112 Альфа-розпад. Енергія α -частинок. Теорія Гамова – Герні – Кондона

1 Альфа-розпад. *Альфа-розпадом називають самочинне перетворення одних ядер атомів на інші, що супроводжується випромінюванням α -частинок, тобто ядер гелію ^4_2He .* Альфа-розпад проходить за такою схемою:



Буквою X позначений хімічний символ (материнського) ядра, яке розпадається, буквою Y – хімічний символ (дочірнього) ядра, що утворилося. Альфа-розпад здебільшого супроводжується випромінюванням дочірнім ядром γ -променів.

Прикладом може бути розпад ізотопу урану ${}^{238}\text{U}$:



Швидкості, з якими α -частинки (тобто ядра ${}^4_2\text{He}$) вилітають із ядра, яке розпалося, дуже великі (приблизно 10^7 м/с; кінетична енергія дорівнює декілька мегаелектронвольт). Пролітаючи через речовину, α -частинка поступово втрачає свою енергію, іонізуючи молекул речовини, і, зрештою, зупиняється. На утворення однієї пари іонів у повітрі витрачається в середньому 35 еВ. Отже, α -частинка утворює на своєму шляху приблизно 10^5 пар іонів. Природно, що чим більша густина речовини, тим менший пробіг α -частинок до зупинки. Так, у повітрі за нормального тиску пробіг становить кілька сантиметрів, у твердій речовині пробіг має значення приблизно 0,01 мм (α -частинки повністю затримуються звичайним аркушем паперу).

Кінетична енергія α -частинок виникає за рахунок надлишку енергії спокою материнського ядра над сумарною енергією спокою дочірнього ядра й α -частинки. Енергії α -частинок, що випромінюються даною радіоактивною речовиною, виявляються точно визначеними. Здебільшого радіоактивна речовина випускає кілька груп α -частинок з близькою, але різною енергією. Це обумовлено тим, що дочірнє ядро може виникати не лише в нормальному, але й у збуджених станах. Зазвичай, дочірнє ядро переходить у нормальний або більш низький збуджений стан, випромінюючи γ -фотон.

2 Енергія α -частинок. Теорія Гамова – Герні – Кондона. Зазначимо тепер парадокс, пояснити який класична фізика не змогла. Наприклад, уран ${}^{238}\text{U}$ випромінює α -частинки з енергією 4,2 МеВ, а радій ${}^{226}\text{Ra}$ – з енергією 4,8 МеВ. Здавалося б, коли обстріляти ці ядра α -частинками з такими самими енергіями, то вони повинні були б попадати всередину ядра. А експеримент показав, що цього не відбувається. Більше того, якщо обстрілювати ці ядра α -частинками з енергією 8,8 МеВ, то такі α -частинки також усередину ядра не попадають. Це говорить про те, що висота потенціального бар'єра U_{\max} ядер набагато вища за енергію α -частинок, які випромінюються. Тоді стає незрозумілим, як відбувається випромінювання α -частинок з енергіями, що є набагато меншими за потенціальну енергію U_{\max} ядра, із якого вони вилітають?

Цей парадокс був вирішений незалежно один від одного Г. А. Гамовим, з одного боку, й Герні та Кондоном – з іншого. Для спрощення введемо припущення, що α -частинки вже існують усередині атомних ядер. За такої ідеалізації материнське ядро складається з дочірнього ядра й α -частинки. Це, ймовірно, не відповідає дійсності. Швидше за все, α -частинка утворюється із протонів і нейтронів перед вильотом із ядра. Проте вищезазначена ідеалізація здебільшого приводить до правильних результатів.

Розглянемо поведінку потенціальної енергії U взаємодії α -частинки й дочірнього ядра залежно від відстані між ними r . На порівняно великих відстанях, де практично перестають діяти ядерні сили, залишається лише кулонівське відштовхування й

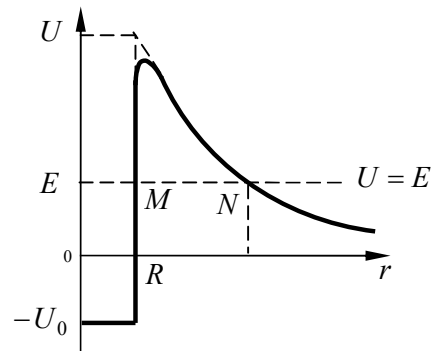


Рисунок 112.1 – Залежність потенціальної енергії взаємодії α -частинки й дочірнього ядра від відстані r в моделі Гамова – Герні – Кондона

потенціальну функція U подають формулою $U = 2Ze^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$, де Ze – заряд дочірнього ядра, а $2e$ – заряд α -частинки. Кулонівське відштовхування на малих відстанях від ядра повинне перейти в притягання, обумовлене ядерними силами, інакше α -частинки в ядрі не могли б утримуватися (притягання відповідає від’ємна потенціальна енергія). Тому залежність потенціальної енергії $U(r)$ від відстані r можна подати так, як це зображено на рисунку 112.1. Аналізуючи залежність $U(r)$, бачимо, для того щоб α -частинка вилетіла з ядра, її потрібно подолати потенціальний бар’єр. Тоді суть парадоксу можна сформулювати так: як α -частинка з енергією E , меншою за висоту потенціального бар’єра U_{\max} , може пройти через нього?

Цей парадокс можна пояснити за допомогою квантової механіки й уявлень про α -розпад як про тунельний ефект. З погляду квантової механіки є деяка ймовірність того, що α -частинка маючи енергію, меншу за висоту потенціального бар’єра, пройде крізь цей бар’єр. *Теорія α -розпаду Гамова – Герні – Кондона, що ґрунтується на уявленні про α -розпад як про тунельний ефект, приводить до результатів, що добре узгоджуються з дослідом.*

§ 113 Бета-розпад. Види бета-розпаду. Енергія β -частинок. Теорія Фермі. Слабка взаємодія

1 Бета-розпад. Види бета-розпаду. *Бета-розпад є самочинним процесом, у якому нестабільне ядро ${}^A_Z X$ перетворюється на ядро-ізобар ${}^A_{Z+1} X$ або ${}^A_{Z-1} X$. Кінцевим результатом цього процесу є перетворення в ядрі нейтрона на протон або протона на нейтрон. Можна сказати, що β -розпад є не внутрішньоядерним, а внутрішньонуклонним процесом. Під час β -перетворення відбуваються більш глибокі зміни речовини, ніж у разі α -розпаду.*

Розрізняють три види β -розпаду:

1) **електронний β^- -розпад**, у якому ядро випромінює електрон, тому зарядове число Z збільшується на одиницю;

2) **позитронний β^+ -розпад**, у якому ядро випускає позитрон (частинку, яка відрізняється від електрона лише тим, що її заряд є додатним) і з цієї причини його зарядове число зменшується на одиницю;

3) **електронне захоплення (e -захоплення)**, у якому ядро поглинає один з електронів електронної оболонки, тому зарядове число зменшується на одиницю. Здебільшого, електрон поглинається з K -оболонки атому, оскільки ця оболонка є найближчою до ядра. Електрон може поглинатися й з L - або M -оболонки тощо, але ці процеси менш імовірні.

2 Енергія β -частинок. Теорія Фермі. Слабка взаємодія. Енергії α - і β -частинок, що випромінюються радіоактивними речовинами, можна виміряти методом відхилення їх в електромагнітних полях, оскільки ці частинки заряджені. Такі виміри показали, що кожна α -радіоактивна речовина випромінює α -частинки цілком певної, визначеної енергії, характерної саме цій речовині. Цей результат є цілком природнім. Здавалося б такі властивості повинні мати і β -частинки. Тобто енергія β -частинок повинна мати визначене значення, проте експеримент показав зовсім інший результат: *випромінюються β -частинки з різною енергією, спектр їх енергій є*

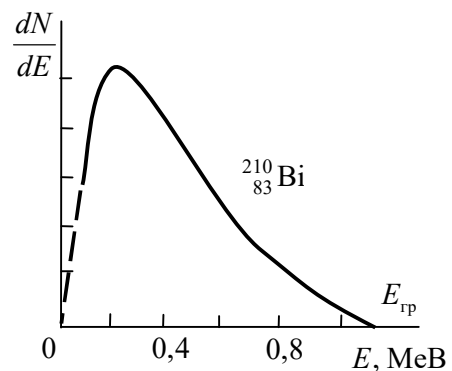


Рисунок 113.1 – β -спектр, що виникає під час розпаду ${}^{210}_{83} \text{Bi}$.

суцільним.

Виявилося, що β -радіоактивні атоми одного й того самого сорту випромінюють електрони різних енергій, починаючи від нуля й закінчуючи деяким граничним значенням $E_{\text{гр}}$, що є характерним для розглянутої речовини. Це граничне значення називають верхньою межею β -спектра. Для прикладу на рисунку 113.1 наведений β -спектр (залежність кількості β -частинок в одиничному енергетичному інтервалі dN/dE від енергії частинок E), що виникає під час розпаду ${}^{210}_{83}\text{Bi}$. *Поставте запитання: чому спектр енергій електронів під час β -розпаду є суцільним, а не дискретним?*

Пояснив це протиріччя Паулі. Він висунув гіпотезу, яка пізніше була доведена експериментально, що під час β -розпаду разом з електроном вилітає ще якась невідома нейтральна частинка, що не реєструється приладами. У рідкісних випадках вся енергія, яка вивільняється в радіоактивному перетворенні, переноситься електроном. Така енергія відповідає верхній межі електронного β -спектра. Підтвердженням цього може бути дослідний факт, що зазначена межа збігається з різницею енергій материнського й дочірнього ядер. В інших рідкісних випадках уся енергія переноситься гіпотетичною частинкою. Але найчастіше енергія переноситься й цією частинкою, і електроном. Розподіл енергії між ними має випадковий характер, чим і можна пояснити форму β -спектра. Пізніше Фермі назвав цю незаряджену частинку **нейтрино** (що в перекладі з італійського означає «маленький нейтрончик»). Маса нейтрино, якщо така є в цій частинці, повинна бути меншою від маси електрона.

На основі гіпотези Паулі в 1933 р. Фермі побудував кількісну теорію β -розпаду. Ця теорія досить складна. *Основна ідея Фермі полягає в тому, що β -частинки й нейтрино не існують в атомних ядрах, а народжуються в них у процесі β -розпаду. Також для пояснення β -розпаду Фермі потрібно було ввести гіпотезу про існування особливого типу короткодійних сил, які й викликають у ядрі процеси перетворення нейтрона на протон або протона на нейтрон із випромінюванням β -частинок і нейтрино в обох випадках. Відповідні сили називають **слабкими силами**, а взаємодії, що відбувались під їх дією, – **слабкими взаємодіями**.* Щоб мати уявлення про величину слабких взаємодій, зазначимо, що теоретичні розрахунки й подальші дослідні вимірювання показали, що середня довжина вільного пробігу нейтрино з енергією 1 МеВ у воді дорівнює приблизно 10^{21} см (100 світлових років). Такі нейтрино вільно проходять Сонце, а тим більше – земну кулю. Радіус дії слабких взаємодій не перевищує 10^{-15} см.

Потрібно також зазначити, що постульовану Паулі частинку, що з'являється під час β^- -розпаду разом з електроном, пізніше стали називати електронним антинейтрино ($\tilde{\nu}_e$), а частинку, що з'являється під час β^+ -розпаду разом із позитроном, – електронним нейтрино (ν_e). Щоб задовольнити закон збереження моменту імпульсу, потрібно припустити, що спіни $\tilde{\nu}_e$ і ν_e дорівнюють 1/2.

3 У зв'язку з вищевикладеним три β -розпади можна подати у вигляді таких схем:

1 схема β^- -розпаду, або електронного розпаду:



Приклад: ${}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + {}^0_{-1} e + \tilde{\nu}_e$;

2 Схема β^+ -розпаду, або позитронного розпаду:



Приклад: ${}^{13}_7\text{N} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + {}^0_{+1} e + \nu_e$;

3 схема електронного захоплення:

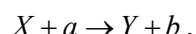


Приклад: ${}^{40}_{19} K + {}^0_{-1} e \rightarrow {}^{40}_{18} Ar + \nu_e$.

§ 114 Ядерні реакції. Енергія реакції. Гранична кінетична енергія. Компаунд-ядро. Реакція зриву. Реакція захоплення. Ефективний переріз ядерної реакції

1 Ядерною реакцією називають процес взаємодії атомного ядра з елементарною частинкою або з іншим ядром, що приводить до перетворення ядра (або ядер). Взаємодія реагуючих частинок виникає під час зближення їх до відстаней приблизно 10^{-15} м завдяки дії ядерних сил.

Найпоширенішим видом ядерної реакції є взаємодія легкої частинки a з ядром X , у результаті якого утвориться легка частинка b і ядро Y :



Рівняння таких реакцій записують скорочено у вигляді



У дужках зазначають легкі частинки, що беруть участь у реакції, спочатку – вхідну, потім – кінцеву.

Як легкі частинки a й b можуть фігурувати нейтрон (n), протон (p), дейтрон (d), α -частинка (α) й γ -фотон (γ).

Під час розгляду ядерних реакцій, як і інших процесів, обговорюваних в ядерній фізиці, використовують такі закони збереження:

1) закон збереження енергії; 2) закон збереження імпульсу; 3) закон збереження моменту імпульсу; 4) закон збереження електричного заряду. Також використовують й інші закони збереження.

2 Ядерні реакції можуть супроводжуватися як виділенням, так і поглинанням енергії. Кількість енергії, що виділяється, під час ядерної реакції називають **енергією реакції**. Вона визначається різницею мас вхідних і кінцевих ядер:

$$Q = c^2 \left(\sum_{i=1}^n m_i - \sum_{k=1}^{n'} m'_k \right), \quad (114.2)$$

де m_i – маси спокою частинок, що брали участь у реакції; m'_k – маси спокою частинок, що виникли в результаті реакції. Якщо сума мас ядер, що утворюються, перевищує суму мас вхідних ядер, реакція проходить із поглинанням енергії й енергія реакції буде від'ємною ($Q < 0$). Таку реакцію називають **ендотермічною**. Якщо сума мас ядер, що утворюються, менша від суми мас вхідних ядер, реакція йде з виділенням енергії, а отже, енергія реакції буде додатною ($Q > 0$). Таку реакцію називають **екзотермічною**. Енергія реакції показує, наскільки збільшується (зменшується) кінетична енергія частинок після проходження ядерної реакції.

3 Екзотермічна реакція може проходити за малої вхідної кінетичної енергії частинок, які зіштовхуються. Навпаки, ендотермічна реакція може проходити лише тоді, коли кінетична енергія частинок, що зіштовхуються, перевершує деяке мінімальне значення. Це мінімальне значення кінетичної енергії $T_{пор}$, починаючи з якого ендотермічна реакція може проходити, називають **порогом реакції**. Істотно зазначити, що поріг реакції вимірюється завжди в лабораторній системі координат, у якій частинка-мішень перебуває в спокої.

Візьмемо, наприклад, частинку масою m_1 , що налітає зі швидкістю v на нерухому частинку масою m_2 . Розглядаємо нерелятивістський випадок. Вважаємо, що зіткнення цих

частинок непружне, у результаті якого частина кінетичної енергії переходить у внутрішню. Для того щоб ендотермічна ядерна реакція відбулася необхідно, щоб частина кінетичної енергії, що переходить у внутрішню, була не меншою від модуля енергії реакції $|Q|$. З'ясуємо, якою повинна при цьому бути мінімальна кінетична енергія частинки, що налітає (порогова кінетична енергія). Для вирішення проблеми використаємо закон збереження імпульсу й закон збереження енергії

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u, \\ \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + |Q|. \quad (114.3)$$

Тут u – швидкість частинок після непружного удару. Із першого рівняння (114.3) знаходимо u , підставляємо в друге рівняння й одержуємо

$$\frac{m_1 v^2}{2} \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = |Q|,$$

або

$$T_{\text{пор}} = \frac{m_1 v^2}{2} = |Q| / \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = |Q| \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right). \quad (114.4)$$

Отже, для нерелятивістського випадку порогову кінетичну енергію визначають співвідношенням (114.4). У релятивістському випадку, порогова кінетична енергія має вигляд

$$T_{\text{пор}} = |Q| \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{|Q|}{2m_2 c^2} \right). \quad (114.5)$$

4 У 1936 р. Н. Бор установив, що реакції, викликані не дуже швидкими частинками, проходять у два етапи. Перший етап полягає в захопленні частинки a , що наблизилася до ядра X , і в утворенні проміжного ядра Π , яке називають **компаунд-ядром**. Енергія, привнесена частинкою a (вона складається з кінетичної енергії частинки й енергії її зв'язку з ядром), за дуже короткий час перерозподіляється між всіма нуклонами компаунд-ядра, у результаті чого воно виявляється в збудженому стані. На другому етапі компаунд-ядро випускає частинку b . Символічно таке проходження реакції у два етапи записують так:



Якщо випущена частинка тотожна із захопленою ($b \equiv a$), процес (114.6) називають **розсіюванням**. У разі, коли енергія частинки b дорівнює енергії частинки a ($E_b = E_a$), розсіювання є **пружним**, у протилежному разі (тобто при $E_b \neq E_a$) – **непружним**. Ядерна реакція відбувається, якщо частинка b не тотожна з a .

Проміжок часу τ_y , необхідний нуклону з енергією приблизно 1 МеВ (що відповідає швидкості нуклона приблизно 10^7 м/с) для того, щоб пройти відстань, яка дорівнює діаметру ядра ($\sim 10^{-14}$ м), називають **ядерним часом** (або **ядерним часом прольоту**). Це час за порядком величини дорівнює

$$\tau_y \sim \frac{10^{-14} \text{ м}}{10^7 \text{ м/с}} = 10^{-21} \text{ с}. \quad (114.7)$$

Середній час життя компаунд-ядра (дорівнює $10^{-14} - 10^{-12}$ с) на багато порядків перевищує ядерний час прольоту τ_y . Отже, розпад компаунд-ядра (тобто випромінювання ним частинки b) являє собою процес, який не залежить від першого етапу реакції, що полягає в захопленні частинки a (компаунд-ядро ніби «забуває» про спосіб свого

утворення). Одне й те саме компаунд-ядро може розпадатися різними способами, причому їх характер і їх відносна ймовірність не залежать від способу утворення компаунд-ядра.

5 Реакції, викликані швидкими нуклонами й дейтронами, проходять без утворення проміжного ядра. Такі реакції називають **прямими**. Типовою прямою ядерною реакцією є **реакція зриву**, що спостерігається під час нецентрального зіткнення дейтрона з ядром. У разі таких зіткнень один із нуклонів дейтрона може опинитись у зоні дії ядерних сил і буде захоплений ядром, у той час, як інший нуклон залишиться поза зоною дії ядерних сил і пролетить повз ядро. Символічно цю реакцію можна подати у вигляді (d, p) або (d, n) .

Зворотною до реакції зриву є **реакція підхоплення** – нуклон, що налетів (p або n) відколнує від ядра один із нуклонів (n або p), перетворюючись при цьому на дейтрон: (n, d) або (p, d) .

6 У ядерній фізиці ймовірність взаємодії характеризують за допомогою **ефективного перерізу** σ . Зміст цієї величини полягає в такому: нехай потік частинок, наприклад нейтронів, попадає на мішень, настільки тонку, що ядра мішені не перекривають один одного (рис. 114.1; нагадаємо, що потоком частинок називають кількість частинок, які пролітають через деяку поверхню за одиницю часу). Якщо б ядра були твердими кульками з поперечним перерізом σ , а частинки, що падають, – твердими кульками з дуже малим перерізом, то ймовірність того, що частинка, яка падає, зачепить одне з ядер мішені, дорівнювала б

$$P = \frac{S_{\text{яд}}}{S} = \frac{\sigma n V}{S} = \frac{\sigma n S \delta}{S} = \sigma n \delta,$$

де n – концентрація ядер, тобто їх кількість в одиниці об'єму мішені; δ – товщина мішені ($\sigma n \delta$ визначає відносну частинку площі мішені, перекриту ядрами-кульками).

Нехай на мішень падає перпендикулярно до її поверхні потік частинок N . Тоді кількість частинок, що мають за одиницю часу зіткнення з ядрами мішені, ΔN визначають формулою

$$\Delta N = NP = N\sigma n \delta. \quad (114.8)$$

Отже, визначивши відносну кількість частинок, що має зіткнення, $\Delta N / N$, можна було б обчислити поперечний переріз ядра за формулою

$$\sigma = \Delta N / N n \delta. \quad (114.9)$$

У дійсності ні ядра мішені, ні частинки, що падають на неї, не є твердими кульками. Проте за аналогією з моделлю кульок, що зіштовхуються, для характеристики ймовірності взаємодії використовують величину σ , обумовлену формулою (114.9), у якій під ΔN мають на увазі не кількість частинок, що зіткнулися, а кількість частинок, що мали взаємодію з ядрами мішені. Цю величину й називають **ефективним перерізом** для цієї реакції (або процесу).

Ефективні перерізи ядерних процесів виражають в одиницях, що одержали назву **барн**:

$$1 \text{ барн} = 10^{-28} \text{ м}^2 = 10^{-10} \text{ нм}^2. \quad (114.10)$$

7 Уперше ядерна реакція була проведена Резерфордом у 1919 р. Під час опромінення азоту α -частинками деякі ядра азоту перетворювалися на ядра кисню, випускаючи при цьому протон. Рівняння цієї реакції має вигляд

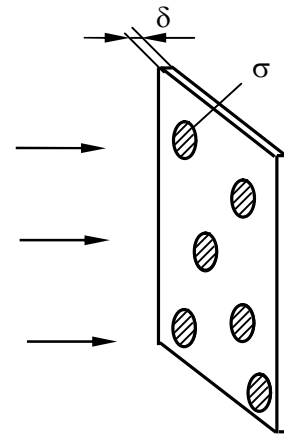
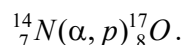
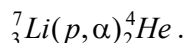


Рисунок 114.1 – До визначення ефективного перерізу реакції (або процесу)

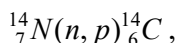
Резерфорд скористався для розщеплення атомного ядра природними снарядами – α -частинками. Перша ядерна реакція, викликана штучно прискореними частинками, була здійснена Кокрофтом та Уолтоном в 1932 р. За допомогою так званого множника напруги вони прискорювали протони до енергії приблизно 0,8 MeV і спостерігали реакцію



Відзначимо, у цьому ж році таку ядерну реакцію здійснили в Українському фізико-технічному інституті (м. Харків). Далі з розвитком техніки прискорення заряджених частинок збільшувалась кількість ядерних перетворень, здійснюваних штучним методом.

Найбільше значення мають реакції, викликані нейтронами. На відміну від заряджених частинок (p, d, α) нейтрони не зазнають кулонівського відштовхування внаслідок чого вони можуть проникати в ядра, маючи досить малу енергію. Ефективні перерізи реакцій звичайно зростають під час зменшення енергії нейтронів. Це можна пояснити тим, що чим менша швидкість нейтрона, тим більший час, який він проводить у сфері дії ядерних сил, пролітаючи поблизу ядра, а отже, тим більша ймовірність його захоплення. Проте часто спостерігають ситуації, коли переріз захоплення нейтронів має різко виражений максимум для нейтронів певної енергії E_r . Як приклад, на рисунку 114.2 наведена крива залежності перерізу захоплення нейтрона ядром ${}^{238}\text{U}$ від енергії нейтрона E . Масштаб уздовж обох осей – логарифмічний. На рисунку видно, що при $E = E_r = 7 \text{ eV}$ переріз захоплення різко зростає, досягаючи 23 000 барн. Вид кривої свідчить про те, що явище має резонансний характер. Таке резонансне поглинання можливе тоді, коли енергія, привнесена нейтроном у компаунд-ядро, дійсно дорівнює тій енергії, що необхідна для переведення компаунд-ядра на збуджений енергетичний рівень. Так само для фотонів, енергія яких дорівнює різниці енергій між першим збудженим та основним рівнями атома, ймовірність поглинання особливо велика (резонансне поглинання світла).

Є цікавою реакція



що постійно проходить в атмосфері під дією нейтронів, утворених космічними променями. Вуглець ${}^{14}_6\text{C}$, що виникає під час неї, називають **радіовуглецем**, тому що він β^- -радіоактивний, його період напіврозпаду становить 5730 років. Радіовуглець засвоюється під час фотосинтезу рослинами й бере участь у кругообігу речовин у природі.

Кількість ядер радіовуглецю, що виникають в атмосфері за одиницю часу ΔN_+ , в середньому залишається сталою. Кількість ядер, що розпадаються, ΔN_- є пропорційною кількості наявних N ядер

$$\Delta N_- = kN.$$

Оскільки період піврозпаду дуже великий, установлюється рівноважна концентрація ядер ${}^{14}\text{C}$ у звичайному вуглеці, що відповідає умові

$$\Delta N_+ = \Delta N_-, \text{ або } \Delta N_+ = kN.$$

Спеціальні дослідження показали, що внаслідок дії вітрів та океанських течій рівноважна концентрація ${}^{14}\text{C}$ в різних місцях земної кулі однакова й відповідає приблизно 14 розпадам за хвилину на кожний грам вуглецю.

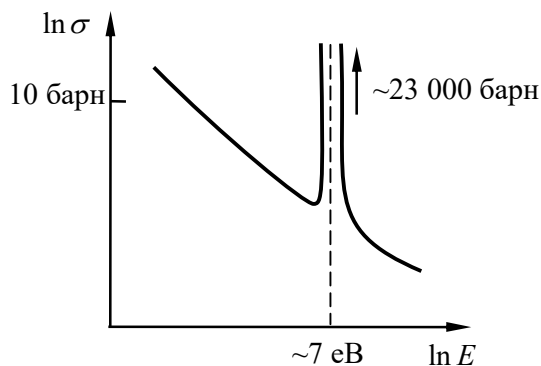


Рисунок 114.2 – Переріз захоплення нейтронів ядром урану-238

Поки організм живе, втрата в ньому ^{14}C через радіоактивність заповнюється за рахунок участі в кругообігу речовин у природі. На момент смерті організму процес засвоєння відразу ж припиняється й концентрація ^{14}C у звичайному вуглеці починає зменшуватися за законом радіоактивного розпаду. Отже, вимірявши концентрацію ^{14}C у рештках організмів (у деревині, кістках тощо), можна визначити дату їх смерті або, як говорять, їх вік. Перевірка цього методу на древніх зразках, вік яких точно визначений історичними методами, дала цілком задовільні результати.

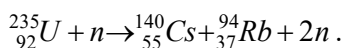
§ 115 Поділ ядер. Ланцюгова ядерна реакція. Ядерна бомба. Ядерний реактор

1 У 1938 р. Ган і Штрассман виявили, що під час опромінення урану нейтронами утворюються елементи із середини періодичної системи – барій і лантан. Пояснення цього явища було дано Фрішем і Мейтнер. Вони висловили припущення, що ядро урану, яке захопило нейтрон, ділиться на дві приблизно рівні частини. Ці частини одержали назву уламків поділу.

Подальші дослідження показали, що поділ може відбуватися різними способами. Усього утвориться близько 80 різних уламків, причому найбільш імовірними є поділ на уламки, маси яких співвідносяться як 2:3. Крива на рисунку 115.1 дає відносний вихід уламків різної маси, що виникають під час поділу ^{235}U повільними (теповими) нейтронами. Відповідно до цієї кривої відносна кількість актів поділу, за яких утворюються два уламки рівної маси ($A \approx 117$), становить $10^{-2}\%$, у той час як утворення уламків з масовими числами приблизно 95 і 140 ($95:140 \approx 2:3$) спостерігається в 7 % випадків.

Питома енергія зв'язку для ядер середньої маси приблизно на 1 МеВ більша, ніж у важких ядер. Звідси випливає, що поділ ядер повинен супроводжуватися виділенням великої кількості енергії. Але особливо важливим виявилася та обставина, що під час поділу кожного ядра вивільняється кілька нейтронів. Відносна кількість нейтронів у важких ядрах помітно більша, ніж у середніх ядрах. Тому уламки, що утворилися, виявляються сильно перевантаженими нейтронами, у результаті чого вони виділяють декілька нейтронів. Більшість нейтронів випускається миттєво (за час, менше 10^{-14} с). Частина (близько 0,75 %) нейтронів, яка одержала назву *запізнілі нейтрони*, випускається не миттєво, а із запізненням від 0,05 с до 1 хв. У середньому на кожний акт поділу виділяється 2,5 нейтронів.

Виділення миттєвих і запізнілих нейтронів не усуває повністю перевантаження уламків поділу нейтронами. Тому вони виявляються здебільшого радіоактивними й мають ланцюжок β^- -перетворень, що супроводжуються випромінюванням γ -квантів. Пояснимо сказане прикладом. Один зі способів, якими здійснюється поділ, виглядає так:



Уламки поділу – цезій і рубідій – мають перетворення

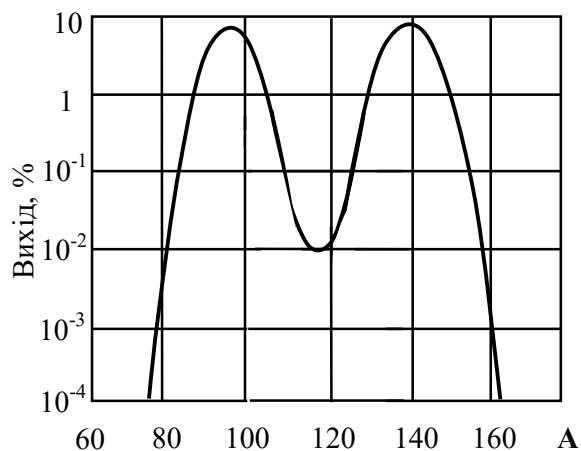
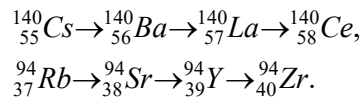


Рисунок 115.1 – Відносний вихід (у відсотках) уламків, що виникають під час поділу урану-235 тепловими нейтронами. До осі ординат застосована логарифмічна шкала

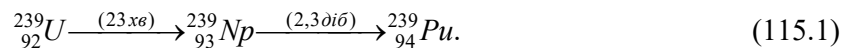


Кінцеві продукти – церій ${}^{140}\text{Ce}$ і цирконій ${}^{94}\text{Zr}$ – є стабільними.

Крім урану, під час опромінення нейтронами діляться торій (${}^{232}\text{Th}$) і протактиній (${}^{231}\text{Pa}$), а також трансурановий елемент плутоній (${}^{239}\text{Pu}$). Нейтрони надвисоких енергій (приблизно декілька сотень мегаелектронвольт) викликають поділ і більш легких ядер. Ядра ${}^{235}\text{U}$ й ${}^{239}\text{Pu}$ діляться нейтронами будь-яких енергій, але особливо добре повільними нейтронами. Тепловими нейтронами діляться також ${}^{233}\text{U}$ і ${}^{230}\text{Th}$, але ці ізотопи в природі не трапляються, вони утворюються штучним способом.

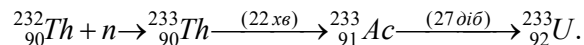
Ядра ${}^{238}\text{U}$ діляться лише швидкими нейтронами (з енергіями, не меншими 1 МеВ). За менших енергій нейтрони поглинаються ядрами ${}^{238}\text{U}$ без подальшого поділу. У результаті утвориться ядро ${}^{239}\text{U}$, енергія збудження якого виділяється у вигляді γ -фотона. Тому такий процес називають **радіаційним захопленням** (реакція (n, γ)). Ефективний переріз цього процесу різко зростає в разі енергії нейтронів, що дорівнює приблизно 7 еВ, досягаючи 23 000 барн. Переріз захоплення ядром ${}^{238}\text{U}$ теплових нейтронів становить менше 3 барн.

Ядро ${}^{239}\text{U}$, що утворилося в результаті захоплення нейтрона, нестабільне (період піврозпаду T дорівнює 23 хв.). Випускаючи електрон, антинейтрино й γ -фотон, воно перетворюється на ядро трансуранового елемента нептунія ${}^{239}\text{Np}$. Нептуній також перетерплює β^- -розпад ($T = 2,3$ дні), перетворюючись на плутоній ${}^{239}\text{Pu}$. Цей ланцюжок перетворень має вигляд



Плутоній α -радіоактивний, проте його період піврозпаду такий великий (24 400 років), що його можна вважати практично стабільним.

Радіаційне захоплення нейтронів ядром торію ${}^{232}\text{Th}$ приводить до утворення ізотопу урану ${}^{233}\text{U}$, який легко ділиться, що є відсутнім у природному урані



Уран-233 α -радіоактивний ($T = 162\,000$ років).

2 Випромінювання під час поділу ядер ${}^{235}\text{U}$, ${}^{239}\text{Pu}$ і ${}^{233}\text{U}$ декількох нейтронів дає можливість здійснити **ланцюгову ядерну реакцію**. Дійсно, випромінєні під час поділу одного ядра z нейтронів можуть викликати поділ z ядер, у результаті буде випущено z^2 нових нейтронів, які спричинять поділ z^2 ядер тощо. Отже, кількість нейтронів, що народжуються в кожному поколінні, зростає в геометричній прогресії. Нейтрони, які випромінюються під час поділу ядер ${}^{235}\text{U}$, мають у середньому енергію приблизно 2 МеВ, що відповідає швидкості приблизно $2 \cdot 10^7$ м/с. Тому час, що проходить між випромінюванням нейтрона й захопленням його новим ядром, яке ділиться, дуже малий, так що процес розмноження в речовині проходить досить швидко.

Зображена нами картина є ідеальною. Процес розмноження нейтронів проходив би описаним способом за умови, що всі нейтрони, які виділилися, поглинаються ядрами, що діляться. У дійсності це завжди так. Насамперед через скінченні розміри тіла, де відбувається поділ, і велику проникну здатність нейтронів багато з них залишають зону реакції, перш ніж будуть захоплені яким-небудь ядром і спричинять його поділ. Крім того, частина нейтронів поглинеться ядрами домішок, що не діляться, унаслідок чого вони виходять із гри, не викликавши поділу, а отже, не утворивши нових нейтронів.

Об'єм тіла росте як куб, а поверхня – як квадрат лінійних розмірів. Тому відносна частка нейтронів, що вилітають назовні, зменшується зі збільшенням маси речовини, що ділиться.

Природний уран містить 99,27 % ізотопу ^{238}U , 0,72 % ^{235}U і близько 0,01 % ^{234}U . Отже, на кожне ядро ^{235}U , що ділиться під дією повільних нейтронів, припадає 140 ядер ^{238}U , які захоплюють не занадто швидкі нейтрони без поділу. Тому в природному урані ланцюгова реакція поділу не виникає.

Ланцюгова реакція в урані може бути здійснена двома способами. Перший спосіб полягає у виділенні із природного урану ізотопу ^{235}U , який ділиться. Унаслідок хімічної нерозрізненості ізотопів поділ їх є досить важким завданням. Проте вона була вирішена декількома методами.

3 У чистому ^{235}U (або ^{239}Pu) кожний захоплений ядром нейтрон викликає поділ із випромінюванням, близько 2,5 нових нейтронів, проте якщо маса такої речовини менша певного критичного значення, то більшість випромінених нейтронів вилітає назовні, не викликавши поділу, так що ланцюгова реакція не виникає. У разі маси, більшої **за критичну**, нейтрони швидко розмножуються й реакція набирає вибухового характеру. На цьому ґрунтується дія **атомної бомби** (рис. 115.2). Ядерний заряд такої бомби являє собою два або більше частини майже чистого ^{235}U або ^{239}Pu . Маса кожної частини менша критичної, внаслідок чого ланцюгова реакція не виникає.

У земній атмосфері завжди є деяка кількість нейтронів, народжених космічними променями. Тому щоб викликати вибух, досить з'єднати частини ядерного заряду в один із масою, більшою за критичну. Це потрібно робити дуже швидко, і з'єднання частин повинне бути дуже щільним. У протилежному разі ядерний заряд розлетиться на частини, перш ніж устигне прореагувати помітна частина речовини, яка ділиться. Для з'єднання використовують звичайну вибухову речовину (запал), за допомогою якої однією частиною ядерного заряду вистрілюють в іншу. Весь пристрій укладений у масивну оболонку з металу великої густини. Оболонка є відбивачем нейтронів і, крім того, утримує ядерний заряд від розпилення доти, поки максимально можлива кількість його ядер не виділить свою енергію під час поділу. Ланцюгова реакція в атомній бомбі йде на швидких нейтронах. Під час вибуху встигає прореагувати лише частина ядерного заряду.

4 Інший спосіб здійснення ланцюгової реакції використовують у **ядерних реакторах**. Як речовина, що ділиться, у реакторах є природний (або трохи збагачений ізотопом ^{235}U) уран. Щоб запобігти радіаційному захопленню нейтронів ядрами ^{238}U (який стає особливо інтенсивним при енергії нейтронів, що дорівнює приблизно 7 еВ), порівняно невеликі блоки речовини, що ділиться, розміщують на деякій відстані один від одного, а проміжки між блоками **заповнюють** сповільнювачем, тобто речовиною, у якій нейтрони вповільнюються до теплових швидкостей. Переріз захоплення теплових нейтронів ядром ^{238}U становить усього 3 барни, у той час як переріз поділу ^{235}U тепловими нейтронами майже у 200 разів більший (580 барн). Тому, хоча нейтрони зіштовхуються з ядрами ^{238}U у 140 разів частіше, ніж із ядрами ^{235}U , радіаційне захоплення відбувається рідше, ніж поділ, і за умов більших розмірів усього пристрою коефіцієнт розмноження нейтронів (тобто відношення кількостей нейтронів, що народжуються у двох наступних поколіннях) може досягти значень, більших від одиниці.

Уповільнення нейтронів здійснюється за рахунок пружного розсіювання. У цьому разі енергія, що втрачається частинкою, залежить від співвідношення мас частинок, які

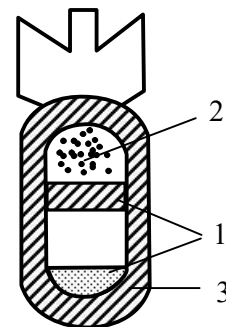
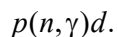


Рисунок 115.2 –
Схематичне зображення
атомної бомби:
1 – ядерний заряд;
2 – запал;
3 – корпус бомби

зіштовхуються. Максимальна кількість енергії втрачається у разі, якщо обидві частинки мають однакову масу. Із цього погляду ідеальним сповільнювачем повинна була б бути речовина, що містить звичайний водень, наприклад вода (маси протона й нейтрона приблизно однакові), проте такі речовини виявилися непридатними як сповільнювач, тому що протони поглинають нейтрони, вступаючи з ними в реакцію



Ядра сповільнювача повинні мати малий переріз захоплення нейтронів і великий переріз пружного розсіювання. Цю умову задовольняють дейтрон (ядро важкого водню-дейтерію D), а також ядра графіту (C) і берилію (Be). Для зменшення енергії нейтрона від 2 МеВ до теплових енергій у важкій воді (D_2O) досить близько 25 зіткнень, в C або Be – приблизно 100 зіткнень.

Перший уран-графітовий реактор був запущений у грудні 1942 р. у Чиказькому університеті під керівництвом італійського фізика Е. Фермі.

Схема уран-графітового реактора наведена на рисунку 115.3. Стрижні, позначені цифрою 3, містять кадмій або бор. Ці елементи інтенсивно поглинають нейтрони. Тому введення їх у реактор зменшує коефіцієнт розмноження нейтронів, а виведення – збільшує. Спеціальний автоматичний пристрій, що керує стрижнями, дозволяє підтримувати потужність, яка розвивається в реакторі, на заданому рівні. Регулювання значно полегшується тією обставиною, що частина нейтронів, як ми вже відзначали, випускається під час поділу ядер не миттєво, а із запізненням до 1 хв.

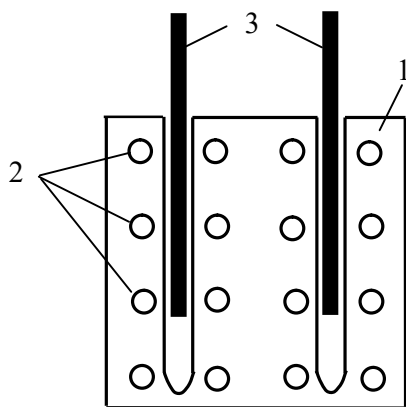


Рисунок 115.3 – Схема уран-графітового реактора:
1 – сповільнювач (графіт);
2 – блоки з урану;
3 – регулювальні стрижні

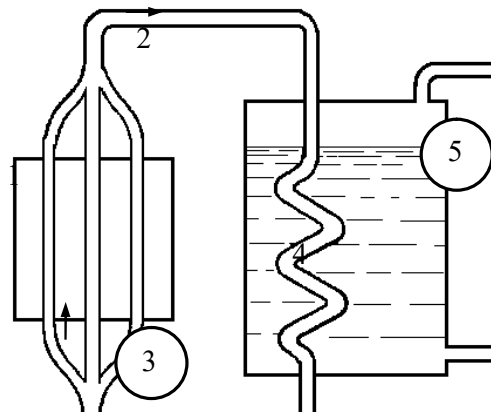


Рисунок 115.4 – Схема атомної електростанції: 1 – активна зона реактора; 2 – контур, по якому циркулює теплоносій; 3 – насос; 4 – теплообмінник; 5 – турбіна

Перші промислові реактори призначалися для виробництва матеріалу, що ділиться, для атомних бомб – плутонію. У таких реакторах частина нейтронів, які випромінюються під час поділу ядер ^{235}U , іде на підтримку ланцюгової реакції, частина ж має радіаційне захоплення ядрами ^{238}U , що, як ми бачили, приводить до утворення ^{239}Pu . Після того як в уранових блоках нагромадиться достатня кількість ^{239}Pu , блоки витягають із реактора й спрямовуються на хімічне перероблення для виділення з них плутонію.

Застосування ядерної енергії для виробництва електроенергії відбувається в атомних електростанціях. Схема атомної електростанції зображена на рисунку 115.4. Енергія, яка виділяється в активній зоні реактора 1, знімається теплоносієм, що циркулює в контурі 2. Циркуляція забезпечується насосом 3. Як теплоносій застосовують воду або лужні метали з

низькою температурою плавлення, наприклад натрій ($T_{\text{плав}} = 98^{\circ}\text{C}$). У теплообміннику 4 теплоносії віддає свою теплоту воді, перетворюючи її на пару, яка обертає турбіну 5.

Реактори зі сповільнювачем працюють на повільних (теплових) нейтронах. Використавши пальне, збагачене ізотопом, що ділиться (^{235}U або ^{239}Pu), можна побудувати реактор, який діє на швидких нейтронах. Частина нейтронів у таких реакторах використовують для перетворення ^{238}U в ^{239}Pu або ^{232}Th в ^{233}U , причому кількість ядер, що утворюються, здатних ділитися тепловими нейтронами, може перевищити кількість ядер, які діляться, витрачених на підтримку роботи реактора. Отже, відтворюється більша кількість ядерного пального, ніж вигорає в реакторі. Тому такі ядерні реактори називають **реакторами-розмножувачами**.

Також відзначимо, що побічними продуктами процесів, які проходять у ядерних реакторах, є радіоактивні ізотопи багатьох хімічних елементів, що знаходять різноманітні застосування в біології, медицині й техніці.

§ 116 Термоядерні реакції. Дейтерій-тритієвий синтез. Протон-протонний цикл. Вуглецевий цикл

1 Ядерний синтез, тобто злиття легких ядер в одне, супроводжується, як і поділ важких ядер, виділенням величезної кількості енергії. Оскільки для синтезу ядер необхідні дуже високі температури, цей процес називають **термоядерною реакцією**.

Щоб перебороти потенціальний бар'єр, обумовлений кулонівським відштовхуванням, ядра з порядковими номерами Z_1 й Z_2 повинні мати енергію

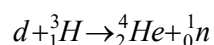
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{\text{я}}},$$

де $r_{\text{я}}$ – радіус дії ядерних сил, що дорівнює приблизно $2 \cdot 10^{-15}$ м. Навіть для ядер із $Z_1 = Z_2 = 1$ ця енергія становить

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{\text{я}}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 10^{-15}} = 1,15 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} \approx 0,7 \text{ МэВ}.$$

На частину кожного ядра, що зіштовхується, припадає 0,35 МеВ. Середній енергії теплового руху, який дорівнює 0,35 МеВ, відповідає температура приблизно $2 \cdot 10^9$ К. Проте синтез легких ядер може проходити й за умови значно менших температур. Справа в тому, що через хаотичний розподіл частинок за швидкостями завжди є деяка кількість ядер, енергія яких значно перевищує середнє значення. Крім того, що особливо істотно, злиття ядер може відбутися внаслідок тунельного ефекту. Тому деякі термоядерні реакції проходять із помітною інтенсивністю вже за температур приблизно 10^7 К.

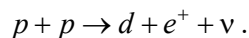
2 Особливо сприятливі умови для **синтезу ядер дейтерію й тритію**, тому що реакція між ними має резонансний характер. Саме ці речовини утворюють заряд **водневої** (або **термоядерної бомби**). Запалом у такій бомбі є звичайна атомна бомба, під час вибуху якої виникає температура приблизно 10^7 К. Реакція синтезу дейтрона (d , або ${}_1^2\text{H}$) і ядра тритію (${}_1^3\text{H}$)



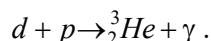
супроводжується виділенням енергії, що дорівнює 17,6 МеВ, що становить близько 3,5 МеВ на нуклон. Для порівняння зазначимо, що поділ ядра урану приводить до вивільнення приблизно 0,85 МеВ на нуклон.

3 Синтез ядер водню в ядра гелію є основним джерелом енергії Сонця й інших зірок, температура в надрах яких сягає 10^7 – 10^8 К. Цей синтез може здійснюватися двома шляхами.

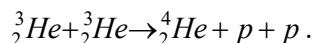
За більш низьких температур має місце **протон-протонний цикл**, що проходить у такий спосіб. Спочатку відбувається синтез двох протонів з утворенням дейтрона, позитрона й нейтрино:



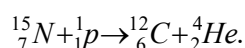
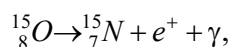
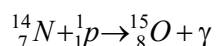
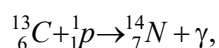
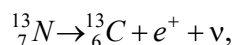
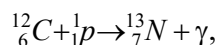
Дейтрон, що утворився, зіштовхуючись із протоном, з'єднується з ним у ядро ${}^3\text{He}$:



Остання ланка циклу є такою реакцією:



4 За більш високих температур більшу ймовірність має запропонований Беті **вуглецевий** (або **вуглецево-азотний**) цикл, що складається з таких ланок:



Підсумком вуглецевого циклу є зникнення чотирьох протонів та утворення однієї α -частинки. Кількість ядер вуглецю залишається незмінною; вони беруть участь у реакції в ролі каталізатора.

5 У водневій бомбі термоядерна реакція має неконтрольований характер. Для здійснення керованих термоядерних реакцій необхідно створити й підтримувати в деякому об'ємі температуру приблизно 10^8 К. У разі настільки високої температури речовина є повністю іонізованою плазмою. На шляху здійснення керованої термоядерної реакції стоять величезні труднощі. Разом із необхідністю одержати надзвичайно високі температури, виникає проблема втримання плазми в заданому об'ємі. Зіткнення плазми зі стінками посудини призведе до зменшення її температури. Крім того, стінка з будь-якої речовини за такої температури відразу випарується. У зв'язку із цим для втримання плазми в заданому об'ємі доводиться використовувати магнітне поле. Сили, що діють у цьому полі на заряджені частинки, що рухаються, змушують їх рухатися по траєкторіях, розміщених в обмеженій частині простору.

Здійснення керованого термоядерного синтезу дасть людству практично невичерпне джерело енергії. Тому роботи з оволодіння керованими термоядерними реакціями проводять у багатьох країнах. Одним з основних напрямків, у якому вони проходять, є створення установок типу токамак (скорочення від «тороїдальна камера з магнітними котушками»). Така установка є замкненим магнітним уловлювачем, що має форму тора. Плазма втримується в токамаці магнітним полем дуже складної конфігурації. Розігрів плазми здійснюється струмом, що проходить по ній.

Ряд фахівців вважає, що проблема керованого термоядерного синтезу буде успішно вирішена в XXI столітті.

§ 117 Види взаємодій і класи елементарних частинок

1 Елементарними частинками називаються найменші відомі на цей час частинки матерії. Термін «елементарні частинки» здебільшого умовний, тому що не існує чіткого критерію елементарності частинки. Характерною рисою елементарних частинок є їх здатність до взаємних перетворень.

Усього разом з античастинками відкрито близько 350 елементарних частинок, і їх кількість продовжує зростати. Більшість елементарних частинок нестабільна – вони спонтанно перетворюються на інші частинки. Стабільними є фотон, електрон, усі види нейтрино, протон і їх античастинки.

Для того щоб пояснити властивості й поведінку елементарних частинок, їх доводиться наділяти, крім маси, електричного заряду й спіну, також додатковими характерними для них величинами (квантові числа), про які буде сказано далі.

2 Відомі чотири види взаємодій між елементарними частинками: *сильне, електромагнітні, слабе й гравітаційне* (ми перелічили їх у порядку зменшення інтенсивності).

Інтенсивність взаємодії характеризують за допомогою так званої **константи взаємодії**, що є безвимірний параметром, який визначає ймовірність процесів, обумовлених цим видом взаємодії. Відношення значень констант дає відносну інтенсивність відповідних взаємодій.

Сильна взаємодія. Цей вид взаємодії забезпечує зв'язок нуклонів у ядрі. Константа сильної взаємодії має значення приблизно 10. Найбільша відстань, на якій проявляється сильна взаємодія (радіус дії r), становить приблизно 10^{-15} м.

Електромагнітна взаємодія. Константа взаємодії дорівнює $1/137 \approx 10^{-2}$. Радіус дії необмежений ($r = \infty$).

Слабка взаємодія. Це взаємодія відповідальна за всі види β -розпаду ядер (зокрема e -захоплення), за багато розпадів елементарних частинок, а також за всі процеси взаємодії нейтрино з речовиною. Константа взаємодії дорівнює за порядком величини 10^{-14} . Слабка взаємодія, як і сильна, є короткодіючою.

Гравітаційна взаємодія. Константа взаємодії має значення приблизно 10^{-39} . Радіус дії необмежений ($r = \infty$). Гравітаційна взаємодія є універсальною, їй підлеглі всі без винятку елементарні частинки. Проте у процесах мікросвіту гравітаційна взаємодія відчутної ролі не відіграє.

Таблиця 117.1 – Константи фундаментальних видів взаємодій

Вид взаємодії	Константа взаємодії	Час життя, с
Сильне	10	10^{-23}
Електромагнітне	10^{-2}	10^{-15}
Слабке	10^{-14}	10^{-8}
Гравітаційне	10^{-39}	-

У таблиці 117.1 зіставлені значення (порядок величини) констант різних видів взаємодії. В останньому стовпчику таблиці наведений середній час життя частинок, які розпадаються за рахунок цього виду взаємодії (цей час називають також часом розпаду).

3 Елементарні частинки звичайно підрозділяють на чотири класи. До одного з них належить лише одна частинка – **фотон**. Другий клас утворюють **лептони**, третій – **мезони** й, нарешті, четвертий клас – **баріони**. Мезони й баріони часто поєднують в один клас сильно взаємодіючих частинок, які називають **адронами** (грецьке «адрос» означає великий, масивний).

Наведемо коротку характеристику перелічених класів частинок.

1 Фотони γ (кванти електромагнітного поля) беруть участь в електромагнітних взаємодіях, але не беруть участі в сильній та слабкій взаємодії.

2 Лептони одержали свою назву від грецького слова «лептос», що означає «легкий». До них належать частинки, що не мають сильної взаємодії: електрони (e^-, e^+), мюони (μ^-, μ^+), важкий тау-лептон (τ^-, τ^+), а також електронні нейтрино ($\nu_e, \tilde{\nu}_e$), мюонні нейтрино ($\nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu$) й тау-нейтрино ($\nu_\tau, \tilde{\nu}_\tau$). Усі лептони мають спін, що дорівнює $1/2$, а отже, є

ферміонами. Усі лептони мають слабку взаємодію. Ті з них, які мають електричний заряд (тобто електрони й мюони), мають також електромагнітну взаємодію.

3 Мезони – сильно взаємодіючі нестабільні частинки, що не несуть так званого баріонного заряду. До них належать π -мезони, або піони (π^+, π^-, π^0), K -мезони, або каони (K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0) та ета-мезон (η).

За допомогою π -мезонів здійснюється сильна взаємодія. Маса K -мезонів становить приблизно $970m_e$ (494 MeV для заряджених і 498 MeV для нейтральних K -мезонів). Час життя K -Мезонів має значення приблизно 10^{-8} с. Вони розпадаються з утворенням π -мезонів і лептонів або лише лептонів. Маса ета-мезона дорівнює 549 MeV ($1074m_e$), час життя – приблизно 10^{-19} с. K -мезони розпадаються з утворенням π -мезонів і γ -фотонів.

На відміну від лептонів мезони володіють не лише слабкою (і, якщо вони заряджені, електромагнітною), але також і сильною взаємодією, що проявляється під час взаємодії їх між собою, а також у разі взаємодії між мезонами й баріонами. Спін усіх мезонів дорівнює нулю, так що вони є бозонами.

4 Клас баріонів поєднує в собі нуклони (p, n) й нестабільні частинки з масою, більшої маси нуклонів, що одержали назву ***гіперони*** ($\Lambda, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-, \Omega^-$). Усі баріони мають сильну взаємодію. Спін усіх баріонів дорівнює $1/2$, так що баріони є ферміонами. За винятком протона, усі баріони нестабільні. Під час розпаду баріона поряд з іншими частинками обов'язково утвориться баріон. Ця закономірність є проявом ***закону збереження баріонного заряду***.

Крім перелічених вище частинок, виявлено велику кількість сильно взаємодіючих короткоживучих частинок, що одержали назву ***резонансів***. Ці частинки є резонансними станами, утвореними двома або більшою кількістю елементарних частинок. Час життя резонансів становить усього лише приблизно $10^{-23} - 10^{-22}$ с.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Young H. D. University physics with modern physics in si units, global edition / H. D. Young, R. A. Freedman, A. L. Ford. – Pearson Education, Limited, 2019.
- 2 Бушок Г. Ф. Курс фізики. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – Київ: Либідь, 2001.
- 3 Бушок Г. Ф. Курс фізики. Кн. 2. Оптика. Фізика атома і атомного ядра. Молекулярна фізика і термодинаміка / Г. Ф. Бушок, Є. Ф. Венгер. – Київ: Либідь, 2001.
- 4 Лисенко О. В. Розв'язування задач із фізики: електрика та магнетизм : навчальний посібник / О. В. Лисенко, Г. А. Олексієнко. – Суми, Сумський державний університет, 2017.
- 5 Лисенко О. В. Розв'язування задач із фізики: коливання, хвилі, оптика : навчальний посібник / О. В. Лисенко, В. В. Коваль, М. Ю. Ромбовський. – Суми, Сумський державний університет, 2014.
- 6 Introduction to Electricity and Magnetism Specialization. [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://www.coursera.org/specializations/introduction-to-electricity-magnetism>.
- 7 Introductory Electricity and Magnetism. [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://www.edx.org/xseries/mitx-introductory-electricity-and-magnetism>.
- 8 Optics and Modern Physics. [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://www.edx.org/course/ap-physics-2-part-3-optics-and-modern-physics>.
- 9 Quantum Mechanics. [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://www.edx.org/course/quantum-mechanics>.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Абсолютно чорне тіло 142
Автоколивання 55
Адрони 248
Активність радіоактивної речовини 234
Акустичний спектр звуку 87
Ампер 21
Амплітуда
 гармонічних коливань 55
 загасаючих коливань 69
 хвилі 80

Б

Баріони 248
Барн 240
Беккерель 234
Бел 88
Биття 63
Бозони 196
Бомба
 атомна 244
 воднева 246
 термоядерна 246

В

Вектор
 намагніченості 28
 Пойнтінга 98
 Умова 86
Векторна діаграма 61
Взаємодія
 гравітаційна 248
 електромагнітна 248
 сильна 232, 248
 слабка 237, 248
Випромінювальна здатність 141, 142
Випромінювання
 вимушене 200
 індуковане 200
 спонтанне 200
Вироджені стани 189
Висота звуку 87
Власні значення рівняння 176
Власні коливання 92
Власні функції рівняння 176
Власні частоти струни 92
Вузол стоячої хвилі 91

Г

Гамільтоніан 182
Гіперони 249
Гіпотеза
 Ампера 28
 де Бройля 166

Планка 148

Гіромагнітне відношення 35, 192
Гістерезис магнітний 37
Головна площина кристала 136
Головний переріз кристала 136
Головні дифракційні максимуми 124
Густина потоку енергії 85

Д

Декремент загасання 69
Дефект маси ядра 230
Децибел 88
Дзеркала Френеля 108
Дисперсія світла 138
 аномальна 138
 нормальна 138
Дисперсія спектрального приладу 126
 кутова 126
 лінійна 126
Дисперсія хвиль 93
Диференціальне рівняння
 вимушених коливань 70
 гармонічних коливань 56
 загасаючих коливань 67
Дифракційна решітка 123
Дифракція 112
 Фраунгофера 112
 Френеля 112
Дихроїзм 138
Діаграма спрямованості диполя 99
Діамагнетик 37
Дірка 219
Добротність 69
Довжина когерентності 106
Довжина стоячої хвилі 91
Довжина хвилі 79
Домен 38
Домішки
 акцепторні 223
 донорні 223
Дослід
 Боте 154
 Девісона й Джермера 167
 Ерстеда 9
 Резерфорда 158
 Томсона й Тартаковського 168
 Фарадея 39
 Франка й Герца 161
 Штерна й Герлаха 193

Е

Електричне поле
 вихрове 41, 48
 потенціальне 48

Електричний опір
активний 76
емнісний 76
індуктивний 76
повний 75
реактивний 76

Електрон
валентний 198
оптичний 198

Електронна конфігурація 198

Електрорушійна сила
електромагнітної індукції 40
самоіндукції 43

Елементарна частинка 247

Елементарний диполь 99

Енергетична світність 141

Енергія
зв'язку ядра 230
Фермі 220

Ефект
Допплера для звукових хвиль 88
Допплера для світла
поздовжній 101
поперечний 101

Комптона 156

Ефективна напруга 77

Ефективна сила струму 77

З

Закон

Ампера 11

Біо – Савара – Лапласа 17

Брюстера 134

Вульфа-Брегга 130

електромагнітної індукції 40, 48

в диференціальній формі 49

в інтегральній формі 49

максвеллівське формулювання 42

збереження баріонного заряду 249

зміщення Віна 145

Кірхгофа 143

Малюса 133

Ома для змінного струму 75

радіоактивного розпаду 233

Стефана – Больцмана 144

Фарадея 40

Закони фотоефекту 152

Звук 87

Зміщення 55

Зона

валентна 218

дозволена 218

заборонена 218

провідності 219

Зони Френеля 113

І

Ізобар 229

Ізомер 229

Ізотон 229

Ізотоп 229

Імпеданс 75

Інверсна заселеність 202

Індуктивність 43, 44

Індукційний струм 39

Інтенсивність 86

світла 103

Інтерференція 90

світла 104

Інфразвук 87

К

Квантове число

азимутальне 187, 189

головне 165, 189

магнітне 188, 189

Кільця Ньютона 110

Когерентні хвилі 90, 106

Когерентність 106

Коерцитивна сила 38

Коефіцієнт

відбиття 180

загасання 67

прозорості 180

проходження 180

Коефіцієнти Ейнштейна 201

Коливальний контур 60

Коливання 55

вимушені 55

вільні 55

власні 55

гармонічні 55

параметричні 55

Комбінаційний принцип Рітца 164

Компаунд-ядро 239

Комптонівська довжина хвилі частинки 157

Короткохвильова межа рентгенівського

випромінювання 151

Корпускулярно-хвильовий дуалізм 102

світла 155

частинок 166

Кратність виродження 189

Кристал

двовісний 135

одновісний 135

Критерій Релея 126

Критична маса 244

Кут Брюстера 134

Кут ковзання 130

Л

Лазер 201

рубіновий 203

Лептони 248
Логарифмічний декремент загасання 69

М

Магнетон Бора 193
Магнітна індукція 9, 11, 24
залишкова 38
поля відрізка із струмом 19
поля на осі колового струму 20
поля нескінченно довгого прямого
провідника зі струмом 19
Магнітна стрілка 9
Магнітний момент
власний 36
контра 23
орбітальний 35
спіновий 194
Магнітний полюс 9
Магнітний потік 25
повний 40
Маятник
математичний 58
пружинний 57
фізичний 59
Мезони 248
Механічний момент
власний 36
орбітальний 35
Модель ядра
краплинна 232
оболонкова 232

Н

Намагніченість 28
Напівпровідник
n-типу 222
p-типу 223
власний 219
домішковий 219
Напруженість магнітного поля 30
Нейтрино 237
Нейтрон 228
Ніколь 137
Нормальні коливання 92
Нуклон 228

О

Оболонка 197
Оператор 182
Гамільтона 182, 184
енергії 184
імпульсу 185
Лапласа 82, 182
набла 22
радіуса-вектора 184
Оператори комутативні 186
Оптика 102
Оптична вісь кристала 136

Оптична густина середовища 102
Оптична довжина 105
Оптична різниця ходу 105
Оптичний квантовий генератор 202
Основна частота струни 92

П

Парамагнетик 37
Перехід електронно-дірковий (*n-p*-перехід)
224
Період дифракційної решітки 123
Період коливачів 56
Період напіврозпаду 233
Періодична система елементів
Д. І. Менделєєва 197
Питома енергія зв'язку нуклонів у ядрі 230
Підоболонка 197
Пластинка чвертьхвильова 138
Площина поляризатора 132
Поглиняльна здатність 142
Поглинання вимушене 200
Показник заломлення 102
Поле
вихрове 26
магнітне 9
Поляризатор 132
ідеальний 132
неідеальний 132
Поляризаційна призма 136
Полярні 138
Поріг чутності звуку 87
Постулати Бора 161
Потік енергії 85
Потокозчеплення 40
Потужність випромінювання диполя 99
Правило
квантування орбіт 161
Ленца 40
лівої руки 11
правого гвинта 19
Призма Ніколя 137
Принцип
Гюйгенса – Френеля 112
невизначеностей Гейзенберга 171, 172
нерозрізненості однакових частинок 196
Паулі 196
суперпозиції магнітного поля 11
суперпозиції хвиль 90
суперпозиції хвильових функцій 183
тотожності однакових частинок 196
Промінь
звичайний 135
незвичайний 135
Проникність магнітна 31
Протон 228
Псі-функція 172
Пучність стоячої хвилі 90

Р

Радіоактивний розпад 233
альфа-розпад 234
бета-розпад 234, 236
електронне захоплення 236
електронний 236
позитронний 236
гамма-розпад 234
Радіоактивність 233
Радіус зони Френеля 114
Радіус когерентності 106
Резонанс 73
зміщення 72
напруги 72
струмів 74
швидкості 74
Рентгенівська спектроскопія 130
Рентгенівська трубка 150
Рентгенівське випромінювання
гальмівне 150
характеристичне 150
Рентгенівські промені 150
Рентгеноструктурний аналіз 130
Рівень
акцепторний 223
донорний 223
Рівень гучності звуку 88
Рівняння
Максвелла
матеріальні 54
фундаментальні 53
плоскої біжучої хвилі 80, 81
плоскої загасаючої хвилі 81
плоскої хвилі 81
стоячої хвилі 90
сферичної хвилі 82
хвилі 80
хвильове 82
Шредінгера
загальне 173
стаціонарне 175
Роздільна здатність об'єктива 127
Роздільна здатність спектрального приладу 126

С

Світло
поляризоване 132
еліптично 132
лінійно 132
по колу 132
природне 132
частково поляризоване 132
Світловий вектор 103
Середній час життя радіоактивного ядра 233
Серія
Бальмера 163

Брекета 164
Лаймана 164
Пашена 164
Пфунда 164
Сила
Ампера 11
Лоренца 12
Сили
квазіпружні 57
ядерні 232
Сіре тіло 142
Смуги
однакового нахилу 110
однакової товщини 110
Соленоїд 27
Спектр лінійчатий 163
Спектральна густина енергії 146
Співвідношення невизначеностей Гейзенберга 171, 172
Спін 36, 194
електрона 195
нейтрона 228
протона 228
ядра 229
Сприйнятливість магнітна 31
Стала
Планка 148
радіоактивного розпаду 233
Рідберга 163
Стала часу електричного кола 47
Стандартні умови для хвильової функції 173
Струм
зміщення 52
квазістаціонарний 60
повний 52
Ступінь поляризації 133

Т

Тембр звуку 87
Температура Кюрі 38
Теорема
Гаусса для вектора індукції магнітного поля
в диференціальному вигляді 25
в інтегральному вигляді 25
Гаусса для індукції магнітного поля в речовині
в диференціальному вигляді 29
в інтегральному вигляді 29
про циркуляцію вектора індукції магнітного поля у вакуумі 26
про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля 31
Теорія
Гамова – Герні – Кондона 235
Фермі 236
Терм 164
Тесла 11

Гороїд 27
Транзистор 227
база 227
емітер 227
колектор 227
підсилювач напруги 227
Тунельний ефект 181

У

Ультразвук 87
Ультрафіолетова катастрофа 148
Умова квазістаціонарності 60
Умова нормування 173
Універсальна функція Кірхгофа 143

Ф

Фаза коливань 55
Фазова швидкість 81
звукових хвиль 83
поздовжньої пружної хвилі 83
поперечної пружної хвилі 83
Ферміон 196
Феромагнетик 37
Фігури Ліссажу 66
Формула
Бальмера 163
Віна 145
Вульфа – Брегга 130
Ейнштейна для фотоефекту 153
Планка 149
Резерфорда 160
Релея – Джинса 148
Томсона 61
Фотоефект 151
Фотон 154, 248
Фронт хвилі 79

Х

Хвильова зона диполя 99
Хвильова поверхня 79
Хвильова функція 172
Хвильовий вектор 81
Хвильовий пакет 92
Хвильовий фронт 79
Хвиля 78
біжуча 78
гармонічна 78
де Бройля 167
плоска 79
поздовжня 78
поперечна 78
стояча 90

сферична 79

Ц

Цикл
вуглецевий 247
вуглецево-азотний 247
протонно-протонний 247
Циркуляція вектора 25
Цуг 78

Ч

Час когерентності 106
Частота
биття 64
власна 67
гармонічних коливань 56
загасаючих коливань 68
колова 56
резонансна 73, 74
циклічна 56
циклотронна 14, 16
Червона межа фотоефекту 153
Число
зарядове 229
масове 229
хвильове 81

Ш

Швидкість групова 93
Швидкість електромагнітних хвиль 95
Ширина інтерференційної смуги 108

Я

Явище
взаємної індукції 44
електромагнітної індукції 39
подвійної променезаломлюваності 135
самоіндукції 42
Ядерна модель атома 158
Ядерна реакція 238
екзотермічна 238
ендотермічна 238
енергія 238
ефективний переріз 240
зриву 240
ланцюгова 243
підхоплення 240
поріг реакції 238
пряма 240
термоядерна 231, 246
Ядерний реактор 244

Електронне навчальне видання

Лисенко Олександр Володимирович

Математичні моделі у фізиці

Конспект лекцій

для студентів спеціальності 113 «Прикладна Математика»

У двох частинах

Частина 2

Відповідальний за випуск І. В. Коплик

Редактори: О. Ф. Дубровіна, Н. М. Мажуга, С. М. Симоненко, О. В. Федяй

Комп'ютерне верстання О. В. Лисенка

Формат 60x84/8. Ум. друк. арк. 29,76. Обл.-вид. арк. 27,63.

Видавець і виготовлювач

Сумський державний університет

вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.