СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ШЕВЧЕНКО МАРИНА СЕРГІЇВНА

УДК 004.383

ДИСЕРТАЦІЯ

МОДЕЛІ ТА МЕТОД АРИФМЕТИЧНОГО СКЛАДАННЯ ДВІЙКОВИХ БІНОМІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ В ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Спеціальність 122 – Комп’ютерні науки
Галузь знань 12 – Інформаційні технології

Подається на здобуття наукового ступеню доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_______________ М.С. Шевченко

Науковий керівник:
Кулик Ігор Анатолійович,
кандидат технічних наук, доцент

Суми – 2023

АНОТАЦІЯ

Шевченко М. С. Моделі та метод арифметичного складання двійкових біноміальних чисел в інформаційно-комунікаційних технологіях. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 12 Інформаційні технології за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки. – Сумський державний університет, Суми, 2023.

Низка інформаційних завдань в комп'ютерних системах і компонентах найбільш ефективним чином вирішуються за допомогою неоднорідних систем числення, наприклад таких, як факторіальних, фібоначчієвих або біноміальних. Завдяки своїм властивостям, які не мають двійкові системи чисел, а саме надлишковість, нерівномірність, вбудовані засоби контролю помилок, здатність генерувати комбінаторні об'єкти, неоднорідні системи числення за умови вирішення спеціалізованих завдань дозволяють досягати унікальних характеристик при застосуванні інформаційно-комунікаційних технологій на їх основі або побудові спеціалізованих цифрових систем.

На сучасному етапі розробки обчислювальної техніки та інформаційно-комунікаційних технологій широке використання нетрадиційних неоднорідних систем числення суттєво залежить від наявності розробленої машинної арифметики.

Особливе місце серед неоднорідних систем числення займають структурні двійкові біноміальні системи числення через їх значну надлишковість, складний функціональний зв'язок між ваговими коефіцієнтами та значеннями біноміальних розрядів, подібність їх структури до структури розповсюджених відомих кодів-сполучень. Виходячи зі своїх позитивних властивостей двійкові біноміальні системи числення знаходять своє практичне використання при вирішення таких інформаційних завдань, як стиснення інформації, шифрування даних, генерування рівноважних та квазірівноважних кодів, наскрізний контроль правильності даних та організація завадостійкої лічби. Але на сьогоднішній день

не існує розроблених правил і процедур виконання арифметичних операцій над біноміальними числами, зокрема біноміального складання. Як наслідок, це є стримуючим фактором для більш широкого впровадження біноміальних систем числення у інформаційні технології обробки даних.

Сучасний стан розв’язання цієї проблеми полягає у використанні табличного методу, або моделей біноміальних лічильних пристроїв, або проміжних ступеневих систем числення, наприклад десяткової або двійкової. Табличний метод знаходження результату біноміального додавання, хоча і є швидкісним, потребує великих програмно-апаратних витрат. Застосування моделей біноміальних лічильних пристроїв та проміжних ступеневих систем числення призводить до великих часових втрат поряд із значними додатковими апаратно-програмними витратами. Вказані недоліки суттєво перешкоджають використанню біноміального арифметичного складання в інформаційно-комунікаційних технологіях.

У дисертаційній роботи вирішується наступна наукова-прикладна задача з розробки і дослідження арифметичного складання двійкових біноміальних чисел при обмеженнях на обсяг програмно-апаратних витрат з метою прискорення обчислювальної обробки біноміальної числової інформації для більш ефективного впровадження інформаційно-комунікаційних технологій для вирішення спеціалізованих завдань зі стиснення інформації, генерування комбінаторних об'єктів, комбінаторної оптимізації, шифрування даних тощо.

Метою дисертаційної роботи стосовно дослідження та розробки моделей і методу арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, що генеруються двійковими біноміальними системами числення, є зменшення часу виконання операції при обмеженнях на об'єм програмно-апаратних витрат.

Актуальність теми дисертаційних досліджень визначається тим, що розробка моделей і методу біноміального арифметичного складання стануть основою для побудови біноміальної машинної арифметики для комп'ютерних систем та компонентів, надаватимуть нові можливості щодо створення ефективних інформаційно-комунікаційних технологій по обробці даних:

генерування комбінаторних об’єктів, проведення комбінаторної оптимізації, забезпечення завадостійких біноміальних обчислень, а також стимулюватимуть подальший розвиток теорії двійкових біноміальних систем числення.

Об'єкт досліджень – процеси обчислювальної обробки інформації в інформаційно-комунікаційних технологіях, які функціонують у двійковій біноміальній системі числення.

Предмет досліджень – моделі і методи підвищення продуктивності спеціалізованих інформаційно-комунікаційних технологій в режимі реального часу на основі моделей і методу арифметичного складання біноміальних чисел, що генеруються двійковими біноміальними системами числення.

Новим науковим результатом дисертації є розв'язання важливої і актуальної науково-прикладної задачі з розробки моделей та методу біноміального арифметичного складання, що надає можливість суттєво зменшити часові витрати, необхідні для виконання операції над двійковими біноміальними числами, генерованих двійковими біноміальними системами числення, при обмеженнях на обсяг програмно-апаратних витрат.

В дисертаційній роботі вперше отримані:

1. Матрична модель двійкових біноміальних чисел, яка базується на матриці вагових коефіцієнтів і враховує функціональний зв'язок між значеннями попередніх біноміальних розрядів та їх позиціями в розрядній сітці біноміальних чисел. При цьому вагові коефіцієнти двійкових біноміальних чисел представляються двохелементними кортежами, кожному з яких відповідає одинична комірка матриці біноміального числа. Така будова матричної моделі двійкових біноміальних чисел дозволяє просто та в наявному вигляді формувати одиниці переносу з одного біноміального розряду в інший.

2. Матрична модель біноміального арифметичного складання, на основі якої провадиться підсумовування двійкових біноміальних чисел. Розроблена модель дозволяє замінити громіздкі операції з кількісними значеннями біноміальних коефіцієнтів на значно простіші операції з їх верхніми та нижніми параметрами, тобто з координатами стовпців та рядків матриці біноміального

арифметичного складання. Таким чином, операції по знаходженню біноміальних вагових коефіцієнтів з визначенням факторіалів замінюються звичайними операціями порівняння, віднімання або додавання одиниці, що значно пришвидшує процес підсумовування двійкових біноміальних чисел.

3. Метод арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, який на основі перетворень переносу, зсуву, симетрії та розкладання, що виконуються над комірками матриці біноміального складання, провадить підсумовування двійкових біноміальних чисел, оперуючи координатами комірок матриці складання замість оперування зі значеннями біноміальних коефіцієнтів. Це потребує значно менших обсягів часових та програмно-апаратних витрат для отримання результату додавання порівняно з іншими існуючими методами.

В дисертаційній роботі набули удосконалення:

1. Методи оцінки обсягів часових та програмно-апаратних витрат арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, які дозволяють визначити граничні максимальні значення витрат при практичній реалізації і проводити порівняння з цього погляду з іншими існуючими підходами для отримання результату додавання біноміальних чисел.

2. Моделі оброблення кодів-сполучень, за якими представляються сигнали в інформаційно-комунікаційних технологіях, на основі операцій додавання або добутку із застосуванням арифметичного складання відповідних їм двійкових біноміальних чисел. Це розширює можливості інформаційно-комунікаційних технологій щодо якісної та швидкодіючої обробки сигналів, кодованих кодами-сполучень.

3. Моделі генерування кодів-сполучень, до яких відносяться поширені рівноважні або квазірівноважні коди, на основі арифметичної операції складання двійкових біноміальних чисел, які дозволяють пришвидшити процес генерування кодів-сполучень та підвищити функціональну гнучкість інформаційних систем генерації.

4. Інформаційно-комунікаційна технологія стиснення рівноважних кодів із застосуванням арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, яка

дозволяє суттєво підвищити коефіцієнт стиснення інформаційних масивів, складених з рівноважних кодів, і, як наслідок, збільшити швидкість передачі даних по каналам зв'язку.

Отримала подальший розвиток теорія біноміальних систем числення і позиційної біноміальної лічби, що обумовлює більш поширене застосування двійкових біноміальних систем числення та генерованих ними біноміальних чисел при розробці нових інформаційних технологій обробки даних.

Практичне значення отриманих результатів визначається розробленими алгоритми арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, які характеризуються ефективністю, кінцевістю та можуть бути достатньо легко з обчислювального погляду реалізовані на практиці.

Алгоритми арифметичного складання двійкових біноміальних чисел на основі матричного представлення та динамічного масиву складання дозволяють виконувати операції за поліноміальний час, відповідно у асимптотичному вираженні за кубічний $O\left(n^3\right)$ та квадратичний час $O\left(n^2\right)$, де n – параметр біноміальної системи числення. Це значно менше факторіального часу $O(n!)$, який потребується у разі застосування традиційного способу знаходження результату біноміального додавання із використанням проміжних ступеневих систем числення. Різниця між алгоритмом на основі матричного представлення двійкових біноміальних чисел та алгоритмом на основі динамічного масиву полягає в тому, що останній виконує пошук перетворюваних двоелементних кортежів тільки серед одиничних елементів, що помітно скорочує час операції додавання. Але з іншого боку алгоритм на основі матриці біноміального складання дозволяє контролювати успішність процесу проведення операції на усіх етапах її виконання.

Синтезована також структурна модель спеціалізованого пристрою арифметичного складання на основі матричного представлення двійкових біноміальних чисел, в якому основний обсяг витрат покладається на застосування оперативної пам'яті для збереження матриці біноміального складання розмірності $(n-k)\times(k+1)$ комірок.

Ключові слова: кодування чисел, двійкові біноміальні числа, кортежі чисел, матричні моделі, біноміальне арифметичне складання, параметри біноміальних коефіцієнтів, суміщення параметрів, перетворення координат комірок, поліноміальний час, коди-сполучення.

АНОТАЦІЯ

Shevchenko M. S. Models and method of binary binomial numbers arithmetic addition in information-communication technologies. – A qualification scientific work in the form of a manuscript.

Thesis for obtaining a doctor of philosophy degree in the field of 12 – Information technology, specializing in 122 – Computer Science. – Sumy State University, Sumy, 2023.

The scientific and applied problem on development and research of binary binomial numbers arithmetic addition is decided under restrictions on the amount of hardware and software expenses aimed to speed up binomial number information processing in the dissertation.

Into computer systems and components some information tasks are implemented with heterogeneous number systems, for example factorial, Fibonacci and binomial ones, in the most effective way. Due to their peculiarities that binary number systems don’t hold like for example redundancy, unevenness, embedded means of error control, ability to generate combinatory objects, the heterogeneous number systems when the specialized tasks are processing allow us to achieve unique characteristics at using information technologies on their basis or at building specialized digital systems.

At the present stage of computed technics and information technologies development the wide-distribution non-traditional for the heterogeneous number systems depends on the being of the developed machine arithmetic substantially.

The structural binary binomial number systems occupy a special place among

heterogeneous number systems thanks to their significant redundancy, complex functional dependence between weight coefficients and values of binomial digits, similarity their structure to structure of the spread well-known code-combinations. Based on their positive properties, binary binomial number systems find their practical use in solving such information tasks as information compression, data encryption, generation of constant weight and quasi-equilibrium codes, end-to-end control of data correctness and organization of interference-resistant counting. But in the present time the developed rules and procedures to fulfil arithmetic operations on the binomial numbers, including the binomial addition, don’t exist. As a consequence, there is a restraining factor for embedding binomial number systems into information technologies devoted to data processing more widely.

The current state of solving this problem consists in the use of a tabular method, or models of binomial counting devices, or intermediate power number systems, for example, decimal or binary number systems. The tabular method of finding the result of binomial addition, although it is fast, requires large software and/or hardware software expenses. The use of models of binomial counting devices and intermediate power number systems leads to large time losses along with significant additional software and/or hardware costs. These shortcomings significantly prevent the use of binomial arithmetic addition in information and communication technologies.

The dissertation solves the following scientific and applied problem: the development and research of the arithmetic addition of binary binomial numbers with restrictions on the amount of software and/or hardware expenses in order to speed up the computational processing of binomial numerical information for more effective implementation of information and communication technologies for solving specialized tasks of information compression, generation combinatorial objects, combinatorial optimization, encryption, etc.

The aim of the dissertation devoted to research and development the models and method of arithmetic addition for binary binomial numbers that are generated with binary binomial number systems is to decrease time of this operation subject to restrictions on the amount of software and/or hardware expenses.

The relevance of dissertation researches is defined by the fact that the models and method of binomial arithmetic addition development will become the basis for building binomial machine arithmetic into computer systems and components, will give new possibilities to create effective information and communication technologies of data processing such as combinatory objects generation, combinatory optimization, support of noise-immunity binomial computations, as well to stimulate further development of binomial number systems theory.

Object of research is information computational processing into computer systems and components that executes by a binary binomial number system.

Subject of research is models and methods for enlarging productivity of specialized information management systems, as well as computer systems and components that put them together, in real time on basis of the models and method of arithmetic addition of binomial numbers that are generated by binary binomial number systems.

The new scientific result of the dissertation is the decision of the important and relevant scientific and applied problem devoted to development of the models and method of binomial arithmetic addition that give a possibility to reduce time expenses required to implement the operation on binary binomial number systems with restrictions on the amount of hard and/or software expenses.

In the dissertation the following results are obtained for the first time:

1. The matrix model of binary binomial numbers that is based on the matrix of weight coefficients and takes into consideration the functional connection between the values of the forward binomial digits and their positions in the bit grid of binomial numbers. At the same time, the weighting coefficients of binary binomial numbers are represented by two-element tuples, each of which corresponds to a unit cell of the binomial number matrix. Such a construction of the matrix model for binary binomial numbers allow us to form carry units from some binomial digit to another one in the simple and obvious way.

2. The matrix model of binomial arithmetic addition on basis of which the addition of binary binomial numbers is carried out. The developed model provides a

possibility to substitute the cumbersome operations with the quantitative values of the binomial coefficients by much simpler operations with their upper and lower parameters, that is, the coordinates of columns and rows from the binomial arithmetic addition matrix. It accelerates the process of binomial numbers addition significantly.

3. The method of arithmetic addition for binary binomial numbers that conducts the addition of binary binomial numbers by processing cells coordinates of the addition matrix instead of processing values of the binomial coefficients on basis of carry, shift, symmetry and decomposition transformations. It requires much less the amounts of time and hardware and software expenses for obtaining the addition result in comparison with other being methods.

In the dissertation the following results are represented as improvements:

1. The methods of estimation of time and hardware and software expenses amounts for the arithmetic addition of binary binomial numbers that allow us to determine marginal maximum values of expenses during practical implementation and to compare with other methods for obtaining the binomial numbers addition result in terms of costs.

2. The models of processing signals encoded by code-combinations in information and communication technologies, based on operations of their addition or multiplication with the use of arithmetic addition of the corresponding binary binomial numbers. This expands the possibilities of information and communication technologies for high-quality and fast processing of signals represented by code-combinations.

3. The models of code-combination generation, which include common constant weight or quasi-equilibrium codes, based on arithmetic addition on binary binomial numbers, which allow us to speed up the process of generating code-combinations and to increase the functional flexibility of generation systems.

4. The information and communication technology of compression of constant weight codes using the arithmetic addition of binary binomial numbers, which allows us to significantly increase the compression ratio of information arrays composed of constant weight code combinations and, as a result, to increase the speed of data

transmission over communication channels.

The theory of binomial number systems and positional binomial count get further development that gives an additional impact to wider using binary binomial number systems and generated by them binomial numbers when developing new information technologies of data processing.

The practical significance of the obtained results is determined by the developed algorithms of arithmetic addition for binary binomial numbers that are characterized efficiency, finiteness and that fact is they can be put into practice enough easily in terms of computational complexity.

The algorithms of arithmetic addition for binary binomial numbers on basis of matrix representation and dynamic array allow us to execute operations in polynomial time, cubic time $O\left(n^3\right)$ and quadratic time $O\left(n^2\right)$ accordingly in asymptotic terms, where n is a parameter of a binomial number system. It is much less factorial time $O(n!)$ that is demanded when applying traditional technics for searching the binomial addition result with use of intermediate power number systems. The difference between the algorithm based on the matrix representation of binary binomial numbers and the algorithm based on the dynamic array is that the latter searches for transformable two-element tuples only among unit elements, which significantly reduces the time of the addition operation. But on the other hand, the algorithm based on the matrix of binomial addition allows us to control the process at all stages of its execution.

The structure model of specialized device for arithmetic addition on basis of matrix models of binary binomial numbers which the main part of the hard ware volume defined by necessity to use random access memory for saving the matrix of binomial addition of dimension $(n-k)\times(k+1)$ cells.

Key words: numbers coding, binary binomial numbers, tuples of numbers, matrix models, binomial arithmetic addition, binomial coefficient parameters, parameter bias, transformation of coordinates cells, polynomial time, code-combinations.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Статті у фахових наукових виданнях із переліку МОН України:

1. Kulyk I., Shevchenko M., Berezhna O. Development of Data Compressing Coding Methods on Basis of Binary Binomial Numbers // Technology Audit and Production Reserves, 2019. № 2/2 (46). P. 12–18. https://doi.org/10.15587/2312-8372.2019.169897. (*Особистий внесок: перевірка алгоритмів формування біноміальних чисел та обґрунтування їх ефективності в інформаційних технологіях*).

2. Кулик И. А., Шевченко М. С., Новгородцев А. И. Метод оценки границ применения сжатия на основе двоичных биномиальных чисел // Системи обробки інформації. – 2019. – № 2(157). – С. 57-62. https://doi.org/ 10.30748/soi.2019.157.07. (*Особистий внесок: обґрунтування ефективності застосування двійкових біноміальних чисел та операцій над ними в інформаційних технологіях*).

3. Шевченко М. С., Кулик І. А. Розробка інформаційно-керуючих систем на основі двійкової біноміальної системи числення // Системи обробки інформації : збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, 2020. Вип. 2 (161). С. 78–85. https://doi.org/10.30748/ soi.2020.161.09. (*Особистий внесок: розробка практичних аспектів застосування біноміальної машинної арифметики*).

4. Кулик І. А., Шевченко М. С. Матрична модель складання двійкових біноміальних чисел // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. 2021. Вип. 1 (164). С. 45–54. https://doi.org/10.30748/soi.2021.164.05. (*Особистий внесок: удосконалення моделі генерування кодів-сполучень, математичний опис біноміального арифметичного складання, розробка матричної моделі біноміального арифметичного складання*).

5. Кулик І. А., Шевченко М. С., Гриненко В. В. Алгоритм складання двійкових біноміальних чисел // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. 2022. № 2 (169). С. 49–57. https://doi.org/10.30748/soi.2022.169.06. (*Особистий внесок: обґрунтування перетворень біноміальних коефіцієнтів та розробка алгоритмів арифметичного складання біноміальних чисел, оцінювання витрат для проведення операцій*).

Статті у наукових періодичних виданнях інших держав та виданнях, які індексуються наукометричними базами даних Scopus та Web of Science:

6. Kulyk I., Shevchenko M., Berezhna O., Novhorodtsev A. Development of Binary Information Compression Methods Based on the Binomial Numerical Function // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Mathematics and Cybernetics – applied aspects. 2021. Vol. 3, No. 4 (111). P. 6–13. (Scopus) https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.234492. (*Особистий внесок: обґрунтування ефективності застосування двійкових біноміальних чисел в інформаційних технологіях*).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Кулик И. А., Шевченко М. С., Скордина Е. М. Модифицированные способы подсчета двоичных единиц // Матеріали Міжнародної наук.-практ. конференції «Інформаційна безпека та інформаційні технології». Х. : ХНЕУ імені Семена Кузнеця. 2019. С. 32. (*Особистий внесок: адаптація алгоритмів підрахунку двійкових одиниць для біноміального арифметичного складання*).

8. Шевченко М. С., Кулик І.А., Адамов Р.А. Побудова спеціалізованих біноміальних процесорів // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2020». Суми, Сумський державний університет. 2020. С. 113. (*Особистий внесок: практична реалізація арифметичного складання двійкових біноміальних чисел*).

9. Кулик І. А., Шевченко М. С. Деякі принципи складання двійкових біноміальних чисел // Матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання». Івано-Франківськ, Голіней О.М., 2021. С. 62–63. (*Особистий внесок: математичний опис матричної моделі двійкових біноміальних чисел та обґрунтування перетворень вагових коефіцієнтів*).

10. Шевченко М. С., Кулик І. А., Скачедуб С. Л. Матрична модель підсумовування двійкових біноміальних чисел // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2021». Суми, Сумський державний університет. 2021. С. 88. (*Особистий внесок: розробка алгоритму формування матричної моделі арифметичного складання двійкових біноміальних чисел*).

11. Шевченко М. С., Жижа В. В. Адаптивний лічильник на основі біноміальних кодів зі змінною кількістю одиниць // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2021». Суми, Сумський державний університет. 2021. С. 87. (*Особистий внесок: аналіз біноміальної елементної бази для визначення результатів біноміального арифметичного складання*).

12. Шевченко М. С., Кулик І. А., Супрун М. М., Гура Є. Ю. Особливості складання двійкових біноміальних чисел // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2022». Суми, Сумський державний університет. 2022. С. 68. (*Особистий внесок: аналіз умов застосування перетворень біноміальних коефіцієнтів в матриці біноміального арифметичного складання*).

13. Shevchenko Maryna, Kulyk Igor, Abramyan Anton. Systems of code-forming constraints for uniform binary binomial numbers // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023». Суми, Сумський державний університет. 2023. С. 89. (*Особистий внесок: розробка процедур формування рівномірних біноміальних чисел для провадження арифметичного складання*).

14. Шевченко М. С., Косов О. О. Критерії завершення складання двійкових біноміальних чисел // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023». Суми, Сумський державний університет. 2023. С. 83. (*Особистий внесок: математичний опис критеріїв завершення біноміального арифметичного складання*).

15. Shevchenko Maryna, Kulyk Igor, Grekov Taras. Building an adaptive system for counting the number of binary units // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023». Суми, Сумський державний університет. 2023. С. 84. (*Особистий внесок: практична реалізація адаптивного підрахунку двійкових одиниць для провадження біноміального арифметичного складання*).

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Низка інформаційних завдань в комп'ютерних системах і компонентах найбільш ефективним чином вирішуються за допомогою нетрадиційних неоднорідних систем числення, наприклад таких, як факторіальних, фібоначчієвих або біноміальних. До інформаційних завдань, де нетрадиційні неоднорідні системи числення можуть відігравати позитивну роль, можна віднести як поширені, що мають розповсюджений характер, наприклад надійна передача даних, стиснення інформації та шифрування повідомлень, так і спеціалізовані завдання, наприклад генерування комбінаторних об'єктів, проведення комбінаторної оптимізації, забезпечення завадостійкої обчислювальної обробки. На сьогоднішній день традиційна двійкова система численна, застосована в сучасних інформаційно-комунікаційних технологіях, за умови існування достатньо жорстких вимог до часових або програмно-апаратних витрат не здатна досягти значних характеристик по швидкодії, ступеню завадостійкості чи відмовостійкості, рівню функціональності без того, щоб не залучати додаткові, часто вартісні, кодові, програмні або апаратні засоби, особливо, коли постає питання розв'язання спеціалізованих інформаційних завдань.

У цьому сенсі набагато вигідніше виглядають неоднорідні системи числення, включно структурні, застосовані в інформаційно-комунікаційних технологіях обробки даних сумісно з двійковою системою числення або окремо в комп'ютерних системах чи цифрових пристроях. Завдяки своїм властивостям, які не мають двійкові системи чисел, а саме надлишковість, нерівномірність, вбудовані засоби контролю помилок, здатність генерувати комбінаторні об'єкти, неоднорідні системи числення за умови вирішення спеціалізованих завдань дозволяють досягати унікальних характеристик при створення інформаційних технологій на їх основі або побудові спеціалізованих цифрових систем.

Окрім відомих трьох принципів побудови систем числення – взаємо однозначності, кінцевості та ефективності – на сучасному етапі розробки обчислювальної техніки та інформаційних технологій із використанням нетрадиційних неоднорідних систем числення додається ще один, не менш важливий – наявність розробленої машинної арифметики. Вказаний останній принцип має важливе значення у поширенні системи числення в комп’ютерних системах та застосуванні в інформаційно-комунікаційних технологіях, надаючи їм суттєві позитивні якості в можливостях обробки інформації.

Особливе місце серед неоднорідних систем числення займають двійкові біноміальні системи числення через їх більшу надлишковість, складний функціональний зв'язок між ваговими коефіцієнтами та значеннями біноміальних розрядів, подібність їх структури до структури розповсюджених відомих кодів-сполучених (рівноважних та квазірівноважних кодів). Але на сьогоднішній день для двійкових біноміальних систем числення не існує розроблених правил і процедур виконання арифметичних операцій над біноміальними числами, зокрема біноміального складання. Як наслідок, це є стримуючим фактором для більш широкого впровадження біноміальних систем числення у інформаційно-комунікаційних технологіях обробки даних.

Сучасний стан розв’язання цієї проблеми, а саме провадження арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, полягає або у використанні табличного методу, який потребує великих програмних та/або апаратних витрат, або у використанні проміжних ступеневих систем числення, наприклад десяткової чи двійкової, що характеризується великими часовими втратами сумісно із значним обсягом програмних та/або апаратних витрат.

Таким чином, у дисертаційній роботи формулюється та вирішується наступна наукова-прикладна задача – зменшення часу при знаходженні результату біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел при обмеженнях на обсяг програмних та/або апаратних витрат з метою прискорення обчислювальної обробки біноміальної числової інформації.

Науково-технічними проблемами стосовно розвитку неоднорідних систем числення, застосування їх арифметики та побудові на їх основі різноманітних комп’ютерних систем та цифрових пристроїв займались такі відомі іноземні вчені, як Newcomb R., Zeckendorf E., Cover T., Knuth D., Zanten van A. J., Butler T. J. та інші, а також відомі вітчизняні вчені Стахов А. П., Борисенко О. А., Лужецький В. А., Азаров О. Д., Фауре Е.Д. та інші. Зокрема, розробкою перспективних біноміальних систем числення та побудові на їх основі спеціалізованих інформаційно-комунікаційних технологій займалися такі вчені, як Борисенко О. А., Zanten van A. J., Butler T. J., Sasao T. Загальний великий внесок у розвиток теорії біноміальних систем числення та біноміальних чисел, теорії позиційної біноміальної лічби зробив відомий вчений Борисенко О. А.

Актуальність теми дисертаційних досліджень визначається тим, що розробка моделей і методу арифметичного складання двійкових біноміальних чисел стануть основою для побудови біноміальної машинної арифметики, надаватимуть нові можливості щодо створення ефективних інформаційно-комунікаційних технологій по обробці даних: генерування комбінаторних об’єктів, проведення комбінаторної оптимізації, забезпечення завадостійких біноміальних обчислень, а також стимулюватимуть подальший розвиток теорії двійкових біноміальних систем числення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Наукові дослідження за темою дисертації проводились відповідно до плану науково-дослідницьких робіт Сумського державного університету при виконанні кафедрою електроніки і комп'ютерної техніки науково-дослідницьких робіт за темами "Засоби кодування і перетворення інформації в телекомунікаційних системах", № ДР 0116U005238 за 2016-2021 рр.; «Сучасні методи кодування в інформаційних системах», № ДР 0121U113560 за 2021-2026 рр. за рахунок власних коштів Сумського державного університету.

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи з дослідження і розробки моделей та методу арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, що генеруються двійковими біноміальними системами числення, є зменшення часу виконання операції біноміального складання при обмеженнях на об'єм програмних та/або апаратних витрат.

Для досягнення поставленої мети на основі сформульованої науково-прикладної проблеми завдання, які необхідно вирішити в рамках дисертаційної роботи, виглядають наступним чином:

- побудова ефективних моделей для представлення двійкових біноміальних чисел з метою виконання над ними арифметичних операцій;
- розробка математичних моделей та методу біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел;
- синтез алгоритмів біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел;
- оцінка обсягів часових та програмно-апаратних витрат при практичній реалізації біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел;
- дослідження практичних аспектів застосування моделей і методу арифметичного складання двійкових біноміальних чисел в інформаційно-комунікаційних технологіях.

Об'єкт досліджень – процеси обчислювальної обробки інформації в інформаційно-комунікаційних технологіях, які функціонують у двійковій біноміальній системі числення.

Предмет досліджень – моделі та методи підвищення продуктивності спеціалізованих інформаційно-комунікаційних технологій в режимі реального часу на основі моделей і методу арифметичного складання біноміальних чисел, що генеруються двійковими біноміальними системами числення.

Методи досліджень. В основу виконаних в роботі досліджень були покладені принципи системного аналізу, методи досліджень складних технічних систем, методи теорії структурних позиційних систем числення і кодування чисел. При розв'язанні окремих завдань досліджень використовуються наступні наукові методи: методи теорії біноміальних систем числення і біноміального кодування, методи теорії чисел і комбінаторики – при розробці моделей для представлення двійкових біноміальних чисел з метою виконання над ними арифметичних операцій; методи аналізу і синтезу, методи теорії множин і комбінаторики – при розробці математичних моделей та методу арифметичного складання двійкових біноміальних чисел; методи аналізу і синтезу, методи теорії алгоритмів – при синтезі алгоритмів біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел; методи теорії інформації і обчислень – при розробці методів оцінки обсягів часових та програмно-апаратних витрат при практичній реалізації біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел; методи теорії множин і цифрових автоматів – при дослідженні практичних аспектів застосування моделей і методу арифметичного складання двійкових біноміальних чисел для створення перспективних інформаційно-комунікаційних технологій.

Наукова новизна отриманих результатів. Новим науковим результатом дисертації є розв'язання важливої і актуальної науково-прикладної задачі по зниженню часових витрат, необхідних для виконання арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, генерованих двійковими біноміальними системами числення, при обмеженнях на обсяг програмних та/або апаратних витрат. Отриманий науковий результат надає нові можливості в розробці сучасних інформаційно-комунікаційних технологій по обробці даних: генерування комбінаторних об'єктів, комбінаторної оптимізації, забезпечення завадостійкості проведення арифметичних операцій та реалізація надійного керування, а також побудові спеціалізованих біноміальних інформаційно-комунікаційних технологій з покращеними характеристиками з погляду їх швидкодії. В рамках головного нового наукового результату досягнуті низка окремих підпорядкований результатів.

Вперше отримані:

1. Матрична модель двійкових біноміальних чисел, яка базується на матриці вагових коефіцієнтів і враховує функціональний зв'язок між значеннями попередніх біноміальних розрядів і їх позиціями в розрядній сітці біноміальних чисел. Така будова матричної моделі двійкових біноміальних чисел дозволяє просто і в наявному вигляді формувати одиниці переносу з одного біноміального розряду в інший розряд.

2. Матрична модель біноміального арифметичного складання, на основі якої провадиться підсумовування двійкових біноміальних чисел. Розроблена модель дозволяє замінити операції з кількісними значеннями біноміальних коефіцієнтів на операції з їх верхніми та нижніми параметрами, тобто з координатами стовпців та рядків матриці біноміального арифметичного складання, що значно пришвидшує процес додавання біноміальних чисел.

3. Метод арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, який на основі перетворень переносу, зсуву, симетрії та розкладання над комірками матриці біноміального складання, провадить підсумовування двійкових біноміальних чисел, оперуючи координатами комірок матриці складання замість оперування зі значеннями біноміальних коефіцієнтів. Це потребує значно менших обсягів часових та програмно-апаратних витрат для отримання результату складання порівняно з іншими існуючими методами.

Удосконалені:

1. Методи оцінки обсягів часових та програмно-апаратних витрат арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, які дозволяють визначити граничні максимальні значення витрат при практичній реалізації і проводити порівняння з цього погляду з іншими існуючими підходами для отримання результату додавання біноміальних чисел.

2. Моделі оброблення кодів-сполучень, за якими представляються сигнали в інформаційно-комунікаційних технологіях, на основі операцій додавання або добутку із застосуванням арифметичного складання відповідних їм двійкових біноміальних чисел. Це розширює можливості інформаційно-комунікаційних технологій щодо якісної та швидкодіючої обробки сигналів, кодованих кодами-сполучень.

3. Моделі генерування кодів-сполучень, до яких відносяться поширені рівноважні або квазірівноважні коди, на основі арифметичної операції складання двійкових біноміальних чисел, які дозволяють пришвидшити процес генерування кодів-сполучень та підвищити функціональну гнучкість інформаційних систем генерації.

4. Інформаційно-комунікаційна технологія стиснення рівноважних кодів із застосуванням арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, яка дозволяє суттєво підвищити коефіцієнт стиснення інформаційних масивів, складених з рівноважних кодів, і, як наслідок, збільшити швидкість передачі даних по каналам зв'язку.

Отримали подальший розвиток:

Теорія біноміальних систем числення і позиційної біноміальної лічби, що обумовлює більше поширене застосування двійкових біноміальних систем числення та генерованих ними біноміальних чисел при розробці нових інформаційно-комунікаційних технологій обробки даних.

Практичне значення отриманих результатів визначається наступним.

1. Розроблені алгоритми арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, які характеризуються ефективністю, кінцевістю та можуть бути достатньо легко з обчислювального погляду реалізовані на практиці:

1.1 Алгоритм арифметичного складання двійкових біноміальних чисел на основі їх матричного представлення та матриці складання, який дозволяє у асимптотичному вираженні за кубічний час $O\left(n^3\right)$ визначити результат біноміальної суми, де n – параметр біноміальної системи числення, що обмежує розрядність вихідних біноміальних чисел. Це значно менше факторіального часу $O(n!)$, який потребується у разі застосування традиційного способу знаходження результату біноміального складання із використанням проміжних ступеневих систем числення.

1.2 Алгоритм арифметичного складання двійкових біноміальних чисел із застосуванням динамічних масивів, який дозволяє у асимптотичному вираженні вже за квадратичний час $O\left(n^2\right)$ визначити результат біноміальної суми. Це менше кубічного часу $O\left(n^3\right)$ у порівнянні з алгоритмом на основі матричної моделі біноміального складання й значно менше факторіального часу $O(n!)$, який потребується у разі застосування традиційного способу знаходження результату із використанням проміжних ступеневих систем числення. Хоча алгоритм біноміального складання, що застосовує динамічний масив, відрізняється від попереднього алгоритму на основі матричних моделей значно меншим часом функціонування, але в процесі додавання не надає додаткових можливостей по контролю правильності провадження операції.

2. Синтезована структурна модель спеціалізованого пристрою арифметичного складання на основі матричних моделей двійкових біноміальних чисел, в якому основний обсяг апаратних витрат покладається на застосування оперативної пам'яті для збереження матриці біноміального додавання розмірності $(n-k)\times(k+1)$ комірок.

3. Розроблені принципи побудови інформаційно-комунікаційної технології обробки кодів-сполучень, які представляють сигнали даних, з погляду їх підсумовування або перемноження.

4. Розроблені принципи побудови інформаційно-комунікаційної технології генерування кодів-сполучень із застосуванням біноміального арифметичного складання.

5. Розроблені принципи побудови інформаційно-комунікаційної технології стиснення рівноважних кодів з арифметичним складанням двійкових біноміальних чисел.

6. Доведені до рівня патентозаявлення розроблені в дисертаційній роботі метод біноміального арифметичного складання, моделі процесів та алгоритми, що його реалізують.

Практичне значення результатів дисертаційної роботи підтверджується їх впровадженням в програмно-алгоритмічне забезпечення розподілених автоматизованих систем керування технологічними процесами при транспортуванні та розподілу електричної енергії з метою стиснення та шифрування даних в інфокомунікаційних мережах (акт впровадження № 23/06-07 від 07.06.2023 р. від ТОВ «ЕСП «Преобразователь» (м. Суми)), що дозволило в залежності від типу даних в середньому на 12% підвищити швидкість передачі інформації в інформаційно-вимірювальних каналах автоматизованих систем.

Одержані результати використовуються у науково-виробничій діяльності відділу № 8 «Моделювання енергетичних процесів і систем» Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України при дослідженні енергетичних процесів в силових енергетичних установках (акт від 06.09.2023 р), а також в навчальному процесі кафедри електроніки і комп'ютерної техніки Сумського державного університету при викладанні лекційного та практичного матеріалу навчальних дисциплін «Біноміальні автомати» і «Обчислювальна техніка та мікропроцесори» з підготовки здобувачів за спеціальністю 172 «Телекомунікації та радіотехніка».

Особистий внесок здобувача полягає в побудові матричних моделей двійкових біноміальних чисел, розробці методу біноміального арифметичного складання, моделей процесів та алгоритмів, які його реалізують.

Аналіз і систематизація теоретичних положень та практичних відомостей, результатів за темою дисертаційної роботи, вибір об'єктів і методів дослідження наукових завдань дисертації виконані дисертантом особисто.

Результати дисертаційної роботи у повній мірі відображені в публікаціях. Усі співавтори згодні з внеском здобувача. Наукова робота не має плагіату і запозичень.

Апробація матеріалів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи і результати досліджень були висвітлені та обговорені на міжнародних науково-практичних семінарах, науково-технічних конференціях та форумах: Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційна безпека та інформаційні технології» (Харків, ХНЕУ імені Семена Кузнеця; 2019); Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання» (Івано-Франківськ; 2021); Міжнародній науковій конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023» (Суми, Сумський державний університет; 2020, 2021, 2022, 2023).

Публікації. Основні наукові результати дисертації опубліковані в 15 друкованих роботах, в тому числі 6 наукових статей в спеціалізованих фахових виданнях України і 9 тез доповідей в матеріалах і програмах спеціалізованих міжнародних науково-технічних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота містить вступ, чотири розділи, висновки, список використаних джерел та шість додатків. Обсяг загального тексту дисертації складає 194 сторінок, з них основного тексту 172 сторінки. Роботу проілюстровано 13 таблицями і 18 рисунками. Список використаних джерел містить 89 найменувань.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ОСОБЛИВОСТЕЙ АРИФМЕТИКИ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ В ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

1.1 Аналіз ролі неоднорідних позиційних систем числення для вирішення інформаційних задач

Системою числення, або нумерацією, називається сукупність прийомів та правил для найменування та позначення (кодування) чисел [1; 2; 3]. Кожному числу у системі числення зіставляється свій код, який будується у загальному випадку виходячи з вимог зручності уявлення та практичності використання. Очевидно, що застосування систем числення в цифровій техніці, комп'ютерних системах та компонентах накладає додаткові вимоги до кодування числа, наприклад, перешкодозахищеності або компактності їх відображення [2; 4; 5].

Принципи побудови систем числення можуть бути вельми різними, але для їх ефективного використання вони повинні відповідати певним вимогам:

1. Взаємно однозначна відповідність між числом системи числення та кодовим позначенням, що його відображає – вимога однозначності.

2. Кожне ціле число повинно представлятися кодом кінцевої довжини в системі числення, що розглядається – вимога кінцевості.

3. Існування алгоритмів, за допомогою яких за кінцеве число кроків можливий перехід від коду числа досліджуваної системи числення до самого числа, вираженого, як правило, у десятковій системі числення і навпаки – вимога ефективності.

Введемо кінцевий алфавіт $A=\{a_1,a_2,...,a_c,....,a_m\}$, елементи якого будуть використовуватися під час запису чисел у цій системі числення. Елементи a_c називаються цифрами. Кожній цифрі a_c у записі числа однозначно зіставляється кількість, що відображається цією цифрою. Ця кількість називається кількісним еквівалентом (a_c) даної цифри. Якщо a_c є цифра, записана в даному місці в записі числа, то (a_c) означає кількісний еквівалент, який їй зіставляється [1; 4].

Усі системи числення розбиваються на два класи – непозиційні та позиційні [1; 2; 4; 6].

Система числення є позиційною, якщо кількісний еквівалент (a_c), що зіставляється всім цифрам $a_c \in A$, залежить не лише від виду цієї цифри a_c, але і від її розташування у записі числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n$, тобто від значення номера розряду i, де $x_i = a_c$, $X_j \in X$, X – множина чисел X_j даної позиційної системи числення, $j = \overline{1, |X|}$.

Надалі в дисертаційній роботі будуть розглядатися лише позиційні системи числення.

Зміст вимоги однозначності до систем числення згідно теорії кардинальних чисел передбачає те, що система числення повинна вирішувати завдання встановлення однозначної відповідності між елементами двох множин. З одного боку, це натуральні числа (номери) з деякого діапазону $0,1,...,P-1$, де P – кількість елементів множин, між якими встановлюється взаємно однозначна відповідність, а з іншого – P деяких знаків X-системних чисел X_j, що різняться між собою [7; 8].

З огляду на вимогу кінцевості подання чисел, знаки X_j повинні виражатися послідовностями цифр x_i, $i = 1,2,...,n$, що породжуються кінцевим алфавітом:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_c, ..., a_m\},\ X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n,\ x_i = a_c.$$

Очевидно, що в загальному випадку за відсутності порозрядних або міжрозрядних обмежень на значення x_i, маємо m^n можливих послідовностей $X_j \in X$ і, отже, існує можливість кодування $P = m^n$ натуральних чисел. Звідси випливає, за будь-яким великим, але обмеженим діапазоном P довжини n

позначень чисел X_j, формованих алфавітом A і що належать заданому діапазону, будуть кінцеві.

Для визначення кількісного еквівалента F_j повного кодового запису числа X_j у позиційній системі числення вводиться числова функція

$$F\left[(a_1),(a_2),...,(a_m)\right], \tag{1.1.1}$$

аргументами якої є кількісні еквіваленти цифр $x_i = a_c$, що входять до кодового запису даного числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n$ [1; 2; 4]. Значення F_j по суті є номером кодової послідовності $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n$, що відображає відповідний кількісний еквівалент, представлений у тій системі числення, за правилами арифметики якої проводяться операції у числовій функції (1.1.1).

Завдання побудови числової функції (1.1.1) системи числення та обмежень на її параметри є досить складним. Для її вирішення можна використовувати аналітичні співвідношення, запропоновані Кавером (Cover) і які дозволяють визначити кількісний еквівалент (номер) F_j кодової послідовності $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n$ [9; 10]:

1) для випадку $X_j \in X \subseteq \{0,1\}^n$

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} x_i N\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0\right), \tag{1.1.2}$$

де $N\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0\right)$ – число елементів в множині X, в яких перші i елементів дорівнюють $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0$;

2) для випадку $X_j \in X \subseteq \{1, L\}^n$

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{x_i - 1} x_i N\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, l\right), \tag{1.1.3}$$

де $N\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, l\right)$ – число елементів в множині X, в яких перші i елементів дорівнюють $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, l$.

При цьому вважається, що X'_j і X''_j лексикографічно упорядковані: $X'_j < X''_j$, якщо $x'_i < x''_i$ для найменшого індексу i, при якому $x'_i \neq x''_i$.

Зазначені твердження (1.1.2) і (1.1.3) надають лише загальний вигляд представлення, у якому слід шукати відображення. Основні труднощі при побудові числової функції F (1.1.1) та розв'язання задачі відображення $X = \{X_j\}$, а, отже, задоволення вимог до системи числення таких, як однозначності та ефективності, полягає у знаходженні явного аналітичного виразу $N(x_1, x_2, ..., x_i)$ та $N = P$, що залежать від n, L або відмінних характеристик кодових записів X_j.

Слід також зазначити, що числова функція системи числення з її визначеними обмеженнями є лише математичним записом її структури, на основі якої можна отримати необмежену кількість різних кодів, комбінації яких є словами, але не числами [4].

Для більшості існуючих систем числення функція F є функція десяткового додавання. У цьому випадку для знаходження кількісного еквівалента заданого числа X_j необхідно підсумувати за правилами десяткової системи всі кількісні еквіваленти (a_c) цифр $x_i = a_c$, що входять до кодового запису цього числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n$. Таким чином, наявність такої функції F і кінцевість довжини n кодових позначень X_j визначають ефективність відповідної системи числення.

Однак, поняття числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n$ виходить за рамки такої абстракції як кількість елементів, оскільки несе інформацію щодо свого кодового запису (зображення) чи форми. Наявність такого кодового запису $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n$ дозволяє виконувати над числами арифметичні та логічні дії. Необхідно відрізняти кількість елементів від його кодового запису як самого числа. Від кодового представлення чисел значною мірою залежить ефективність реалізації арифметичних та логічних операцій над кількостями. [3; 4; 11].

Теоретичним фундаментом для формування позиційної лічби та подальшого розвитку арифметики в системах числення є теорія порядкових чисел, що ґрунтується на системі аксіом Пеано [7; 12; 13]. Відповідно до аксіом Пеано вводиться деяка сукупність $(X, S_c, 1)$, де S_c – функція слідування на X, стосовно якої X замкнуто і має такі властивості:

а) $S_c(X_j) \neq 1$ для всіх $X_j \in X$;

б) для всіх $X'_j, X''_j \in X$ и $S_c(X'_j) = S_c(X''_j)$ слідує $X'_j = X''_j$;

в) якщо $B \subseteq X$, $1 \in B$ і B має ту властивість, що з $X_j \in B$ слідує $S_c(X_j) \in B$, то $B = X$.

Аксіоми Пеано задають натуральний ряд чисел та, власне, їх порядкові властивості [12; 13; 14]. Спочатку задається позитивне число 1, з якого починається лічба. За ним може йти тільки одне ціле число X_j, відмінне від одиниці – $2 = S_c(1)$. Застосовуючи до X_j функцію $S_c(X_j) = X_j + 1$ достатнє число разів, можна одержати з одиниці будь-яке ціле позитивне число, отже, і натуральний ряд чисел.

Система числення повинна мати можливість своїми внутрішніми засобами відповідно до аксіом Пеано реалізувати функцію слідування S_c. Це означає, що з виду X'_j система числення має визначити наступний знак X''_j. Так як кожен елемент натурального ряду відрізняється на одиницю від попереднього, то $X''_j = S_c(X'_j) = X'_j + 1$.

Введемо між знаками алфавіту A відношення порядку $a_1 < a_2$, $a_2 < a_3$, …, $a_{m-1} < a_m$. Тоді послідовності X_j можна також записати в лексикографічному порядку і, отже, з вигляду X'_j можна визначити $X''_j = S_c(X'_j)$. Це означає, що у непозиційних системах числення за допомогою функції $S_c(X_j)$ також можна реалізувати арифметичні операції. Проте ефективність реалізації з погляду швидкодії буде невелика, оскільки операції здійснюються шляхом послідовного перебору чисел натурального ряду, тобто додавання з одиницею. Додавання у разі реалізується як

$$X_j + S_c\left(Y_j\right) = \left(X_j + Y_j\right) + 1 = S_c\left(X_j + Y_j\right),$$

а множення

$$X_j \cdot 1 = X_j,\ X_j \cdot S_c\left(Y_j\right) = X_j \cdot \left(Y_j + 1\right).$$

Інші операції реалізуються аналогічним чином [12; 13; 14].

Введення числової функції F у позиційні системи числення дозволило значно підвищити ефективність рахунку завдяки прискореному виконанню арифметичних операцій за певними правилами з метою розв'язання задачі однозначного перетворення послідовностей $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n$ до числа натурального ряду і у зворотному напрямку. У найпростішому найпоширенішому випадку послідовність $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_n$ є елементом декартового ступеня A^n, $X \subseteq A^n$. Однак у загальному випадку можуть бути задані обмеження, що розділяють множину усіх можливих послідовностей A^n на підмножину X дозволених $X_j \in X$ і підмножину заборонених A^n / X [3; 7].

Класифікація позиційних систем числення (рисунок 1.1) ґрунтується на особливостях поетапного розбиття вихідної множини елементів на підмножини з подальшою їх індексацією для отримання одноелементних підмножин та їх номерів [4]. Позиційні системи числення, що генерують рівномірні числа, відносяться до однорідних систем. Їх також називають ще природними, або ступеневими. До відомих ступеневих систем числення відносяться прості десяткова, вісімкова, шістнадцяткова і двійкова системи, для основ яких застосовуються числа натурального ряду. Характерною ознакою однорідних позиційних систем числення, крім згаданої вище рівномірності чисел, є залежність ваг їх розрядів, які змінюються за ступеневим законом, тільки від їхнього розташування в записі числа [4].

Рисунок 1.1 – Класифікація позиційних систем числення

Стрімкий розвиток більш складніших неоднорідних позиційних систем числення пов'язано з появою та розвитком обчислювальної техніки, цифрових спеціалізованих пристроїв і систем. Неоднорідні позиційні системи числення мають унікальні характеристики, але в досить вузьких сферах їх застосування: генерування комбінаторних об'єктів, комбінаторна оптимізація, шифрування і стиснення даних, високонадійні системи.

Структури неоднорідних систем числення є набагато складнішими і, виходячи з цього, кодові позначення чисел цих систем числення відрізняються надмірністю. Неоднорідні системи числення будуються на основі змішаної або функціональної числової основи, перші з яких мають числа з рівною довжиною, другі – з нерівною. У неоднорідних системах числення зі змішаною основою власне основи змінюються від розряду до розряду, як правило, у порядку зростання, а числовий діапазон дорівнює їхньому добутку [2; 3; 4].

Характерною особливістю неоднорідних систем числення є те, що у таких систем ваги розрядів чисел залежать від номера розряду за більш складнішим функціональним нестепеневим законом. Деяка частина з неоднорідних систем числення при цьому зберігають рівномірність чисел, що генеруються ними. У неоднорідних систем числення з рівномірними числами спостерігається рівність вагових коефіцієнтів цифр, які належать тому самому розряду числа. До таких систем числення відносяться, наприклад поліадичні та факторіальні системи числення [2; 4; 10].

До неоднорідних систем числення зі змішаною числовою основою належить факторіальна система чисел, яка широко застосовується для вирішення різних інформаційних завдань.

Числова (нумераційна) функція факторіальної системи числення має такий вигляд [2; 4; 11]:

$$F_j = a_n n! + a_{n-1}(n-1)! + \ldots + a_i \cdot i! + \ldots + a_1 \cdot 1! + a_0 \cdot 0!, \qquad (1.1.4)$$

а обмеження на розряди факторіальних чисел є нерівністю наступного вигляду:

$$0 \le a_i \le i,\ i = \overline{0,n}. \qquad (1.1.5)$$

Числовий діапазон факторіальної системи чисел відповідає

$$P = (n+1)!.$$

Максимальне число факторіальної системи числення представляється як $n(n-1)...i...0$, а його кількісний еквівалент дорівнює

$$F_{j\max} = (n+1)! - 1.$$

Мінімальне число $00...0...0$ у факторіальній системі, явним чином, має значення в десятковій системі рівне $F_{j\min} = 0$.

Оптимальним машинним представленням факторіальних чисел є їхнє двійкове кодування, тому в перетвореннях в факторіальну систему числення використовуються двійкові числа [15; 16]. При доведенні до максимального кратного $m = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ числа двійкових розрядів, за допомогою яких кодується кожна факторіальна цифра, отримуємо загальну кількість двійкових розрядів, необхідних для представлення двійково-факторіального числа:

$$N = n \cdot m = n \cdot \lceil \log_2(n+1) \rceil.$$

Головною корисною особливістю факторіальних систем числення є те, що вони можуть генерувати перестановки [17; 18; 19]. Ця властивість визначається тим, що структуру множини перестановок задають факторіальні числа. Крім традиційних перестановок, факторіальні системи числення здатні породжувати інші комбінаторні об'єкти, що походять з перестановок з обмеженнями на значення розрядів [17; 20].

Перестановки, одержувані на основі факторіальних чисел, що генеруються факторіальними системами числення, використовуються для формування високонадійних шифрів, тобто в завданнях захисту інформації від несанкціонованого доступу. Крім того, перестановки дозволяють досить легко виявляти і виправляти помилки в інформаційних повідомленнях, що передаються за їх допомогою, таким чином, додатково вирішуючи завдання завадостійкого кодування [21].

На рисунку 1.2 демонструється структура системи завадостійкої передачі та захисту даних на перестановках, які формуються за допомогою факторіальних чисел, із застосуванням прямого та зворотного каналів зв’язку [21].

Питання застосування перестановок для завадостійкого кодування ширше розглядаються у наукових роботах [22; 23], де на основі розроблених методів факторіального кодування будується різні завадостійкі факторіальні коди – коди на принципах повного факторіального кодування, факторіальні коди з проріджуванням, факторіальні коди з відновленням даних на основі перестановки, систематичні факторіальні коди з декількома контрольними сумами. Всі вказані факторіальні коди передбачають формування контрольної суми (перестановки) відповідно до багаторозрядного інформаційного вектору, що надходить на вхід кодеру.

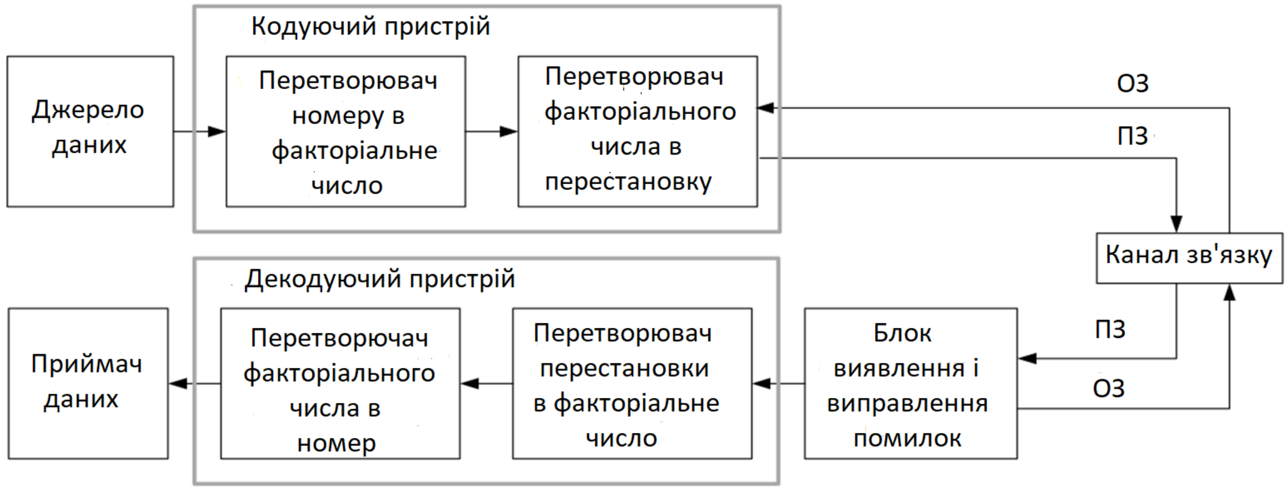


Рисунок 1.2 – Структура системи перешкодостійкої передачі та захисту даних на перестановках (ПЗ – прямий зв'язок, ОЗ – зворотний зв'язок)

Також перспективними сферами застосування факторіальних систем числення є вирішення низки комбінаторних завдань [20; 24]. Так, у роботі [20] аналізуються деякі підходи для вирішення відомої задачі комівояжера на основі факторіальних чисел, які використовуються для швидкої побудови перестановок з обмеженнями.

Отримані за допомогою факторіальної системи числення перестановки використовуються також для вирішення таких інформаційних завдань, як комутація каналів, автоматизація конструкторського проектування топології друкованих плат, хешування при розподілі пам'яті даних у комп'ютерах, аналіз надійності обчислювальних систем [15; 24; 25; 26].

Більш складними неоднорідними системами числення є структурні системи, в основу яких покладено різні комбінаторні співвідношення. Для таких систем числення порядок розбиття множини елементів на одноелементні підмножини з подальшою їх індексацією призводить до нерівномірності представлення структурних чисел. Структурні системи числення відрізняються тим, що вагові коефіцієнти розрядів структурних чисел, що генеруються, залежать не тільки від розташування розряду в числі, а й від значень попередніх розрядів. Таке складне формування ваг розрядів структурних чисел наділяє структурні системи числення вельми корисними властивостями такими, як здатність виявляти помилки, генерувати різні комбінаторні конфігурації або стискати інформаційні повідомлення. Використання структурних систем числення в комп'ютерних системах і компонентах на сьогоднішній день є перспективним напрямом, наділяючи останні досить унікальними характеристиками за швидкодією, перешкодостійкістю чи надійністю. Але зворотною негативною стороною складних функціональних зв’язків між значеннями вагових коефіцієнтів, номерами розрядів та їх значень є складність машинної арифметики структурних систем числення.

До структурних систем числення відноситься клас фібоначчієвих систем числення, які мають природну структурну надмірність [27; 28]. Це обумовлює їх здатність виявляти помилки при їх застосуванні в комп'ютерних системах та у разі потреби ці помилки виправляти.

Фібоначчієва система числення будується на основі послідовності чисел Фібоначчі, яка визначається наступним чином [28; 29]:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ \ldots,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \tag{1.1.6}$$

Декілька перших членів такої числової послідовності (1.1.6) мають вигляд:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots,\ F_n. \tag{1.1.7}$$

Теорема Цекендорфа стверджує, що будь-яке натуральне число n можна подати єдиним чином у вигляді суми чисел Фібоначчі (1.1.6) [27; 30]:

$$N = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_r},$$

де $k_1 \geq k_2 + 2$, $k_2 \geq k_3 + 2$, $\ldots$, $k_r \geq 2$ (тобто в записі будь-якого натурального числа не можна використовувати два сусідні числа Фібоначчі).

Числова функція фібоначчієвої системи числення, що визначає кількісний еквівалент $F_{j\langle фб \rangle}$ n-розрядного фібоначчієвого числа, має наступний вигляд [27; 28]:

$$F_{j\langle фб \rangle} = a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + \ldots + a_i F_i + \ldots + a_1 F_1, \tag{1.1.8}$$

де $a_i \in \{0,1\}$ – двійкове значення i-го розряду фібоначчієвого числа;

F_i – вага i-го розряду фібоначчієвого числа.

В якості вагових коефіцієнтів F_i значень двійкових розрядів a_i фібоначчієвого числа виступають числа Фібоначчі (1.1.7). Нуль із числової послідовності (1.1.7) не використовується в записі фібоначчієвого числа.

Вираз (1.1.8) отримало назву «подання Цекендорфа», званим також «кодом Фібоначчі». Основною властивістю виразу (1.1.8) є надмірність, яка виражається в множинності фібоначчієвих представлень чисел.

У скороченому вигляді фібоначчієве число подається як $a_n a_{n-1} ... a_i ... a_1$ (нульовий розряд відсутній). Така форма фібоначчієвого числа має назву мінімальної (нормальної) форми представлення.

Діапазон фібоначчієвих чисел визначається рівністю

$$P = F_n + F_{n-1}.$$

Подальшим розвитком фібоначчієвих систем числення стали узагальнені числа Фібоначчі або p-числа Фібоначчі, які обчислюються згідно з наступною рекурентною формулою [28; 31]:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \qquad (1.1.9)$$

при наступних початкових умовах:

$$F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1. \qquad (1.1.10)$$

p-числа Фібоначчі є основою для розгляду p-кодів Фібоначчі, під яким розуміється наступний спосіб позиційного представлення натуральних чисел [28; 31]:

$$F_{j\langle фб \rangle}^{(p)} = a_n F_p(n) + a_{n-1} F_p(n-1) + ... + a_i F_p(i) + ... + a_1 F_p(1), \qquad (1.1.11)$$

де $a_i \in \{0,1\}$ – двійкове значення i-го розряду позиційного представлення (1.1.11);

$F_p(i)$ – вага i-го розряду, тобто p-число Фібоначчі, що задається рекурентним співвідношенням (1.1.9), (1.1.10).

Надмірність, яка властива кодам Фібоначчі через «множинність» представлення одного і того ж числа, використовується для контролю перетворень інформації в комп'ютерних системах. При цьому різні кодові представлення числа можуть бути отримані за допомогою спеціальних «фібоначчієвих» операцій «згортки» $(011 \rightarrow 100)$ і «розгортки» $(100 \rightarrow 011)$, виконуваних над кодовим зображенням числа. Якщо над кодовим зображенням виконати всі можливі операції «згортки» $011 \rightarrow 100$, то виходить мінімальна форма подання фібоначчієвого числа, в якій двох одиниць поряд у кодовому зображенні не може бути. Якщо у кодовому зображенні виконати всі можливі операції «розгортки» $100 \rightarrow 011$, то виходить максимальна або розгорнута форма, в якій двох нулів поруч не зустрічається.

Зазначені властивості кодів Фібоначчі знаходять застосування при вирішенні інформаційних завдань щодо забезпечення більш надійної обробки даних, у тому числі обчислювальної, завадостійкої передачі повідомлень каналами зв'язку та їх криптографічної стійкості [32; 33]. Таким чином, в наявності цілий клас самоконтрольованих, самокоректуючих обчислювальних та вимірювальних систем, заснованих на числах Фібоначчі [32; 34; 35].

У роботі [36] код Фібоначчі пропонується використовувати для наскрізного контролю як при обробці інформації, так і при її передачі в різних системах відображення даних, аналого-цифрових і цифро-аналогових пристроях, частотомірах і т. д. Надшвидкісні перетворення над числовими даними при цифровій обробці сигналів також реалізуються за допомогою узагальнених чисел Фібоначчі (або p-чисел Фібоначчі). З цією метою проводиться розробка спеціалізованих процесорів Фібоначчі компанією Analog Devices, які виконують операції у коді Фібоначчі [37]. Побудова основ арифметики Фібоначчі дозволило запустити і успішно розвивати перспективний проект «Комп'ютер Фібоначчі», основу якої становить, створена вченим А. П. Стаховим, трійкова дзеркально-симетрична арифметика, а також методи і підходи, запропоновані вченим В. А. Лужецьким [38; 39].

До ще більш складних структурних систем числення відносяться біноміальні системи числення, зокрема біноміальні системи числення з двійковим алфавітом або двійкові біноміальні системи числення [40; 41; 42], які розглядаються в даній дисертаційній роботі. Двійкові біноміальні системи числення за основу використовують біноміальні коефіцієнти, тобто комбінаторні співвідношення. Генеровані біноміальними системами числення двійкові біноміальні числа мають ще більшу надмірність і, відповідно, підвищену завадостійкість, а також більш складні функціональні співвідношення між значеннями вагових коефіцієнтів біноміальних розрядів. На відміну від чисел факторіальної та фібоначчієвої систем числення, двійкові біноміальні числа мають нерівномірну довжину, тобто вони відносяться до кодів з нерівномірною кодовою довжиною. Даний факт дещо ускладнює їх застосування на практиці, але їх безперечні переваги – надмірність, завадостійкість, здатність генерувати комбінаторні об'єкти, які пов'язані з числами сполучень з обмеженнями або без – роблять такі системи числення перспективними для побудови спеціалізованих цифрових пристроїв з унікальними характеристиками – високонадійних систем управління та стиснення інформації, систем шифрування даних на основі біноміальних чисел, систем передачі інформації на основі біноміальних кодів, пристроїв генерування комбінаторних об'єктів [41; 42; 43].

Слід окремо відзначити, що вагові коефіцієнти біноміальних розрядів двійкових біноміальних чисел змінюються не лише за більш складним функціональним законом, але ще в залежності від значень попередніх розрядів чисел. Зазначена обставина суттєво ускладнює розробку машинної біноміальної арифметики, тобто проведення арифметичних операцій над біноміальними двійковими числами. Як наслідок, відсутність моделей та методів біноміальної арифметики, починаючи з операції підсумовування двійкових біноміальних чисел, перешкоджає широкому поширенню двійкових біноміальних систем числення в цифровій техніці, комп'ютерних системах та компонентах, як універсальних, так і спеціалізованого призначення, значно ускладнюють розробку перспективних інформаційних технологій із широким застосуванням двійкових біноміальних чисел.

1.2 Двійкові біноміальні системи числення

Теорію і практику біноміальних систем числення розробив відомий вчений, професор Борисенко О. А. [43; 44]. Біноміальні системи числення відносяться до класу неоднорідних структурних систем. За своєю структурою біноміальні системи числення є більш складнішими і мають більшу надмірність у порівнянні з неоднорідними факторіальними та фібоначчієвими.

Визначення 1.1 *Біноміальними системами числення називаються позиційні системи числення, в якості основ яких використовуються біноміальні коефіцієнти* [44].

Зважаючи на те, що в якості основ біноміальних систем числення застосовуються комбінаторні співвідношення – біноміальні коефіцієнти, їх ще відносять до класу комбінаторних числових систем.

Визначення 1.2 *Будь-яка кінцева послідовність цифр* $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, *яка задовольняє обмеженням на числову функцію біноміальної системи числення, називається біноміальним числом.*

Дане визначення біноміального числа відрізняється від наведеного в роботах [43; 44] порядком нумерації цифрових розрядів. Надалі саме зазначений порядок нумерації розрядів біноміального числа використовуватиметься під час викладу результатів дисертаційної роботи.

У даній науковій роботі розглядаються біноміальні системи числення з двійковим алфавітом $\{0,1\}$, або двійкові біноміальні системи числення, які генерують двійкові біноміальні r-розрядні числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$, де $x_i \in \{0,1\}$.

Двійкові біноміальні системи числення і біноміальні числа, що породжуються ними, задовольняють загальним вимогам, що пред'являються до систем числення. У роботах [43; 44] для двійкових біноміальних систем числення представлено обґрунтування:

– взаємно однозначності кодового відображення двійкових біноміальних чисел та їх десяткових кількісних еквівалентів;

- кінцевості довжини кодового представлення двійкових біноміальних чисел;
- можливості переходу за кінцеве число кроків від коду двійкового біноміального числа до числа, вираженого в десятковій системі числення та навпаки.

Числова функція двійкової (n,k)-біноміальної системи числення виглядає наступним чином [45; 46]:

$$F_j = \operatorname{dec} X_j = x_1 C_{n-1}^{k-q_1} + x_2 C_{n-2}^{k-q_2} + \ldots + x_i C_{n-i}^{k-q_i} + \ldots + x_r C_{n-r}^{k-q_r} = \\ = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{n-i}^{k-q_i}, \qquad (1.2.1)$$

де n і k – параметри двійкової (n,k)-біноміальної системи числення;

x_i – двійкова біноміальна цифра $x_i \in \{0,1\}$;

q_i – сума одиничних значень x_i від першого розряду до $(i-1)$-го включно, $0 \le q_i \le k-1$:

$$q_i = \sum_{t=1}^{i-1} x_t . \qquad (1.2.2)$$

Двійкові (n,k)-біноміальні числа $X_j = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r$ з множини $X[n,k]$, $X_j \in X[n,k]$, повинні задовольняти системам кодоутворюючих (числоутворюючих) обмежень вигляду [47]:

$$\begin{cases} l = n-k \\ x_r = 0\ , \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

$$\begin{cases} q = k \\ x_r = 1\ , \end{cases} \qquad (1.2.4)$$

де l і q – кількість нулів та одиниць відповідно у двійковому (n,k)-біноміальному числі.

Системи обмежень (1.2.3) і (1.2.4) є наслідком числової функції (1.2.1) двійкової (n,k)-біноміальної системи числення [45; 46; 47].

Параметри n і k значною мірою визначають структуру двійкової (n,k)-біноміальної системи числення та властивості (n,k)-біноміальних чисел.

В якості вагового коефіцієнта i-го розряду в числовій функції (1.2.1) виступає біноміальний коефіцієнт $C_{n-i}^{k-q_i}$. Його значення залежить як від позиції $i=1,2,...,r$ розряду, так і від суми q_i значень, що передують цьому розряду x_i в двійковому (n,k)-біноміальному числі X_j. Остання залежність характерна тільки для структурних систем числення та надає двійковій (n,k)-біноміальній системі числення перешкодостійкі та структуроутворюючі властивості.

Діапазон P двійкових (n,k)-біноміальних чисел складає:

$$P = C_n^k. \tag{1.2.5}$$

У додатку А як приклад наведено весь діапазон $P = C_7^4 = 35$ двійкових $(7,4)$-біноміальних чисел.

Приклад 1.1 Визначити десятковий кількісний еквівалент двійкового $(7,4)$-біноміального числа такого вигляду 100110.

Пояснення для прикладу. Наведене двійкове $(7,4)$-біноміальне число має $r=6$ розрядів і задовольняє першу систему кодоутворюючих обмежень (1.2.3):

$$\begin{cases} l = 3 \\ x_r = 0 \end{cases}.$$

Скористаємося біноміальною числовою функцією (1.2.1) і виразом (1.2.2) для знаходження часткових сум q_i:

$$F_j = \mathrm{dec}(100110) = C_{7-1}^{4} + C_{7-4}^{4-1} + C_{7-5}^{4-2} = C_6^4 + C_3^3 + C_2^2 = 15+1+1=17.$$

Таким чином, отримуємо кількісний еквівалент у десятковому виражені $F_j = \mathrm{dec}(100110) = 17$, що відповідає десятковому номеру заданого двійкового $(7,4)$-біноміального числа з таблиці А.1 Додатку А. *Приклад завершений*.

Деякі з важливих властивостей двійкових (n,k)-біноміальних чисел, які знайшли застосування при розробці методу та моделей біноміального арифметичного складання, виглядають наступним чином [44].

Властивість 1. Кількість r розрядів двійкового (n,k)-біноміального числа змінюється у діапазоні:

$$\min(k, n-k) \le r \le n-1, \tag{1.2.6}$$

тобто двійкові (n,k)-біноміальні числа є нерівномірними.

Властивість 2. Двійкові (n,k)-біноміальні числа, що задовольняють обмеження (1.2.3), мають постійну кількість нулів $l = n - k$ та змінне число одиниць $0 \le q \le k-1$.

Властивість 3. Двійкові (n,k)-біноміальні числа, що задовольняють обмеження (1.2.4), мають постійну кількість одиниць $q = k$ та змінна кількість нулів $0 \le l \le n-k-1$.

Властивість 4. Мінімально та максимально можливі величини максимального числа k одиниць в двійковому (n,k)-біноміальному числі дорівнюють $k_{\min} = 1$ і $k_{\max} = n-1$ відповідно.

Властивість 5. Кількість N_q двійкових (n,k)-біноміальних чисел, що задовольняють систему обмежень (1.2.3), при фіксованому числі одиниць $0 \le q \le k-1$ складає:

$$N_q = C_{n-k+q-1}^{q}.$$

Властивість 6. Кількість N_l двійкових (n,k)-біноміальних чисел, які задовольняють системі обмежень (1.2.4), при фіксованому числі нулів $0 \le l \le n-k-1$ складає:

$$N_l = C_{k+l-1}^{l}.$$

Властивість 7. Кількість N_{n-k} всіх двійкових (n,k)-біноміальних чисел, які задовольняють систему обмежень (1.2.3), дорівнює:

$$N_{n-k} = C_{n-1}^{k-1}.$$

Властивість 8. Кількість N_k всіх двійкових (n,k)-біноміальних чисел, які задовольняють систему обмежень (1.2.4), дорівнює:

$$N_k = C_{n-1}^{k}.$$

Нерівномірні системи числення, що генерують нерівномірні числа, крім загальних вимог до систем числення повинні відповідати вимогі префіксності кодових зображень чисел, тобто ніякий код числа нерівномірної системи числення не повинен бути початком кодового зображення будь-якого іншого числа. Для двійкових біноміальних систем числення дана вимога виконується у вигляді представлення біноміальних чисел у формі чисел сполучень $0 \le q \le k-1$ одиниць або $0 \le l \le n-k-1$ нулів серед $\max(k, n-k) \le r \le n-1$ розрядів [43; 44].

Двійкові біноміальні системи числення мають значні перспективи застосування на практиці для вирішення таких інформаційних завдань, як стиснення інформації, забезпечення стійкості до перешкод і наскрізного контролю даних, шифрування повідомлень, генерування комбінаторних об'єктів, в основі яких лежать числа сполучень [42; 46; 48].

Реалізацію завдання економного представлення даних з метою збільшення швидкості їх передачі та зменшення обсягу їх зберігання можна з успіхом виконати, застосовуючи двійкові (n,k)-біноміальні числа X_j і методи стиснення на їх основі [45; 46]. При цьому використовуються такі властивості та особливості двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j, як:

1) довжина r для біноміальних чисел X_j (1.2.6) може бути суттєво менше кількості n розрядів перетворюваних кодових послідовностей A_j, де $A_j \in \{0,1\}^n$;

2) властивість префіксності для біноміальних чисел X_j, що дозволяє вибудовувати з них послідовні ланцюжки, що декодуються;

3) наявність досить простих перетворень вихідних послідовностей A_j в біноміальні числа X_j і навпаки при обчислених значеннях числа k двійкових одиниць, що містяться в A_j.

Поряд із стисненням інформації, організацією передачі та зберігання даних двійкові (n,k)-біноміальні числа дозволяють також вирішувати завдання забезпечення стійкості до відмов інформаційно-керуючих систем і пристроїв, а також забезпечення перешкодостійкості передачі даних між ними [48; 49]. Системи кодоутворюючих обмежень (1.2.3) і (1.2.4) надають засоби контролю правильності кодових комбінацій, що відображаються двійковими (n,k)-біноміальними числами, та безпомилковості функціонування модулів та блоків на їх основі. Двійкові (n,k)-біноміальні числа у разі правильності їх представлення повинні задовольняти такі умови:

1) кількість $0 \le q \le k-1$ і нулів $l = n-k$, або $q = k$ і $0 \le l \le n-k-1$ для нерівномірних кодових комбінацій;

2) кількість одиниць $0 \le q \le k-1$ і нулів $l = 2n-k-r$, або $q = k$ і $n-r \le l \le 2n-k-r-1$ для рівномірних кодових комбінацій [44; 48].

Як зазначається в роботах [4; 48; 50], біноміальні числа можна виділити у структурі множини комбінаторних об'єктів, що призводить до можливості їх використання для генерування та перерахування комбінаторних конфігурацій з метою вирішення різних завдань комбінаторної оптимізації. Очевидно, що такий підхід через тотожність їх структурних властивостей характеризуватиметься суттєво меншими програмно-апаратними та часовими витратами, ніж у разі використання для цієї цілі звичайної двійкової системи числення. В інформаційно-керуючих системах широкого розповсюдження набули рівноважні та квазірівноважні коди, інші коди-сполучення, у яких кількості одиниць (нулів) або відстані між ними в розрядній сітці підпорядковуються певним обмеженням [51; 52].

Моделі перерахування та генерування кодів-сполучень як складових елементів процесів біноміального перетворення даних в інформаційно-керуючих системах відображаються складними функціями наступного вигляду [50]:

1) перерахування кодів-сполучень $Y_j\left[R_Y\right]$ із заданим обмеженням R_Y з метою отримання їх номерів F_j –

$$F_j = f\left(Y_j\left[R_Y\right]\right) = \psi\left(\varphi^{-1}\left(Y_j\left[R_Y\right]\right)\right);$$

2) генерування кодів-сполучень $Y_j\left[R_Y\right]$ із заданим обмеженням R_Y на основі відповідних номерів F_j –

$$Y_j\left[R_Y\right] = f^{-1}\left(F_j\right) = \varphi\left(\psi^{-1}\left(F_j\right)\right),$$

де $\psi : X \to F$ і $\psi^{-1} : F \to X$ – бієктивні біноміальні пряме та зворотне відображення множини X біноміальних чисел X_j на множину F номерів F_j і обернено F на X відповідно. Відображення ψ і ψ^{-1} реалізуються з використанням наведених біноміальної числової функції (1.2.1) та систем кодоутворюючих обмежень (1.2.3) і (1.2.4).

1.3 Особливості арифметики неоднорідних систем числення

Способи зображення чисел суттєво визначають методи їх кодування і, найголовніше, правила та процедури арифметичних і логічних операцій в системах числення.

Однією з важливих вимог до систем числення є можливість машинної реалізації арифметичних і логічних операцій. Адже в цілому наявність у системі числення розробленої арифметики істотно впливає на її поширеність у цифровій техніці та комп'ютерних системах, її використання для побудови систем управління, обробки та передачі даних. Існування прийнятних з погляду програмно-апаратних та часових витрат правил і процедур виконання арифметичних операцій значно посилює потенціал систем числення для розробки нових інформаційних технологій обробки даних на їх основі. Очевидно, від успішного вибору системи числення залежить ефективність розв'язання багатьох інформаційних завдань, таких як завадостійке кодування та шифрування даних, стиснення інформації, генерування комбінаторних об'єктів, комбінаторна оптимізація і т. д.

Також слід відзначити важливу роль розробки позиційної лічби для систем числення, яка забезпечує початкові основи правил та процедур виконання арифметичного складання і віднімання, є свого роду вступом до розробки машинної арифметики. Наявність розробленого підсумовуючого та віднімаючого рахунку в неоднорідних системах числення є непрямим підтвердженням існування в них машинної арифметики.

В однорідних системах числення, як наприклад традиційних двійковій, вісімковій або шістнадцятковій, виконання арифметичних операцій характеризується простотою та універсальністю дій щодо значень основ і позицій розрядів чисел. Це пояснюється, насамперед, однорідністю їх структури, що обумовлюється ступеневим законом зміни значень вагових коефіцієнтів залежно від позицій розрядів. З іншого боку, однорідні системи числення простіше реалізуються практично і оперують рівномірними числами.

Але є позитивні й корисні особливості у неоднорідних систем числення, які у своїй більшості є нехарактерними для однорідних числових систем. Поява таких особливостей пов'язана зі складністю їхньої структури. До специфічних, але дуже корисних, особливостей неоднорідних систем числення відносяться завадостійкість їх чисел; здатність генерувати перестановки, числа сполучень чи інші комбінаторні об'єкти з різними обмеженнями; шифрувальні властивості; здатність виконувати окремі обчислювальні операції із високою швидкістю. До класу неоднорідних систем числення належать раніше згадані факторіальна, фібоначчієва та біноміальна системи числення.

При вирішенні інформаційних завдань універсального характеру неоднорідні системи числення не можуть конкурувати з традиційними системами числення через нескладність їх практичної реалізації та простоту алгоритмів арифметичних операцій. Але у разі розв’язання спеціалізованих завдань з обробки інформації неоднорідні системи числення, або їх підклас – структурні системи числення, можуть демонструвати певною мірою унікальні характеристики за швидкодією, завадостійкістю або обсягом програмно-апаратних витрат при практичній реалізації пристроїв, що їх використовують. Разом з тим, навіть працюючи у зв'язці з традиційними системами числення (наприклад, двійковою), вони здатні помітним чином підвищити ефективність вирішення також універсальних, стандартних інформаційних завдань масового характеру. Таким чином, наявність ефективної машинної арифметики дозволяє істотно розширити використання неоднорідної системи числення для вирішення інформаційних завдань на практиці.

Як зазначалося (підпункт 1.1), факторіальна система числення належить до неоднорідним системам числення зі змішаною числовою основою [2; 4; 11]. Використовувана змішана числова основа у цій системі числення ще має назву основи факторіалу, значення якої служить як розрядне обмеження значень i-х розрядів цифр (1.1.5) факторіального числа. Вагові коефіцієнти, виходячи з вигляду числової функції (1.1.4), змінюються не за ступеневим, а за факторіальним $i!$ законом. З урахуванням обмеження (1.1.5) від розряду до розряду факторіального числа спостерігається розширення діапазону значень цифр його розрядів. Все це разом, очевидно, призводить до особливостей виконання арифметичних операцій у факторіальній системі числення та порівняно з однорідними системами числення обумовлює ускладнення факторіальної арифметики.

Під час виконання арифметичних операцій підсумовування та віднімання у факторіальній системі числення в нульовому розряді використовують унітарну (одиничну) систему числення, у першому – двійкову, у другому – трійкову тощо. Операції множення та ділення здійснюються за допомогою операцій складання та віднімання за загальними правилами однорідних систем числення [4; 19].

Таким чином, результат порозрядного складання $\{z_i\}$ двох чисел у факторіальній системі числення з розрядами $\{x_i\}$ і $\{y_i\}$ представляє собою додавання $x_i + y_i$ з перенесенням одиниці до наступного розряду, тобто якщо $x_i + y_i < i+1$, то приймаються $z_i = x_i + y_i$ і $z_{i+1} = z_{i+1}$, в протилежному випадку виконуються $z_i = \left(x_i + y_i\right) - \left(i+1\right)$ і $z_{i+1} = z_{i+1} + 1$.

Факторіальна лічба, тобто збільшення або зменшення на одиницю, у факторіальній системі числення здійснюється просто, за правилами «природних» однорідних систем числення (унітарної, двійкової, трійкової тощо), які відповідають кожній цифрі факторіального числа. При досягненні значення, що перевищує максимальне дозволене для i-го розряду (1.1.5), виконується переніс одиниці в $\left(i+1\right)$-й розряд факторіального числа. При двійково-факторіальному кодуванні факторіальних чисел застосовуються звичайні правила двійкової лічби, а за практичної реалізації n-розрядні факторіальні лічильники є наборами двійкових лічильників із заданими коефіцієнтами лічби $k_{сч} = 1, 2, ..., n$, що формують після переповнення імпульси перенесення [53; 54].

Фібоначчієва система числення відноситься до класу неоднорідних структурних числових систем. Вона характеризується числовою функцією виду (1.1.8) та базується на послідовності чисел Фібоначчі (1.1.6), тобто дана система числення має змішану числову основу [6; 28]. Виконання арифметичних операцій у фібоначчієвій системі характеризується більш складними правилами та процедурами, ніж, наприклад, у факторіальній системі числення. Складність фібоначчієвої арифметики пов'язана з тим, що:

- вага старших розрядів фібоначчієвих чисел не є кратною ваговому коефіцієнту розряду, з якого потрібно здійснювати переніс;
- при додаванні двох одиниць в одному розряді потрібно здійснювати переніс не тільки вліво, але й вправо, наприклад, $0200 = 1001$;
- при перенесенні у відсутні розряди a_1 і a_0 необхідно враховувати, що $F_2 = F_1 = 1$ і $F_0 = 0$;
- потрібне виключення сусідніх одиниць: $011 = 100$.

Для просування проекту «Комп'ютер Фібоначчі» вченим Стаховим А. П. була розроблена трійкова дзеркально-симетрична арифметика в рамках «фібоначчієвого» напряму у комп'ютерній техніці [38; 39; 55]. Відповідно до правил дзеркально-симетричної арифметики як ваги розрядів для позиційного трійкового представлення чисел використовується послідовність парних ступенів золотої пропорції:

$$\ldots,\tau^{6},\tau^{4},\tau^{2},\tau^{0},\tau^{-2},\tau^{-4},\tau^{-6},\ldots. \qquad (1.3.1)$$

Члени цієї послідовності зв'язуються співвідношенням:

$$\tau^{2n}+\tau^{2n}=\tau^{2(n+1)}-\tau^{-2n}+\tau^{2(n-1)},$$

яке має наступну кодову інтерпретацію:

$$1+1=1\bar{1}1. \qquad (1.3.2)$$

Вираз (1.3.2) задає правило складання позитивних одиниць у фібоначчієвій арифметиці дзеркально-симетричної системи числення, яке свідчить, що при складанні позитивних одиниць необхідно записати негативну одиницю у відповідний розряд проміжної суми і сформувати симетрично щодо розглянутого розряду дві позитивні одиниці, котрі є переносами у сусідні (ліворуч і праворуч) розряди [28; 38].

За аналогією записується правило складання негативних одиниць:

$$\bar{1}+\bar{1}=\bar{1}1\bar{1}. \qquad (1.3.3)$$

До наведених правил (1.3.2) та (1.3.3) додаються ще чотири правила, які повністю збігаються з правилами для класичного «трійкового» складання:

$$0+0=0;\;\; 1+0=1;\;\; \bar{1}+0=\bar{1};\;\; \bar{1}+1=0.$$

Сформульовані правила далі використовуються для побудови зображень натуральних чисел у дзеркально-симетричній фібоначчієвій системі числення, вагами розрядів якої є парні ступені золотої пропорції (1.3.1).

Цифрові зображення одержуваних фібоначчієвих чисел є скороченим записом суми [28; 38; 39]:

$$N=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_i\tau^{2i}, \qquad (1.3.4)$$

де c_i – трійкові цифри $\bar{1},\ 0,\ 1$;

τ^{2i} – вага i-го розряду позиційного представлення.

Властивість дзеркальної симетричності лівої та правої частин щодо нульового розряду цифрових зображень чисел згідно (1.3.4) дає можливість контролю всіх арифметичних операцій у обчислювальних пристроях, які можуть бути побудовані на основі дзеркально-симетричної системи числення [38; 39].

У фібоначчієвій системі числення досить просто реалізується правило фібоначчієвої лічби, яке полягає в наступному: якщо молодша цифра фібоначчієвого числа дорівнює нулю, то вона замінюється на одиницю, а якщо дорівнює одиниці (тобто в кінці стоїть 01), то 01 замінюється на 10. Далі виправляється запис послідовною заміною скрізь комбінації 011 на 100. У результаті за лінійний час буде отримано запис нового числа Фібоначчі.

У роботах [56; 57] розглядається побудова швидкодіючих фібоначчієвих лічильників, а роботах [58; 59] проводиться оцінка завадостійкості фібоначчієвого рахунку та пропонується метод оптимального синтезу фібоначчієвих лічильників у мінімальних кодах Фібоначчі без переходу до максимальної форми фібоначчієвого числа. Зазначені лічильники можуть успішно застосовуватися для побудови інформаційно-вимірювальних систем, систем збору даних та управління, що характеризуються підвищеною надійністю.

Двійкові біноміальні системи числення, які розглядаються в даній дисертаційній роботі, також відносяться до неоднорідних систем числення, але мають складнішу структуру порівняно з факторіальними та фібоначчієвими системами числення. Як їх основу використовуються біноміальні коефіцієнти $C_{n-i}^{k-q_i}$ і, відповідно, значення ваг біноміальних розрядів x_i двійкових біноміальних чисел $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ змінюються як числа сполучень від верхніх $\left(k - q_i\right)$ і нижніх $(n-i)$ параметрів. Як наслідок, вагові коефіцієнти двійкових біноміальних чисел X_j залежать не лише від значення поточного розряду i, але і від значень попередніх розрядів $1, 2, ..., i-1$.

Такий складний функціональний зв'язок між ваговими коефіцієнтами, двійковими значеннями розрядів біноміального числа та їх розташуванням у розрядній сітці суттєво ускладнює правила та процедури двійкової біноміальної арифметики.

Для того, щоб отримати результат, що відповідає значенню арифметичної операції над двійковими біноміальними числами, застосовуються або табличний спосіб, або спосіб, заснований на використанні проміжної, як правило, ступеневої системи числення. При табличному методі біноміальні числа слугують адресами таблиці (пам'яті), а в адресованих комірках таблиці (пам'яті) зберігаються результати арифметичних операцій. Перевагою такого підходу є висока швидкодія, а недоліками – великий обсяг програмних та/або апаратних витрат та суттєва неоднорідність адресного поля через значну кількість заборонених комбінацій серед кодових записів біноміальних чисел. Останній недолік призводить до додаткового ускладнення системи адресації таблиці (пам'яті). Загалом табличний спосіб можна далі розвинути до побудови перетворювачів кодів, але очевидно, що тут не йдеться про правила і процедури біноміальної арифметики.

Для знаходження результату арифметичних дій над біноміальними числами можна скористатися проміжною ступеневою, як правило, десятковою або двійковою системою числення. Наприклад, біноміальні числа, що додаються, спочатку один за одним переводять за допомогою біноміальної числової функції (1.2.1) в десяткову або двійкову систему числення. Після цього проводять підсумовування за відомими правилами десяткової чи двійкової арифметики, а наступний кроком вже результат десяткової чи двійкової суми переводять у біноміальну систему числення. Достоїнствами такого способу є універсальність та відсутність обмежень, пов'язаних з розмірами таблиці (пам'яті). Недоліки використання проміжної ступеневої системи числення для визначення результатів арифметичних дій пояснюються необхідністю знаходження вагових коефіцієнтів згідно з (1.2.1) та їх подальшим складанням (або відніманням при зворотному переході) при переведеннях біноміальних чисел з однієї системи числення до іншої. В результаті такий підхід відрізняється суттєвим, хоча можливо і меншим порівняно з табличним способом, обсягом програмних та/або апаратних витрат, але, насамперед, характеризується значними часовими витратами. Очевидно, що суть способу визначення результатів операцій над біноміальними числами з використанням проміжних систем числення також не пов'язана з розробкою правил та процедур біноміальної арифметики.

Слід ще раз відзначити, що нині немає ні сформульованих правил, ні розроблених алгоритмів виконання арифметичних операцій (складання, віднімання, множення і ділення) саме над двійковими біноміальними числами.

Підтвердженням того, що така машинна арифметика для двійкових біноміальних чисел може бути побудована на прийнятних умовах практичної реалізації, є те, що вже існує розроблена вченим Борисенко О. А. теорія та практика двійкової біноміальної лічби [43; 60]. Теореми 7.5, 7.8 і 7.9 у роботі [43] містять всі необхідні обґрунтування для побудови алгоритмів біноміального як підсумовуючого, так і віднімаючого рахунку, без будь-яких додаткових перетворень. Прийнятні умови практичної реалізації в даному випадку означають врахування існуючих обмежень щодо часу виконання арифметичних операцій та обсягу програмно-апаратних витрат у рамках лише біноміального представлення чисел. Теоретичні результати в галузі біноміальної двійкової лічби були успішно втілені на практиці у вигляді працюючих алгоритмів та біноміальних лічильних пристроїв [43; 60].

1.4 Постановка задачі дослідження

В результаті проведеного наукового дослідження на тему дисертаційної роботи з актуальних науково-технічних напрямів:

- оцінка ролі неоднорідних систем числення, включаючи структурні, для вирішення важливих інформаційних завдань;
- аналіз принципів побудови машинної арифметики для неоднорідних систем числення, включаючи структурних, та особливостей реалізації

арифметичних операцій на практиці у комп'ютерних системах та компонентах;

можна зробити такі висновки:

- неоднорідні системи числення відіграють значну роль у вирішенні таких важливих інформаційних завдань, як завадостійка передача інформації, стиснення та шифрування повідомлень, забезпечення наскрізного контролю правильності даних та їх перетворень в інформаційно-керуючих системах, генерування комбінаторних об'єктів для проведення комбінаторної оптимізації;
- неоднорідні системи числення та спеціалізовані пристрої на їх основі дозволяють досягати унікальних, як правило, недосяжних для традиційних систем числення, характеристик швидкодії, надійності, криптостійкості, обсягу програмно-апаратних витрат при реалізації особливих, специфічних завдань, наприклад генерування перестановок або кодів-сполучень із заданими обмеженнями;
- вибір способу кодового відображення (запису) числа в системі числення, що розглядається, значною мірою впливає на ефективність проведення арифметичних операцій з точки зору обсягів часових і програмних та/або апаратних витрат;
- особливу перспективу мають двійкові біноміальні системи числення і породжувані ними двійкові біноміальні числа через їх більшу надмірність у порівнянні з іншими відомими неоднорідними системами числення, наявності вбудованих засобів самодіагностики та контролю помилок, простотою переходу від двійкових біноміальних чисел до кодів-сполучень (рівноважних, квазірівноважних кодів) та навпаки;
- стримуючим фактором щодо поширення та використання двійкових біноміальних систем числення для створення нових інформаційних технологій обробки даних є відсутність на сьогоднішній день розроблених моделей та методів виконання арифметичних операцій над двійковими біноміальними числами;

– існуючі способи реалізації арифметичних операцій, наприклад табличний або з використанням десяткової чи двійкової системи числення як проміжних, вимагають суттєвих часових та/або програмно-апаратних витрат.

Виходячи з проведеного огляду на тему наукового дослідження можна зробити висновок, що розробка моделей та методів арифметичного складання двійкових біноміальних чисел та їх практична реалізація в комп'ютерних системах та компонентах є актуальною проблемою, вирішення якої послужить стимулюючим фактором для створення нових інформаційних технологій обробки інформації.

Завдання, які необхідно вирішити в рамках цієї дисертаційної роботи, формулюються таким чином:

– побудова ефективних моделей для представлення двійкових біноміальних чисел з метою виконання над ними арифметичних операцій;
– розробка математичних моделей та методу біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел;
– синтез алгоритмів біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел;
– оцінка обсягів часових та програмно-апаратних витрат при практичній реалізації біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел;
– розробка принципів побудови інформаційно-комунікаційних технологій із застосуванням біноміального арифметичного складання.

Нехай маємо множину $X\left[n,k\right]$ двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел X_j, $X_j \in X\left[n,k\right]$, над якими реалізовуватиметься операція арифметичного складання $Z_j = X'_j + X''_j$, де Z_j – результуюче двійкове $\left(n,k\right)$-біноміальне число, $Z_j, X'_j, X''_j \in X\left[n,k\right]$ і $j = 0,1,\ldots,C_n^k - 1$. При цьому досліджуване завдання щодо розробки моделей та методу біноміального складання обмежується виконанням умови виду:

$$\operatorname{dec} Z_j < P = C_n^k . \qquad (1.4.1)$$

Очевидно також те, що має бути істинною рівність для арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j:

$$\operatorname{dec} Z_j = \operatorname{dec} X'_j + \operatorname{dec} X''_j . \qquad (1.4.2)$$

Метою дисертаційної роботи з дослідження та розробки моделей та методу арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, що генеруються двійковими біноміальними системами числення, є зменшення часу виконання операції складання при обмеженнях на об'єм програмних та/або апаратних витрат.

Таким чином, цільова функція дослідження та розробки моделей та методу біноміального арифметичного складання стосовно мінімізації часу Ω виконання цієї операції виглядає таким чином:

$$\Omega = \min_{Q_{сл} < Q_{тб}} T = \min_{Q_{сл} < Q_{тб}} \left(\tau_{м} + \tau_{сл}\right), \qquad (1.4.3)$$

де $\tau_{м}$ – час кодованого представлення (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, яке повинно бути ефективним для виконання арифметичного складання;

$\tau_{сл}$ – час виконання арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j;

$Q_{сл}$ – обсяг програмних та/або апаратних витрат, необхідних для виконання арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j на основі розроблених у роботі моделей та методу;

$Q_{тб}$ – обсяг програмних та/або апаратних витрат, пов'язаний з реалізацією арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j на основі табличного методу.

РОЗДІЛ 2
МОДЕЛІ І МЕТОД АРИФМЕТИЧНОГО СКЛАДАННЯ ДВІЙКОВИХ БІНОМІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

2.1 Математична модель арифметичного складання двійкових біноміальних чисел

Для розробки ефективної математичної моделі арифметичного складання двійкових біноміальних чисел необхідно розробити та обґрунтувати придатні до застосування моделі самих двійкових (n,k)-біноміальних чисел $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_r$ [61; 62; 63].

У зв'язку з цим вагові коефіцієнти з біноміальної числової функції (1.2.1) представимо через верхній $\alpha_i = k - q_i$ і нижній $\beta_i = n - i$ параметри:

$$C_{n-i}^{k-q_i} = C_{\beta_i}^{\alpha_i}, \tag{2.1.1}$$

а значення довжини для всіх двійкових (n,k)-біноміальних чисел приймемо $r = n-1$ (властивість 1, підрозділ 1.2, (1.2.6)), тобто оперуємо рівномірними біноміальними числами $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{n-1}$.

Рівномірні (n,k)-біноміальні числа, на відміну від відповідних нерівномірних (1.2.3) та (1.2.4), повинні задовольняти наступні системи кодоутворюючих обмежень [64]:

$$\begin{cases} l = n - k \\ 0 \le q \le k \\ x_{n-1} = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} q = k \\ l = n - k - 1 \\ x_{n-1} = 1\,. \end{cases}$$

Рівномірні (n,k)-біноміальні числа виходять з нерівномірних шляхом додавання до r-го розряду $(n - r - 1)$ двійкових нулів. В додатку Б в якості прикладу представлена таблиця Б.1 відповідності двійкових нерівномірних та рівномірних $(7,3)$-біноміальних чисел. Згідно з вказаною таблицею Б.1 при значеннях параметрів $n=7$ і $k=3$ до r-го розряду нерівномірного числа додаються зліва $(6-r)$ двійкових нулів, де $3 \le r < 6$.

Беручи до уваги вираз (2.1.1), числову функцію F_j двійкової (n,k)-біноміальної системи числення, яка дозволяє виявити кількісний еквівалент (n,k)-біноміального числа X_j у десятковому представленні, висловимо з використанням змінних α_i і β_i:

$$F_j = \operatorname{dec} X_j = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{n-i}^{k-q_i} = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{\beta_i}^{\alpha_i} = x_1 C_{\beta_1}^{\alpha_1} + x_2 C_{\beta_2}^{\alpha_2} + \ldots + x_r C_{\beta_r}^{\alpha_r}, \quad (2.1.2)$$

де $q_i = k - \alpha_i = \sum_{t=1}^{i-1} x_t$. При обчисленні кількісного еквіваленту (2.1.2) рівномірного (n,k)-біноміального числа X_j значення r дорівнюватиме $r = n-1$. При цьому серія двійкових нулів, починаючи з $(r+1)$-го до $(n-1)$-го розряду, будуть вносити нульовий внесок в значення $F_j = \operatorname{dec} X_j$ (2.1.2).

Теорема 2.1 Значення верхнього параметру $\alpha_1 = k$ для будь-яких двійкових (n,k)-біноміальних систем числення.

Доведення. Поточне значення числа одиниць q_i в двійковому (n,k)-біноміальному числі X_j визначається як (підрозділ 1.2)

$$q_i = \sum_{t=1}^{i-1} x_t .$$

При значенні $i=1$ в вищевказаному виразі, тобто для першого розряду біноміального числа X_j, маємо $q_1 = 0$. Таким чином, $\alpha_1 = k - q_1 = k$ при будь-яких значеннях n і k. **Теорему доведено.**

При переході до рівномірних двійкових (n,k)-біноміальних чисел, діапазоном яких є $P = C_n^k$, розглянемо множину X біноміальних чисел X_j наступного вигляду:

$$X = \left\{ X_j = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{n-1} \,/\, \sum_{i=1}^{n-1} x_i \le k, 0 \le F_j \le C_n^k - 1 \right\}. \quad (2.1.3)$$

Очевидно, що пари параметрів α_i і β_i однозначно визначають значення вагових коефіцієнтів $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$. Відповідно до цього для їх представлення пропонується використовувати двоелементні кортежі виду (α_i, β_i) [61; 62; 63].

Визначення 2.1 Різницю $\Delta_i = \beta_i - \alpha_i$ будемо називати зміщенням параметрів вагових коефіцієнтів двійкових (n,k)-біноміальних чисел.

Звідси, записи кортежів (α_i, β_i) і (α_i, Δ_i) є рівнозначними і представляють той самий ваговий коефіцієнт $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$.

Будь-яке двійкове (n,k)-біноміальне число X_j можна представити як впорядковану q-елементну вибірку S_{X_j} (q-кортеж) з множини C всіх вибірок вагових коефіцієнтів, можливих для двійкових біноміальних чисел з параметрами n і k [61; 62]:

$$S_{X_j} = \left((\alpha_i, \Delta_i)^{(1)}, (\alpha_i, \Delta_i)^{(2)}, ..., (\alpha_i, \Delta_i)^{(u)}, ..., (\alpha_i, \Delta_i)^{(q)} \right), \qquad (2.1.4)$$

де $0 \le q \le k$, $u = \overline{1,q}$, $1 \le i \le r$, $S_{X_j} \in C$. При цьому, якщо $q = 0$, то кортеж S_{X_j} є порожнім і відповідає біноміальному числу $X_j = 00...0$.

З тим, щоб перейти до розгляду множини C вибірок вагових коефіцієнтів $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$, сформулюємо та доведемо нижченаведену теорему.

Теорема 2.2 Область розташування u-ої одиниці, де $u = \overline{1,q}$, в запису двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{n-1}$ задається нерівністю вигляду:

$$u \le i \le n - k + (u-1). \qquad (2.1.5)$$

Доведення. З урахуванням того, що перші $(u-1)$ розрядів двійкового (n,k)-біноміального числа $X_j = x_1 x_2 ... x_i ... x_{n-1}$, починаючи з $i = 1$, можуть бути заповнені $(u-1)$ одиницями, то наступна u-а одиниця може бути розміщена тільки в розрядах, починаючи з $i = u$. Звідси, $i \ge u$ і цим визначається нижня межа нерівності (2.1.5).

Верхня межа нерівності (2.1.5) визначається виходячи з того, що за визначенням числа сполучень з цілими параметрами [65; 66] має виконуватися $\alpha_i \le \beta_i$. З числової функції (2.1.2) слідує $k - q_i \le n - i$ або $i \le n - k + q_i$. Але значення q_i є не що інше, як $q_i = \sum_{t=1}^{i-1} x_t = u - 1$. Звідси, $i \le n - k + (u - 1)$ і цим визначається верхня межа нерівності (2.1.5). **Теорему доведено.**

Беручи до уваги вигляд (2.1.4) q-елементної вибірки, множина C можливих кортежів вагових коефіцієнтів для двійкових (n,k)-біноміальних чисел можна представити як теоретико-множинний добуток [61; 62]:

$$C = U_1 \times U_2 \times ... \times U_u \times ... \times U_q, \tag{2.1.6}$$

де $U_1 = \{(\alpha_i, \beta_i) / \alpha_i = k\}$ – множина біноміальних коефіцієнтів з верхнім параметром $\alpha_i = k$ (теорема 2.1), можливих для двійкового (n,k)-біноміального числа X_j, де $1 \le i \le n - k$;

$U_u = \left\{(\alpha_i, \beta_i) / \alpha_i = k - u + 1, \beta_i < \beta_i^{(u-1)}, \left(k - u + 2, \beta_i^{(u-1)}\right) \in U_{u-1}\right\}$ – множина біноміальних коефіцієнтів, які мають верхній параметр $\alpha_i = k - u + 1$, а нижній має задовольняти умову, що кожна наступна u-та одиниця, що відповідає парі параметрів $(k - u + 1, \beta_i)$, має розташовуватись у розрядах запису двійкового (n,k)-біноміального числа X_j правіше попередньої $(u-1)$-ої одиниці, де $u = \overline{1,q}$ і $u \le i \le n - k + (u - 1)$ (теорема 2.2).

Зміст теореми 2.2 відображає обмеження компонентів $(\alpha_i, \beta_i)^{(u)}$ q-елементних вибірок вагових коефіцієнтів з множини C (2.1.6). Дані обмеження мають структурний характер, оскільки випливають зі структури двійкового. (n,k)-біноміального числа. Для кожної двійкової u-ої одиниці існує дозволений діапазон (2.1.5) номерів розрядів та, відповідно, заборонені номери розрядів (n,k)-біноміального числа X_j.

Нерівність $\beta_i^{(u)} < \beta_i^{(u-1)}$ для u-ої двійкової одиниці однозначно визначає, що u-та одиниця, що відповідає парі параметрів $\left(k-u+1, \beta_i^{(u)}\right)$ має розташовуватись у розрядах запису (n,k)-біноміального числа X_j правіше попередньої $(u-1)$-ої одиниці. Дійсно, нерівність $\beta_i^{(u)} < \beta_i^{(u-1)}$, виходячи з (2.1.1), означає $n - i^{(u)} < n - i^{(u-1)}$ або $n + i^{(u-1)} < n + i^{(u)}$, а в кінцевому підсумку маємо $i^{(u-1)} < i^{(u)}$.

Приклад 2.1 Нехай задано рівномірне двійкове $(9,4)$-біноміальне число виду $X_j = 01101100$. Визначимо дозволені діапазони номерів i розрядів для другої та четвертої одиниць.

Пояснення до прикладу. Пронумеруємо розряди та двійкові одиниці заданого $(9,4)$-біноміального числа (таблиця 2.1). Використовуючи нерівність (2.1.5), для двійкової одиниці з $u=2$ дозволений діапазон номерів i розрядів має такий вигляд: $2 \le i \le 6$, а для одиниці з $u=4$ – $4 \le i \le 8$. Відповідно, при $u=2$ забороненими вважаються розряди з номерами $i=1$ і $i=\overline{7,8}$, а при $u=4$ – з номерами $i=\overline{1,3}$.

Таблиця 2.1 – Нумерація для числа $X_j = 01101100$

Номери i розрядів числа							
1	2	3	4	5	6	7	8
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
	1	2		3	4		
Номери u двійкових одиниць							

Приклад завершений.

Враховуючи, що $\Delta_i = \beta_i - \alpha_i$ (визначення 2.1), відмітимо наступне

$$C_{\beta_i}^{\alpha_i} = C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}. \qquad (2.1.7)$$

Оскільки значення вагових коефіцієнтів $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ залежать від двох параметрів α_i і Δ_i, то зручною моделлю для представлення множини C (2.1.6) і самих кортежів S_{X_j} (2.1.4) є матриці, координатами елементів яких є параметр α_i і зміщення Δ_i параметрів біноміальних коефіцієнтів $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ (2.1.7) [61; 62; 67].

Матриці, що відображають кортежі $S_{X_j} \in C$ (n,k)-біноміальних чисел $X_j \in X$, виявляються зручними не тільки для їх представлення, але й проведення арифметичних операцій над самими біноміальними числами. Таким чином, у дисертаційній роботі пропонується операцію підсумовування двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j проводити, використовуючи матричне подання відповідних їм кортежів $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ (2.1.4).

Розмір матриці, елементами якої є вагові коефіцієнти $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$, по параметру α_i вважається відомим, так як $1 \le \alpha_i \le k$. Для визначення розміру матриці біноміальних коефіцієнтів $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ по параметру Δ_i сформулюємо та доведемо наступні теореми.

Теорема 2.3 При значенні верхнього параметру $\alpha_i = k-u+1$ значення нижнього параметра β_i вагового коефіцієнту $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$ змінюється в межах:

$$k-u+1 \le \beta_i \le n-u, \qquad (2.1.8)$$

де $u = \overline{1,q}$.

Доведення. Так як $\beta_i = n-i$, з теореми 2.2 випливає $u \le i \le n-k+(u-1)$, то для нижнього параметра β_i при постійному значенні n справедливою є нерівність $k-u+1 \le \beta_i \le n-u$. **Теорему доведено.**

Теорема 2.4 Значення зміщення Δ_i параметрів вагових коефіцієнтів $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ двійкових (n,k)-біноміальних чисел змінюється в межах:

$$0 \le \Delta_i \le n-k-1. \tag{2.1.9}$$

Доведення. Так як $\Delta_i = \beta_i - \alpha_i$, $\alpha_i = k-u+1$, а з теореми 2.3 випливає $k-u+1 \le \beta_i \le n-u$, то для зміщення параметрів Δ_i справедливою є нерівність $0 \le \Delta_i \le n-k-1$. **Теорему доведено.**

Таким чином, на основі того, що $\alpha = \alpha_i = \overline{k,1}$ і згідно з теоремою 2.4 $\Delta = \beta_i - \alpha_i = \overline{n-k-1,0}$, введемо для множини C (2.1.6) матрицю $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$ біноміальних коефіцієнтів [61; 62]:

$$\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline C_{n-1}^{k} & C_{n-2}^{k-1} & \dots & C_{\alpha+(n-k-1)}^{\alpha} & \dots & C_{n-k}^{1} \\ \hline C_{n-2}^{k} & C_{n-3}^{k-1} & \dots & C_{\alpha+(n-k-2)}^{\alpha} & \dots & C_{n-k-1}^{1} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline C_{k+\Delta}^{k} & C_{k-1+\Delta}^{k-1} & \dots & C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} & \dots & C_{1+\Delta}^{1} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline C_{k}^{k} & C_{k-1}^{k-1} & \dots & C_{\alpha}^{\alpha} & \dots & C_{1}^{1} \\ \hline \end{array}, \tag{2.1.10}$$

число стовпців якої k, а рядків $(n-k)$. q-елементна впорядкована вибірка S_{X_j}, відповідна двійковому (n,k)-біноміальному числу X_j, буде відображатись $(0,1)$-матрицею, побудованої на основі матриці $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$ (2.1.10). Наявність того чи іншого вагового коефіцієнту $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$ (2.1.7) в записі двійкового (n,k)-біноміального числа X_j в $(0,1)$-матриці вказується розміщенням одиниці у відповідній комірці (α,Δ). Решта комірок $(0,1)$-матриці при цьому будуть заповнюватись нулями.

$(0,1)$-матриця для двійкового (n,k)-біноміального числа X_j, яка представлена через координати – значення верхнього параметра α и зміщення Δ вагових коефіцієнтів $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$, буде мати наступний вигляд [61; 62]:

$(k,n-k-1)$	$(k-1,n-k-1)$	...	$(\alpha,n-k-1)$	...	$(1,n-k-1)$
$(k,n-k-2)$	$(k-1,n-k-2)$	...	$(\alpha,n-k-2)$	...	$(1,n-k-2)$
...	...	...	...	...	...
(k,Δ)	$(k-1,\Delta)$	...	(α,Δ)	...	$(1,\Delta)$
...	...	...	...	...	...
$(k,0)$	$(k-1,0)$	...	$(\alpha,0)$	...	$(1,0)$

, (2.1.11)

Очевидно, що не будь-яка $(0,1)$-матриця відноситься до множини матриць (n,k)-біноміальних чисел X_j. Вигляд таких матриць визначається числовою функцією F_j (2.1.2) та системами обмежень для біноміальних чисел (1.2.3), (1.2.4). При цьому в якості визначаючих властивостей $(0,1)$-матриць (n,k)-біноміальних чисел X_j можна сформулювати наступні [61; 68].

1. Координати α одиничних комірок (α,Δ), тобто верхні параметри α_i відповідних вагових коефіцієнтів $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$, які відносяться до двійкового (n,k)-біноміального числа X_j, що відображається, повинні становити суворо монотонно спадаючу послідовність значень:

$$k > k-1 > k-2 > ... > 1, \quad (2.1.12)$$

або її префіксну частину, починаючи зі значення $\alpha = k$. Це означає, що у стовпцях $(0,1)$-матриці буде присутня лише одна одиниця. Крім того, з даної властивості випливає, що число q одиничних комірок (α,Δ) повинне задовольняти нерівність $0 \le q \le k$. Випадок $q = 0$ відповідає порожній виборці S_{X_j} (2.1.4), що означає біноміальне число $X_j = 00...0$.

2. Для сусідніх стовпців комірок матриці з координатами $(\alpha+1,\Delta'')$ і (α,Δ'), що відносяться до двійкового (n,k)-біноміального числа X_j, повинна дотримуватись нерівність:

$$\Delta' < \Delta'' + 1, \tag{2.1.13}$$

Ця властивість доповнює попередню і відображає той факт, що суворо монотонно спадаючій послідовності верхніх параметрів α_i біноміальних коефіцієнтів $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$ або її префіксній частині (2.1.12) повинна відповідати суворо монотонно спадаюча послідовність нижніх параметрів β_i або її відповідна префіксна частина:

$$\beta_i^{(1)} > \beta_i^{(2)} > ... > \beta_i^{(u)} > .... > \beta_i^{(q)}, \tag{2.1.14}$$

де $u = \overline{1,q}$. Іншими словами, кожна наступна одинична комірка в $(0,1)$-матриці не повинна розташовуватися вище за рядком попередньої комірки, що містить одиницю.

Перша властивість розглянутої $(0,1)$-матриці є очевидною в зв'язку з формуванням окремих стовпців матриці для кожної двійкової одиниці біноміального числа X_j, котрих може бути $0 \le q \le k$. Друга властивість для $(0,1)$-матриці базується на нижчезазначеній теоремі 2.5.

Теорема 2.5 Для $\alpha'' = \alpha' + 1$ при виконанні нерівності $\Delta' < \Delta'' + 1$ для зміщень Δ' і Δ'' параметрів вагових коефіцієнтів $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$ двійкового (n,k)-біноміального числа X_j маємо $\beta'' > \beta'$.

Доведення. Щоб довести $\beta'' > \beta'$, необхідно довести, що різниця $(\beta'' - \beta')$ є число більше нуля. Так як $\beta'' = \alpha'' + \Delta'' = \alpha' + \Delta'' + 1$, $\beta' = \alpha' + \Delta'$, отримаємо

$$\beta'' - \beta' = \alpha' + \Delta'' - \alpha' - \Delta' + 1 = \Delta'' - \Delta' + 1.$$

Але нерівність $\Delta' < \Delta'' + 1$ є тотожною $\Delta'' \ge \Delta'$. Виходячи з вигляду виразу, при рівності зміщень $\Delta'' = \Delta'$ різниця $\beta'' - \beta' = 1$, а при решті $\Delta'' > \Delta'$ різниця $\beta'' - \beta' > 1$

. Таким чином, при будь-яких значеннях зміщень Δ'' і Δ', що задовольняють нерівність $\Delta' < \Delta'' + 1$, і $\alpha'' = \alpha' + 1$ маємо $\beta'' > \beta'$. **Теорему доведено.**

Приклад 2.2 Задано двійкове $(9,4)$-біноміальне число $X_j = 01101100$. Представити число X_j в вигляді q-кортежу S_{X_j} і $(0,1)$-матриці вагових коефіцієнтів.

Пояснення до прикладу. 1) Так як параметри $n=9$ і $k=4$, то згідно з (2.1.2) кількісний еквівалент F_j двійкового $(9,4)$-біноміального числа $X_j = 01101100$ через суму вагових коефіцієнтів $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$ виразимо наступним чином:

$$F_j = \mathrm{dec}(01101100) = \sum_{i=1}^{8} x_i C_{\beta_i}^{\alpha_i} = C_7^4 + C_6^3 + C_4^2 + C_3^1.$$

2) Звідси, з врахуванням $q = 4$ відповідно до виразу (2.1.4) 4-кортеж для двійкового $(9,4)$-біноміального числа $X_j = 01101100$ представляється як

$$S_{X_j} = ((4,3),(3,3),(2,2),(1,2)).$$

3) У відповідності до (2.1.10) або (2.1.11) матриця ваг $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$ для двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел буде мати вигляд як на рисунку 2.1.

C_8^4	C_7^3	C_6^2	C_5^1
C_7^4	C_6^3	C_5^2	C_4^1
C_6^4	C_5^3	C_4^2	C_3^1
C_5^4	C_4^3	C_3^2	C_2^1
C_4^4	C_3^3	C_2^2	C_1^1

Рисунок 2.1 – Матриця ваг (α,Δ) при $n=9$ і $k=4$

Вказуючи одиницями в матриці $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$ комірки, вагові коефіцієнти яких відповідають двоелементним кортежам із представлення S_{X_j} пункту 2 даного прикладу, отримаємо $(0,1)$-матрицю двійкового $(9,4)$-біноміального числа $X_j = 01101100$:

$$\left\| X_j \right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} .$$

4) Відповідно до теореми 2.5 в отриманій $(0,1)$-матриці для двійкового $(9,4)$-біноміального числа $X_j = 01101100$ кожна наступна зліва направо одинична комірка $(\alpha,\Delta) = 1$ не розташовується вище попередньої. *Приклад завершений.*

Якщо складаються два двійкові (n,k)-біноміальні числа X'_j і X''_j, кожне з яких характеризується q-кортежом вагових коефіцієнтів $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ відповідно, то результатом буде біноміальне число Z_j, яке має також представлятися q-кортежом S_{Z_j} вигляду (2.1.4). При цьому довжина q кортежів для біноміальних чисел X'_j, X''_j і Z_j може бути зовсім різною. Результат додавання Z_j також повинен бути представленим $(0,1)$-матрицею двійкового (n,k)-біноміального числа, яка повинна відповідати властивостям (2.1.12) і (2.1.13).

З урахуванням властивості симетрії $X'_j + X''_j = X''_j + X'_j$ і того, що розглядається випадок лише двох доданків, вихідною для отримання результату Z_j буде невпорядкована вибірка [61; 62]:

$$G=\left[S_{X'_j},S_{X''_j}\right]=\left[\begin{array}{l}\left(\left(\alpha_i,\Delta_i\right)^{(1)}_{X'_j},...,\left(\alpha_i,\Delta_i\right)^{(u)}_{X'_j},...,\left(\alpha_i,\Delta_i\right)^{(q_{X'})}_{X'_j}\right),\\ \left(\left(\alpha_i,\Delta_i\right)^{(1)}_{X''_j},...,\left(\alpha_i,\Delta_i\right)^{(h)}_{X''_j},...,\left(\alpha_i,\Delta_i\right)^{(q_{X''})}_{X''_j}\right)\end{array}\right]. \quad (2.1.15)$$

де $\left(\alpha_i,\Delta_i\right)^{(u)}_{X'_j}$, $\left(\alpha_i,\Delta_i\right)^{(h)}_{X''_j}$ – двоелементні кортежі, що відображають вагові коефіцієнти двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j відповідно.

Додатково умовимося, що двійкові (n,k)-біноміальні числа $X'_j, X''_j \in X$, котрі відповідають елементам вибірки G (2.1.15), при підсумовуванні повинні призводити до двійкового (n,k)-біноміального числа Z_j з тієї ж множини X .

Множина M всіх пар G являє собою добуток множин C (2.1.6) q-елементних вибірок вагових коефіцієнтів $C^{\alpha_i}_{\beta_i}$, представлених як $\left(\alpha_i,\beta_i\right)$, двійкових (n,k)-біноміальних чисел:

$$M=C\times C=C^2. \quad (2.1.16)$$

Відповідно до (2.1.6) і (2.1.16) процес арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j полягає у реалізації відображення $\varphi: C^2 \to C$ множини C^2 пар $G=\left[S_{X'_j},S_{X''_j}\right]$ на множину C q-елементних кортежів S_{Z_j} вагових коефіцієнтів, що відповідають результату Z_j біноміального додавання. Через кінцевий розмір $1 \le i \le n-1$ розрядної сітки двійкових (n,k)-біноміальних чисел, що додаються, буде розглядатися математична модель біноміального арифметичного складання на основі звуження $\varphi': M' \to C$ початкового відображення $\varphi: C^2 \to C$ при $M' \subseteq C^2$ і $\varphi'(G)=\varphi(G)$ для всіх пар $G \in M'$, де

$$M' = \left\{ G \in C^2 \,/\, \sum_{X'_j} C_{\beta_i}^{\alpha_i} + \sum_{X''_j} C_{\beta_i}^{\alpha_i} < C_n^k \right\}. \qquad (2.1.17)$$

Вид множини C дозволяє вивести ознаки завершення операції біноміального арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел, визначити та обґрунтувати набір використовуваних перетворень над ваговими коефіцієнтами, які ґрунтуються на відомих комбінаторних співвідношеннях та властивостях чисел сполучень [65; 66].

Як показує аналіз складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел, перенесення двійкової одиниці з молодших розрядів, починаючи з $(i+1)$-го, в старший i розряд виконується за результатом формування серії з двійкових одиниць, починаючи від $(i+1)$-го розряду та закінчуючи розрядом, номер якого обчислюється як $(i+1)+(k-q_i)$. Вага одиниці, отриманої в результаті перенесення, визначається згідно з комбінаторним виразом загального виду:

$$C_{n-i}^{k-q_i} = C_{n-(i+1)}^{k-q_i} + C_{n-(i+2)}^{(k-q_i)-1} + \ldots + C_{n-(i+k-q_i)}^{1} + C_{n-(i+k-q_i+1)}^{0}. \qquad (2.1.18)$$

В залежності від значення q_i, котре змінюється в межах $0 \le q_i \le k-1$ (значення верхнього параметру $k - q_i > 0$), граничні форми рівності (2.1.18) визначаються при $q_i = 0$ як

$$C_{n-i}^{k} = C_{n-(i+1)}^{k} + C_{n-(i+2)}^{k-1} + \ldots + C_{n-(i+k)}^{1} + C_{n-(i+k+1)}^{0}, \qquad (2.1.19)$$

а при $q_i = k-1$ –

$$C_{n-i}^{1} = C_{n-(i+1)}^{1} + C_{n-(i+2)}^{0}. \qquad (2.1.20)$$

Комбінаторний співвідношення (2.1.18), що відображає формування серії двійкових одиниць при біноміальному арифметичному складанні і представлений через верхній α_i та нижній β_i параметри, буде мати наступний вигляд:

$$C_{\beta_i}^{\alpha_i} = C_{\beta_i-1}^{\alpha_i} + C_{\beta_i-2}^{\alpha_i-1} + \ldots + C_{\beta_i-\alpha_i}^{1} + C_{\beta_i-\alpha_i-1}^{0}, \qquad (2.1.21)$$

або з використанням зміщення параметрів $\Delta_i = \beta_i - \alpha_i$:

$$C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i} = C_{\alpha_i+(\Delta_i-1)}^{\alpha_i} + C_{(\alpha_i-1)+(\Delta_i-1)}^{\alpha_i-1} + \ldots + C_{1+(\Delta_i-1)}^{1} + C_{\Delta_i-1}^{0}. \qquad (2.1.22)$$

Останній вираз у явній формі вказує координати розміщення вагових коефіцієнтів $C_{\beta_i}^{\alpha_i} = C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ в матриці ваг $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$ (2.1.10).

Відповідно, процес складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел можна представити як процес формування серій двійкових одиниць з метою одержання на основі (2.1.18) або (2.1.22) вагових коефіцієнтів з найбільшим значенням $\Delta_i = \beta_i - \alpha_i$, де $i = \overline{1, n-1}$. Кількість одиниць у таких серіях може становити від двох до $k+1$ одиниць, що відповідає граничній кількості доданків у двох виразах (2.1.19) та (2.1.20). Вираз (2.1.18), так само як і (2.1.22), що визначає при складанні переноси одиниць з розряду в розряд, називатимемо V-перетворенням, або перетворенням V переносу [61; 69; 70].

З практики біноміальної лічби V-перетворення застосовується для випадків, коли власні частини попереднього F_1 і наступного F_2 двійкових біноміальних чисел мають вигляд $F_1^S = 011...1$ і $F_2^S = 100...0$ відповідно, їх кількісні значення $\tilde{F}_2 = \tilde{F}_1 + 1$ (теорема 7.5 [44]).

Серія одиниць (2.1.22) має завершуватися фінальною одиницею, якій відповідає біноміальний коефіцієнт з верхнім параметром $\alpha_i = 0$. Для формування такої одиниці необхідно застосувати рівність

$$C_{\alpha_i}^{\alpha_i} = C_{\gamma_i}^{\gamma_i} = C_{\chi_i}^{0}, \qquad (2.1.23)$$

де $\alpha_i \neq \gamma_i \neq \chi_i$, $1 \leq \alpha_i, \gamma_i, \chi_i \leq k$. Крім того, рівність (2.1.22) використовується і для формування серії одиниць зі зміщенням $\Delta_i = 0$. Даний вираз дозволяє зрушувати значення параметрів вагових коефіцієнтів при їх збігу в впорядкованих q-елементних вибірках $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, що складаються. Рівність (2.1.23) будемо називати W-перетворенням, або перетворенням W зсуву [61; 62].

При біноміальній лічбі W-перетворення використовується у ситуаціях, коли, по-перше, власні частини попереднього F_1 і наступного F_2 двійкових біноміальних чисел мають вигляд $F_1^s = 0$ і $F_2^s = 10$ відповідно (теорема 7.8 [44]) і, по-друге, власні частини з F_1 і F_2 при довжині чисел, що дорівнює $(n-1)$, виглядають як $F_1^s = 0$ і $F_2^s = 1$ відповідно (теорема 7.9 [44]) за умови, що кількісні еквіваленти двійкових біноміальних чисел $\tilde{F}_2 = \tilde{F}_1 + 1$.

При неможливості використання V-перетворення переносу та W-перетворення зсуву для виконання складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, коли у відповідних до них q-елементних впорядкованих вибірках $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ (2.1.4) спочатку або в процесі підсумовування виявляються однакові біноміальні коефіцієнти зі зміщенням параметрів $\Delta_i \neq 0$, пропонується застосувати нерівність:

$$C_{\beta_i}^{\alpha_i} = C_{\beta_i}^{\beta_i - \alpha_i} \text{ або } C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i} = C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\Delta_i}, \tag{2.1.24}$$

$$C_{\beta_i}^{\alpha_i} = C_{\beta_i-1}^{\alpha_i} + C_{\beta_i-1}^{\alpha_i-1} \text{ або } C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i} = C_{\alpha_i+(\Delta_i-1)}^{\alpha_i} + C_{(\alpha_i-1)+\Delta_i}^{\alpha_i-1}. \tag{2.1.25}$$

Вираз (2.1.24) називатимемо B-перетворенням, або перетворення B симетрії. Рівність (2.1.25), яка використовується для генерування біноміальних коефіцієнтів необхідних для формування серій двійкових одиниць, є D-перетворенням, або перетворенням D розкладання [61; 62].

Слід зазначити, що перетворення V і D при необхідності можуть бути використані у зворотному вигляді V^{-1} і D^{-1}.

Матриця ваг $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$ (2.1.10) для невпорядкованої вибірки $G = \left[S_{X'_j}, S_{Y''_j} \right]$ (2.1.15), яка буде представляти обидва доданки X'_j і X''_j, характеризуватиметься тим, що в її комірках (α, Δ) можуть розташовуватися не одна, а кілька одиниць на відміну від $(0,1)$-матриць. Це пов'язано з тим, що, по-перше, у своєму представленні двійкове (n,k)-біноміальне число X'_j може мати вагові коефіцієнти, що збігаються з ваговими коефіцієнтами двійкового (n,k)-біноміального числа X''_j, а, по-друге, однакові біноміальні коефіцієнти можуть з'явитися в результаті перетворень, що проводяться в процесі біноміального арифметичного складання. Крім того, на відміну від $(0,1)$-матриць двійкових (n,k)-біноміальних чисел в матрицю ваг $\left\|C_{\alpha+\Delta}^{\alpha}\right\|$, що характеризує вибірку G, необхідно ввести додатковий стовпець зі значенням $\alpha=0$ [61; 62]:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline C_{n-1}^{k} & \dots & C_{\alpha+(n-k-1)}^{\alpha} & \dots & C_{n-k}^{1} \\ \hline C_{n-2}^{k} & \dots & C_{\alpha+(n-k-2)}^{\alpha} & \dots & C_{n-k-1}^{1} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline C_{k+\Delta}^{k} & \dots & C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} & \dots & C_{1+\Delta}^{1} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline C_{k}^{k} & \dots & C_{\alpha}^{\alpha} & \dots & C_{1}^{1} \\ \hline \end{array} \leftarrow}_{\left\|C_{\alpha+\Delta}^{\alpha}\right\|} \begin{array}{|c|} \hline C_{n-k-1}^{0} \\ \hline C_{n-k-2}^{0} \\ \hline \dots \\ \hline C_{\Delta}^{0} \\ \hline \dots \\ \hline C_{0}^{0} \\ \hline \end{array}}_{(0,11..1)-\text{матрица}}, \tag{2.1.26}$$

в комірках якого розміщуватимуться одиниці, що завершують серії одиниць і передують виконанню перетворення V переносу:

Отримана матриця (2.1.26), яка має розмір $(k+1)\times(n-k)$ і відображає невпорядковану вибірку $G=\left[S_{X'_j}, S_{Y''_j}\right]$, де $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ – q-елементні кортежі (2.1.4) вагових коефіцієнтів двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, що складаються:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline C_{n-1}^{k} & \ldots & C_{\alpha+(n-k-1)}^{\alpha} & \ldots & C_{n-k}^{1} & C_{n-k-1}^{0} \\ \hline C_{n-2}^{k} & \ldots & C_{\alpha+(n-k-2)}^{\alpha} & \ldots & C_{n-k-1}^{1} & C_{n-k-2}^{0} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline C_{k+\Delta}^{k} & \ldots & C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} & \ldots & C_{1+\Delta}^{1} & C_{\Delta}^{0} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline C_{k}^{k} & \ldots & C_{\alpha}^{\alpha} & \ldots & C_{1}^{1} & C_{0}^{0} \\ \hline \end{array}. \qquad (2.1.27)$$

називається матрицею біноміального арифметичного складання (далі, просто матрицею складання) і буде позначатися як $(0,11...1)$-матриця:

Приклад 2.3 Наведемо $(0,1)$-матриці рівномірних двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01011100$ і $X''_j = 00101011$ двійкової $(9,4)$-біноміальної системи числення, а також вихідну $(0,11...1)$-матрицю біноміального складання вказаних чисел X'_j і X''_j.

Пояснення до прикладу. 1) Так як параметри $n=9$ і $k=4$, то згідно з числовою функцію (2.1.2) кількісні еквіваленти F'_j і F''_j двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01011100$ і $X''_j = 00101011$ через суму вагових коефіцієнтів $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$ будуть викладені відповідно наступним чином:

$$F'_j = \operatorname{dec}(01011100) = \sum_{i=1}^{8} x'_i C_{\beta'_i}^{\alpha'_i} = C_7^4 + C_5^3 + C_4^2 + C_3^1,$$

$$F''_j = \operatorname{dec}(00101011) = \sum_{i=1}^{8} x''_i C_{\beta''_i}^{\alpha''_i} = C_6^4 + C_4^3 + C_2^2 + C_1^1.$$

2) Звідси, з урахуванням $q=4$ відповідно до виразу (2.1.4) 4-кортежі для двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01011100$ і $X''_j = 00101011$ представляються відповідно як

$$S_{X'_j} = \big((4,3),(3,2),(2,2),(1,2)\big).$$

$$S_{X''_j} = \big((4,2),(3,1),(2,0),(1,0)\big).$$

3) Відповідно до (2.1.10) матриці вагових коефіцієнтів $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$ для двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01011100$ і $X''_j = 00101011$ будуть мати вигляд:

$$\left\| X'_j \right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \qquad \left\| X''_j \right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array}.$$

4) Відповідно до виду матриці (2.1.27) складаємо $(0,11...1)$-матрицю біноміального складання двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01011100$ і $X''_j = 00101011$ шляхом додавання нульового стовпця $\alpha = 0$ для формування одиниць, що завершують одиничну серію, та організації переносу з розряду в розряд, а також шляхом розміщення одиниць за координатами одиничних комірок, що належать до $(0,1)$-матриць $\left\| X'_j \right\|$ і $\left\| X''_j \right\|$:

$$\left\| X'_j + X''_j \right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Далі, над комірками сформованої $(0,11...1)$-матриці $\left\| X'_j + X''_j \right\|$ для отримання результату Z_j біноміального арифметичного складання необхідно провести перетворення V переносу (2.1.22), W зсуву (2.1.23), B симетрії (2.1.24) і D розкладання (2.1.25). *Приклад завершений.*

Введені перетворення V, W, B і D можуть бути наочно представлені через вирази, які використовують арифметичні операції над координатами (компонентами) комірок $(0,11...1)$-матриці складання [62]:

1. Перетворення V переносу (2.1.22) з використанням позначень комірок (α,Δ) буде виглядати наступним чином:

$$(\alpha,\Delta)=(\alpha,\Delta-1)+(\alpha-1,\Delta-1)+...+(1,\Delta-1)+(0,\Delta-1). \qquad (2.1.28)$$

2. Вираз (2.1.23) для перетворення W зсуву тоді буде представлятися як

$$(\alpha,0)=(\gamma,0)=(0,\Delta). \qquad (2.1.29)$$

3. Рівність (2.1.24), що відображає перетворення B симетрії, при викладенні за допомогою комірок (α,Δ), буде мати наступний вигляд:

$$(\alpha,\Delta)=(\Delta,\alpha). \qquad (2.1.30)$$

4. Перетворення D розкладу (2.1.25) з використанням позначень комірок (α,Δ) буде представлятися як

$$(\alpha,\Delta)=(\alpha,\Delta-1)+(\alpha-1,\Delta). \qquad (2.1.31)$$

На рисунку 2.2 у наочному вигляді демонструються дії V, W, B і D перетворень над комірками $(0,11...1)$-матриці відповідно до рівностей (2.1.28), (2.1.29), (2.1.30) і (2.1.31).

Таким чином, математична модель арифметичного складання двох двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j викладається у наступний спосіб.

Нехай задані q-елементні кортежі $S_{X'_j}$, $S_{X''_j}$ і S_{Z_j} з вагових коефіцієнтів вигляду

$$S=\left((\alpha_i,\Delta_i)^{(1)},(\alpha_i,\Delta_i)^{(2)},...,(\alpha_i,\Delta_i)^{(u)},...,(\alpha_i,\Delta_i)^{(q)}\right),$$

відповідні двійковим (n,k)-біноміальним числам X'_j, X''_j и Z_j. Кортежі, що розглядаються, є елементами множини

$$C=U_1\times U_2\times...\times U_u\times...\times U_q$$

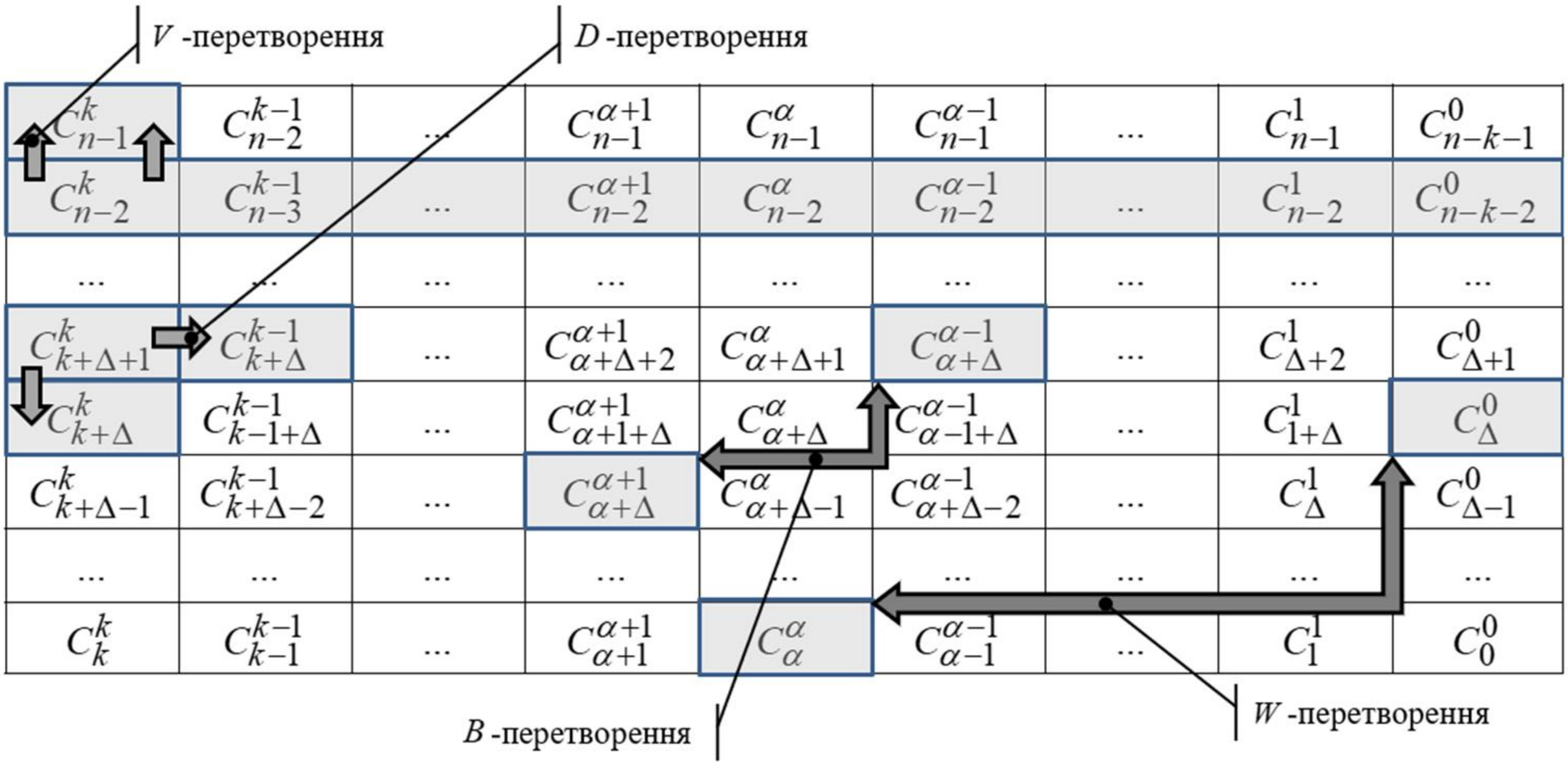


Рисунок 2.2 – Дія перетворень V, W, B та D над комірками $(0,11...1)$-матриці біноміального арифметичного складання

можливих упорядкованих вибірок з q біноміальних коефіцієнтів для двійкових (n,k)-біноміальних чисел, $S_{X'_j}, S_{X''_j}, S_{Z_j} \in C$.

Арифметичне складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел $Z_j = X'_j + X''_j$ представляється як сюр'єктивне відображення вигляду:

$$\varphi' : M' \to C,$$

що є звуженням відображення $\varphi : C^2 \to C$ при $M' \subseteq C^2$ і $\varphi'(G) = \varphi(G)$ для всіх пар $G = \left[S_{X'_j}, S_{X''_j} \right] \in M'$, де множина M' визначається як

$$M' = \left\{ G \in C^2 \,/\, \sum_X C_{\beta_i}^{\alpha_i} + \sum_Y C_{\beta_i}^{\alpha_i} < C_n^k \right\}.$$

Задане відображення φ' необхідно реалізувати за допомогою набору перетворень $\langle V, W, B, D \rangle$, де V – перетворення переносу одиниці з $(i+1)$-го розряду в i-й розряд, W – перетворення зсуву параметрів α_i і β_i (або Δ_i) вагових коефіцієнтів, B – перетворення симетрії вагових коефіцієнтів, D – перетворення розкладання вагових коефіцієнтів. Метою застосування сукупності перетворень $\langle V, W, B, D \rangle$ є отримання q-елементного кортежу $S_{Z_j} \in C$, вагові коефіцієнти якого мають найбільше значення зміщення $\Delta_i = \beta_i - \alpha_i$ при обмеженнях:

- верхні параметри α_i вагових коефіцієнтів (α_i, Δ_i) повинні становити суворо монотонно спадаючу послідовність значень або її префіксну частину, починаючи зі значення $\alpha_i = k$:

$$k > k-1 > k-2 > \ldots > 1;$$

- для сусідніх елементів $(\alpha_i + 1, \Delta''_i)$ і (α_i, Δ'_i) q-кортежу S_{Z_j} повинна виконуватись нерівність:

$$\Delta'_i < \Delta''_i + 1.$$

В матричному представлення реалізація сюр'єктивного відображення $\varphi' : M' \to C$ означає приведення за допомогою набору перетворень $\langle V, W, B, D \rangle$ $(0,11...1)$-матриці біноміального арифметичного складання, що відображує $X'_j + X''_j$, до $(0,1)$-матриці двійкового (n,k)-біноміального числа − результату додавання Z_j.

2.2 Алгоритми складання двійкових біноміальних чисел

Алгоритм є суворою системою правил, що визначає послідовність дій над деякими об'єктами [65; 71]. Відповідно до визначення алгоритму, він повинен мати такі властивості: 1) кінцевість; 2) визначеність та ефективність використовуваних ним операцій; 3) наявність введення та виведення [65].

З усіх можливих найшвидшими алгоритмами, які виконують арифметичні операції над числами, є алгоритми, що використовують повні пошукові таблиці. Вони отримують результат, по суті, протягом однієї операції, але платою за таку швидкість є нераціональне використання пам'яті, що для великих значень довжини n оброблюваних чисел робить такі алгоритми практично непридатними до вживання [72; 73].

При застосуванні табличного методу для складання двійкових рівномірних (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j кожне з двох чисел є адресною комбінацією, що складається з $(n-1)$ розрядів, а в підсумку для адресації результату складання Z_j необхідні $2(n-1)$ розрядів. Приймаючи значення параметру $k = [n/2]$ (n може бути парним або непарним числом), маємо діапазон зміни значень як доданків X'_j і X''_j, так і результату складання Z_j, що дорівнює $P = C_n^{[n/2]}$. Отже, з кількості можливих упорядкованих пар $\left(X'_j, X''_j\right)$ буде випливати кількість комірок таблиці або пам'яті, де зберігаються результати Z_j:

$$N=\left(C_n^{[n/2]}\right)^2.$$

При цьому вважаємо, що результати біноміального арифметичного складання $X'_j+X''_j$ і $X''_j+X'_j$ займають різні комірки пам'яті (інакше призводитиме до невиправданого ускладнення системи адресації таблиці, яка зберігатиметься в пам'яті). Мінімальна вихідна розрядність комірок для зберігання результату Z_j повинна дорівнювати $(n-1)$ розрядів, а при наявності переносів в старший n-й розряд (наприклад, без використання упакованої форми запису числа) необхідні вже $2(n-1)$ розрядів, тобто ще одна додаткова комірка пам'яті розрядності $(n-1)$. З урахуванням цього мінімальний інформаційний обсяг $C_{\min}$ пам'яті для реалізації табличного методу, беручи до уваги можливі переноси при біноміальному складанні, буде дорівнювати:

$$C_{\min}=N\cdot 2(n-1)=2(n-1)\left(C_n^{[n/2]}\right)^2.$$

Слід зазначити, що при складанні m двійкових (n,k)-біноміальних чисел кількість комірок N і обсяг C пам'яті істотно зростають і будуть мати значення відповідно (приймаючи, що для представлення результату суми Z_j все ще достатньо кількості розрядів $2(n-1)$):

$$N=\left(C_n^{[n/2]}\right)^m,$$

$$C_{\min}=N\cdot 2(n-1)=2(n-1)\left(C_n^{[n/2]}\right)^m.$$

Насправді апаратні витрати при розглянутому підході до реалізації арифметичного складання двійкових біноміальних чисел на практиці будуть ще вищими через фрагментарність адресного простору, що використовується для звернення до таблиці біноміального додавання. Намагання виправити таке положення, коли між адресами, що є біноміальними числами X'_j і X''_j, розташовуються адресні комбінації, що не використовуються, призводять до необхідності проектування та застосування складної системи адресації. Щоб уникнути цього, потрібно взяти пам'ять для зберігання таблиці біноміального складання на кількість комірок, що дорівнює $2^{2(n-1)}$, маючи на увазі, що в невикористовуваних, але присутніх комірках, будуть розміщуватися незначущі комбінації, наприклад нульові. Таким чином, у цьому випадку кількість N_{np} комірок таблиці або пам'яті, де будуть зберігатися результати Z_j складання двох двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j и X''_j, вже буде дорівнювати:

$$N_{np} = 2^{2(n-1)}.$$

Мінімальна вихідна розрядність комірок пам'яті для зберігання результату Z_j так само, як і в попередньому випадку, повинна дорівнювати $(n-1)$, а при наявності перенесень в старший n-й розряд, так як і раніше, необхідні $2(n-1)$ розрядів. З огляду на це інформаційна ємність C_{np} пам’яті для реалізації табличного методу складе на практиці:

$$C_{np} = N_{np} \cdot 2(n-1) = 2(n-1) \cdot 2^{2(n-1)} = (n-1) \cdot 2^{2n-1}.$$

Слід зазначити, що при додаванні m двійкових біноміальних чисел кількість комірок N_{np} і ємність пам'яті ще більшою мірою зростають і будуть вже мати значення відповідно (приймаючи, що для представлення результату суми Z_j достатньо кількості розрядів $2(n-1)$):

$$N_{np} = 2^{m(n-1)},$$

$$C_{np} = N_{np} \cdot m(n-1) = m(n-1) \cdot 2^{m(n-1)}.$$

Очевидно, що хоча для реалізації біноміального арифметичного складання табличний метод вимагає всього один машинний такт, тобто обсяг часових витрат становить $T_{np} = 1$, він є вкрай невигідним з погляду обсягу C_{np} апаратних витрат та складності адресації таблиці біноміального арифметичного складання. При цьому зазначену таблицю необхідно заздалегідь сформувати для конкретних значень n і k, що незручно і неефективно на практиці, якщо передбачається, що параметри двійкових (n,k)-біноміальних чисел, що підсумовуються, можуть час за часом змінюватися.

Інший граничний випадок біноміального арифметичного складання з погляду обсягу програмно-апаратних та часових витрат – це позиційна лічба. Для цього випадку одне з двох двійкових (n,k)-біноміальних чисел, що складаються, наприклад X''_j, представляється як кількість послідовних одиничних імпульсів, які необхідно додати до двійкового (n,k)-біноміального числа X'_j: $\tilde{X}'_j = X'_j + 1$. При цьому з кожним машинним тактом значення біноміального числа X''_j зменшується на одиницю: $\tilde{X}''_j = X''_j - 1$. Ознакою закінчення біноміального арифметичного складання та отримання результату $Z_j = \tilde{X}'_j$ є рівність $\tilde{X}''_j = 0$. Теорія біноміальної лічби з викладенням алгоритмів додавання та віднімання одиниці від двійкового біноміального числа наведена в роботах [43; 74]. При апаратній реалізації такого способу біноміального складання застосовуються двійкові біноміальні лічильники, принципи дії та функціональний устрій яких розкриваються в роботах [60; 75].

Структура системи біноміального складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел на основі позиційної лічби показана на рисунку 2.3.

У підсумовуючий і віднімаючий біноміальні лічильники одночасно завантажуються двійкові (n,k)-біноміальні числа X'_j і X''_j відповідно (рисунок 2.3). Оскільки у віднімаючому біноміальному лічильнику відсутній у цей момент нульовий вміст, то інформаційний сигнал $\tilde{X}''_j \neq 0$ має дозвільний рівень для проходження імпульсів лічби на рахункові входи біноміальних лічильників. З надходженням кожного імпульсу підсумовуючий лічильник збільшує свій стан на одиницю $\tilde{X}'_j = X'_j + 1$, а віднімаючий, навпаки, зменшує на одиницю $\tilde{X}''_j = X''_j - 1$. Таким чином відбувається до тих пір, поки біноміальний лічильник, що віднімає, не опиниться в нульовому стані і, виходячи з цього, не сформується сигнал виду $\tilde{X}''_j = 0$. Нульовий рівень даного сигналу замикає блок дозволу імпульсів для проходження машинних тактів, а в підсумовуючому біноміальному лічильнику тоді буде міститися шуканий результат суми $Z_j = X'_j + X''_j$. У випадку, коли сума двійкових (n,k)-біноміальних чисел, що складаються, перевищуватиме максимальне значення $C_n^k - 1$ діапазону чисел при заданих параметрах n і k – $X'_j + X''_j \geq C_n^k$ (див. підрозділ 1.2, (1.2.5)), то з'являється сигнал переносу $P \geq C_n^k$ в старший розряд.

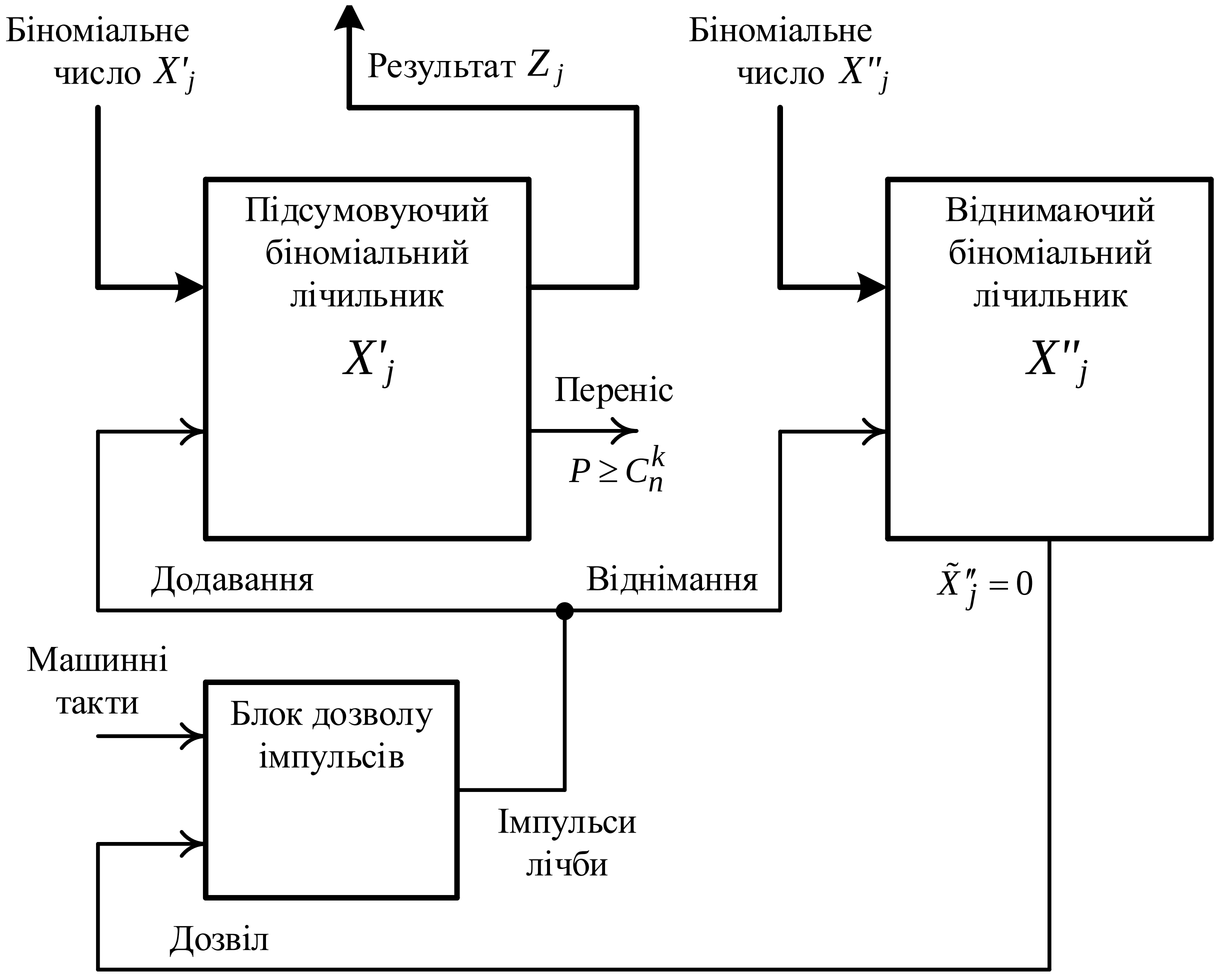


Рисунок 2.3 – Система двійкового біноміального складання на основі позиційної лічби

Порівняно з попереднім способом реалізації біноміального складання з використанням пам'яті, спосіб на основі біноміальних лічильних пристроїв відрізняється значними часовими витратами. Очевидно, що кількість T тактів тут дорівнюватиме кількісному еквіваленту другого доданку – (n,k)-біноміального числа X''_j і, відповідно, може змінюватися від одиничного значення, коли $Z_j = X'_j + 1$, до $C_n^k - 1$ тактів, коли $Z_j = C_n^k - 1$, тобто, коли $X'_j = 0$. Але слід уточнити, що для перемикання біноміальних лічильних пристроїв – переходу в нові стани $\tilde{X}'_j = X'_j + 1$ і $\tilde{X}''_j = X''_j - 1$ – потрібна додатково певна кількість машинних тактів. По-перше, це пов'язано з пошуком розрядів у рівномірних комбінаціях лічильних пристроїв, які будуть перемикатися в процесі підсумовуючої та спадаючої лічби, а, по-друге, необхідні також машинні такти для зміни власне значень розрядів при рахунку. Це відповідає змісту теорем 7.5, 7.6 [44] або теорем 44, 45 [43], які лежать в основі алгоритмів додавання і віднімання одиниці.

Загальний вираз, що дає оцінку для мінімального та максимального значень обсягу часових витрат, матиме наступний вигляд:

$$T_{np} = T(t_1 + t_2 + t_3) = F''_j(t_1 + t_2 + t_3), \tag{2.2.1}$$

де $T = F''_j$ – кількість циклів, що складаються з машинних тактів, необхідних для реалізації підсумовуючої та віднімаючої лічби;

t_1 – кількість машинних тактів, необхідних визначення класу двійкових (n,k)-біноміальних чисел, до якого належать рівномірні (n,k)-біноміальні числа $\tilde{X}'_j$ і $\tilde{X}''_j$, тобто, для підрахунку чисел $\tilde{q}'$ і $\tilde{q}''$ двійкових одиниць в них;

t_2 – кількість машинних тактів, необхідних для виділення розрядів у рівномірних (n,k)-біноміальних числах $\tilde{X}'_j$ і $\tilde{X}''_j$, які потребують зміни значень при підсумовуванні та відніманні одиниці;

t_3 – кількість машинних тактів, необхідних для провадження зміни значень розрядів у рівномірних (n,k)-біноміальних числах $\tilde{X}'_j$ і $\tilde{X}''_j$.

При аналізі дії операцій, що входять до алгоритмів лічби [26; 44], а також таблиці А.1 у Додатку А, можна зробити висновок, що необхідні додатково $(n-1)$ машинних тактів для визначення класу двійкових (n,k)-біноміальних чисел, рівномірні кодові комбінації яких мають або $(n-k)$ нулів, або k одиниць. Далі, для визначення номерів розрядів, що вимагають зміни при лічбі, потрібні залежно від класу двійкових (n,k)-біноміальних чисел $(n-k+q)$ або $(k+l)$ машинних тактів, де $0 \le q \le k-1$ і $0 \le l \le n-k-1$. Коли номери розрядів, значення яких підлягають зміні (інверсії) у біноміальних лічильних пристроях, виявлені, то додатково необхідні від мінімальних двох до максимальних $(k+1)$ машинних тактів.

Використовуючи (2.2.1), вищенаведені мінімальні та максимальні значення часових параметрів t_2 і t_3, можна визначити межі зміни знизу та зверху обсягу часових витрат T_{np} при реалізації біноміального складання на основі біноміальних лічильних пристроїв. Приймаючи $k < n/2$ і $n \gg 1$, в випадку мінімальних значень кількості машинних тактів, коли $T = 1$, $t_1 = n-1$, $t_2 = k$ при $l = 0$ і $t_3 = 2$, отримаємо

$$T_{np} \ge T_{np\min} = n + k\,. \tag{2.2.2}$$

У разі максимальних значень кількості машинних тактів, коли $T = C_n^k - 1$, $t_1 = n-1$, $t_2 = n-1$ при $l = n-k-1$, $t_3 = k+1$, з врахуванням $n \gg 1$ маємо

$$T_{np} \le T_{np\max} = \left(C_n^k - 1\right)(2n+k)\,. \tag{2.2.3}$$

Виходячи з нерівностей (2.2.2) та (2.2.3), можна зробити висновок, що обсяг T_{np} часових витрат при реалізації біноміального додавання прийматиме суттєві значення, особливо, якщо n велике. В разі необхідності додавання m

двійкових (n,k)-біноміальних чисел, то тут підсумовування може бути здійснено лише послідовно у часі. Тоді

$$T_{np} \geq m \cdot T_{np\,\min} = m(n+k),$$

$$T_{np} \leq m \cdot T_{np\,\max} = m\left(C_n^k - 1\right)(2n+k).$$

Слід також звернути увагу на те, що біноміальні лічильники (рисунок 2.3) є дуже складними пристроями і вимагають для своєї реалізації дуже значного обсягу апаратних витрат [60; 75].

Наведені вище твердження та аналітичні оцінки щодо обсягів апаратних і часових витрат на практиці відносяться не тільки до апаратного забезпечення двійкового біноміального арифметичного складання, але і його програмної реалізації. У разі табличного методу тоді вестиметься мова про обсяг оперативної пам'яті, де зберігатимуться результати біноміального складання, і довжину програмного коду для оперування із зазначеною таблицею. У разі програмної реалізації системи біноміального арифметичного складання на основі лічильних пристроїв будуть розглядатися вже довжина програмного коду для алгоритмів біноміальних підсумовуючої та віднімаючої лічби. Щодо характеристики обсягу часових витрат, то при програмній реалізації біноміального арифметичного складання мається на увазі час виконання програми або кількість машинних тактів роботи процесора.

Таким чином, наявні можливі способи реалізації біноміального арифметичного складання, вимагають значних витрат: апаратних для табличного методу або часових для методу з використанням біноміальних лічильних пристроїв (алгоритмів біноміальної лічби). При цьому останній випадок у разі створення програмного забезпечення буде характеризуватись ще значною довжиною програмного коду. Очевидно, що при обмеженнях на обсяг програмно-апаратних витрат або час виконання програми, які є розповсюдженими, ці способи є непридатними.

Але найголовніше, зазначені способи не відображають властивостей біноміального арифметичного складання та особливостей арифметики двійкових біноміальних чисел в цілому. Це перешкоджає поширенню двійкових біноміальних систем числення та розробки на їх основі перспективних інформаційних технологій обробки даних.

Вивчення властивостей двійкових (n,k)-біноміальних чисел, особливостей формування серій значущих одиниць та виникнення переносів з розряду в розряд двійкового (n,k)-біноміального числа дозволяють отримати правила двійкового біноміального складання та на їх основі алгоритмів додавання двійкових (n,k)-біноміальних чисел [62; 63; 70].

Сформульована у підрозділі 2.1 математична модель арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j призводить до узагальненого алгоритму біноміального матричного складання, що містить наступні кроки.

Узагальнений алгоритм біноміального матричного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел.

Крок 1. Формуються q-кортежів $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ (2.1.4) із двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, що складаються.

Крок 2. З q-кортежів $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ формується невпорядкована вибірка $G=\left[S_{X'_j},S_{X''_j}\right]\in M'$ (2.1.15), $G\in M'$ (2.1.17).

Крок 3. Будується послідовність (2.1.22) вагових коефіцієнтів $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ з найбільшим значенням зміщення Δ і довжиною, що дорівнює $(k+1)$, які беруться з вибірки $G=\left[S_{X'_j},S_{X''_j}\right]$.

Крок 4. У разі, якщо необхідний ваговий коефіцієнт $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ із заданим α_i відсутній і більше за значенням тих, що містяться у вибірці G, то виконується декрементація $\Delta=\Delta-1$ та будується послідовність біноміальних коефіцієнтів

$C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$, починаючи з заданого α_i, при новому значенні зміщення параметрів вагових коефіцієнтів, що дорівнює $(\Delta-1)$.

Крок 5. У разі, якщо необхідний ваговий коефіцієнт $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ з заданим α_i відсутній, але за значенням дорівнює або менше тих, що залишилися з вибірки G, то виконуються перетворення W зміщення, або B симетрії, або D розкладання, або обернене перетворення D^{-1} розкладання відповідно до рівностей (2.1.23), (2.1.24) і (2.1.25).

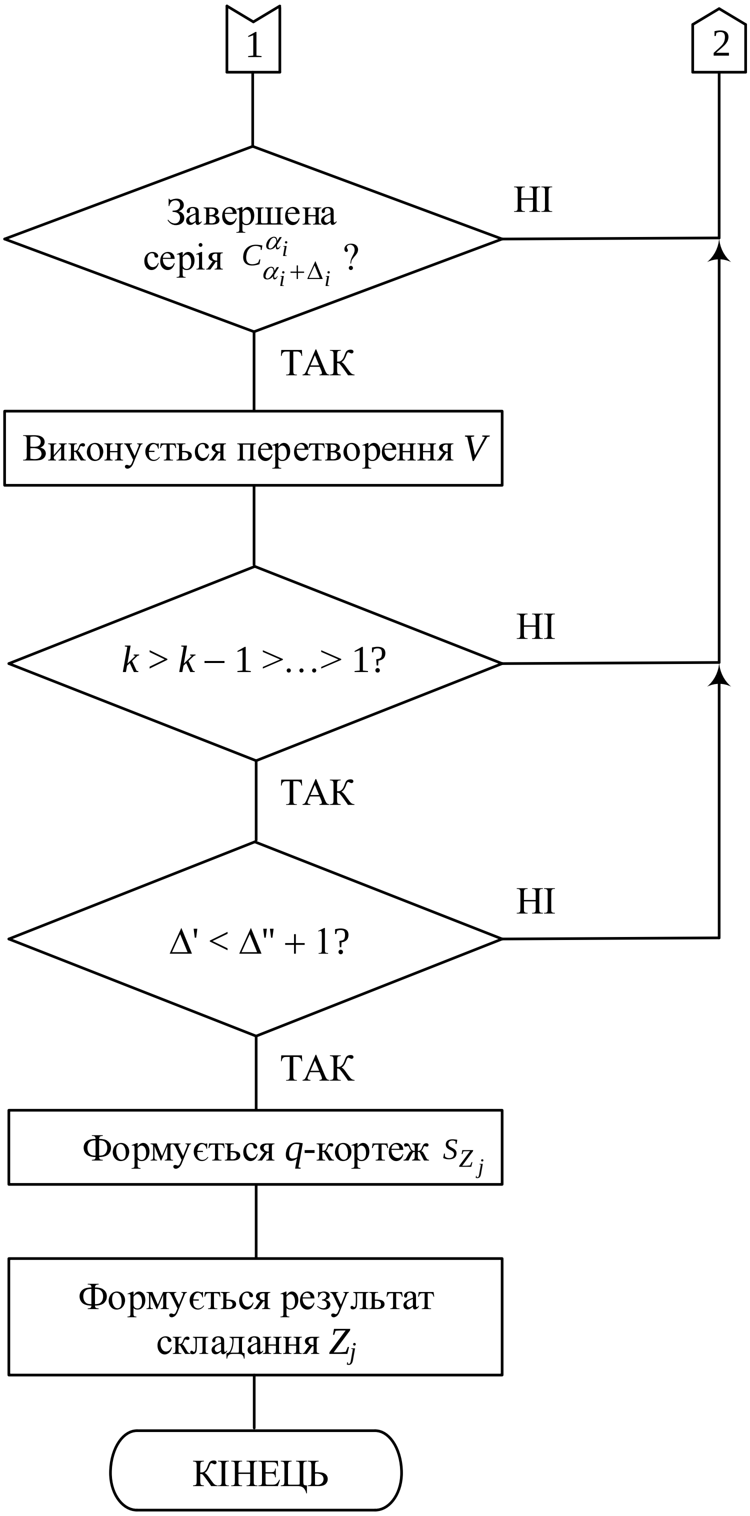
Крок 6. По закінченню побудови серії біноміальних коефіцієнтів застосовується V перетворення (2.1.22) з метою отримання біноміального коефіцієнту $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ з заданими α_i і Δ.

Крок 7. Якщо верхні параметри α_i вагових коефіцієнтів $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ складають суворо монотонно спадаючу послідовність значень $k > k-1 > k-2 > ... > 1$ і для сусідніх по значенню α_i отриманих вагових коефіцієнтів $C_{(\alpha_i+1)+\Delta_i''}^{\alpha_i+1}$ і $C_{\alpha_i+\Delta_i'}^{\alpha_i}$ виконується нерівність $\Delta' < \Delta'' + 1$, то впорядкований q-елементний кортеж S_{Z_j} (2.1.4) результату додавання $Z_j = X_j' + X_j''$ вважається сформованим і процес біноміального арифметичного складання завершується. В іншому випадку здійснюється перехід до кроку 4.

Крок 8. З отриманого q-елементного кортежу S_{Z_j} (2.1.4), в котрому кожний ваговий коефіцієнт $C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ вказує на одиничний двійковий розряд $i = n - \alpha_i - \Delta_i$, складається результуюче (n,k)-біноміальне число Z_j.

Блок-схема теоретичного алгоритму складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j' і X_j'' наведена розряду на рисунку 2.4.

Рисунок 2.4 – Блок-схема теоретичного алгоритму складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j



Продовження рисунку 2.4 – Блок-схема теоретичного алгоритму складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j

Реалізація теоретичного узагальненого алгоритму складання двійкових біноміальних чисел з використанням матричних моделей призводить до більш високої швидкодії. Це пов'язано з тим, що область вагових коефіцієнтів двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, що складаються; область біноміальних коефіцієнтів, одержуваних у результаті перетворень $\langle V,W,B,D\rangle$ (2.1.22)-(2.1.25), і область вагових коефіцієнтів, що належать до результату підсумовування $Z_j = X'_j + X''_j$ поєднуються, що призводить до спрощення переходу між біноміальними коефіцієнтами різних областей, до суттєвого зниження кількості пересилок між областями і, внаслідок цього, до зменшення часу біноміального арифметичного складання [61; 62; 63].

Таким чином, розглянемо прикладний алгоритм арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, використовуючи їх матричне представлення [62].

Алгоритм арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел на основі матричних моделей.

Крок 1. [Початкова ініціалізація алгоритму].

$$S_{X'_j}, S_{X''_j}, S_{Z_j} \leftarrow 0,$$

$$\|X'_j\|, \|X''_j\|, \|Z_j\|, \|X'_j + X''_j\| \leftarrow 0.$$

(X'_j, X''_j – двійкові (n,k)-біноміальні числа; Z_j – результат складання; $S_{X'_j}$, $S_{X''_j}$, S_{Z_j} – кортежі відповідних біноміальних чисел X'_j, X''_j, Z_j; $\|X'_j\|$, $\|X''_j\|$, $\|Z_j\|$ – $(0,1)$-матриці чисел X'_j, X''_j, Z_j; $\|X'_j + X''_j\|$ – $(0,11...1)$-матриця біноміального арифметичного складання).

Крок 2. [Генерування кортежів $S_{X'_j}$, $S_{X''_j}$].

$$S_{X'_j} \leftarrow \left((\alpha,\Delta)^{(1)},...,(\alpha,\Delta)^{(u)},...,(\alpha,\Delta)^{(q_{X'_j})}\right),$$

$$S_{X''_j} \leftarrow \left((\alpha,\Delta)^{(1)},...,(\alpha,\Delta)^{(u)},...,(\alpha,\Delta)^{(q_{X''_j})} \right).$$

(Кортеж $S_{X'_j}$ складається з $q_{X'_j}$ елементів, $S_{X''_j}$ – з $q_{X''_j}$ елементів, $0 \le q_{X'_j}, q_{X''_j} \le k$).

Крок 3. [Формування $(0,1)$-матриць (2.1.11) двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, включаючи вагові коефіцієнти $(\alpha,\Delta)=1$].

$$\left\| X'_j \right\| \leftarrow S_{X'_j},\ \left\| X''_j \right\| \leftarrow S_{X''_j}.$$

($(0,1)$-матриці мають k стовпців і $n-k$ рядків).

Крок 4. [Формування $(0,11...1)$-матриці біноміального арифметичного складання відповідно до (2.1.27)].

$$\left\| X'_j + X''_j \right\| \leftarrow \left\| X'_j \right\|,$$

$$\left\| X'_j + X''_j \right\| \leftarrow \left\| X''_j \right\|.$$

(Матриця має $k+1$ стовпців α і $n-k$ рядків Δ).

Крок 5. [Завдання початкових значень координат шуканої комірки (α_t,Δ_t) в $(0,11...1)$-матриці біноміального арифметичного складання].

$$\alpha_t \leftarrow k,$$

$$\Delta_t \leftarrow n-k-1.$$

Крок 6. [Перша умова завершення біноміального арифметичного складання (2.1.12): стовпець α_t повинен мати одну одиничну комірку (α_t,Δ_t)].

Якщо

$$\left(\sum_{\Delta_t=0}^{n-k-1} \left\langle (\alpha_t,\Delta_t) \right\rangle = 1,\ \alpha_t = \overline{k, k-q+1} \right) \wedge \wedge \left(\sum_{\Delta_t=0}^{n-k-1} \left\langle (\alpha_t,\Delta_t) \right\rangle = 0,\ \alpha_t = \overline{k-q, 0} \right), \tag{2.2.4}$$

то виконується перехід до наступного кроку. В іншому випадку здійснюється перехід до кроку 8.
(q − число одиничних комірок (α_t, Δ_t), дужки $\langle(...)\rangle$ означають вміст відповідної комірки).

Крок 7. [Друга умова завершення біноміального арифметичного складання (2.1.13): кожна наступна одинична комірка (α_t, Δ_t) не повинна розташовуватися вище за рядком, ніж попередня $(\alpha_t + 1, \Delta_t)$].

Якщо

$$\left(\langle(\alpha_t, \Delta_{t1})\rangle = 1\right) \wedge \left(\langle(\alpha_t + 1, \Delta_{t2})\rangle = 1\right) \wedge \left(\Delta_{t1} < \Delta_{t2} + 1\right), \qquad (2.2.5)$$

то виконується перехід до кроку 17. Інакше здійснюється перехід до кроку 8.

Крок 8. [Перехід до циклу перетворення V переносу (2.1.28) для одиничного Δ_t рядка або підрядка].

Якщо $\alpha_t = 0$, то виконується перехід до наступного кроку. В іншому випадку здійснюється перехід до кроку 10.
(Рівність $\alpha_t = 0$ означає, що серія двійкових одиниць для організації переносу до старшого розряду сформована).

Крок 9. [Перетворення V переносу (2.1.28) над одиничним Δ_t рядком (або підрядком), яке розпочинається з комірки $(0, \Delta_t)$].

Якщо $\langle(\alpha_t, \Delta_t)\rangle = 1$, то

$$\left(\langle(\alpha_t, \Delta_t)\rangle = 0\right) \wedge \left((\alpha_t, \Delta_t) \leftarrow (\alpha_t + 1, \Delta_t)\right)$$

і виконується перехід до кроку 9. Інакше

$$\left(\langle(\alpha_t - 1, \Delta_t + 1)\rangle = 1\right) \wedge \left((\alpha_t, \Delta_t) \leftarrow (\alpha_t - 1, \Delta_t + 1)\right)$$

і здійснюється перехід до кроку 6.
(Вміст комірок (α_t, Δ_t), координата яких $\alpha_t > k$, дорівнює нулю).

Крок 10. [Зворотне перетворення D^{-1} розкладання (2.1.31): прискорене формування одиничного Δ_t рядка (або підрядка)].

Якщо

$$\left(\left\langle\left(\alpha_t,\Delta_t\right)\right\rangle=1\right)\wedge\left(\left\langle\left(\alpha_t-1,\Delta_t+1\right)\right\rangle=1\right),$$

то

$$\left\langle\left(\alpha_t,\Delta_t\right)\right\rangle=\left\langle\left(\alpha_t-1,\Delta_t+1\right)\right\rangle=0 \text{ і } \left\langle\left(\alpha_t,\Delta_t+1\right)\right\rangle=1.$$

Шуканою становиться комірка $\left(\alpha_t,\Delta_t\right)\leftarrow\left(\alpha_t,\Delta_t+1\right)$ і виконується перехід до кроку 11. Інакше здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 11. [Цикл формування одиничного Δ_t рядка (або підрядка) матриці біноміального арифметичного складання, починаючи з комірки $\left(\alpha_t,\Delta_t\right)$].

Якщо $\left\langle\left(\alpha_t,\Delta_t\right)\right\rangle=1$, то $\left(\alpha_t,\Delta_t\right)\leftarrow\left(\alpha_t-1,\Delta_t\right)$ і виконується перехід до кроку 11. Інакше здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 12. [Пошук перетвореної комірки $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$: випадок рівності перетворюваної та шуканої комірок $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)=\left(\alpha_t,\Delta_t\right)$].

Якщо $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)=\left(\alpha_t,\Delta_t\right)$ при

$$\begin{cases}\alpha_s=\overline{\alpha_t-1,0}\\ \Delta_s=\overline{\Delta_t+1,0}\end{cases} \text{ або } \begin{cases}\alpha_s=\overline{k,\alpha_t}\\ \Delta_s=\overline{\Delta_t-1,0}\end{cases}, \tag{2.2.6}$$

то виконується перехід до наступного кроку. В іншому випадку здійснюється перехід до кроку 15.

(При рівності значень ваг комірок $\left(\alpha_t,\Delta_t\right)$ і $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$ можливі лише перетворення W зсуву (2.1.29) і B симетрії (2.1.30)).

Крок 13. [Перетворення W зсуву (2.1.29) для комірки $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$, що перетворюється, матриці біноміального арифметичного складання].

Якщо

$$\left(\Delta_s=0\right)\wedge\left(\left(\Delta_t=0\right)\vee\left(\alpha_t=0\right)\right), \tag{2.2.7}$$

то

$$\left(\left\langle\left(\alpha_t,\Delta_t\right)\right\rangle=1\right)\wedge\left(\left\langle\left(\alpha_s,\Delta_s\right)\right\rangle=0\right)$$

і виконується перехід до кроку 6. Інакше здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 14. [Перетворення B симетрії (2.1.30) для перетвореної комірки (α_s, Δ_s) матриці біноміального арифметичного складання].

Так як

$$\left((\alpha_t, \Delta_t) = (\alpha, \Delta)\right) \wedge \left((\alpha_s, \Delta_s) = (\Delta, \alpha)\right),$$

то

$$\left(\left\langle(\alpha_t, \Delta_t)\right\rangle = 1\right) \wedge \left(\left\langle(\alpha_s, \Delta_s)\right\rangle = 0\right)$$

і виконується перехід до кроку 6.

(Якщо не можна застосувати перетворення W зсуву, то обов'язково застосовується перетворення B симетрії).

Крок 15. [Пошук перетворюваної комірки (α_s, Δ_s): випадок, коли вага комірки(α_s, Δ_s) більша ваги шуканої (α_t, Δ_t)].

Якщо

$$\sum_{\Delta_s = \Delta_t + 1}^{n-k-1} \left\langle(\alpha_t + 1, \Delta_s)\right\rangle = 0,$$

то виконується перехід до наступного кроку. В іншому випадку здійснюється перехід до кроку 17.

(Враховуються можливі одиничні комірки, з яких продовжується формування Δ_t рядка (або підрядка)).

Крок 16. [Випадок, коли вага виявленої комірки (α_s, Δ_s) більша ваги шуканої комірки (α_t, Δ_t) при нульових комірках стовпця $\alpha_t + 1$, починаючи з координати $\Delta_s = \Delta_t + 1$].

Якщо

$$(\alpha_s, \Delta_s) > (\alpha_t, \Delta_t)$$

з області

$$\begin{cases} \alpha_s = \overline{\alpha_t - 1, 0} \\ \Delta_s = \overline{\Delta_t + 1, 0} \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \alpha_s = \overline{k, \alpha_t} \\ \Delta_s = \overline{\Delta_t - 1, 0} \end{cases},$$

здійснюється перехід до кроку 18. В протилежному випадку

$$(\alpha_t, \Delta_t) \leftarrow (\alpha_t, \Delta_t - 1)$$

і здійснюється перехід до кроку 10.

(Пошук більших за кількісним еквівалентом комірок (α_s, Δ_s) в вищенаведеній області означає наявність вже сформованих одиниць у комірках (k, Δ_t), $(k-1, \Delta_t)$, …, $(\alpha_t + 1, \Delta_t)$).

Крок 17. [Випадок, коли вага виявленої комірки (α_s, Δ_s) більше ваги шуканої комірки (α_t, Δ_t) при одиничних комірок стовпця $\alpha_t + 1$, починаючи з координати $\Delta_s = \Delta_t + 1$].

Якщо

$$(\alpha_s, \Delta_s) > (\alpha_t, \Delta_t)$$

з області

$$\begin{cases} \alpha_s = \overline{\alpha_t - 1, 0} \\ \Delta_s = \overline{\Delta_t + 1, 0} \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \alpha_s = \overline{k, \alpha_t} \\ \Delta_s = \overline{\Delta_t, 0} \end{cases}, \tag{2.2.8}$$

то виконується перехід до наступного кроку. В іншому випадку

$$(\alpha_t, \Delta_t) \leftarrow (\alpha_t, \Delta_t - 1)$$

і здійснюється перехід до кроку 10.

(Пошук більших за кількісним еквівалентом комірок (α_s, Δ_s) у вищенаведеній області означає наявність заборонених одиниць згідно (2.1.12) в комірках (k, Δ_t), $(k-1, \Delta_t)$, …, $(\alpha_t + 1, \Delta_t)$).

Крок 18. [Перетворення D розкладання (2.1.31) для комірки (α_s, Δ_s), що перетворюється, матриці біноміального арифметичного складання].

$$\langle(\alpha_s, \Delta_s - 1)\rangle = 1,\ \langle(\alpha_s - 1, \Delta_s)\rangle = 1,\ \langle(\alpha_s, \Delta_s)\rangle = 0$$

і виконується перехід до кроку 10.

Крок 19. [Завершення біноміального арифметичного складання $X'_j + X''_j$ та виведення результату складання Z_j].

$$\left\| Z_j \right\| \leftarrow \left\| X'_j + X''_j \right\|,\ S_{Z_j} \leftarrow \left\| Z_j \right\|,\ Z_j \leftarrow S_{Z_j}$$

і завершення алгоритму.

(Отримання з матриці біноміального арифметичного складання $(0,1)$-матриці результуючого (n,k)-біноміального числа Z_j відповідно до (2.1.26) і (2.1.11), отримання з $(0,1)$-матриці упорядкованої q-елементної вибірки S_{Z_j} відповідно до (2.1.11) і (2.1.4), отримання з вибірки S_{Z_j} двійкового (n,k)-біноміального числа, результату суми Z_j відповідно до (2.1.4) і (2.1.2)).

Деякі операції наведеного прикладного алгоритму на основі матричної моделі біноміального арифметичного складання мають досить загальний вигляд, що передбачає їхнє можливе подальше розкладання на елементарні операції. Але в цілому час виконання алгоритму та обсяг програмно-апаратних витрат в залежності від параметрів n і k мають поліноміальний характер змінення.

Приклад 2.4 Необхідно додати два двійкові числа $(9,4)$-біноміальні числа $X'_j = 01101100$ і $X''_j = 00101011$ [62].

Пояснення до прикладу. Продемонструємо роботу наведеного алгоритму арифметичного складання двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел з даного прикладу, показуючи дію лише основних кроків, що призводять до зміни значень комірок матриці біноміального арифметичного складання.

Крок 1. Виконується приведення до вихідного нульового стану q-кортежів $S_{X'_j}$, $S_{X''_j}$, S_{Z_j}, $(0,1)$-матриць $\left\| X'_j \right\|$, $\left\| X''_j \right\|$, $\left\| Z_j \right\|$ і $(0,11...1)$-матриці $\left\| X'_j + X''_j \right\|$ для виконання біноміального арифметичного складання.

Крок 2. Генерування 4-елементних кортежів $S_{X'_j}$, $S_{X''_j}$ відповідних до 8-розрядних $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01101100$ і $X''_j = 00101011$, де $q = q_{X'_j} = q_{X''_j} = 4$, наступним чином:

2.1 Визначаються верхній α_i і нижній параметри Δ_i вагових коефіцієнтів $C^{\alpha_i}_{\alpha_i+\Delta_i}$ двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел X'_j і X''_j, використовуючи числову біноміальну функцію (2.1.2):

$$F'_j = \mathrm{dec}(01101100) = \sum_{i=1}^{8} x'_i C^{\alpha_i}_{\alpha_i+\Delta_i} = C^4_7 + C^3_6 + C^2_4 + C^1_3, \qquad (2.2.9)$$

$$F''_j = \mathrm{dec}(00101011) = \sum_{i=1}^{8} x''_i C^{\alpha_i}_{\alpha_i+\Delta_i} = C^4_6 + C^3_4 + C^2_2 + C^1_1. \qquad (2.2.10)$$

2.2 Використовуючи значення α_i і Δ_i з (2.2.9) і (2.2.10), формуються кортежі виду (α_i, Δ_i), а з них складаються 4-елементні кортежі $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01101100$ і $X''_j = 00101011$ згідно (2.1.4):

$$S_{X'_j} \leftarrow \big((4,3),(3,3),(2,2),(1,2)\big), \qquad (2.2.11)$$

$$S_{X''_j} \leftarrow \big((4,2),(3,1),(2,0),(1,0)\big). \qquad (2.2.12)$$

Крок 3. Формуються $(0,1)$-матриці заданих $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01101100$ і $X''_j = 00101011$ на основі отриманих кортежів $S_{X'_j}$ (2.2.11) і $S_{X''_j}$ (2.2.12):

$$\left\|X'_j\right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \qquad \left\|X''_j\right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array}. \qquad (2.2.13)$$

Крок 4. Будується матриця біноміального арифметичного складання шляхом додавання нульового стовпця з $\alpha = 0$ та вказання всіх комірок $\langle(\alpha, \Delta)\rangle = 1$, які відноситься до чисел $X'_j = 01101100$ і $X''_j = 00101011$ (2.2.13):

$$\left\| X'_j + X''_j \right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \hline \end{array}. \qquad (2.2.14)$$

Крок 5. Задається початкова шукана комірка, з якої починаються перетворення комірок матриці біноміального складання: $(\alpha_t, \Delta_t) \leftarrow (4,4)$.

Крок 6. Перша ознака завершення арифметичного складання (2.2.4) не виконується, тому що в матриці (2.2.14) є стовпці $\alpha = 4$, $\alpha = 3$, $\alpha = 2$ і $\alpha = 1$ с двома одиницями. Тоді слід продовжити біноміальне складання і виконується перехід до кроку 8.

Крок 8. Перевіряється рівність $\alpha_t = 0$, але оскільки $\alpha_t = 4$ для поточної комірки, то відсутній одиничний рядок або підрядок $(0,11...1)$-матриці, що закінчується коміркою виду $(0,4)$. Тоді перетворення V переносу (2.1.28) не використовується та виконується перехід до кроку 10.

Подвійне циклічне повторення кроків 10-12 і 15, 16 до виявлення комірки $(4,2)$ матриці біноміального складання (2.2.15), яка задовольняє умовам виконання перетворення D:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & [0] & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \hline \end{array}. \qquad (2.2.15)$$

Далі слідує виконання кроку 18.

Крок 18. Виконується перетворення D розкладання (2.1.31) над коміркою $(4,2)$, що розглядається, матриці біноміального складання (2.2.16):

$$\langle(4,1)\rangle = 1,\ \langle(3,2)\rangle = 1,\ \langle(4,2)\rangle = 0,$$

0	0	0	0	0
1	**1**	[0]	0	0
0	**1**	**1**	**1**	0
1	**1**	0	0	0
0	0	**1**	**1**	0

(2.2.16)

і виконується перехід до кроку 10.

Крок 10. Перевіряється умова для прискореного формування одиничного рядка чи підрядка $\Delta_t = 3$ матриці біноміального складання, яке не виконується та здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 11. Продовжується формування одиничної $\Delta_t = 3$ рядка, починаючи з комірки $(2,3)$. Так як вміст поточної комірки $\langle(2,3)\rangle = 0$, то виконується перехід до наступного кроку.

Крок 12. Серед комірок матриці біноміального складання продовжується пошук таких комірок $(\alpha_s, \Delta_s) = (2,3)$, координати яких задовольняють системам рівностей (2.2.6) кроку 12. Такою коміркою є комірка $(3,2)$. Отже, виконується перехід до наступного кроку.

Крок 13. Перевіряється умова (2.2.7) перетворення W зсуву (2.1.29) для комірок матриці $(2,3)$ і $(3,2)$, яке не виконується та здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 14. Застосовується перетворення B симетрії (2.1.30):

$$\left(\langle(2,3)\rangle = 1\right) \wedge \left(\langle(3,2)\rangle = 0\right),$$

0	0	0	0	0
1	**1**	**1**	$[0]$	0
0	0	**1**	**1**	0
1	**1**	0	0	0
0	0	**1**	**1**	0

і виконується перехід до кроку 6.

Подальша послідовна дія кроків 6, 8, 10-12 алгоритму призводить до знаходження для шуканої комірки $(\alpha_t, \Delta_t) = (1,3)$ рівної за вагою комірки $(\alpha_s, \Delta_s) = (3,1)$. Далі слідує виконання кроку 13.

Крок 13. Перевіряється умова перетворення W зсуву (2.1.29) для комірок $(1,3)$ і $(3,1)$ матриці біноміального складання, яке не виконується і здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 14. Застосовується перетворення B симетрії (2.1.30) над комірками $(1,3)$ і $(3,1)$ матриці біноміального складання:

$$\left(\left\langle(1,3)\right\rangle = 1\right) \wedge \left(\left\langle(3,1)\right\rangle = 0\right),$$

0	0	0	0	0
1	**1**	**1**	**1**	$[0]$
0	0	**1**	**1**	0
1	0	0	0	0
0	0	**1**	**1**	0

здійснюється перехід до кроку 6.

Подальша послідовна дія кроків 6, 8, 10-12 призводить до знаходження для комірки $(\alpha_t, \Delta_t) = (0,3)$ рівної по вазі комірці $(\alpha_s, \Delta_s) = (2,0)$. Далі слідує виконання кроку 13.

Крок 13. Умова перетворення W зсуву (2.1.29) для комірок $(0,3)$ і $(2,0)$ матриці біноміального складання виконується. Тоді

$$\left(\left\langle(0,3)\right\rangle=1\right)\wedge\left(\left\langle(2,0)\right\rangle=0\right),$$

0	0	0	0	0
1	**1**	**1**	**1**	**1**
0	0	**1**	**1**	0
1	0	0	0	0
0	0	0	**1**	0

(2.2.17)

і здійснюється перехід до кроку 6.

Крок 6. Перша ознака завершення біномного складання (2.2.4) не виконується для поточного стану матриці (2.2.17). Тоді слід продовжити біноміальне арифметичне складання і виконується перехід до кроку 8.

Крок 8. Виконується рівність $\alpha_t=0$ для поточної комірки $(0,3)$ $(0,11...1)$-матриці (2.2.17). Отже, є сформований одиничний $\Delta_t=3$ рядок, над яким можна виконати перетворення V переносу (2.1.28) і здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 9. Виконується перетворення V переносу (2.1.28) над одиничним $\Delta_t=3$ рядком матриці біноміального складання (2.2.17):

$$\left\langle(0,3)\right\rangle=\left\langle(1,3)\right\rangle=\left\langle(2,3)\right\rangle=\left\langle(3,3)\right\rangle=\left\langle(4,3)\right\rangle=0,\ \left\langle(4,4)\right\rangle=1,$$

1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	**1**	**1**	0
1	[0]	0	0	0
0	0	0	**1**	0

(2.2.18)

Тепер шуканою становиться комірка $(\alpha_t,\Delta_t)\leftarrow(3,4)$ у матриці біноміального складання і здійснюється перехід до кроку 6.

Крок 6. Перша ознака завершення додавання (2.2.4) не виконується, виходячи з поточного вигляду $(0,11...1)$-матриці (2.2.18). Тоді слід продовжити біноміальне складання біноміальних чисел і виконується перехід до кроку 8.

Крок 8. Перевіряється рівність $\alpha_t = 0$, але оскільки $\alpha_t = 3$, то відсутній одиничний рядок або підрядок $(0,11...1)$-матриці (2.2.18), яка повинна закінчуватися коміркою виду $(0,4)$. Тоді перетворення V переносу (2.1.28) не використовується та виконується перехід до кроку 10.

Подальше циклічне повторення кроків 9-12, 15 і 17 призводить до знаходження для шуканої комірки $(3,1)$ більшої за вагою комірки $(4,1)$ в матриці складання (2.2.18) і виконується перехід до кроку 18.

Крок 18. Виконується перетворення D розкладання (2.1.31) над коміркою $(4,1)$, що розглядається, в матриці біноміального складання:

$$\langle(4,0)\rangle = 1,\ \langle(3,1)\rangle = 1,\ \langle(4,1)\rangle = 0,$$

1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	**1**	**1**	0
0	**1**	0	0	0
1	0	0	**1**	0

і виконується перехід до кроку 10.

Крок 10. Виконується зворотне перетворення D^{-1} розкладання над комірками $(3,1)$ і $(2,2)$ матриці біноміального складання:

$$\langle(3,1)\rangle = 0,\ \langle(2,2)\rangle = 0,\ \langle(3,2)\rangle = 1,$$

1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	**1**	0	**1**	0
0	0	[0]	0	0
1	0	0	**1**	0

(2.2.19)

і здійснюється перехід до кроку 11.

Крок 11. Продовжується формування одиничного $\Delta_t = 2$ рядка, починаючи з комірки $(3,2)$. Так як вміст комірки $\langle(3,2)\rangle = 1$, то шуканою становиться комірка $(\alpha_t, \Delta_t) \leftarrow (2,2)$ і продовжується виконання кроку 11. Оскільки комірка $\langle(2,2)\rangle = 0$, то здійснюється перехід до кроку 12.

Подальше виконання кроків 12, 15, 16, 10 і 11 робить шуканою комірку $(2,1)$ в підрядку $\Delta_t = 1$ (2.2.19) і здійснюється перехід до кроку 12.

Крок 12. Серед комірок матриці біноміального складання проводиться пошук таких комірок $(\alpha_s, \Delta_s) = (2,1)$, координати яких задовольняють системам рівностей (2.2.6) кроку 12. Такою коміркою є комірка $(1,2)$ (2.2.19). Отже, виконується перехід до наступного кроку.

Крок 13. Перевіряється умова (2.2.7) перетворення W зсуву для комірок $(1,2)$ і $(2,1)$ матриці біноміального складання, яке не виконується і здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 14. Застосовується перетворення B симетрії (2.1.30) для комірок $(1,2)$ і $(2,1)$ матриці біноміального складання:

$$\left(\langle(2,1)\rangle = 1\right) \wedge \left(\langle(1,2)\rangle = 0\right),$$

1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	**1**	0	0	0
0	0	**1**	0	0
1	0	0	**1**	[0]

(2.2.20)

і виконується перехід до кроку 6.

Крок 6. Перша ознака завершення біноміального складання (2.2.4) не виконується, виходячи з поточного виду матриці (2.2.20). Тоді слід продовжити складання біноміальних чисел і виконується перехід до кроку 8.

Крок 8. Перевіряється рівність $\alpha_t = 0$, але оскільки координата $\alpha_t = 2$, то відсутній одиничний рядок або підрядок матриці складання (2.2.20), що закінчується коміркою виду $(0,1)$. Тоді перетворення V переносу (2.1.28) не використовується та виконується перехід до кроку 10.

Подальше виконання кроків 10-12, 15 і 16 у матриці біноміального складання (2.2.20) призводять до шуканої комірки $(0,0)$ і знаходження рівної їй за вагою комірки $(4,0)$ та виконується перехід до кроку 13.

Крок 13. Умова застосування (2.2.7) перетворення W зсуву для комірки $(0,0)$ і $(4,0)$ матриці додавання виконується. Тоді згідно (2.1.29) маємо

$$\left(\left\langle(0,0)\right\rangle = 1\right) \wedge \left(\left\langle(4,0)\right\rangle = 0\right),$$

1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	**1**	0	0	0
0	0	**1**	0	0
0	0	0	1	**1**

(2.2.21)

та виконується перехід до кроку 6.

Крок 6. Перша умова завершення додавання (2.2.4) не виконується, виходячи з поточного виду матриці (2.2.21). Тоді слід продовжити арифметичне складання біноміальних чисел і виконується перехід до кроку 8.

Крок 8. Виконується рівність $\alpha_t = 0$ для поточної комірки $(0,0)$ матриці складання (2.2.21). Отже, є сформований одиничний $\Delta_t = 0$ підрядок, над яким можна виконати перетворення V переносу (2.1.28) і здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 9. Провадиться перетворення V переносу (2.1.28) над одиничним $\Delta_t = 0$ підрядком матриці біноміального складання (2.2.21):

$$\left\langle(0,0)\right\rangle = \left\langle(1,0)\right\rangle = 0,\ \left\langle(1,1)\right\rangle = 1,$$

1	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	**1**	0	0	0	(2.2.22)
0	0	**1**	**1**	$[0]$	
0	0	0	0	0	

Тепер шуканою становиться комірка $(\alpha_t,\Delta_t)\leftarrow(0,1)$ матриці складання (2.2.22) і здійснюється перехід до кроку 6.

Крок 6. Враховуючи вигляд матриці (2.2.22), перша умова (2.2.4) завершення біноміального арифметичного складання виконується:

$$\left(\sum_{\Delta_t=0}^{4}\langle(\alpha_t,\Delta_t)\rangle=1,\alpha_t=\overline{4,1}\right)\wedge\left(\sum_{\Delta_t=0}^{4}\langle(0,\Delta_t)\rangle=0\right).$$

Здійснюється перехід до кроку 7 алгоритму для перевірки другої умови завершення біноміального складання.

Крок 7. Враховуючи вид матриці (2.2.22), друга умова завершення (2.2.5) біноміального арифметичного складання виконується:

$$\left(\langle(\alpha_t,\Delta_{t1})\rangle=1\right)\wedge\left(\langle(\alpha_t+1,\Delta_{t2})\rangle=1\right)\wedge\left(\Delta_{t1}<\Delta_{t2}+1\right).$$

Дійсно,

для $\alpha_t+1=4$ і $\alpha_t=3$ маємо $\Delta_{t1}=2<\Delta_{t2}+1=4+1=5$;

для $\alpha_t+1=3$ і $\alpha_t=2$ маємо $\Delta_{t1}=1<\Delta_{t2}+1=2+1=3$;

для $\alpha_t+1=2$ і $\alpha_t=1$ маємо $\Delta_{t1}=1<\Delta_{t2}+1=1+1=2$.

Таким чином, здійснюється перехід до останнього кроку 19.

Крок 19. Провадиться виведення результату Z_j складання двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j=01101100$ і $X''_j=00101011$ наступним чином.

19.1 Виконується перетворення матриці біноміального складання (2.2.22) в $(0,1)$-матрицю двійкового $(9,4)$-біноміального числа Z_j шляхом відкидання нульового $\alpha_t=0$ стовпця:

$$\left\| Z_j \right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (2.2.23)$$

19.2 На основі $(0,1)$-матриці (2.2.23) результуючого $(9,4)$-біноміального числа Z_j будується 4-елементна упорядкована вибірка S_{Z_j} (2.1.4) з двохелементних кортежів (α_i, Δ_i), що відповідають одиничним коміркам:

$$S_{Z_j} \leftarrow \left((4,4),(3,2),(2,1),(1,1)\right). \qquad (2.2.24)$$

19.3 На основі отриманої 4-елементної упорядкованої вибірки S_{Z_j} (2.2.24) формується результуюче двійкове $(9,4)$-біноміальне число Z_j в нерівномірному вигляді як сума $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01101100$ і $X''_j = 00101011$. Компонентам упорядкованої вибірки S_{Z_j} (2.2.24), або, іншими словами, одиничним коміркам $(0,1)$-матриці (2.2.23), в результуючому $(9,4)$-біноміальному числі Z_j ставляться у відповідність вагові коефіцієнти (таблиця 2.2). Далі, виходячи з рівності $\beta_i = n - i$ визначаються номери розрядів двійкового $(9,4)$-біноміального числа Z_j, де повинні розміщуватись отримані двійкові одиниці.

Таблиця 2.2 – Відповідність компонентів S_{Z_j} вагам

Компоненти вибірки S_{Z_j} або одиничні комірки $(0,1)$-матриці біноміального числа Z_j			
$(4,4)$	$(3,2)$	$(2,1)$	$(1,1)$
C_8^4	C_5^3	C_3^2	C_2^1

Таким чином, результуюче двійкове нерівномірне $(9,4)$-біноміальне число має наступний вигляд

$$Z_j = 1001011,$$

а шляхом додавання праворуч до $r = 7$ розряду $(n - r - 1) = 9 - 7 - 1 = 1$ двійкового нуля отримуємо рівномірне $(9,4)$-біноміальне число вигляду:

$$Z_j = 10010110 .$$

Далі робота алгоритму завершується. *Приклад завершений*.

Як додаткова ілюстрація результату дій алгоритму біноміального складання на основі матричної моделі в таблиці 2.3 показано порозрядний розподіл вагових коефіцієнтів у двійкових $(9,4)$-біноміальних числах $X'_j = 01101100$, $X''_j = 00101011$ і $Z_j = 10010110$ до та після проведення арифметичної операції $Z_j = X'_j + X''_j$.

Таблиця 2.3 – Складання двійкових біноміальних чисел $X'_j = 01101100$, $X''_j = 00101011$

Біноміальні числа, $n = 9$ і $k = 4$								Вагові коефіцієнти $C_{9-i}^{4-q_i}$, де $i = \overline{1,8}$							
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	1	1	0	1	1	0	0		C_7^4	C_6^3		C_4^2	C_3^1		
0	0	1	0	1	0	1	1			C_6^4		C_4^3		C_2^2	C_1^1
1	0	0	1	0	1	1	0	C_8^4			C_5^3		C_3^2	C_2^1	

Для більш наочного представлення біноміального складання двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01101100$ і $X''_j = 00101011$ дії кроків алгоритму на рисунку 2.5 показані послідовно, безпосередньо один за одним [62].

За допомогою біноміальної числової функції (2.1.2) перевіримо правильність біноміального складання в десятковій системі числення. Кількісний еквівалент результату додавання – двійкового $(9,4)$-біноміального числа $Z_j = 1001011$:

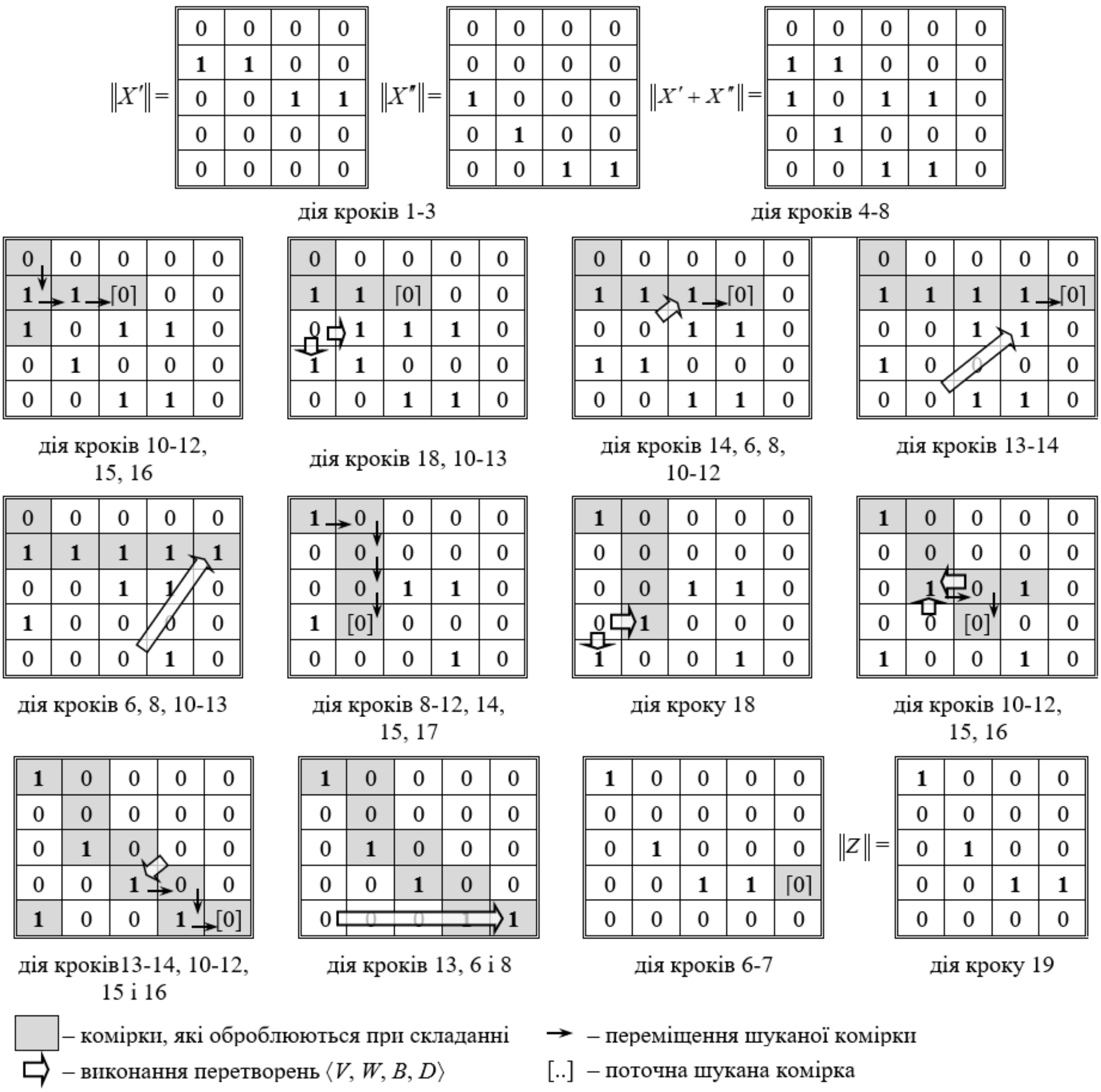


Рисунок 2.5 – Процес складання двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01101100$ і $X''_j = 00101011$ [62]

$$F_j = \operatorname{dec} Z_j = C_8^4 + C_5^3 + C_3^2 + C_2^1 = 70 + 10 + 3 + 2 = 85.$$

Кількісні еквіваленти двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел $X'_j = 01101100$ і $X''_j = 00101011$, що складаються в прикладі, дорівнюють відповідно:

$$F_j = \operatorname{dec} X'_j = C_7^4 + C_6^3 + C_4^2 + C_3^1 = 35 + 20 + 6 + 3 = 64,$$

$$F_j = \operatorname{dec} X''_j = C_6^4 + C_4^3 + C_2^2 + C_1^1 = 15 + 4 + 1 + 1 = 21.$$

Десяткова сума є $\operatorname{dec} X'_j + \operatorname{dec} X''_j = 64 + 21 = 85$, що відповідає отриманому за допомогою алгоритму біноміального складання значенню результату суми $\operatorname{dec} Z_j = 85$. Цим також підтверджується вірність математичної моделі біноміального складання та правильність дії розробленого алгоритму.

Від алгоритму матричного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, представлених у вигляді матриць $\|X'_j\|$ і $\|X''_j\|$ відповідно, перейдемо до прикладного алгоритму біноміального складання, що використовує динамічні масиви верхніх та нижніх параметрів вагових коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i} = C_{\beta_i}^{\alpha_i} = C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$.

Алгоритм складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел, який використовує динамічні масиви параметрів вагових коефіцієнтів.

Крок 1. [Початкова ініціалізація алгоритму].

Запис в динамічні масиви нульового вмісту:

$$X'[\mu], X''[\lambda], Z[\varphi] \leftarrow 0,\ 0 \le \mu, \lambda, \varphi \le k,$$

$$S[(\alpha,\Delta),\gamma] \leftarrow 0,\ 0 \le \alpha \le k,\ 0 \le \Delta \le n-k-1.$$

($X'[\mu]$, $X''[\lambda]$, $Z[\varphi]$ – динамічні по довжині масиви, що містять упорядковані двоелементні кортежі (α,Δ) – вагові коефіцієнти (n,k)-біноміальних чисел X'_j, X''_j, що складаються, і результату додавання Z_j відповідно; $S[(\alpha,\Delta),\gamma]$ – масив біноміального арифметичного складання з кортежів (α,Δ), над якими здійснюються перетворення $\langle V,W,B,D\rangle$, де γ – довжина масиву складання).

Крок 2. [Введення двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j за рахунок динамічних масивів $X'[\mu]$ і $X''[\lambda]$ зі змінною довжиною $1 \le \mu, \lambda \le k$, що складаються з вагових коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i} = C_{\beta_i}^{\alpha_i} = C_{\alpha_i+\Delta_i}^{\alpha_i}$ у вигляді кортежів $(\alpha_i,\Delta_i) = (\alpha,\Delta)$, де q' і q'' – кількості двійкових одиниць у числах X'_j і X''_j відповідно].

Заповнення динамічних масивів $X'[\mu]$ і $X''[\lambda]$ кортежами $(\alpha'_\mu,\Delta'_\mu)$ і $(\alpha''_\lambda,\Delta''_\lambda)$, відповідних двійковим (n,k)-біноміальним числам X'_j і X''_j:

$$X'[\mu]=\left((k,\Delta'_1),(k-1,\Delta'_2),...,(\alpha'_\mu,\Delta'_\mu),...,(k-q'+1,\Delta'_{q'})\right),\ \gamma=\overline{1,q'};$$

$$X''[\lambda]=\left((k,\Delta''_1),(k-1,\Delta''_2),...,(\alpha''_\lambda,\Delta''_\lambda),...,(k-q''+1,\Delta''_{q''})\right),\ \lambda=\overline{1,q''}.$$

(Динамічні масиви $X'[\mu]$ і $X''[\lambda]$ відображають упорядковані вибірки $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ (2.1.4)).

Крок 3. [Формування вихідного для біноміального складання масиву $S[(\alpha,\Delta),\gamma]$ вагових коефіцієнтів (α_i,Δ_i), впорядкованих по значенням $\alpha=\overline{k,1}$ і $\Delta=\overline{n-k-1,0}$, з використанням вмісту динамічних масивів $X'[\mu]$ і $X''[\lambda]$ двійкових (n,k)-біноміальних чисел].

3.1 Для $\mu=1,2,...,q'$ і $\gamma=\mu$ виконується операція присвоєння:

$$S[(\alpha,\Delta),\gamma]=X'[\mu].$$

3.2 Для $\lambda=1,2,...,q''$ і $\gamma=q'+\lambda$ виконується операція присвоєння:

$$S[(\alpha,\Delta),\gamma]=X''[\lambda].$$

В результаті отримуємо вихідний динамічний масив $S[(\alpha,\Delta),\gamma]$ для проведення перетворень виду $\langle V,W,B,D\rangle$ ((2.1.28)-(2.1.31)):

$$\begin{aligned}S[(\alpha,\Delta),\gamma]&=\left((k,\Delta'_1),(k-1,\Delta'_2),...,(\alpha_\gamma,\Delta_\gamma),...,(k-q''+1,\Delta''_{q''})\right)=\\&=\left((k,\Delta_1),(\alpha_2,\Delta_2),...,(\alpha_\gamma,\Delta_\gamma),...,(\alpha_{q'+q''},\Delta_{q'+q''})\right),\end{aligned}\qquad(2.2.25)$$

$$\gamma=1,2,...,\gamma_{\max},\ \gamma_{\max}=q'+q''.$$

(Упорядкування елементів масиву $S[(\alpha,\Delta),\gamma]$ провадиться наступним чином: при фіксованому $0\le\Delta\le n-k-1$, починаючи зі значення $\Delta=n-k-1$, перебираються всі кортежі $(k\le\alpha\le 0,n-k-1)$, починаючи зі значення $\alpha=k$. В масиві $S[(\alpha,\Delta),\gamma]$ можуть бути два і більше однакових кортежів (α,Δ), на початку роботи прикладного алгоритму $\max\gamma \le 2k$. Для наведеного запису $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ (2.2.25) умовно приймається $\Delta''_{q''} \le \Delta'_{q'}$).

Крок 4. [Встановлення початкових умов біноміального складання: вихідного елемента масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$].

Вихідний елемент масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ має вигляд:

$$(\alpha_t,\Delta_t) = S\left[(\alpha,\Delta),\gamma = 1\right] = (k,\Delta_1).$$

(α_t і Δ_t – поточні (робочі) значення параметрів оброблюваного елемента масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ біноміального арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j).

Крок 5. [Перша умова завершення двійкового біноміального складання (2.1.12): одиничність елементів (α,Δ) масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ при послідовній зміні $\alpha = k, k-1, ..., k-\gamma_{\max}+1$].

Якщо для елементів (α,Δ) масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ при $\gamma = 1,2,...,\gamma_{\max}$ і кожному фіксованому $\alpha = k, k-1, ..., k-\gamma_{\max}+1$ виконується умова:

$$\exists!(\alpha,\Delta) \text{ при } \Delta = n-k-1, n-k-2, ..., 0,$$

то здійснюється перехід до наступного кроку. В іншому випадку виконується перехід до кроку 7.

Крок 6. [Друга умова завершення біноміального арифметичного складання (2.1.13): кожний наступний елемент (α',Δ') впорядкованого масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ біноміального складання не повинен мати компонент, який $\Delta' > \Delta''$ (2.1.12) стосовно попереднього елементу (α'',Δ''), де $\alpha'' = \alpha'+1$].

Якщо для кожної пари елементів $(\alpha'+1,\Delta'')$ і (α',Δ') масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ біноміального складання при $\gamma = 1,2,...,\gamma_{\max}$ виконується умова:

$$\Delta'' \ge \Delta' \text{ при } 0 \le \Delta',\Delta'' \le n-k-1,$$

то здійснюється перехід до кроку 16. Інакше виконується перехід до кроку 7.

Крок 7. [Перехід до циклу перетворення V переносу (2.1.28) для серії послідовно розташованих елементів (α, Δ) при рівному $0 \le \Delta \le n-k-1$, що починаються з будь-якого $1 \le \alpha \le k$ і закінчуються $\alpha = 0$].

Якщо для заданого $0 \le \Delta \le n-k-1$ виконується умова

$$\alpha_t = 0,$$

то виконується перехід до наступного кроку. В іншому випадку здійснюється перехід до кроку 9.

(Рівність $\alpha_t = 0$ означає, що серія елементів (α, Δ) масиву $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$ для фіксованої компоненти $0 \le \Delta \le n-k-1$ з метою організації переносу до старшого розряду сформована).

Крок 8. [Перетворення V переносу (2.1.28) над серією послідовно розташованих елементів (α, Δ) при однаковому значенні $0 \le \Delta \le n-k-1$, починаючих з будь-якого $1 \le \alpha \le k$ і кінцевих $\alpha = 0$].

Для заданого $0 \le \Delta_t \le n-k-1$ вилучаються елементи $(\alpha_t, \Delta_t), (\alpha_t - 1, \Delta_t), \ldots, (0, \Delta_t)$ масиву $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$ біноміального складання:

$$S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right] = S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right] / \left((\alpha_t, \Delta_t), (\alpha_t - 1, \Delta_t), \ldots, (0, \Delta_t)\right)$$

і вноситься упорядкованим чином $(\alpha_t, \Delta_t + 1)$:

$$S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right] = S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right] + +(\alpha_t, \Delta_t + 1).$$

При цьому

$$r_{\max} = r_{\max} - \alpha_t$$

і вихідним стає елемент зі значеннями компонент $\alpha_t - 1$ і $\Delta_t + 1$:

$$(\alpha_t, \Delta_t) \leftarrow (\alpha_t - 1, \Delta_t + 1).$$

(«/» – операція вилучення елементів з масиву, «++» – операція внесення елементів у масив, вихідний елемент (α_t, Δ_t) може як бути в складі масиву $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$ біноміального складання, так і бути відсутнім).

Крок 9. [Зворотне перетворення D^{-1} розкладання (2.1.31): прискорене формування серії послідовно розташованих елементів (α,Δ) в масиві $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ біноміального складання при поточних вихідних значеннях $0 \le \Delta_t \le n-k-1$ і $1 \le \alpha_t \le k$].

Якщо для масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ виконується умова:

$$\left(\exists(\alpha_t,\Delta_t)\right) \wedge \left(\exists(\alpha_t-1,\Delta_t+1)\right),$$

то здійснюються операції вилучення елементів (α_t,Δ_t) і (α_t-1,Δ_t+1):

$$S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right] = S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right] / (\alpha_t,\Delta_t),$$

$$S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right] = S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right] / (\alpha_t-1,\Delta_t+1)$$

і впорядкованим чином вноситься результуючий елемент (α_t,Δ_t+1):

$$S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right] = S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right] + +(\alpha_t,\Delta_t+1),$$

при цьому

$$\gamma_{\max} = \gamma_{\max} - 1,$$

вихідним стає елемент зі значеннями компонент α_t і Δ_t+1:

$$(\alpha_t,\Delta_t) \leftarrow (\alpha_t,\Delta_t+1)$$

і далі здійснюється перехід до кроку 10. Інакше виконується перехід до наступного кроку.

Крок 10. [Цикл формування в масиві $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ серії послідовно розміщених елементів (α,Δ) при фіксованому компоненті $0 \le \Delta_t \le n-k-1$, починаючи зі значення $1 \le \alpha_t \le k$].

Якщо для масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ додавання виконується умова:

$$\exists(\alpha_t,\Delta_t),$$

то вихідним стає елемент зі значеннями компонент α_t-1 і Δ_t:

$$(\alpha_t,\Delta_t) \leftarrow (\alpha_t-1,\Delta_t)$$

і виконується перехід до кроку 10. Інакше здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 11. [Пошук перетворюваного елементу (α_s, Δ_s) в масиві $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$ біноміального складання: випадок рівності перетворюваного та шуканого елементів $(\alpha_s, \Delta_s) = (\alpha_t, \Delta_t)$].

Якщо в області зміни значень компонент

$$\left(\left(0 \le \alpha_s \le \alpha_t - 1\right) \wedge \left(0 \le \Delta_s \le \Delta_t + 1\right)\right) \vee \left(\left(\alpha_t \le \alpha_s \le k\right) \wedge \left(0 \le \Delta_s \le \Delta_t - 1\right)\right)$$

елементів масиву $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$ біноміального складання існує такий елемент (α_s, Δ_s), для значень компонент якого виконується умова:

$$\left(\left(\Delta_s = 0\right) \wedge \left(\left(\Delta_t = 0\right) \vee \left(\alpha_t = 0\right)\right)\right) \vee \left(\left(\alpha_t = \Delta_s\right) \wedge \left(\Delta_t = \alpha_s\right)\right),$$

то здійснюються операція вилучення елемента (α_s, Δ_s) з масиву $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$:

$$S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right] = S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right] / (\alpha_s, \Delta_s)$$

та операція внесення шуканого елемента (α_t, Δ_t) в масив $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$:

$$S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right] = S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right] + + (\alpha_t, \Delta_t),$$

при цьому максимальне значення параметра $r_{\max}$ масиву $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$ залишається без змін і здійснюється перехід до кроку 5. Інакше виконується перехід до наступного кроку.

(При рівності значень ваг елементів (α_t, Δ_t) і (α_s, Δ_s) можливі лише перетворення W зсуву (2.1.29) і B симетрії (2.1.30), при цьому якщо не застосовується перетворення W зсуву, то обов'язково застосовується перетворення B симетрії).

Крок 12. [Пошук елемента (α_s, Δ_s), що перетворюється, в масиві $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$ біноміального складання: випадок, коли вага елемента більше ваги шуканого елемента (α_t, Δ_t)].

Якщо для елементів масиву $S\left[(\alpha, \Delta), \gamma\right]$ біноміального складання виконується умова:

$$\exists\left(\alpha_t+1,\Delta_g\right),\text{ де }\Delta_g=\Delta_t+1,\Delta_t+2,\ldots,n-k-1,$$

то здійснюється перехід до кроку 14. В іншому випадку здійснюється перехід до наступного кроку.

(Враховуються можливі елементи масиву, які вже беруть участь у формуванні серій послідовно розташованих елементів при значеннях компонент $\alpha=\alpha_t+1$ і $\Delta\geq\Delta_t+1$).

Крок 13. [Випадок, коли вага виявленого елемента $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$ більша ваги шуканого елементу $\left(\alpha_t,\Delta_t\right)$ за відсутності елементів у масиві $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$, що мають компоненти $\alpha=\alpha_t+1$ и $\Delta\geq\Delta_t+1$].

Якщо в області зміни значень компонент

$$\left(\left(0\leq\alpha_s\leq\alpha_t-1\right)\wedge\left(0\leq\Delta_s\leq\Delta_t+1\right)\right)\vee\left(\left(\alpha_t\leq\alpha_s\leq k\right)\wedge\left(0\leq\Delta_s\leq\Delta_t-1\right)\right)$$

елементів масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ біноміального складання існує такий елемент $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$, для значення ваги якого виконується умова

$$\left(\alpha_s,\Delta_s\right)>\left(\alpha_t,\Delta_t\right),$$

то здійснюється перехід до кроку 15. В іншому випадку вихідним стає елемент масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ складання:

$$\left(\alpha_t,\Delta_t\right)\leftarrow\left(\alpha_t,\Delta_t-1\right)$$

і здійснюється перехід до кроку 9.

(Пошук більших за кількісним еквівалентом елементів $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$ у вищенаведеній області масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ складання означає наявність вже сформованих елементів $\left(k,\Delta_t\right)$, $\left(k-1,\Delta_t\right)$, …, $\left(\alpha_t+1,\Delta_t\right)$).

Крок 14. [Випадок, коли вага виявленого елемента $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$ більше ваги шуканої комірки $\left(\alpha_t,\Delta_t\right)$ за наявності елементів у масиві $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ складання, що мають компоненти $\alpha=\alpha_t+1$ і $\Delta\geq\Delta_t+1$].

Якщо в області зміни значень компонент

$$\left(\left(0 \le \alpha_s \le \alpha_t - 1\right) \wedge \left(0 \le \Delta_s \le \Delta_t + 1\right)\right) \vee \left(\left(\alpha_t \le \alpha_s \le k\right) \wedge \left(0 \le \Delta_s \le \Delta_t\right)\right)$$

елементів масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ біноміального додавання існує такий елемент $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$, для значення ваги якого виконується умова

$$\left(\alpha_s,\Delta_s\right) > \left(\alpha_t,\Delta_t\right),$$

то здійснюється перехід до наступного кроку. В іншому випадку вихідним стає елемент масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ складання:

$$\left(\alpha_t,\Delta_t\right) \leftarrow \left(\alpha_t,\Delta_t - 1\right)$$

і здійснюється перехід до кроку 9.

(Пошук більших за кількісним еквівалентом елементів $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$ в вищенаведеній області масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ додавання означає наявність заборонених елементів $\left(k,\Delta_t\right)$, $\left(k-1,\Delta_t\right)$, …, $\left(\alpha_t+1,\Delta_t\right)$ згідно (2.1.12)).

Крок 15. [Перетворення D розкладу (2.1.31) для перетворюваного елементу $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$ масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ біноміального складання].

Виконується операція вилучення елемента $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$ з масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$:

$$S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right] = S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right] / \left(\alpha_s,\Delta_s\right)$$

і впорядкованим чином вноситься до масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ результуючі елементи $\left(\alpha_s,\Delta_s - 1\right)$ і $\left(\alpha_s - 1,\Delta_s\right)$:

$$S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right] = S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right] + +\left(\alpha_s,\Delta_s - 1\right),$$

$$S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right] = S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right] + +\left(\alpha_s - 1,\Delta_s\right),$$

при цьому максимальне значення параметра γ масиву $S\left[\left(\alpha,\Delta\right),\gamma\right]$ біноміального складання:

$$\gamma_{\max} = \gamma_{\max} + 1$$

і здійснюється перехід до кроку 9.

Крок 16. [Завершення біноміального арифметичного складання $X'_j + X''_j$ з використанням динамічних масивів параметрів вагових коефіцієнтів та виведення результату підсумовування Z_j].

В результаті масив $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ біноміального складання набуває вигляду динамічного масиву $Z\left[\varphi\right]$ результату суми Z_j :

$$S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]=\Big((k,\Delta_1),(k-1,\Delta_2),...,\left(\alpha_\varphi,\Delta_\varphi\right),...,\left(k-q+1,\Delta_q\right)\Big)=Z\left[\varphi\right],$$

$$\varphi=\overline{1,q},\ \gamma_{\max}=q\,.$$

(Динамічний масив $Z\left[\varphi\right]$ відповідає q-елементній упорядкованій вибірці S_{Z_j} (2.1.4) результату суми Z_j).

Крок 17. [Перехід від виду динамічного масиву результату $Z\left[\varphi\right]$ додавання $X'_j + X''_j$ до двійкового рівномірного (n,k)-біноміального числу Z_j].

Згідно з кожним елементом $\left(\alpha_\varphi,\Delta_\varphi\right)$ з отриманого масиву $Z\left[\varphi\right]$ обчислюється номер одиничного розряду рівномірного $(n-1)$-розрядного (n,k)-біноміального числа Z_j :

$$i=n-\alpha_\varphi-\Delta_\varphi\,,$$

інші розряди заповнюються нулями та завершення роботи алгоритму.

З метою зниження часу функціонування наведеного алгоритму, зокрема його кроків 13-15 для виконання перетворення D розкладу (2.1.31) необхідно обирати такі елементи $\left(\alpha_s,\Delta_s\right)$ (вагові коефіцієнти) з масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ складання, які задовольняють наступним умовам:

$$\delta_\alpha=\min\left(\alpha_s-\alpha_t\right),\ \delta_\Delta=\min\left(\Delta_t-\Delta_s\right),\ \delta_\alpha>0,\ \delta_\Delta>0\,.$$

Деякі операції прикладного алгоритму, що використовує динамічні масиви, мають досить загальний вигляд, що передбачає їхнє можливе подальше розкладання на елементарні операції. Але загалом час виконання даного алгоритму та обсяг програмно-апаратних витрат залежно від параметрів n і k двійкових (n,k)-біноміальних чисел мають поліноміальний характер.

Одним з важливих завдань щодо виконання арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел, а також їх подальшого застосування при провадженні інформаційних технологій на основі двійкових (n,k)-біноміальних систем числення є обчислення кількостей одиниць. Ця операція здійснюється стосовно:

- кодових комбінацій двійкових (n,k)-біноміальних чисел для знаходження $0 \le q \le k$;
- $(0,11...1)$-матриць або масивів $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ біноміального складання для контролю правильності дій додавання або визначення умов її завершення;
- інформаційних послідовностей, які перетворюються за допомогою двійкових (n,k)-біноміальних чисел – рівноважних і квазірівноважних комбінацій, інших кодів-сполучень;

а також з метою знаходження значення параметру k для визначення класу двійкової (n,k)-біноміальної системи числення. Особливості проведення обчислення чисел двійкових одиниць, процедури та алгоритми провадження цієї операції досліджені в роботах [76; 77] й можуть бути застосовані в цілях мінімізації часу виконання біноміального арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел.

РОЗДІЛ 3
ОЦІНКА ОБСЯГУ ЧАСОВИХ І ПРОГРАМНО-АПАРАТНИХ ВИТРАТ СКЛАДАННЯ ДВІЙКОВИХ БІНОМІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

3.1 Метод оцінки часових витрат складання двійкових біноміальних чисел

Складність алгоритмів (правил і процедур) арифметичного підсумовування двійкових біноміальних чисел, які реалізують запропоновані в дисертаційній роботі моделі та метод двійкового біноміального складання, мають істотне значення для поширення їх на практиці [65; 71].

Для оцінки складністних характеристик алгоритмів біноміального арифметичного складання використовується модель обчислювальної машини, яка називається рівнодоступною адресною машиною [65; 72]. У цій обчислювальній машині виділяються регістри, призначені для запису вхідної інформації, результату, програми, проміжних обчислень. Машина забезпечена набором арифметичних та логічних операцій, який можна представити як завгодно великим, але фіксованим. Отримані результати несуттєво залежатимуть від типу обраної машини через їх асимптотичність або вибір універсальних одиниць вимірювання.

Таким чином, є сюр'єктивне відображення $\varphi' : M' \to C$ множини пар $G = \left[S_{X'_j}, S_{X''_j} \right] \in M'$ (підрозділ 2.1) упорядкованих q-елементних вибірок (2.1.4), що відповідають двійковим (n,k)-біноміальним числам X'_j і X''_j, де $Z_j = X'_j + X''_j$ і Z_j є також двійкове (n,k)-біноміальне число, в множину C (2.1.6), де $S_{X'_j}, S_{X''_j}, S_{Z_j} \in C$ і $M' \subseteq C^2$. Помістимо в регістри, відведені для запису програми певний набір P двійкових слів, що реалізує алгоритм біноміального арифметичного складання відповідно до відображення

$\varphi' : M' \to C$, а у вхідний регістр – деяку конкатенацію комбінацій X'_j і X''_j. Якщо для будь-якої пари X'_j і X''_j машина через деякий час зупиниться, завантаживши у вихідний регістр комбінацію Z_j, то набір P будемо називати програмою обчислення $\varphi' : M' \to C$, а суму довжин вхідних в P слів – довжиною програми біноміального арифметичного складання. Слід розрізняти інформаційну та операційну частини програми P, перша з яких залежить від обчисленого відображення, а друга, що містить машинні накази, ні.

З урахуванням виду цільової функції даної дисертаційної роботи (1.4.3) до основних складністних характеристик методу та алгоритмів складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел слід віднести такі:

– час $\tau_{м}$ кодового представлення (моделювання) двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j для проведення арифметичної операції складання;

– час $\tau_{сл}$ виконання арифметичної операції складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j;

– об’єм $Q_{сл}$ програмних та/або апаратних витрат при реалізації запропонованого методу складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j на практиці.

Об'єктивним заходом для оцінки обсягу часових витрат є кількість машинних тактів, які необхідно витратити для проведення операції [78; 79]. При цьому приймається, що машинний такт є виконанням однієї елементарної операції, яка більше не розбивається на ряд інших дій. Цей підхід є більш об'єктивним, оскільки не залежить від застосовуваної для реалізації операції біноміального арифметичного складання апаратної платформи.

Аналіз часу дії алгоритмів біноміального арифметичного складання буде проводитися без урахування їх операційної частини, тобто кроків, що містять налагоджувальні операції такі, як обнуління та присвоєння змінних, обнуління регістрів, зупинення алгоритмів і т. д. Часові витрати на налагоджувальні операції не залежать від довжини $(n-1)$ рівномірних або довжини r нерівномірних двійкових (n,k)-біноміальних чисел, і, відповідно, від значень параметрів n і k. Отже, науково-практичний інтерес представлятиме лише інформаційна частина алгоритмів біноміального арифметичного складання, час функціонування яких залежать від значень n і k.

Мінімізація сумарного часу $T = \tau_м + \tau_{сл}$ ((1.4.3), підрозділ 1.4)) при обмеженнях на обсяг програмних та/або апаратних витрат $Q_{сл} < Q_{тб}$ є метою розробки представлених у роботі моделей та методу біноміального арифметичного складання.

Попередній аналіз роботи алгоритмів арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел, наведених у підрозділі 2.2, показує наступне.

1. Час $\tau_{сл}$ біноміального арифметичного складання може суттєво відрізнятися для різних пар двійкових (n,k)-біноміальних чисел $X'_j + X''_j$. Очевидно, що складання $X'_j + 1 = 1 + X''_j$ буде найшвидшим серед інших пар (n,k)-біноміальних чисел, а найбільш витратним за часом буде складання чисел X'_j і X''_j, обидва з яких мають максимальне значення можливого числа $q = k$ двійкових одиниць (властивість 3, підрозділ 1.2).

2. Час $\tau_м$ кодового представлення, який обчислюється в машинних тактах, для всіх рівномірних двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j буде однаковим і рівним

$$\tau_м = n - 1, \tag{3.1.1}$$

оскільки необхідно переглянути всі розряди для пошуку останньої q-ї одиниці, де $0 \le q \le k$. У випадку знаходження в i-му розряді двійкового (n,k)-біноміального числа X_j чергової одиниці, то відразу ж, паралельно обчислюються значення компонентів $\alpha_i = k - q_i$ і $\Delta_i = (n-k) + q_i - i$ для двохелементних кортежів (α_i, Δ_i) з метою формування впорядкованої q-елементної вибірки S_{X_j} (2.1.4) або $(0,1)$-матриці (2.1.10), відповідних (n,k)-біноміальному числу X_j. Для визначення α_i і β_i використовуються вираз (2.1.7) і визначення 2.1 (підрозділ 2.1), а також формули (1.2.1) або (2.1.2). Якщо ж застосувати додаткові лічильники q одиниць і l нулів, то згідно до систем кодоутворюючих обмежень (1.2.3) і (1.2.4), час τ_M кодового представлення в машинних тактах у цьому випадку дорівнює:

$$\tau_M = r, \qquad (3.1.2)$$

яке тепер змінюватиметься в межах:

$$\min(k, n-k) \le \tau_M \le n-1. \qquad (3.1.3)$$

(властивість 1 з підрозділу 1.2, нерівність (1.2.6)). Аналогічні міркування справедливі і для зворотного переходу від упорядкованої q-елементної вибірки S_{X_j} (2.1.4) або $(0,1)$-матриці (2.1.10) до відповідного двійкового (n,k)-біноміального числа X_j.

3. Для багатьох прикладних додатків збирання статистичних даних щодо числової інформації є складною процедурою. Це пояснюється, по-перше, невеликим обсягом бази для збирання такої статистики, а по-друге, як правило, для функціонування інформаційної системи вибирається такий числовий діапазон, в якому всі числа, у конкретному випадку двійкові біноміальні, є рівно можливими. В зв’язку з цим, при оцінці часу виконання арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, приймаємо їх появу рівноймовірною. Отже, раціональним є виключити з оціночних виразів обсягу часових витрат біноміального арифметичного складання ймовірнісні характеристики.

4. Достатньо велико число машинних тактів під час проведення біноміального арифметичного складання буде витрачено на пошук перетворюваних комірок (α_S, Δ_S) в $(0,11...1)$-матриці згідно з алгоритмом біноміального арифметичного складання на основі матричної моделі або

перетворюваних елементів (α_S, Δ_S) динамічного масиву $S[(\alpha, \Delta), \gamma]$ згідно з алгоритмом, що використовує динамічний масив (підрозділ 2.2). Пошук зазначених комірок матриці або елементів масиву необхідно проводити з метою застосування до них перетворень переносу V (2.1.28), зсуву W (2.1.29), симетрії B (2.1.30) і розкладання D (2.1.31).

Зважаючи на очевидну сильну варіативність часу арифметичного складання $T = \tau_м + \tau_{сл}$ двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j виправданим є знаходження максимального граничного значення обсягу $T_{\max}$ витрат часу для всього діапазону $P = C_n^k$ двійкових біноміальних чисел із параметрами n і k.

Значне збільшення швидкодії операції біноміального арифметичного складання в пропонованих моделях і методу в порівнянні зі способом, який використовує проміжні ступеневі системи числення (підрозділ 1.3) , насамперед пов'язане з тим, що виключається необхідність:

1) обчислення вагових коефіцієнтів, тобто чисел сполучень, $C_{n-i}^{k-q_i}$ розрядів двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j;

2) складання ваг $C_{n-i}^{k-q_i}$ біноміальних розрядів з метою отримання кількісних еквівалентів $F'_j = \operatorname{dec} X'_j$ і $F''_j = \operatorname{dec} X''_j$.

Усі дії в процесі біноміального арифметичного складання проводяться тільки зі значеннями верхніх або нижніх параметрів біноміальних коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i} = C_{\alpha_i + \Delta_i}^{\alpha_i}$. При цьому здебільшого всі ці дії зводяться до операцій порівняння, збільшення або зменшення на одиницю.

Загальний вираз для обсягу $T_м$ часових витрат алгоритму, що використовує матричну модель біноміального складання і виражений в машинних тактах, має такий вигляд:

$$T_м = \tau_{мм} + \tau_{мс}, \tag{3.1.4}$$

де $\tau_{мм}$ – час, необхідний для кодового перетворення двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j в відповідні їм $(0,1)$-матриці (2.1.10) та зворотного перетворення результуючої $(0,1)$-матриці в результат суми $Z_j = X'_j + X''_j$;

$\tau_{мс}$ – час, необхідний для виконання власне біноміального арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j з використанням $(0,11...1)$-матриці.

Перший доданок $\tau_{мм}$ з суми $T_м$ (3.1.4), пов'язаний з перетворенням двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j в відповідні їм $(0,1)$-матриці і перетворенням результуючої $(0,1)$-матриці в результат суми $Z_j = X'_j + X''_j$, з урахуванням рівності (3.1.2) буде представлено як

$$\tau_{мм} = r_{X'_j} + r_{X''_j} + r_{Z_j}, \tag{3.1.5}$$

де $r_{X'_j}$, $r_{X''_j}$ – кількості машинних тактів при перетворенні двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j в відповідні їм $(0,1)$-матриці;

r_{Z_j} – кількість машинних тактів при перетворенні результуючої $(0,1)$-матриці до відповідного їй результату біноміальної суми – двійкове (n,k)-біноміальне число Z_j.

або в максимальному вираженні, беручи до уваги рівність (3.1.1), з урахуванням прямого та зворотного перетворень:

$$\tau_{мм\max} = 3(n-1). \tag{3.1.6}$$

Розглянемо кількості машинних тактів при роботі алгоритму біноміального матричного складання, які потрібні на здійснення введених в запропонований метод підсумовування перетворень V (2.1.28), W (2.1.29), B (2.1.30) і D (2.1.31).

1. Перетворення V переносу

$$\left(\alpha,\Delta\right)=\left(\alpha,\Delta-1\right)+\left(\alpha-1,\Delta-1\right)+...+\left(1,\Delta-1\right)+\left(0,\Delta-1\right).$$

З урахуванням того, що $1\leq\alpha\leq k$ (випадок $\alpha=0$ не розглядається, оскільки нульовий стовпець $\left(0,11...1\right)$- матриці призначений тільки для завершальних одиниць), то для формування одиничного $\left(\Delta-1\right)$-го рядка або його підрядка з комірок $\left(\alpha,\Delta-1\right)$, $\left(\alpha-1,\Delta-1\right),...,$ $\left(0,\Delta-1\right)$ знадобиться $2\leq\tau_{MV}\leq k+1$ машинних тактів. Слід також додати, що таке ж число тактів необхідне буде при обнулінні комірок $\left(\alpha,\Delta-1\right)$, $\left(\alpha-1,\Delta-1\right),...,$ $\left(0,\Delta-1\right)$ і плюс ще один машинний такт для власне організації перенесення одиниці в комірку $\left(\alpha,\Delta\right)$. Таким чином, кількість τ_{MV} машинних тактів для виконання перетворення V переносу буде змінюватися в межах:

$$5\leq\tau_{MV}\leq 2\left(k+1\right)+1, \tag{3.1.7}$$

а його максимальне значення, виходячи з правої частини нерівності (3.1.7) дорівнює

$$\tau_{MV\max}=2\left(k+1\right)+1. \tag{3.1.8}$$

2. Перетворення W зсуву

$$\left(\alpha,0\right)=\left(\gamma,0\right)=\left(0,\Delta\right).$$

Передавання одиничного значення комірки $\left(\alpha,0\right)$ з нульового $\Delta=0$ рядка матриці біноміального арифметичного складання в комірку $\left(0,\Delta\right)$ нульового стовпчика $\alpha=0$ і заданого Δ рядка відбувається, очевидно, за два машинні такти шляхом простої заміни компонентів. Протягом одного такту перетворювана комірка $\left(\alpha,0\right)$ обнуляється – $\left\langle\left(\alpha,0\right)\right\rangle=0$, а під час другого шукана комірка $\left(0,\Delta\right)$ встановлюється в одиничний стан – $\left\langle\left(0,\Delta\right)\right\rangle=1$. Таким чином, кількість τ_{MW} машинних тактів для виконання перетворення W зсуву дорівнює:

$$\tau_{MW}=\tau_{MW\max}=2. \tag{3.1.9}$$

3. Перетворення B симетрії:

$$\left(\alpha,\Delta\right)=\left(\Delta,\alpha\right).$$

За аналогією з попереднім перетворенням для передавання одиничного значення комірки, що перетворюється, в шукану також знадобиться тільки два машинних такти, в першому з яких перетворювана комірка $\left(\alpha,\Delta\right)$ обнуляється – $\left\langle\left(\alpha,\Delta\right)\right\rangle=0$, а шукана $\left(\Delta,\alpha\right)$ приводиться до одиничного стану – $\left\langle\left(\Delta,\alpha\right)\right\rangle=1$. Таким чином, кількість τ_{MB} машинних тактів для виконання перетворення B симетрії дорівнює:

$$\tau_{MB}=\tau_{MB\max}=2. \tag{3.1.10}$$

4. Перетворення D розкладання:

$$\left(\alpha,\Delta\right)=\left(\alpha,\Delta-1\right)+\left(\alpha-1,\Delta\right).$$

При цьому перетворенні один машинний такт потрібен для встановлення в нульовий стан комірки $\left(\alpha,\Delta\right)$, що перетворюється, тобто виконання $\left\langle\left(\alpha,\Delta\right)\right\rangle=0$, і два такти необхідні для встановлення в одиничний стан комірок $\left(\alpha,\Delta-1\right)$ і $\left(\alpha-1,\Delta\right)$, одна з яких шукана, тобто реалізація $\left\langle\left(\alpha,\Delta-1\right)\right\rangle=1$ і $\left\langle\left(\alpha-1,\Delta\right)\right\rangle=1$. Дії зі значеннями компонентів $\left(\Delta-1\right)$ і $\left(\alpha-1\right)$ також вимагають по одному машинному такту. Таким чином, кількість τ_{MD} машинних тактів для виконання перетворення D розкладання дорівнює:

$$\tau_{MD}=\tau_{MD\max}=5. \tag{3.1.11}$$

Розглядаючи алгоритм арифметичного складання, що використовує матричне представлення двійкових біноміальних чисел, можна зробити висновок, що значна частина часу виконання операції додавання двійкових біноміальних чисел витрачається на пошук комірок $\left(\alpha_S,\Delta_S\right)$, що перетворюються. Час виявлення комірок $\left(\alpha_S,\Delta_S\right)$, що перетворюються, прямо пропорційно залежить від кількості комірок $\left(\alpha,\Delta\right)$, залучених до області пошуку $\left(\alpha_S,\Delta_S\right)$. Розмір такої області пошуку визначається значеннями компонент шуканої (вихідної) комірки $\left(\alpha_t,\Delta_t\right)$, тобто від номера стовпця та номера рядка $\left(0,11...1\right)$-

матриці біноміального арифметичного складання. Ґрунтуючись на системах рівностей (2.2.6) і (2.2.8), що визначають області пошуку комірок (α_s,Δ_s), можна записати для часу $\tau_{мпр}$ пошуку рівних за кількісним еквівалентом $(\alpha_s,\Delta_s)=(\alpha_t,\Delta_t)$ і часу $\tau_{мпб}$ пошуку більших за кількісним еквівалентом $(\alpha_s,\Delta_s)>(\alpha_t,\Delta_t)$ наступні вирази відповідно:

$$\tau_{мпр}=(\alpha_t-1)(\Delta_t+2)+(k-\alpha_t+1)\Delta_t=k\Delta_t+2(\alpha_t-1), \qquad (3.1.12)$$

$$\tau_{мпб}=(\alpha_t-1)(\Delta_t+2)+(k-\alpha_t+1)(\Delta_t+1)=k(\Delta_t+1)+\alpha_t-1. \qquad (3.1.13)$$

Виходячи з можливих значень $1\le\alpha\le k$ (нульовий стовпець $\alpha=0$ виключається, оскільки в ньому з'являються тільки привнесені одиниці, що формуються алгоритмом) і $0\le\Delta\le n-k-1$, отримуємо на основі (3.1.12) і (3.1.13) межі зміни кількості машинних тактів при реалізації пошуку комірок (α_s,Δ_s):

$$0\le\tau_{мпр}\le k(n-k-1)+2(k-1) \text{ або } 0\le\tau_{мпр}\le k(n-k+1)-2, \qquad (3.1.14)$$

$$k\le\tau_{мпб}\le k(n-k)+k-1 \text{ або } k\le\tau_{мпб}\le k(n-k+1)-1. \qquad (3.1.15)$$

Враховуючи праві частини нерівностей (3.1.14) і (3.1.15), для максимальних значень часу пошуку комірок, що перетворюються, $(0,11...1)$-матриці біноміального складання можна записати:

$$\tau_{мпр\max}=k(n-k+1)-2, \qquad (3.1.16)$$

$$\tau_{мпб\max}=k(n-k+1)-1. \qquad (3.1.17)$$

Більш детальний аналіз роботи правил і процедур, що стосуються саме операції складення, призводить до наступного узагальнюючого виразу для часу $\tau_{мсл}$ складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, вираженому у машинних тактах:

$$\begin{gathered}\tau_{мсл}=c_{мV}\tau_{мV}+c_{мW}\tau_{мW}+c_{мB}\tau_{мB}+\\+c_{мD}\tau_{мD}+c_{мпр}\tau_{мпр}+c_{мпб}\tau_{мпб},\end{gathered} \qquad (3.1.18)$$

де $c_{мV}$ – кількість зроблених перетворень V переносу (2.1.28) під час складання чисел X'_j і X''_j;

$c_{мW}$ – кількість зроблених перетворень W зсуву (2.1.29) під час складання чисел X'_j і X''_j;

$c_{мB}$ – кількість зроблених перетворень B симетрії (2.1.30) під час складання чисел X'_j і X''_j;

$c_{мD}$ – кількість зроблених перетворень D розкладання (2.1.31) під час складання чисел X'_j і X''_j;

$c_{мпр}$ – кількість виконаних операцій з пошуку комірки (α_s, Δ_s), що перетворюється, рівної за значенням кількісного еквівалента шуканій (α_t, Δ_t), під час складання чисел X'_j і X''_j;

$c_{мпб}$ – кількість виконаних операцій з пошуку комірки (α_s, Δ_s), що перетворюється, більшої за значенням кількісного еквівалента шуканій (α_t, Δ_t), під час складання чисел X'_j і X''_j.

Значення наведених змінних $c_{мV}$, $c_{мW}$, $c_{мB}$, $c_{мD}$, $c_{мпр}$ і $c_{мпб}$, що являють собою кількість виконаних перетворень над комірками $(0,11...1)$-матриці біноміального складання або операцій пошуку, істотно залежать від виду пари двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j, X''_j та від проміжних результатів процесу біноміального арифметичного складання. Їх значення, очевидно, розташовуватимуться в межах від нульового значення до $\left(q_{X'_j} + q_{X''_j}\right)$, де $q_{X'_j}$ і $q_{X''_j}$ – числа двійкових одиниць в (n,k)-біноміальних числах X'_j і X''_j відповідно. Наприклад, при складанні з одиницею, тобто коли виконується $X'_j + 1$, іншими словами, маючи позиційну біноміальну лічбу, лише одна змінна $c_{мW}$ =1, а решта дорівнюватиме нулю. Таким чином, можна зробити висновок, що змінні, що позначають кількості здійснених операцій, обмежуються зверху максимальним значенням $2k$, оскільки $0 \le q_{X'_j}, q_{X''_j} \le k$ (властивості 2 і 3 двійкових (n,k)-біноміальних чисел, підрозділ 1.2).

Таким чином, беручи до уваги:

– рівності, які визначають максимальні значення для часових витрат $\tau_{MV\max}$ (3.1.8), $\tau_{MW\max}$ (3.1.9), $\tau_{MB\max}$ (3.1.10), $\tau_{MD\max}$ (3.1.11), $\tau_{мпр\max}$ (3.1.16) і $\tau_{мпб\max}$ (3.1.17);

– прийняте максимальне значення $2k$, що обмежує, для змінних c_{MV}, c_{MW}, c_{MB}, c_{MD}, $c_{мпр}$ та $c_{мпб}$;

вираз (3.1.18) для максимального часу $\tau_{мсл\max} = \max\tau_{мсл}$ власне біноміального складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, виражений через кількість машинних тактів, можна представити наступним чином:

$$
\begin{gathered}
\tau_{мсл\max} = 2k\big(2(k+1)+1\big)+ \\
+2k\big(k(n-k+1)-2\big)+2k\big(k(n-k+1)-1\big)+18k= \\
=2k\big(2(k+1)+2k(n-k+1)-2\big)+18k= \\
=4k\big((k+1)+k(n-k+1)-1\big)+18k=4k\big(k+k(n-k+1)\big)+18k= \\
=4k^2\big((n-k+1)+1\big)+18k=4k^2(n-k+2)+18k\,.
\end{gathered} \tag{3.1.19}
$$

Слід зазначити, що цей вигляд функції (3.1.19) максимального обсягу $\tau_{мсл\max} = f(n,k)$ витрат часу і значення констант відображають специфіку побудови моделей запропонованого методу біноміального арифметичного складання та особливості реалізації алгоритму, що використовує матричне представлення двійкових (n,k)-біноміальних чисел.

В додатку В надані таблиця В.1 і графік залежності $\tau_{мсл\max} = f(k)$ (рисунок В.1) для алгоритму на основі матриці біноміального додавання при заданому $n=24$, значення k змінюється від 1 до 23.

Для діапазону зміни параметра $1 \le k \le n-1$ очевидним є найбільше значення $\tau_{мсл\max} = f(n,k)$ (3.1.19) при $k=n/2$ (умовимось, що n – парне число, при непарному n висновки будуть аналогічні). Тоді, підставляючи $k=n/2$ у формулу (3.1.19), отримуємо граничне значення обсягу $\tau'_{мсл\max}$ часових витрат для найгіршого випадку:

$$\tau'_{мсл\max} = \max_{1\le k\le n-1} \tau_{сл\max} = 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{2}+2\right) + 18\frac{n}{2} = \\ = n^2\left(\frac{n}{2}+2\right) + 9n = \frac{n^3}{2} + 2n^2 + 9n\ . \tag{3.1.20}$$

Аналіз співвідношень (3.1.6) та (3.1.20) показує, що $\tau_{мм\max} \ll \tau'_{мсл\max}$. Отже, у виразі для максимального обсягу $T_{м\max}$ часових витрат доданком $\tau_{мм\max}$, що визначає час перетворення біноміальних (n,k)-двійкових чисел X'_j і X''_j, можна знехтувати і, у свою чергу, записати:

$$T_{м\max} \approx \tau'_{мсл\max} = \frac{n^3}{2} + 2n^2 + 9n. \tag{3.1.21}$$

В додатку В наведені таблиця В.2 і графік залежності $T_{м\max} = f(n)$ (рисунок В.2) для алгоритму на основі матриці біноміального додавання, значення n змінюється від 4 до 40.

Виходячи з наведених виразів (3.1.20) та (3.1.21), можна зробити висновок, що обсяг $T_м$ часових витрат на арифметичне складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, проведене за допомогою алгоритму на основі матричної моделі додавання, обмежується зверху величиною:

$$T_м \le \tau'_{мсл\max} = \frac{n^3}{2} + 2n^2 + 9n\,. \tag{3.1.22}$$

Виразимо тепер часову складність алгоритму на основі матричної моделі біноміального арифметичного складання з використанням O-нотації [61, 62]. Відповідно, проведемо асимптотичну оцінку обсягу $T_{м\max}$ часових витрат при $n\to\infty$, тобто, коли довжина r двійкових (n,k)-біноміальних чисел прагне до нескінченності. У цьому випадку, враховуючи порядок ступенів доданків функції $T_{м\max}(n)$ (3.1.21) і беручи до уваги лише доданок із найвищим порядком, можна стверджувати:

$$T_{\max}(n) = O\left(n^3\right). \tag{3.1.23}$$

Таким чином, виходячи з виду (3.1.23) алгоритм біноміального складання, що використовує матричне представлення двійкових (n,k)-біноміальних чисел, класифікується як алгоритм з поліноміальним часом роботи [61; 62]. Процес виконання ним біноміального арифметичного складання проводиться за кубічний час $O\left(n^3\right)$. Слід зазначити, що до завдань такої складності належить, наприклад звичайне множення двох $n \times n$ матриць, а базові операції складання, віднімання, множення та ділення або швидке сортування виконуються за поліноміальний час, порядку $O\left(n^2\right)$ [62; 63].

Аналіз кроків прикладного алгоритму на основі матричної моделі біноміального складання показує, що найбільш часовитратною операцією є пошук комірок $(0,11...1)$-матриці, що перетворюються. Зберігаючи «матричність» даного алгоритму, можна суттєво скоротити область пошуку, обмежуючись переглядом лише тих комірок, які містять одиниці. Але в цьому випадку виникає необхідність застосування додаткової пам'яті для зберігання адрес (компонентів) таких комірок, яка повинна мати обсяг потенційно не менше, ніж обсяг пам'яті для зберігання самої матриці біноміального арифметичного складання (якщо менше, то значно ускладняється система управління адресацією такої пам'яті).

З цієї точки зору вигідніше виглядає алгоритм, що використовує динамічний масив замість $(n-k)\times(k+1)$ матриці біноміального арифметичного складання, який був розроблений для мінімізації часу, необхідного для арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел.

Проведемо аналіз обсягу T_∂ часових витрат зазначеного алгоритму, звертаючи увагу на відмінності у проведенні операцій порівняно з алгоритмом, який використовує матричне представлення (n,k)-біноміальних чисел.

Аналогічно попередньому, всі дії алгоритму, що використовує динамічний масив, виробляються над верхніми або нижніми параметрами біноміальних коефіцієнтів, тобто над компонентами α і Δ елементів (α,Δ) динамічного масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$, де γ – вказівник довжини масиву.

Загальний вираз для обсягу T_∂ часових витрат алгоритму, що використовує динамічний масив та виражений в машинних тактах, має такий вигляд:

$$T_\partial = \tau_{\partial м} + \tau_{\partial c}, \quad (3.1.24)$$

де $\tau_{\partial м}$ – час, необхідний для кодового перетворення двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j в впорядковані q-вибірки $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ (2.1.4);

$\tau_{\partial сл}$ – час, необхідний для виконання власне біноміального арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, використовуючи масив $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$.

Перший доданок $\tau_{\partial м}$ з суми T_∂ (3.1.24), пов'язаний з перетвореннями двійкових біноміальних чисел X'_j і X''_j у відповідні упорядковані q-вибірки $S_{X'_j}$ і $S_{X''_j}$ (2.1.4) та навпаки, визначається аналогічно (3.1.5), тобто:

$$\tau_{\partial м} = \tau_{мм} = r_{X'_j} + r_{X''_j} + r_{Z_j}. \quad (3.1.25)$$

Так само, як і рівність (3.1.6), час $\tau_{\partial м}$ у максимальному значенні з урахуванням прямого та зворотного перетворень:

$$\tau_{\partial м\max} = \tau_{мм\max} = 3(n-1). \quad (3.1.26)$$

Кількості машинних тактів при роботі алгоритму на основі динамічного масиву біноміального складання, які потрібні для здійснення перетворень V (2.1.28), W (2.1.29), B (2.1.30) і D (2.1.31), будуть аналогічними як для алгоритму на основі матричної моделі біноміального складання. Тут замість дій щодо встановлення або обнуління комірок (α,Δ) в $(0,11...1)$-матриці біноміального складання виконуються дії щодо внесення або вилучення елементів (α,Δ) в динамічному масиві $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$. Таким чином, можна записати:

для перетворення V переносу, використовуючи (3.1.7) і (3.1.8):

$$5 \le \tau_{\partial V} \le 2(k+1)+1,$$

$$\tau_{\partial V \max} = 2(k+1)+1; \qquad (3.1.27)$$

для перетворення W зсуву, використовуючи (3.1.9):

$$\tau_{\partial W} = \tau_{\partial W \max} = 2; \qquad (3.1.28)$$

для перетворення B симетрії, використовуючи (3.1.10):

$$\tau_{\partial B} = \tau_{\partial B \max} = 2; \qquad (3.1.29)$$

для перетворення D розкладу, використовуючи (3.1.11)

$$\tau_{\partial D} = \tau_{\partial D \max} = 5. \qquad (3.1.30)$$

Для алгоритму біноміального складання на основі динамічного масиву пошук необхідного перетворюваного елемента (α_s, Δ_s), як рівного, так і більшого за значенням кількісного еквівалента щодо шуканої (α_t, Δ_t) здійснюватиметься в одному масиві $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$, у якому формуються вагові коефіцієнти для результату біноміального складання. Звідси, на відміну від попереднього алгоритму кількість $\tau_{\partial n}$ тактів для пошуку елементів (α_s, Δ_s) як рівних, так і більших за значенням кількісного еквіваленту для шуканого елементу (α_t, Δ_t) буде одним і тим самим. Область пошуку буде дуже обмеженою, а сам масив $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ може складатися мінімально з одного елементу (α,Δ), а максимально з $2k \times c_{\partial n}$ елементів (α,Δ), де $c_{\partial n}$ – постійна, що масштабує довжину динамічного масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$. Наприклад, при додаванні двох двійкових (n,k)-біноміальних чисел, які мають числа $q=k$ одиниць, формується масив $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$, що складається з $2k$ елементів (α,Δ) (в цьому випадку $c_{\partial n}=1$). У процесі біноміального складання кількість елементів масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ може збільшуватися через перетворення D розкладу (2.1.31), тому для знаходження граничного максимального значення довжини масиву приймемо $c_{\partial n}=2$. Таким чином, при введеному припущенні час $\tau_{\partial n}$

операції пошуку елементів (α_s, Δ_s), що перетворюються, в масиві $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ буде знаходитися в межах

$$1 \le \tau_{\partial n} \le 4k, \tag{3.1.31}$$

а максимальний час витрат $\tau_{\partial n}$, виходячи з нерівності (3.1.31):

$$\tau_{\partial n \max} = 4k. \tag{3.1.32}$$

Більш детальний аналіз роботи кроків алгоритму з використанням динамічного масиву, які стосуються саме операції біноміального складання, призводить до часу $\tau_{\partial сл}$ складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, виражене через кількість машинних тактів:

$$\tau_{\partial сл} = c_{\partial V}\tau_{\partial V} + c_{\partial W}\tau_{\partial W} + c_{\partial B}\tau_{\partial B} + c_{\partial D}\tau_{\partial D} + c_{\partial n}\tau_{\partial n}, \tag{3.1.33}$$

де $c_{\partial V}$ – кількість зроблених перетворень V переносу (2.1.28) під час складання чисел X'_j и X''_j на основі масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$;

$c_{\partial W}$ – кількість здійснених перетворень W зсуву (2.1.29) під час складання чисел X'_j і X''_j на основі масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$;

$c_{\partial B}$ – кількість здійснених перетворень B симетрії (2.1.30) під час складання чисел X'_j і X''_j на основі масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$;

$c_{\partial D}$ – кількість здійснених перетворень D розкладання (2.1.31) під час складання чисел X'_j и X''_j на основі масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$;

$c_{\partial n}$ – кількість виконаних операцій з пошуку перетворюваних елементів (α_s, Δ_s) під час складання чисел X'_j і X''_j на основі масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$.

За аналогією з попереднім алгоритмом значення змінних $c_{\partial V}$, $c_{\partial W}$, $c_{\partial B}$, $c_{\partial D}$ та $c_{\partial n}$ також суттєво залежатимуть від виду двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, а також від проміжних результатів процесу біноміального складання. Очевидно, їх значення розташовуватимуться в межах від нульового до $\left(q_{X'_j} + q_{X''_j}\right)$, де $q_{X'_j}$ и $q_{X''_j}$ – числа двійкових одиниць в (n,k)-біноміальних числах X'_j і X''_j відповідно. Таким чином, можна зробити висновок, що змінні $c_{\partial V}$, $c_{\partial W}$, $c_{\partial B}$, $c_{\partial D}$ та $c_{\partial n}$, що позначають кількості здійснених операцій, обмежуються зверху максимальним значенням $2k$, оскільки $0 \le q_{X'_j}, q_{X''_j} \le k$ (властивості 2 та 3 двійкових (n,k)-біноміальних чисел, підрозділ 1.2).

Таким чином, беручи до уваги:

– рівності, які визначають максимальні значення для часових витрат $\tau_{\partial V}$ (3.1.27), $\tau_{\partial W}$ (3.1.28), $\tau_{\partial B}$ (3.1.29), $\tau_{\partial D}$ (3.1.30) і $\tau_{\partial n}$ (3.1.32);

– прийняте максимальне значення $2k$, що обмежує змінні $c_{\partial V}$, $c_{\partial W}$, $c_{\partial B}$, $c_{\partial D}$ та $c_{\partial n}$;

вираз (3.1.33) для максимального часу $\tau_{\partial сл \max} = \max \tau_{\partial сл}$ власне біноміального складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, виражений через кількість машинних тактів, можна представити наступним чином:

$$\tau_{\partial сл \max} = 2k\left(2\left(k+1\right)+1\right) + 8k^2 + 18k = 12k^2 + 24k\,. \qquad (3.1.34)$$

Слід зазначити, що цей вигляд функції (3.1.34) максимального обсягу витрат часу $\tau_{\partial сл \max} = f\left(n,k\right)$ та значення отриманих констант відображають специфіку побудови моделей методу біноміального арифметичного складання та особливості реалізації алгоритму, що використовує динамічний масив, для підсумовування двійкових (n,k)-біноміальних чисел.

В додатку В надані таблиця В.3 і графік залежності $\tau_{\partial сл \max} = f\left(k\right)$ (рисунок В.3), значення k змінюється від 1 до 23.

Для діапазону зміни параметра $1 \le k \le n-1$ очевидним є найбільше значення $\tau_{\partial сл \max} = f\left(n,k\right)$ при $k = n/2$ (умовимося також, що n – парне число, при непарному n висновки будуть аналогічні). Тоді, підставляючи $k = n/2$ у формулу (3.1.34), отримуємо граничне значення обсягу $\tau'_{\partial сл\max}$ часових витрат для найгіршого випадку:

$$\tau'_{\partial сл\max} = \max_{1 \le k \le n-1} \tau_{\partial сл\max} = 3n^2 + 12n. \qquad (3.1.35)$$

Для обчислення максимального значення обсягу $T_{\partial\max}$ часових витрат алгоритму, що використовує динамічний масив для біноміального складання, підсумуємо отримані $\tau_{\partial м\max}$ (3.1.26) і $\tau'_{\partial сл\max}$ (3.1.35) згідно (3.1.24), нехтуючи постійними членами через припущення, що значення параметра n є достатньо великим:

$$T_{\partial\max} = \tau_{\partial м\max} + \tau'_{\partial с\max} = 3n^2 + 12n + 3(n-1) \approx 3n^2 + 15n. \qquad (3.1.36)$$

В додатку В надані таблиця В.4 і графік залежності $T_{\partial\max} = f(n)$ (рисунок В.4), значення n змінюється від 4 до 40.

Виходячи з наведеної рівності (3.1.36), можна зробити висновок, що обсяг T_∂ часових витрат на арифметичне складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, проведене за допомогою прикладного алгоритму на основі динамічного масиву, обмежується зверху величиною:

$$T_\partial \le T_{\partial\max} \approx 3n^2 + 15n. \qquad (3.1.37)$$

Виразимо тепер часову складність алгоритму на основі динамічного масиву біноміального арифметичного складання з використанням O-нотації [65, 78; 79]. Відповідно, проведемо асимптотичну оцінку обсягу $T_{\partial\max}$ часових витрат при $n \to \infty$, тобто, коли довжина r двійкових біноміальних чисел прагне до нескінченності. У цьому випадку, враховуючи порядок ступенів доданків функції $T_{\partial\max}(n)$ (3.1.36) і беручи до уваги лише доданок із найвищим порядком, можна записати:

$$T_{\partial\max}(n) = O\left(n^2\right). \qquad (3.1.38)$$

Таким чином, виходячи з вигляду (3.1.38) алгоритм біноміального арифметичного складання, що використовує динамічний масив для проведення операції, класифікується як алгоритм з поліноміальним часом роботи [61; 62]. Процес виконання ним біноміального арифметичного складання проводиться за квадратичний час $O\left(n^2\right)$. Слід особливо наголосити, що до завдань такої складності відносяться базові операції складання, віднімання, множення та ділення для однорідних (ступеневих) систем числення, а також, наприклад, завдання швидкого сортування вставками або «бульбашкою» [71; 78].

В додатку В надані сумісно графічні залежності $T_{м\max} = f(n)$ (чорний колір) і $T_{\partial\max} = f(n)$ (червоний колір) (рисунок В.5), значення n змінюється від 4 до 40.

Знаходження результату Z_j підсумування двійкових біноміальних чисел X'_j і X''_j на основі способу з використанням проміжної, наприклад, десяткової системи обчислення вимагає згідно з числовою функцією (1.2.1) обчислення біноміальних коефіцієнтів $C_{n-i}^{k-q_i}$. Знаходження чисел сполучень $C_{n-i}^{k-q_i}$ при великих значеннях параметрів n і k є складною обчислювальною задачею, оскільки пов'язана з обчисленням факторіалів $(n-i)!$, $(k-q_i)!$ і $\left((n-k)-(i+q_i)\right)!$ (незалежно від того, класичний чи спрощений класичний способи використовуються для визначення $C_{n-i}^{k-q_i}$) [80; 81]. При цьому ще необхідно провести q разів складання або віднімання обчислених біноміальних коефіцієнтів, на що додатково знадобляться значні часові витрати (q – кількість одиниць у двійковому (n,k)-біноміальному числі). Всі ці дії необхідно зробити для обох біноміальних чисел X'_j і X''_j, а також для результату десяткового складання dec Z_j при зворотному переході до двійкового (n,k)-біноміального числа Z_j. Крім того, слід окремо відзначити, що для зберігання результатів обчислення факторіалів необхідно виділяти значні обсяги пам'яті [80; 81].

Використовуючи O-нотацію, для обсягу $T_{c\langle 10\rangle}(n)$ часових витрат при застосуванні способу знаходження результату біноміального арифметичного складання, що використовує проміжну десяткову систему числення, з урахуванням наведених вище зауважень можна записати

$$T_{c\langle 10\rangle}(n)=O(n!),\qquad (3.1.39)$$

тобто визначення результату біноміального складання згідно з способом, що використовує проміжну десяткову систему числення, відбувається за факторіальний час. Подібною часовою складністю обчислення характеризується вирішення відомого завдання комівояжера за допомогою повного перебору можливих варіантів [71; 78; 79].

Порівняння оцінок часових витрат (3.1.23) і (3.1.38) для розроблених у дисертаційній роботі алгоритмів біноміального складання (підрозділ 2.2), з оцінкою (3.1.39) часу дії наявного способу, що використовує перехід до десяткової системи числення, показує їх значну перевагу з точки зору швидкості визначення результату біноміального арифметичного складання.

Таким чином, можна зробити висновок, що згідно з цільовою функцією (1.4.3) дисертаційної роботи (підрозділ 1.4) проведено мінімізацію обсягу часових витрат на виконання біноміального складання на основі моделей та методу арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел, які реалізуються на практиці за допомогою алгоритму, який використовує матричну модель біноміального додавання, та алгоритму, який використовує динамічний масив біноміального складання.

3.2 Метод оцінки програмно-апаратних витрат складання двійкових біноміальних чисел

Аналізуючи складність практичної реалізації алгоритмів арифметичного складання двійкових біноміальних чисел у вигляді програм або на базі цифрових пристроїв, необхідно чітко визначити, які сукупності кроків ставитимуться до операційної частини алгоритмів, а які – до інформаційної. До інформаційної частини алгоритмів біноміального складання відносяться такі кроки, обсяг витрат на реалізацію яких істотно залежить від довжини $\max(k, n-k) \le r \le n-1$ двійкових (n,k)-біноміальних чисел, що додаються. До операційної частини відносяться операції встановлення у вихідний стан, присвоєння, контролю конкретного значення змінної, завершення алгоритмів і т. д. Очевидно, що зі збільшенням довжини двійкових (n,k)-біноміальних чисел, що беруть участь у арифметичному складанні, частка витрат на реалізацію операційної частини у загальному обсязі витрат пропорційно знижуватиметься. Тому основна увага при аналізі обсягу програмних та/або апаратних витрат приділяється насамперед реалізації інформаційної частини.

У випадку алгоритму, який використовує матричну модель біноміального складання, основні витрати будуть визначатися розмірністю $(k+1)\times(n-k)$ $(0,11...1)$-матриці біноміального складання (2.1.27), організацією управління її адресацією та розміщенням в оперативній пам'яті. Для організації адресації $(k+1)$ стовпців і $(n-k)$ рядків $(0,11...1)$-матриці, тимчасового збереження адрес α_t і Δ_t поточної комірки (α_t, Δ_t), доки ведеться пошук комірок (α_s, Δ_s), що перетворюються, необхідним є застосування не менше чотирьох буферних регістрів адресації розрядності $\lceil \log_2(k+1) \rceil$ для компоненти α і розрядності $\lceil \log_2(n-k) \rceil$ для компоненти Δ. Таким чином, об'єм Q_M програмних та/або апаратних витрат, що виражається в бітах, для алгоритму на основі матричного представлення двійкових (n,k)-біноміальних чисел буде складати:

$$Q_M = p_M(k+1)(n-k) + 2\lceil \log_2(k+1) \rceil + 2\lceil \log_2(n-k) \rceil. \qquad (3.2.1)$$

де p_M – розрядність комірки пам'яті, що представляє собою комірку $(0,11...1)$-матриці ($p_M \ge 2,3,4...$, наприклад, для двох двійкових $(9,4)$-біноміальних чисел, що складаються, достатньо $p_M = 2$ розрядів для зберігання до чотирьох одиниць).

Щоб дослідити поведінку функції $Q_M = f(n)$ при збільшені n, скористаємося нерівностями виду [65]:

$$\lceil \log_2(k+1) \rceil \le \log_2(k+1)+1 \text{ і } \lceil \log_2(n-k) \rceil \le \log_2(n-k)+1, \qquad (3.2.2)$$

які у разі підстановки у вираз (3.2.1) незначною мірою вплинуть на шукане значення $Q_М$, особливо з урахуванням припущення, що n і k досить великі. Таким чином, підставляючи (3.2.2) в рівність (3.2.1) і застосовуючи властивість складання логарифмів [82], отримуємо:

$$\begin{aligned} Q'_М &= p_М(k+1)(n-k) + 2\log_2(k+1) + 2\log_2(n-k) + 2 = \\ &= p_М(k+1)(n-k) + 2\left(\log_2(k+1) + \log_2(n-k) + 1\right) = \\ &= p_М(k+1)(n-k) + 2\log_2\left(2(k+1)(n-k)\right) . \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

Очевидно, що $Q_М \approx Q'_М$ при великих значеннях n і k.

Максимальне значення $Q'_М$ обсягу програмних та/або апаратних витрат (3.2.3) буде при $k = n/2$ (умовимося, що n – парне число, при непарному n висновки будуть аналогічні). Тоді, застосовуючи $k = n/2$ для рівності (3.2.3) і беручи до уваги $n \gg 1$, в результаті приходимо до виразу:

$$Q'_{М\max} = p_М \frac{n^2}{4} + 2\log_2\left(\frac{n^2}{2}\right) . \qquad (3.2.4)$$

В додатку Г надані таблиця Г.1 і графік залежності $Q'_{М\max} = f(n)$ (рисунок Г.1) при заданому $p_М = 3$, значення n змінюється від 4 до 40.

Слід звернути увагу на те, що при наближенні $n \to \infty$ для виразу (3.2.3) з огляду на те, що логарифмічна функція аргументу зростає набагато повільніше, ніж сам аргумент [65; 82], маємо:

$$\frac{2\log_2\left(2(k+1)(n-k)\right)}{p_М(k+1)(n-k)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 . \qquad (3.2.5)$$

Звідси, ґрунтуючись на (3.2.5), для об’єму $Q'_М$ програмних та/або апаратних витрат (3.2.3) при реалізації алгоритму біноміального складання на основі матричного представлення двійкових (n,k)-біноміальних чисел отримуємо:

$$Q'_М \underset{n\to\infty}{\to} p_М(k+1)(n-k) . \qquad (3.2.6)$$

На основі виразу (3.2.6) можна зробити висновок, що переважна частка в програмних та/або апаратних витрат Q_M займають витрати, необхідні для розміщення $(0,11...1)$-матриці біноміального складання в оперативній пам'яті комп'ютерної системи або цифрового пристрою.

У разі алгоритму, що використовує динамічний масив, інформаційну частину, яка залежить від значень параметрів n і k двійкових (n,k)-біноміальних чисел, що додаються, представляє масив $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ для проведення біноміального арифметичного складання (підрозділ 2.2). У початковому стані довжина масиву, тобто кількість комірок оперативної пам'яті, що містять елементи масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$, складають $q_{X'_j}+q_{X''_j}$ або в максимальному вираженні $2k$ (властивості 2 та 3 біноміальних чисел, підрозділ 1.2). Звідси, очевидно, кількість комірок пам'яті не повинна бути меншою $2k$. Але в процесі біноміального складання кількість необхідних комірок пам'яті може збільшуватися, тому визначимо їх необхідне число таким чином:

$$N_\partial = 2c_{сл}k, \tag{3.2.7}$$

де $c_{сл}$ – коефіцієнт масштабування числа комірок пам'яті ($c_{сл} \geq 2,3,...$), додаткова необхідність у яких з'являється в процесі біноміального складання через застосування перетворення D розкладання (2.1.31).

Розрядність комірок для зберігання елементів (α,Δ) масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$, а саме значень компонентів $0 \leq \alpha \leq k$ і $0 \leq \beta \leq n-k-1$ (2.1.26), дорівнює

$$p_\partial = \left\lceil \log_2(k+1) \right\rceil + \left\lceil \log_2(n-k) \right\rceil. \tag{3.2.8}$$

Крім комірок пам'яті для зберігання елементів масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ необхідні ще комірки пам'яті для зберігання виду поточного елемента (α_t,Δ_t), що є шуканим, тієї ж розрядності (3.2.8), що і комірки пам'яті масиву, і для зберігання поточної довжини масиву біноміального складання розрядності $\left\lceil \log_2 2c_{сл}k \right\rceil$. Таким чином, обсяг програмних та/або апаратних витрат для алгоритму, що використовує динамічний масив, на основі виразів (3.2.7), (3.2.8) та вищенаведених зауважень щодо додаткових комірок визначається як:

$$Q_\partial = \left(2c_{сл}k+1\right)\left(\left\lceil \log_2\left(k+1\right)\right\rceil + \left\lceil \log_2\left(n-k\right)\right\rceil\right) + \left\lceil \log_2 2c_{сл}k \right\rceil. \qquad (3.2.9)$$

Щоб дослідити поведінку функції $Q_\partial = f\left(n\right)$ при збільшенні n, скористаємося нерівностями (3.2.2) і тим, що [65]:

$$\left\lceil \log_2 2c_{сл}k \right\rceil \le \log_2 2c_{сл}k + 1,$$

допускаючи незначну втрату точності обчислень обсягу Q_∂ витрат. На основі попереднього виразу (3.2.9) отримаємо:

$$Q'_\partial = \left(2c_{сл}k+1\right)\left(\log_2\left(k+1\right) + \log_2\left(n-k\right) + 2\right) + \log_2 2c_{сл}k + 1. \qquad (3.2.10)$$

Очевидно, що $Q_\partial \approx Q'_\partial$ при великих значеннях n і k.

Максимальне значення Q'_∂ обсягу програмних та/або апаратних витрат (3.2.10) буде при $k = n/2$ (умовимося, що n – парне число, при непарному n висновки будуть аналогічні). Тоді, застосовуючи $k = n/2$ в рівності (3.2.9) і беручи до уваги $n \gg 1$, в результаті приходимо до рівності

$$\begin{aligned} Q'_{\partial\max} &\approx c_{сл}n\left(\log_2\frac{n}{2} + \log_2\frac{n}{2}\right) + \log_2 c_{сл}n = \\ &= 2c_{сл}n\log_2\frac{n}{2} + \log_2 c_{сл}n\ . \end{aligned} \qquad (3.2.11)$$

В додатку Г надані таблиця Г.2 і графік залежності $Q'_{\partial\max} = f\left(n\right)$ (рисунок Г.2) при заданому $c_{сл} = 3$, значення n змінюється від 4 до 40.

При наближенні $n \to \infty$ для виразу (3.2.11) маємо

$$\frac{\log_2 c_{сл}n}{2c_{сл}n\log_2\frac{n}{2}} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Звідси, ґрунтуючись на (3.2.11), для обсягу $Q'_{\partial\max}$ програмних та/або апаратних витрат при реалізації алгоритму біноміального складання, що використовує динамічний масив:

$$Q'_{\partial\max} \underset{n\to\infty}{\to} 2c_{сл}n\log_2\frac{n}{2}. \qquad (3.2.12)$$

На основі виразу (3.2.12) можна зробити висновок, що переважну частину програмних та/або апаратних витрат Q_{∂} займають витрати, необхідні для розміщення елементів (α,Δ) масиву $S\left[(\alpha,\Delta),\gamma\right]$ біноміального складання в оперативній пам'яті комп'ютерної системи або цифрового пристрою.

Реалізація цільової функції (1.4.3) (підрозділ 1.4) щодо мінімізації часу біноміального арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j обумовлюється дотриманням обмеження на обсяг програмних та/або апаратних витрат:

$$Q_{сл} < Q_{тб},$$

де $Q_{сл}$ – обсяг програмних та/або апаратних витрат, необхідних для виконання біноміального арифметичного складання із застосуванням алгоритму на основі матричної моделі складання або алгоритму на основі динамічного масиву;

$Q_{тб}$ – обсяг програмних та/або апаратних витрат, пов'язаний з реалізацією біноміального арифметичного складання на основі табличного методу.

Питання визначення обсягу програмних та/або апаратних витрат, пов'язане з реалізацією арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j на основі табличного методу досліджувалося у підрозділі 2.2. Відповідно до рівності з підрозділу маємо:

$$Q_{тб} = C_{пр} = (n-1)\cdot 2^{2n-1}. \tag{3.2.13}$$

Алгоритм на основі матричної моделі біноміального складання для двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j характеризується наступним максимальним обсягом $Q'_{м\max}$ програмних та/або апаратних витрат (3.2.4):

$$Q_{сл} = Q'_{м\max} = p_м \frac{n^2}{4} + 2\log_2\left(\frac{n^2}{2}\right). \tag{3.2.14}$$

Порівнюючи вирази (3.2.13) і (3.2.14) приходимо до висновку:

$$Q'_{м\max} \ll Q_{тб}\,. \tag{3.2.15}$$

Алгоритм біноміального арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, що використовує динамічний масив, характеризується наступним максимальним обсягом $Q'_{д\max}$ програмних та/або апаратних витрат (3.2.11):

$$Q_{сл} = Q'_{д\max} = 2c_{сл}n\log_2\frac{n}{2} + \log_2 c_{сл}n\,. \tag{3.2.16}$$

Порівнюючи вирази (3.2.13) і (3.2.16) також приходимо до висновку:

$$Q'_{д\max} \ll Q_{тб}\,. \tag{3.2.17}$$

Таким чином, можна сформулювати наступний висновок, що обмеження (3.2.15) і (3.2.17) на обсяг програмних та/або апаратних витрат при практичній реалізації розроблених моделей та методу біноміального арифметичного складання на основі представлених алгоритмів виконуються при досягненні цільової функції (1.4.3) дисертаційної роботи (підрозділ 1.4).

РОЗДІЛ 4
ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ БІНОМІАЛЬНОГО АРИФМЕТИЧНОГО СКЛАДАННЯ В ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

4.1 Моделі процесів оброблення кодів-сполучень на основі арифметичних дій над біноміальними числами

Коди-сполучення є поширеним класом кодів, які широко використовуються в різних інформаційно-керуючих системах і цифрових пристроях для вирішення інформаційних завдань [50; 51; 52]:

- перешкодостійкої передачі даних по каналах зв'язку;
- забезпечення відмовостійкої роботи цифрової апаратури;
- реалізації самодіагностики та наскрізного контролю функціонування керуючих систем та пристроїв;
- стиснення інформації в інформаційних системах;
- комбінаторної оптимізації при прийнятті керуючих рішень.

В основу побудови кодів-сполучень закладено числа сполучень або біноміальні коефіцієнти з обмеженнями на значення їх верхніх та нижніх параметрів. У разі двійкового представлення ці обмеження на вигляд кодів-сполучень стосуються порядку розміщення або кількості двійкових елементів, що їх складають. Наприклад, поширеними є обмеження у кількості двійкових одиниць або нулів в кодових комбінаціях, довжині одиничних або нульових серій в інформаційних послідовностях, на дозвіл або заборону розміщення одиниць і нулів в деяких двійкових розрядах і т. д. До широко відомих кодів-сполучень відносяться рівноважні та квазірівноважні кодові комбінації [50; 52].

Однією з основних позитивних якостей двійкових біноміальних систем числення (підрозділ 1.2) є те, що в структурі двійкових кодів-сполучень можна виділити двійкові біноміальні числа. Це означає, що на основі двійкових біноміальних чисел досить просто отримати різноманітні класи кодів-сполучень, а також, навпаки, від кодів-сполучень можна легко перейти до двійкових біноміальних чисел.

Множина та вид кодових комбінацій коду-сполучення $Y = Y\left[R_Y\right]$ визначаються заданим обмеженням R_Y. Наприклад, для рівноважного коду дане обмеження має вигляд $R_Y = k$.

Бієктивні біноміальні відображення виду $\varphi : X\left[n,k\right] \to Y\left[R_Y\right]$ і $\varphi^{-1} : Y\left[R_Y\right] \to X\left[n,k\right]$ визначають пряме та зворотне відображення множини $X = X\left[n,k\right]$ двійкових $\left(n,k\right)$- біноміальних чисел X_j на множину $Y = Y\left[R_Y\right]$ кодів-сполучень Y_j з заданим обмеженням R_Y. У свою чергу, бієктивні біноміальні відображення виду $\psi : X\left[n,k\right] \to F$ і $\psi^{-1} : F \to X\left[n,k\right]$ визначають пряме та зворотне відображення множини $X\left[n,k\right]$ двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел X_j на множину F номерів F_j (1.2.1) [48; 50; 61].

Скористаємося теоретико-множинним підходом, який арифметичні дії задає як особливі відносини між трійками елементів, у яких один елемент визначається через два інших, або як алгебраїчні операції [14; 61; 83].

Задаємо на множині X двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел X_j бінарні операції ω_+ складання і $\omega_\times$ множення, котрі вектору $\left(X_1, X_2\right) \in X^{(2)}$ ставлять у відповідність єдиний елемент $X_3 \in X$ (у попередньому викладі дисертаційної роботи X_1, X_2 и X_3 позначалися як X'_j, X''_j и Z_j відповідно) [61]:

$$\omega_+ : X^{(2)} \to X\ ,\ \omega_\times : X^{(2)} \to X\ .$$

Множина операцій ω_+ і $\omega_\times$, заданих на множині X, представляє собою сигнатуру двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел $\Omega = \left\{\omega_+, \omega_\times\right\}$.

Таким чином, множина X з її сигнатурою Ω визначають біноміальну алгебру $\mathrm{A}\left(X;\Omega\right)$, або алгебру двійкових $\left(n,k\right)$-біноміальних чисел $X_j \in X$. При цьому арифметичні операції ω_+ і $\omega_\times$ можна позначати або, використовуючи функціональний запис, або у вигляді спеціальних знаків $+$ и $\times$ [61]:

$$\omega_+(X_1, X_2) = X_1 + X_2 = X_3,$$

$$\omega_\times(X_1, X_2) = X_1 \times X_2 = X_3.$$

Очевидно, що відображення $\psi : X[n,k] \to F$ і $\psi^{-1} : F \to X[n,k]$ мають властивості [61]:

$$\psi(X_1 + X_2) = \psi(X_1) + \psi(X_2),$$

$$\psi(X_1 \times X_2) = \psi(X_1) \times \psi(X_2),$$

$$\psi^{-1}(F_1 + F_2) = \psi^{-1}(F_1) + \psi^{-1}(F_2),$$

$$\psi^{-1}(F_1 \times F_2) = \psi^{-1}(F_1) \times \psi^{-1}(F_2).$$

відносно бінарних операцій ω_+, $\omega_\times$ і, отже, вони визначають ізоморфізм алгебри $\mathrm{A}(X;+,\times)$ двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j і алгебри $\mathrm{B}(F;+,\times)$ двійкових номерів F_j.

З урахуванням взаємно однозначної функціональної відповідності $G \subseteq X \times Y$, у якого для кожного X_j є єдиний образ Y_j, а для кожного Y_j – єдиний прообраз X_j, таких, що $(X_j, Y_j) \in G$, $X_j \in X[n,k]$ і $Y_j \in Y[R_Y]$, визначається також ізоморфізм алгебри $\mathrm{A}(X;+,\times)$ двійкових (n,k)-біноміальних чисел X_j і алгебри $\Gamma(Y;+,\times)$ кодів-сполучень Y_j. Це означає, що $\varphi : X[n,k] \to Y[R_Y]$ і $\varphi^{-1} : Y[R_Y] \to X[n,k]$ також мають властивості [61]:

$$\varphi(X_1 + X_2) = \varphi(X_1) + \varphi(X_2), \qquad (4.1.1)$$

$$\varphi(X_1 \times X_2) = \varphi(X_1) \times \varphi(X_2), \qquad (4.1.2)$$

$$\varphi^{-1}(Y_1 + Y_2) = \varphi^{-1}(Y_1) + \varphi^{-1}(Y_2), \qquad (4.1.3)$$

$$\varphi^{-1}(Y_1 \times Y_2) = \varphi^{-1}(Y_1) \times \varphi^{-1}(Y_2). \qquad (4.1.4)$$

Без порушення спільності моделей арифметичних дій над двійковими (n,k)-біноміальними числами множину X при подальшому розгляді представлятимемо замкнутою щодо операцій ω_+ і $\omega_\times$, тобто

$$\omega_+\left(X^{(2)}\right)\subseteq X\ ,\ \omega_\times\left(X^{(2)}\right)\subseteq X\ .$$

Іншими словами, під час виконання арифметичних дій над двійковими (n,k)-біноміальними числами параметр n зберігатиме своє значення, що означає ситуацію, коли переноси при виконанні бінарних операцій ω_+ і $\omega_\times$ не здійснюються.

Таким чином, з урахуванням взаємно однозначності біноміальних прямого φ і оберненого φ^{-1} відображень, а також ізоморфізму алгебри $\mathrm{A}(X;+,\times)$ і $\Gamma(Y;+,\times)$ (4.1.1)-(4.1.4), математичними моделями процесів складання та добутку кодів-сполучень $Y_j\in Y[R_Y]$ як складових процесів біноміального перетворення даних в інформаційно-керуючих системах є наступні співвідношення [61]:

для складання –

$$\varphi\left(\omega_+\left(\varphi^{-1}(Y_1),\varphi^{-1}(Y_2)\right)\right)=Y_3\,; \tag{4.1.5}$$

для добутку –

$$\varphi\left(\omega_\times\left(\varphi^{-1}(Y_1),\varphi^{-1}(Y_2)\right)\right)=Y_3; \tag{4.1.6}$$

де Y_1, Y_2 – вихідні доданки (4.1.5) або множники (4.1.6), представлені кодами-сполученнями, $Y_1,Y_2\in Y[R_Y]$; Y_3 – результат додавання (4.1.5) або добутку (4.1.6), представлений також у вигляді коду-сполучення, $Y_3\in Y[R_Y]$.

Моделі процесів складання (4.1.5) і добутку (4.1.6) реалізуються за допомогою наступних алгоритмічних кроків [61].

Крок 1. Визначаються образи X_1 и X_2 кодів-сполучень Y_1 і Y_2 при зворотному біноміальному відображенні $\varphi^{-1}:Y[R_Y]\to X[n,k]$:

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(Y_1) = X_1 \\ \varphi^{-1}(Y_2) = X_2 \end{cases} .$$

Крок 2. Проводиться операція додавання (множення) над двійковими. (n,k)-біноміальними числами X_1 и X_2, $X_1, X_2 \in X[n,k]$:

$$\omega_+(X_1, X_2) = X_3 \text{ або } \omega_\times(X_1, X_2) = X_3,$$

враховуючи, що $\omega_+\left(X^{(2)}\right) \subseteq X$, $\omega_\times\left(X^{(2)}\right) \subseteq X$.

Крок 3. Визначається образ Y_3 двійкового (n,k)-біноміального числа X_3 при прямому біноміальному відображенні $\varphi : X[n,k] \to Y[R_Y]$:

$$\varphi(X_3) = Y_3,$$

який і є результатом складання (множення) кодів-сполучень Y_1 і Y_2, $Y_1, Y_2, Y_3 \in Y[R_Y]$.

У графічному вигляді моделі арифметичних дій ω_+ і $\omega_\times$ над кодами-сполученнями $Y_j \in Y[R_Y]$ представлені на рисунку 4.1 [61].

Представлені моделі є ефективними з погляду швидкодії обробки кодів-сполучень та розширення функціональних можливостей застосування двійкових (n,k)-біноміальних чисел. Але вони можуть бути реалізовані тільки при побудові моделей біноміальних додавання і множення, а також інших арифметичних операцій, над числами в двійкових (n,k)-біноміальних системах числення.

Моделі та метод арифметичного складання над двійковими (n,k)-біноміальними числами є розробленими та дослідженими в даній дисертаційній роботі (підрозділи 2.1 і 2.2).

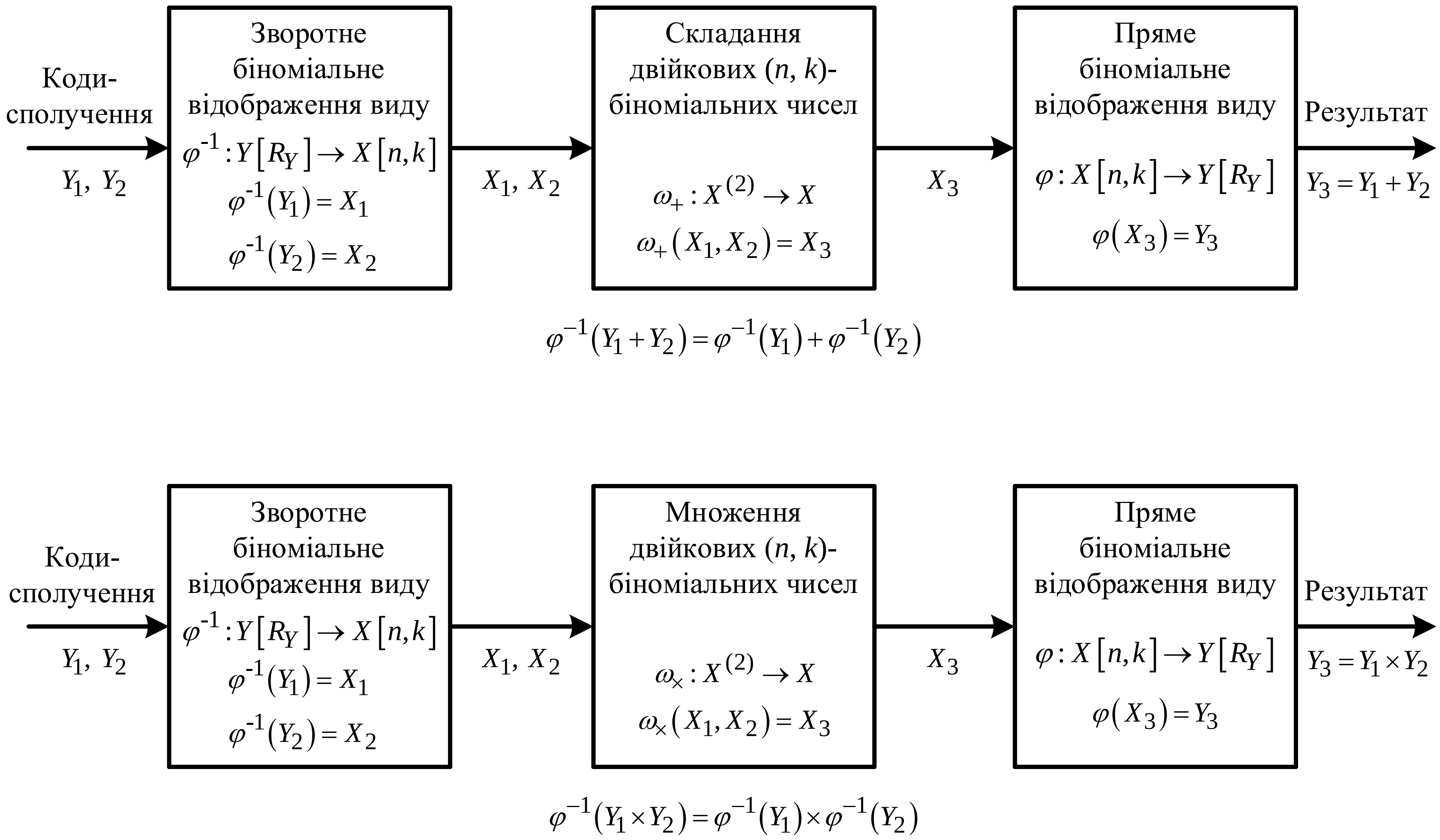


Рисунок 4.1 – Моделі процесів складання і множення кодів-сполучень на основі біноміального арифметичного складання і множення двійкових біноміальних чисел [61]

4.2 Структурна модель пристрою біноміального арифметичного складання

Сукупність кроків алгоритму біноміального арифметичного складання, а також взаємозв'язок операцій, що застосовуються, визначають структуру та особливості побудови цифрового пристрою арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел. Як основу для побудови такої структури візьмемо розроблений алгоритм, який використовує матричне представлення двійкових (n,k)-біноміальних чисел (підрозділ 2.2).

Кожній основній операції даного алгоритму повинен відповідати в структурі пристрою призначений блок, модуль або вузол, взаємодія яких повинна призводити до виконання поставленого завдання – біноміального арифметичного складання.

До основних операцій, що реалізуються синтезованим цифровим пристроєм, належать введення вхідних двійкових. (n,k)-біноміальних чисел; перетворення двійкових (n,k)-біноміальних чисел у кортежі, які складаються з упорядкованих пар (α,Δ); формування матриці біноміального складання та розміщення її в пам'яті; адресація комірок пам'яті (матриці) за значеннями компонентів α і Δ; завдання шуканої комірки (α_t,Δ_t) пам’яті (матриці); пошук і порівняння комірок пам'яті (матриці) (α_s,Δ_s), що перетворюються, рівних або більших за кількісним еквівалентом, ніж шукана (α_t,Δ_t); виконання перетворення перенесення; виконання перетворення зсуву; виконання перетворення симетрії; виконання перетворення розкладання; прискорене формування одиничного рядка (підрядка) пам'яті (матриці); перевірка першої умови завершення біноміального складання; перевірка другої умови завершення біноміального складання; виведення результуючого двійкового (n,k)-біноміального числа.

Структурна модель цифрового пристрою біноміального арифметичного складання наведена на рисунку 4.2 і складається з наступних основних блоків: блоку керування та синхронізації 1, блоку формування пар (α,Δ) 2, вхідного регістра біноміальних чисел 3, блоку управління адресацією 4, блоку дозволу зміни α 5, блоку дозволу зміни Δ 6, блоку завдання шуканої комірки 7, першого блоку адресації α 8, другого блоку адресації Δ 9, блоку порівняння 10, блоку пам’яті 11, першого блоку завершення складання 12, другого блоку завершення складання 13, блоку готовності 14, блоку формування результату 15, вихідного регістру суми 16.

Блок керування та синхронізації 1 призначений для завдання режимів роботи цифрового пристрою відповідно до логіки перетворень переносу V (2.1.28), зсуву W (2.1.29), симетрії B (2.1.30) і розкладання D (2.1.31), а також виконання D^{-1} прискореного формування одиничного підрядку (або рядку) (2.1.31), над комірками блоку пам’яті 11. Крім того, даний блок забезпечує узгоджену роботу всіх блоків та вузлів цифрового пристрою біноміального арифметичного складання.

Блок формування пар (α,Δ) 2 служить для перетворення кодових двійкових образів (n,k)-біноміальних чисел в q-кортежі (2.1.4), що складаються з пар (α,Δ). Компоненти α і Δ являють собою адреси комірок блоку пам'яті 11, куди завантажуватимуться одиничні значення.

Вхідний регістр біноміальних чисел 3 призначений для зберігання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j на час виконання арифметичного складання. Максимальна розрядність регістру складає $(n-1)$ розрядів.

Блок управління адресацією 4 служить для підготовки та формування адрес α і Δ згідно вигляду рівностей (2.1.28)-(2.1.31), що відповідають перетворенням $\langle V,W,B,D\rangle$, для першого 8 і другого 9 блоків адресації α і Δ; завдання адрес α_t і Δ_t шуканої комірки пам’яті (α_t,Δ_t) для блоку завдання шуканої комірки 7; формування адрес відповідно до систем рівностей (2.2.6) і

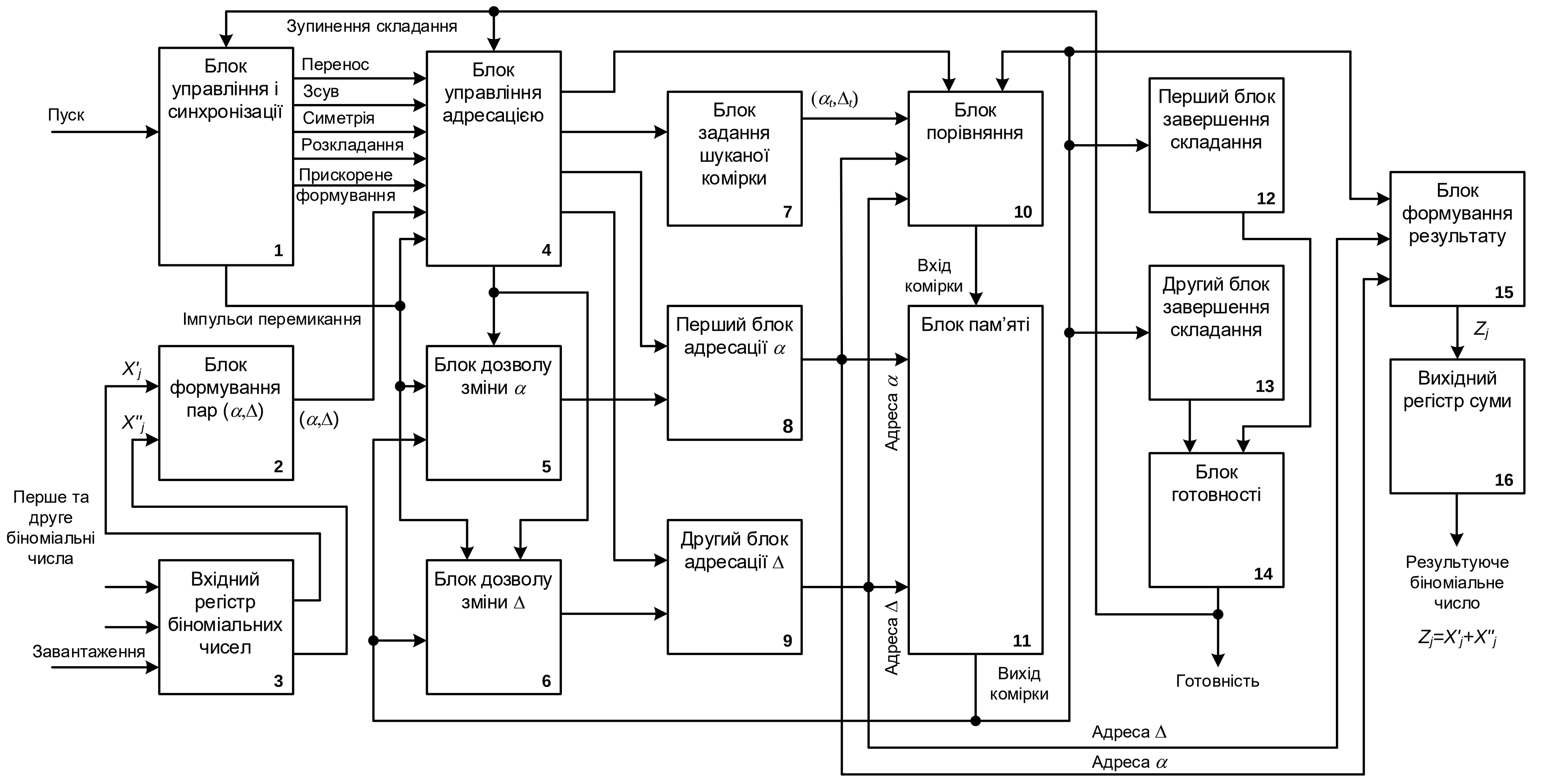


Рисунок 4.2 – Структурна модель цифрового пристрою біноміального арифметичного складання

(2.2.8), а також організації пошуку перетворюваних комірок (α_s, Δ_s) для першого 8 і другого 9 блоків адресації α і Δ.

Блок дозволу зміни α 5 призначений для знаходження значення компоненти α_t з метою завдання адреси поточної шуканої комірки (α_t, Δ_t) для першого 8 блоку адресації α по значенню опитуваної комірки (α, Δ) з блоку пам'яті 11.Блок дозволу зміни Δ 6 служить для знаходження значення компоненти Δ_t с метою завдання адреси поточної шуканої комірки (α_t, Δ_t) для другого 9 блоку адресації Δ по значенню опитуваної комірки (α, Δ) з блоку пам'яті 11.

Блок задання шуканої комірки 7 призначений для зберігання адреси – значень компонент α_t і Δ_t – шуканої комірки пам'яті (α_t, Δ_t) з метою зміни її вмісту на одиничний внаслідок дії перетворень V переносу (2.1.28), W зсуву (2.1.29), B симетрії (2.1.30) і D розкладання (2.1.31), а також D^{-1} прискореного формування одиничного рядка (підрядка) (2.1.31), над комірками (α_s, Δ_s) блоку пам'яті 11, що перетворюються.

Перший блок адресації α 8 служить для адресації стовпців $0 \le \alpha \le k$ матриці біноміального складання розмірності $(n-k)\times(k+1)$, розташованої в блоці пам'яті 11.

Другий блок адресації Δ 9 призначений для адресації рядків $0 \le \Delta \le n-k-1$ матриці біноміального складання розмірності $(n-k)\times(k+1)$, розташованої в блоці пам'яті 11.

Блок порівняння 10 служить для організації обнуління або встановлення в одиничний стан поточної шуканої комірки (α_t, Δ_t) та перетворюваних комірок (α_s, Δ_s) за результатами порівняння їх компонент α і Δ згідно з перетвореннями V переносу (2.1.28), W зсуву (2.1.29), B симетрії (2.1.30) і D розкладання (2.1.31), а також виконання D^{-1} прискореного формування одиничного рядку (підрядка) (2.1.31).

Блок пам'яті 11 призначений для розміщення в оперативній пам'яті матриці біноміального арифметичного складання розмірності $(n-k)\times(k+1)$ для проведення над комірками (α,Δ) сукупності перетворень $\langle V,W,B,D\rangle$ згідно з виразами (2.1.28)-(2.1.31).

Перший блок завершення складання 12 служить для контролю першої умови завершення операції згідно (2.2.4) шляхом аналізу вмісту стовпців α матриці біноміального складання в блоці пам’яті 11.

Другий блок завершення складання 13 призначений для контролю другої умови завершення операції згідно (2.2.5) шляхом аналізу монотонності зменшення значень компонент Δ одиничних комірок матриці біноміального складання в блоці пам'яті 11.

Блок готовності 14 служить для формування сигналу «Готовність» за позитивними результатами аналізу першого 12 і другого блоку 13 завершення складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j, а також організації подальшого завершення роботи блоку управління та синхронізації 1 та блоку управління адресацією 4.

Блок формування результату 15 призначений для формування кодового образу результуючого двійкового (n,k)-біноміального числа $Z_j = X'_j + X''_j$ шляхом перетворення на одиничні біноміальні розряди компонент (α,Δ) упорядкованого q_{Z_j}-кортежу, які відповідають одиничним коміркам блоку пам'яті 11 на момент завершення біноміального складання.

Вихідній регістр суми 16 служить для завантаження результуючого двійкового (n,k)-біноміального числа Z_j з метою подальшої його передавання зовнішньому пристрою за сигналом «Готовність».

Функціонування структурної моделі цифрового пристрою біноміального арифметичного складання виглядає так.

За сигналом «Завантаження» від зовнішнього пристрою двійкові (n,k)-біноміальні числа X'_j і X''_j завантажуються у вхідний регістр біноміальних чисел 3. Далі, поступивши на вхід блоку формування пар (α,Δ) 2 кодові записи чисел X'_j і X''_j перетворюються в даному блоці на відповідні q-кортежі (2.1.4) ($q = q_{X'_j}$ або $q = q_{X''_j}$), що складаються з компонент (α,Δ). Отримані пари (α,Δ) являють собою значення адрес одиничних комірок пам'яті (матриці біноміального складання) в блоці пам'яті 11, з яких починається проведення арифметичної операції. З виходу блоку формування пар (α,Δ) 2 компоненти α і Δ, що відносяться до біноміальних чисел X'_j і X''_j, записуються в блок управління адресацією 4. Одночасно із завантаженням (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j на блок управління і синхронізації 1 надходить сигнал «Пуск», який переводить пристрій в режим формування одиничного рядка і поперемінно включає додатково режими перенесення, зсуву, симетрії, розкладання і прискореного формування одиничного рядка (підрядка). Інформація про включення даних режимів з блоку керування та синхронізації 1 передається в блок керування адресацією 4 за допомогою сигналів «Перенесення», «Зсув», «Симетрія», «Розкладання» та «Прискорене формування». Продовження формування одиничного рядка (підрядка) відбувається з урахуванням значень адрес α_t і Δ_t, які містяться в блоці задання шуканої комірки 7. Вміст даного блоку 7 в процесі виконання біноміального складання змінюється за дозвільним сигналом з блоку управління адресацією 4, що надходить на перші входи блоку 5 дозволу зміни α і блоку 6 дозволу зміни Δ. На другі входи блоків дозволу 5 і 6 надходять одиничні або нульові сигнали вмісту комірок блоку пам'яті 11, які переглядаються і які сигналізують блок управління адресацією 4 про необхідність переходу до іншої шуканої комірки (α_t,Δ_t). Як тільки виявляється комірка (α_s,Δ_s), що перетворюється, в блоці пам’яті 11, згідно з одним із сигналів «Перенесення», «Зсув», «Симетрія», «Розкладання» та «Прискорене формування» з блоку керування та синхронізації 1 блок керування адресацією 4 генерує необхідні адреси α і Δ, завантажує їх в перший 8 і другий 9 блоки адресації, а блок порівняння 10 за цими адресами відповідно до логіки застосовуваних перетворень обнулює і встановлює в одиничний стан відповідні комірки матриці в блоці пам'яті 11. Після цього за допомогою блоків 5 і 6 дозволу зміни α і Δ відповідно здійснюється перехід до наступної поточної комірки матриці (α_t, Δ_t) в блоці пам'яті 11, а блок задання шуканої комірки 7 оновлює свій вміст за сигналом з блоку управління адресацією 4 на наступні нові адреси α_t і Δ_t. Дії з адресами перетворюваних і поточної шуканої комірок матриці в блоці пам'яті 11 повторюються в залежності від використовуваних перетворень V, W, B, D і D^{-1} до тих пір, поки перший 12 і другий 13 блоки завершення складання не сформують сигнали про виконання умов завершення біноміального складання і не відправлять їх на блок готовності 14. Отримавши дані сигнали блок готовності 14 зупиняє роботу блоку управління і синхронізації 1 і блоку управління адресацією 4, генерує зовнішній сигнал «Готовність», що сигналізує зовнішньому пристрою про закінчення біноміального арифметичного складання двійкових (n,k)-біноміальних чисел X'_j і X''_j. Водночас, на момент завершення біноміального складання блок формування результату 15 по одиничних комірках (α, Δ) матриці з блоку пам'яті 11 формує спочатку q_{Z_j}-кортеж результату суми $X'_j + X''_j$, а потім на його основі кодовий запис результуючого двійкового (n,k)-біноміального числа Z_j. Результат суми $Z_j = X'_j + X''_j$ зберігається у вихідному регістрі суми 16 для зовнішнього пристрою до надходження наступних зовнішніх сигналів «Завантаження» та «Пуск».

Перспективним напрямом застосування розробленої структурної моделі цифрового пристрою біноміального арифметичного складання (рисунок 4.2) є побудова на його основі моделі процесу генерування різних кодів-сполучень, наприклад рівноважних або квазірівноважних [50; 52]. Для цього на вході такої моделі процесу генерування, в якій в якості центрального елемента застосовується розроблена структурна модель пристрою біноміального складання, необхідно поставити блок перетворення кодів-сполучень у двійкові біноміальні числа, а на виході – блок зворотного перетворення двійкового біноміального числа в код-сполучення як показано на рисунку 4.3. Такий підхід до генерування різних кодів сполучень, а також методи і пристрої, що його реалізують, будуть відрізнятися універсальністю і високою швидкодією, особливо при великих значеннях чисел розрядів вихідних кодових послідовностей.

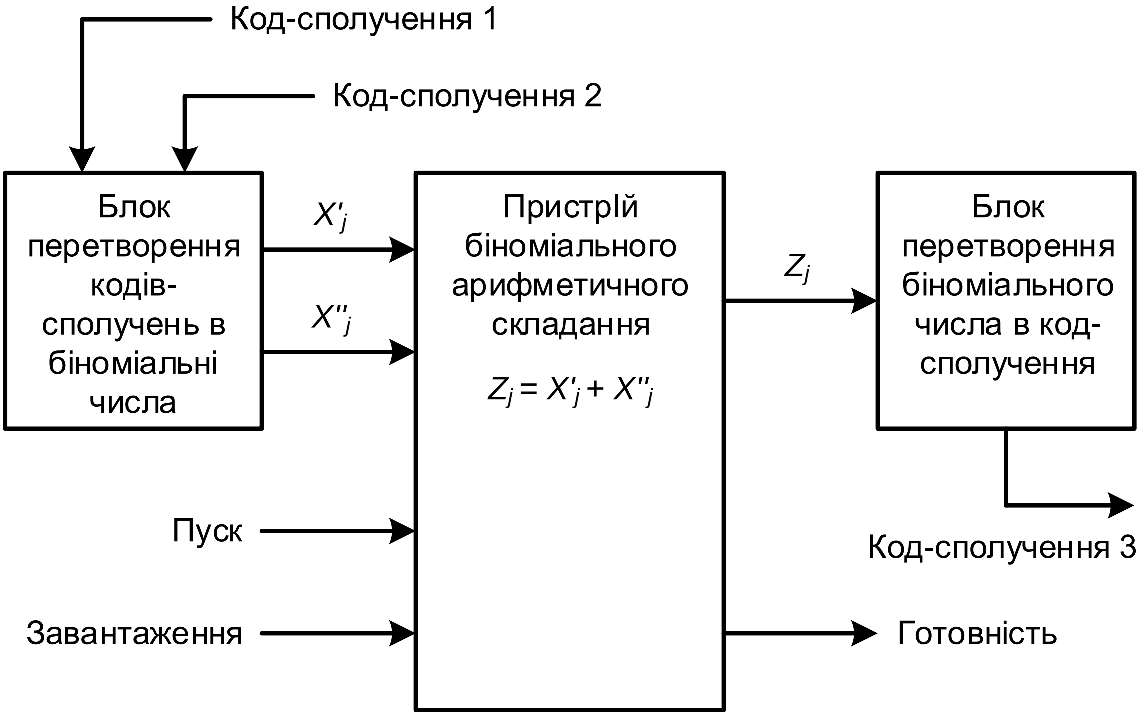


Рисунок 4.3 – Модель процесу генерування кодів-сполучень на основі структурної моделі пристрою біноміального арифметичного складання

Використання двійкових біноміальних чисел та біноміальної арифметики, включно розробленого методу біноміального складання, вважається перспективним напрямом для побудови спеціалізованих інформаційно-керуючих систем. Властивість завадостійкості, що мають двійкові біноміальні числа, та наявність вбудованих засобів контролю над правильністю проведення біноміальних арифметичних операцій є основою для розробки високоефективних біноміальних процесорів з метою підвищення надійності керування та забезпечення відмовостійкості цифрової апаратури [84]. Так, в автоматичних врівноважуючих пристроях для обчислення керуючих впливів з метою підтримки осьової рівноваги роторів пропонується застосовувати біноміальні системи числення та біноміальну арифметику [85; 86]. Це значно підвищить вірогідність прийнятих рішень та надійність систем автоматичного керування відцентровими насосами та компресорами в енергетичних комплексах, гідро- та пневмоавтоматиці.

Слід зауважити, що на практиці реалізація моделей, методу та алгоритмів біноміального арифметичного складання вбачається ефективною на основі програмованих логічних інтегральних схем, які відрізняються великою кількістю програмованих логічних елементів, високою частотою синхронізації та відносно невеликою вартістю [87; 88].

4.3 Інформаційно-комунікаційна технологія стиснення з арифметичним складанням двійкових біноміальних чисел

Рівноважні коди мають широке розповсюдження в різноманітних інформаційно-комунікаційних технологіях таких, як стиснення і завадостійка передача даних, відображення графічної інформації, розпізнавання зображень, шифрування даних тощо [10; 44]. Рівноважні n-комбінації Y_j відрізняються від інших кодових комбінацій тим, що мають постійну кількість k двійкових одиниць або вагу, тобто це клас кодів-сполучень $Y_j\left[R_Y\right]$ з обмеженням $R_Y = k$. Ця властива рівноважним кодам особливість дозволяє з їх допомогою виявляти усі асиметричні помилки в кодових комбінаціях і з успіхом використовувати в асиметричних каналах зв'язку. Також постійне значення кількості k одиниць дає можливість досить легко визначити приналежність інформаційної послідовності до того чи іншого зображення, тобто вирішувати задачі розпізнавання зображень або інших об'єктів. Рівноважні комбінації можна застосувати для побудови ключів при шифруванні даних.

В структурі двійкових рівноважних кодів $Y_j \in Y[n,k]$, де $Y[n,k]$ – множина двійкових n-розрядних з постійним числом k двійкових одиниць, розміщуються двійкові (n,k)-біноміальні числа. Цей факт робить перехід від рівноважних комбінацій до біноміальних чисел і навпаки дуже простим шляхом відкидання зайвих двійкових нулів згідно системам кодоутворюючих обмежень (1.2.3) і (1.2.4) [45; 46]. Те, що довжина двійкових (n,k)-біноміальних чисел $r < n$ (властивість 1, підрозділ 1.2 (1.2.6)), надає можливість при використанні двійкових біноміальних чисел достатньо суттєво стискувати двійкову інформацію, дуже швидко проводячи цю операцію. В роботах [45; 46; 89] досить глибоко розглядаються методи стиснення рівноважних кодових комбінацій або інформаційних послідовностей загального виду на основі двійкових біноміальних чисел.

Розроблені в дисертаційній роботі моделі та метод арифметичного складання двійкових біноміальних чисел дозволяють підвищити в перспективі ефективність біноміального стиснення на їх основі з точки зору збільшення коефіцієнтів стиску. Для цього пропонується для стиснення і відновлення двійкових даних застосовувати не самі значення двійкових (n,k)-біноміальних чисел, а різницю між ними, також виражену двійковим біноміальним числом, але вже з меншими параметрами n' і k', або тільки n'. На початку стиснення рівноважні комбінації бажано ранкувати в порядку збільшення. Очевидно, це призведе до зменшення кількості результуючих розрядів при стисненні, а значить призведе до підвищення швидкості передачі інформації по каналу зв'язку або зменшенню вимог до обсягу пам'яті для зберігання стиснутих образів.

В таблиці 4.1 демонструється приклад традиційного стиснення двійкових рівноважних комбінацій на основі двійкових $(20,5)$-біноміальних чисел без застосування біноміального арифметичного складання [45; 46]. Згідно таблиці 4.1 спостерігається досить невеликий коефіцієнт стиснення $K_{cm} \approx 1{,}18$, який можна підвищити, якщо використати запропонований метод арифметичного складання двійкових $(20,5)$-біноміальних чисел і різницю між наведеними вихідними рівноважними кодовими комбінаціями $Y[20,5]$

В таблиці 4.2 демонструється вже приклад стиснення двійкових рівноважних комбінацій на основі двійкових $(20,5)$-біноміальних чисел зі застосуванням біноміального арифметичного складання, що розглянутий в дисертаційній роботі. Замість другого та третього біноміальних чисел в канал зв'язку будуть завантажуватися вже різниці відповідних біноміальних чисел від

Таблиця 4.1 – Стиснення рівноважних комбінацій на основі двійкових біноміальних без застосування операції складання

Ном.	Вихідні рівноважні комбінації $Y[20,5]$	Двійкові $(20,5)$-біноміальні числа
8199	00110000100010100000	001100001000101
8201	00110000100100000001	0011000010010000000
8204	00110000100100001000	00110000100100001
	Довжина вихідного масиву $L=3\times 20=60$ розрядів	Довжина стиснутого масиву $L_{cm}=15+19+17=51$ розрядів
	Коефіцієнт стиснення $K_{cm}=L/L_{cm}=60/51\approx 1{,}18$	

Таблиця 4.2 – Стиснення рівноважних комбінацій на основі двійкових біноміальних із застосуванням операції складання

Ном.	Вихідні рівноважні комбінації $Y[20,5]$	Двійкові $(20,5)$- та $(4,2)$-біноміальні числа
8199	00110000100010100000	001100001000101
8201	00110000100100000001	011
8204	00110000100100001000	100
	Довжина вихідного масиву $L=3\times 20=60$ розрядів	Довжина стиснутого масиву $L_{cm}=15+3+3=21$ розрядів
	Коефіцієнт стиснення $K_{cm}=L/L_{cm}=60/21\approx 2{,}86$	

першого біноміального числа 00110000100010100000. Ці різниці також представляються двійковими біноміальними числами, але вже з параметрами $n' = 4$ та $k' = 2$ і значною меншою кількістю двійкових розрядів. Як результат отримуємо вже для цього інформаційного масиву коефіцієнт стиснення $K_{cm} \approx 2,86$, тобто значно кращий. На приймальній стороні при відновленні вихідних двійкових комбінацій виконується перетворення $(4,2)$-біноміальних чисел до двійкових $(20,5)$-біноміальних чисел, а потім вже арифметичне складання різниць, виражених через $(20,5)$-біноміальні числа, з першим двійковим $(20,5)$-біноміальним числом для другого і третього біноміальних чисел, а вже на їх основі вихідних рівноважних комбінацій.

На рисунку 4.4 представлена структурна модель процесу відновлення рівноважних комбінацій на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел із застосуванням біноміального арифметичного складання.

Згідно структурної моделі (рисунок 4.4) процес відновлення рівноважних комбінацій на основі двійкових (n,k)-біноміальних чисел із застосуванням біноміального арифметичного складання відбувається наступним чином. З каналу зв'язку на блок комутації з пам’яттю поступає стиснутий інформаційний масив, на початку якого розміщується початкове (n,k)-біноміальне число, відповідне початковій рівноважній комбінації, за яким слідують коди різниці – (n',k')-біноміальні числа. Початкове (n,k)-біноміальне число тимчасово зберігається в пам'яті блоку комутації і надається на один з двох входів блоку біноміального арифметичного складання. При появі коду різниці блок комутації з пам’яттю за допомогою керуючого сигналу «Регістрація коду різниці» перемикається на блок перетворення двійкових біноміальних чисел, на вхід якого починають подаватися (n',k')-біноміальні числа. Виявлення кодів різниці здійснюється завдяки властивості префіксності біноміальних чисел [45; 46]. В блоці перетворення двійкових біноміальних чисел вони трансформуються в (n,k)-біноміальні числа і потім подаються на другий вхід

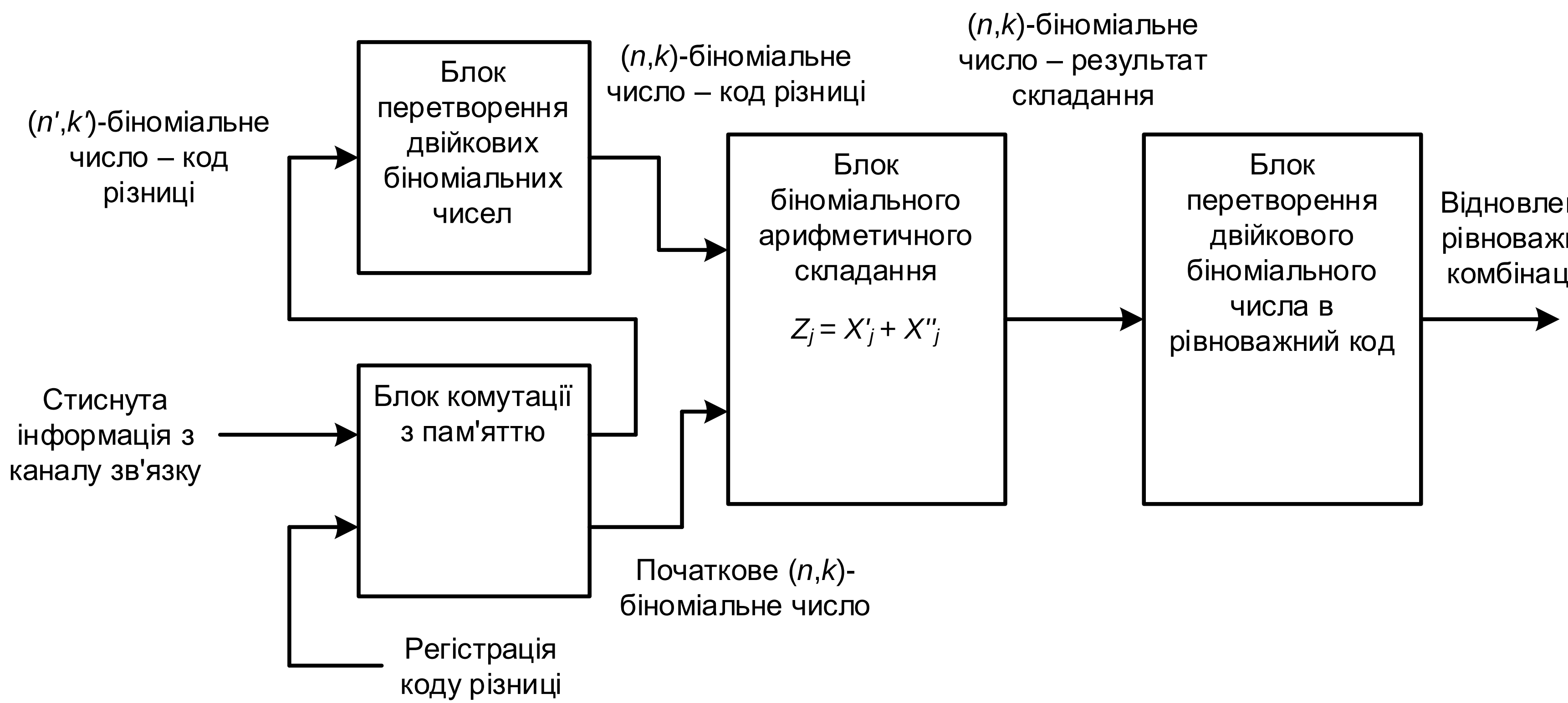


Рисунок 4.4 – Структурна модель процесу відновлення рівноважних комбінацій після стиснення двійковими біноміальними числами із застосуванням методу біноміального арифметичного складання

блоку біноміального арифметичного складання. Блок біноміального арифметичного складання проводить підсумовування початкового (n,k)-біноміального числа з кодами різниці для отриманні інших (n,k)-біноміальних чисел. Отримані (n,k)-біноміальні числа далі вже допомогою блока перетворення двійкового біноміального числа в рівноважний код відновлюються в вихідні рівноважні комбінації.

ВИСНОВОК

Особливу перспективу для створення нових інформаційно-комунікаційних технологій обробки даних і вирішення спеціалізованих завдань із:

- завадостійкої передачі по каналам зв'язку та стиснення даних;
- шифрування та захисту від несанкціонованого доступу;
- генерування комбінаторних об'єктів та комбінаторної оптимізації;
- забезпечення наскрізного контролю при обробці даних;
- провадження завадостійкої машинної арифметики;

мають двійкові біноміальні системи числення і породжувані ними двійкові біноміальні числа через властиві їм позитивні особливості:

- більша надмірність у порівнянні з іншими відомими неоднорідними системами числення;
- наявності вбудованих засобів самодіагностики та контролю помилок;
- здатність генерувати комбінаторні об'єкти, пов'язані з числами сполучень, що становлять основу поширених кодів-сполучень.

Але стримуючим фактором щодо поширення та використання двійкових біноміальних систем числення була відсутність на сьогоднішній день розроблених моделей та методів виконання арифметичних операцій над двійковими біноміальними числами, зокрема біноміального арифметичного складання.

Новим науковим результатом дисертації є розв'язання важливої і актуальної науково-прикладної задачі по зниженню часових витрат, необхідних для виконання арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, генерованих двійковими біноміальними системами числення, при обмеженнях на обсяг програмних та/або апаратних витрат.

В рамках головного нового наукового результату досягнуті наступні підпорядковані наукові результати.

1. Вперше отримана матрична модель двійкових біноміальних чисел, яка базується на матриці вагових коефіцієнтів і враховує функціональний зв'язок між

значеннями попередніх біноміальних розрядів і їх позиціями в розрядній сітці біноміальних чисел. Така будова матричної моделі двійкових біноміальних чисел дозволяє просто і в наявному вигляді формувати одиниці переносу з одного біноміального розряду в інший розряд.

2. Вперше отримана матрична модель біноміального арифметичного складання, на основі якої провадиться підсумовування двійкових біноміальних чисел. Розроблена модель дозволяє замінити операції з кількісними значеннями біноміальних коефіцієнтів на операції з їх верхніми та нижніми параметрами, тобто з координатами стовпців та рядків матриці біноміального арифметичного складання, що значно пришвидшує процес додавання біноміальних чисел.

3. Вперше отриманий метод арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, який на основі перетворень переносу, зсуву, симетрії та розкладання над комірками матриці біноміального складання, провадить підсумовування двійкових біноміальних чисел, оперуючи координатами комірок матриці складання замість оперування зі значеннями біноміальних коефіцієнтів. Це потребує значно менших обсягів часових та програмно-апаратних витрат для отримання результату складання порівняно з іншими існуючими методами.

4. Удосконалені методи оцінки обсягів часових та програмно-апаратних витрат арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, які дозволяють визначити граничні максимальні значення витрат при практичній реалізації і проводити порівняння з цього погляду з іншими існуючими підходами для отримання результату додавання біноміальних чисел.

5. Удосконалені моделі оброблення кодів-сполучень, за якими представляються сигнали в інформаційно-комунікаційних технологіях, на основі операцій додавання або добутку із застосуванням арифметичного складання відповідних їм двійкових біноміальних чисел. Це розширює можливості інформаційно-комунікаційних технологій щодо якісної та швидкодіючої обробки сигналів, кодованих кодами-сполучень.

6. Удосконалені моделі генерування кодів-сполучень, до яких відносяться поширені рівноважні або квазірівноважні коди, на основі арифметичної операції

складання двійкових біноміальних чисел, які дозволяють пришвидшити процес генерування кодів-сполучень та підвищити функціональну гнучкість інформаційних систем генерації.

7. Удосконалена інформаційно-комунікаційна технологія стиснення рівноважних кодів із застосуванням арифметичного складання двійкових біноміальних чисел, яка дозволяє суттєво підвищити коефіцієнт стиснення інформаційних масивів, складених з рівноважних кодів, і, як наслідок, збільшити швидкість передачі даних по каналам зв'язку.

8. Отримали подальший розвиток теорія біноміальних систем числення і позиційної біноміальної лічби, що обумовлює більше поширене застосування двійкових біноміальних систем числення та генерованих ними біноміальних чисел при розробці нових інформаційно-комунікаційних технологій обробки даних.

Практичне значення отриманих результатів визначається наступним.

1. Розроблений алгоритм арифметичного складання двійкових біноміальних чисел на основі їх матричного представлення та матриці складання, який дозволяє у асимптотичному виразенні за кубічний час $O\left(n^3\right)$ визначити результат біноміальної суми, де n – параметр біноміальної системи числення, що обмежує розрядність вихідних біноміальних чисел. Це значно менше факторіального часу $O(n!)$, який потребується у разі застосування традиційного способу знаходження результату біноміального складання із використанням проміжних ступеневих систем числення.

2. Розроблений алгоритм арифметичного складання двійкових біноміальних чисел із застосуванням динамічних масивів, який дозволяє у асимптотичному виразенні вже за квадратичний час $O\left(n^2\right)$ визначити результат біноміальної суми. Це менше кубічного часу $O\left(n^3\right)$ у порівнянні з алгоритмом на основі матричної моделі біноміального складання й значно менше факторіального часу $O(n!)$, який потребується у разі застосування традиційного

способу знаходження результату із використанням проміжних ступеневих систем числення. Хоча алгоритм біноміального складання, що застосовує динамічний масив, відрізняється від попереднього алгоритму на основі матричних моделей значно меншим часом функціонування, але в процесі додавання не надає додаткових можливостей по контролю правильності провадження операції.

3. Синтезована структурна модель спеціалізованого пристрою арифметичного складання на основі матричних моделей двійкових біноміальних чисел, в якому основний обсяг апаратних витрат покладається на застосування оперативної пам'яті для збереження матриці біноміального додавання розмірності $(n-k)\times(k+1)$ комірок.

4. Розроблені принципи побудови інформаційно-комунікаційної технології обробки кодів-сполучень, які представляють сигнали даних, з погляду їх підсумовування або перемноження.

5. Розроблені принципи побудови інформаційно-комунікаційної технології генерування кодів-сполучень із застосуванням біноміального арифметичного складання.

6. Розроблені принципи побудови інформаційно-комунікаційної технології стиснення рівноважних кодів з арифметичним складанням двійкових біноміальних чисел.

Розроблені в дисертаційній роботі метод біноміального арифметичного складання, моделі процесів та алгоритми, що його реалізують, доведені до рівня, який дозволяю процес патентозаявлення.

Таким чином, з огляду на отримані у дисертаційній роботі науково-практичні результати можна зробити висновок, що сформульована мета наукової роботи – зменшення часу знаходження результату біноміального арифметичного складання двійкових біноміальних чисел при обмеженнях на обсяг програмних та/або апаратних витрат для прискорення обчислювальної обробки біноміальної числової інформації є досягнутою, а визначені наукові-прикладні задачі, необхідні для досягнення мети дисертаційної роботи, виконані.

Отриманий науково-практичні результаті надають нові можливості в розробці сучасних інформаційно-комунікаційних технологій по обробці даних: генерування комбінаторних об'єктів, комбінаторної оптимізації, забезпечення завадостійкості проведення арифметичних операцій та реалізація надійного керування, а також побудові спеціалізованих біноміальних інформаційно-комунікаційних технологій з покращеними характеристиками з погляду їх швидкодії.

Перспективними напрямами розвитку даного наукового напряму є застосування розроблених моделей та методу арифметичного складання двійкових біноміальних чисел для створення нових інформаційно-комунікаційних технологій по обробці та перетворенню даних таких, як стиснення двійкової інформації, генерування комбінаторних об'єктів, розв'язання завдань комбінаторної оптимізації, впровадження завадостійкої біноміальної арифметики, забезпечення наскрізного контролю при перетворенні інформації, обробка кодованих сигналів тощо, а також подальша розробка моделей і методів віднімання, множення та ділення двійкових біноміальних чисел.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Поспелов Д. А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. Учеб. пособие для втузов. М. : «Высш. школа», 1970. 308 с.

[2] Knuth D. The Art of Computer Programming. Volume 2 : Seminumerical Algorithms. 3rd Ed., Addison-Wesley, 2014. 764 p.

[3] Georges Ifrah. The Universal History of Numbers : From Prehistory to the Invention of the Computer, Wiley, 1999. 656 p.

[4] Борисенко О. А. Дискретна математика : Підручник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2007. 255 с.

[5] Butler T. Jon, Sasao Tsutomu. Redundant Multiple-Valued Number Systems : Report. Defense Technical Information center, Naval Postgraduate School Monterey CA Dept of Electrical and Computer engineering, 1997. 10 p. URL:https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA599946.pdf. (дата обращения: 12.07.2023).

[6] Борисенко А. А. О некоторых обобщенных классификационных признаках позиционных систем счисления // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 1999. № 1 (12). С. 76–78.

[7] Борисенко О. А. Число і системи числення в електронних цифрових системах // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 2007. № 4. С. 71–76.

[8] Dauben Joseph. Georg Cantor and the Battle for Transfinite Set Theory // Proceedings of the 9th ACMS Conference (Westmont College, Santa Barbara, Calif.), 2004 [1993]. P. 1–22.

[9] Cover M. Thomas. Enumerative Source Coding // IEEE Transactions on Information Theory. 1973. Vol. IT-19, No. 1. P. 73–77.

[10] Амелькин В. А. Методы нумерационного кодирования. Новосибирск : Наука, 1986. 155 с.

[11] Борисенко А. А., Чередниченко В. Б. Системы счисления в вычислительной технике // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 2009. № 4. С. 162–177.

[12] Kaye Richard. Models of Peano Arithmetic. Clarendon Pres, 1991. 304 p.

[13] Смолин Ю. Н. Числовые системы : учеб. пособие. М. : Флинта: Наука, 2009. 112 с.

[14] Феферман С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа. М. : Наука, 1971. 440 с.

[15] Arndt, Jörg. Matters Computational: Ideas, Algorithms, Source Code. 2010. pp. 232–238.

[16] Горячев А.Е. Преобразование двоичных и факториальных чисел с помощью счётных устройств // Автоматизовані системи управління і прилади автоматики. Всеукраїнський науково-технічний міжвідомчий збірник. 2009. № 148. С. 14-19.

[17] Knuth, Donald Ervin. The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 2: Generating All Tuples and Permutations (Art of Computer Programming). 1st Ed., Addison-Wesley Professional, 2005. 127 p.

[18] Borysenko A. A., Kalashnikov V. V., Kulyk I. A., Goryachev A. E. Generation of Permutations Based Upon Factorial Numbers. Eighth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications. Kaohiung, Taiwan, 2008. P. 57–61.

[19] Борисенко О. А., Кулик І. А., Горячев О. Є. Електронна система генерації на базі факторіальних чисел // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 2007. № 1. С. 183–188.

[20] Борисенко А. А., Горячев А. Е. Подход к решению задачи коммивояжера на основе факториальных чисел // Актуальні проблеми економіки. 2009. № 10 (100). С. 150–154.

[21] Борисенко А. А., Горячев А. Е., Сердюк В. В., Ермаков М. С. Факториальные числа в задачах защиты информации // Безпека інформації. 2018. Т. 24, № 3. С. 169-174.

[22] Фауре Э. В. Факториальное кодирование с исправлением ошибок // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2017. № 3. С. 130–138.

[23] Фауре Э. В. Факториальное кодирование с несколькими контрольными суммами // Вісник Житомирського державного технічного університету. Серія «Технічні науки». 2016. № 3 (78). С. 104–113.

[24] Mezmaz M., Leroy R., Melab N. and Tuyttens D. A Multi-core Parallel Branch-and-Bound Algorithm Using Factorial Number System // 2014 IEEE 28th International Parallel and Distributed Processing Symposium. Phoenix, AZ, USA, 2014. P. 1203-1212.

[25] Богатырев В. А. О модификации функции «перманент матрицы» и ее применении в комбинаторных методах анализа надежности вычислительных систем // Информационные технологии. 2002. № 1. С. 5–11.

[26] Богатырев В. А. Надежность вычислительных систем с функциональной реконфигурацией на основе перераспределения задач // Информационные технологии. 2001. № 7. С. 22–27.

[27] Monteiro P., Newcomb R. Minimal and maximal Fibonacci Representations: Boolean Generation // The Fibonacci Quarterly. 1976. Vol. 14, № 1. P. 613–638.

[28] Stakhov A. A History, the Main Mathematical Results and Applications for the Mathematics of Harmony // Applied Mathematics. 2014. Vol. 5, No. 3. P. 363-386.

[29] Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section : Theory and Applications. Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1989. 189 p.

[30] Zeckendorf E. Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas (фр.) // Bull. Soc. R. Sci. Liège. 1972. T. 41. P. 179–182.

[31] Stakhov A. Fibonacci p-codes and Codes of the «Golden» p proportions / A. Stakhov // New Informational and Arithmetical Foundations of Computer Science and Digital Metrology for Mission-Critical Applications. British Journal of Mathematics & Computer Science. – 2016. – Vol. 17. – No. 1. – P. 1–49.

[32] Esmaeili M., Moosavi M, Gulliver T.A. A new class of Fibonacci sequence based error correcting codes // Cryptogr. Commun. 2017. № 9. P. 379–396.

[33] Stakhov A. The ‘Golden’ Matrices and a New Kind of Cryptography // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. Vol. 32, No. 3. P. 1138-1146.

[34] Cui X., Ni Y., Miao M., Yu J. An Enhancement of Crosstalk Avoidance Code Based on Fibonacci Numeral System for Through Silicon VIAS // IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems. 2017. Vol. 25, No. 5. P. 1601–161.

[35] Полікаровських О. І. Прямі цифрові синтезатори частоти на основі кодів Фібоначчі // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. 2014. № 3. Р. 35–38.

[36] Борисенко О. А., Бережна О. В., Маценко С. М., Сердюк В. В., Горішняк А. О., Васильєв В. Р. Нероздільні коди в системах обробки інформації // Системи управління, навігації та зв'язку. 2021. Вип. 2 (64). С. 58-62.

[37] Stankovic´ S. Radomir, Astola Jaakko, Stankovic´ Milena, Egiazarian Karen Circuit Synthesis from Fibonacci Decision Diagrams // VLSI Design. 2002. Vol. 14 (1). P. 23–34.

[38] Stakhov A. P. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic // The Computer Journal: Oxford University Press. 2002. P. 221–236.

[39] Лужецький В. А., Лега Ю. Г. Арифметичні основи комп`ютерної техніки : посібник. Черкаси : ЧДТУ, 2007. 203 с.

[40] Pieter J., Schalkwijk M. An Algorithm for Source Coding // IEEE Transactions on Information Theory. 1972. Vol. IT-18, No. 3. P. 395–399.

[41] Borysenko O., Matsenko S., Bobrovs V. Binomial Number System // Applied Sciences. 2021. № 11(23):11110. P. 1–11.

[42] Borisenko A. A. Kalashnikov V. V., Kalashnikova N. I., Gutenko D. V. Description and Applications of Binomial Numeral Systems // International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 2014. № 1. P. 57–66.

[43] Борисенко А. А. Биномиальный счет. Теория и практика : монография. Сумы: ИТД «Университетская книга», 2004. 170 с.

[44] Борисенко А. А., Кулик И. А. Биномиальное кодирование : монография. Сумы: Изд-во СумГУ, 2010. 206 с.

[45] Kulyk I., Shevchenko M., Berezhna O. Development of Data Compressing Coding Methods on Basis of Binary Binomial Numbers // Technology Audit and Production Reserves, 2019. № 2/2 (46). P. 12–18.

[46] Kulyk I., Shevchenko M., Berezhna O., Novhorodtsev A. Development of Binary Information Compression Methods Based on the Binomial Numerical Function // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2021. Vol. 3, No. 4 (111). P. 6–13.

[47] Кулик И. А., Чередниченко В. Б., Костель С. В. Алгоритм генерирования двоичных биномиальных чисел на основе минимальных систем кодообразующих ограничений // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 2008. № 2. С. 45–52.

[48] Шевченко М. С., Кулик І. А. Розробка інформаційно-керуючих систем на основі двійкової біноміальної системи числення // Системи обробки інформації : збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, 2020. Вип. 2 (161). С. 78–85.

[49] Борисенко А. А., Кулик И. А., Гриненко В. В. Моделирование систем передачи данных с мажоритарным принципом кодирования на основе биномиальных кодов // Автоматизовані системи управління і прилади автоматики. Всеукраїнський науково-технічний міжвідомчий збірник. 2004. № 128. С. 9-15.

[50] Кулик И. А., Скордина Е. М., Костель С. В. Генерирование кодов-сочетаний для решения информационных задач ИУС // Автоматизовані системи управління і прилади автоматики. Всеукраїнський науково-технічний міжвідомчий збірник. 2011. № 155. С. 15–23.

[51] Кулик И. А., Новгородцев А. И., Скордина Е. М., Арбузов В. В.. Обобщенные вероятности необнаруживаемой ошибки для

квазиравновесных кодов // Системи обробки інформації : збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, 2014. Вип. 9 (125). С. 43–49.

[52] Кулик И. А., Скордина Е. М., Костель С. В. Формирование квазиравновесных кодов на основе двоичных биномиальных чисел // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 2010. № 1. С. 134–142.

[53] Горячев А. Е. Преобразование двоичных и факториальных чисел с помощью счетных устройств // Автоматизовані системи управління і прилади автоматики. Всеукраїнський науково-технічний міжвідомчий збірник. 2009. № 148. С. 14–19.

[54] Горячев А. Е. Построение факториальных чисел на основе двоичных счётчиков // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 2008. № 4. С. 16–23.

[55] Ligomenides P., Newcomb R. Equivalence of some Binary, Ternary, and Quaternary Fibonacci Computers // Proceedings of the Eleventh International Symposium on Multiple-Valued Logic. University of Oklahoma, Norman, May 1981. P. 82–84.

[56] Борисенко А. А., Стахов А. П., Маценко С. М., Сиряченко В. В. Об одном способе построения счетчиков Фибоначчи // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 2012. №. 3. С. 165–170.

[57] Азаров О. Д. Черняк О. І., Муращенко О.Г. Метод побудови швидкодіючих фібоначчієвих лічильників // Проблеми інформатизації та управління. 2014. Вип. 2 (46). С. 5–8.

[58] Борисенко А. А., Маценко С. М., Гриненко В. В., Бережная О. В., Дегтяр С. А. Оценка быстродействия помехоустойчивого счетчика Фибоначчи в минимальных кодах // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». 2015. № 14 (1123). С. 3–8.

[59] Borysenko O., Matsenko S., Kulyk I., Berezhna O., Matsenko O. Optimal Synthesis of Digital Counters in the Fibonacci Codes with the Minimal Form of

Representation // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2016. No. 4/4 (82). P. 4–10.

[60] Борисенко А. А. Биномиальный счет и счетчики: монография. Сумы: Изд-во СумГУ, 2008. 152 с.

[61] Шевченко М. С., Кулик І. А. Матрична модель складання двійкових біноміальних чисел // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. 2021. Вип. 1 (164). С. 45–54.

[62] Шевченко М. С., Кулик І. А., Гриненко В. В. Алгоритм складання двійкових біноміальних чисел // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. 2022. № 2 (169). С. 49–57.

[63] Шевченко М. С., Кулик І. А. Деякі принципи складання двійкових біноміальних чисел // Матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання». Івано-Франківськ, Голіней О.М., 2021. С. 62–63.

[64] Shevchenko Maryna, Kulyk Igor, Abramyan Anton. Systems of code-forming constraints for uniform binary binomial numbers // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023». Суми, Сумський державний університет. 2023. С. 89.

[65] Knuth D. The Art of Computer Programming. Volume 1 : Fundamental Algorithms. 3rd Ed., Addison-Wesley, 2013. 652 p.

[66] Anderson Ja. A. Discrete mathematics with combinatorics. Prentice-Hall, Inc., 2001. 960 p.

[67] Шевченко М. С., Кулик І. А., Скачедуб С. Л. Матрична модель підсумовування двійкових біноміальних чисел // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2021». Суми, Сумський державний університет. 2021. С. 88.

[68] Шевченко М. С., Косов О. О. Критерії завершення складання двійкових біноміальних чисел // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023». Суми, Сумський державний університет. 2023. С. 83.

[69] Кулик И. А. К вопросу о сложении биномиальных чисел // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 2012. № 3. С. 101–109.

[70] Шевченко М. С., Кулик І. А., Супрун М. М., Гура Є. Ю. Особливості складання двійкових біноміальних чисел // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2022». Суми, Сумський державний університет. 2022. С. 68.

[71] Cormen H. Thomas, Leiserson E. Charles, Rivest L. Ronald, Stein Clifford Introduction to Algorithms. The MIT Press. Fourth Edition. 2022. 1312 p.

[72] Ахо А., Хопкрофт Д., Д. Ульман. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М : Мир, 1979. 535 с.

[73] Kreher D., Stinson D. Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration and Search. CRC Press, 1999. 329 p.

[74] Борисенко А. А. Введение в теорию биномиального счета : монография. Сумы : ИТД «Университетская книга», 2004. 88 с.

[75] Шевченко М. С., Жижа В. В. Адаптивний лічильник на основі біноміальних кодів зі змінною кількістю одиниць // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2021». Суми, Сумський державний університет. 2021. С. 87.

[76] Шевченко М. С., Скордина Е. М., Кулик И. А. Модифицированные способы подсчета двоичных единиц // Матеріали Міжнародної наук.-практ. конференції «Інформаційна безпека та інформаційні технології». Х. : ХНЕУ імені Семена Кузнеця. 2019. С. 32.

[77] Shevchenko Maryna, Kulyk Igor, Grekov Taras. Building an adaptive system for counting the number of binary units // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023». Суми, Сумський державний університет. 2023. С. 84.

[78] Sipser Michael. Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning. 3rd edition, 2012. 504 p.

[79] Sanjeev Arora, Boaz Barak. Computational Complexity: A Modern Approach. Cambridge University Press, 2009. 594 p.

[80] Кулик И. А., Скордина Е. М. Метод вычисления биномиальных коэффициентов на основе канонического разложения чисел // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 2008. № 1. С. 158–165.

[81] Кулик И. А., Арбузов В. В., Бережная О. В. К вычислению числа сочетаний // Вісник Сумського державного університету. Серія «Технічні науки». 1995. № 3. С. 67–70.

[82] Клепко В., Голец В. Вища математика в прикладах і задачах Центр навч. літерат., 2019. 594 с.

[83] Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 384 с.

[84] Шевченко М. С., Кулик І.А., Адамов Р.А. Побудова спеціалізованих біноміальних процесорів // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2020». Суми, Сумський державний університет. 2020. С. 113.

[85] Шевченко С. С., Шевченко М. С. Методика расчета параметров контактных уплотнений с системами автоматического регулирования // Електронне моделювання. 2020. № 42(3). С. 99–109.

[86] Шевченко С. С., Шевченко М. С. Математическое моделирование уплотнений роторов центробежных машин как динамических систем // Вісник Національного технічного університету «Харківський

політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Серія: Інформатика та моделювання. Харків : НТУ «ХПІ». 2020. № 2 (4). С. 15–32.

[87] Заиналабедин Наваби. Проектирование встраиваемых систем на ПЛИС. ДМК-Пресс, 2016. 464 с.

[88] Іванець С. А., Зубань Ю. О., Казимир В. В., Литвинов В. В. Проектування комп'ютерних систем на основі мікросхем програмованої логіки : монографія. Суми : Сумський державний університет, 2013. 313 с.

[89] Кулик И. А., Шевченко М. С., Новгородцев А. И. Метод оценки границ применения сжатия на основе двоичных биномиальных чисел // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. 2019. № 2 (157). С. 57–62.

ДОДАТОК А

Двійкові нерівномірні $(7,4)$-біноміальні числа

Таблиця А.1

Ном.	Біноміальні числа						Ном.	Біноміальні числа					
0	0	0	0				22	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0			23	1	0	1	1	0	1
2	0	0	1	1	0		24	1	0	1	1	1	
3	0	0	1	1	1	0	25	1	1	0	0	0	
4	0	0	1	1	1	1	26	1	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0			27	1	1	0	0	1	1
6	0	1	0	1	0		28	1	1	0	1	0	0
7	0	1	0	1	1	0	29	1	1	0	1	0	1
8	0	1	0	1	1	1	30	1	1	0	1	1	
9	0	1	1	0	0		31	1	1	1	0	0	0
10	0	1	1	0	1	0	32	1	1	1	0	0	1
11	0	1	1	0	1	1	33	1	1	1	0	1	
12	0	1	1	1	0	0	34	1	1	1	1		
13	0	1	1	1	0	1							
14	0	1	1	1	1								
15	1	0	0	0									
16	1	0	0	1	0								
17	1	0	0	1	1	0							
18	1	0	0	1	1	1							
19	1	0	1	0	0								
20	1	0	1	0	1	0							
21	1	0	1	0	1	1							

ДОДАТОК Б

Двійкові нерівномірні і рівномірні $(7,3)$-біноміальні числа

Таблиця Б.1

Ном.	Нерівномірні біноміальні числа						Рівномірні біноміальні числа					
0	0	0	0	0			0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0		0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
4	0	0	1	0	0		0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
6	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
7	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
8	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
9	0	0	1	1	1		0	0	1	1	1	0
10	0	1	0	0	0		0	1	0	0	0	0
11	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
12	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
13	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
14	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
15	0	1	0	1	1		0	1	0	1	1	0
16	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
17	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
18	0	1	1	0	1		0	1	1	0	1	0
19	0	1	1	1			0	1	1	1	0	0
20	1	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0
21	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0

Продовження таблиці Б.1

Ном.	Нерівномірні біноміальні числа						Рівномірні біноміальні числа*					
22	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
23	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
24	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
25	1	0	0	1	1		1	0	0	1	1	0
26	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
27	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
28	1	0	1	0	1		1	0	1	0	1	0
29	1	0	1	1			1	0	1	1	0	0
30	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
31	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
32	1	1	0	0	1		1	1	0	0	1	0
33	1	1	0	1			1	1	0	1	0	0
34	1	1	1				1	1	1	0	0	0

* – сірі комірки представляють собою серії нулів, що доповнюють

ДОДАТОК В

Графічні залежності обсягу часових витрат при виконанні біноміального арифметичного складання

1. Таблиця В.1 і графік (рисунок В.1) залежності $\tau_{мсл\max} = f(k)$ для алгоритму на основі матриці біноміального додавання при заданому $n = 24$, значення k змінюється від 1 до 23 (мт – машинний такт).

Таблиця В.1

k	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$\tau_{мсл\max}$, мт	118	882	2190	3850	5670	7458	9022	10170	10710	10450	9198	6762

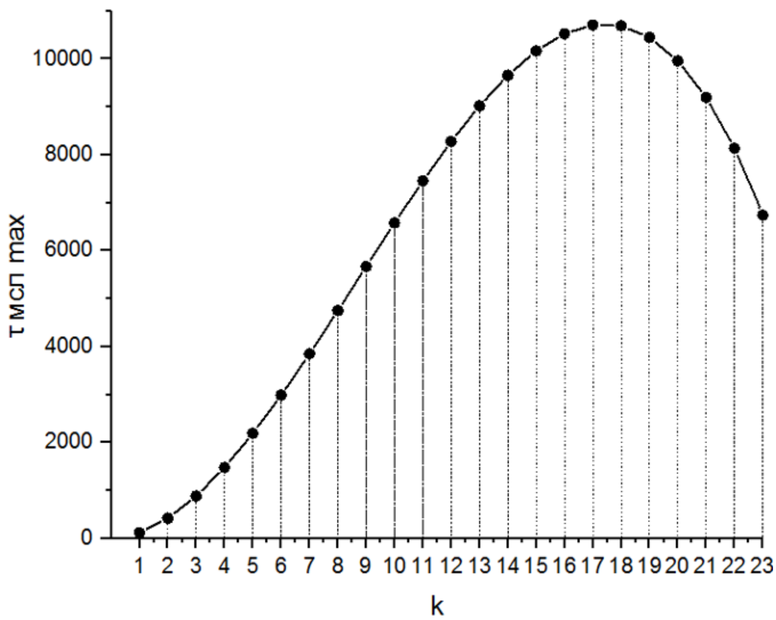


Рисунок В.1

2. Таблиця В.2 і графік (рисунок В.2) залежності $T_{м\max} = f(n)$ для алгоритму на основі матриці біноміального додавання, значення n змінюється від 4 до 40.

Таблиця В.2

n	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
$T_{м\max}$, мт	100	456	1260	2704	4980	8280	12796	18720	26244	35560

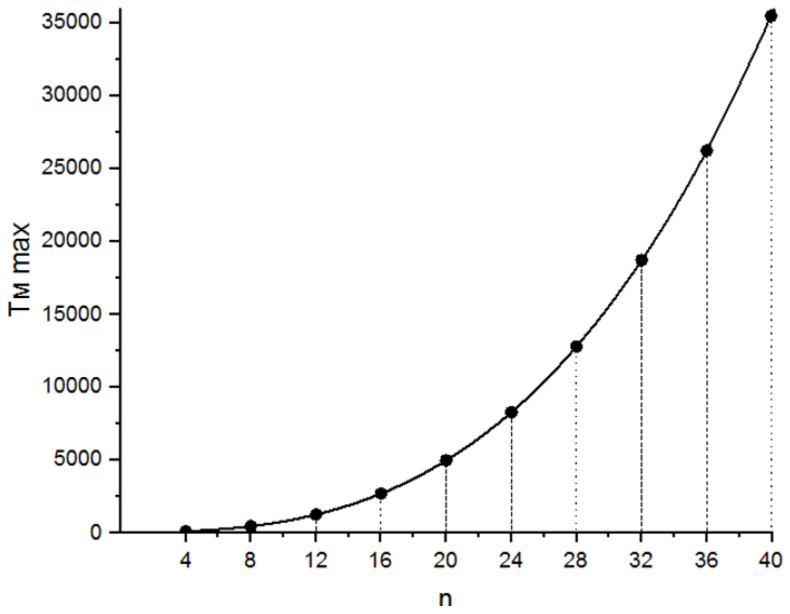


Рисунок В.2

3. Таблиця В.3 і графік залежності $\tau_{\partial сл\max} = f(k)$ (рисунок В.3), значення k змінюється від 1 до 23.

Таблиця В.3

k	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$\tau_{\partial сл\max}$, мт	36	180	420	756	1188	1716	2340	3060	3876	4788	5796	6900

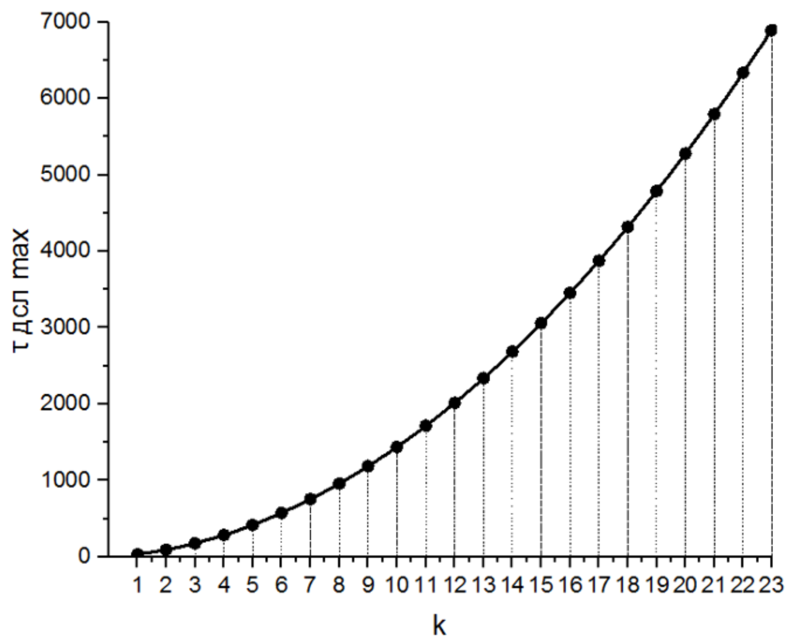


Рисунок В.3

4. Таблиця В.4 і графік залежності $T_{\partial\max} = f(n)$ (рисунок В.4), значення n змінюється від 4 до 40.

Таблиця В.4

n	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
$T_{\partial \max}$, мт	108	312	612	1008	1500	2088	2772	3552	4428	5400

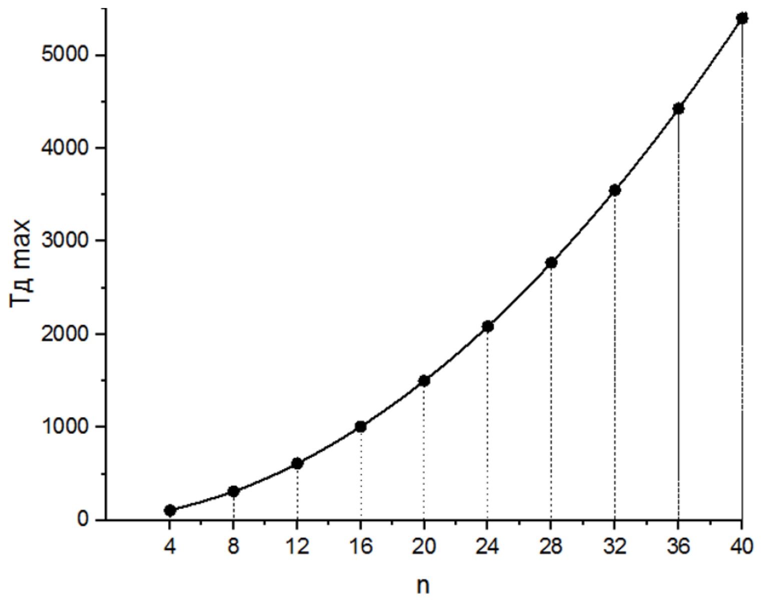


Рисунок В.4

5. Графічні залежності $T_{м \max} = f(n)$ (чорний колір) і $T_{\partial \max} = f(n)$ (червоний колір) (рисунок В.5), значення n змінюється від 4 до 40.

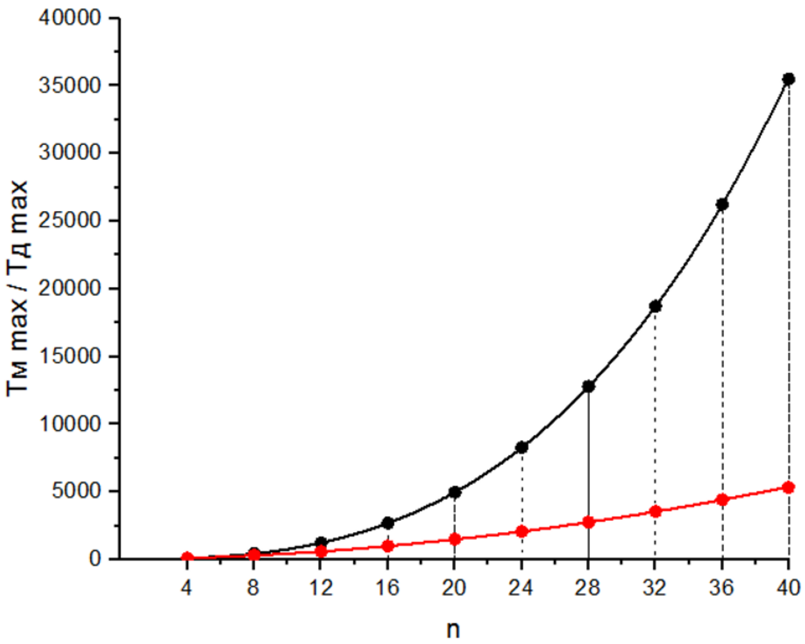


Рисунок В.5

ДОДАТОК Г

Графічні залежності обсягу програмно-апаратних витрат при виконанні біноміального арифметичного складання

1. Таблиця Г.1 і графік залежності $Q'_{м\max} = f(n)$ (рисунок Г.1) при заданому $p_м = 3$, значення n змінюється від 4 до 40.

Таблиця Г.1

n	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
$Q'_{м\max}$, біт	18	58	120	206	315	448	605	786	991	1219

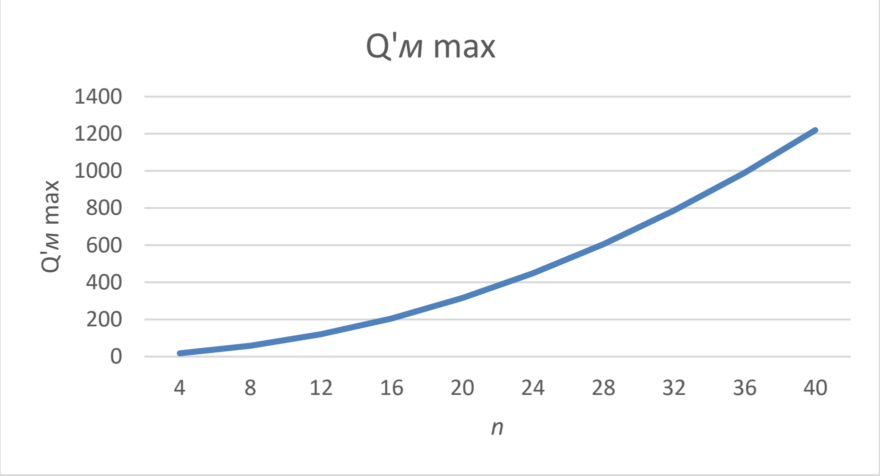


Рисунок Г.1

2. Таблиця Г.2 і графік залежності $Q'_{\partial\max} = f(n)$ (рисунок Г.2) при заданому $c_{сл} = 3$, значення n змінюється від 4 до 40.

Таблиця Г.2

n	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
$Q'_{м\max}$, біт	30	109	205	313	430	554	684	819	958	1101

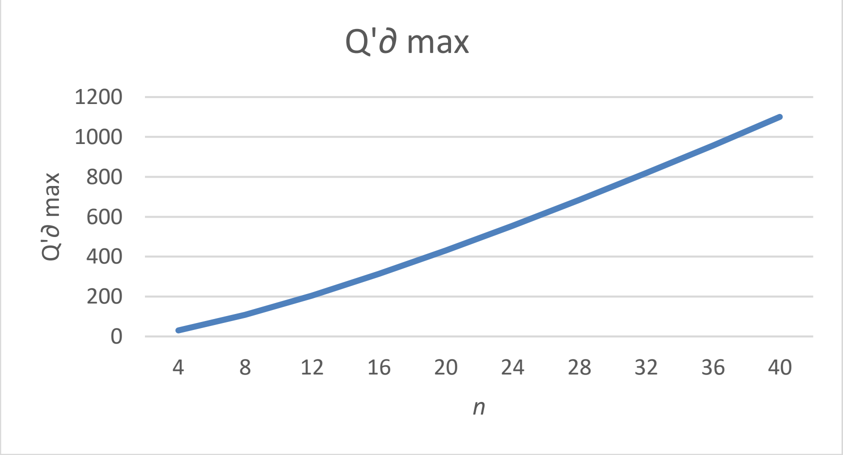


Рисунок Г.2

ДОДАТОК Д
АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ | ЕНЕРГОСЕРВІСНЕ ПІДПРИЄМСТВО

ТОВ «ЕСП «Преобразователь», УКРАЇНА, 40021, м. Суми, вул. Герасима Кондратьєва, будинок 127/2, офіс 5, код ЄДРПОУ 35068324, р/р UA103138490000026009010002702 в АКБ «Індустріалбанк» м. Суми МФО 313849, телефон\факс: +38(0542) 61-71-70 www.preobrazovatel.com.ua e-mail: preobrazovatel@gmail.com

№ 23/06-07 від 07.06.2023
«Акт впровадження»

АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ

наукових результатів дисертаційної роботи «Моделі та метод арифметичного складання двійкових біноміальних чисел в інформаційно-комунікаційних технологіях»
Шевченко Марини Сергіївни, виконаної на здобуття наукового ступеня доктора філософії зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Основні положення дисертаційної роботи аспірантки Сумського державного університету Шевченко М. С., а саме:

– моделі та метод арифметичного складання двійкових біноміальних чисел;
– алгоритми біноміального арифметичного складання на основі матричних моделей та динамічних масивів,

були застосовані в програмно-алгоритмічному забезпеченні розподілених автоматизованих систем керування технологічними процесами при транспортуванні та розподілу електричної енергії з метою стиснення та шифрування даних в інфокомунікаційних мережах, які забезпечують ефективний обмін інформацією між верхнім та нижнім рівнями системи із застосуванням різних технологій передачі даних.

Впровадження результатів дисертаційного дослідження дозволило в залежності від типу даних підвищити в середньому на 12% швидкість передачі інформації в інформаційно-вимірювальних каналах автоматизованих систем, а також додатково забезпечило підвищення ступеню захисту даних від несанкціонованого доступу при їх передачі за допомогою інфокомунікаційних мереж.

Директор ТОВ «ЕСП «Преобразователь» В. В. Арбузов

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ ЕНЕРГОСЕРВІСНЕ ПІДПРИЄМСТВО «ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ» код 35068324 УКРАЇНА м. СУМИ

АКТ

впровадження результатів дисертаційної роботи «Моделі та метод арифметичного складання двійкових біноміальних чисел в інформаційно-комунікаційних технологіях» Шевченко Марини Сергіївни, яка подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Результати дисертаційної роботи аспірантки Шевченко М. С., використовуються у науково-виробничій діяльності відділу № 8 "Моделювання енергетичних процесів і систем" Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України.

Метод і алгоритми арифметичного складання двійкових біноміальних чисел та інформаційно-комунікаційні технології стиснення та захисту даних на їх основі, які запропоновані і досліджені в дисертації Шевченко М. С., використовуються в процесі виконання науково-дослідних робіт при дослідженні енергетичних процесів в силових енергетичних установках.

Зав. відділу
моделювання енергетичних процесів і систем
ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України,
д. т. н., проф. С.Д. Винничук

Підпис Винничука С.Д.
Засвідчую інж. Ткач
Начальник відділу кадрів ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова
Національної Академії наук України

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕНЕРГЕТИЦІ ім. Г.Є.Пухова • м.Київ •
ВІДДІЛ КАДРІВ
Ідентифікаційний код 05416949

ДОДАТОК Е
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Статті у фахових наукових виданнях із переліку МОН України:

1. Kulyk I., Shevchenko M., Berezhna O. Development of Data Compressing Coding Methods on Basis of Binary Binomial Numbers // Technology Audit and Production Reserves, 2019. № 2/2 (46). P. 12–18. https://doi.org/10.15587/2312-8372.2019.169897. (*Особистий внесок: перевірка алгоритмів формування біноміальних чисел та обґрунтування їх ефективності в інформаційних технологіях*).

2. Кулик И. А., Шевченко М. С., Новгородцев А. И. Метод оценки границ применения сжатия на основе двоичных биномиальных чисел // Системи обробки інформації. – 2019. – № 2(157). – С. 57-62. https://doi.org/ 10.30748/soi.2019.157.07. (*Особистий внесок: обґрунтування ефективності застосування двійкових біноміальних чисел та операцій над ними в інформаційних технологіях*).

3. Шевченко М. С., Кулик І. А. Розробка інформаційно-керуючих систем на основі двійкової біноміальної системи числення // Системи обробки інформації : збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, 2020. Вип. 2 (161). С. 78–85. https://doi.org/10.30748/ soi.2020.161.09. (*Особистий внесок: розробка практичних аспектів застосування біноміальної машинної арифметики*).

4. Шевченко М. С., Кулик І. А. Матрична модель складання двійкових біноміальних чисел // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. 2021. Вип. 1 (164). С. 45–54. https://doi.org/10.30748/soi.2021.164.05. (*Особистий внесок: удосконалення моделі генерування кодів-сполучень, математичний опис*

біноміального арифметичного складання, розробка матричної моделі біноміального арифметичного складання).

5. Кулик І. А., Шевченко М. С., Гриненко В. В. Алгоритм складання двійкових біноміальних чисел // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. Х. : Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. 2022. № 2 (169). С. 49–57. https://doi.org/10.30748/soi.2022.169.06. (*Особистий внесок: обґрунтування перетворень біноміальних коефіцієнтів та розробка алгоритмів арифметичного складання біноміальних чисел, оцінювання витрат для проведення операцій*).

Статті у наукових періодичних виданнях інших держав та виданнях, які індексуються наукометричними базами даних Scopus та Web of Science:

6. Kulyk I., Shevchenko M., Berezhna O., Novhorodtsev A. Development of Binary Information Compression Methods Based on the Binomial Numerical Function // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Mathematics and Cybernetics – applied aspects. 2021. Vol. 3, No. 4 (111). P. 6–13. (Scopus) https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.234492. (*Особистий внесок: обґрунтування ефективності застосування двійкових біноміальних чисел в інформаційних технологіях*).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Кулик И. А., Шевченко М. С., Скордина Е. М. Модифицированные способы подсчета двоичных единиц // Матеріали Міжнародної наук.-практ. конференції «Інформаційна безпека та інформаційні технології». Х. : ХНЕУ імені Семена Кузнеця. 2019. С. 32. (*Особистий внесок: адаптація алгоритмів підрахунку двійкових одиниць для біноміального арифметичного складання*).

8. Шевченко М. С., Кулик І.А., Адамов Р.А. Побудова спеціалізованих біноміальних процесорів // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2020».

Суми, Сумський державний університет. 2020. С. 113. (*Особистий внесок: практична реалізація арифметичного складання двійкових біноміальних чисел*).

9. Кулик І. А., Шевченко М. С. Деякі принципи складання двійкових біноміальних чисел // Матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання». Івано-Франківськ, Голіней О.М., 2021. С. 62–63. (*Особистий внесок: математичний опис матричної моделі двійкових біноміальних чисел та обґрунтування перетворень вагових коефіцієнтів*).

10. Шевченко М. С., Кулик І. А., Скачедуб С. Л. Матрична модель підсумовування двійкових біноміальних чисел // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2021». Суми, Сумський державний університет. 2021. С. 88. (*Особистий внесок: розробка алгоритму формування матричної моделі арифметичного складання двійкових біноміальних чисел*).

11. Шевченко М. С., Жижа В. В. Адаптивний лічильник на основі біноміальних кодів зі змінною кількістю одиниць // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2021». Суми, Сумський державний університет. 2021. С. 87. (*Особистий внесок: аналіз біноміальної елементної бази для визначення результатів біноміального арифметичного складання*).

12. Шевченко М. С., Кулик І. А., Супрун М. М., Гура Є. Ю. Особливості складання двійкових біноміальних чисел // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2022». Суми, Сумський державний університет. 2022. С. 68. (*Особистий внесок: аналіз умов застосування перетворень біноміальних коефіцієнтів в матриці біноміального арифметичного складання*).

13. Shevchenko Maryna, Kulyk Igor, Abramyan Anton. Systems of code-forming constraints for uniform binary binomial numbers // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023». Суми, Сумський державний університет. 2023.

С. 89. (*Особистий внесок: розробка процедур формування рівномірних біноміальних чисел для провадження арифметичного складання*).

14. Шевченко М. С., Косов О. О. Критерії завершення складання двійкових біноміальних чисел // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023». Суми, Сумський державний університет. 2023. С. 83. (*Особистий внесок: математичний опис критеріїв завершення біноміального арифметичного складання*).

15. Shevchenko Maryna, Kulyk Igor, Grekov Taras. Building an adaptive system for counting the number of binary units // Матеріали та програма Міжнародної наукової конференції молодих вчених «Фізика, Електроніка, Електротехніка ФЕЕ::2023». Суми, Сумський державний університет. 2023. С. 84. (*Особистий внесок: практична реалізація адаптивного підрахунку двійкових одиниць для провадження біноміального арифметичного складання*).