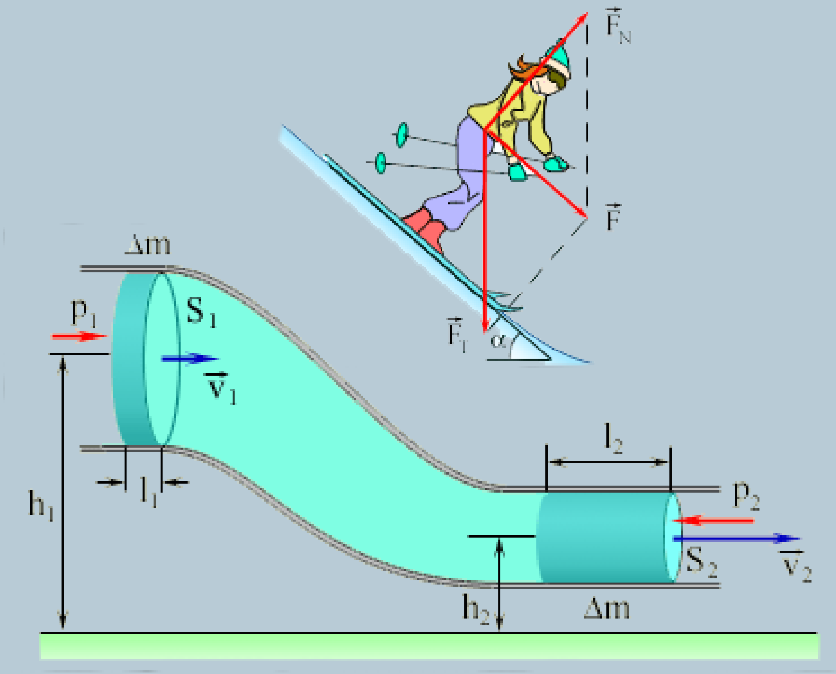
Ігнатенко В. М., Нефедченко В. Ф., Опанасюк А. С.

ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ІЗ ФІЗИКИ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 1



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Ігнатенко В. М., Нефедченко В. Ф., Опанасюк А. С.

ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ІЗ ФІЗИКИ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 1

Видання друге, виправлене

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2023

УДК 53(076.2)
І-26

Рецензенти:

О. В. Лисенко – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри прикладної математики та моделювання складних систем Сумського державного університету;

А. І. Салтикова – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, фізики та методик їх навчання Сумського державного педагогічного університету ім. А. С. Макаренка

Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 16 від 24 червня 2021 року)

Ігнатенко В. М.

І-26 Посібник до практичних занять із фізики : у 3 ч. – 2-ге вид., виправл. / В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, А. С. Опанасюк. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – Ч. 1. – 296 с.

ISBN 978-966-657-962-4
ISBN 978-966-657-963-1

Навчальний посібник містить понад 1 000 задач і складений відповідно до робочої програми для інженерних спеціальностей. Наведені основні теоретичні відомості з кожного розділу загальної фізики та приклади розв'язування типових задач.

Призначений для студентів ЗВО інженерних спеціальностей.

УДК 53(076.2)

ISBN 978-966-657-962-4
ISBN 978-966-657-963-1 (частина 1)

ЗМІСТ С.

1 КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО ТА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

1.1 Положення матеріальної точки в просторі задається **радіусом-вектором** $\vec{r}$ **:**

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z ,$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти осей координат; x, y, z – координати точки.

Кінематичні рівняння руху в координатній формі мають такий вигляд:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t) ,$$

де t – час.

1.2 Середня швидкість

$$< \vec{\mathrm{v}} > = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} ,$$

де $\Delta \vec{r}$ – переміщення матеріальної точки за проміжок часу Δt .

Середня шляхова швидкість:

$$< \mathrm{v} > = \frac{\Delta S}{\Delta t} ,$$

де ΔS – шлях, який пройшла точка за проміжок часу Δt .

Миттєва швидкість

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\mathrm{v}_x + \vec{j}\mathrm{v}_y + \vec{k}\mathrm{v}_z ,$$

де $\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt}$; $\mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt}$; $\mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt}$ – проєкції вектора швидкості $\vec{\mathrm{v}}$ на осі координат.

Абсолютне значення швидкості

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x{}^2 + \mathrm{v}_y{}^2 + \mathrm{v}_z{}^2}.$$

1.3 Прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z ,$$

де $a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt}$; $a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt}$; $a_z = \frac{d\mathrm{v}_z}{dt}$ – проєкції вектора прискорення $\vec{a}$ на осі координат.

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}.$$

За криволінійного руху прискорення розкладають на нормальну та тангенціальну складову

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau ,$$

де $\vec{a}_n$ і $\vec{a}_\tau$ – відповідно нормальне й тангенціальне прискорення. Модулі цих величин дорівнюють $a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R}; a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt}$, де R – радіус кривини у цій точці траєкторії. Тоді можна записати

$$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2}\,.$$

1.4 Кінематичне рівняння рівномірного руху матеріальної точки вздовж осі x має вигляд

$$x = x_0 + \mathrm{v}_x t\,,$$

де x_0 – початкова координата.

За рівномірного руху $\vec{\mathrm{v}} = const, a = 0$.

1.5 Кінематичне рівняння рівнозмінного руху $\vec{a} = const$ вздовж осі *x*

$$x = x_0 + \mathrm{v}_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}\,,$$

де v_{0x} – початкова швидкість.

Швидкість точки за рівнозмінного руху

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0x} + a_x t\,.$$

1.6 Кінематичне рівняння обертального руху має такий вигляд:

$$\vec{\varphi} = \vec{f}(t)\,,$$

де φ – кут повороту (або кутове переміщення).

1.7 Середня кутова швидкість

$$<\vec{\omega}> = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t},$$

де $\Delta\vec{\varphi}$ – кутове переміщення за час Δt.

1.8 Миттєва кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

1.9 Кутове прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

1.10 Кінематичне рівняння для рівномірного руху по колу $\left(\vec{\omega} = const,\ \vec{\varepsilon} = 0\right)$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

де φ_0 – значення кутового переміщення в момент часу $t = 0$.

1.11 Частота обертання

$$\nu = \frac{N}{t}, \text{ або } \nu = \frac{1}{T},$$

де N – число обертів, що здійснюється за час t; T – період обертання (час одного повного оберту).

1.12 Кінематичне рівняння рівнозмінного обертання $\left(\vec{\varepsilon} = const\right)$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Кутова швидкість тіла за рівнозмінного руху по колу

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

1.13 Зв'язок між лінійними та кутовими величинами, що характеризують рух матеріальної точки, задається такими співвідношеннями:

Зв'язок між лінійним і кутовим переміщеннями

$$\Delta\vec{r} = \left[\vec{\varphi} \times \vec{r}\right].$$

Лінійна швидкість дорівнює векторному добутку кутової швидкості на радіус-вектор:

$$\vec{\mathrm{v}} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right].$$

Прискорення точки:

тангенціальне

$$\vec{a}_\tau = \left[\bar{\varepsilon} \times \vec{r}\right];$$

нормальне

$$\vec{a}_n = \omega^2 r\vec{n},$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1.1

Автомобіль першу половину шляху рухався зі швидкістю $v_1 = 80\,км/год$, а другу половину – зі швидкістю $v_2 = 40\,км/год$. Визначити середню швидкість $\langle v \rangle$ автомобіля.

Розв'язування

$\langle v \rangle - ?$

$$S_1 = S_2 = \frac{S}{2},$$
$$v_1 = 80\,км/год = 22,2\,м/с,$$
$$v_2 = 40\,км/год = 11,1\,м/с.$$

За визначенням середня шляхова швидкість тіла дорівнює

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \qquad (1)$$

де ΔS – увесь шлях; Δt – час руху автомобіля на цьому шляху.

За умовою задачі

$$\Delta S = S_1 + S_2, \quad \Delta t = t_1 + t_2$$

та

$$S_1 = S_2 = \frac{\Delta S}{2}.$$

Час проходження першої половини шляху автомобілем становить

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{\Delta S}{2v_1}, \qquad (2)$$

другої половини –

$$t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{\Delta S}{2v_2}. \tag{3}$$

Після підстановки (2) і (3) в (1) одержимо

$$< v > = \frac{\Delta S}{\Delta S/(2v_1) + \Delta S/(2v_2)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин одержимо

$$< v > = \frac{2 \cdot 22,2 \cdot 11,1}{22,2 + 11,1} = 2,67\, м/с .$$

Перевіримо розмірність одержаної величини $\left({}^{м}\!/\!{}_{с} \right)$

$$< v > = \frac{[v] \cdot [v]}{[v]} = м/с .$$

Відповідь: $< v > = 2,67\, м/с$.

Задача 1.2

Матеріальна точка рухається по колу зі сталою кутовою швидкістю $\omega = \pi/6$ рад/с. У скільки разів шлях ΔS, пройдений точкою за час $t = 4$ с, буде більше модуля її переміщення Δr?

Розв’язування

$\Delta S/\Delta r - ?$

$\omega = \pi/6\ рад/с$,

$t = 4\,с$.

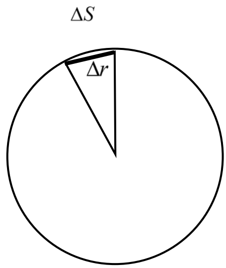


Рисунок 1

Кутове переміщення дорівнює

$$\varphi = \omega t\ .$$

Шлях матеріальної точки дорівнює довжині дуги кола

$$\Delta S = \varphi R\ .$$

Тоді

$$\Delta S = \omega R t.$$

Із рисунка 1 знайдемо переміщення матеріальної точки за теоремою косинусів

$$\Delta r = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2\cos\varphi} = R\sqrt{2\left(1-\cos\varphi\right)} =$$
$$= R\sqrt{2\left(1-\cos\omega t\right)}\ .$$

Знайдемо співвідношення між шляхом ΔS, пройденим точкою за час $t=4$ с, і модулем її переміщення Δr

$$\frac{\Delta S}{\Delta r}=\frac{\omega R t}{R\sqrt{2\left(1-\cos\omega t\right)}}=\frac{\omega t}{\sqrt{2\left(1-\cos\omega t\right)}}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз і проведемо обчислення

$$\frac{\Delta S}{\Delta r}=\frac{\frac{\pi}{6}\cdot 4}{\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\cdot 4\right)}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}\right)}}=1,209.$$

Відповідь: $\Delta S/\Delta r=1,21.$

Задача 1.3

Під час переправи човен рухається перпендикулярно до берега зі швидкістю 7,2 *км/год*. Течія відносить його на 150 *м* вниз. Знайти: 1) швидкість течії; 2) час, який витрачається на переправу через річку. Ширина річки 0,5 км.

Розв’язування

$\mathrm{v}_2-?\ t-?$

$S_1=0,5\,км=500\,м,$

$S_2=150\,м,$

$\mathrm{v}_1=7,2\,км/год=2\,м/с.$

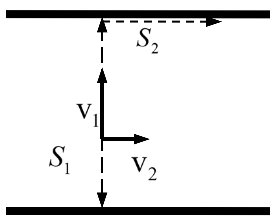


Рисунок 2

Переміщення човна під час переправи визначається співвідношеннями

перпендикулярно до берега

$$S_1 = v_1 t\,, \qquad (1)$$

за течією

$$S_2 = v_2 t\,. \qquad (2)$$

Виключимо з цих співвідношень час і знайдемо швидкість течії

$$v_2 = v_1 \frac{S_2}{S_1}\,. \qquad (3)$$

Час переправи знайдемо з виразу (1)

$$t = S_1 / v_1\,.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та одержимо

$$v_2 = 2 \cdot \frac{150}{500} = 0{,}6\, м/с\,,$$

$$t = \frac{500}{2} = 250\, с\,.$$

Елементарна перевірка розмірності дає для швидкості $м/с$, а для часу – $с$.

Відповідь: $v_2 = 0{,}6\, м/с$, $t = 250\, с$.

Задача 1.4

Матеріальна точка рухається в площині *xy* згідно з рівняннями $x = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ і $y = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, де $B_1 = 7\, м/с$; $C_1 = -2\, м/с^2$; $B_2 = -1\, м/с$, $C_2 = 0{,}2\, м/с^2$. Знайти модулі швидкості й прискорення точки в момент часу $t = 5\, с$.

$\text{v} - ?\ a - ?$
$x = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$, $y = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, $B_1 = 7\ м/с$, $C_1 = -2\ м/с^2$, $B_2 = 1\ м/с$, $C_2 = 0{,}2\ м/с^2$, $t = 5\ с$.

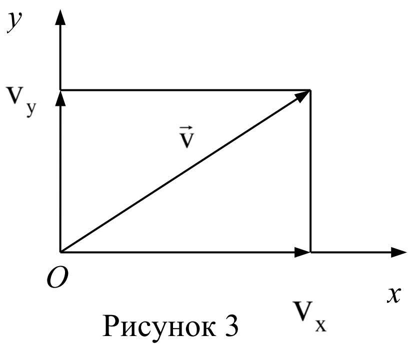


Рисунок 3

Розв'язування

Визначимо проєкції швидкості та прискорення на напрямки x та y. Оскільки за визначенням швидкість і прискорення тіла – це відповідно перша й друга похідні за часом від координати, одержимо

$$\text{v}_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A_1 + B_1 t + C_1 t^2) = B_1 + 2C_1 t,$$

$$a_x = \frac{d}{dt}(B_1 + 2C_1 t) = 2C_1,$$

$$\text{v}_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A_2 + B_2 t + C_2 t^2) = B_2 + 2C_2 t,$$

$$a_y = \frac{d}{dt}(B_2 + 2C_2 t) = 2C_2 .$$

Знаючи проєкції швидкості й прискорення, легко знайти модулі цих величин. Для цього скористаємося теоремою Піфагора

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2} = \sqrt{(B_1 + 2C_1 t)^2 + (B_2 + 2C_2)^2} , \qquad (1)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2C_1)^2 + (2C_2)^2} . \qquad (2)$$

Після підстановки числових значень величин у співвідношення (1) та (2) одержимо

$$\mathrm{v} = \sqrt{(7 + 2 \cdot 5(-2))^2 + (-1 + 2 \cdot 0,2 \cdot 5)^2} = \sqrt{169 + 1} = 13,1\ м/с ,$$

$$a = \sqrt{(2(-2))^2 + (2 \cdot 0,2)^2} = \sqrt{16 + 0,16} = 4,02\, м/с^2 .$$

Перевіримо розмірність одержаних величин

$$[\mathrm{v}] = \sqrt{([B_1] + [C_1][t])^2} = \sqrt{\left(\frac{м}{с} + \frac{м}{с^2} с^2\right)^2} = \frac{м}{с} .$$

Відповідь: $\mathrm{v} = 1,31\, м/с$; $a = 4,02\, м/с^2$.

Задача 1.5

Камінь падає з висоти $H = 1\,200\,м$ без початкової швидкості. Який шлях пройде камінь за останню секунду свого падіння?

Розв’язування

$h_O - ?$

$H = 1200\,м,$

$\tau = 1\,с,$

$g = 9{,}81\,м/с^2,$

$\mathrm{v}_0 = 0.$

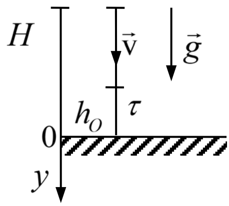


Рисунок 4

Взявши до уваги, що рух каменя є рівноприскореним із прискоренням $a = g$, його кінематичне рівняння руху має вигляд

$$y = H - \frac{gt^2}{2}.$$

У момент падіння на землю його координата $y = 0$, звідси час падіння каменя на землю дорівнює

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}.$$

Відповідно за час $(t - \tau)$ камінь пройде шлях

$$h = \frac{g(t - \tau)^2}{2}.$$

Тоді за час τ камінь пройде шлях

$$h_O = H - h,$$

або

$$h_O = H - \frac{g(t-\tau)^2}{2} = H - \frac{g\left(\sqrt{\frac{2\cdot H}{g}} - \tau\right)^2}{2} =$$

$$= H - \frac{g\left(\frac{2\cdot H}{g} - 2\sqrt{\frac{2\cdot H}{g}}\tau + \tau^2\right)}{2} = H - H + \tau\sqrt{2gH} - \frac{g\tau^2}{2}.$$

$$h_0 = \tau\sqrt{2gH} - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Перевірка розмірності є нескладною

$$[\tau]\sqrt{[g][H]} = c\cdot\sqrt{\frac{м}{c^2}\cdot м} = м.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин одержимо

$$h_O = 1\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 1200} - \frac{9{,}8\cdot 1^2}{2} = 148{,}5\,м.$$

Відповідь: $h_O = 148{,}5\,м$.

Задача 1.6

Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 4\, м/с$. Коли воно досягло верхньої точки польоту, з того самого початкового пункту з тією самою початковою швидкістю v_0 вертикально вгору кинули друге тіло. На якій відстані h від початкового пункту зустрінуться тіла? Опір повітря не враховувати.

Розв'язування

$\tau - ?$
$v_0 = 4\, м/с.$

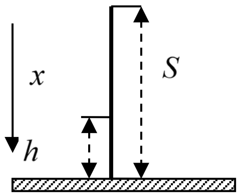


Рисунок 5

Шлях за рівноприскореного руху визначається виразом

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

У полі сили тяжіння прискорення тіла, що вільно падає, дорівнює прискоренню вільного падіння, тобто $a = -g = -9{,}81\, м/с^2$.

Напишемо рівняння руху для обох тіл

$$S_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \text{ і } S_2 = v_0 (t - \tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

На момент зустрічі $S_1 = S_2 = h$. У верхній точці траєкторії швидкість тіла дорівнює нулю. З цього припущення знайдемо час піднімання тіла, тобто

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 - gt \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_0 - g\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\mathrm{v}_0}{g}.$$

Знайдемо момент зустрічі

$$S_1 = S_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_0 t - \frac{gt^2}{2} = \mathrm{v}_0 (t - \tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_0 t - \frac{gt^2}{2} = \mathrm{v}_0 t - \mathrm{v}_0 \tau - \frac{gt^2}{2} + gt\tau - \frac{g\tau^2}{2},$$

$$gt\tau = \mathrm{v}_0\tau + \frac{g\tau^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\mathrm{v}_0}{g} + \frac{\tau}{2}$$

або $$t = \frac{\mathrm{v}_0}{g} + \frac{\mathrm{v}_0}{2g} = \frac{3\mathrm{v}_0}{2g}.$$

Відстань h від початкового пункту, на якій зустрінуться тіла, дорівнює

$$h = S_1 = \mathrm{v}_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3\mathrm{v}_0^2}{2g} - \frac{g}{2}\left(\frac{3\mathrm{v}_0}{2g}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{3\mathrm{v}_0^2}{2g} - \frac{9\mathrm{v}_0^2}{8g} = \frac{3\mathrm{v}_0^2}{8g}.$$

Проведемо розрахунки

$$h = \frac{3 \cdot 4^2}{8 \cdot 9,81} = 0,61\,м.$$

Відповідь: $h = 0,61\,м$.

Задача 1.7

Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10\,рад$, $B = 20\,рад/с$, $C = -2\,рад/с^2$. Знайти тангенціальне, нормальне та повне прискорення точки, що розміщена на відстані $r = 0,1\,м$ від осі обертання, для моменту часу $t = 4\,с$.

Розв'язування

$a_n - ?$ $a_\tau - ?$ $a - ?$

$\varphi = A + Bt + Ct^2$,
$A = 10\,рад$,
$B = 20\,рад/с$,
$C = -2\,рад/с^2$,
$r = 0,1\,м$,
$t = 4\,с$.

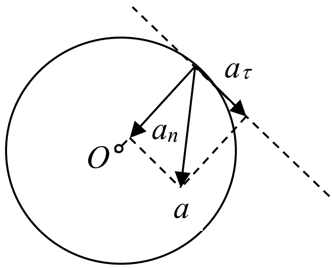


Рисунок 6

Повне прискорення a точки, що рухається вздовж кривої лінії, може бути знайдене як геометрична сума тангенціального прискорення a_τ, направленого по дотичній до траєкторії, і нормального прискорення a_n, направленого до центру кривини траєкторії (рис. 6):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Оскільки вектори $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ взаємно перпендикулярні, то модуль прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} . \quad (1)$$

Модулі тангенціального й нормального прискорення точки тіла, що обертається, визначаються формулами

$$a_\tau = \varepsilon r, \quad a_n = \omega^2 r, \quad (2)$$

де ω – модуль кутової швидкості тіла; ε – модуль його кутового прискорення; r – відстань від точки до осі обертання. Підставляючи співвідношення (1) у формулу (2), одержимо

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} . \quad (3)$$

Кутову швидкість ω знайдемо, взявши першу похідну від кута повороту тіла за часом

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct .$$

У момент часу $t = 4$ $с$ модуль кутової швидкості дорівнює

$$\omega = \left[20 + 2\left(-2\right)4\right] = 4 \ рад/с .$$

Кутове прискорення знайдемо, взявши першу похідну від кутової швидкості за часом

$$\varepsilon = d\omega / dt = 2C = -4\ рад/с^2 .$$

Підставляючи значення ω, ε і r у вирази (2) і (3), одержимо відповідь

$$a_\tau = -4 \cdot 0{,}1 = -0{,}4\ м/с^2 ,$$
$$a_n = 4^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}6\ м/с^2 ,$$
$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1{,}65\ м/с^2 .$$

Відповідь: $a = 1{,}65\ м/с^2$.

Задача 1.8

Нормальне прискорення точки, яка рухається по колу радіусом $r = 4$ м, описується рівнянням $a_n = \left(1 + 6t + 9t^2\right)$ м/с^2. Визначити: шлях, пройдений точкою за $t = 5$ с після початку руху, тангенціальне прискорення точки.

Розв’язування

$a_\tau - ?\ S - ?$

$a_n = \left(1 + 6t + 9t^2\right)$,

$r = 4\,м$,

$t = 5\,с$.

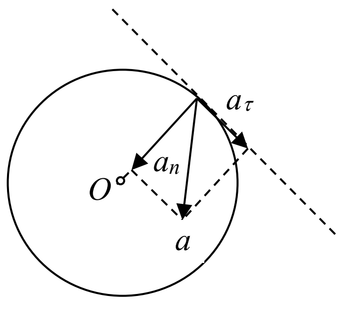


Рисунок 7

Модуль нормального прискорення дорівнює

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{a_n R} = \sqrt{\left(1+6t+9t^2\right)R}\ ,$$

де R – радіус кривини у цій точці траєкторії.

Модуль тангенціального прискорення дорівнює

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\left(1+6t+9t^2\right)R} = \frac{\left(6+18t\right)R}{2\sqrt{\left(1+6t+9t^2\right)R}}\ .$$

Виконаємо розрахунки

$$a_\tau = \frac{\left(6+18t\right)R}{2\sqrt{\left(1+6t+9t^2\right)R}} = \frac{\left(6+18\cdot 5\right)4}{2\sqrt{\left(1+6\cdot 5+9\cdot 5^2\right)4}} = 6\,м/c^2\ .$$

Шлях дорівнює

$$S = \int_0^t \mathrm{v}dt = \int_0^t \sqrt{\left(1+6t+9t^2\right)R}dt = \int_0^t \sqrt{\left(3t+1\right)^2 R}dt =$$

$$= \sqrt{R}\int_0^t \left(3t+1\right)dt = \sqrt{R}\left(1{,}5t^2+t\right).$$

Виконаємо розрахунки

$$S = \sqrt{R}\left(1{,}5t^2+t\right) = 2\left(1{,}5\cdot 5^2+5\right) = 85\,м\ .$$

Відповідь: $S = 85$ м; $a_\tau = 6$ м/с^2.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1.1 Матеріальна точка рухалася протягом $t_1 = 15\ c$ зі швидкістю $v_1 = 5\ м/c$, $t_2 = 10\ c$ зі швидкістю $v_2 = 8\ м/c$ і $t_3 = 6\ c$ зі швидкістю $v_3 = 20\ м/c$. Визначити середню швидкість $\langle v \rangle$ точки.

Відповідь: $< v> = 8,87\ м/c$.

1.2 Тіло пройшло першу половину прямолінійного шляху за час $t_1 = 2$ с, другу – за час $t_2 = 8\ c$. Визначити середню швидкість $\langle v \rangle$ тіла, якщо довжина шляху $s = 20\ м$.

Відповідь: $\langle v \rangle = 2\ м/c$.

1.3 Першу чверть шляху мотоцикліст проїхав зі швидкістю $v_1 = 10\ м/c$, другу зі швидкістю $v_2 = 15\ м/c$, третю зі швидкістю $v_3 = 20\ м/c$ і останню зі швидкістю $v_4 = 5\ м/c$. Визначити середню швидкість мотоцикліста на всьому шляху.

Відповідь: $\langle v \rangle = 9,6\ м/c$.

1.4 Матеріальна точка рухається по колу зі сталою кутовою швидкістю $\omega = \pi/6$ рад/с. У скільки разів шлях ΔS, пройдений точкою за час $t = 4$ с, буде більше модуля її переміщення Δr?

Відповідь: $\Delta S/\Delta r = 1,21$.

1.5 Під час переправи човен рухається перпендикулярно до берега зі швидкістю 7,2 *км/год*. Течія відносить його на 150 *м* униз. Знайти: 1) швидкість течії; 2) час, який витрачається на переправу через річку. Ширина річки 0,5 км.

Відповідь: $v_2 = 0,6\ м/c$, $t = 250\,c$.

1.6 Визначити час польоту літака t між двома пунктами, що розміщенні на відстані $S = 500\ км$, якщо швидкість літака відносно повітря $v_1 = 100\ м/с$, а швидкість зустрічного вітру, напрямленого під кутом $\alpha = 30^0$ до напрямку руху, $v_2 = 30\ м/с$.

Відповідь: $t = 1\ год\ 54\ хв$.

1.7 Дві прямих дороги перетинаються під кутом $\alpha = 60^0$. Від перехрестя одночасно від'їхали дві машини. Одна зі швидкістю $v_1 = 60\ км/год$, друга – $v_2 = 80\ км/год$. Визначити швидкості v', v'', з якими машини віддаляються одна від одної.

Відповідь: $v' = 122\ км/год$; $v'' = 72,2\ км/год$.

1.8 Автомобіль рухається зі швидкістю $v_0 = 72\ км/год$ під прямим кутом до стіни. В момент, коли відстань до стіни $L = 400\ м$, автомобіль подає короткий звуковий сигнал. Яку відстань l він проїде до моменту, коли водій почує відлуння? Швидкість звуку $c = 330\ м/с$.

Відповідь: $l = 45,7\ м/с$.

1.9 Пасажир потягу, який рухається зі швидкістю $u = 15,0\ м/с$, помітив, що зустрічний потяг довжиною $L = 210\ м$ проїхав повз нього за $t = 6\ с$. Визначити швидкість зустрічного потягу.

Відповідь: $< v > = 20\ м/с$.

1.10 Людина перебуває на відстані $l = 50\ м$ від прямої дороги, якою рухається автомобіль зі швидкістю $v_1 = 10\ м/с$.

а) За яким напрямком повинна бігти людина, щоб зустрітися з автомобілем, якщо автомобіль рухається на відстані $b = 200\ м$ від людини за умови, що швидкість людини $v_2 = 3\ м/с$?

б) Якою повинна бути найменша швидкість людини, щоб вона зустрілася з автомобілем?

Відповідь: а) $56,5^0 < \alpha < 123,5^0$; б) $\mathrm{v}_2 = 2,5\ м/с$.

1.11 Рух тіла задано рівняннями: $x = (8t^2 + 4)\ м$; $y = (6t^2 - 3)\ м$; $z = 0$. Визначити абсолютні значення швидкості та прискорення тіла в момент часу $t = 8\ с$.

Відповідь: $\mathrm{v} = 160\ м/с$, $a = 20\ м/с$.

1.12 Залежність пройденого тілом шляху s від часу має вигляд: $s = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 6\ м$, $B = 3\ м/с^2$, $C = 4\ м/с^3$. Знайти: а) залежність швидкості v та прискорення a від часу t; б) відстань s, яку пройшло тіло, швидкість v та прискорення a тіла через $t = 2,00\ с$ після початку руху. Побудувати графік залежності шляху s, швидкості v та прискорення a від часу t для інтервалу $0 \le t \le 3$ через $0,5\ с$.

Відповідь: б) $s = 24\ м$; $\mathrm{v} = 38\ м/с$; $a = 42\ м/с^2$.

1.13 Залежність пройденого тілом шляху s від часу t задається рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$, де $A = 6\ м$, $B = 3\ м$, $C = 2\ м/с$. Визначити середню швидкість $\langle \mathrm{v} \rangle$ і середнє прискорення $\langle a \rangle$ тіла для інтервалу часу $1 \le t \le 4$ с. Побудувати графік залежності шляху s, швидкості v та прискорення a від часу t для інтервалу $1 \le t \le 5$ через 1 с.

Відповідь: $\langle \mathrm{v} \rangle = 7\ м/с$; $\langle a \rangle = 4\ м/с^2$.

1.14 Частинка рухається вздовж прямої згідно з рівнянням $x = At^3 + Bt$, де $A = -0,36\ м/с^3$, $B = 2\ м/с$. Визначити середній модуль швидкості $\langle |\mathrm{v}| \rangle$ і модуль середньої швидкості $|\langle \mathrm{v} \rangle|$ за перші 3 с від початку руху.

Відповідь: $\langle|\mathrm{v}|\rangle = 2,45\ м/с$; $|\langle\mathrm{v}\rangle| = 1,24\ м/с$.

1.15 Матеріальна точка рухається прямолінійно. Залежність пройденого шляху від часу описується рівнянням $s = 0,5t + t^3\ м$. Визначити залежність швидкості та прискорення від часу; середню швидкість точки за другу секунду; шлях, який пройшла точка за п'яту секунду. Побудувати графіки залежності шляху, швидкості й прискорення від часу.

Відповідь: $\langle\mathrm{v}\rangle = 3,5\ м/с$; $s = 9,5\ м$.

1.16 Швидкість тіла змінюється за законом $\mathrm{v} = At^2 + C\mathrm{e}^{Bt}$, де $A = 3\ м/с^3$, $B = 1\ с^{-1}$, $C = 1\ м/с$. Знайти прискорення тіла наприкінці першої секунди руху, шлях, пройдений тілом і середню швидкість за цей час.

Відповідь: $a = 6,72\ м/с^2$; $s = 3,72\ м$; $\langle\mathrm{v}\rangle = 3,72\ м/с$.

1.17 Визначити початкову швидкість, яку необхідно надати тілу, кинутого вертикально вгору, щоб воно повернулося назад через $t = 6$ с . Чому дорівнює максимальна висота підняття.

Відповідь: $\mathrm{v}_0 = 29\ м/с$; $H = 42,9\ м$.

1.18 Тіло кинули вертикально вниз із початковою швидкістю $\mathrm{v}_0 = 19,6\ м/с$, за останню секунду пройшло четверту частину шляху. Визначити час падіння тіла та його кінцеву швидкість. З якої висоти кинули тіло?

Відповідь: $t = 6\ с$; $\mathrm{v} = 78,4\ м/с$; $H = 294\ м$.

1.19 Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $\mathrm{v}_0 = 4\ м/с$. Коли воно досягло верхньої точки польоту з того самого початкового пункту з тією самою початковою швидкістю v_0 вертикально вгору, кинули друге тіло. На якій відстані h від початкового пункту зустрінуться тіла? Опір повітря не враховувати.

Відповідь: $h = 0,61\,м$.

1.20 Кабіна ліфта, в якої відстань від підлоги до стелі дорівнює $2,7$ м, почала підніматися з постійним прискоренням $1,2$ м/с^2. Через 2 с після початку руху зі стелі кабіни почав падати болт. Знайти: а) час вільного падіння болта; б) переміщення й шлях за час вільного падіння в системі відліку, пов'язаною з шахтою ліфта.

Відповідь: а) $t = 0,7\ с$; б) $\Delta r = 0,7\,м$ і $S = 1,3\ м$.

1.21 Тіло кинули з поверхні землі під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10\ м/с$. Нехтуючи опором повітря, знайти: а) швидкість тіла в момент часу $t_1 = 0,8\,с$; б) рівняння траєкторії; в) час, упродовж якого тіло піднімалося, й час, упродовж якого – опускалося; г) дальність польоту; д) радіус кривизни траєкторії в момент t_1.

Відповідь: а) $v = 9,16\ м/с$; в) $t_П = 0,50\ с$; г) $t_C = 8,66\ м$; д) $R = 25,7\ м$.

1.22 Із однієї точки одночасно кинули два тіла з однаковою швидкістю v_0 під різними кутами $\alpha_1 = 30^0$ і $\alpha_2 = 60^0$ до горизонту. Визначити відстань між тілами через $\Delta t = 10$ с після початку руху.

Відповідь: $\Delta S = 11,3\ м$.

1.23 Визначити траєкторію точки, якщо її радіус-вектор відносно початку координат змінюється за законом $\vec{r} = 2t\vec{i} + 8t^2\vec{j}$. Знайти середнє значення швидкості за час від $t_1 = 1с$ до $t_2 = 10\ с$.

Відповідь: $\langle v \rangle = 88,9\ м/с$.

1.24 Частинка рухається з прискоренням $\vec{a} = 2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}$. Визначити модуль швидкості частинки в момент часу $t = 2$ с, якщо в початковий час момент часу $t = 0$ с її швидкість була $\mathrm{v}_0 = 3\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{k}$.

Відповідь: $\mathrm{v} = 12,4\ м/с$.

1.25 Знайти кутову швидкість ω: а) добового обертання Землі; б) часової стрілки на годиннику; в) хвилинної стрілки на годиннику; г) штучного супутника Землі, який рухається по круговій орбіті з періодом $T = 88\ хв$. Чому дорівнює лінійна швидкість v руху цього супутника, якщо відомо, що його орбіта розміщена на відстані $h = 200\ км$ від поверхні Землі.

Відповідь: а) $\omega = 7,26 \cdot 10^{-5}\ рад/с$;
б) $\omega = 14,5 \cdot 10^{-5}\ рад/с$; в) $\omega = 1,74 \cdot 10^{-3}\ рад/с$;
г) $\omega = 1,19 \cdot 10^{-3}\ рад/с$; д) $\mathrm{v} = 7,80\ км/с$.

1.26 Точка рухається по колу радіусом $R = 30\ см$ зі сталим кутовим прискоренням. Знайти тангенціальне прискорення точки, якщо відомо, що за 4 с вона виконала 3 оберти.

Відповідь: $a_\tau = 7,1 \cdot 10^{-1}\ м/с^2$.

1.27 Колесо, що обертається рівноприскорено, досягло кутової швидкості $\omega = 20\ рад/с$ через $N = 10$ обертів після початку обертання. Знайти кутове прискорення ε колеса.

Відповідь: $\varepsilon = 3,2\ рад/с^2$.

1.28 На циліндр, який може вільно обертатись навколо горизонтальної осі, намотана нитка. До кінця нитки прив'язали вантаж і надали йому можливість опускатися. Рухаючись рівноприскорено, вантаж за час $t = 3$ с опустився на $h = 1,5\ м$. Знайти кутове прискорення ε циліндра, якщо його радіус $r = 4\ см$.

Відповідь: $\varepsilon = 8,33\ рад/с^2$.

1.29 За проміжок часу $t = 10\ с$ точка пройшла одну шосту частину кола радіуса $R = 150\ см$. Обчислити за час руху: а) середнє значення модуля швидкості; б) модуль вектора середньої швидкості; в) модуль вектора середнього повного прискорення, якщо точка рухалася зі сталим тангенціальним прискоренням, а початкова швидкість дорівнювала нулю.

Відповідь: а) $< \mathrm{v} > = 0,16\ м/с$; б) $|< \mathrm{v} >| = 0,15\ м/с$; в) $|\vec{a}| = 0,73\ м/с^2$.

1.30 Нормальне прискорення точки, яка рухається по колу радіусом $r = 4\ м$, описується рівнянням $a_n = \left(1 + 6t + 9t^2\right)\ м/с^2$. Визначити: шлях, пройдений точкою за $t = 5$ с після початку руху, тангенціальне прискорення точки.

Відповідь: $S = 85\ м$; $a_\tau = 6\ м/с^2$.

2 ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

2.1 Рівняння руху матеріальної точки (**другий закон Ньютона**) у векторній формі має вигляд

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

або у разі, коли $m = const$,

$$m\vec{a}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\,,$$

де $\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{F}_i$ – геометрична сума сил, що діють на матеріальну точку; m – маса; $\vec{a}$ – прискорення; $\vec{p}=m\vec{\mathrm{v}}$ – імпульс; N – кількість сил, що діють на точку;

у координатній (скалярній) формі

$$ma_x=\sum_{i=1}^{N}F_{xi},\quad ma_y=\sum_{i=1}^{N}F_{yi},\quad ma_z=\sum_{i=1}^{N}F_{zi},$$

або

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}F_{xi}\,,\; m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}F_{yi}\,,\; m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}F_{zi}\,,$$

де під знаком суми розміщені проєкції сил F_i на відповідні осі координат.

2.2 Сила пружності

$$F_{прх} = -kx,$$

де k – коефіцієнт пружності; x – абсолютна деформація.

2.3 Сила гравітаційної взаємодії двох точкових тіл

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де G – гравітаційна стала; m_1 і m_2 – маси тіл, що взаємодіють; r – відстань між тілами.

2.4 Сила тертя ковзання

$$F_{тр} = \mu N,$$

де μ – коефіцієнт тертя; N – сила нормального тиску.

2.5 Координати центра мас системи матеріальних точок

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},$$

де m_i – маса i-ї матеріальної точки; x_i, y_i, z_i – її координати.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 2.1

На рівному столі лежить брусок масою 4 *кг*. До бруска прив’язані два шнури, перекинуті через нерухомі блоки, які прикріплені до протилежних боків стола. До кінців шнурів підвішені гирі масами 1 *кг* і 2 *кг*. Знайти прискорення, з яким рухається брусок і силу натягу кожного зі шнурів. Масою блоків знехтувати.

Розв’язування

$a-?\ T_1-?\ T_2-?$

$m=4\,кг,$

$m_1=1\,кг,$

$m_2=2\,кг,$

$g=9{,}81\ м/с^2.$

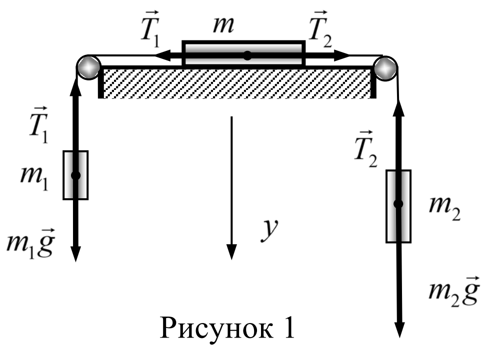


Рисунок 1

На брусок масою m діють сили натягу шнурів $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, результуюча яких згідно з другим законом Ньютона дорівнює

$$ma=T_2-T_1. \qquad (1)$$

Цей закон для вантажів m_1 і m_2 у проєкціях на вісь y має вигляд (див. рис. 1)

$$m_2 a = m_2 g - T_2; \qquad m_1 a = -m_1 g + T_1. \qquad (2)$$

Додамо ці рівняння та одержимо

$$(m_1 + m_2)a = g(m_2 - m_1) - (T_2 - T_1). \qquad (3)$$

Звідси

$$(T_2 - T_1) = g(m_2 - m_1) - (m_1 + m_2)a. \qquad (4)$$

Підставимо (4) в (1) та одержимо

$$ma = g(m_2 - m_1) - (m_1 + m_2)a.$$

Із цього рівняння легко знайдемо прискорення вантажів

$$a = g\frac{(m_2 - m_1)}{m + m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Сили натягу шнурів знайдемо із співвідношення (2) з урахуванням (5)

$$T_1 = m_1(a + g) = m_1 g\left(\frac{(m_2 - m_1)}{m + m_1 + m_2} + 1\right) = m_1 g \cdot \frac{2m_2 + m}{m + m_1 + m_2};$$

$$T_2 = m_2(g - a) = m_2 g\left(1 - \frac{(m_2 - m_1)}{m + m_1 + m_2}\right) = m_2 g \cdot \frac{2m_1 + m}{m + m_1 + m_2}.$$

Розмірність одержаних величин є очевидною.

Після підстановки числових значень фізичних величин одержимо

$$a = 9{,}81\frac{(2-1)}{4+2+1} = 1{,}4\ м/с^2\ ,$$

$$T_1 = 9{,}81 \cdot \frac{2\cdot 2+4}{4+1+2} = 11{,}21\ Н\ ,$$

$$T_2 = 2\cdot 9{,}81 \cdot \frac{2\cdot 1+4}{4+1+2} = 16{,}82\ Н\ .$$

Відповідь: $a = 1{,}4\ м/с^2$; $T_1 = 11{,}21\ Н$; $T_2 = 16{,}82\ Н$.

Задача 2.2

Через блок перекинута нерозтяжна, невагома нитка, на кінцях якої висять тягарці масами m_1 і m_2, причому $m_1 > m_2$. Блок почали піднімати вгору з прискоренням $\vec{a}_0$ відносно Землі. Вважаючи, що нитка зісковзує по блоку без тертя, знайти сили натягу нитки і прискорення a_1 вантажу m_1 відносно Землі.

Розв'язування

$a_{1,X}$ – ? T – ?
m_1,
m_2,
a_0.

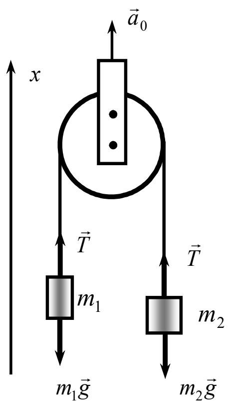


Рисунок 2

Виберемо додатний напрямок осі x, як показано на рисунку 2, і запишемо для обох тягарців основне рівняння динаміки в проєкціях на цю вісь:

$$\begin{cases} m_1 a_{1,X} = T - m_1 g; \\ m_2 a_{2,X} = T - m_2 g. \end{cases} \tag{1}$$

Ця система рівнянь має три невідомих: $a_{1,X}$, $a_{2,X}$ і T. Для запису третього рівняння використаємо кінетичний зв’язок між прискореннями:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_0 + \vec{a}', \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_0 - \vec{a}',$$

де $\vec{a}'$ – прискорення вантажу масою m_1 відносно блока. Склавши почленно ліву й праву частини цих рівностей, одержимо

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 2\vec{a}_0,$$

або в проєкціях на вісь x

$$a_{1,X} + a_{2,X} = 2a_0. \tag{2}$$

Розв’язавши разом рівняння (1) і (2), знайдемо:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a_0), \quad a_{1,X} = \frac{2m_2 a_0 + (m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}.$$

Із одержаних виразів бачимо, що за заданого $\vec{a}_0$ знак $a_{1,X}$ залежить від співвідношення мас m_1, m_2, зокрема, $a_{1,X} = 0$ за

$$\frac{m_1}{m_2} = 1 + \frac{2a_0}{g}.$$

Відповідь: $T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a_0)$;

$$a_{1,X} = \frac{2m_2 a_0 + (m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}.$$

Задача 2.3

На похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^0$, розміщено тіло масою $m_1 = 2\,кг$. Тіло рухається вгору по похилій площині під дією зв'язаного з ним невагомою і нерозтяжною ниткою, перекинутою через блок, вантажу масою $m_2 = 20\,кг$. Початкові швидкості тіла й вантажу дорівнюють нулю, коефіцієнт тертя тіла $\mu = 0{,}1$. Визначити прискорення, з яким рухаються тіла, і силу натягу нитки. Блок вважати невагомим, тертям знехтувати.

Розв'язування

$a - ?\ T_1 - ?\ T_2 - ?$
$m_1 = 2\,кг$, $m_2 = 20\,кг$, $g = 9{,}81\,м/с^2$, $\alpha = 30^0$, $\mu = 0{,}1$.

На тіло m_1, яке рухається по похилій площині, діє сила тяжіння $\vec{F}_{T1} = m_1\vec{g}$, сила натягу нитки T_1, сила тертя $\vec{F}_{Tp}$ і сила реакції опори $\vec{N}$. На вантаж m_2 діє сила тяжіння $\vec{F}_{T2} = m_2\vec{g}$ і сила натягу нитки T_2

(рис. 3). Тут g – прискорення вільного падіння. Другий закон Ньютона (рівняння руху) для цих тіл буде мати вигляд

$$\vec{T}_1 + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{Tp} = m_1\vec{a}_1 , \tag{1}$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2 , \tag{2}$$

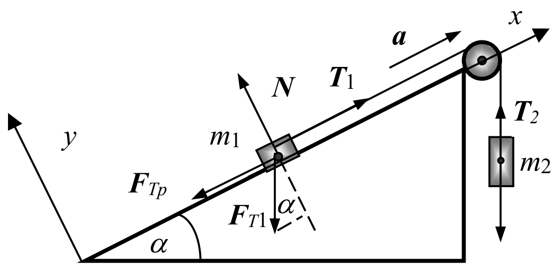


Рисунок 3

де a_1, a_2 – прискорення руху тіл.

Із умови невагомості й нерозтяжності нитки та відсутності тертя випливає, що

$a_1 = a_2 = a$,

$T_1 = T_2 = T$.

Виберемо для тіла m_1 систему відліку xOy так, як показано на рисунку 3. Тоді рівняння руху цього тіла в проєкціях на осі x і y запишемо так:

$$T - mg\sin\alpha - F_{Tp} = m_1 a , \tag{3}$$

$$N - mg\cos\alpha = 0 . \tag{4}$$

Із співвідношення (2) знайдемо N та підставимо в рівняння (1), врахувавши, що $F_{Tp} = \mu N$, тоді одержимо

$$T - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = m_1 a, \qquad (5)$$

де μ – коефіцієнт тертя.

Рівняння руху вантажу m_2 в проєкції на вертикальну вісь y' має вигляд

$$m_2 g - T = m_2 a. \qquad (6)$$

Розв’язавши систему рівнянь (5) і (6) відносно a, після простих перетворень одержимо

$$a = \frac{\left(m_2 - m_1\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right)g}{m_1 + m_2}. \qquad (7)$$

Знаючи a, підставивши співвідношення (7) у вираз (6), знайдемо силу натягу нитки

$$T = \frac{m_1 m_2 g\left(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}{m_1 + m_2}.$$

Перевіримо розмірності одержаних величин

$$\frac{[m]\cdot[a]}{[m]} = \frac{кг \cdot м/с^2}{кг} = м/с^2,$$

$$\frac{[m]\cdot[m]\cdot[a]}{[m]} = \frac{кг \cdot кг \cdot м/с^2}{кг} = кг \cdot м/с^2 = Н.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин одержимо

$$a=\frac{\left(20-2\cdot\left(\sin 30^{0}+0{,}1\cos 30^{0}\right)\right)\cdot 9{,}8}{20+2}=8{,}4\ м/с^{2}\ ,$$

$$T=\frac{2\cdot 20\cdot 9{,}8\cdot\left(1+\sin 30^{0}+0{,}1\cos 30^{0}\right)}{20+2}=28{,}2\ Н\ .$$

Відповідь: $a=8{,}4\ м/с^{2}\ ;\ T=28{,}2\ Н$.

Задача 2.4

Вагон масою m = 1 000 кг спускається по канатній залізничній дорозі з нахилом $\alpha=15^{0}$ до горизонту. Визначити силу натягу T каната під час гальмування вагона в кінці спуску, якщо швидкість вагона перед гальмуванням υ_0 = 2,5 м/с, час гальмування t = 6 с, а коефіцієнт тертя μ = 0,05.

Розв'язування

$T-?$

$m=10^{3}\ кг,$
$t=6\,с,$
$\alpha=15^{0},$
$v_0=2{,}5\,м/с,$
$g=9{,}81\,м/с^{2}\ ,$
$\mu=0{,}05.$

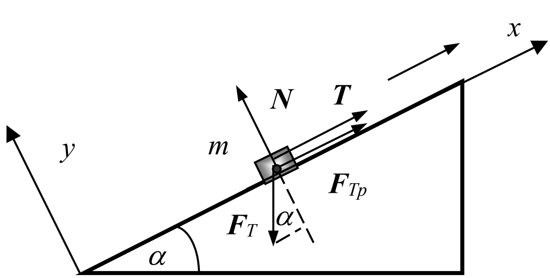


Рисунок 4

На тіло m, яке рухається по похилій площині (рис. 4), діють сила тяжіння $\vec{F}_T=m\vec{g}$, сила натягу нитки T, сила тертя $\vec{F}_{Tp}$ і сила реакції опори $\vec{N}$. Другий закон Ньютона (рівняння руху) для цього тіла буде мати вигляд

$$\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{Tp} = 0 .$$

Виберемо систему відліку *xOy* так, як показано на рисунку. Тоді рівняння руху цього тіла в проєкціях на осі x і y запишеться так:

$$T - mg\sin\alpha + F_{Tp} = ma , \qquad (1)$$

$$N - mg\cos\alpha = 0 . \qquad (2)$$

Із співвідношення (2) знайдемо N та підставимо у рівняння (1), врахувавши, що $F_{Tp} = \mu N$, тоді одержимо

$$T - mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = ma , \qquad (3)$$

де μ – коефіцієнт тертя.

$$T = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + ma =$$

$$= m\left[g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) + a \right]. \qquad (4)$$

Прискорення

$$a = \left| \frac{\text{v} - \text{v}_0}{t} \right| = \frac{\text{v}_0}{t} .$$

Тоді

$$T = m\left[g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) + \frac{\text{v}_0}{t} \right].$$

Після підстановки числових значень фізичних величин одержимо

$$T = 10^3 \left[9,81\left(\sin 15^0 - 0,05\cos 15^0\right) + \frac{2,5}{6} \right] = 2,48 \cdot 10^3 \ H.$$

Відповідь: $T = 2,48 \cdot 10^3 \ H$.

Задача 2.5

Яку найбільшу швидкість $\mathrm{v}_{\max}$ може розвинути велосипедист, проїжджаючи заокруглення радіусом $R = 50\,м$, якщо коефіцієнт тертя ковзання між шинами й асфальтом дорівнює $\mu = 0,3$? Чому дорівнює кут α відхилення велосипеда від вертикалі, коли велосипедист рухається по заокругленню?

Розв’язування

$\mathrm{v}_{\max} - ?$

$R = 50\,м,$

$\mu = 0,3,$

$g = 9,81\,м/с^2$.

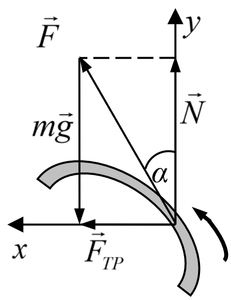


Рисунок 5

На велосипедиста, який рухається по дузі кола (виконує віраж), діють такі сили (рис. 5): тяжіння $m\vec{g}$, прикладена до центру мас велосипедиста; тертя $\vec{F}_{ТР}$, яка надає велосипедисту доцентрове прискорення, та реакція опори $\vec{N}$.

У цьому разі основне рівняння динаміки у векторній формі має вигляд

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{TP} = m\vec{a}\,.$$

Знайдемо проєкції цього рівняння на координатні осі. Вісь x спрямуємо вздовж прискорення по радіусу кола, вісь y – вертикально вгору

$$\begin{cases} F_{TP} = ma, \\ -mg + N = 0. \end{cases}$$

Оскільки сила тертя

$$F_{TP} = \mu N,$$

а доцентрове прискорення

$$a = \frac{\mathrm{v}^2}{R}.$$

Тоді перше рівняння системи набере вигляду

$$\mu N = m\frac{\mathrm{v}^2}{R},$$

звідси

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mu N R}{m}}\,.$$

Максимальне значення швидкості буде відповідати максимальному значенню сили тертя. Сила тертя є максимальною, коли $N = mg$. Тоді

$$\mathrm{v}_{\max} = \sqrt{\mu g R}\,.$$

Кут нахилу велосипедиста визначимо з рисунка 4.

$$tg\alpha = \frac{\mu mg}{mg} = \mu\,.$$

Тоді

$$\alpha = arctg\,\mu\,.$$

Виконаємо перевірку розмірності швидкості

$$\sqrt{[\mu][g][R]} = \sqrt{\frac{м}{с^2}\cdot м} = \frac{м}{с}\,.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин одержимо

$$\mathrm{v}_{\max} = \sqrt{0,3\cdot 9,81\cdot 50} = 12,13\ м/с\,,$$

$$\alpha = arctg\,0,3 = 16,70^0 = 16^0 42'\,.$$

Відповідь: $\mathrm{v}_{\max} = 12,1\ м/с$; $\alpha = 16^0 42'$.

Задача 2.6

Куля масою m = 45 кг обертається на нерозтяжній дротині довжиною l = 5 м у горизонтальній площині, здійснюючи n = 16 об/хв. Який кут α з вертикаллю утворює дротина і яка сила її натягу?

Розв'язування

$\alpha - ?$
$m = 45\,кг,$ $l = 5\,м,$ $n = 16 хв^{-1} = 0,27\,с^{-1}.$

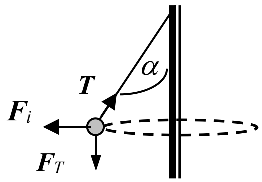


Рисунок 6

На кулю діють сили: сила тяжіння $m\vec{g}$; сила натягу $\vec{T}$; відцентрова сила інерції

$$F_i = -ma = m\frac{\mathrm{v}^2}{R}.$$

Умовою рівноваги кулі є

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_i = 0.$$

З рисунка видно, що

$$\frac{F_i}{mg} = \mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{m\mathrm{v}^2}{mRg} = \mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha\, Rg = \mathrm{v}^2.$$

Швидкість пов'язана з частотою обертання співвідношенням

$\mathrm{v} = \omega R = 2\pi n R$, тоді

$$\mathrm{tg}\alpha\, Rg = \left(2\pi nR\right)^2 \quad \Rightarrow \quad g\mathrm{tg}\alpha = 4\pi^2 n^2 R .$$

З рисунка $R = l\sin\alpha$, тоді

$$g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 4\pi^2 n^2 l\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l};$$

$$\alpha = \arccos\frac{g}{4\pi^2 n^2 l}.$$

Виконаємо розрахунки

$$\alpha = \arccos\frac{9,81}{4\cdot\pi^2\cdot 0,27^2\cdot 5} = 47^0 .$$

Силу натягу нитки визначимо з рисунка

$$T = \sqrt{\left(mg\right)^2 + \left(F_i\right)^2} = m\sqrt{\left(g\right)^2 + \left(\frac{\left(2\pi nR\right)^2}{R}\right)^2} =$$

$$= m\sqrt{\left(g\right)^2 + \left(4\pi^2 n^2 R\right)^2} = m\sqrt{\left(g\right)^2 + 16\pi^4 n^4 l^2 \sin^2\alpha}.$$

Виконаємо розрахунки

$$T = 45\sqrt{\left(9,81\right)^2 + 16\pi^4\cdot 0,27^4\cdot 5^2\sin^2 47^0} = 647\ H.$$

Відповідь: $\alpha = 47^0$; $T = 647\,H$.

Задача 2.7

Літак летить зі швидкістю $\upsilon = 100$ м/с і описує вертикальну петлю Нестерова радіусом $R = 360$ м. Знайти силу, яка притискує льотчика масою $m = 80$ кг до сидіння: у нижній точці петлі; у верхній точці цієї петлі.

Розв’язування

$N_1 - ?$ $N_2 - ?$

$m = 80\,кг$,

$\mathrm{v} = 100\ м/с$,

$R = 360\,м$.

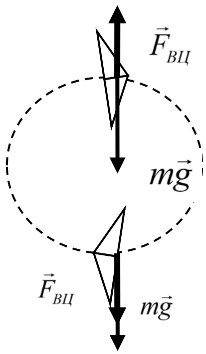


Рисунок 7

У верхній точці траєкторії на пілота діють сила тяжіння та відцентрова сила інерції, спрямовані в протилежні боки, тобто

$$mg - F_{ВЦ} = N_1 .$$

У нижній точці траєкторії ці сили односпрямовані

$$mg + F_{ВЦ} = N_2 .$$

Відцентрова сила інерції дорівнює

$$F_{ВЦ} = m\frac{\mathrm{v}^2}{R}.$$

Тоді

$$N_1 = mg - m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_1 = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) \quad \text{і}$$

$$N_2 = mg + m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_2 = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right).$$

Виконаємо розрахунки

$$N_1 = 80\left(9{,}8 - \frac{100^2}{360}\right) = -1438\ H,$$

$$N_2 = 80\left(9{,}8 + \frac{100^2}{360}\right) = 3006\ H.$$

Знак «–» означає, що сила притискає льотчика вгору.

Відповідь: $N_1 = 3\ кН$; $N_2 = -1{,}44\ кН$.

Задача 2.8

До кронштейна, закріпленого на візку, підвішена на нитці куля масою $m = 5$ кг. На який кут відхилиться куля з ниткою від вертикалі під час руху візка з прискоренням $a =$ 0,5 м/с^2?

Розв’язування

$\alpha - ?$
$m = 5\,кг,$ $a = 0{,}5\,м/с^2.$

На кулю діють сили: сила тяжіння $m\vec{g}$; сила натягу нитки $\vec{N}$; сила інерції $F_i = -ma$.

Умовою рівноваги кулі є

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_i = 0.$$

З рисунка 8 видно, що

$$\frac{F_i}{mg} = \mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{ma}{mg} = \mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{g}.$$

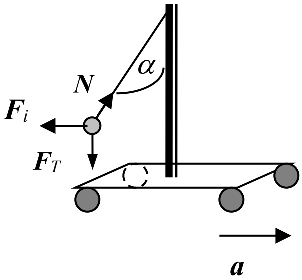


Рисунок 8

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{a}{g}.$$

Виконаємо

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{0,5}{9,81} = 2,9^0 = 2^0 54'.$$

Відповідь: $\alpha = 2^0 54'$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1 Знайти модуль і напрямок сили, що діє на частинку масою m під час її руху по площині xy за законом $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$, де A, B, ω – сталі.

Відповідь: $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор частинки відносно початку координат; $F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$.

2.2 Сила F надає тілу масою m_1 прискорення $a_1 = 2\ м/с^2$. Та сама сила тілу масою m_2 надає прискорення $a_2 = 3\ м/с^2$. Яке прискорення надасть ця сила цим тілам, якщо їх з'єднати?

Відповідь: $a = 1,2\ м/с^2$.

2.3 Ракета летить на місяць. В якій точці на прямій, що з'єднує центри Землі та Місяця, ракета буде притягуватися Землею та Місяцем з однаковою силою?

Відповідь: $r = 3,4\cdot 10^5\ км$ від поверхні Землі.

2.4 Знайти доцентрове прискорення, з яким рухається по коловій орбіті штучний супутник Землі, який розміщений на висоті $h = 200\,км$ від поверхні Землі.

Відповідь: $a_{ДЦ} = 9,2\ м/с$.

2.5 Аеростат маси $m = 250\ кг$ почав опускатися з прискоренням $a = 0,2\ м/с^2$. Визначити масу баласту, який необхідно викинути за борт, щоб аеростат одержав таке саме прискорення, але спрямоване вгору. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $\Delta m = 10\ кг$.

2.6 Невелику кульку масою m, підвішену на нитці, відвели в бік так, що нитка утворила прямий кут з вертикаллю, а потім відпустили. Знайти: а) модуль повного прискорення кульки і силу натягу нитки залежно від φ – кута відхилення нитки від вертикалі; б) силу натягу нитки в момент, коли вертикальна складова швидкості кульки максимальна; в) кут φ між ниткою і вертикаллю в момент, коли вектор повного прискорення кульки направлений горизонтально.

Відповідь: а) $a = g\sqrt{1+3\cos^2\varphi}$, $T = 3mg\cos\varphi$; б) $T = mg\sqrt{3}$; в) $\cos\varphi = 1/\sqrt{3}$.

2.7 Брусок масою $m_2 = 5\ кг$ може вільно ковзати по горизонтальній поверхні без тертя. На ньому розміщений другий брусок масою $m_1 = 1\ кг$. Коефіцієнт тертя між поверхнями брусків $\mu = 0,3$. Визначити максимальне значення сили $F_{\max}$, прикладеної до нижнього бруска, за якого почнеться проковзування верхнього бруска.

Відповідь: $F_{\max} = 17,7\ Н$.

2.8 По горизонтальній площині за мотузку тягнуть санчата, маса яких із вантажем $m = 15\ кг$, із силою $F = 80\ Н$. Кут відхилення мотузки від горизонталі $\alpha = 60^0$. Коефіцієнт тертя санчат об сніг – $\mu = 0,05$. Знайти, з яким прискоренням рухаються санчата.

Відповідь: $a = 2,15\ м/с^2$.

2.9 На горизонтальній площині розміщений брусок масою $m_1 = 2\ кг$. Коефіцієнт тертя бруска по площині $\mu_1 = 0,2$. На бруску розміщений другий брусок масою $m_2 = 8\ кг$. Коефіцієнт тертя μ_2 верхнього бруска по нижньому дорівнює $\mu_2 = 0,3$. До верхнього бруска прикладена сила F. Визначити: а) значення сили F_1, за якого почнеться сумісне ковзання брусків по поверхні; б) значення сили F_2, за якої верхній брусок почне проковзувати відносно нижнього.

Відповідь: а) $F_1 = 20\,H$; б) $F_2 = 40\,H$.

2.10 До кінців невагомої та нерозтяжної нитки, що перекинута через невагомий та нерухомий блок, підвішені два вантажі масами $m_1 = 11$ *кг* і $m_2 = 7$ *кг*. Визначити силу натягу нитки та прискорення вантажів під час їх руху.

Відповідь: $a = 2{,}2\ м/с^2$; $N = 83{,}8\ H$.

2.11 Два однакових тіла масою M, кожне зв'язане між собою ниткою, яку перекинуто через блок із нерухомою віссю. До одного з цих тіл додають тягарець масою m. Визначити: а) силу натягу нитки; б) прискорення, з якими рухаються тіла; в) силу, з якою тягарець діє на тіло M; г) силу, з якою блок діє на вісь.

Відповідь: а) $T = \dfrac{2M(M+m)g}{2M+m}$; б) $a = \dfrac{mg}{2M+m}$;

в) $R = \dfrac{2Mmg}{2M+m}$; г) $F = 2T$.

2.12 На столі стоїть візок масою $m_1 = 4$ *кг*. До візка прив'язаний кінець мотузки, яка перекинута через невагомий і нерухомий блок. З яким прискоренням буде рухатися візок, коли до іншого кінця мотузки прив'язати вантаж масою $m_2 = 2$ *кг*? Коефіцієнт тертя візка об поверхню стола $\mu = 0{,}3$.

Відповідь: $a = 1{,}3\ м/с^2$.

2.13 Шайба, яку запустили по поверхні льоду з початковою швидкістю $v_0 = 20\ м/с$, зупинилася через $t = 40\,с$. Знайти коефіцієнт тертя шайби об лід.

Відповідь: $\mu = 0{,}05$.

2.14 Налетівши на пружинний буфер, вагон масою $m = 16$ т, що рухався зі швидкістю $v = 0{,}6\ м/с$, зупинився, стиснувши пружину на $\Delta l = 8\,см$. Знайти загальну жорсткість пружин буфера.

Відповідь: $k = 900$ *кН/м*.

2.15 Тіло лежить на похилій площині, яка складає з горизонтом кут $\alpha = 4^0$. За якого найбільшого коефіцієнта тертя тіло почне зісковзувати по похилій площині? З яким прискоренням a буде ковзати тіло по площині, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,03$? Який час необхідний для проходження за цих умов шляху $s = 100\,м$? Яку швидкість v тіло буде мати наприкінці шляху?

Відповідь: $\mu \le 0,07$; $a = 0,39\,м/с^2$; $t = 22,7\,с$; $\mathrm{v} = 8,85\,м/с$.

2.16 Вагон масою $m = 1\,000\,кг$ спускається по канатній залізничній дорозі з нахилом $\alpha = 15^0$ до горизонту. Визначити силу натягу T каната під час гальмування вагона наприкінці спуску, якщо швидкість вагона перед гальмуванням $\mathrm{v}_0 = 2,5\,м/с$, час гальмування $t = 6\,с$, а коефіцієнт тертя $\mu = 0,05$.

Відповідь: $T = 2,48 \cdot 10^3\ Н$.

2.17 Похила площина, що утворює кут $\alpha = 25^0$ із площиною горизонту, має довжину $l = 2\,м$. Тіло, рухаючись рівноприскорено, зісковзує з цієї площини за час $t = 2$ с. Визначити коефіцієнт тертя μ тіла по площині.

Відповідь: $\mu = 0,35$.

2.18 Невелике тіло пустили знизу вгору по похилій площині, яка становить кут $\alpha = 15^0$ з горизонтом. Знайти коефіцієнт тертя, якщо час підняття тіла був у $\eta = 2$ рази менший від часу спускання.

Відповідь: $\mu = 0,16$.

2.19 На вершині ідеально гладенької похилої площини, що утворює кут α з горизонтом, розміщено невагомий блок. Через блок перекинуто нерозтяжну й невагому нитку, до кінців якої прикріплено тягарці m_1 і m_2 (рис. 9). Знехтувавши тертям у блоці, визначити прискорення, з яким рухаються тягарці, та натяг нитки.

Відповідь: $a = \dfrac{(m_1 \sin\alpha - m_2)g}{m_1 + m_2}$;

$T = \dfrac{m_1 m_2 (1 + \sin\alpha)g}{m_1 + m_2}$.

2.20 Невагомий блок закріплено на вершині двох похилих площин, які утворюють кут $\alpha = 30^0$ і $\beta = 45^0$ з горизонтом (рис. 10). Через блок перекинуто нитку, до кінців якої прикріплені тіла масою $m_1 = 0,45\,кг$ і $m_2 = 0,5\,кг$. Нехтуючи тертям, знайти: прискорення, з яким рухаються тіла; силу натягу нитки.

Відповідь: $a = 1,33\ м/с^2$; $T = 2,8\ Н$.

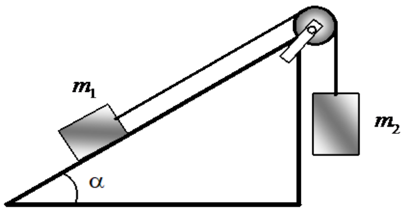


Рисунок 9

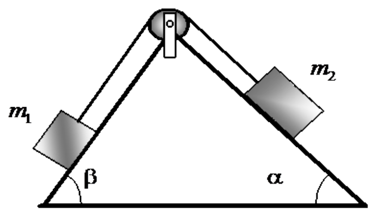


Рисунок 10

2.21 На вершині двох похилих площин, що утворюють з горизонтом кути α і β, закріплено невагомий блок (рис. 10). До нитки, яка перекинута через блок, прив'язані два тягарці масами m_1 і m_2. Визначити прискорення, з яким рухаються тіла вздовж похилих площин, якщо коефіцієнт тертя першого тіла по похилій площині μ_1, а другого – μ_2. Визначити силу натягу нитки та силу, з якою блок тисне на вісь. Тертям у блоці й масою нитки знехтувати.

Відповідь:

$$a = \frac{m_2(\sin\beta - \mu_2\cos\beta) - m_1(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha)}{m_1 + m_2} g;$$

$$F = 2T\sin\frac{\alpha+\beta}{2};\ T = \left[(m_2 - \frac{m_2^2}{m_1 + m_2})\cdot(\sin\beta - \mu_2\cos\beta) - \right.$$

$$\left. - \frac{m_1 m_2(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha)}{m_1 + m_2}\right] g.$$

2.22 Куля масою m = 45 кг обертається на нерозтяжній дротині довжиною l = 5 м у горизонтальній площині, здійснюючи n = 16 об/хв. Який кут α з вертикаллю утворює дротина і яка сила її натягу?

Відповідь: $\alpha = 47^0$; $T = 647\,H$.

2.23 За якої швидкості автомобіля тиск, з яким він діє на ввігнутий міст, у два рази більший від тиску, що діє на випуклий міст? Радіус кривизни в обох випадках $R = 30$ *м*.

Відповідь: $\text{v} = \sqrt{gR}\big/3 = 10\ м/с$.

2.24 Акробат на мотоциклі описує «мертву петлю» радіусом $r = 4\,м$. З якою найменшою швидкістю $\text{v}_{\min}$ має він пройти верхню точку петлі, щоб не зірватися?

Відповідь: $\text{v}_{\min} = 6,26\ м/с$.

2.25 До кронштейна, закріпленого на візку, підвішена на нитці куля масою $m = 5$ кг. На який кут відхилиться куля з ниткою від вертикалі під час руху візка з прискоренням $a =$ 0,5 м/с^2?

Відповідь: $\alpha = 2^0 54'$.

2.26 Літак летить зі швидкістю $\upsilon = 100$ м/с і описує вертикальну петлю Нестерова радіусом $R = 360$ м. Знайти силу, яка притискує льотчика масою $m = 80$ кг до сидіння: у нижній точці петлі; у верхній точці цієї петлі.

Відповідь: $N_1 = 3\ кН$; $N_2 = 1{,}44\ кН$.

2.27 До стелі рухомого ліфта на нитці підвішене тіло масою $m = 0{,}5\,кг$. Визначити силу натягу нитки під час руху ліфта вгору з прискоренням $a = 2\ м/с^2$; вниз із прискоренням $a = 2\,м/с^2$.

Відповідь: $T_1 = 5{,}9$ Н; $T_2 = 3{,}9$ Н.

2.28 Маса ліфта з пасажирами дорівнює $M = 800\,кг$. Визначити, з яким прискоренням і в якому напрямку рухається ліфт, коли відомо, що натяг троса, на якому тримається ліфт, дорівнює: 1) 1 2000 Н, 2) 6 000 Н.

Відповідь: $a_1 = 5{,}2\ м/с^2$, ліфт піднімається; $a_2 = -2{,}3\ м/с^2$, ліфт опускається.

2.29 Чавунне ядро масою m падає у воді зі сталою швидкістю v. З якою силою потрібно тягнути його вгору, щоб воно піднімалося зі швидкістю 2v ? Вважати, що сила опору води прямо пропорційна величині швидкості.

Відповідь: $F = 3mg\left(1 - \rho_B/\rho\right)$.

2.30 Катер масою $m = 2$ т починає рухатися й впродовж часу $\tau = 10\ с$ розвиває під час руху по спокійній воді швидкість $\text{v} = 4\ м/с$. Визначити силу тяги F мотора, вважаючи її сталою. Силу опору F_c руху вважати пропорційною швидкості; коефіцієнт опору $k = 100\ кг/с$.

Відповідь: $F = 1{,}03\,кН$.

3 ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

3.1 Основне рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

де $\vec{M}$ – момент сили, що діє на тіло; $\vec{L}$ – момент імпульсу тіла.

Основне рівняння динаміки обертального руху в інтегральній формі (у разі, коли момент інерції J є константою)

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon},$$

де $\vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення.

3.2 Момент імпульсу тіла, що обертається відносно деякої осі,

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, m\vec{\mathrm{v}}\right],$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор; $m\vec{\mathrm{v}}$ – імпульс тіла.

Момент імпульсу можна також виразити через кутові величини

$$\vec{L} = J\vec{\omega},$$

де $\vec{\omega}$ – кутова швидкість.

3.3 Момент сили F, що діє на тіло відносно осі обертання,

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Модуль момента сили визначається як

$$M = Fr\sin\alpha = Fl,$$

де α – кут між радіусом-вектором та вектором сили; l – **плече сили** – найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили.

3.4 Момент інерції матеріальної точки

$$J = mr^2,$$

де m – маса точки; r – відстань до осі обертання.

3.5 Момент інерції твердого тіла

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 ,$$

де r_i – відстань елемента маси Δm_i від осі обертання.

Це співвідношення в інтегральній формі має вигляд

$$J = \int r^2 dm .$$

Моменти інерції деяких тіл наведені в таблиці 1.

Якщо тіло однорідне, тобто його густина ρ однакова по всьому об’єму, то

$$dm = \rho dV \ \text{ і } \ J = \rho \int r^2 dV,$$

де V – об'єм тіла.

Теорема Штейнера. Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює

$$J = J_0 + ma^2,$$

де J_0 – момент інерції цього тіла відносно осі, що проходить через його центр тяжіння паралельно заданій осі; a – відстань між осями; m – маса тіла.

Таблиця 1 – Моменти інерції деяких тіл

Тіло	**Вісь, відносно якої визначається момент інерції**	**Формула для моменту інерції**
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l	Проходить через центр тяжіння стрижня перпендикулярно до нього	$J = \frac{ml^2}{12}$
	Проходить через кінець стрижня перпендикулярно до нього	$J = \frac{ml^2}{3}$
Тонке кільце, обруч, труба радіусом R і масою m, маховик радіусом R і масою m, розподіленою вздовж обода	Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$J = mR^2$

Продовження таблиці 1

Тіло	Вісь, відносно якої визначається момент інерції	Формула для моменту інерції
Круглий однорідний диск (циліндр) радіусом R і масою m	Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$J = \dfrac{mR^2}{2}$
Однорідна куля масою m і радіусом R	Проходить через центр кулі	$J = \dfrac{2mR^2}{5}$

3.6 Робота сталого моменту *M* сили, що діє на тіло, яке обертається,

$$A = M\varphi,$$

де φ – кут повороту тіла.

3.7 Миттєва потужність, що розвивається під час обертання тіла,

$$N = M\omega.$$

3.8 Кінетична енергія тіла, що обертається

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2}.$$

3.9 Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання

$$W_K = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

де $\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$ – кінетична енергія поступального руху тіла; v – швидкість центра інерції тіла; $\dfrac{J\omega^2}{2}$ – кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр інерції.

3.10 Зв’язок між роботою, яка виконується під час обертання тіла та зміною кінетичної енергії

$$A = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}.$$

Зв’язок між величинами, що характеризують поступальний і обертальний рух, наведений у таблиці 2.

Таблиця 2 – Порівняння законів, що описують поступальний та обертальний рух

Поступальний рух	**Обертальний рух**
Основний закон динаміки	
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$M = J\varepsilon$
Робота і потужність	
$A = \vec{F} \cdot \vec{s}$	$A = \vec{M} \cdot \vec{\varphi}$
$N = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}$	$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
Кінетична енергія	
$W_K = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$	$W_K = \dfrac{J\omega^2}{2}$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1

Обчислити момент інерції J прямокутника з дроту із сторонами $a = 12\,см$ і $b = 16\,см$ відносно осі, що лежить у площині прямокутника і проходить через середини малих сторін. Маса рівномірно розподілена по довжині дроту з лінійною густиною $\tau = 0{,}1\,кг/м$.

Розв'язування

$J - ?$

$a = 12\,см = 0{,}12\,м$,

$b = 16\,см = 0{,}16\,м$,

$\tau = 0{,}1\,кг/м$.

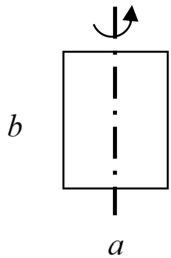


Рисунок 1

Момент інерції прямокутника буде дорівнювати сумі моментів інерції його сторін

$$J = 2J_a + 2J_b.$$

Момент інерції стрижня довжиною a, вісь обертання якого проходить через його центр мас, дорівнює

$$J_a = \frac{m_a a^2}{12},$$

де m_a – маса стрижня довжиною a.

Момент інерції стрижня з масою m_b, який становить сторону b, визначається співвідношенням

$$J_b = m_b \left(\frac{a}{2} \right)^2 .$$

Враховуючи, що маса рівномірно розподілена за довжиною дроту з лінійною густиною $\tau = 0{,}1\,кг/м$, знайдемо маси стрижнів

$$m_1 = \tau a \text{ і } m_2 = \tau b.$$

Із урахуванням одержаних виразів визначимо моменти інерції сторін прямокутника через відомі параметри

$$J_1 = \frac{\tau a^3}{12} \quad J_2 = \tau b \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \tau b \frac{a^2}{4} .$$

Отже, момент інерції прямокутника дорівнює

$$J = 2J_1 + 2J_2 = 2\frac{\tau a^3}{12} + 2\tau b \frac{a^2}{4} = \tau \frac{a^2}{2} \left(\frac{a}{3} + b \right).$$

Підставимо числові значення в одержаний вираз

$$J = 0{,}1 \frac{0{,}12^2}{2} \left(\frac{0{,}12}{3} + 0{,}16 \right) = 1{,}44 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2.$$

Відповідь: $J = 1{,}44 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2$.

Задача 3.2

Визначити момент інерції J тонкого однорідного стрижня довжиною $l = 30\,см$ і масою $m = 100\,г$ відносно осі, перпендикулярної до стрижня, яка проходить через: а) його кінець; б) його середину; в) точку, що віддалена від кінця стрижня на 1/3 його довжини.

Розв'язування

$J_C - ?$ $J_1 - ?$ $J_2 - ?$

$m = 100\,г = 0{,}1\,кг,$

$l = 30\,см = 0{,}3\,м,$

$a_1 = l/2,$

$a_2 = 2l/3.$

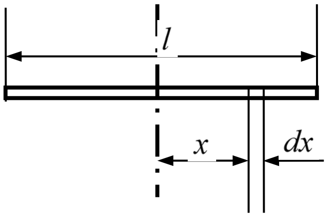


Рисунок 2

Момент інерції однорідного тіла визначається за формулою

$$J = \rho \int_V r^2 dV\,,$$

де ρ – густина тіла; V – його об'єм.

а) Уявно розіб'ємо стрижень на малі відрізки. Нехай x – відстань від одного з таких елементів стрижня до осі, а dx – його довжина. Тоді момент інерції цього елемента дорівнює

$$dJ_C = x^2 dm\,, \quad dm = \frac{m}{l} dx.$$

Після інтегрування знайдемо момент інерції однорідного тонкого стрижня відносно осі, що проходить перпендикулярно до стрижня через його середину:

$$J_C = 2\frac{m}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}.$$

Підставимо числові значення в одержаний вираз

$$J_C = \frac{0,1 \cdot 0,3^2}{12} = 7,5 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2.$$

Знаходження моменту інерції тіла відносно довільної осі значно спрощується, якщо використовувати теорему Штейнера: момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі його моменту інерції відносно осі, паралельній цій осі, що проходить через центр мас тіла I_C та добутку маси тіла на квадрат відстані a між осями:

$$J = J_C + ma^2.$$

б) Визначимо за допомогою теореми Штейнера момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через його кінець перпендикулярно до нього. У цьому разі

$$J_C = \frac{ml^2}{12} \quad \text{і} \quad a = \frac{l}{2}.$$

Тоді момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через його кінець

$$J = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Підставимо числові значення в одержаний вираз

$$J_1 = \frac{0,1 \cdot 0,3^2}{3} = 3 \cdot 10^{-3}\ кг \cdot м^2.$$

в) Визначимо за допомогою теореми Штейнера момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через точку, що віддалена від кінця стрижня на 1/3 його довжини.

У цьому разі

$$J_C = \frac{ml^2}{12} \quad \text{і} \quad a = \frac{2l}{3}.$$

Тоді момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через його кінець, дорівнює

$$J_2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{4ml^2}{9} = \frac{19ml^2}{36}.$$

Підставимо числові значення в одержаний вираз

$$J_2 = \frac{19 \cdot 0,1 \cdot 0,3^2}{36} = 4,75 \cdot 10^{-3}\ кг \cdot м^2.$$

Відповідь: а) $J_C = 7,5 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2$;
б) $J_1 = 3 \cdot 10^{-3}\ кг \cdot м^2$; в) $J_2 = 4,75 \cdot 10^{-3}\ кг \cdot м^2$.

Задача 3.3

Знайти момент інерції тонкого диска і суцільного циліндра відносно їх повздовжніх геометричних осей.

Розв'язування

$J - ?$
$\rho = const.$

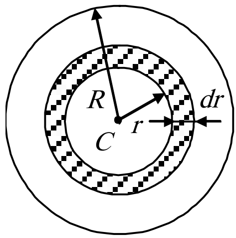


Рисунок 3

Будемо вважати, що диск і циліндр однорідні, тобто речовина розподілена в них із постійною густиною. Нехай вісь z проходить через центр диску C перпендикулярно до його площини (рис. 3). Розглянемо нескінченно тонке кільце з внутрішнім радіусом r і зовнішнім $r + dr$. Площа такого кільця дорівнює $dS = 2\pi r dr.$ Відповідно його момент інерції визначається співвідношенням $dJ = r^2 dm$. Момент інерції всього диска – $J = \int r^2 dm$. Враховуючи однорідність диска, знайдемо

$$dm = \frac{mdS}{S} = \frac{m2\pi rdr}{\pi R^2} = \frac{2mrdr}{R^2},$$

де $S = \pi R^2$ – площа всього диска. Вносячи цей вираз під знак інтеграла, одержимо

$$J = \int_0^R r^2 \frac{2mrdr}{R^2} = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\frac{r^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{1}{2}mR^2 . \qquad (1)$$

Формула (1) визначає також момент інерції однорідного суцільного циліндра відносно його повздовжньої геометричної осі.

Відповідь: $J = \frac{1}{2}mR^2$.

Задача 3.4

По дотичній до шківа маховика у вигляді диска діаметром $D = 75\,см$ і масою $m = 40\,кг$ прикладена сила $F = 1\,кН$ (рис. 4). Визначити кутове прискорення ε і частоту обертання ν маховика через час $t = 10\,с$ після початку дії сили, якщо відстань, на якій прикладається сила (радіус шківа), дорівнює $r = 12\,см$. Силою тертя знехтувати.

Розв’язування

$\varepsilon - ?\quad \nu - ?$

$D = 75\,см = 0,75\,м,$

$m = 40\,кг,$

$F = 1\,кН = 10^3\,Н,$

$t = 10\,с,$

$r = 12\,см = 0,12\,м.$

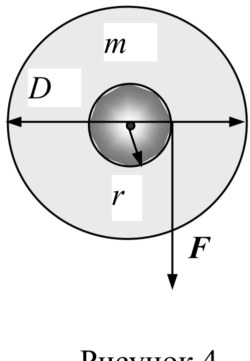


Рисунок 4

Запишемо для маховика основне рівняння динаміки обертального руху

$$M = J\varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{M}{J}, \tag{1}$$

де ε – кутове прискорення маховика; J – момент інерції; M – момент прикладеної сили.

Момент інерції диска дорівнює

$$J = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mD^2, \tag{2}$$

де r – радіус диска; D – його діаметр.

Момент сили F знайдемо зі співвідношення

$$M = Fr\sin\alpha = Fl, \tag{3}$$

де l – плече сили.

Підставивши співвідношення (2), (3) в (1), одержимо

$$\varepsilon = \frac{Fr}{\frac{1}{8}mD^2} = \frac{8Fr}{mD^2}. \tag{4}$$

Рух під дією сталої сили є рівноприскореним. Звідси кутова швидкість диска

$$\omega = \varepsilon t = \frac{8Fr}{mD^2}t.$$

За визначенням $\omega = 2\pi\nu$, де ν – частота обертання диска. У результаті одержимо

$$2\pi\nu = \frac{8Fr}{mD^2}t\ ,$$

$$\nu = \frac{4Ftr}{\pi m D^2}\ . \qquad (5)$$

Підставивши числові значення величин у співвідношення (4), (5), знайдемо остаточно

$$\varepsilon = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0,12}{40 \cdot (0,75)^2} = 42,67\,\text{рад/с}^2,$$

$$\nu = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,12}{3,14 \cdot 40 \cdot (0,75)^2} = 67,9\ c^{-1}\ .$$

Перевіримо розмірності одержаних величин

$$[\varepsilon] = \frac{[F]\cdot[r]}{[m]\cdot[D]^2} = \frac{Н \cdot м}{кг \cdot м^2} = \frac{кг \cdot м/c^2}{кг \cdot м} = \frac{1}{c^2}\ ,$$

$$[\nu] = \frac{[F][t][r]}{[m][D]^2} = \frac{Н \cdot c \cdot м}{кг \cdot м^2} = \frac{кг \cdot м/c^2 \cdot c}{кг \cdot м} = \frac{1}{c}\ .$$

Відповідь: $\varepsilon = 42,67$ *рад/с*^{2}; $\nu = 67,9\,c^{-1}$.

Задача 3.5

Блок, що має форму диска масою $m = 0,4\,кг$, обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені тягарці масами $m_1 = 0,3\,кг$ і $m_2 = 0,7\,кг$ (рис. 5). Визначити сили натягу T_1 і T_2 нитки з обох сторін блока.

Розв'язування

$T_1 - ?\quad T_2 - ?$
$m = 0,4\,кг,$ $m_1 = 0,3\,кг,$ $m_2 = 0,7\,кг.$

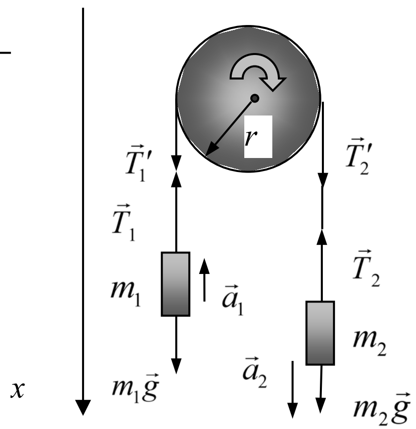


Рисунок 5

Для розв'язання задачі скористаємося рівняннями обертального та поступального руху тіл. Оскільки $m_2 > m_1$, то $m_2 g > T_2$. Рівнодійна сил тяжіння і натягу нитки викликає рівноприскорений рух системи, водночас обертання блока здійснюється за годинниковою стрілкою (рис. 5). Для тіл, що рухаються поступально, можна записати другий закон Ньютона:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1, \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_1, \end{cases}$$

де g – прискорення вільного падіння.

У проєкціях на вісь x ці рівняння будуть мати вигляд

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = -m_1 a_1, & (1) \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2. & (2) \end{cases}$$

Згідно з основним рівнянням обертального руху для блока одержимо вираз

$$M = J\varepsilon\,, \tag{3}$$

де M – момент сил, прикладених до блока; J – момент інерції блока; ε – кутове прискорення блока.

Визначимо обертальний момент сил. Врахуємо водночас, що прискорення вантажів однакові $a_1 = a_2 = a$. Сили натягу ниток діють не лише на вантажі, а й на диск. За третім законом Ньютона сили $\vec{T}_1'$ і $\vec{T}_2'$, що прикладені до блока, дорівнюють відповідно силам $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, але за напрямком протилежні їм. Під час руху вантажів блок прискорено обертається за годинниковою стрілкою, отже, $T_2' > T_1'$. Для обертального моменту сил, що прикладені до блока, можна записати:

$$M = (T_2' - T_1')r\,. \tag{4}$$

Кутове прискорення блока пов’язане з лінійним прискоренням вантажів співвідношенням

$$\varepsilon = \frac{a}{r}. \tag{5}$$

Підставивши вирази (4) та (5) у (5), одержимо

$$(T_2' - T_1')r = J\frac{a}{r}. \tag{6}$$

Момент інерції блока дорівнює

$$J = \frac{1}{2}mr^2. \tag{7}$$

Тоді

$$(T_2' - T_1')r = \frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r}.$$

Після скорочення одержимо

$$T_2' - T_1' = \frac{ma}{2}. \tag{8}$$

Враховуючи, що $T_2' = T_2$, а $T_1' = T_1$, одержимо

$$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}. \tag{9}$$

Розв’яжемо спільно систему трьох рівнянь (1), (2) і (9). Із рівняння (1) a дорівнює

$$a = \frac{T_1 - mg}{m_1}. \tag{10}$$

Підставивши це рівняння у (2), одержимо

$$m_2 g - T_2 = m_2 \frac{T_1 - m_1 g}{m_1}$$

або

$$T_2 = m_2 g - \frac{m_2 (T_1 - m_1 g)}{m_1}. \qquad (11)$$

Підставимо це рівняння у (9) та знайдемо

$$m_2 g - \frac{m_2 (T_1 - m_1 g)}{m_1} - T_1 = \frac{m}{2} \frac{T_1 - m_1 g}{m_1}. \qquad (12)$$

Після низки перетворень співвідношення (12) визначимо T_1

$$\begin{aligned} 2(m_1 m_2 g - m_2 T_1 + m_1 m_2 g - T_1 m_1) &= m T_1 - m m_1 g, \\ 4 m_1 m_2 g - 2 m_2 T_1 - 2 m_1 T_1 - m T_1 + m m_1 g &= 0, \\ 2 m_2 T_1 + 2 m_1 T_1 + m T_1 &= 4 m_1 m_2 g + m m_1 g, \end{aligned}$$

$$T_1 = \frac{(4 m_1 m_2 + m m_1) g}{2 m_2 + 2 m_1 + m} = \frac{m_1 g (4 m_1 + m)}{2(m_1 + m_2) + m}. \qquad (13)$$

Підставивши цей вираз (13) у (11), одержимо

$$T_2 = m_2 g - \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{g (4 m_1 m_2 + m m_1)}{2 m_2 + 2 m_1 + m} - m_1 g \right). \qquad (14)$$

Після підстановки числових значень величин у співвідношення (13) і (14), одержимо кінцевий результат

$$T_1 = \frac{0,3 \cdot 9,8(4 \cdot 0,3 + 0,4)}{2(0,3 + 0,7) + 0,4} = 1,96\ H,$$

$$T_2 = 0,7 \cdot 9,8 - \frac{0,7}{0,3}\left(\frac{0,3 \cdot 9,8(4 \cdot 0,3 + 0,4)}{2(0,3 + 0,7) + 0,4} - 0,3 \cdot 9,8\right) = 9,15\ H.$$

Зрозуміло, що одиниця вимірювання одержаних величин – ньютон.

Відповідь: $T_1 = 1,96\ H$; $T_2 = 9,15\ H$.

Задача 3.6

По горизонтальній площині котиться диск зі швидкістю $\mathrm{v} = 8\ м/с$ (рис. 6). Визначити коефіцієнт опору, якщо диск зупинився, пройшовши шлях $S = 18\ м$.

Розв’язування

$\mu - ?$

$\mathrm{v} = 8\ м/с$,

$S = 18\ м.$

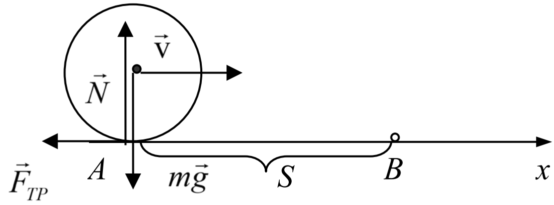


Рисунок 6

Для розв’язання задачі скористаємося законом збереження енергії. У точці *A* (рис. 6) тіло має кінетичну енергію W_K, яка складається з енергії поступального та обертального руху. У точці *B* ця енергія дорівнює 0. Кінетична енергія витрачається на виконання роботи проти неконсервативних сил (сили тертя $F_{тр}$)

$$\Delta W_K = W_{KB} - W_{KA} = A_{тр}, \qquad (1)$$

$$\Delta W_K = W_{KA} = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{m\text{v}^2}{2}, \qquad (2)$$

де J – момент інерції диска; ω – його кутова швидкість.

Робота, що здійснюється тілом, дорівнює

$$A = -FS = -\mu mgS, \qquad (3)$$

де μ – коефіцієнт тертя.

Підставивши співвідношення (1) і (2) в (3), одержимо

$$\frac{J\omega^2}{2} + \frac{m\text{v}^2}{2} = \mu mgS. \qquad (4)$$

Для диска момент інерції дорівнює

$$J = \frac{1}{2} mR^2, \qquad (5)$$

де R – радіус диска.

Кутову швидкість обертання диска знайдемо зі співвідношення

$$\omega = \frac{\text{v}}{R}. \qquad (6)$$

Звідси, підставивши вирази (5) і (6) у (4), одержимо

$$\frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{2R^2}+\frac{mv^2}{2}=\mu mgS\,. \qquad (7)$$

Після низки перетворень це співвідношення набере вигляду

$$\frac{v^2}{4}+\frac{v^2}{2}=\mu gS\,. \qquad (8)$$

Із виразу (8) знайдемо μ:

$$\mu=\frac{3v^2}{4gS}\,. \qquad (9)$$

Після підстановки числових значень величин у (9) одержимо

$$\mu=\frac{3\cdot 8^2}{4\cdot 9{,}8\cdot 18}=0{,}27\,.$$

Перевіримо одиниці одержаної величини

$$[\mu]=\frac{[v]^2}{[g]\cdot[S]}=\frac{(м/с)^2}{м/с^2\cdot м}=1\,.$$

Відповідь: $\mu=0{,}27$.

Задача 3.7

Маховик у вигляді диска, маса якого $m=20\,кг$, обертався з частотою $\nu=480\,хв^{-1}$, а потім після припинення дії сили внаслідок тертя зупинився. Знайти момент M сили тертя у двох випадках: 1) маховик зупинився через $t = 50\,с$; 2) маховик до повного зупинення виконав $N = 200$ обертів. Радіус маховика $r = 20\,см$. Момент сили тертя вважати сталим.

Розв'язування

$\mu - ?$
$m = 20\,кг$, $\nu = 480\,хв^{-1} = 8\,с^{-1}$, $r = 20\,см = 0{,}2\,м$, $t = 50\,с$, $N = 200.$

1 Згідно основного закону динаміки обертального руху зміна моменту імпульса ΔL обертового тіла дорівнює добутку моменту сили M, що діє на тіло, на час Δt дії цього моменту

$$\Delta L = M\Delta t. \qquad (1)$$

З іншого боку зміна моменту імпульса визначається співвідношенням

$$\Delta L = J\omega_2 - J\omega_1, \qquad (2)$$

де J – момент інерції маховика; ω_1 та ω_2 – початкова та кінцева кутові швидкості. Згідно з умовою задачі $\omega_2 = 0$, а $\Delta t = t$, тоді після підстановки (2) в (1) з урахуванням вищезазначеного одержимо для моменту сили вираз

$$M = -\frac{J\omega_1}{t}. \qquad (3)$$

Момент інерції диска відносно його геометричної осі дорівнює

$$J = \frac{mR^2}{2}. \tag{4}$$

Підставимо вираз (4) у формулу (3) та одержимо

$$M = -\frac{mR^2\omega_1}{2t}.$$

Кутова швидкість пов'язана з частотою співвідношенням

$$\omega = 2\pi\nu ,$$

тоді

$$M = -\frac{mR^2\pi\nu}{t}. \tag{5}$$

Підставимо числові значення у (5) та виконаємо розрахунки

$$M = -\frac{50 \cdot 0,2^2 \cdot 3,14 \cdot 8}{50} = -1\ H \cdot м .$$

Виконаємо перевірку розмірності

$$[M] = -\frac{[m][R]^2[\nu]}{[t]} = \frac{кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}}{с} = \frac{кг \cdot м^2}{с^2} = H \cdot м .$$

2 В умові задачі задане число обертів, виконаних маховиком до зупинення, тому ми можемо визначити його кутове переміщення

$$\varphi = 2\pi N . \tag{6}$$

Застосуємо співвідношення між роботою, яка виконується під час обертання тіла та зміною кінетичної енергії

$$A = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} ,$$

або з урахуванням, що $\omega_2 = 0$

$$A = -\frac{J\omega_1^2}{2} . \tag{7}$$

Робота під час обертального руху визначається за формулою

$$A = M\varphi . \tag{8}$$

Прирівняємо (7) і (8)

$$-\frac{J\omega_1^2}{2} = M\varphi ,$$

звідки знайдемо момент сили, врахувавши (4), (5) і (6)

$$M = -\frac{J\omega_1^2}{2\varphi} = -\frac{mR^2\left(2\pi\nu\right)^2}{2\cdot 2\cdot 2\pi N} = -\frac{mR^2\pi\nu^2}{2N} .$$

Підставимо числові значення та виконаємо розрахунки

$$M = -\frac{50 \cdot 0,2^2 \cdot 3,14 \cdot 8^2}{400} = -1\,H\,.$$

Знак мінус показує, що момент сили тертя виконує гальмівну дію.

Перевіримо розмірність одержаних величин

$$[M] = -\frac{[m][R]^2[\nu]^2}{[N]} = \frac{кг \cdot м^2 \cdot \left(c^{-1}\right)^2}{1} = \frac{кг \cdot м^2}{c^2} = H \cdot м\,.$$

Відповідь: 1) $M = -1H$; 2) $M = -1H$.

Задача 3.8

Людина масою $m = 60\,кг$, яка стоїть на краю горизонтальної платформи радіусом $R = 1\,м$ і масою $M = 120\,кг$, яка обертається за інерцією навколо нерухомої вертикальної осі з частотою $\nu_1 = 10\,хв^{-1}$, переходить до її центра (рис. 7). Вважаючи платформу круглим однорідним диском, а людину – точковою масою, визначити, яку роботу здійснить людина під час переходу від краю платформи до її центра.

$A - ?$
$M = 120\,кг$,
$m = 60\,кг$,
$\nu_1 = 10\,хв^{-1} = 0,167\,c^{-1}$,
$R = 1\,м$.

Розв’язування

Робота дорівнює різниці кінетичних енергій платформи

$$A = W_{K2} - W_{K1}\,,$$

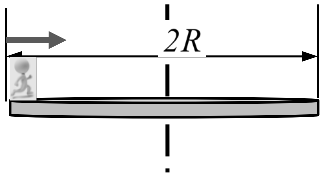


Рисунок 7

де $W_{K1} = \dfrac{J_1\omega_1^2}{2}$ і

$$W_{K2} = \frac{J_2\omega_2^2}{2}.$$

Тоді

$$A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}.$$

Кутова швидкість пов’язана з частотою обертання співвідношенням

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1; \quad \omega_2 = 2\pi\nu_2.$$

Кутову швидкість платформи в разі, коли людина переходить до її центра, знайдемо з закону збереження моменту імпульсу

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

де $J_1 = J + J_л$. $J_2 = J$.

Момент інерції людини за умовою задачі $I_л = mR^2$. Момент інерції диска-платформи

$$J = \frac{MR^2}{2}.$$

Тоді закон збереження моменту імпульсу

$$\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)2\pi\nu_1 = \omega_2\frac{MR^2}{2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{(M+2m)2\pi\nu_1}{M}.$$

$$A=\frac{MR^2}{2}\left(\frac{(M+2m)2\pi\nu_1}{M}\right)^2-\frac{\left(\frac{MR^2}{2}+mR^2\right)4\pi^2\nu_1^2}{2}=$$

$$=2\pi^2\nu_1^2R^2(M+2m)\left(\frac{M+2m}{M}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2\pi^2\nu_1^2R^2(M+2m)\left(\frac{2m}{M}+\frac{1}{2}\right).$$

$$A=2\pi^2\nu_1^2R^2(M+2m)\left(\frac{2m}{M}+\frac{1}{2}\right).$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз і проведемо розрахунки

$$A=2\pi^2\cdot 0{,}167^2\cdot 1^2(120+2\cdot 60)\left(\frac{2\cdot 60}{120}+\frac{1}{2}\right)=198\ \text{Дж}.$$

Відповідь: A = 198 *Дж*.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

3.1 Знайти момент інерції тонкого однорідного стрижня довжиною l і масою m відносно перпендикулярної осі, що проходить: а) через один із кінців стрижня; б) через середину стрижня; в) на відстані $a = 1/4l$ від одного з кінців стрижня.

Відповідь: а) $J = \dfrac{ml^2}{3}$; б) $J = \dfrac{ml^2}{12}$; в) $J = \dfrac{7ml^2}{48}$.

3.2 Визначити момент інерції системи, яка складається з чотирьох точкових мас m, розміщених у вершинах квадрату з стороною a, відносно осі, що проходить через центр квадрата у разі, коли вісь лежить у площині квадрата та утворює з діагоналлю гострий кут, який не дорівнює 45^0.

Відповідь: $J = ma^2$.

3.3 Система складається з чотирьох кульок масами 1, 2, 3 та 4 г, які розміщені у вершинах квадрата із стороною 10 см. Визначте момент інерції системи відносно осі, що перпендикулярна до площини квадрата та проходить через кульки: а) першу; б) другу; в) третю; г) четверту.

Відповідь:

$а)\ J = 10,24 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2$; $б)\ J = 9,66 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2$;

$в)\ J = 11,41 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2$; $г)\ J = 6,82 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2$.

3.4 Система складається з чотирьох кульок масами 1, 2, 3 та 4 г, які розміщені на одній прямій. Відстань між сусідніми кульками 10 см. Визначте момент інерції системи відносно осі, перпендикулярній до прямої, на якій містяться кульки і яка проходить через кульки: а) першу; б) другу; в) третю; г) четверту.

Відповідь: $а)\ J = 5 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2;\ б)\ J = 2 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2;$
$в)\ J = 1 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2;\ г)\ J = 2 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2.$

3.5 Обчислити момент інерції J прямокутника з дроту зі сторонами $a = 12\,см$ і $b = 16\,см$ відносно осі, що лежить у площині прямокутника і проходить через середини малих сторін. Маса рівномірно розподілена по довжині дроту з лінійною густиною $\tau = 0{,}1\,кг/м$.

Відповідь: $J = 1{,}44 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2$.

3.6 Знайти момент інерції та момент імпульсу Земної кулі відносно осі обертання.

Відповідь: $J = 9{,}7 \cdot 10^{37}\ кг \cdot м^2;\ L = 7 \cdot 10^{33}\ кг \cdot м^2/с$.

3.7 Знайти момент інерції тонкого диска й суцільного циліндра відносно їх повздовжніх геометричних осей.

Відповідь: $J = 1/2\, mR^2$.

3.8 Визначити момент інерції J тонкого однорідного стрижня довжиною $l = 30\,см$ і масою $m = 100\,г$ відносно осі, перпендикулярної до стрижня, яка проходить через: а) його кінець; б) його середину; в) точку, що віддалена від кінця стрижня на 1/3 його довжини.

Відповідь: а) $J_C = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ кг \cdot м^2$;
б) $J_1 = 3 \cdot 10^{-3}\ кг \cdot м^2$; в) $J_2 = 4{,}75 \cdot 10^{-3}\ кг \cdot м^2$.

3.9 Тонкий однорідний стрижень довжиною $l = 50\,см$ і масою $m = 400\,г$ обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon = 3\,рад/с^2$ навколо осі, що проходить перпендикулярно до стрижня через його середину. Визначити обертальний момент M .

Відповідь: $M = 0{,}025\,H \cdot м.$

3.10 Куля масою $m = 10\,кг$, радіус якої становить $R = 20\,см$, обертається навколо осі, що проходить через його центр. Рівняння обертання кулі має вигляд

$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, де $B = 4\,рад/с^2$, $C = -1\,рад/с^3$. Знайти закон зміни моменту сил, які діють на кулю. Визначити момент сили в момент часу $t = 2\,с$.

Відповідь: $M = -0,64\,H \cdot м$.

3.11 Маховик у вигляді диска, маса якого $m = 20\,кг$, обертався із частотою $\nu = 480\,хв^{-1}$, а потім після припинення дії сили внаслідок тертя зупинився. Знайти момент M сили тертя у двох випадках: 1) маховик зупинився через $t = 50\,с$; 2) маховик до повного зупинення виконав $N = 200$ обертів. Радіус маховика $r = 20\,см$. Момент сили тертя вважати сталим.

Відповідь: 1) $M = -1\,H$; 2) $M = -1\,H$.

3.12 Вал масою $m = 100\,г$, радіус якого становить $R = 5\,см$, обертався з частотою $\nu = 8\,с^{-1}$. До циліндричної поверхні вала притисли гальмівну колодку з силою $F = 40\,H$, під дією якої вал зупинився через $t = 40\,с$. Визначити коефіцієнт тертя μ між колодкою та валом.

Відповідь: $\mu = 0,31$.

3.13 Двигун рівномірно обертає маховик. Після вимкнення двигуна маховик упродовж $t = 30\,с$ виконує $N = 120$ обертів і зупиняється. Момент інерції маховика $I = 0,3\,кг \cdot м^2$. Визначте потужність двигуна за рівномірного обертання маховика.

Відповідь: $N = 26\,Вт$.

3.14 Яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити частоту обертання маховика масою $m = 0,5\,кг$ від 0 до 120 $хв^{-1}$? Вважати, що маса маховика розподілена рівномірно по ободу. Тертям знехтувати.

Відповідь: $A = 22,2\,кДж$.

3.15 Махове колесо, яке має момент інерції $J = 245\,кг \cdot м^2$, під час обертання виконує $20\,об/с$. Через хвилину після того, як на колесо припинив діяти обертальний момент, воно зупинилося. Знайти: 1) момент сил тертя; 2) число обертів, які виконало колесо до зупинення після припинення дії сил.

Відповідь: $M = 513\,Н \cdot м$; $N = 600$ обертів.

3.16 Куля та суцільний циліндр однакової маси, виготовлені з одного й того самого матеріалу, котяться без ковзання з однаковою швидкістю. Визначити, в скільки разів кінетична енергія кулі менша за кінетичну енергію циліндра.

Відповідь: $W_{K_2} / W_{K_1} = 1,07.$

3.17 Диск масою $2\,кг$ котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю $4\,4\,м/с$. Знайти кінетичну енергію диска.

Відповідь: $W_K = 24\,Дж.$

3.18 Обруч і диск мають однакову масу й котяться без ковзання з однаковою лінійною швидкістю v. Кінетична енергія обруча дорівнює $40\,Дж$. Знайти кінетичну енергію диска.

Відповідь: $W_K = 29,4\,Дж.$

3.19 Який шлях пройде диск, що котиться без проковзування, піднімаючись угору по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^0$, якщо йому надана початкова швидкість $v_0 = 7\ м/с$, паралельно похилій площині?

Відповідь: $s = 7,5\ м$.

3.20 Диск масою $m = 2\,кг$ котиться без ковзання по горизонтальній поверхні зі швидкістю $v = 2\ м/с$. На якій відстані можна його зупинити, приклавши до обода силу $F = 9{,}8$ Н?

Відповідь: $S = 0{,}61$ м.

3.21 Знайти лінійні швидкості руху центрів мас 1) кулі; 2) диску та обруча, які скочуються без ковзання з похилої площини висотою h.

Відповідь: $v_1 = \sqrt{1{,}43gh}$; $v_2 = \sqrt{1{,}33gh}$; $v_3 = \sqrt{gh}$.

3.22 Махове колесо починає обертатися з кутовим прискоренням $\varepsilon = 0{,}5\ рад/с^2$. Через $t_1 = 15\,с$ після початку руху його момент імпульсу дорівнює $L = 73{,}5\,кг \cdot м^2/с$. Знайти кінетичну енергію колеса через $t_2 = 20\,с$ після початку руху.

Відповідь: $W_K = 440\,Дж$.

3.23 Тонкий однорідний стрижень довжиною $l = 1\,м$ може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через точку О на стрижні (рис. 8). Стрижень відхилили від вертикалі на кут α і відпустили. Визначити для початкового моменту часу кутове ε і тангенціальне a_τ прискорення точки В на стрижні. Розрахунок виконати для таких випадків: а) $a = 0$, $b = 2/3l$, $\alpha = \pi/2$; б) $a = l/3$, $b = l$, $\alpha = \pi/3$; в) $a = l/4$, $b = l/2$, $\alpha = 2/3\pi$.

Відповідь: а) $\varepsilon = 14{,}7\ рад/с^2$, $a_\tau = g = 9{,}80\ м/с^2$; б) $\varepsilon = 12{,}7\ рад/с^2$, $a_\tau = 8{,}49\ м/с^2$; в) $\varepsilon = 14{,}6\ рад/с^2$, $a_\tau = 7{,}27\ м/с^2$.

3.24 Однорідний диск радіусом $R = 10\ см$ може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка перпендикулярна до площини диска і проходить через точку О на ньому (рис. 9). Диск відхилили на кут α і відпустили. Визначити для початкового моменту часу кутове ε і тангенціальне прискорення точки В, що розміщена на диску. Розрахунок провести для таких випадків: а) $a = R$, $b = R/2$,

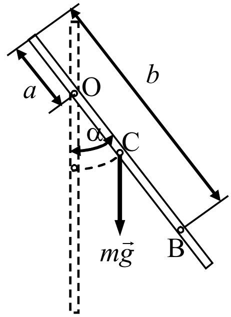


Рисунок 8

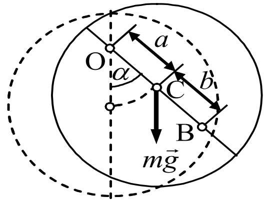


Рисунок 9

$\alpha = \pi/2$; б) $a = R/2$, $b = R$, $\alpha = \pi/6$; в) $a = 2/3\,R$, $b = 2/3\,R$, $\alpha = 2/3\,\pi$.

Відповідь: а) $\varepsilon = 65{,}3\ рад/с^2$, $a_\tau = 9{,}8\ м/с^2$; б) $\varepsilon = 32{,}7\ рад/с^2$, $a_\tau = 4{,}9\ м/с^2$; в) $\varepsilon = 59{,}9\ рад/с^2$, $a_\tau = 7{,}99\ м/с^2$.

3.25 До кінців легкої нерозтяжної нитки, перекинутої через блок, підвішені вантажі масами $m_1 = 0{,}2\ кг$ і $m_2 = 0{,}3\ кг$. У скільки разів відрізняються сили, що діють на нитку по обидва боки від блока, якщо маса блока $m = 0{,}4\ кг$, а його вісь рухається вертикально вгору з прискоренням $a = 2\ м/с^2$? Силами тертя і проковзуванням нитки по блоку знехтувати.

Відповідь: у $n = 1{,}13$ раза.

3.26 На шків маятника Обербека (рис. 10) намотано нитку, до якої підвішений тягарець $M = 1\ кг$. Тягарець опускається з висоти $h = 1\ м$. Радіус шківа $r = 3\ см$. На хрестовині закріплено чотири тягарці масою $m = 250\ г$ кожний на відстані від осі $R = 30\ см$. Маса кожного стрижня $m_1 = 0{,}12\ кг$, довжина – $l = 0{,}4\ м$. Знайти кутове прискорення обертання маятника та прискорення, з яким опускається тягарець.

Відповідь: $\varepsilon = 0,26\ рад/с^2$; $a = 2,2\ м/с^2$.

3.27 Маховик, що має форму диска, радіусом $R = 40\ см$ і масою $m_1 = 48\ кг$ може обертатися навколо горизонтальної осі. До його циліндричної поверхні прикріплено кінець нерозтяжної нитки, а до другого кінця підвішений вантаж масою $m_2 = 0,2\ кг$ (рис. 11). Вантаж підня-

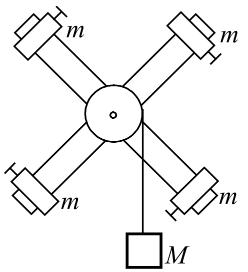


Рисунок 10

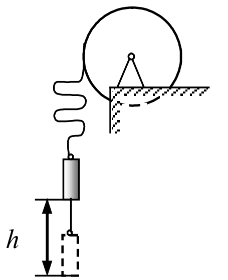


Рисунок 11

ли, а потім відпустили. Упавши вільно з висоти $h = 2\ м$, вантаж натягнув нитку і завдяки цьому привів маховик в обертання. Яку кутову швидкість вантаж надав при цьому маховику?

Відповідь: $\omega = 0,13\ рад/с$.

3.28 Через нерухомий блок масою $m = 0,2\,кг$ перекинули шнур, до кінців якого підвісили вантажі масами $m_1 = 0,3\,кг$ і $m_2 = 0,5\,кг$. Визначити сили T_1 і T_2 натягу шнура по обидва боки блока та прискорення a вантажів під час їх руху. Маса блока рівномірно розподілена по ободу.

Відповідь: $T_1 = 3,53\,Н$; $T_2 = 3,92\,Н$; $a = 1,96\ м/с^2$.

3.29 Із колодязя за допомогою коловорота піднімали відро з водою масою $m = 10\ кг$. У момент, коли відро розміщувалося на висоті $h = 5\ м$ від поверхні води, рукоятка звільнилася, і відро стало рухатися вниз. Визначити лінійну швидкість рукоятки в момент удару відра об поверхню води в колодязі, якщо радіус рукоятки $R = 30\ см$, радіус вала коловорота $r = 10\ см$, його маса $m_1 = 20\ кг$. Тертям і масою троса, на якому підвішене відро, знехтувати.

Відповідь: $\mathrm{v} = 21\ м/с$.

3.30 Людина масою $m = 60\,кг$, яка стоїть на краю горизонтальної платформи радіусом $R = 1\,м$ і масою $M = 120\,кг$, яка обертається за інерцією навколо нерухомої вертикальної осі з частотою $\nu_1 = 10\,хв^{-1}$, переходить до її центра. Вважаючи платформу круглим однорідним диском, а людину – точковою масою, визначити, яку роботу здійснить людина під час переходу від краю платформи до її центра.

Відповідь: $A = 198\ Дж$.

4 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

4.1 Імпульс матеріальної точки

$$\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}.$$

Закон збереження імпульсу для ізольованої системи

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const, \text{ або } \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathrm{v}}_i = const,$$

де N – кількість матеріальних точок (тіл) системи.

4.2 Робота

Робота, яка здійснюється сталою силою:

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r}, \text{ або } \Delta A = F\Delta r\cos\alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів сили $\vec{F}$ та переміщення $\Delta\vec{r}$.

Робота, яка здійснюється змінною силою:

$$A = \int_L F(\vec{r})\cos\alpha(\vec{r})\,dr,$$

де інтегрування ведеться вздовж траєкторії L.

4.3 Потужність

Середня потужність за інтервал часу Δt

$$< N > = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Миттєва потужність

$$N = \frac{dA}{dt}, \text{ або } N = F\text{v}\cos\alpha .$$

4.4 Механічна енергія

Кінетична енергія матеріальної точки (тіла, що рухається поступально)

$$W_K = \frac{m\text{v}^2}{2}, \text{ або } W_K = \frac{p^2}{2m}.$$

Потенціальна енергія тіла і сила, що діє на тіло в цій точці поля, пов’язані співвідношенням

$$\vec{F} = -\text{grad}\, W_П, \text{ або } \vec{F} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial W_П}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial W_П}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial W_П}{\partial z} \right),$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти. Якщо поле сил має сферичну симетрію, одержимо

$$F = \frac{dW_П}{dr}.$$

Потенціальна енергія пружно-деформованого тіла

$$W_П = \frac{kx^2}{2}.$$

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (тіл) масами m_1 і m_2, що розміщені на відстані r:

$$W_П = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Потенціальна енергія тіла, що міститься в однорідному полі сили тяжіння:

$$W_П = mgh,$$

де h $(h<<R)$ – висота тіла над нульовим рівнем; R – радіус Землі.

4.5 Закони збереження

Консервативними називаються сили, робота яких по замкнутому контуру дорівнює нулю:

$$A = \oint_L \vec{F}d\vec{l} = 0.$$

В ізольованій системі, в якій діють лише консервативні сили, виконується **закон збереження енергії**

$$W_К + W_П = const.$$

Закон збереження моменту імпульсу для ізольованої системи

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const\ .$$

Для двох взаємодіючих тіл закон збереження моменту імпульсу запишеться так:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2',$$

де $J_1, J_2, \omega_1, \omega_2$ – моменти інерції та кутові швидкості тіл до взаємодії; $J`_1, J`_2, \omega`_1, \omega`_2$ – ті самі величини після взаємодії.

Закон збереження моменту імпульсу для одного тіла з змінним моментом інерції

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

де J_1 і J_2 – початковий і кінцевий моменти інерції; ω_1 і ω_2 – початкова та кінцева кутова швидкості тіла.

4.6 Робота та енергія твердого тіла

Робота сталого моменту *M* сили, що діє на тіло, яке обертається,

$$A = M\varphi,$$

де φ – кут повороту тіла.

Миттєва потужність, що розвивається під час обертання тіла,

$$N = M\omega .$$

Кінетична енергія тіла, що обертається,

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2} .$$

Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання,

$$W_K = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} ,$$

де $\frac{m\mathrm{v}^2}{2}$ – кінетична енергія поступального руху тіла; v – швидкість центра інерції тіла; $\frac{J\omega^2}{2}$ – кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр інерції.

Зв'язок між роботою, що здійснюється під час обертання тіла і зміною його кінетичної енергії,

$$A = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} .$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 4.1

Човен довжиною $l = 3\,м$ і масою $m = 120\,кг$ стоїть на спокійній воді. На носі та кормі перебувають два рибалки масою $m_1 = 60\,кг$ і $m_2 = 90\,кг$ (рис. 1). На скільки зміститься човен відносно води, якщо рибалки поміняються місцями?

Розв'язування

$x - ?$

$l = 3\,м,$
$m = 120\,кг,$
$m_1 = 60\,кг,$
$m_2 = 90\,кг.$

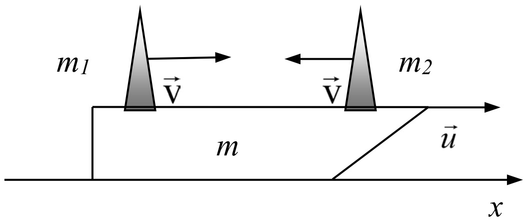


Рисунок 1

Запишемо закон збереження імпульсу для механічної системи «рибалки-човен». Врахуємо, що в початковий момент часу система була в стані спокою, а під час руху рибалок зі швидкістю v відносно човна почнеться його рух зі швидкістю u відносно дна озера. У вибраній системі відліку (відносно землі) закон збереження імпульсу має вигляд

$$m_1(\vec{\text{v}} + \vec{u}) + m_2(\vec{\text{v}} + \vec{u}) + m\vec{u} = 0\,. \qquad (1)$$

У проєкції на вісь x співвідношення (1) запишеться так:

$$m_1(u+\mathrm{v})+m_2(\mathrm{v}+u)+mu=0.$$

Розв’яжемо це рівняння відносно *u:*

$$m_1u+m_1\mathrm{v}+m_2\mathrm{v}-m_2u+mu=0,$$
$$m_1u+m_2u+mu=m_2\mathrm{v}-m_1\mathrm{v},$$
$$u(m_1+m_2+m)=(m_2-m_1)\mathrm{v},$$
$$u=\frac{(m_2-m_1)}{m_1+m_2+m}\mathrm{v}.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на час руху t, визначимо зміщення човна

$$ut=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m}\mathrm{v}t\,,$$

але $\mathrm{v}t=l$; $ut=x$.

Звідси

$$x=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m}l\,. \tag{2}$$

Після підстановки числових значень величин у співвідношення (2) знайдемо x

$$x=\frac{60-90}{60+90+120}\cdot 3=-\frac{90}{270}=-0{,}33\ м.$$

Знак мінус свідчить про те, що переміщення відбулося в напрямку, протилежному напрямку осі х.

Відповідь: $x = 0,33$ *м*.

Задача 4.2

Два легкі візки масою m_1 і $m_2 = 2m_1$ відповідно з'єднанні між собою стиснутою, зв'язаною ниткою, пружиною. Після перепалювання нитки пружина випрямляється і візки роз'їжджаються у різні боки. Вважаючи коефіцієнт тертя для обох візків однаковим, визначити: 1) відношення швидкостей руху візків v_1/v_2; 2) відношення часів, упродовж яких візки рухаються t_1/t_2; 3) відношення пройдених шляхів S_1/S_2.

Розв'язування

$v_1/v_2 - ?$

$t_1/t_2 - ?$

$S_1/S_2 - ?$

$m_2 = 2m_1$

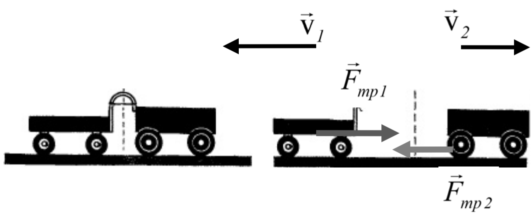


Рисунок 2

Запишемо закон збереження імпульсу для умов цієї задачі

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 .$$

Звідси знайдемо відношення швидкостей візків

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{2m_1}{m_1} = 2 .$$

Під дією сил тертя візки зупиняться. Сили тертя, що діють на візки, дорівнюють

$$\vec{F}_{тр1} = -\mu m_1 g \quad \text{і} \quad \vec{F}_{тр2} = -\mu m_2 g.$$

Вони нададуть тілу прискорення

$$-\mu m_1 g = m_1 a \quad \Rightarrow \quad a = -\mu g.$$

Швидкість і прискорення під час рівноприскореного руху пов'язані співвідношенням

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at\,.$$

Коли тіло зупиниться

$$\mathrm{v} = 0\,,\ \text{тоді}\ t = -\frac{\mathrm{v}_0}{a} = \frac{\mathrm{v}_0}{\mu g}\,.$$

Для кожного з тіл можна записати

$$t_1 = \frac{\mathrm{v}_1}{\mu g}\ \text{і}\ t_2 = \frac{\mathrm{v}_2}{\mu g}\,,\ \text{тоді}\ \frac{t_1}{t_2} = \frac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_2} = 2\,.$$

Шлях під час рівноприскореного руху визначається за формулою

$$S = \frac{\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}_0^2}{2a} = \frac{\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}_0^2}{-2\mu g}\,.$$

Для нашого випадку

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\dfrac{-\mathrm{v}_1^2}{-2\mu g}}{\dfrac{-\mathrm{v}_2^2}{-2\mu g}} = \frac{\mathrm{v}_1^2}{\mathrm{v}_2^2} = \left(\frac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_2}\right)^2 = 2^2 = 4\,,$$

Відповідь: $\dfrac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_2} = 2$; $\dfrac{t_1}{t_2} = 2$; $\dfrac{S_1}{S_2} = 4$.

Задача 4.3

Куля масою $m_1 = 1\,кг$ рухається зі швидкістю $\mathrm{v}_1 = 4\,м/с$ і зіштовхується з кулею масою $m_1 = 2\,кг$, що рухається назустріч їй зі швидкістю $\mathrm{v}_2 = 3\,м/с$ (рис. 3). Які швидкості u_1 і u_2 куль після удару? Удар вважати абсолютно пружним, прямим, центральним.

Розв’язування

$u_1 - ?\quad u_2 - ?$

$m_1 = 1\,кг,$
$m_2 = 2\,кг,$
$\mathrm{v}_1 = 4\,м/с,$
$\mathrm{v}_2 = 3\,м/с.$

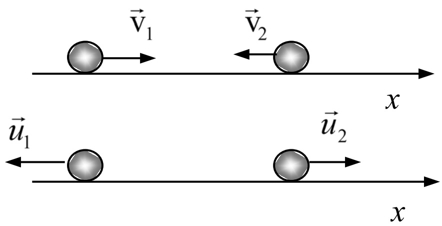


Рисунок 3

Під час пружного центрального удару виконуються закони збереження імпульсу і механічної енергії. Запишемо їх для цієї системи:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Спроєктуємо рівняння (1) на вісь x

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'яжемо спільно систему рівнянь (2)

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_1 u_1 = m_2 u_2 + m_2 v_2, \\ m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2. \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1 + u_1) = m_2 (u_2 + v_2), \\ m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2). \end{cases} \qquad (4)$$

Розділивши друге співвідношення на перше, одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} v_1 - u_1 = u_2 - v_2, \\ m_1 (v_1 + u_1) = m_2 (u_2 + v_2). \end{cases} \qquad (5)$$

Визначивши u_1 з першого рівняння і підставивши його у друге, одержимо

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - u_2 + v_2, \\ m_1 (v_1 + v_1 - u_2 + v_2) = m_2 (u_2 + v_2). \end{cases} \qquad (6)$$

Після низки перетворень співвідношень (6) знайдемо u_2:

$$2m_1\mathrm{v}_1 - m_1u_2 + m_1\mathrm{v}_2 = m_2u_2 + m_2\mathrm{v}_2,$$

$$2m_1\mathrm{v}_1 + m_1\mathrm{v}_2 - m_2\mathrm{v}_2 = m_2u_2 + m_1u_2,$$

$$u_2 = \frac{2m_1\mathrm{v}_1 + m_1\mathrm{v}_2 - m_2\mathrm{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (7)$$

Підставивши це рівняння у (6), одержимо

$$u_1 = \mathrm{v}_1 - \frac{2m_1\mathrm{v}_1 + m_1\mathrm{v}_2 - m_2\mathrm{v}_2}{m_1 + m_2} + \mathrm{v}_2 =$$

$$= \frac{m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_1 - 2m_1\mathrm{v}_1 - m_1\mathrm{v}_2 + m_2\mathrm{v}_2 + m_1\mathrm{v}_2 + m_2\mathrm{v}_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{-m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_1 + 2m_2\mathrm{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_2\mathrm{v}_2 - m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_1}{m_1 + m_2}. \qquad (8)$$

Підставивши числові значення величин у вирази (7) і (8), одержимо, *м/с*

$$u_2 = \frac{2\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 3 - 2\cdot 3}{1+2} = \frac{5}{3} = 1,67,$$

$$u_1 = \frac{2\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 4 + 2\cdot 4}{1+2} = \frac{16}{3} = 5,33.$$

Видно, що одиниця вимірювання одержаних величин – м/с.

Відповідь: u_1 = 5,33 *м/с*; u_2 = 1,67 *м/с*.

Задача 4.4

На човні масою $M = 4\,500\,кг$ встановлено горизонтальний брандспойт, що викидає зі швидкістю $\mathrm{v} = 6\,м/с$ відносно човна назад $k = 25\,кг/с$ води. Знехтувавши опором рухові човна, визначити: швидкість човна через $t = 180\,с$ після початку руху; максимально можливу швидкість човна.

Розв'язування

$u - ?\quad u_{\max} - ?$

$\mathrm{v} = 6\,м/с$,

$M = 4\,500\,кг$,

$k = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = 25\,кг/с$,

$t = 180\,с.$

Рисунок 4

Під час непружного зіткнення куль виконується закон збереження імпульсу

$$dm\left(\mathrm{v} - u\right) = Mdu,$$
$$dm = kdt.$$

Звідси

$$kdt\left(\mathrm{v} - u\right) = Mdu \qquad \Rightarrow \qquad \frac{kdt}{M} = \frac{du}{\mathrm{v} - u}.$$

Візьмемо інтеграл від правої та лівої частин одержаного рівняння

$$\int_o^t \frac{kdt}{M} = \int_0^u \frac{du}{\mathrm{v} - u} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{kt}{M} = -\ln\left(\mathrm{v} - u\right)\Big|_0^u \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{kt}{M} = -\ln\frac{\mathrm{v} - u}{u}.$$

$$e^{-\frac{kt}{M}} = \frac{\mathrm{v} - u}{\mathrm{v}} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-\frac{kt}{M}} = 1 - \frac{u}{\mathrm{v}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{u}{\mathrm{v}} = 1 - e^{-\frac{kt}{M}},$$

$$u = \mathrm{v}\left(1 - e^{-\frac{kt}{M}}\right).$$

Виконаємо розрахунки

$$u = 6\left(1 - e^{-\frac{25 \cdot 180}{4500}}\right) = 3,79\ м/с.$$

Швидкість човна буде максимальною, коли у виразі

$$u = \mathrm{v}\left(1 - e^{-\frac{kt}{M}}\right) \qquad e^{-\frac{kt}{M}} \to 0,$$

тобто

$$u_{max} = 6\ м/с.$$

Відповідь: $u = 3,79\,м/с$; $u_{max} = \mathrm{v} = 6\ м/с$.

Задача 4.5

Платформа у вигляді суцільного диска радіусом $R = 1,5\,м$ і масою $m_1 = 180\,кг$ обертається навколо вертикальної осі з частотою $\nu = 10\,хв^{-1}$. У центрі платформи стоїть людина масою $m_2 = 60\,кг$. Яку лінійну швидкість v відносно підлоги приміщення матиме людина, якщо вона перейде на край платформи (рис. 5)?

Розв'язування

v – ?

$m_1 = 180\,кг,$

$m_2 = 60\,кг,$

$\nu = 10\,хв^{-1} = \dfrac{1}{6}c^{-1},$

$R = 1,5\,м.$

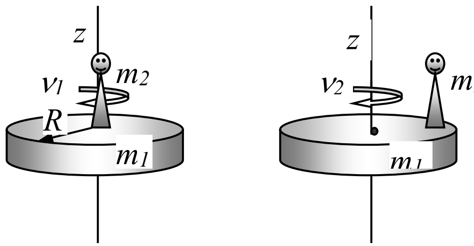


Рисунок 5

Згідно з умовою задачі момент зовнішніх сил відносно осі обертання *z*, що збігається з геометричною віссю платформи, можна вважати таким, що дорівнює нулю. За цієї умови проєкція L_z моменту імпульсу системи «платформа – людина» залишається сталою:

$$L_z = J_z\omega = const, \qquad (1)$$

де J_z – момент інерції платформи з людиною відносно осі z; ω – кутова швидкість платформи.

Момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції тіл, що входять до складу системи, тому в початковому стані $J_z = J_1 + J_2$, а в кінцевому стані $J_z^{'} = J_1^{'} + J_2^{'}$.

З урахуванням цього співвідношення (1) набере вигляду

$$\left(J_1 + J_2\right)\omega = \left(J_1^{'} + J_2^{'}\right)\omega^{'}, \tag{2}$$

де значення моментів інерції J_1 і J_2 платформи і людини відповідно належать до початкового стану системи; $J_1^{'}$ і $J_2^{'}$ – до кінцевого.

Момент інерції платформи відносно осі z під час переходу людини не змінюється: $J_1 = J_1^{'} = {}^{1}\!/_{2}\, m_1 R^2$. Момент інерції людини відносно тієї самої осі буде змінюватися. Якщо розглядати людину як матеріальну точку, то її момент інерції J_2 в початковому стані (в центрі платформи) можна вважати таким, що дорівнює нулю. В кінцевому стані (на краю платформи) момент інерції людини дорівнює $J_2^{'} = m_2 R^2$. Врахуємо, що $\omega = 2\pi\nu$, а $\omega = \dfrac{\mathrm{v}}{R}$, де ν – частота обертання платформи; v – швидкість людини відносно підлоги.

Підставимо у формулу (2) вирази для моментів інерції, початкової кутової швидкості обертання платформи з людиною і кінцевої кутової швидкості:

$$\left(\frac{1}{2}m_1R^2+0\right)2\pi\nu=\left(\frac{1}{2}m_1R^2+m_2R^2\right)\mathrm{v}/R.$$

Після скорочення на R^2 і простих перетворень знаходимо швидкість

$$\mathrm{v}=2\pi\nu Rm_1/\left(m_1+2m_2\right). \qquad (3)$$

Після підстановки числових значень фізичних величин у співвідношення (3) проведемо обчислення

$$\mathrm{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot\frac{1}{6}\cdot 1{,}5\cdot 180}{180+2\cdot 60}=1\ м/с\ .$$

Перевіримо розмірність одержаної величини

$$\mathrm{v}=\frac{[\nu][R][m]}{[m]}=\frac{м}{с}\ .$$

Відповідь: $\mathrm{v}=1\ м/с$.

Задача 4.6

Людина масою $m=60\,кг$, яка стоїть на краю горизонтальної платформи радіусом $R=1\,м$ і масою $M=120\,кг$, яка обертається за інерцією навколо нерухомої вертикальної осі з частотою $\nu_1=10\,хв^{-1}$, переходить до її центра. Вважаючи платформу круглим однорідним диском, а людину – точковою масою, визначити, яку роботу здійснить людина під час переходу від краю платформи до її центра.

Розв’язування

$A - ?$

$M = 120\,кг,$

$m = 60\,кг,$

$\nu_1 = 10\,хв^{-1} = 0{,}167\,с^{-1},$

$R = 1\,м.$

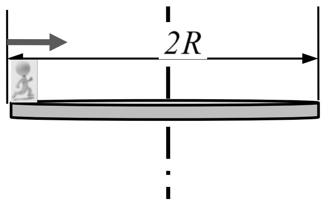


Рисунок 6

Робота дорівнює різниці кінетичних енергій платформи

$$A = W_{K2} - W_{K1},$$

де $W_{K1} = \dfrac{J_1\omega_1^2}{2}$ і $W_{K2} = \dfrac{J_2\omega_2^2}{2}$.

Тоді

$$A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}.$$

Кутова швидкість пов’язана з частотою обертання співвідношенням

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1; \quad \omega_2 = 2\pi\nu_2.$$

Кутову швидкість платформи у разі, коли людина переходить до її центра, знайдемо з закону збереження моменту імпульсу

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

де $J_1 = J + J_л$. $J_2 = J$. Момент інерції людини за умовою задачі $J_л = mR^2$. Момент інерції диска – платформи

$$J = \frac{MR^2}{2}.$$

Тоді закон збереження моменту імпульсу

$$\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)2\pi\nu_1 = \omega_2\frac{MR^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{\left(M + 2m\right)2\pi\nu_1}{M}.$$

$$A = \frac{MR^2}{2}\left(\frac{\left(M + 2m\right)2\pi\nu_1}{M}\right)^2 - \frac{\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)4\pi^2\nu_1^2}{2} =$$

$$= 2\pi^2\nu_1^2R^2\left(M + 2m\right)\left(\frac{M + 2m}{M} - \frac{1}{2}\right) = 2\pi^2\nu_1^2R^2\left(M + 2m\right)\left(\frac{2m}{M} + \frac{1}{2}\right),$$

$$A = 2\pi^2\nu_1^2R^2\left(M + 2m\right)\left(\frac{2m}{M} + \frac{1}{2}\right).$$

Підставимо числові значення фізичних величин у одержаний вираз та проведемо розрахунки

$$A = 2\pi^2 \cdot 0{,}167^2 \cdot 1^2\left(120 + 2\cdot 60\right)\left(\frac{2\cdot 60}{120} + \frac{1}{2}\right) = 198\ Дж.$$

Відповідь: $A = 198\ Дж.$

Задача 4.7

На горизонтальній платформі стоїть людина і тримає в руках стрижень вертикально вздовж осі лави. Лава з людиною обертається з кутовою швидкістю $\omega_1 = 4\, рад/с$ (рис. 7). З якою швидкістю ω_2 почне обертатися лава, якщо людина поверне стрижень так, що він набуде горизонтального положення. Сумарний момент інерції людини і лави $J = 5\, кг \cdot м^2$. Довжина стрижня $l = 1{,}8\, м$, його маса $m = 6\, кг$. Вважати, що центр мас стрижня з людиною розміщений на осі платформи.

Розв'язування

$\omega_2 - ?$

$\omega_1 = 4\, рад/с$,

$I = 5\, кг \cdot м^2$,

$m = 6\, кг$,

$l = 1{,}8\, м.$

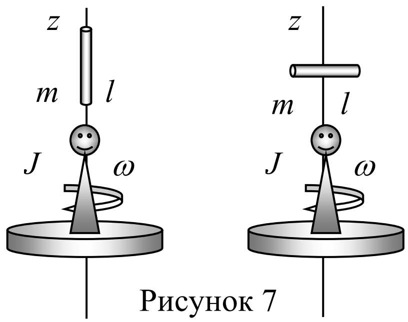


Рисунок 7

Для розв'язання задачі скористаємося законом збереження моменту імпульсу відносно осі z, навколо якої відбувається обертання:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \qquad (1)$$

де J_1 і J_2 – моменти інерції системи в початковий і кінцевий моменти часу; ω_1, ω_2 – відповідні кутові швидкості.

Момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції тіл, що входять у систему:

$$J_1 = J + J_1', \tag{2}$$

$$J_2 = J + J_2', \tag{3}$$

де J, J_1', J_2 – моменти інерції людини та лави до та після повороту стрижня.

Врахуємо, що

$$J_1' = 0;\ J_2' = \frac{1}{12}ml^2. \tag{4}$$

Після підстановки виразів (2)–(4) в (1) одержимо

$$J\omega_1 = (J + \frac{1}{12}ml^2)\omega_2 .$$

Звідси

$$\omega_2 = \frac{J\omega_1}{J + \frac{1}{12}ml^2}. \tag{5}$$

Після підстановки числових значень фізичних величин у співвідношення (5) знайдемо

$$\omega_2 = \frac{5\cdot 4}{5 + \frac{1}{12}6(1,8)^2} = 3,02\ \text{рад/с}.$$

Відповідь: ω_2 = 3,02 *рад/с*.

Задача 4.8

Однорідний стрижень довжиною $l = 1\,м$ і масою $m_1 = 0{,}7\,кг$ підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. В точку, що розміщена на відстані $\frac{2}{3}l$, абсолютно пружно вдаряє куля масою $m_2 = 5\,г$, що летить перпендикулярно до стрижня і його осі. Після удару стрижень відхилився на кут $\alpha = 60^0$ (рис. 8). Визначити швидкість кулі.

Розв'язування

$\omega_2 - ?$

$m_1 = 0{,}7\,кг,$

$l = 1\,м,$

$m_2 = 5\,г,$

$\alpha = 60^0.$

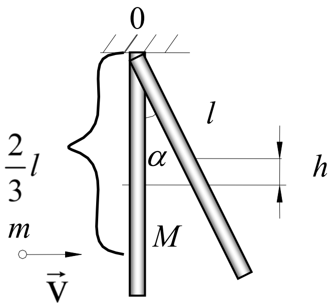


Рисунок 8

Запишемо закон збереження моменту імпульсу для системи «куля – стрижень». Оскільки $m_2 << m_1$ і удар абсолютно пружний, будемо вважати, що швидкість кулі до v і після удару u однакова за модулем. Тоді можна записати

$$m_2\,\mathrm{v} \cdot \frac{2}{3}l = J\omega - m_2 u \cdot \frac{2}{3}l\,, \qquad (1)$$

де ω – кутова швидкість стрижня; $J = \dfrac{m_1 l^2}{3}$ – його момент інерції відносно точки О.

З урахуванням того, що $\mathrm{v} = u$, співвідношення набере вигляду

$$4 m_2 \mathrm{v} = m_1 l \omega . \qquad (2)$$

Скористаємося законом збереження енергії. У нижній точці стрижень має кінетичну енергію, у верхній – потенціальну, тобто:

$$\frac{J\omega^2}{2} = m_1 g h . \qquad (3)$$

Із рисунка видно, що

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha) . \qquad (4)$$

Підставивши цей вираз у (1), одержимо

$$\frac{1}{3} m_1 l^2 \frac{\omega^2}{2} = m_1 g \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha)$$

або після скорочення та простих перетворень

$$\frac{1}{6}\omega^2 l = \frac{g}{2}(1 - \cos\alpha) ,$$

$$\omega^2 l = 3g(1 - \cos\alpha) ,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}} . \qquad (5)$$

Підставимо рівняння (5) в (2) і розв'яжемо одержане співвідношення відносно v:

$$\text{v} = \frac{m_1}{4m_2}\sqrt{3gl(1-\cos\alpha)}. \qquad (6)$$

Підставивши в рівняння (6) числові значення величин, одержимо кінцевий результат

$$\text{v} = \frac{0,7}{4\cdot 0,005}\sqrt{3\cdot 1\cdot 9,8\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 134\, м/с .$$

Перевіримо розмірність одержаної величини

$$\text{v} = \frac{[M]}{[m]}\sqrt{[g][l]} = \frac{кг}{кг}\sqrt{м/с^2\cdot м} = \frac{м}{с} .$$

Відповідь: $\text{v} = 134\, м/с$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

4.1 Пружина жорсткістю $k = 500\,Н/м$ стиснута силою $F = 100\ Н$. Визначити роботу A зовнішньої сили, що додатково стискує пружину ще на $\Delta l = 2\,см$.

Відповідь: $A = 2{,}1\ Дж$.

4.2 Налетівши на пружинний буфер, вагон масою $m = 16\,т$, що рухався зі швидкістю $v = 0{,}6\ м/с$, зупинився, стиснувши пружину на $\Delta l = 8\,см$. Знайти загальну жорсткість k пружин буфера.

Відповідь: $k = 900\,кН/м$.

4.3 Розрахувати роботу A, виконану під час рівноприскореного піднімання вантажу масою $m = 100$ кг на висоту $h = 4\ м$ за час $t = 2\ с$.

Відповідь: $A = 4{,}72\ кДж$.

4.4 Із шахти глибиною $h = 600\,м$ піднімають кліть масою $m_1 = 3\,т$ на канаті, кожен метр якого має масу $m = 1{,}5\,кг$. Яка робота A виконується під час підняття кліті на поверхню Землі? Який коефіцієнт корисної дії η підіймального пристрою?

Відповідь: $A = 30{,}2\ Дж$; $\eta = 87\%$.

4.5 Знайти роботу A піднімання вантажу по похилій площині довжиною $l = 2\ м$, якщо маса вантажу $m = 100\ кг$, кут нахилу $\alpha = 30^0$, коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}1$, а сам вантаж рухається з прискоренням $a = 1\ м/с^2$.

Відповідь: $A = 1{,}35\ кДж$.

4.6 Робота, витрачена на штовхання ядра, кинутого під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту, дорівнює $A = 216\,Дж$. Через який час і на якій відстані від місця кидання ядра воно впаде на землю? Маса ядра $m = 2\,кг$. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $t = 1,5\,с$; $v = 19,1\,м/с$.

4.7 Тіло масою $m = 1\,кг$, яке кинули з вишки в горизонтальному напрямку зі швидкістю $v_0 = 20\ м/с$, через $t = 3\ с$ впало на землю. Визначити кінетичну енергію W_K, яку мало тіло в момент удару об землю. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $W_K = 663\,Дж$.

4.8 Із похилої площини висотою $h = 1\,м$ та довжиною $l = 10\,м$ сковзає тіло масою $m = 1\,кг$. Знайти: 1) кінетичну енергію внизу біля похилої площини; 2) швидкість тіла там само; 3) відстань, яку пройде тіло по горизонтальній частині шляху до зупинення. Коефіцієнт тертя на всьому шляху вважати сталим і таким, що дорівнює $\mu = 0,05$.

Відповідь:
1) $W_K = 4,9\,Дж$; 2) $v = 3,1\,м/с$; 3) $S = 10\,м$.

4.9 Два легкі візки масою m_1 і $m_2 = 2m_1$ відповідно з'єднанні між собою стиснутою, зв'язаною ниткою, пружиною. Після перепалювання нитки пружина випрямляється і візки роз'їжджаються у різні боки. Вважаючи коефіцієнт тертя для обох візків однаковим, визначити: 1) відношення швидкостей руху візків v_1/v_2; 2) відношення часів, упродовж яких візки рухаються t_1/t_2; 3) відношення пройдених шляхів S_1/S_2.

Відповідь: $\frac{v_1}{v_2} = 2$; $\frac{t_1}{t_2} = 2$; $\frac{S_1}{S_2} = 4$.

4.10 На підлозі стоїть візок у вигляді довгої дошки з легкими колесами. На одному кінці дошки стоїть людина.

Її маса $m_1 = 60\,кг$, маса дошки $m_2 = 20\,кг$. З якою швидкістю (відносно підлоги) буде рухатися візок, якщо людина піде уздовж її зі швидкістю (відносно дошки) $\mathrm{v} = 1\,м/с$? Масою коліс і тертям знехтувати.

Відповідь: $\mathrm{v}_1 = 0,75\,м/с$.

4.11 Ракета масою $m_1 = 1\,000\,кг$ стартує вертикально вгору з прискоренням $a = 2g$. Відносна швидкість витікання продуктів згоряння $\mathrm{v} = 1\,200\,м/с$. Паливо повністю згорає впродовж $t = 8\,с$. Визначити витрату палива $\Delta m/\Delta t$ та його масу m.

Відповідь: $\Delta m/\Delta t = 24,5\,кг/с$; $m = 188\,кг$.

4.12 На скільки зміститься відносно берега човен довжиною $l = 3,5\,м$ і масою $m_1 = 200\,кг$, якщо людина масою $m_2 = 80\,кг$, яка стоїть на кормі, перейде на ніс човна? Вважати, що човен розміщений перпендикулярно до берега.

Відповідь: $S = 1\,м$.

4.13 На човні масою $M = 4\,500\,кг$ встановлено горизонтальний брандспойт, що викидає зі швидкістю $\mathrm{v} = 6\,м/с$ відносно човна назад $25\,кг/с$ води. Знехтувавши опором рухові човна, визначити: швидкість човна через $t = 180\,с$ після початку руху; максимально можливу швидкість човна.

Відповідь: $u = 3,8\,м/с$; $u_{\max} = 6\,м/с$.

4.14 Два ковзанярі масами $m_1 = 80\,кг$ і $m_2 = 50\,кг$ тримаються за кінці довгого натягненого шнура і стоять нерухомо на льоду один проти одного. Один із них починає вкорочувати шнур, вибираючи його зі швидкістю

$v = 1\,м/с$. З якими швидкостями будуть рухатися по льоду ковзанярі? Тертям знехтувати.

Відповідь: $u_1 = 0,385\ м/с$; $u_2 = -\,0,615\ м/с$.

4.15 На залізничній платформі встановлено гармату. Маса платформи з гарматою $M = 15$ т. Гармата стріляє вгору під кутом $\alpha = 60^0$ до горизонту в напрямку шляху. З якою швидкістю v_1 покотиться платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m = 20\ кг$, і він вилітає зі швидкістю $v_2 = 600\ м/с$.

Відповідь: $v_1 = 0,4\ м/с$.

4.16 Куля масою $m_1 = 10\,кг$, що рухається зі швидкістю $v_1 = 4\,м/с$, зіткнулася з кулею масою $m_2 = 4\,кг$, швидкість якої $v_2 = 12\,м/с$. Вважаючи удар прямим, непружним, знайти швидкість u куль після удару в двох випадках: а) мала куля доганяє велику кулю; б) кулі рухаються назустріч одна одній.

Відповідь: а) $u = 6,30\ м/с$; б) $u = -\,0,57\ м/с$.

4.17 Дві кулі масами $m_1 = 2\,кг$ і $m_2 = 3\,кг$ рухаються зі швидкостями відповідно $v_1 = 8\ м/с$ і $v_2 = 4\ м/с$. Визначити приріст ΔU внутрішньої енергії куль унаслідок їх абсолютно не пружного зіткнення в двох випадках: а) менша куля наздоганяє більшу; б) кулі рухаються назустріч одна одній.

Відповідь: а) $\Delta U = 9,6\ Дж$; б) $\Delta U = 86,4\ Дж$.

4.18 Куля масою $m_1 = 2\,кг$ налітає на кулю масою $m_2 = 8\,кг$, що перебуває в стані спокою. Імпульс кулі, що налітає, $p_1 = 10\ кг \cdot м/с$. Удар вважати прямим, пружним. Визначити безпосередньо після удару: а) імпульси p_1' першої кулі і p_2' другої кулі; б) зміну Δp_1 імпульсу першої кулі; в) кінетичні енергії W'_{K_1}, W'_{K_2} обох куль; г) зміну ΔW_{K_1} кінетичної енергії першої кулі; ґ) частку w_K кінетичної енергії, переданої першою кулею другій.

Відповідь: а) $p'_1 = -6\ кг \cdot м/с$; $p'_2 = 16\ кг \cdot м/с$; б) $\Delta p_1 = -16\ кг \cdot м/с$; в) $W'_{K_1} = 9\ Дж$, $W'_{K_2} = 16\ Дж$; г) $|\Delta W_{K_1}| = 16\ Дж$; ґ) $w_K = \dfrac{|\Delta W_{K_1}|}{W_{K_1}} = 0,64$.

4.19 Визначити найменшу висоту, з якої повинен скочуватися візок із людиною по жолобу, що переходить у петлю радіусом $r = 6\,м$, щоб не відірватися від нього у верхній точці петлі. Тертям знехтувати.

Відповідь: $H = 15\,м$.

4.20 Молот масою $m_1 = 5\,кг$ ударяє невеликий кусок заліза, що лежить на ковадлі. Маса ковадла $m_2 = 100\,кг$. Масою куска заліза знехтувати. Удар непружний. Визначити к. к. д. η удару молота за цих умов.

Відповідь: $\eta = 0,952$.

4.21 Ланцюг довжиною $l = 2$ м лежить на столі, одним кінцем звисаючи зі столу. Якщо довжина частини, що звішується зі столу, перевищує $\dfrac{l}{3}$, то ланцюг зісковзує зі столу. Визначити швидкість v ланцюга в момент відриву від столу.

Відповідь: $v = 4,17\,м/с$.

4.22 Людина перебуває в центрі горизонтальної круглої платформи, що обертається навколо осі, яка проходить через центр маси людини та центр маси платформи. Людина тримає в руках горизонтально штангу довжиною $l = 2\,м$ та масою $m = 18\,кг$. Платформа водночас обертається з частотою $\nu = 0,5\,с^{-1}$. Людина повертає штангу у вертикальній площині на кут $\varphi = 60^0$. Визначити роботу, яку виконала людина. Момент інерції людини вважати еквівалентним масі $m_0 = 50\,кг$, що розміщена на відстані $r_0 = 0,04\,м$ від осі обертання. Момент інерції платформи не враховувати.

Відповідь: $A = 85,7$ *Дж.*

4.23 Горизонтальна платформа масою $m_1 = 100\,кг$ обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, з частотою $\nu_1 = 10\,хв^{-1}$. Людина масою $m_2 = 60\,кг$ стоїть при цьому на краю платформи. З якою кутовою швидкістю ω_2 почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центру? Вважати платформу круглим, однорідним диском, а людину – матеріальною точкою.

Відповідь: $\omega_2 = 0,37\,с^{-1}$.

4.24 Яку роботу виконує людина під час переходу від краю платформи до її центру в умовах попередньої задачі? Радіус платформи дорівнює $R = 1,5\,м$.

Відповідь: $A = 162\,Дж$ **.**

4.25 На лаві Жуковського стоїть людина і тримає в руці за вісь велосипедне колесо, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega_1 = 25$ рад/с. Вісь колеса розміщена вертикально і збігається з віссю лави Жуковського. З якою швидкістю ω_2 стане обертатися лава, якщо повернути колесо навколо горизонтальної осі на кут $\alpha = 90^0$? Момент інерції людини і лави дорівнює $J = 2,5\,кг \cdot м^2$, момент інерції колеса $J_0 = 0,5\,кг \cdot м^2$.

Відповідь: $\omega_2 = 30\,рад/с$.

4.26 Платформа, що має форму диска, може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина. На який кут φ повернеться платформа, якщо людина піде вздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться в початкову (на платформі) точку? Маса платформи $m_1 = 240\,кг$, маса людини $m_2 = 60\ кг$.

Відповідь: $\varphi = 2/3\,\pi$.

4.27 Людина масою $m_1 = 60\,кг$ перебуває на нерухомій платформі масою $m_2 = 100\ кг$. З якою частотою почне обертатися платформа, якщо людина буде рухатися по колу радіусом $r = 5\,м$ навколо осі обертання? Швидкість руху людини відносно платформи дорівнює $4\,км/год$. Радіус платформи становить $R = 10\,м$. Вважати, що платформа є однорідним диском, а людина – точковою масою.

Відповідь: $\nu = 8{,}17\,Гц$.

4.28 Однорідний стрижень довжиною $l = 1\,м$ і масою $M = 1{,}4\,кг$ підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. В точку, що віддалена від осі на $\frac{2}{3}l$, абсолютно пружно вдаряє куля масою $m = 5\ г$, що летить перпендикулярно до стрижня і його осі. Після удару стрижень відхиляється на кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити швидкість кулі.

Відповідь: $\mathrm{v} = 269\ м/с$.

4.29 Однорідний диск масою $m_1 = 0{,}2\ кг$ і радіусом $R = 20\ см$ може вільно обертатися навколо горизонтальної осі z, що проходить через точку O перпендикулярно до площини диска (рис. 9). У точку A на поверхні диска попадає пластилінова кулька, що летить горизонтально (перпендикулярно до осі z) зі швидкістю $\mathrm{v} = 10\,м/с$ і прилипає до його поверхні. Маса кульки дорівнює

$m_2 = 10\ г$. Визначити кутову швидкість ω диска і лінійну швидкість u точки A на диску в початковий момент часу. Розрахунок провести для таких значень a і b: а) $a = b = R$; б) $a = \frac{R}{2}$, $b = R$; в) $a = \frac{2}{3}R$, $b = \frac{R}{2}$; г) $a = \frac{R}{3}$, $b = \frac{2}{3}R$.

Відповідь: а) $\omega = 4,55\ рад/с$, $u = 0,909\ м/с$; б) $\omega = 2,27\ рад/с$, $u = 0,454\ м/с$; в) $\omega = 3,03\ рад/с$, $u = 0,303\ м/с$; г) $\omega = 1,52\ рад/с$, $u = 0,202\ м/с$.

4.30 Кулька, що скочується без проковзування по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^0$, вдаряється об похилу площину і після удару підскакує на висоту $h = 12,5\ см$ (рис. 10). Знехтувавши тертям і вважаючи удар абсолютно пружним, визначити шлях S, який пройшла кулька по похилій площині.

Відповідь: $S = 1,4\ м$.

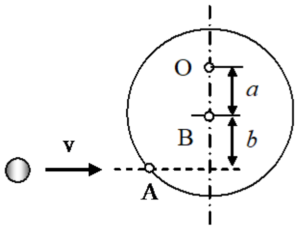


Рисунок 9

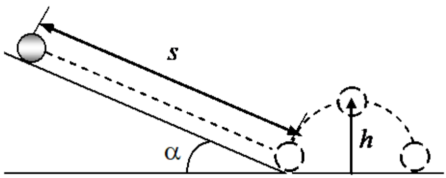


Рисунок 10

5 ОСНОВИ ГІДРОАЕРОМЕХАНІКИ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

5.1 Тиском називається скалярна фізична величина, яка дорівнює відношенню нормальної сили до площі поверхні, на яку вона діє:

$$p = \frac{F_n}{S},$$

де p – тиск; F_n – сила, що діє перпендикулярно до поверхні; S – площа поверхні.

Наведемо співвідношення між системними та зазначеними позасистемними одиницями вимірювання тиску:

$$1\,мм\;рт.\;ст. = 133\,Па;$$
$$1\,мм\,H_2O = 9{,}81\,Па;$$
$$1\,атм = 1{,}01 \cdot 10^5\;Па;$$
$$1\,т.\;атм = 0{,}98 \cdot 10^5\;Па.$$

5.2 Гідростатичний тиск

$$p = \rho g h,$$

де ρ – густина рідини (газу); h – глибина занурення; g – прискорення вільного падіння.

На Землі з урахуванням сили тяжіння гідростатичний тиск дорівнює

$$p = p_0 + \rho g h,$$

де p_0 – атмосферний тиск на поверхні рідини.

5.3 Висоти стовпів різнорідних рідин у сполучених посудинах обернено пропорційні їх густині

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

5.4 Сила Архімеда

$$F_A = \rho_p g V ,$$

де ρ_p – густина рідини (газу); g – прискорення вільного падіння; V – об'єм тіла, зануреного в рідину (газ).

5.5 Витрата ідеальної рідини в трубці струменя:

а) **об'ємна витрата**

$$Q_V = \mathrm{v} S ;$$

б) **масова витрата**

$$Q_m = \rho \mathrm{v} S ,$$

де S – площа перерізу трубки струму; v – швидкість рідини; ρ – її густина.

5.6 Для нестисливого середовища $\rho_1 = \rho_2$ **рівняння нерозривності для стаціонарного потоку** має вигляд

$$S_1 \mathrm{v}_1 = S_2 \mathrm{v}_2 .$$

5.7 Рівняння Бернуллі для стаціонарного потоку ідеальної рідини

$$p+\rho gh+\frac{\rho\,\mathrm{v}^2}{2}=const\,,$$

де h – висота об'єму рідини над нульовим рівнем.

У разі **горизонтально розміщеної труби** $h=const$ рівняння Бернуллі набере вигляду

$$p_1-p_2=\frac{\rho}{2}(\mathrm{v}_2^2-\mathrm{v}_1^2)\,.$$

5.8 Формула Торрічеллі визначає швидкість v витікання рідини з малого отвору

$$\mathrm{v}=\sqrt{2gh}\,,$$

де h – глибина отвору відносно рівня рідини в посудині.

5.9 Модуль сили внутрішнього тертя для ламінарної течії визначається **рівнянням Ньютона**

$$F=-\eta\left|\frac{d\mathrm{v}}{dz}\right|\Delta S\,,$$

де η – динамічний коефіцієнт в'язкості, який залежить від природи і стану (наприклад, температури) рідини.

5.10 Число Рейнольдса Re

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{v} l}{\eta},$$

де η – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини; v – характерна швидкість потоку; l – характерний лінійний розмір тіла або потоку.

Режим течії рідини визначається **критичним числом Рейнольдса** Re_{KP}. Якщо $\mathrm{Re} \ll \mathrm{Re}_{KP}$ – течія рідини ламінарна, $\mathrm{Re} \gg \mathrm{Re}_{KP}$ – рух рідини переходить у турбулентний. Re_{KP} – критичне число Рейнольдса; для руху кульки в рідині Re_{KP} = 0,5; для течії в'язкої рідини в круглій циліндричній трубі $\mathrm{Re}_{KP} = 2\,300$.

5.11 Формула Стокса для руху тіла в рідинах за невеликих швидкостей $\left(\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{KP}\right)$

$$F = k\eta l \mathrm{v},$$

де η – динамічна в'язкість середовища; v – швидкість руху тіла; l – характерний розмір тіла; k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від форми тіла.

Сила опору в рідинах під час руху **кульок** із малою швидкістю

$$F = 6\pi\eta r \mathrm{v}.$$

Формула Стокса є справедливою за умови, що відстань від тіла до стінок посудини набагато більша за розміри тіла.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 5.1

Для визначення густини невідомої рідини однорідне тіло зважили в рідині, потім у вакуумі, потім у воді. Виявилось, що тіло в рідині має вагу $P_1 = 1{,}66\,H$, у вакуумі – $P_2 = 1{,}8\,H$, а у воді – $P_3 = 1{,}6\,H$. Знайти густину рідини ρ_1 і густину тіла ρ_2.

Розв'язування

$\rho_1 - ?\quad \rho_T - ?$

$P_1 = 1{,}66\,H,$

$P_2 = 1{,}8\,H,$

$P_3 = 1{,}6\,H,$

$\rho_3 = 1\,000\, кг/м^3.$

Вага тіла в рідині дорівнює різниці сили тяжіння та сили Архімеда

$$P_1 = mg - F_{1A}. \tag{1}$$

Силу Архімеда знайдемо із співвідношення

$$F_{1A} = \rho_1 g V, \tag{2}$$

де m – маса тіла; g – прискорення вільного падіння; ρ_1 – густина рідини; V – об'єм тіла.

Вага тіла у вакуумі дорівнює

$$P_2 = mg. \tag{3}$$

Вага тіла у воді становить

$$P_3 = mg - F_{2A}, \tag{4}$$

$$F_{2A} = \rho_3 g V, \tag{5}$$

де ρ_3 – густина води.

Отже, можна записати

$$P_1 = mg - \rho_1 gV,$$
$$P_3 = mg - \rho_3 gV,$$

або

$$P_1 = P_2 - \rho_1 gV \Rightarrow P_2 - P_1 = \rho_1 gV, \tag{6}$$
$$P_3 = P_2 - \rho_3 gV \Rightarrow P_2 - P_3 = \rho_3 gV. \tag{7}$$

Після низки перетворень одержимо

$$\rho_1 = \rho_3 \frac{P_2 - P_1}{P_2 - P_3}.$$

Густину тіла знайдемо зі співвідношення

$$\rho_T = \frac{m}{V}.$$

Масу тіла знайдемо з виразу (3)

$$m = \frac{P_2}{g},$$

тоді

$$\rho_T = \frac{P_2}{gV}.$$

Із співвідношення (6)

$$gV = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1}.$$

Нарешті знайдемо ρ_T

$$\rho_T = \rho_1 \frac{P_2}{P_2 - P_1} = \rho_3 \frac{P_2 - P_1}{P_2 - P_3} \cdot \frac{P_2}{P_2 - P_1} = \rho_3 \frac{P_2}{\left(P_2 - P_3\right)}.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин одержимо

$$\rho_1 = 1\,000 \frac{1,8 - 1,66}{1,8 - 1,6} = 700 \ кг/м^3;$$

$$\rho_T = 1\,000 \frac{1,8}{1,8 - 1,6} = 900 \ кг/м^3.$$

Видно, що одиницею вимірювання густини є $\left[\rho\right] = кг/м^3$.

Відповідь: $\rho_1 = 700 \ кг/м^3$; $\rho_T = 900 \ кг/м^3$.

Задача 5.2

Кулька спливає зі сталою швидкістю в рідині, густина якої втричі більша за густину кульки. Знайти відношення сили в’язкості, яка діє на кульку до її ваги в повітрі n.

Розв’язування

$n - ?$
$\text{v} = const;$ $\rho = 3\rho_K.$

Під час руху кульки в рідині на неї діють сили: сила тяжіння спрямована вниз, сила Архімеда спрямована вгору і сила в’язкого тертя, яка завжди спрямована проти руху тіла (рис. 1).

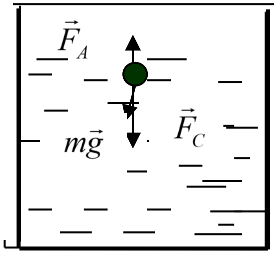


Рисунок 1

Силу Архімеда знайдемо зі співвідношення

$$F_A = \rho g V ,$$

де m – маса тіла; g – прискорення вільного падіння; ρ – густина рідини; V – об’єм тіла.

Відношення сили в’язкості, яка діє на кульку до її ваги в повітрі n знайдемо зі співвідношення

$$n = \frac{F_C}{P}.$$

Сила внутрішнього тертя визначається за формулою Стокса

$$F_C = 6\pi\eta r\mathrm{v} = 3\pi\eta d\mathrm{v} ,$$

де η – динамічна в’язкість рідини; v – швидкість руху кульки; d – її діаметр.

Вага кульки в повітрі дорівнює силі тяжіння, що діє на неї

$$P = mg = \rho_K g V .$$

За умови $\mathrm{v} = const$ сила тяжіння зрівноважена силами Стокса та Архімеда, тобто

$$F_C + mg = F_A.$$

Звідси знайдемо силу в'язкості

$$F_C = F_A - mg = \rho g V - \rho_K g V = gV\left(\rho - \rho_K\right).$$

Відношення сили в'язкості, яка діє на кульку до її ваги в повітрі дорівнює

$$n = \frac{gV\left(\rho - \rho_K\right)}{\rho_K g V} = \frac{\rho - \rho_K}{\rho_K} = \frac{3\rho_K - \rho_K}{\rho_K} = 2\,.$$

Відповідь: $n = 2$.

Задача 5.3

У середині дна циліндричної посудини є невеликий отвір, через який виливається вода. Рівень води у посудині становить 30 см вище за дно. З якою швидкістю вода витікає крізь отвір, якщо відро: а) не рухається; б) рівномірно піднімається; в) рухається з прискоренням $a = 120\,см/с^2$ вгору; г) рухається з прискоренням $a = 120\,см/с^2$ вниз.

Розв'язування

$\mathrm{v} - ?$
$h = 30\,см = 0{,}3\,м$,
$a = 1{,}20\ см/с^2$.

Швидкість витікання води з отвору знайдемо за формулою Торрічеллі

$$\mathrm{v} = \sqrt{2gh}\,, \qquad (1)$$

де g – прискорення вільного падіння.

У випадках а) та б) посудина розміщена в інерціальній системі відліку, тобто формулу (1) можна застосувати безпосередньо. У разі, коли тіло піднімається вгору (опускається вниз) із прискоренням на посудину з водою, що витікає, діє крім сили тяжіння ще і сила інерції, спрямована вниз (угору). Тоді формула (1) набере вигляду

$$\mathrm{v} = \sqrt{2\left(g \pm a\right)h} .$$

Після підстановки числових значень фізичних величин одержимо

$$\text{а) } \mathrm{v} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}3} = 2{,}42 \ м/с ;$$

$$\text{б) } \mathrm{v} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}3} = 2{,}42 \, м/с ;$$

$$\text{в) } \mathrm{v} = \sqrt{2 \cdot \left(9{,}8 + 1{,}2\right) \cdot 0{,}3} = 2{,}57 \, м/с ;$$

$$\text{г) } \mathrm{v} = \sqrt{2 \cdot \left(9{,}8 - 1{,}2\right) \cdot 0{,}3} = 2{,}27 \, м/с .$$

Відповідь: а) $\mathrm{v} = 2{,}42 \, м/с$; б) $\mathrm{v} = 2{,}42 \, м/с$; в) $\mathrm{v} = 2{,}57 \, м/с$; г) $\mathrm{v} = 2{,}27 \, м/с$.

Задача 5.4

Циліндрична посудина з налитою в неї ідеальною нестисливою рідиною обертається навколо своєї геометричної осі, що спрямована вертикально, з кутовою швидкістю ω. Початковий рівень рідини становить H. Визначити швидкість витікання струменя рідини через малий отвір, радіусом R, у боковій стінці посудини за сталого руху рідини (відносно посудини).

Розв’язування

$\mathrm{v} - ?$
H
R

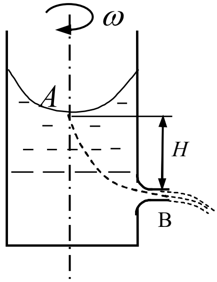


Рисунок 2

Для розв’язання задачі перейдемо в систему відліку, в якій рідина перебуває в стані спокою. В ній додадуться дві сили інерції: доцентрова та коріолісова. Коріолісова сила не виконує роботи. Вона лише викривляє лінії течії, але не змінює форми рівняння Бернуллі. Доцентрова сила дає новий доданок до потенціальної енергії, тому рівняння Бернуллі запишеться у вигляді

$$p_0 + \frac{\rho \mathrm{v}^2}{2} + \rho g h - \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} = \mathrm{const}\,, \tag{1}$$

де v – швидкість рідини відносно системи відліку, що обертається. Використаємо рівняння (1) до лінії течії *AB*, що починається на поверхні рідини в точці A (рис. 2). Якщо початок відліку координат помістити в точку A, то $h_\mathrm{A} = r_\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{v}_\mathrm{A} = 0$, $p_\mathrm{A} = p_\mathrm{B} = p_\mathrm{A}$, $\mathrm{v}_\mathrm{B} = \mathrm{v}$, $z_\mathrm{B} = -H$, $r_\mathrm{B} = R$. Ми одержимо

$$p_0 = p_0 + \frac{\rho \mathrm{v}^2}{2} - \rho g H - \frac{\rho \omega^2 R^2}{2}\,,$$

звідки

$$\text{v} = \sqrt{2(gH + \omega^2 R^2)}\ .$$

Перевірка розмірності:

$$[\text{v}] = [g]^{1/2}[H]^{1/2} = \frac{м^{1/2}}{с} \cdot м^{1/2} = м/с;\ [\text{v}] = [\omega][R] = с^{-1} \cdot м = м/с.$$

Відповідь: $\text{v} = \sqrt{2(gH + \omega^2 R^2)}$.

Задача 5.5

Вода тече в горизонтально розміщеній трубі змінного перерізу. Швидкість води в широкій частині труби дорівнює $\text{v}_1 = 20\ см/с$. Визначити швидкість v_2 у вузькій частині труби, діаметр d_2 якої в 1,5 раза менший за діаметр d_1 широкої частини.

Розв’язування

$\text{v}_2 - ?$
$\text{v}_1 = 20\,см/с = 0,2\,м/с$, $d_1 = 1,5 d_2$.

Для розв’язання задачі скористаємося рівнянням нерозривності стаціонарного потоку

$$S_1 \text{v}_1 = S_2 \text{v}_2\,, \qquad (1)$$

де $S_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$ та $S_2 = \dfrac{\pi d_2^2}{4}$ – площі поперечного перерізу труби в широкій та у вузькій частинах. Підставимо вирази для площ поперечного перерізу в (1) та одержимо

$$d_1^2 \text{v}_1 = d_2^2 \text{v}_2\ .$$

Звідси

$$\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо

$$\mathrm{v}_2 = 0,2 \frac{1,5^2 d_2^2}{d_2^2} = 0,45\, м/с.$$

Відповідь: $\mathrm{v}_2 = 0,45\, м/с$.

Задача 5.6

Горизонтальний циліндр насоса має діаметр $d_1 = 20\, см$. У ньому рухається із швидкістю $\mathrm{v}_1 = 1\, м/с$ поршень, виштовхуючи воду через отвір діаметром $d_2 = 2\, см$. З якою швидкістю v_2 буде витікати вода з отвору? Яким буде надлишковий тиск P води в циліндрі?

Розв'язування

$\mathrm{v}_2 - ?\ p - ?$

$\mathrm{v}_1 = 1\, м/с$,

$d_1 = 20\, см = 0,2\, м$,

$d_2 = 2\, см = 0,02\, м.$

Швидкість, з якою буде витікати вода з отвору, визначимо з рівняння нерозривності струменя

$$S_1 \mathrm{v}_1 = S_2 \mathrm{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_2 = \frac{S_1 \mathrm{v}_1}{S_2},$$

де $S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ і $S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$ – площі насоса й отвора відповідно.

Тоді

$$\mathrm{v}_2 = \frac{d_1^2 \mathrm{v}_1}{d_2^2}.$$

Проведемо розрахунки

$$\mathrm{v}_2 = \frac{0,2^2 \cdot 1}{0,02^2} = 100 \ \text{м/с}.$$

Надлишковий тиск дорівнює різниці тисків у циліндрі та ззовні. Його знайдемо з рівняння Бернуллі для стаціонарного потоку ідеальної рідини

$$p + \rho g h + \frac{\rho \mathrm{v}^2}{2} = const,$$

де h – висота об'єму рідини над нульовим рівнем.

У разі горизонтально розміщеної труби $h = const$ рівняння Бернуллі набере вигляду

$$p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(\mathrm{v}_2^2 - \mathrm{v}_1^2).$$

Розрахунки дають

$$p = \frac{1\,000}{2}(100^2 - 1^2) = 5 \cdot 10^6 \ \text{Па}.$$

Відповідь: $\mathrm{v}_2 = 100 \ \text{м/с}$; $p = 5 \cdot 10^6 \ \text{Па}$.

Задача 5.7

Струмінь води діаметром $d = 2\,см$, що рухається зі швидкістю $v = 10\,м/с$, вдаряється об нерухому плоску поверхню, перпендикулярну до струменя. Визначити силу F тиску струменя на поверхню, вважаючи, що після удару об поверхню швидкість частинок води дорівнює нулю.

$F - ?$

$v = 10\,м/с$,

$d = 2\,см = 0,02\,м.$

Розв'язування

Тиском називається скалярна фізична величина, яка дорівнює відношенню нормальної сили до площі поверхні, на яку вона діє:

$$p = \frac{F_n}{S},$$

де p – тиск; F_n – сила, що діє перпендикулярно до поверхні; S – площа поверхні.

Для розв'язання задачі використаємо рівняння Бернуллі для стаціонарного потоку ідеальної рідини

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = const,$$

де h – висота об'єму рідини над нульовим рівнем.

У разі горизонтально розміщеної труби $h = const$ рівняння Бернуллі набере вигляду

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Враховуючи, що $v_2 = 0$, одержимо

$$p = \frac{\rho \mathrm{v}^2}{2}.$$

Сила тиску

$$F = pS,$$

тоді

$$F = \frac{\rho}{2}\mathrm{v}^2 S.$$

Площа перерізу струменя

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Тоді сила

$$F = \frac{\rho}{2}\mathrm{v}^2 \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2 \rho \mathrm{v}^2}{8}.$$

Розрахунки дають

$$F = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 100}{8} = 15,7\,H.$$

Відповідь: $F = 15,7\,H$.

Задача 5.8

У посудину з гліцерином падає свинцева кулька. Визначити максимальне значення діаметра кульки, за якого рух шарів гліцерину, спричинений падінням кульки, є ламінарним. Рух вважати сталим. Критичне значення числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 0,5$.

Розв’язування

$d_{\max} - ?$
$\mathrm{Re}_{кр} = 0,5,$
$\eta = 1,48\, Па \cdot с,$
$\rho_{гл} = 1260\, кг/м^3,$
$\rho_{св} = 11300\, кг/м^3.$

Якщо тіло, що рухається в рідині, має форму кулі діаметром d, то число Рейнольдса визначається за формулою

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{v} d}{\eta}. \qquad (1)$$

Для знаходження швидкості кульки розглянемо сили, що діють на неї:

а) сила тяжіння кульки

$$F_T = mg = \rho_{св} g V,$$

де $\rho_{св}$ – густина свинцю; V – об’єм кульки; d – її діаметр.

Врахувавши, що об’єм кулі

$$V = \frac{\pi d^3}{6},$$

одержимо

$$F_T = \frac{\pi \rho_{св} g d^3}{6};$$

б) сила Архімеда

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{гл}} g V = \frac{\pi \rho_{\text{гл}} g d^3}{6},$$

де $\rho_{\text{гл}}$ – густина гліцерину;

в) сила внутрішнього тертя визначається за формулою Стокса

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r \text{v} = 3\pi\eta d \text{v}.$$

За сталого руху кульки в рідині ($\text{v} = \text{const}$) сила тяжіння кульки врівноважується сумою сили Архімеда і сили внутрішнього тертя, тобто

$$\frac{\pi \rho_{\text{св}} g d^3}{6} = \frac{\pi \rho_{\text{гл}} g d^3}{6} + 3\pi\eta d \text{v},$$

звідси одержимо

$$\text{v} = \frac{\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}}}{18\eta} g d^3. \qquad (2)$$

Розв'язуючи разом співвідношення (1) і (2) відносно d, знайдемо

$$d = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 \,\text{Re}}{\rho_{\text{гл}} g (\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}})}}.$$

Максимальне значення діаметра $d_{\max}$, за якого рух залишається ламінарним, відповідає критичному значенню числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$, тому

$$d_{\max} = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 \mathrm{Re}_{\text{кр}}}{\rho_{\text{гл}} g(\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}})}} = 5,29 \cdot 10^{-3}\ \text{\textit{м}} = 5,29\ \text{\textit{мм}}.$$

Перевірка розмірності дає

$$[d_{\max}] = [\eta]^{2/3}[\mathrm{Re}_{\text{\textit{кр}}}]^{1/3}[\rho]^{-2/3}[g]^{1/3} = \text{\textit{кг}}^{2/3}\frac{1}{\text{\textit{м}}^{2/3}\text{\textit{с}}^{4/3}}\text{\textit{с}}^{2/3}\frac{\text{\textit{м}}^2}{\text{\textit{кг}}^{2/3}}\frac{\text{\textit{с}}^{2/3}}{\text{\textit{м}}^{1/3}} = \text{\textit{м}}.$$

Відповідь: $d_{\max} = 5,29\ \text{\textit{мм}}.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

5.1 У двох циліндричних сполучених посудинах налита ртуть. Переріз однієї з посудин вдвічі більший за іншу. Широку посудину наливають водою до верху. На яку висоту Δh підніметься ртуть в іншій посудині? Спочатку рівень ртуті був на відстані l від верхнього краю широкої посудини. Густина ртуті ρ і води ρ_0 відомі.

Відповідь: $\Delta h = \dfrac{2l}{3\,\rho/\rho_0 - 1}$.

5.2 Під час піднімання ваги масою $m = 2\,\text{т}$ за допомогою гідравлічного пресу було виконано роботу $A = 40\,Дж$. Водночас малий поршень виконав $n = 10$ кроків, переміщуючись за кожен крок на $h = 20\,см$. У скільки разів площа більшого поршня більша за площу меншого?

Відповідь: $S_2/S_1 = 500$.

5.3 У циліндричну посудину налиті однакові маси води та ртуті. Загальна висота стовпа рідин – $H = 134\,см$. Чому дорівнює тиск на дно посудини?

Відповідь: $p = 2{,}5 \cdot 10^4\ Па$.

5.4 Крижина рівномірної товщини плаває у воді, виступаючи над поверхнею води $d = 2\,см$. Знайти масу крижини, якщо площа її основи $S = 200\,см^2$. Густина льоду – $\rho = 920\,кг/м^3$.

Відповідь: $m = 4{,}6\,кг$.

5.5 Кулька спливає зі сталою швидкістю в рідині, густина якої втричі більша за густину кульки. Знайти відношення сили в’язкості, яка діє на кульку до її ваги в повітрі n.

Відповідь: $n = 2$.

5.6 Порожня куля, зроблена з матеріалу з густиною ρ_1 плаває на поверхні рідини, яка має густину ρ_2. Радіус кулі дорівнює R, радіус порожнини r. Якою повинна бути густина речевини, якою потрібно заповнити порожнину кулі, щоб вона плавала усередині рідини?

Відповідь: $\rho_3 = \dfrac{\rho_2 R^3 - \rho_1\left(R^3 - r^3\right)}{r^3}$.

5.7 Для визначення густини невідомої рідини однорідне тіло зважили у рідині, потім у вакуумі, потім у воді. Виявилось, що тіло в рідині має вагу $P_1 = 1,66\,H$, у вакуумі – $P_2 = 1,8\,H$, а у воді – $P_3 = 1,6\,H$. Знайти густину рідини ρ_1 і густину тіла ρ_2.

Відповідь: $\rho_1 = 700\,кг/м^3$; $\rho_T = 900\,кг/м^3$.

5.8 Кипа бавовни в повітрі має вагу $P = 1\,500\,H$. Визначити правильну вагу бавовни, якщо її густина $\rho = 840\,кг/м^3$, а густина повітря – $\rho_1 = 1,3\,кг/м^3$.

Відповідь: $P_0 = 1\,502\,H$.

5.9 Два аеростати піднімають вгору однакові вантажі. Перший рухається з прискоренням $a = g/2$, а другий – зі сталою швидкістю. Густина газу в аеростатах однакова й дорівнює половині густини повітря ρ_1. Об’єм першого аеростата дорівнює V_1. Чому дорівнює об’єм V_2 другого аеростата? Маси оболонок куль вважати однаковими. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $V_2 = V_1/3$.

5.10 Шприц, розміщений горизонтально, максимально заповнений ліками з густиною $\rho = 900\,кг/м^3$ (рис. 3). Під дією сталої сили $F = 30\,H$, прикладеної до поршня площею $S_1 = 1,2\,см^2$ за час $t = 0,5\,с$, усі ліки повністю витікають із шприца. Хід поршня шприца $l = 4\,см$. Визначити площу поперечного перерізу внутрішнього отвору голки шприца S_2.

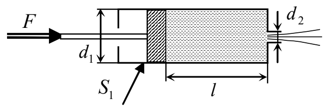


Рисунок 3

Відповідь: $S_2 = 10^{-3}\,м^3$.

5.11 У горизонтально розміщеній трубі з площею поперечного перерізу $S_1 = 20\ см^2$ тече рідина. В одному місці труба має звуження, в якому площа перерізу дорівнює $S_2 = 12\ см^2$. Різниця рівнів у двох манометричних трубках, встановлених у широкій і вузьких частинах труби, дорівнює $\Delta h = 8\,см$. Визначити об’ємну витрату води.

Відповідь: $Q_V = 1{,}88\ л/с$.

5.12 Струмінь води площею поперечного перерізу $S_1 = 4\ см^2$ витікає в горизонтальному напрямі з брандспойту, розміщеного на висоті $h = 2\ м$ над поверхнею землі й падає на неї на відстані $L = 8\ м$ від отвору брандспойту (рис. 4). Знаючи надлишковий тиск $p = 78\ кПа$ води в рукаві, знайти його поперечний переріз.

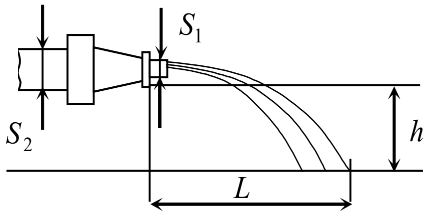


Рисунок 4

Відповідь: $S_2 = 50\ см^2$.

5.13 Горизонтальний циліндр насоса має діаметр $d_1 = 20\ см$. У ньому рухається зі швидкістю $v_1 = 1\ м/с$ поршень, виштовхуючи воду через отвір діаметром $d_2 = 2\ см$. З якою швидкістю v_2 буде витікати вода з отвору? Яким буде надлишковий тиск p води в циліндрі?

Відповідь: $v_2 = 100\ м/с$; $p = 5\,МПа$.

5.14 Водою і мазутом заповнений вертикально розміщений циліндричний бак. Висота води в баку $H = 1\,м$, густина мазуту $\rho = 900\,кг/м^3$. У дні бака зроблено отвір, через який витікає вода з швидкістю $v = 9{,}5\ м/с$. Знайти висоту шару мазуту в баку.

Відповідь: $h = 4\,м$.

5.15 Площа поршня, вставленого у горизонтально розміщений заповнений водою шприц, $S_1 = 1,5 \cdot 10^{-4}\,м^2$, а площа отвору його голки $S_2 = 0,8 \cdot 10^{-6}\,м^2$. Нехтуючи тертям і в'язкістю, визначити час, за який витече вода із шприца, якщо на поршень діяти із сталою силою $F = 5\,H$, а хід поршня $l = 5 \cdot 10^{-2}\,м$.

Відповідь: $t = 1,15\,c$.

5.16 У середині дна циліндричної посудини є невеликий отвір, через який виливається вода. Рівень води в посудині становить 30 *см* вище за дно. З якою швидкістю вода витікає крізь отвір, якщо відро: а) не рухається; б) рівномірно піднімається; в) рухається з прискоренням $a = 120\,см/c^2$ угору; г) рухається з прискоренням $a = 120\,см/c^2$ вниз.

Відповідь: а) $v = 2,42\,м/c$; б) $v = 2,42\,м/c$; в) $v = 2,57\,м/c$; г) $v = 2,27\,м/c$.

5.17 Вода тече по горизонтальній трубі змінного перерізу. Швидкість води в широкій частині труби дорівнює $v_1 = 10\,см/c$. Визначити швидкість v_2 у вузькій частині труби, радіус якої втричі менший за радіус широкої частини.

Відповідь: $v_2 = 0,9\,м/c$.

5.18 У стінці посудини з водою зробили два отвори на відстані $\Delta l = 0,2$ м один над одним площею $S_1 = 2\,см^2$ кожний. Визначити координати точки перетину потоків, що витікають з отворів, якщо у посудину щосекунди вливається $V = 1,4\,дм^3$ води.

Відповідь: $x = 1,2\,м$; $y = 1,3\,м$.

5.19 Бак висотою $H = 2\,м$ заповнений рідиною. На якій висоті потрібно зробити отвір, щоб місце падіння струменя, який витікає з отвору, було на максимальній від бака відстані?

Відповідь: $S = 1\,м$.

5.20 Циліндрична посудина висотою $H = 70\ см$ із площею дна $S_1 = 600\ см^2$ наповнена водою. У дні посудини зроблений отвір площею $S_2 = 1\ см^2$.

а) Як рухається верхній рівень води в посудині?

б) Через який проміжок часу посудина спорожніє повністю?

в) Через який проміжок часу посудина спорожніє наполовину?

Відповідь: а) Це рівняння рівноуповільненого руху з початковою швидкістю $v_0 = 6{,}17 \cdot 10^{-3}\ м/с$ і прискоренням $a = -2{,}8 \cdot 10^{-5}\ м/с^2$; б) $t_1 = 227\, с$; в) $t_2 = 67\, с$.

5.21 Водомір – це горизонтальна труба змінного перерізу, в яку впаяні дві вертикальні манометричні трубки однакового перерізу (рис. 5). По трубі тече вода. Нехтуючи в'язкістю води, визначити її масову витрату, якщо різниця рівнів у манометричних трубках $\Delta h = 0{,}08\, мм$, а перерізи труби біля основ манометричних трубок відповідно дорівнюють $S_1 = 6 \cdot 10^{-4}\, м^2$ і $S_2 = 12 \cdot 10^{-4}\, м^2$.

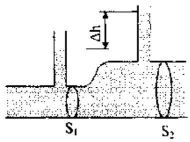


Рисунок 5

Відповідь: $\Delta Q = 868 \cdot 10^{-3}\ кг/с$.

5.22 У посудину щосекунди наливають $V = 0{,}2\, л$ води. Який повинен бути діаметр отвору в дні посудини, щоб вода в ній перебувала на сталому рівні $h = 83 \cdot 10^{-3}\, м$?

Відповідь: $d = 14 \cdot 10^{-3}\, м.$

5.23 Рідина виштовхується поршнем шприца площею $S_1 = 2 \cdot 10^{-4}\, м^2$ через отвір голки площею $S_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\, м^2$. Хід поршня становить $l = 8 \cdot 10^{-2}\, м.$ Знайти тиск на поршень, якщо рідина витікає з нього впродовж $\tau = 3\, с$. Шприц розміщений горизонтально, а рідина, густина якої $\rho = 1\,840\, кг/м^3$, перебуває під атмосферним тиском.

Відповідь: $p = 40\,Па$.

5.24 Горизонтальний циліндр насоса має діаметр $d_1 = 20$ с$м$. У ньому рухається із швидкістю $v_1 = 1$ м/с поршень, виштовхуючи воду через отвір діаметром $d_2 = 2$ с$м$. З якою швидкістю v_2 буде витікати вода з отвору? Яким буде надлишковий тиск p води в циліндрі?

Відповідь: $v_2 = 100\,м/с$; $p = 5\,Мпа$.

5.25 Нехтуючи в'язкістю рідини, визначити швидкість витікання рідини з малого отвору в стінці посудини, якщо висота рівня рідини над отвором $h = 1{,}5$ м.

Відповідь: $v = 5{,}42\,м/с$.

5.26 Якої найбільшої швидкості v може досягнути дощова краплина діаметром $d = 0{,}3\,мм$, якщо динамічна в'язкість повітря $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ Па \cdot с$.

Відповідь: $v = 4\,м/с$.

5.27 Визначити найбільшу швидкість, якої може досягнути свинцева кулька $\left(\rho_{св} = 11\,300\,кг/м^3\right)$ масою $m = 0{,}012\,кг$, що вільно падає у повітрі $\left(\rho = 1{,}29\,кг/м^3\right)$. Коефіцієнт лобового опору дорівнює $f = 0{,}5$.

Відповідь: $v = 77{,}6\,м/с$.

5.28 Під час руху кульки радіусом $r_1 = 1{,}2\,мм$ у гліцерині ламінарне обтікання спостерігається під час швидкостей кульки, не вищих за $v_1 = 23$ см$/с$. За якої мінімальної швидкості v_2 кулі радіусом $r_2 = 5{,}5\,см$ у воді обтікання стане турбулентним? В'язкість гліцерину і води дорівнюють відповідно $\eta_1 = 1{,}39\,мПа \cdot с$ і $\eta_2 = 1{,}1\,мПа \cdot с$.

Відповідь: $v_2 = 5\ мкм/с$.

5.29 У широкій посудині, заповненій касторовим мастилом, падає стальна кулька зі сталою швидкістю $v = 0{,}2\ м/с$.

Динамічна в'язкість касторового мастила за температури досліду $\eta = 2\ H \cdot c / м^2$. Визначити діаметр кульки.

Відповідь: $d = 1\ мм$.

5.30 У широкій посудині, заповненій прованським мастилом, падає стальна кулька з початковою швидкістю $v_0 = 0$. Динамічна в'язкість мастила за температури досліду $\eta = 0,9\ H \cdot c / м^2$. Діаметр кульки дорівнює $d = 3\ мм$. Через який час після початку руху швидкість кульки буде відрізнятися від максимальної на 1%?

Відповідь: $t = 0,2\ c$.

6 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

6.1 Рівняння гармонічних коливань

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де $x(t)$ – зміщення або відхилення точки від положення рівноваги $(x = 0)$; A – амплітуда коливань, або величина максимального зміщення: $A = x_{\max}$; ω_0 – власна циклічна частота; α – початкова фаза коливань. Величина, $(\omega_0 t + \alpha)$ називається **фазою коливань**

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha .$$

6.2 Час, упродовж якого здійснюється одне повне коливання, називається **періодом коливань** (T)

$$T = \frac{t}{N},$$

де N – число повних коливань, що відбуваються за час t.

6.3 Частота коливань

Частотою коливань (ν) називається фізична величина, що показує, яке число повних коливань виконує коливна система за одиницю часу

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}.$$

Циклічною або коловою частотою (ω) коливань називається число повних коливань, які здійснюються за 2π секунд,

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\nu}.$$

6.4 Диференціальне рівняння гармонічних коливань

Швидкість коливної точки

$$\mathrm{v} = \dot{x}(t) = -\,\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \alpha)\,,$$

де ω_0 – циклічна частота власних коливань; α – початкова фаза.

Прискорення коливної точки

$$a = \dot{\mathrm{v}} = \ddot{x}(t) = -\,\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 x.$$

Сила, яка діє на коливну точку під час гармонічного коливання, дорівнює

$$F = ma = m\ddot{x} = -\,m\omega_0^2 x\,.$$

Диференціальне рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 .$$

6.5 Період власних коливань математичного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} ,$$

де l – довжина маятника; g – прискорення вільного падіння;

пружинного маятника

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} ,$$

де m – маса маятника; k – коефіцієнт жорсткості пружини.

6.6 Енергія в коливних процесах

Кінетична енергія тіла, яке виконує гармонічні коливання

$$W_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A\sin^2\left(\omega_0 t + \alpha\right).$$

Потенціальна енергія тіла, яке виконує гармонічні коливання,

$$W_П = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega_0 t + \alpha\right).$$

Повна механічна енергія коливного тіла

$$W = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$$

або

$$W = W_K + W_П = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2.$$

6.7 Фізичний маятник

Циклічна частота власних коливань фізичного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}},$$

де m – маса маятника; d – відстань центра тяжіння маятника від точки підвісу; I – момент інерції фізичного маятника.

Період власних коливань фізичного маятника

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

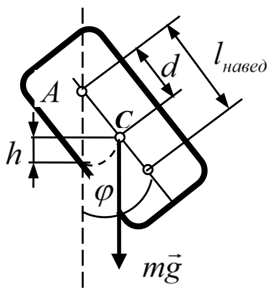


Рисунок 1 – Фізичний маятник

де $L = \dfrac{I}{md}$ – **зведена довжина маятника**.

ДОДАВАННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

6.8 Додавання двох однаково спрямованих коливань

Амплітуда результуючих коливань дорівнює

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\alpha_2 - \alpha_1\right),$$

де A_1, A_2 – амплітуди коливань, які додаються; α_1, α_2 – початкові фази цих коливань.

Початкова фаза результуючих коливань визначається співвідношенням

$$tg\alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

6.9 Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Рівняння результуючих коливань під час додавання взаємно перпендикулярних коливань

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \frac{2xy}{AB}\cdot\cos\alpha = \sin^2\alpha,$$

де A та B – амплітуди коливань, що поширюються вздовж осей x та y; α – різниця фаз коливань.

1) У разі, коли різниця фаз між коливаннями дорівнює $\alpha = m\pi\ \left(m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\right)$, коливна точка виконує **лінійно поляризовані коливання,** рівняння траєкторії яких має вигляд

$$\left(\frac{x}{A} \pm \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

або

$$y = \pm \frac{B}{A} x.$$

2) У разі, коли різниця фаз між коливаннями дорівнює $\alpha = (2m+1)\frac{\pi}{2}, (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, результуючі коливання точки мають **колову поляризацію** і рівняння результуючих коливань набере вигляду

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1.$$

Це рівняння еліпса, приведеного до координатних осей. У разі, коли амплітуди однакові $A = B$, еліпс перетворюється в коло.

ЗГАСАЮЧІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

6.10 Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

де $\beta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт згасання; ω_0 – циклічна частота власних коливань системи.

6.11 Рівняння згасаючих коливань (за $\beta \le \omega_0$)

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \alpha\right),$$

де A_0 і α – амплітуда та початкова фаза згасаючих коливань на момент часу $t = 0$; ω – циклічна частота згасаючих коливань.

6.12 Циклічна частота згасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\ .$$

6.13 Період згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\,.$$

6.14 Логарифмічний декремент згасання

$$\theta = \ln\frac{A\left(t\right)}{A\left(t+T\right)} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

6.15 Зв’язок коефіцієнта згасання з часом релаксації τ

$$\beta\tau = 1; \quad \beta = \frac{1}{\tau}\,.$$

ЗМУШЕНІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

6.16 Диференціальне рівняння змушених коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t,$$

де $f_0=\dfrac{F_0}{m}$.

6.17 Рівняння змушених коливань системи

$$x=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t-arctg\,\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right).$$

6.18 Амплітуда змушених коливань залежить від частоти зовнішньої періодичної сили

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}.$$

6.19 Резонансна частота

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\,.$$

МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

6.20 Рівняння плоскої хвилі в разі, коли вона поширюється вздовж осі x

$$\xi\left(x,t\right)=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{\text{v}}\right)=A\cos\left(\omega t-kx\right),$$

де ξ – зміщення будь-якої точки з координатою x у момент часу t; v – фазова швидкість; $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

6.21 Довжина хвилі

$$\lambda=\text{v}T,$$

де v – швидкість поширення хвилі; $T=\dfrac{1}{\nu}$ – період; ν – частота коливань.

6.22 Швидкість поширення хвилі

$$\text{v}=\lambda\nu.$$

Швидкість поширення звуку в газах дорівнює

$$\text{v}_{ЗВ}=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

де γ – показник адіабати; M – молярна маса газу; R – молярна газова стала; T – температура маси газу.

6.23 Ефект Доплера

1) Частота звуку, яку сприймає приймач, що наближається до джерела із швидкістю $\mathrm{v}_{П}$

$$\nu'_{П} = \nu_0 \left(1 + \frac{\mathrm{v}_{П}}{\mathrm{v}_{\text{зв}}}\right),$$

де ν_0 – частота джерела звуку; $\mathrm{v}_{\text{зв}}$ – швидкість звуку.

2) Частота звуку, яку сприймає приймач, що віддаляється від джерела із швидкістю $\mathrm{v}_{П}$

$$\nu'_{П} = \nu_0 \left(1 - \frac{\mathrm{v}_{П}}{\mathrm{v}_{\text{зв}}}\right).$$

3) Частота звуку, яку сприймає приймач у разі, коли джерело наближається до приймача зі швидкістю $\mathrm{v}_{Д}$

$$\nu''_{П} = \nu_0 \frac{\mathrm{v}_{\text{зв}}}{\mathrm{v}_{\text{зв}} - \mathrm{v}_{Д}}.$$

4) Частота звуку, яку сприймає приймач у разі, коли джерело віддаляється від приймача зі швидкістю $\mathrm{v}_{Д}$

$$\nu''_{П} = \nu_0 \frac{\mathrm{v}_{\text{зв}}}{\mathrm{v}_{\text{зв}} + \mathrm{v}_{Д}},$$

де ν_0 – частота джерела звуку; $\mathrm{v}_{\text{зв}}$ – швидкість звуку.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 6.1

Точка виконує коливання за законом $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, де $A = 2\ см$. Визначити початкову фазу α, якщо $x(0) = -\sqrt{3}\ см$ і $\dot{x}(0) < 0$. Побудувати векторну діаграму для моменту часу $t = 0$.

Розв'язування

$\alpha - ?$
$A = 2\,см,$ $x(0) = -\sqrt{3}\,см,$ $\dot{x}(0) < 0.$

Із рівняння

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (1)$$

знайдемо зміщення в момент часу $t = 0$ через початкову фазу

$$x(0) = A\cos\alpha .$$

Із цього виразу визначимо початкову фазу

$$\alpha = \arccos\frac{x(0)}{A}. \qquad (2)$$

Підставимо в цей вираз значення $x(0) = -\sqrt{3}\,см$ і $A = 2\,см$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Значенню аргумента відповідає два значення кута

$$\alpha_1 = 5\pi/6 \text{ і } \alpha_1 = 7\pi/6. \qquad (3)$$

Для того щоб визначити, яке з цих значень кута задовольняє також умові $\dot{x}(0) < 0$, знайдемо спочатку похідну від виразу (1)

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha). \qquad (4)$$

Підставимо у вираз (4) значення $t = 0$ і по черзі значення початкових фаз (3)

$$\dot{x}_1(0) = -\frac{1}{2}\omega A \text{ і } \dot{x}_2(0) = \frac{1}{2}\omega A.$$

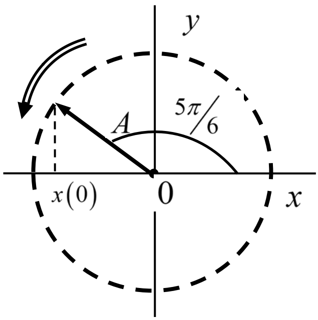


Рисунок 2

Видно, що умові $\dot{x}(0) < 0$ задовольняє лише перше значення початкової фази. За знайденим значенням α побудуємо векторну діаграму (рис. 2).

Відповідь: $\alpha = 5\pi/6$.

Задача 6.2

Матеріальна точка масою $m = 5\,г$ виконує гармонічні коливання з частотою $\nu = 0,5\,Гц$. Амплітуда коливань $A = 3\,см$. Визначити: 1) швидкість точки v в момент часу, коли зміщення $x = 1,5\,см$; 2) максимальну силу $F_{\max}$, що діє на точку; 3) повну енергію W коливної точки.

Розв'язування

$\text{v}-?\ F_{max}-?\ W-?$
$m = 5\,г = 0{,}005\,кг$,
$\nu = 0{,}5\,Гц$,
$A = 3\,см = 0{,}03\,м$,
$x = 1{,}5\,см = 0{,}015\,м.$

1) Рівняння гармонічного коливання має вигляд

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha\right) \qquad (1)$$

Швидкість коливної точки визначається співвідншенням

$$\text{v} = \dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \alpha)\,. \qquad (2)$$

Для того щоб виразити швидкість через зміщення, потрібно прибрати з виразів (1) і (2) час. Для цього зведемо обидва рівняння у квадрат, поділимо перше на A^2, а друге на $A^2\omega_0{}^2$ і додамо

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\text{v}^2}{A^2\omega_0{}^2} = 1,\ \text{або}\ \frac{x^2}{A^2} + \frac{\text{v}^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1\,. \qquad (3)$$

Із рівняння (3) знайдемо швидкість v

$$\text{v} = \pm\, 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}\,. \qquad (4)$$

Підставимо у (4) числові значення та одержимо

$$\text{v} = \pm\, 2\pi \cdot 0{,}5\sqrt{\left(3\cdot 10^{-2}\right)^2 - \left(1{,}5^2\cdot 10^{-2}\right)^2} = \pm\ 0{,}082\,м/с\,.$$

Знак плюс відповідає випадку, коли напрямок швидкості збігається з позитивним напрямком осі x, знак мінус –

коли напрямок швидкості збігається з від’ємним напрямком осі x.

2) Силу, яка діє на точку, знайдемо за другим законом Ньютона

$$F = ma\,, \tag{5}$$

де a – прискорення точки, яке визначимо з рівняння

$$a = \dot{\mathrm{v}} = \ddot{x}(t) = -\omega_0^{\,2} A\cos(\omega_0 t + \alpha)\,,$$

або

$$a = -4\pi^2\nu^2 A\cos(\omega_0 t + \alpha)\,. \tag{6}$$

Підставимо співвідношення (6) у (5) та одержимо

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA\cos(\omega_0 t + \alpha)\,.$$

Звідси максимальне значення сили дорівнює

$$F = 4\pi^2\nu^2 mA\,. \tag{7}$$

Підставимо в рівняння (7) числові значення величин

$$F = 4\pi^2 0,5^2 \cdot 0,005 \cdot 0,03 = 1,49 \cdot 10^{-3}\ H.$$

3) Повну енергію коливної точки знайдемо із співвідношення

$$W = \frac{1}{2} m\omega^2 A = 2\pi^2 m\nu^2 A^2\,.$$

Виконаємо розрахунки за цією формулою:

$$W = 2\pi^2 0,005 \cdot 0,5^2 0,03^2 = 22,2 \cdot 10^{-6}\ Дж.$$

Перевірка розмірності дає

$$[W] = [m][\nu]^2 [A]^2 = кг \cdot \left(c^{-1}\right)^2 \cdot м^2 = \frac{кг \cdot м^2}{c^2} = Н \cdot м = Дж.$$

Відповідь: 1) $\text{v} = \pm 0,082\, м/c$; 2) $F = 1,49\, мН$; 3) $W = 22,1\, мкДж.$

Задача 6.3

Додаються два коливання однакового напрямку, рівняння яких мають вигляд $x_1 = A_1 \cos\omega_0 \left(t + \tau_1\right)$ і $x_2 = A_2 \cos\omega_0 \left(t + \tau_2\right)$, де $A_1 = 1\, см$; $A_2 = 2\, см$; $\tau_1 = \frac{1}{6} c$; $\tau_2 = \frac{1}{2} c$; $\omega_0 = \pi\, c^{-1}$. Визначити початкові фази коливань; знайти амплітуду та початкову фазу результуючого коливання. Написати рівняння результуючого коливання.

Розв'язування

$\text{v} - ?\ F_{\max} - ?\ W - ?$
$m = 5\, г = 0,005\, кг,$
$\nu = 0,5\, Гц,$
$A = 3\, см = 0,03\, м,$
$x = 1,5\, см = 0,015\, м.$

Рівняння гармонічного коливання має вигляд

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha\right). \qquad (1)$$

Перетворимо рівняння, задані в умові задачі, до такого вигляду:

$$x_1 = A_1\cos\left(\omega_0 t + \omega_0\tau_1\right),\ x_2 = A_2\cos\left(\omega_0 t + \omega_0\tau_2\right). \qquad (2)$$

Порівнюючи вирази (2) та (1), знайдемо початкові фази першого та другого коливань

$$\alpha_1 = \omega_0\tau_1 = \frac{\pi}{6}\,рад \text{ і } \alpha_2 = \omega_0\tau_2 = \frac{\pi}{2}\,рад.$$

Для визначення амплітуди результуючого коливання скористаємося виразом

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення

$$A = \sqrt{0,01^2 + 0,02^2 + 2\cdot 0,01\cdot 0,02\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = 0,0265\,м.$$

Тангенс початкової фази результуючих коливань визначається співвідношенням

$$tg\alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2},$$

звідки початкова фаза

$$\alpha = arctg\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

Виконаємо відповідні обчислення

$$\alpha = arctg\frac{0,01\sin\frac{\pi}{6} + 0,02\sin\frac{\pi}{2}}{0,01\cos\frac{\pi}{6} + 0,02\cos\frac{\pi}{2}} =$$

$$= arctg\frac{5}{\sqrt{3}} = 70,9^0 = 0,394\pi \ рад.$$

Оскільки циклічні частоти коливань, що додаються, однакові, то результуюче коливання буде відбуватися з тією самою частотою ω_0. Це дозволяє записати результуюче коливання у вигляді

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha\right),$$

або

$$x = 0,0265 \cdot \cos\left(\pi t + 0,394\pi\right).$$

Відповідь: $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}\ рад$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}\ рад$; $A = 0,0265\ м$; $\alpha = 0,394\pi\ рад$; $x = 0,0265 \cdot \cos\left(\pi t + 0,394\pi\right)$.

Задача 6.4

Математичний маятник довжиною $l = 50\,см$ виконує коливання малої амплітуди в середовищі, коефіцієнт згасання якого $\beta = 0,9\,c^{-1}$. Визначити час і число повних коливань упродовж яких амплітуда маятника зменшилася в п’ять разів. У скільки разів повинен збільшитися коефіцієнт тертя, щоб коливання виявилися неможливими?

Розв'язування

$t - ?\ \ N - ?\ \ \dfrac{r_1}{r} - ?$
$l = 50\,см = 0,5\,м,$ $\beta = 0,9\,c^{-1},$ $A = \dfrac{A_0}{5}.$

За відсутності тертя малі коливання маятника у вертикальній площині відбуваються за гармонічним законом, власна циклічна частота математичного маятника дорівнює

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad (1)$$

де g – прискорення вільного падіння на поверхні Землі; l – довжина маятника.

Унаслідок тертя коливання маятника будуть згасати, причому період згасаючих коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (2)$$

Амплітуда згасаючих коливань зменшується з часом за експонентою

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \qquad (3)$$

За умовою задачі $A = \dfrac{A_0}{5}$, тоді

$$\frac{A_0}{5} = A_0 e^{-\beta t} \Rightarrow \frac{1}{5} = e^{-\beta t}.$$

Злогарифмуємо цей вираз та знайдемо

$$t = \frac{\ln 5}{\beta}.$$

Підставимо числові значення та одержимо

$$t = \frac{\ln 5}{0,9} = 1,79\,c.$$

Число повних коливань за час t дорівнює

$$N = \frac{t}{T}. \qquad (4)$$

Підставимо в співвідношення (4) вирази (2) та (1) і одержимо

$$N = \frac{t\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)^2 - \beta^2}}{2\pi}.$$

Виконаємо розрахунки

$$N = \frac{1,79\sqrt{\left(\frac{9,8}{0,5}\right)^2 - 0,9^2}}{2\pi} = 1.$$

Згасаючі коливання за законом

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$

відбуваються лише за умови $\beta \le \omega_0$, за $\beta > \omega_0$ період і циклічна частота є уявними числами. За $\beta > \omega_0$ відбувається аперіодичний процес.

Граничне значення коефіцієнта згасання

$$\beta_{\max} = \omega_0 ,$$

причому $\beta = \dfrac{r}{2m}$, де m – маса маятника; r – коефіцієнт тертя. Отже, збільшення коефіцієнта тертя дорівнює

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\beta_{\max}}{\beta} = \frac{\omega_0}{\beta} .$$

Підстановка числових даних дає

$$\frac{r_1}{r} = \frac{9,8}{0,5 \cdot 0,9} = 4,9.$$

Відповідь: $t = 1,79\,c$; $N = 1$; $\dfrac{r_1}{r} = 4,9$.

Задача 6.5

Поперечна хвиля поширюється вздовж пружного шнура зі швидкістю $\mathrm{v} = 5\ м/c$. Період коливань точок шнура дорівнює $T = 1,2\,c$, амплітуда $A = 2\,м$. Визначити: 1) довжину хвилі λ; 2) фазу коливань φ, зміщення ξ, швидкість $\dot{\xi}$ та прискорення $\ddot{\xi}$ точки, віддаленої на відстань $x = 45\,м$ від джерела хвиль у момент часу $t = 4\,c$;

3) різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок, які розміщені на одній прямій на відстанях $x_1 = 20\,м$, $x_2 = 30\,м$.

Розв'язування

$\lambda - ?$ $\varphi - ?$ $\xi - ?$ $\dot{\xi} - ?$ $\ddot{\xi} - ?$ $\Delta\varphi - ?$
$\mathrm{v} = 5\,м/с$, $T = 1{,}2\,с$, $A = 2\,м$, $x = 45\,м$, $t = 4\,с$, $x_1 = 20\,м$, $x_2 = 30\,м.$

1) Довжина хвилі дорівнює відстані, яку проходить хвиля за час одного періода, і вираховується із співвідношення

$$\lambda = \mathrm{v}T,$$

де v – швидкість поширення хвилі; $T = \frac{1}{\nu}$ – період; ν – частота коливань.

Підставимо значення v і T та одержимо

$$\lambda = 15 \cdot 1{,}2 = 18\,м.$$

2) Запишемо рівняння хвилі

$$\xi = A\cos\omega_0\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\right), \qquad (1)$$

де ξ – зміщення будь-якої точки з координатою x у момент часу t; v – фазова швидкість хвилі.

Фаза коливань точки з координатою x у момент часу t визначається виразом, який є в рівнянні хвилі під знаком косинуса

$$\varphi = \omega_0\left(t - \frac{x}{\text{v}}\right), \text{ або } \varphi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\text{v}}\right).$$

Виконаємо розрахунки за останньою формулою та одержимо

$$\varphi = \frac{2\pi}{1,2}\left(4 - \frac{45}{15}\right) = 5,24\, рад = 300^0.$$

Зміщення точки визначимо, якщо підставимо в рівняння (1) значення амплітуди та фази

$$\xi = 2\cos 300^0 = 1\, см\,.$$

Швидкість точки дорівнює першій похідній за часом від зміщення

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega\sin\omega\left(t - \frac{x}{\text{v}}\right) = -\frac{2\pi A}{T}\sin\varphi.$$

Виконаємо розрахунки

$$\dot{\xi} = -\frac{2\pi 2}{1,2}\sin 300^0 = 0,09\, м/с\,.$$

Прискорення – це перша похідна від швидкості за часом, тому

$$\ddot{\xi} = \frac{d\dot{\xi}}{dt} = -A\omega^2\cos\omega\left(t - \frac{x}{\text{v}}\right) = -\frac{4\pi^2 A}{T^2}\cos\varphi.$$

Виконаємо обчислення за цією формулою:

$$\ddot{\xi} = -\frac{4\pi^2 2}{1,2^2}\cos 300^0 = 0,274\, м/c^2 .$$

3) Різниця фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок хвилі пов'язана з відстанню Δx між цими точками співвідношенням

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right).$$

Підставимо числові значення величин та одержимо

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{18}\left(30 - 20\right) = 3,49\, рад = 200^0 .$$

Відповідь: $\lambda = 18\, м$; $\varphi = 300^0$; $\xi = 1 см$; $\dot{\xi} = 0,09\, м/c$; $\ddot{\xi} = 0,274\, м/c^2$; $\Delta\varphi = 200^0$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

6.1 Точка виконує коливання за законом $x = A\cos\omega t$, де $A = 4\,см$; $\omega = 1\,c^{-1}$. Визначити прискорення точки в момент часу, коли її швидкість $\dot{x} = 2\,см/с$.

Відповідь: $\ddot{x} = 1,73\,см/с^2$.

6.2 Максимальна швидкість точки, що виконує коливання, дорівнює $\mathrm{v}_{\max} = 10\,см/с$, а максимальне прискорення $a_{\max} = 100\,см/с^2$. Знайти циклічну частоту коливань, їх період і амплітуду. Написати рівняння коливань, взявши, що початкова фаза дорівнює нулю.

Відповідь: $\omega_0 = 10\,c^{-1}$; $T = 0,628\,с$; $A = 0,01\,м$; $x = 0,01\cos 10\,t\ м$.

6.3 Коливання точки відбувається за законом $x = A\cos(\omega t + \phi)$. У деякий момент часу зміщення точки дорівнює $x = 5\,см$, її швидкість $\dot{x} = 20\,см/с$ і прискорення $\ddot{x} = -80\,см/с^2$. Знайти амплітуду, циклічну частоту, період коливань і фазу в цей момент часу.

Відповідь: $A = 7,07\,см$; $\omega = 4\,c^{-1}$; $T = 1,57\,с$; $\varphi = 135^0 = \frac{3}{4}\pi$.

6.4 Матеріальна точка масою $m = 5\,г$ виконує гармонічні коливання з частотою $\nu = 0,5\,Гц$. Амплітуда коливань $A = 3\,см$. Визначити: 1) швидкість точки v у момент часу, коли зміщення $x = 1,5\,см$; 2) максимальну силу $F_{\max}$, що діє на точку; 3) повну енергію W коливної точки.

Відповідь: 1) $\mathrm{v} = \pm\ 0,082\,м/с$; 2) $F = 1,49\,мН$; 3) $W = 22,1\,мкДж$.

6.5 Кулька масою $m = 60\ г$ коливається з періодом $T = 2\,с$. У початковий момент часу зміщення кульки $x_0 = 4\,см$ і вона має енергію $W = 0,02\,Дж$. Записати рівняння простого гармонічного коливання кульки та закон зміни повертаючої сили з часом.

Відповідь: $x = 0,0675\cos\left(\pi t + 54^0\right)\ м$;
$F\left(t\right) = 0,04\cos\left(\pi t + 54^0\right)\ H$.

6.6 До пружини підвішений вантаж масою $m = 10\,кг$. Визначити період вертикальних коливань вантажу, якщо під дією сили $F = 10\,H$ пружина розтягується на 1,5 см.

Відповідь: $T = 0,78\,с$.

6.7 У скільки разів зміниться період вертикальних коливань вантажу, який підвішений на двох однакових пружинах, якщо від послідовного з'єднання пружин перейти до їх паралельного з'єднання?

Відповідь: період зменшиться у два рази.

6.8 На кінцях тонкого стрижня довжиною $l = 30\,см$ закріплені однакові вантажі по одному на кожному кінці. Стрижень із вантажами виконує коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через точку віддалену на $d = 10\,см$ від одного з кінців стрижня. Визначити зведену довжину та період коливань такого фізичного маятника. Масою маятника знехтувати.

Відповідь: $L = 50\,см$; $T = 1,42\,с$.

6.9 Диск радіусом $R = 24\ см$ виконує коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через середину одного з радіусів перпендикулярно до площини диска. Визначити зведену довжину та період коливань такого маятника.

Відповідь: $L = 36\,см$; $T = 1,2\,с$.

6.10 Математичний маятник довжиною $l_1 = 40\,см$ і фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стрижня довжиною $l_2 = 60\,см$ виконують синхронні коливання навколо тієї самої горизонтальної осі. Визначити відстань центра мас стрижня від осі коливань.

Відповідь: $a = 10\,см.$

6.11 Точка виконує коливання за законом $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, де $A = 2\ см$. Визначити початкову фазу α, якщо $x(0) = -\sqrt{3}\,см$ і $\dot{x}(0) < 0$. Побудувати векторну діаграму для моменту часу $t = 0$.

Відповідь: $\alpha = {}^{5\pi}\!/_{6}$.

6.12 1) Визначити амплітуду й початкову фазу гармонічного коливання одержаного від додавання однаково спрямованих коливань, рівняння яких мають вигляд $x_1 = 4\sin \pi t\, см$ і $x_2 = 3\sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right) см$.

2) Написати рівняння результуючого коливання.

3) Виконати векторну діаграму додавання амплітуд.

Відповідь: 1) $A = 5\,см,\ \varphi = 36^0 46' \cong 0,2\pi$;
2) $x = 5\sin(\pi t + 0,2\pi)\,см.$

6.13 Додаються два коливання однакового напрямку, рівняння яких мають вигляд $x_1 = A_1 \cos\omega_0 (t + \tau_1)$ і $x_2 = A_2 \cos\omega_0 (t + \tau_2)$, де $A_1 = 1\,см$; $A_2 = 2\,см$; $\tau_1 = \dfrac{1}{6} c$; $\tau_2 = \dfrac{1}{2} c$; $\omega_0 = \pi\, c^{-1}$. Визначити початкові фази коливань; знайти амплітуду та початкову фазу результуючого коливання. Написати рівняння результуючого коливання.

Відповідь: $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{6}\,рад$; $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}\,рад$; $A = 0,0265\,м$; $\alpha = 0,394\pi\ рад$; $x = 0,0265 \cdot \cos\left(\pi t + 0,394\pi\right)$.

6.14 Визначити амплітуду й початкову фазу результуючого коливання, що виникає під час додавання двох коливань однакових напрямків $x_1 = 0,02\sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)м$ і $x_2 = 0,03\sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)м$. Знайти рівняння результуючого коливання.

Відповідь: $A = 4,6 \cdot 10^{-2}\ м$, $\varphi = 62^0 46' \cong 0,35\pi$; $x = 0,046\sin\left(5\pi t + 0,35\pi\right)м.$

6.15 Точка бере участь одночасно в двох гармонічних коливаннях, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках і описуються рівняннями $x = \sin \pi t\, см$ і $y = 4\sin\left(\pi t + \pi\right)см$. Знайти рівняння траєкторії точки і побудувати графік її руху.

Відповідь: $y = -0,75x$ – рівняння прямої.

6.16 Написати рівняння результуючого коливання, одержаного внаслідок додавання двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковою частотою $\nu_1 = \nu_2 = 5\,Гц$ та з однаковою початковою фазою $\varphi_1 = \varphi_2 = 60^0$. Амплітуда одного з коливань дорівнює $A_1 = 0,1\,м$, амплітуда іншого – $A_2 = 0,05\,м$.

Відповідь: $\zeta = 0,112\sin\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)м.$

6.17 Чому дорівнює логарифмічний декремент згасання математичного маятника, якщо за одну хвилину амплітуда коливань зменшилася у два рази? Довжина маятника 1м.

Відповідь: $\theta = 0,023$.

6.18 Амплітуда згасаючих коливань математичного маятника за одну хвилину зменшилася вдвічі. У скільки разів вона зменшиться за три хвилини?

Відповідь: у 8 разів.

6.19 Математичний маятник довжиною $l = 50\,см$ виконує коливання малої амплітуди в середовищі, коефіцієнт згасання якого $\beta = 0,9\,c^{-1}$. Визначити час і число повних коливань, упродовж яких амплітуда маятника зменшилася в п'ять разів. У скільки разів повинен збільшитися коефіцієнт тертя, щоб коливання виявилися неможливими?

Відповідь: $t = 1,79\,c$; $N = 1$; $\frac{r_1}{r} = 4,9$.

6.20 Математичний маятник довжиною $l = 24,7\,см$ виконує згасаючі коливання. Через який час енергія коливань маятника зменшиться в 9,4 раза? Скільки повних коливань виконає маятник за цей час? Задачу розв'язати за значення логарифмічного декремента коливань: 1) $\theta = 0,01$ і 2) $\theta = 1$.

Відповідь: 1) $t = 80\,c$, $N = 112$; 2) $t = 0,81\,c$, $N = 1$.

6.21 Визначити, на скільки резонансна частота відрізняється від частоти $\nu_0 = 1\,кГц$ власних коливань системи з коефіцієнтом затухання $400\,c^{-1}$.

Відповідь: $\Delta\nu = 4,05\,Гц$.

6.22 Коливальна система виконує згасаючі коливання з частотою $\nu = 1\,000\,Гц$. Визначити частоту власних коливань, якщо резонансна частота $\nu_{рез} = 998\,Гц$.

Відповідь: $\nu_0 = 1\,002\,Гц$.

6.23 Вагон масою $m = 80\,т$ має чотири ресори. Жорсткість пружин кожної ресори дорівнює $k = 500\,кН/м$. За якої швидкості v вагон почне сильно розгойдуватися внаслідок поштовхів на стиках колій, якщо довжина колії $l = 12,8\,м$?

Відповідь: $v = 10,2\,м/с$.

6.24 У скільки разів амплітуда змушених коливань буде меншою за резонансну амплітуду, якщо частота зміни змушуючої сили буде більшою за резонансну частоту: 1) на 10 %; 2) у два рази? Коефіцієнт згасання в обох випадках вважати таким, що дорівнює $\beta = 0,1\omega_0$ (ω_0 – циклічна частота власних коливань).

Відповідь: 1) у 1,53; 2) у 15,2.

6.25 Рівняння плоскої хвилі $\xi = A\cos(\omega t - kx)$, де $A = 0,5\,см$; $\omega = 628\,с^{-1}$; $k = 2\,м^{-1}$. Визначити: 1) частоту коливань ν та довжину хвилі λ; 2) фазову швидкість v; 3) максимальне значення швидкості $\dot{\xi}$ та прискорення $\ddot{\xi}$ коливань частинок середовища.

Відповідь: 1) $\nu = 100\,Гц$, $\lambda = 3,14\,м$;
2) $v = 314\,м/с$; 3) $\dot{\xi} = 0,314\,м/с$, $\ddot{\xi} = 197\,м/с^2$.

6.26 Хвиля з періодом $T = 1,2\,с$ і амплітудою коливань $A = 2\,см$ поширюється зі швидкістю $v = 15\,м/с$. Визначити зміщення ξ точки, яка розміщена на відстані $x = 45\,м$ від джерела хвиль, в момент, коли від початку коливань джерела пройшов час $t = 4\,с$.

Відповідь: $\xi = -1,73\,см$.

6.27 Поперечна хвиля поширюється вздовж пружного шнура зі швидкістю $v = 5\,м/с$. Період коливань точок шнура дорівнює $T = 1,2\,с$, амплітуда $A = 2\,м$. Визначити: 1) довжину хвилі λ; 2) фазу коливань φ, зміщення

ξ, швидкість $\dot{\xi}$ та прискорення $\ddot{\xi}$ точки, віддаленої на відстань $x = 45\,м$ від джерела хвиль у момент часу $t = 4\,с$; 3) різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок, які розміщені на одній прямій на відстанях $x_1 = 20\,м$, $x_2 = 30\,м$.

Відповідь: $\lambda = 18\,м$; $\varphi = 300^0$; $\xi = 1\,см$; $\dot{\xi} = 0,09\,м/с$; $\ddot{\xi} = 0,274\,м/с^2$; $\Delta\varphi = 200^0$.

6.28 Знайти відношення швидкостей звуку у водні та вуглекислому газі за однакової температури газів.

Відповідь: $n = 4,8$.

6.29 Людське вухо може сприймати звукові коливання з частотами від 20 *Гц* до 20 000 *Гц*. Між якими довжинами хвиль перебуває інтервал чутності людського вуха. Взяти, що звук поширюється зі швидкістю $\mathrm{v} = 340\,м/с$.

Відповідь: $0,017\,м \le \lambda \le 17\,м$.

6.30 По шосе наближаються два автомобілі зі швидкостями $u_1 = 30\,м/с$ і $u_2 = 20\,м/с$. Перший з них подає звуковий сигнал, частота якого становить $\nu_1 = 600\,Гц$. Знайти частоту звуку, який сприймає водій другого автомобіля в двох випадках: 1) до зустрічі; 2) після зустрічі. Чи зміниться відповідь (коли зміниться, то як) у разі, коли сигнал подасть другий автомобіль?

Відповідь: 1) $\nu_1 = 699\,Гц$; 2) $\nu_1 = 517\,Гц$. Зміниться: 2) $\nu_1 = 696\,Гц$; 2) $\nu_1 = 515\,Гц$.

7 ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ТА СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

7.1 Кількість речовини

$$\nu = \frac{m}{M}, \text{ або } \nu = \frac{N}{N_A},$$

де N – число структурних елементів системи; N_A – стала Авогадро.

7.2 Молярна маса речовини

$$M = \frac{m}{\nu}.$$

Масу моля називають **молярною масою** М. Маса моля, визначена в г/моль, чисельно відносній молекулярній масі: $\text{M} = \text{M}_r$ г/моль, або в кг/моль: $\text{M} = 0{,}001 \cdot \text{M}_r$ *кг/моль*.

7.3 Концентрація частинок однорідної системи обчислюється за формулою

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A \rho}{M},$$

де V – об’єм системи; ρ – густина речовини.

7.4 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів

$$p = \frac{1}{3} nm \left\langle {\mathrm{v}_{кв}}^2 \right\rangle = \frac{2}{3} n < W_k >,$$

де p – тиск газу; n – концентрація атомів чи молекул; m – маса; $\left\langle \mathrm{v}_{кв} \right\rangle$ – квадратична швидкість; $< W_K >$ – середня кінетична енергія поступального руху молекули.

7.5 Середня кінетична енергія, що припадає:

а) на один степінь вільності молекули

$$< \varepsilon_1 > = \frac{kT}{2},$$

б) на всі степені вільності молекули (повна енергія молекули)

$$< \varepsilon > = \frac{i}{2} kT,$$

де k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура; i – кількість степенів вільності молекули.

Середня кінетична енергія поступального руху молекули

$$< W_K > = \frac{3}{2} kT.$$

7.6 Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури

$$p = nkT\ .$$

7.7 Швидкість молекул:
а) **середня квадратична**

$$< \mathrm{v}_{кв} > = \sqrt{\frac{3kT}{m}}\ ,\ \text{або}\ < \mathrm{v}_{кв} > = \sqrt{\frac{3RT}{M}}\ ,$$

б) **середня арифметична**

$$< \mathrm{v} > = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\ ,\ \text{або}\ < \mathrm{v} > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\ ,$$

в) **найбільш імовірна**

$$\mathrm{v}_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\ ,\ \text{або}\ \mathrm{v}_i = \sqrt{\frac{2RT}{M}}\ ,$$

де m – маса однієї молекули.

ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ

7.8 Розподіл Больцмана (розподіл частинок у силовому полі)

$$n = n_0 e^{-\frac{W_p}{kT}}\ ,$$

де n – концентрація частинок; W_P – потенціальна енергія; n_0 – концентрація частинок у точках поля, де $W_P = 0$; k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура.

7.9 Барометрична формула (розподіл тиску в однорідному полі сили тяжіння)

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \text{ або } p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}},$$

де p – тиск газу; m – маса частинки; M – молярна маса; h – координата (висота) точки відносно нульового рівня; p_0 – тиск на цьому рівні; g – прискорення вільного падіння; R – молярна газова стала.

7.10 Імовірність того, що фізична величина x, що характеризує молекулу, розміщена в інтервалі значень від x до $x + dx$ і дорівнює

$$dW(x) = f(x)dx,$$

де $f(x)$ – функція розподілу молекул за значеннями цієї фізичної величини x (густина імовірності).

Кількість молекул, для яких фізична величина x, що характеризує їх, розміщені в інтервалі значень від x до $x + dx$

$$dN = NdW(x) = Nf(x)dx.$$

7.11 Розподіл Максвела (розподіл молекул за швидкостями) визначається співвідношеннями:

а) кількість молекул, модулі швидкості яких розміщені в межах від v до $\text{v} + d\text{v}$:

$$dN(\text{v}) = Nf(\text{v})\text{dv} = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\text{v}^2}{2kT}}\text{v}^2 d\text{v},$$

де $f(\text{v})$ – функція розподілу молекул за абсолютними значеннями швидкостей, яка відображає відношення ймовірності того, що швидкість молекули розміщена в інтервалі від v до $\text{v}+d\text{v}$, до величини цього інтервалу, а також частину кількості молекул, швидкості яких розміщені в зазначеному інтервалі; *N* – загальна кількість молекул; *m* – маса молекули;

б) кількість молекул, відносні швидкості яких лежать у межах від u до $u+du$:

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Ne^{-u^2} u^2 du \ ,$$

де $u = \dfrac{\text{v}}{\text{v}_i}$ – відносна швидкість, тобто відношення швидкості v до найбільш імовірної швидкості v_i; *f(u)* – функція розподілу за відносними швидкостями.

7.12 Розподіл молекул за імпульсами. Кількість молекул, імпульси яких розміщені в межах від *p* до *p* + *dp* :

$$dN(p) = Nf(p)\mathrm{d}p = 4\pi N\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p}{2mkT}} p^2 dp \, ,$$

де *f(p)* – функція розподілу за імпульсами.

7.13 Розподіл молекул за енергіями. Кількість молекул, енергії яких розміщені в межах від *E* до *E* + *dE*:

$$dN(E) = Nf(E)dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N \frac{e^{-\frac{E}{kT}}}{(kT)^{\frac{3}{2}}} E^{\frac{1}{2}} dE \ ,$$

де *f(E)* – функція розподілу за енергіями.

7.14 Середнє значення фізичної величини x в загальному випадку

$$< x > = \frac{\int xf(x)dx}{\int f(x)dx} \ ,$$

у разі, якщо функція розподілу нормована на одиницю,

$$< x > = \int xf(x)dx \ ,$$

де *f(x)* – функція розподілу, а інтегрування проводиться за змінами величини x .

Наприклад, **середнє значення швидкості** (середня арифметична швидкість)

$$< \mathrm{v} > = \int_0^\infty \mathrm{v} f(\mathrm{v}) d\mathrm{v} \ ,$$

середня квадратична швидкість

$$< \mathrm{v}_{кв} > = \sqrt{< \mathrm{v}^2 >} \ ,$$

де $< \mathrm{v}^2 > = \int_0^\infty \mathrm{v}^2 f(\mathrm{v}) d\mathrm{v}$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 7.1

У посудині, об'єм якої становить $V = 3\,л$, розміщено $m = 4\,г$ кисню. Визначити кількість речовини газу та концентрацію його молекул.

Розв'язування

$\nu - ?\ \ n - ?$
$V = 3\,л = 3 \cdot 10^{-3}\,м^3$, $m = 4\,г = 4 \cdot 10^{-3}\,кг.$

Кількість речовини визначається співвідношенням

$$\nu = \frac{m}{M},$$

де M – молярна маса або маса моля речовини.

Маса моля, визначена в $г/моль$, чисельно дорівнює відносній молекулярній масі: $\mathrm{M} = \mathrm{M}_r \cdot г/моль$, або в $кг/моль$: $\mathrm{M} = 0{,}001 \cdot \mathrm{M}_r \cdot кг/моль$. Для кисню $M = 32 \cdot 10^{-3}\,кг/моль$.

Підставимо чисельні значення

$$\nu = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} = 0{,}125\,моль.$$

Концентрацію частинок знайдемо зі співвідношення

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\nu \cdot N_A}{V},$$

де N_A – число Авогадро, воно дорівнює числу молекул в одному молі речовини. $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\ моль^{-1}$.

Підставимо числові значення величин

$$n = \frac{0,125 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^{25}\ м^{-3}.$$

Відповідь: $\nu = 0,125\ моль$; $n = 2,5 \cdot 10^{25}\ м^{-3}$.

Задача 7.2

Деяка маса кисню розміщена за температури $T = 300\,K$ і тиску $p = 10^5\ Па$. Середня кінетична енергія поступального руху молекул кисню $W = 6,3\ Дж$. Обчислити кількість молекул кисню, його об'єм і масу.

Розв'язування

$N - ?\ V - ?\ \ m - ?$
$p = 10^5\ Па$, $T = 300K$, $W = 6,3 Дж$, $M = 32 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$.

Середня кінетична енергія поступального руху молекул дорівнює

$$W = \frac{3}{2} NkT\ ,$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К$ – стала Больцмана.

Звідси знайдемо кількість молекул газу

$$N = \frac{2W}{3kT}.$$

Масу кисню знайдемо із співвідношення

$$m = \nu M = N/N_A \, M \,,$$

де $\nu = N/N_A$ – кількість речовини;

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ $моль^{-1}$ – число Авогадро.

Об'єм кисню визначимо з рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \qquad V = \frac{NRT}{pN_A}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин і виконаємо підрахунки

$$N = \frac{2 \cdot 6,3}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 1,01 \cdot 10^{21};$$

$$m = \frac{1,01 \cdot 10^{21}}{6,02 \cdot 10^{23}} 32 \cdot 10^{-3} = 5,39 \cdot 10^{-5} \; кг;$$

$$V = \frac{1,01 \cdot 10^{21} \cdot 8,31 \cdot 300}{10^5 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} = 4,18 \cdot 10^{-5} \, м^3.$$

Відповідь: $N = 10^{21}$; $V = 4,2 \cdot 10^{-5} \, м^3$; $m = 54 \cdot 10^{-6}$ $кг$.

Задача 7.3

Знайти молярну масу суміші кисню масою $m_1 = 15\,г$ і гелію масою $m_2 = 10\,г$.

Розв'язування

$M-?$
$m_1 = 15\,г = 15\cdot 10^{-3}\,кг,$
$m_2 = 10\,г = 10\cdot 10^{-3}\,кг.$

Молярна маса суміші дорівнює відношенню її маси до кількості речовини суміші:

$$M_{сум} = \frac{m_{сум}}{\nu_{сум}}. \qquad (1)$$

Маса суміші дорівнює сумі мас її компонентів

$$m_{сум} = m_1 + m_2. \qquad (2)$$

Кількість речовини суміші дорівнює сумі кількості речовини компонентів:

$$\nu_{сум} = \nu_1 + \nu_2 = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}, \qquad (3)$$

де $M_1 = 32\cdot 10^{-3}\,кг/моль$, $M_2 = 4\cdot 10^{-3}\,кг/моль$ – молярні маси кисню та гелію відповідно.

Підставимо вирази (2), (3) в (1) та одержимо

$$M_{сум} = \frac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2} = 8,4\cdot 10^{-3}\ кг/моль.$$

Відповідь: $M_{сум} = 8,4\cdot 10^{-3}\ кг/моль.$

Задача 7.4

Визначити середню арифметичну та найбільш імовірну швидкості молекул вуглекислого газу за температури $T = 405\ K$.

Розв'язування

$\langle \mathrm{v} \rangle - ?\quad \mathrm{v}_i - ?$
$M = 44\ кг/моль$,
$T = 405\ K$.

Швидкість молекул:
а) середня арифметична

$$< \mathrm{v} > = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

або

$$< \mathrm{v} > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}};$$

б) найбільш імовірна

$$\mathrm{v}_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\ \text{, або}\ \mathrm{v}_i = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

де m – маса однієї молекули.

Молярна маса вуглекислого газу $M = 44 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$.

Проведемо розрахунки

$$< \mathrm{v} > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 405}{3,14 \cdot 44 \cdot 10^{-3}}} = 441,3\ м/с,$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 405}{44 \cdot 10^{-3}}} = 391\ м/с.$$

Відповідь: $< v > = 441,3\ м/с$; $v_i = 391\ м/с$.

Задача 7.5

Визначити число N молекул ртуті, що містяться у $V = 1\,м^3$ повітря в приміщенні зараженому ртуттю, за температури $T = 20\ ^0C$, якщо тиск насиченої пари ртуті за цієї температури дорівнює $p = 0,13\,Па$.

Розв’язування

$N - ?$
$V = 1\,м^3$, $T = 20\ ^0C = 293\,K$, $p = 0,13\,Па$.

Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури визначається співвідношенням

$$p = nkT, \qquad (1)$$

де p – тиск газу; T – його температура; n – концентрація атомів чи молекул.

Число молекул знайдемо із співвідношення

$$n = \frac{N}{V} \Rightarrow N = n \cdot V\,. \qquad (2)$$

З (1) знайдемо концентрацію молекул

$$n = \frac{p}{kT},$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ $Дж/К$ – стала Больцмана
і підставимо в (2)

$$N = \frac{p \cdot V}{kT}.$$

Підставимо числові значення величин в одержаний вираз

$$N = \frac{0,13 \cdot 1}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293} = 3,2 \cdot 10^{-19}.$$

Відповідь: $N = 3,2 \cdot 10^{-19}$.

Задача 7.6

Визначити середню кінетичну енергію обертального руху $\langle \varepsilon_{ОБ} \rangle$ однієї молекули азоту за температури $T = 7\ ^0C$, а також кінетичну енергію обертального руху усіх молекул цього газу, коли його маса $m = 4\,г$.

Розв'язування

$\langle \varepsilon_{ОБ} \rangle - ?$ $W_{ОБ} - ?$
$T = 7\ ^0C = 280\,K$, $m = 4\,г = 4 \cdot 10^{-3}\,кг$.

Відомо, що на кожну степінь вільності молекули газу припадає однакова середня енергія

$$< \varepsilon_1 > = \frac{kT}{2}, \qquad (1)$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ $Дж/К$ – стала Больцмана.

Оскільки молекула азоту є двоатомною, то вона має два обертальні степені вільності, а отже, середня кінетична енергія обертального руху молекули азоту

$$< \varepsilon_{ОБ} > = 2 \cdot \frac{kT}{2} = kT \ .$$

Підставимо в цю формулу числові значення

$$< \varepsilon_{ОБ} > = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 280 = 3{,}86 \cdot 10^{-21} \ Дж.$$

Середня кінетична енергія усіх молекул газу визначається співвідношенням

$$W_{ОБ} = N \cdot \left\langle \varepsilon_{ОБ} \right\rangle . \qquad (2)$$

Врахуємо, що число молекул системи дорівнює добутку сталої Авогадро на кількість речовини, то формулу (2) можна записати у вигляді

$$W_{ОБ} = \nu \cdot N_A \cdot \left\langle \varepsilon_{ОБ} \right\rangle = \frac{m}{M} \cdot N_A \cdot \left\langle \varepsilon_{ОБ} \right\rangle, \qquad (3)$$

де m – маса газу; M – його молярна маса. Молярна маса азоту $M = 28 \cdot 10^{-3} \ кг/моль$, число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \ моль^{-1}$.

Підставимо в (3) числові значення величин, виконаємо обчислення

$$W_{ОБ} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 3{,}86 \cdot 10^{-21} = 332 \ Дж.$$

Відповідь: $<\varepsilon_{ОБ}> = 3,86 \cdot 10^{-21}\ Дж;\ W_{ОБ} = 332\ Дж.$

Задача 7.7

Перрен експериментально встановив значення числа Авогадро шляхом спостережень за зміною концентрації зважених частинок гумігуту та застосувавши барометричну формулу. В одному із своїх дослідів Перрен виявив, що за відстані між двома шарами $d = 100\,мкм$ число частинок гумігуту вдвічі більше, ніж в іншому. Температура гумігуту $T = 20\ ^0C$. Частинки гумігуту мають діаметр $d = 0,3 \cdot 10^{-4}\ см$ зважені в рідині, густина якої на $\Delta\rho = 0,2\ г/см^3$ менша за густину частинок. Знайти за цими даними значення числа Авогадро.

Розв'язування

$N_A - ?$
$\Delta h = h_2 - h_1 = 100\,мкм = 10^{-4}\ м,$ $T = 20\ ^0C = 293\,K,$ $d = 0,3 \cdot 10^{-4}\ см = 3 \cdot 10^{-7}\ м,$ $N_1 = 2N_2,$ $\Delta\rho = 0,2\ г/см^3 = 200\ кг/м^3.$

Візьмемо барометричну формулу

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}, \qquad (1)$$

де p – тиск газу; m – маса частинки; M – молярна маса; $z = h$ – координата (висота) точки відносно нульового рівня; p_0 – тиск на цьому рівні; g – прискорення вільного падіння; R – газова стала.

Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури визначається співвідношенням

$$p = nkT\,. \tag{2}$$

Підставимо (2) в (1) та одержимо відповідно для висот h_1 та h_2

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{Mgh_1}{RT}} \text{ і } n_2 = n_0 e^{-\frac{Mgh_2}{RT}}\,.$$

Звідки

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{Mg(h_1 - h_2)}{RT}} = e^{\frac{Mg\Delta h}{RT}}\,.$$

Або

$$\ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{Mg\Delta h}{RT}\,. \tag{3}$$

Оскільки маса частинки дорівнює

$$m = \frac{M}{N_A}\,,$$

то формулу (3) можна записати так:

$$\ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{mN_A g\Delta h}{RT}\,.$$

Звідси, враховуючи поправку на закон Архімеда, одержимо

$$N_A = \frac{RT \ln \dfrac{n_1}{n_2}}{gV \Delta\rho \Delta h}.$$

Об’єм частинки

$$V = \frac{\pi d^3}{6},$$

тоді

$$N_A = \frac{6RT \ln \dfrac{n_1}{n_2}}{g\pi d^3 \Delta\rho \Delta h}.$$

Підставимо числові значення та одержимо

$$N_A = \frac{6 \cdot 8,31 \cdot 293 \ln 2}{9,8 \cdot 3,14 \cdot \left(3 \cdot 10^{-7}\right)^3 200 \cdot 10^{-4}} = 6,1 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}.$$

Відповідь: $N_A = 6,1 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

7.1 Вирахувати масу M моля електронів.

Відповідь: $M = 5,49 \cdot 10^{-7}\ кг/моль$.

7.2 Скільки молекул міститься в 1 см^3 води? Яка маса молекули води? Чому наближено дорівнює діаметр молекули води?

Відповідь: $n = 3,33 \cdot 10^{22}\ см^{-3}$; $m = 2,99 \cdot 10^{-26}\ кг$; $d = 0,311\ нм$.

7.3 За 10 діб повністю випарувалося із стакана 100 $г$ води. Скільки в середньому молекул вилітало з поверхні води за 1 $с$?

Відповідь: $N \approx 4 \cdot 10^{18}$.

7.4 У балоні об'ємом $V = 5\ л$ міститься кисень масою $m = 20\ г$. Визначити концентрацію n молекул у балоні.

Відповідь: $n = 7,52 \cdot 10^{25}\ м^{-3}$.

7.5 Визначити число N молекул ртуті, що містяться в $V = 1\ м^3$ повітря в приміщенні зараженому ртуттю, за температури $T = 20\ {}^0C$, якщо тиск насиченої пари ртуті за цієї температури дорівнює $p = 0,13\ Па$.

Відповідь: $N = 3,2 \cdot 10^{-19}$.

7.6 У посудині об'ємом $V = 2,24\ л$ за нормальних ($p = 101,3\ кПа$, $0\ {}^0C$) умов міститься кисень. Визначити кількість речовини ν і масу кисню, а також концентрацію n його молекул у посудині.

Відповідь: $\nu = 0,1\ моль$; $m = 3,2 \cdot 10^{-3}\ кг$; $n = 10^{25}\ м^{-3}$.

7.7 Деяка маса кисню розміщена за температури $T = 300\ K$ і тиску $p = 10^5\ Па$. Середня кінетична енергія поступального руху молекул кисню $W = 6,3$ *Дж*. Обчислити кількість молекул кисню, його об'єм і масу.

Відповідь: $N = 10^{21}$; $V = 4,2 \cdot 10^{-5}\, м^3$;
$m = 54 \cdot 10^{-6}$ *кг*.

7.8 За якої температури середня арифметична швидкість молекул кисню дорівнює $\langle \mathrm{v} \rangle = 495\, м/с$?

Відповідь: $T = 370$ К.

7.9 Визначити середню квадратичну швидкість молекул: а) кисню за $T_1 = 405$ К; б) гелію за $T_2 = 0,1$ К.

Відповідь: а) $\langle \mathrm{v}_{кв} \rangle_1 = 562\ м/с$; б) $\langle \mathrm{v}_{кв} \rangle_2 = 24,5\, м/с$.

7.10 Визначити середню кінетичну енергію обертального руху $\langle \varepsilon_{ОБ} \rangle$ однієї молекули азоту за температури $T = 7\ {}^0C$, а також кінетичну енергію обертального руху всіх молекул цього газу, коли його маса $m = 4\, г$.

Відповідь: $< \varepsilon_{ОБ} > = 3,86 \cdot 10^{-21}$ *Дж*; $W_{ОБ} = 332$ *Дж*.

7.11 Визначити середню арифметичну та найбільш імовірну швидкості молекул вуглекислого газу за температури $T = 405\, К$.

Відповідь: $\langle \mathrm{v} \rangle = 441\, м/с$; $\mathrm{v_i} = 391\, м/с$.

7.12 Обчислити середню кінетичну енергію поступального руху молекул гелію за температури $T = 300\ К$.

Відповідь: $\langle \varepsilon_k \rangle = 6,21 \cdot 10^{-21}$ *Дж*.

7.13 Знайти середню квадратичну $\langle \mathrm{v}_{кв} \rangle$, середню арифметичну $\langle \mathrm{v} \rangle$ та найбільш імовірну $\mathrm{v_i}$ швидкості молекул водню. Підрахунки виконати для трьох значень температури: 1) $T = 20\, К$; 2) $T = 300\, К$; 3) $T = 5\, кК$.

Відповідь:
1) $\langle \mathrm{v}_{кв} \rangle = 500\, м/с$; $\langle \mathrm{v} \rangle = 462\, м/с$; $\mathrm{v_i} = 407\, м/с$;

2) $\langle v_{кв} \rangle = 1\,940\, м/с; \langle v \rangle = 1\,790\, м/с; v_i = 1\,580\, м/с;$

3) $\langle v_{кв} \rangle = 7\,900\, м/с; \langle v \rangle = 7\,300\, м/с; v_i = 6\,480\, м/с.$

7.14 За тиску $p = 10^5\, Па$ в $V = 1\, м^3$ розміщені $N = 2,7 \cdot 10^{25}$ молекул повітря. Обчислити їх найбільш імовірну швидкість.

Відповідь: $v_i = 400\, м/с$.

7.15 Деяка маса кисню розміщена за температури $T = 300\, К$ і тиску $p = 10^5\, Па$. Середня кінетична енергія поступального руху молекул кисню $W = 6,3\, Дж.$ Обчислити кількість молекул кисню, його об'єм і масу.

Відповідь: $N = 10^{21}$; $V = 4,2 \cdot 10^{-5}\, м^3$; $m = 54 \cdot 10^{-6}\, кг.$

7.16 Визначити повну енергію всіх молекул 0,1 кг гелію й азоту за $T = 27\ {}^0C$.

Відповідь: Для гелію $W = 93,5\, кДж,$ для азоту $W = 22,3\, Дж.$

7.17 За якої температури середня кінетична енергія теплового руху атомів гелію буде достатньою для того, щоб атоми гелію подолали притягання Землі та назавжди залишили її атмосферу? Вирішити аналогічну задачу для Місяця.

Відповідь: 1) $T = 20\,000\, К;$ 2) $T = 900\, К.$

7.18 Ротор центрифуги обертається з кутовою швидкістю ω. Використовуючи функцію розподілу Больцмана, встановити розподіл концентрації n частинок масою $m,$ що розміщені в роторі центрифуги, як функцію відстані r від осі обертання.

Відповідь: $n = n_0 e^{m\omega^2 r^2/(2kT)}.$

7.19 Ротор центрифуги, радіус якої дорівнює $a = 0,4\, м,$ обертається з кутовою швидкістю

$\omega = 500\, рад/с$. Визначити молярну масу газу, якщо тиск біля стінки ротора в 2,5 раза більший за тиск у його центрі. Який це газ?

Відповідь: $M = 84 \cdot 10^{-3}\, кг/моль$, криптон.

7.20 Закрита з одного боку труба довжиною $l = 1\, м$ обертається навколо перпендикулярної до неї осі, яка проходить через відкритий кінець труби із кутовою швидкістю $\omega = 62,8\, рад/с$. Тиск оточуючого повітря становить $p_0 = 10^5\, Па$, температура $T = 20\, ^0C$. Знайти тиск повітря біля закритого кінця.

Відповідь: $p = 1,02 \cdot 10^5\, Па$.

7.21 Яка частина молекул кисню за $T = 0\, ^0C$ має швидкість від $v_1 = 100\, м/с$ до $v_2 = 110\, м/с$?

Відповідь: $\Delta N/N = 0,4\,\%$.

7.22 Яка частина молекул азоту за $T = 150\, ^0C$ має швидкість від $v_1 = 300\, м/с$ до $v_2 = 325\, м/с$?

Відповідь: $\Delta N/N = 2,8\%$.

7.23 Визначити частку w молекул ідеального газу, енергії яких відрізняються від середньої енергії $< \varepsilon_П >$ поступального руху за тієї самої температури не більше ніж на 1 %.

Відповідь: $w = 9,3 \cdot 10^{-3}$.

7.24 У балоні розміщені $m = 8\, г$ кисню за температури $T = 1\,600\, K$. Яке число молекул має кінетичну енергію поступального руху більшу за $< \varepsilon_K > = 6,65 \cdot 10^{-29}\, Дж$?

Відповідь: $\Delta N/N = 12\%$.

7.25 Перрен експериментально встановив значення числа Авогадро шляхом спостережень за зміною концентрації зважених частинок гумігуту та застосувавши барометричну формулу. В одному із своїх дослідів Перрен виявив, що за відстані між двома шарами $d = 100\,мкм$ число частинок гумігуту вдвічі більше, ніж в іншому. Температура гумігуту $T = 20\ ^0C$. Частинки гумігуту мають діаметр $d = 0,3 \cdot 10^{-4}\,см$ зважені в рідині, густина якої на $\Delta\rho = 0,2\,г/см^3$ менша за густину частинок. Знайти за цими даними значення числа Авогадро.

Відповідь: $N_A = 6,1 \cdot 10^{23}\,моль^{-1}$.

7.26 Висотна космічна станція міститься на висоті 3 250 *м* над рівнем моря. Знайти тиск повітря на цій висоті. Температура повітря стала і дорівнює $T = 5\ ^0C$. Тиск повітря на рівні моря дорівнює 760 *мм рт. ст.*

Відповідь: $p = 510\,мм\ рт. ст.$

7.27 На якій висоті тиск повітря становить 75 % тиску на рівні моря? Температура стала і дорівнює $T = 0\ ^0C$.

Відповідь: $h = 2,3\,км$.

7.28 На якій висоті густина повітря становить 50 % від його густини на рівні моря? Температура стала і дорівнює $T = 0\ ^0C$.

Відповідь: $h = 5,5\,км$.

7.29 Визначити тиск 1) на висоті 5 *км*; 2) на висоті 10 *км*; 3) в шахті на глибині 2 *км*. Вважати атмосферу ізотермічною $\left(T = 293\,K\right)$, а прискорення вільного падіння таким, що не залежить від висоти.

Відповідь: 1) $p = 0,56 \cdot p_0$; 2) $p = 0,31 \cdot p_0$; 3) $p = 1,26 \cdot p_0$.

7.30 Знайти змінювання висоти, яке відповідає зміні тиску на $\Delta p = 100\,Па$ у двох випадках: 1) поблизу поверхні Землі за температури $T_1 = 290\,K$ і тиску $p_1 = 100\,кПа$; на висоті, де температура $T_2 = 220\,K$ і тиск $p_2 = 25\,кПа$.

Відповідь: 1) $\Delta h_1 = 8,31\,м$; 2) $\Delta h_2 = 25,27\,м$.

8 ІДЕАЛЬНИЙ ГАЗ. ПРОЦЕСИ В ІДЕАЛЬНОМУ ГАЗІ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

8.1 Рівняння стану ідеального газу
Рівняння Клапейрона

$$\frac{pV}{T} = \mathrm{const},$$

рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT, \text{ або } pV = \nu RT,$$

де m – маса газу; M – молярна маса; R – універсальна газова стала; $\nu = \dfrac{m}{M}$ – кількість речовини; T – термодинамічна температура.

8.2 Закон Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

де p – тиск суміші газів; p_i – парціальний тиск i-ї складової суміші; n – число складових суміші.

8.3 Молярна маса суміші газів

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k}.$$

8.4 Масова частка *i*-ї складової суміші

$$\omega_i = \frac{m_i}{m},$$

де m_i – маса *i*-ї складової суміші; m – маса суміші.

8.5 Ізопроцеси в ідеальному газі

Ізотермічний процес (рис. 1) здійснюється за сталої температури $(T = const)$. Водночас $m = const$

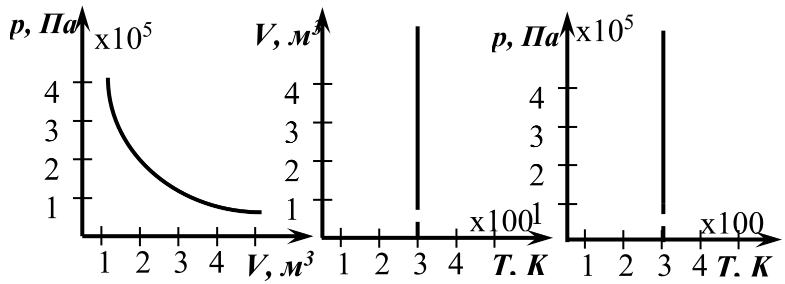


Рисунок 1 – Ізотермічний процесс, $T = const$

$$pV = const.$$

Ізобарний процес (рис. 2) – це процес, який здійснюється за сталого тиску $p = const$

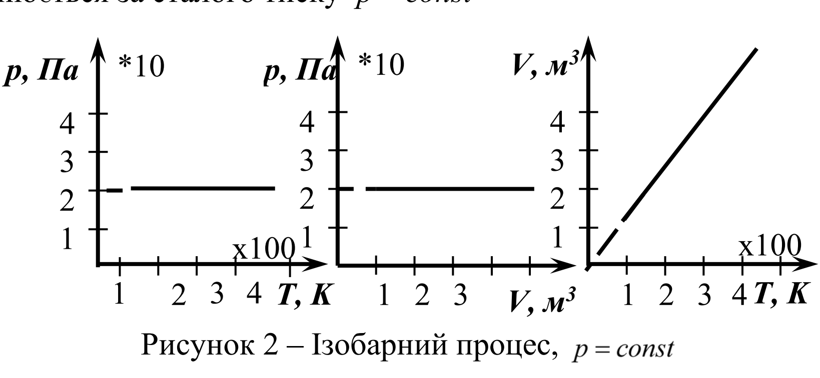


Рисунок 2 – Ізобарний процес, $p = const$

$$\frac{V}{T} = const.$$

Ізохорний процес (рис. 3) здійснюється за сталого об’єму системи:

$$\frac{p}{T} = const$$

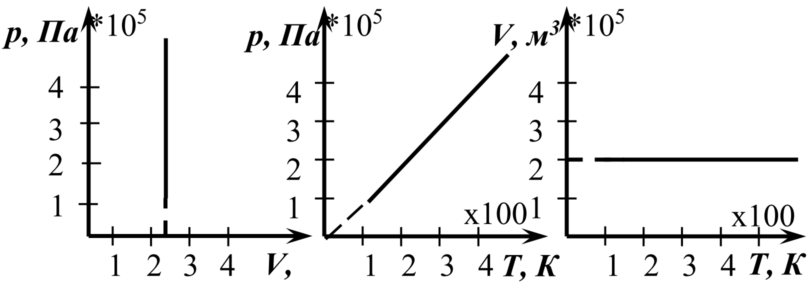


Рисунок 3 – Ізохорний процес, $V = const$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 8.1

Посудина з повітрям, тиск в якій $p_1 = 97\,кПа$, з'єднана з поршневим пристроєм, що відкачує повітря. Після п'яти ходів поршня тиск повітря в посудині став $p_2 = 29\,кПа$. Визначити відношення об'ємів посудини та циліндра пристрою.

Розв'язування

$\dfrac{V_1}{V_2} - ?$

$p_1 = 97\,кПа = 9,7 \cdot 10^4\ Па,$

$p_2 = 29\,кПа = 2,9 \cdot 10^4\ Па,$

$k = 5.$

Нехай V_1, V_2 – об'єми посудини і пристрою, що відкачує повітря. Після першого з'єднання циліндра з посудиною відповідно до закону Бойля – Маріотта маємо

$$p_0 V_1 = p_1 (V_1 + V_2),$$

звідси

$$p_1 = \frac{p_0 V_1}{V_1 + V_2}.$$

Після другого з'єднання

$$p_1 V_1 = p_2 (V_1 + V_2),$$

звідси

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} = \frac{p_0 V_1^2}{(V_1 + V_2)^2}.$$

Аналогічно після п’ятого з’єднання

$$p_5 = \frac{p_0 V_1^5}{(V_1 + V_2)^5}.$$

Проведемо математичні перетворення в одержаному виразі

$$\frac{p_0}{p_5} = \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1^5}\right)^5 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1 + V_2}{V_1} = \left(\frac{p_0}{p_5}\right)^{1/5} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_0}{p_5}\right)^{1/5} - 1,$$

звідси

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{\sqrt[5]{p_0 / p_5} - 1}.$$

Після розрахунків одержимо

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{\sqrt[5]{9,7 \cdot 10^4 \text{ Па} / 2,9 \cdot 10^4 \text{ Па}} - 1} \approx 3,7.$$

Відповідь: $\frac{V_1}{V_2} = 3,7.$

Приклад 8.2

У балоні об'ємом $V = 10\,л$ міститься гелій під тиском $p_1 = 10\,МПа$ за температури $T_1 = 300\,К$. Після того як із балона витратили гелій масою $m = 10\,г$, температура в балоні знизилася до $T_2 = 290\,К$. Визначити тиск p_2 гелію, що залишився в балоні.

Розв'язування

$p_2 - ?$

$V = 10\,л = 10^{-2}\,м^3,$

$p_1 = 10\,МПа = 10^7\,Па,$

$T_1 = 300\,К,$

$m = 10\,г = 10^{-2}\,кг,$

$T_2 = 290\,К.$

Для розв'язання задачі застосуємо рівняння Менделєєва – Клапейрона до кінцевого стану газу:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \qquad (1)$$

де m_2 – маса гелію в балоні в кінцевому стані; M – молярна маса гелію; R – молярна газова стала.

З рівняння (1) знайдемо тиск газу

$$p_2 = m_2 R T_2 / \left(MV \right). \qquad (2)$$

Масу m_2 гелію визначимо через масу m_1, що відповідає його початковому стану, і масу m гелію, взятого з балона:

$$m_2 = m_1 - m. \qquad (3)$$

Масу m_1 гелію також знайдемо з рівняння Менделєєва – Клапейрона, застосувавши його до початкового стану газу

$$m_1 = Mp_1V / \left(RT_1\right). \quad (4)$$

Підставивши вираз маси m_1 в (3), а потім вираз m_2 в (2), знайдемо

$$p_2 = \left(\frac{Mp_1V}{RT_1} - m\right)\frac{RT_2}{MV},$$

або

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 - \frac{m}{M}\frac{RT_2}{V}. \quad (5)$$

Після підстановки числових значень фізичних величин одержимо

$$p_2 = \frac{290}{300}\cdot 10^6 - \frac{10\cdot 10^{-3}}{40\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{8,31\cdot 290}{10\cdot 10^{-3}} = 3,64\cdot 10^5 \ \textit{Па}.$$

Перевіримо розмірність одержаної величини. Для цього в праву частину виразу замість символів величин підставимо їх одиниці. У правій частині співвідношення маємо два доданки. Очевидно, що перший із них дає одиницю тиску, оскільки складається з двох множників, перший з яких (T_2 / T_1) – безрозмірний, а другий – тиск. Перевіримо другий доданок:

$$\frac{[m][R][T]}{[M][V]} = \frac{1\,кг}{1\,\dfrac{кг}{моль}} \frac{1\,\dfrac{Дж}{(моль \cdot К)} \cdot 1\,К}{1\,м^3} = \frac{1\,кг \cdot 1\,моль}{1\,кг} \times$$

$$\times \frac{1\,Дж \cdot 1\,К}{1\,м^3 \cdot 1\,моль \cdot 1\,К} = \frac{1\,Дж}{1\,м^3} = \frac{1 \quad Н \cdot м}{1\,м^3} = \frac{1\,Н}{1\,м^2} = 1\,Па.$$

Відповідь: $p_2 = 3,64 \cdot 10^5\ Па.$

Приклад 8.3

Балон із газом, тиск якого дорівнює $p_1 = 2,84\,МПа$, розміщений у неопалювальному приміщенні, де температура $t_1 = 7\ {}^0C$. Після використання певної кількості газу балон внесли в приміщення з температурою $t_2 = 27\ {}^0C$. Визначити, яка частина газу була витрачена за умови, що після тривалого перебування балона в теплому приміщенні тиск у ньому став $p_2 = 1,52\,МПа$.

Розв'язування

$\Delta m / m_1 - ?$
$p_1 = 2,84\,МПа = 2,84 \cdot 10^6\ Па,$
$T_1 = 7\ {}^0C = 280\,K,$
$T_2 = 27\ {}^0C = 300\,K,$
$p_2 = 1,52\,МПа = 1,52 \cdot 10^6\ Па.$

Якщо знехтувати тепловим розширенням балона, то його об'єм не змінюється.

Запишемо рівняння Менделєєва – Клапейрона для умови цієї задачі

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1 \quad \text{та} \quad p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2 .$$

Тоді

$$m_1 = \frac{p_1 VM}{RT_1} \text{ та } m_2 = \frac{p_2 VM}{RT_2}.$$

Знайдемо масу витраченого газу

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{p_1 VM}{RT_1} - \frac{p_2 VM}{RT_2} = \frac{VM}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right).$$

Маса газу, що випустили з балона, дорівнює

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{VM}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right).$$

Визначимо, яка частина газу була витрачена

$$\frac{\Delta m}{m_1} = \frac{\frac{VM}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)}{\frac{p_1 VM}{RT_1}} = 1 - \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}.$$

Проведемо відповідні розрахунки

$$\frac{\Delta m}{m_1} = 1 - \frac{1,52 \cdot 10^6 \cdot 280}{2,84 \cdot 10^6 \cdot 300} = 0,50.$$

Відповідь: $\Delta m / m_1 = 0,50.$

Приклад 8.4

У посудині об'ємом $V = 8,3 \cdot 10^{-3}\ м^3$ міститься повітря за нормального тиску і температури $T_0 = 300\,К$. У посудину вводять $m = 3,6 \cdot 10^{-3}\ кг$ води і закривають кришкою. Визначити тиск у посудині за $T_1 = 400\,К$, якщо вся вода за цієї температури перетворюється в пару.

Розв'язування

$p_2 - ?$
$V = 8,3 \cdot 10^{-3}\ м^3$, $T_0 = 300\,К$, $m = 3,6 \cdot 10^{-3}\ кг$, $T_1 = 400\,К$.

Для розв'язання задачі скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона.

Тиск у посудині складається з тиску повітря, нагрітого до температури T_1, і тиску водяних парів за тієї самої температури.

Із рівняння стану ідеального газу

$$\frac{p_0 V}{T_0} = \frac{p_1 V}{T_1}$$

знаходимо тиск повітря

$$p_1 = \frac{p_0 T_1}{T_0}.$$

Із рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$\frac{p_2 V}{T_1} = \frac{mR}{M}$$

знайдемо тиск водяної пари

$$p_2 = \frac{mTR}{MV},$$

де $M = 18 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$ – молярна маса водяної пари.

За законом Дальтона для суміші газів знайдемо тиск газу в посудині

$$p = p_0 \frac{T_1}{T_0} + \frac{mT_1}{MV} R,$$

де $p_0 = 1,03 \cdot 10^5\ Па.$ Тоді

$$p = \frac{1,01 \cdot 10^5 \text{ Па } \cdot 400 \text{ К}}{300 \text{ К}} + \frac{3,60 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 400 \text{ К}}{18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} \times$$

$$\times 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = 2,15 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Відповідь: $p = 2,15 \cdot 10^5$ Па.

Приклад 8.5

У посудині об’ємом $V = 1 \cdot 10^{-2}\ м^3$ міститься суміш газів – азоту масою $m_1 = 7\ г$ і водню масою $m_2 = 1\ г$ за температури $T = 280$ К. Визначити тиск p суміші газів і середню молярну масу M газу.

Розв'язування

$p-?$
$m_1 = 7\,г = 7\cdot 10^{-3}\,кг$,
$m_2 = 1\,г = 10^{-3}\,кг$,
$T = 280\,K$,
$M_1 = 28\cdot 10^{-3}\,кг/моль$,
$M_2 = 2\cdot 10^{-3}\,кг/моль$,
$V = 0{,}01\,м^3$.

Тиск суміші газів визначається за законом Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n,$$

де p – тиск суміші газів; p_i – парціальний тиск i-ї складової суміші; n – число складових суміші.

У нашому випадку

$$p = p_1 + p_2.$$

Тиск визначається за формулою Менделєєва – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{m}{MV}RT.$$

Тоді

$$p = p_1 + p_2 = \frac{m_1}{M_1 V}RT + \frac{m_2}{M_2 V}RT = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right).$$

Проведемо обчислення

$$p = \frac{8{,}31\cdot 280}{0{,}01}\left(\frac{7\cdot 10^{-3}}{28\cdot 10^{-3}} + \frac{10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}}\right) = 174{,}5\cdot 10^{3}\,Па.$$

Для знаходження середньої молярної маси суміші скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

$$RT\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) = \frac{m}{M}RT \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{m_1 + m_2}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)}.$$

Підставимо в одержаний вираз значення фізичних величин і проведемо розрахунки

$$M = \frac{7+1}{\left(\frac{7}{28\cdot 10^{-3}} + \frac{1}{2\cdot 10^{-3}}\right)} = \frac{8\cdot 10^{-3}}{\left(\frac{7}{28} + \frac{1}{2}\right)} = 10,7\cdot 10^{-3}\ кг/моль.$$

Відповідь: $p = 174,5\cdot 10^3\ Па;\ M = 10,7\cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}.$

Приклад 8.6

У циліндрі з площею основи $S = 100\,см^2$ є повітря. Поршень розміщується на висоті $50\,см$ від дна циліндра. На поршень кладуть тягар масою $m = 50\,кг,$ водночас він опускається на $10\,см.$ Знайти температуру повітря після опускання поршня, якщо до його опускання тиск дорівнював $p_1 = 101\,кПа$, а температура $T_1 = 12\ {}^0C.$

Розв'язування

$T_2 - ?$
$S = 100\,см^2 = 10^{-2}\ м^2$, $h_1 = 50\,см = 0,5\,м$, $h_2 = 10\,см = 0,1\,м$, $m = 50\,кг$, $p_1 = 101\,кПа = 1,01\cdot 10^5\ Па$, $T_1 = 12\ {}^0C = 285\,K$.

Розглянемо два стани повітря під поршнем: до і після опускання поршня. До опускання стан повітря характеризується параметрами тиском p_1, об'ємом V_1 і температурою T_1.

Водночас

$$V_1 = Sh_1;\ p_1 = p_0.$$

Стан повітря після опускання поршня описується параметрами p_2, V_2, T_2,

Водночас

$$p_2 = p_0 + p';\ \text{і}\ \ p' = mg / S\ ,\ V_2 = Sh_2\,.$$

де p' – тиск, зумовлений вагою тягаря.

Оскільки

$$h_2 = h_1 - l\,,\ \text{то}\ V_2 = S(h_1 - l)\,.$$

Використаємо для цих двох станів формулу Клапейрона:

$$p_1V_1 / T_1 = p_2V_2 / T_2\,,$$

звідси

$$T_2 = p_2V_2T_1 / (p_1V_1)\,.$$

Підставимо в це рівняння вирази для p_1, V_1, p_2 і V_2:

$$T_2 = \frac{(p_0 + mg / S)S(h_1 - l)T_1}{p_0 S h_1} = \frac{(p_0 + mg / S)(h_1 - l)T_1}{p_0 h_1}.$$

Після розрахунків одержимо

$$T_2 = \frac{(1,01 \cdot 10^5 + 50 \cdot 9,8 \cdot 10^2)(0,5 - 0,1) \cdot 285}{1,01 \cdot 10^5 \cdot 0,5} \text{ K} \approx 339 \text{ K}.$$

Відповідь: $T_2 \approx 339$ K.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

8.1 Яка кількість речовини газу розміщена в балоні об'ємом $V = 10\,м^3$ за тиску 720 мм рт. ст. та температури $T = 17\ {}^0C$?

Відповідь: $\nu = 0,4\,кмоль.$

8.2 Знайти масу повітря, що заповнює аудиторію висотою $5\,м$ і площею $S = 200\,м^2$. Тиск повітря 750 мм рт. ст. та температура $T = 17\ {}^0C$.

Відповідь: $m = 1\,200\,кг.$

8.3 Посудина з повітрям, тиск в якій $p_1 = 97\,кПа$, з'єднана з поршневим пристроєм, що відкачує повітря. Після п'яти ходів поршня тиск повітря в посудині став $p_2 = 29\,кПа.$ Визначити відношення об'ємів посудини і циліндру пристрою.

Відповідь: $V_1/V_2 = 3,7.$

8.4 Балон ємністю $V = 20\,л$ заповнений азотом за температури $T = 400\,K.$ Коли частину газу витратили, тиск у балоні знизився на $\Delta p = 200\,кПа.$ Визначити масу Δm витраченого газу. Процес вважати ізотермічним.

Відповідь: $\Delta m = 34\,г$.

8.5 У балоні ємністю $V = 15\,л$ розміщений аргон під тиском $p_1 = 600\,кПа$ і за температури $T_1 = 300\,K.$ Коли з балона була взята деяка кількість газу, тиск у балоні знизився до $p_2 = 400\,кПа$ та встановилася температура $T_2 = 260\,K.$ Визначити масу Δm аргону, взятого з балона.

Відповідь: $\Delta m = 33\,г.$

8.6 Балон об'ємом $V = 30\,л$ містить суміш водню та гелію за температури $T = 300\,K$ і тиску $p = 828\,кПа$. Маса

m суміші дорівнює 24 $г$. Визначити масу m_1 водню і масу m_2 гелію.

Відповідь: $m_1 = 16\,г$; $m_2 = 8\,г$.

8.7 Дві посудини однакового об'єму містять кисень. В одній посудині тиск $p_1 = 2\,МПа$ і температура $T_1 = 800\,К$, в іншій $p_2 = 2,5\,МПа$, $T_2 = 200\,К$. Посудини з'єднали трубкою й остудили кисень, що був у них, до температури $T = 200\,К$. Визначити тиск p у посудинах.

Відповідь: $p = 1,5\,МПа$.

8.8 Балон із газом, тиск якого дорівнює $p_1 = 2,84\,МПа$, розміщений у неопалювальному приміщенні, де температура $t_1 = 7\ ^0C$. Після використання певної кількості газу балон внесли в приміщення з температурою $t_2 = 27\ ^0C$. Визначити, яка частина газу була витрачена за умови, що після тривалого перебування балона в теплому приміщенні тиск у ньому став $p_2 = 1,52\,МПа$.

Відповідь: $\Delta m / m_1 = 0,50$.

8.9 У посудині є суміш $m_1 = 0,007\,кг$ азоту і $m_2 = 0,011\,кг$ вуглекислого газу за температури $T = 290\,К$ і тиску $p = 0,101\,МПа$. Знайти густину цієї суміші, вважаючи гази ідеальними.

Відповідь: $\rho = 1,5\,кг/м^3$.

8.10 У балоні об'ємом $V = 7,5 \cdot 10^{-3}\ м^3$ за температури $T = 300\,К$ є суміш ідеальних газів: 0,1 моль кисню, 0,2 моль азоту і 0,3 моль вуглекислого газу. Знайти тиск суміші p і середню молярну масу M газу.

Відповідь: $p = 2 \cdot 10^5\ Па$; $M = 36,7 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$.

8.11 У посудині об’ємом $V = 1 \cdot 10^{-2}\, м^3$ міститься суміш газів – азоту масою $m_1 = 7\, г$ і водню масою $m_2 = 1 г$ за температури $T = 280$ К. Визначити тиск p суміші газів і середню молярну масу M газу.

Відповідь: $p = 174{,}5 \cdot 10^3\, Па$; $M = 10{,}7 \cdot 10^{-3} \dfrac{кг}{моль}$.

8.12 Обчислити густину ρ азоту, що є в балоні під тиском $p = 2\, МПа$ і має температуру $T = 400\, К$.

Відповідь: $\rho = 16{,}8\, кг/м^3$.

8.13 У посудині ємністю $V = 40\, л$ є кисень за температури $T = 300\, К$. Коли частину газу витратили, тиск у балоні знизився на $\Delta p = 100\, кПа$. Визначити масу m витраченого кисню. Процес вважати ізотермічним.

Відповідь: $m = 51\, г$.

8.14 Балон, який містить $V_1 = 2 \cdot 10^{-2}\, м^3$ повітря під тиском $p_1 = 4 \cdot 10^5\, Па$, з’єднали трубкою з балоном ємністю $V_2 = 6 \cdot 10^{-2}\, м^3$, з якого викачано повітря. Знайти тиск p, який встановився у посудинах. Температуру вважати сталою.

Відповідь: $p = 10^5\, Па$.

8.15 У балоні ємністю $V = 15 \cdot 10^{-3}\, м^3$ є азот за тиску $p = 10^5\, Па$ і температури $T = 300\, К$. Після того як із балона випустили $\Delta m = 14 \cdot 10^{-3}\, кг$ азоту, температура стала дорівнювати $290\, К$. Визначити тиск азоту, який залишився в балоні.

Відповідь: $p = 16{,}3 \cdot 10^3\, Па$.

8.16 Тиск гелію в балоні об’ємом $V = 10\, л$ $p_1 = 10\, МПа$ за температури $T_1 = 300\, К$. Після того як із балона витратили гелій масою $\Delta m = 100\,г$, температура в балоні знизилася до $T_2 = 290\,К$. Визначити тиск p_2 гелію, що залишився в балоні.

Відповідь: $p_2 = 3,6\,МПа$.

8.17 Визначити змінювання маси повітря в посудині ємністю $V = 10\,л$ за умови, що під час підвищення температури від $T_1 = 290\,К$ до $T_2 = 390\,К$ його тиск змінився від $p_1 = 0,1\,МПа$ до $p_2 = 1\,МПа$.

Відповідь: $\Delta m = 77,4 \cdot 10^{-3}\,кг$.

8.18 У відкритій посудині за $t = 20\,^0C$ є $m = 0,15\,кг$ повітря. На скільки зменшиться маса повітря в посудині під час нагрівання її до $t_2 = 100\,^0C$? Зміною об'єму посудини під час нагрівання знехтувати.

Відповідь: $\Delta m = 0,0322\,кг$.

8.19 За нормальних умов густина ацетилену дорівнює $\rho_1 = 1,16\,кг/м^3$. Визначити його густину за тиску $p_1 = 12,16 \cdot 10^3\,Па$ і температури $T = 300\,К$.

Відповідь: $\rho_1 = 1,04\,кг/м^3$.

8.20 Яка маса гелію потрібна для наповнення оболонки повітряної кулі об'ємом $V = 10\,м^3$ за температури $T = 300\,К$ і нормального тиску? Яким стане об'єм гелію на висоті, де тиск становить $13,32 \cdot 10^3\,Па$, а температура $223\,К$?

Відповідь: $m = 1,625\,кг$; $V = 56,5\,м^3$.

8.21 Газ стискають за сталої температури від об'єму $V_1 = 10^{-2}\,м^3$ до об'єму $V_2 = 5 \cdot 10^{-3}\,м^3$. Водночас тиск змінився на $\Delta p = 6 \cdot 10^3\,Па$. Знайти початковий тиск газу.

Відповідь: $p_1 = 6 \cdot 10^3\,Па$.

8.22 Посередині горизонтальної закритої з обох кінців трубочки довжиною $L = 1\,м$ міститься стовпчик ртуті довжиною $l = 20\,см$. Якщо капіляр поставити вертикально, то стовпчик ртуті зміститься на відстань $\Delta l = 10\,см$. Чому дорівнює тиск у капілярі?

Відповідь: $p = 375\,мм\ рт.\,ст.$

8.23 Накреслити ізотерми 0,5 $г$ водню для температур:

1) $t = 29\ {}^0C$; 2) $t = 180\ {}^0C$.

8.24 Кисень масою $m = 10\,г$ під тиском $p = 3\,атм$ за температури $t_1 = 10\ {}^0C$ після розширення внаслідок нагрівання за сталого тиску зайняв об'єм $V_2 = 10\,л$. Знайти: 1) об'єм газу до розширення; 2) температуру газу після розширення; 3) густину газу до розширення; 4) густину газу після розширення.

Відповідь: 1) $V_1 = 2,4 \cdot 10^{-3}\,м^3$; 2) $T_2 = 1170\,K$; 3) $\rho_1 = 4,14\ кг/м^3$; 4) $\rho_2 = 1\ кг/м^3$.

8.25 Водень масою $m = 12\,г$ має об'єм $V_1 = 4\,л$. Температура газу $t_1 = 7\ {}^0C$. Після нагрівання за сталого тиску його густина стала дорівнювати $\rho_2 = 0,6\ кг/м^3$. До якої температури нагріли газ?

Відповідь: $T_2 = 1\,400\,K$.

8.26 У балоні є газ за температури $T_1 = 400\,K$. До якої температури T_2 потрібно нагріти газ, щоб його тиск збільшився в 1,5 раза?

Відповідь: $T_2 = 600\,K$.

8.27 Визначити температуру газу, який є в закритій посудині, якщо його тиск збільшується на 0,4 % від початкового під час нагрівання на $\Delta T = 1\,K$.

Відповідь: $T = 250\,К$.

8.28 П'ять грамів азоту, який є в закритій посудині об'ємом $V = 4\,л$ за температури $t_1 = 20\,^0C$, нагрівають до температури $t_2 = 40\,^0C$. Знайти тиск газу до і після нагрівання.

Відповідь: $p_1 = 1,08 \cdot 10^5\,Па$; $p_2 = 1,15 \cdot 10^5\,Па$.

8.29 Оболонка аеростата об'ємом $V = 1\,600\,м^3$, який є на поверхні Землі, на $k = 7/8$ заповнена воднем за тиску $p_0 = 10^5\,Па$ і температури $T_0 = 290\,К$. Аеростат підняли на висоту, де тиск $p = 80\,кПа$ і температура $T = 280\,К$. Визначити масу водню, який вийшов з оболонки аеростата під час його піднімання.

Відповідь: $\Delta m = 6,2\,кг$.

8.30 Оболонка повітряної кулі має об'єм $V = 1\,600\,м^3$. Знайти піднімальну силу водню, який заповнює оболонку, на висоті, де тиск $p = 60\,кПа$ і температура $T = 280\,К$.

Відповідь: $F = 10,9\,кН$.

9 ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

9.1 Теплоємність тіла

$$C = \frac{dQ}{dT}.$$

Питома теплоємність речовини (c**)**

$$c = \frac{dQ}{m \cdot dT}.$$

Молярна теплоємність

$$C_M = \frac{dQ}{\nu \cdot dT}.$$

Зв'язок між молярною C_M **і питомою** c **теплоємністю** газу

$$C_M = c \cdot M,$$

де M – молярна маса газу.

Молярні теплоємності за сталого об'єму C_V **і сталого тиску** відповідно дорівнюють

$$C_V = \frac{iR}{2},\ C_P = \frac{(i+2)R}{2},$$

де i – кількість степенів вільності.

Питомі теплоємності за сталого об’єму c_V **і сталого тиску** c_P відповідно дорівнюють

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}, \quad c_P = \frac{(i+2)}{2}\frac{R}{M}.$$

Рівняння Майєра

$$C_P - C_V = R.$$

9.2 Перший закон термодинаміки в загальному випадку:

$$\partial Q = dU + \partial A,$$

де ∂Q – це елементарна теплота надана системі шляхом теплопередачі (теплопровідності); dU – зміна внутрішньої енергії газу; ∂A – елементарна робота, яка виконується газом (над газом).

9.3 Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = N < \varepsilon >, \text{ або } U = \nu\, C_V T,$$

де $< \varepsilon >$ – середня кінетична енергія молекули; N – кількість молекул газу; ν – кількість речовини.

9.4 Робота пов’язана зі зміною об’єму газу, в загальному випадку обчислюється за формулою

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

де V_1 – початковий об'єм газу; V_2 – кінцевий об'єм газу.

Робота за ізобаричного процесу $\left(p = const\right)$

$$A = p\Delta V.$$

Робота за ізотермічного процесу $\left(T = const\right)$

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Робота за адіабатного процесу

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2),$$

де T_1 – початкова температура газу; T_2 – кінцева температура газу.

9.5 Рівняння Пуассона (рівняння газового стану за адіабатичного процесу)

$$T \cdot V^{\gamma-1} = const, \text{ або } pV^{\gamma} = const,$$

де γ – показник адіабати, він дорівнює

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}.$$

Зв'язок між початковими і кінцевими значеннями параметрів стану газу за адіабатичного процесу

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

9.6 Рівняння політропного процесу $(C = const)$

$$pV^n = const,$$

де n – показник політропи, він дорівнює

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

9.7 Застосування першого закону термодинаміки для різних процесів:

1) для ізобаричного процесу

$$dQ = dU + dA = \frac{m}{M} C_V dT + \frac{m}{M} RdT = \frac{m}{M} C_p dT;$$

2) для ізохорного процесу $(dV = 0 \Rightarrow dA = 0)$

$$dQ = dU = \frac{m}{M} C_V dT;$$

3) для ізотермічного процесу $(dT = 0 \Rightarrow dU = 0)$

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1};$$

4) для адіабатичного процесу ($dQ = 0$)

$$dA = -dU = -\frac{m}{M} C_V dT \ .$$

9.8 Термічний коефіцієнт корисної дії (ККД) циклу в загальному випадку

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \ ,$$

де Q_1 – кількість теплоти, яку одержало робоче тіло (газ) від нагрівача; Q_2 – кількість теплоти, передана робочим тілом (газом) охолоджувачу.

ККД циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \ ,$$

де T_1 – температура нагрівача; T_2 – температура охолоджувача.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 9.1

Визначити роботу A, яку виконує азот, якщо йому за сталого тиску надати кількість теплоти $Q = 21 кДж$. Знайти також зміну ΔU внутрішньої енергії газу.

Розв'язування

$\Delta U - ?$
$Q = 21 кДж = 21 \cdot 10^3$ $Дж$, $i = 5$, $p = const$.

У разі ізобаричного процесу $p = const$ t перший закон термодинаміки має вигляд

$$\Delta Q = A + \Delta U .$$

Кількість теплоти, робота газу та його внутрішня енергія визначаються за формулами:

$$\Delta Q = \frac{m}{M} C_p \Delta T , \tag{1}$$

$$A = \frac{m}{M} R \Delta T , \tag{2}$$

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T , \tag{3}$$

де R – газова стала; m – маса газу; M – молярна маса; C_P, C_V – теплоємність газу за сталого тиску і об'єму.

Знайдемо відношення A до ΔQ і ΔU до ΔQ:

$$\frac{A}{\Delta Q}=\frac{\frac{m}{M}R\Delta T}{\frac{m}{M}C_P\Delta T}=\frac{R}{C_P},\qquad(4)$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta Q}=\frac{\frac{m}{M}C_V\Delta T}{\frac{m}{M}C_P\Delta T}=\frac{C_V}{C_P}.\qquad(5)$$

У разі двоатомного газу число ступенів вільності молекули газу $i = 5$, звідси:

$$C_P=\frac{i+2}{2}R=\frac{7}{2}R,\qquad(6)$$

$$C_V=\frac{i}{2}R=\frac{5}{2}R.\qquad(7)$$

З урахуванням співвідношень (6) і (7) вирази (4), (5) наберуть вигляду

$$\frac{A}{\Delta Q}=\frac{R}{\frac{7}{2}R}=\frac{2}{7},\qquad(8)$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta Q}=\frac{\frac{5}{2}R}{\frac{7}{2}R}=\frac{5}{7}.\qquad(9)$$

Із рівнянь (8) і (9) одержимо

$$A=\frac{2}{7}Q,\qquad \Delta U=\frac{5}{7}Q.\qquad(10)$$

Підставивши у (10) значення фізичних величин, одержимо:

$$A = \frac{2}{7} \cdot 21 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^3 \text{ Дж},$$

$$\Delta U = \frac{5}{7} \cdot 21 \cdot 10^3 = 15 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A = 6\,кДж$; $\Delta U = 15\,кДж$.

Задача 9.2

Кисень, початковий об'єм якого $V_1 = 1\,м^3$ і тиск $p_1 = 200\,кПа$. Газ нагріли спочатку за сталого тиску до об'єму $V_2 = 3\,м^3$, а потім за сталого об'єму до тиску $p_2 = 500\,кПа$. Зобразити графік процесу і знайти: 1) зміну внутрішньої енергії газу; 2) виконану роботу; 3) кількість теплоти, надану газу.

Розв'язування

$\Delta U - ?\;\; A - ?\;\; Q - ?$
$V_1 = 1\,м^3$,
$p_1 = 200\,кПа = 2 \cdot 10^5\,Па$,
$p_1 = const$,
$V_2 = 3\,м^3$,
$V_2 = const$,
$p_2 = 500\,кПа = 5 \cdot 10^5\,Па$,
$i = 5$.

Побудуємо графік процесу. На графіку (рис. 1) точками 1, 2, 3 позначені стани газу, які характеризуються параметрами

$$(p_1, V_1, T_1), (p_1, V_2, T_2), (p_2, V_2, T_3).$$

1 Зміна внутрішньої енергії визначається співвідношенням

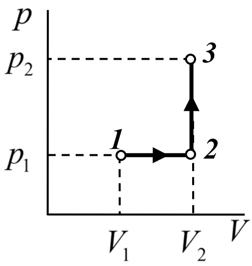


Рисунок 1

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T ,$$

де ν – кількість речовини; C_V – молярна теплоємність газу за сталого об’єму; ΔT – різниця температур, що відповідає кінцевому 3-му та початковому 1-му станам газу, тобто $\Delta T = T_3 - T_1$.

Оскільки

$$C_V = \frac{i}{2} R \text{, а } \nu = \frac{m}{M},$$

де M – молярна маса газу, то

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R\left(T_3 - T_1\right). \qquad (1)$$

Температури T_1 і T_3 знайдемо з рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$T_1 = \frac{Mp_1V_1}{mR} \quad \text{та} \quad T_2 = \frac{Mp_2V_2}{mR}.$$

З урахуванням цього рівняння (1) набере вигляду

$$\Delta U = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right).$$

Підставимо числові значення та одержимо

$$\Delta U = \frac{5}{2}\left(5\cdot 10^5\cdot 3 - 2\cdot 10^5\cdot 1\right) = 3,25\cdot 10^6\ Дж.$$

2 Робота, виконана газом дорівнює

$$A = A_1 + A_2,$$

де A_1 – робота на ділянці 1–2; A_2 – робота на ділянці 2–3.

На ділянці 1–2 $p_1 = const$. У цьому разі робота визначається формулою

$$A_1 = p_1\Delta V = p_1\left(V_2 - V_1\right).$$

На ділянці 2–3 об'єм газу не змінюється. Це означає, що робота на цій ділянці дорівнює нулю. Отже,

$$A = A_1 = p_1\left(V_2 - V_1\right).$$

Виконаємо обчислення

$$A = 2\cdot 10^5\left(3-1\right) = 4\cdot 10^5\ Дж.$$

3 Кількість теплоти, надану газу, визначимо з першого закону термодинаміки

$$Q = A + \Delta U.$$

Підставимо числові значення та одержимо

$$Q = 3,25\cdot 10^6 + 4\cdot 10^5 = 3,65\cdot 10^6\ Дж.$$

Відповідь: $\Delta U = 3,25\,МДж$; $A = 0,4\,МДж$; $Q = 3,65\,МДж$.

Задача 9.3

За адіабатного розширення тиск повітря масою $m = 1,29\,кг$ зменшується від $p_1 = 200\,кПа$ до $p_2 = 100\,кПа$, а температура змінюється від $T_1 = 300\,K$ до деякої кінцевої температури. Визначити кінцевий об'єм повітря, його температуру, внутрішню енергію та виконану під час розширення роботу.

Розв'язування

$V_2 - ?\ T_2 - ?\ A - ?\ \Delta U - ?$
$m = 1,29\,кг$,
$p_1 = 200\,кПа = 2 \cdot 10^5\ Па$,
$p_2 = 100\,кПа = 1 \cdot 10^5\ Па$,
$T_1 = 300\,K$,
$M = 29 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$.

Зв'язок між початковими і кінцевими значеннями параметрів стану газу за адіабатичного процесу

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}},$$

де γ – показник адіабати, він дорівнює $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, для повітря $\gamma = 1,4$.

Молярні теплоємності за сталого об'єму і сталого тиску відповідно дорівнюють

$$C_V = \frac{iR}{2},\ C_P = \frac{(i+2)R}{2},$$

де i – кількість ступенів вільності.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_2 = 300\left(\frac{10^5}{2\cdot 10^5}\right)^{\frac{0,4}{1,4}} = 246\ К.$$

Об'єм кисню визначимо з рівняння Менделєєва – Клапейрона.

$$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{\nu RT_2}{p_2},$$

де $\nu = \dfrac{m}{M}$ – кількість речовини.

$$V_2 = \frac{mRT_2}{Mp_2}.$$

Підрахуємо

$$V_2 = \frac{1,29\cdot 8,31\cdot 246}{29\cdot 10^{-3}\cdot 10^5} = 0,9\ м^3.$$

Робота за адіабатного процесу дорівнює зміні внутрішньої енергії

$$A = -\Delta U = -\frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right),$$

де T_1 – початкова температура газу; T_2 – кінцева температура газу, кількість ступенів вільності для повітря дорівнює $i = 5$.

$$A_2 = -\Delta U = \frac{1,29}{29 \cdot 10^{-3}} \frac{5 \cdot 8,31}{2} (300 - 246) = 4,99 \cdot 10^4 \; Дж.$$

Відповідь: $V_2 = 0,9 \; м^3$; $T_2 = 246 \; K$;
$A = -\Delta U = 4,99 \cdot 10^4 \; Дж$.

Задача 9.4

Ідеальний газ виконує цикл Карно. Температура охолоджувача $T_2 = 290\,K$. У скільки разів збільшиться ККД циклу, якщо температура нагрівача збільшиться від $T_1' = 400\,K$ до $T_1'' = 600\,K$?

Розв'язування

$\frac{\eta_2}{\eta_1} - ?$
$T_1' = 400\,K$, $T_1'' = 600\,K$, $T_2 = 290\,K$.

Для розв'язання задачі скористаємося формулою для ККД циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де T_1 – температура нагрівача; T_2 – температура охолоджувача.

У нашому разі

$$\eta_1 = \frac{T_1' - T_2}{T_1'} \text{ і } \eta_2 = \frac{T_1'' - T_2}{T_1''},$$

тоді

$$\frac{\eta_2}{\eta_1}=\frac{T_1'\left(T_1''-T_2\right)}{T_1''\left(T_1'-T_2\right)}.$$

Підставимо числові значення:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1}=\frac{400\left(600-290\right)}{600\left(400-290\right)}=2.$$

Відповідь: у два рази.

Задача 9.5

За адіабатичного стискання тиск повітря збільшився від $p_1 = 50\,кПа$ до $p_2 = 0,5\,МПа$. Потім за незмінного об’єму температура повітря була знижена до початкової. Визначити тиск газу p_3 у кінці процесу.

Розв’язування

$\eth_3 - ?$

$Q_1 = const,$

$p_2 = 0,5\,МПа = 5\cdot 10^5\ Па,$

$p_1 = 50\,кПа = 0,5\cdot 10^5\ Па,$

$V = const,$

$T_1 = T_3.$

У разі адіабатного процесу параметри системи змінюються відповідно до рівняння

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}, \qquad (1)$$

де $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ – стала Пуассона.

Теплоємності за сталого тиску C_P і об'єму C_V дорівнюють у разі двоатомного газу (i = 5)

$$C_P = \frac{i+2}{2}R = \frac{7}{2}R, \qquad (2)$$

$$C_V = \frac{i}{2}R = \frac{5}{2}R, \qquad (3)$$

де i – число ступенів вільності молекули газу; R – газова стала.

Звідси

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7/2\,R}{5/2\,R} = \frac{7}{5}.$$

Другий процес є ізохорним, у цьому разі

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_1} \Rightarrow p_3 = \frac{T_1}{T_2}p_2. \qquad (4)$$

Рівняння (1) перепишемо з використанням закону Менделєєва – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}. \qquad (5)$$

Підставивши вираз (5) у (4), одержимо

$$p_3 = \frac{1}{\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \cdot p_2. \tag{6}$$

Підставивши в це співвідношення числові значення фізичних величин, одержимо

$$p_3 = \frac{1}{\left(0,5\cdot 10^6 / 50\cdot 10^3\right)^{2/5\cdot 5/7}} = \frac{1}{\left(\dfrac{0,5\cdot 10^6}{50\cdot 10^3}\right)^{2/7}} = 0,52\,Па.$$

Видно, що одержана величина має розмірність – Па.

Відповідь: $p_3 = 0,52\,Па$.

Задача 9.6

Двоатомний ідеальний газ, який під тиском $p_1 = 200\,кПа$ має об’єм $V_1 = 6л$, розширюється до об’єму вдвічі більшого за початковий. Процес розширення відбувається за політропою з показником політропи $n = 1,2$. Знайти зміну внутрішньої енергії газу та роботу, виконану газом під час розширювання. Визначити молярну теплоємність газу в цьому процесі.

$\Delta U - ?\ A - ?\ C - ?$
$p_1 = 200\,кПа = 2\cdot 10^5\ Па$,
$V_1 = 6\ л = 6\cdot 10^{-3}\ м^3$,
$V_2 = 2V_1$,
$n = 1,2$,
$i = 5$.

Розв’язування

Зміну внутрішньої енергії знайдемо з формули

$$\Delta U = \nu\, C_V \Delta T\,, \tag{1}$$

де $\nu = \dfrac{m}{M}$ – кількість речовини; $C_V = \dfrac{i}{2}R$ – молярна теплоємність ідеального газу за сталого об’єму; $\Delta T = T_2 - T_1$ – зміна температури під час процесу; i – число степенів вільності газу, для двоатомного газу $i = 5$.

З урахуванням наведеного рівняння (1) набере вигляду

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right). \tag{2}$$

Температури T_1 і T_3 знайдемо з рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$T_1 = \frac{Mp_1V_1}{mR} \quad \text{та} \quad T_2 = \frac{Mp_2V_2}{mR}. \tag{3}$$

Кінцевий тиск газу p_2 знайдемо з рівняння політропного процесу:

$$pV^n = const\text{, або } p_1V_1^n = p_2V_2^n,$$

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n. \tag{4}$$

Підставимо (3) і (4) в (2)

$$\Delta U = \frac{i}{2}p_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n - V_1\right).$$

Підставимо числові значення та виконаємо розрахунки

$$\Delta U = \frac{5}{2} 2 \cdot 10^5 \left(\left(\frac{6}{12} \right)^{1,2} - 6 \right) = -400\ Дж.$$

Роботу визначимо з формули

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV\ , \tag{5}$$

де V_1 – початковий об'єм газу; V_2 – кінцевий об'єм газу. Рівняння (4) запишемо у вигляді

$$p = p_1 \left(\frac{V_1}{V} \right)^n . \tag{6}$$

З урахуванням (6) співвідношення (5) набере вигляду

$$A = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^n} dV = p_1 V_1^n \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(\frac{p_1 V_1^n}{V_1^{n-1}} - \frac{p_1 V_1^n}{V_2^{n-1}} \right) = \frac{1}{n-1} \left(p_1 V_1 - \frac{p_1 V_1^n}{V_2^n} V_2 \right).$$

Або

$$A = \frac{1}{n-1} \left(p_1 V_1 - p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^n V_2 \right).$$

Підставимо числові значення та виконаємо розрахунки

$$A = \frac{1}{1,2-1}\left(2\cdot 10^5\cdot 6\cdot 10^{-3} - 2\cdot 10^5\left(\frac{6}{12}\right)^{1,2} 12\cdot 10^{-3}\right) = 780\,Дж.$$

Молярну теплоємність знайдемо з формули для показника політропи

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} \Rightarrow C = \frac{nC_V - C_p}{n-1}.$$

Врахуємо, що

$$C_P = \frac{i+2}{2}R = \frac{7}{2}R \quad \text{і} \quad C_V = \frac{i}{2}R = \frac{5}{2}R,$$

та одержимо

$$C = \frac{1}{2}R\frac{ni-(i+2)}{n-1} = \frac{1}{2}8,31\frac{1,2\cdot 5-7}{1,2-1} = -21\,Дж/(моль\cdot К).$$

Відповідь: $\Delta U = -\,400\,Дж$; $A = 780\,Дж$; $C = -\,21\dfrac{Дж}{моль\cdot К}$.

Задача 9.7

Ідеальна теплова машина, робочою речовиною якої є повітря, здійснює цикл Карно. Об'єм повітря за температури $T_1 = 400\,К$ і тиску $p_1 = 708\,кПа$ дорівнює $V_1 = 2\,л$. Після ізотермічного розширення об'єм повітря збільшився до

$V_2 = 5\,л$, а після адіабатного розширення – $V_3 = 8\,л$. Визначити: 1) координати перетину ізотерм і адіабат у координатах (p, V); 2) роботу, яку виконує машина на кожній ділянці циклу; 3) корисну роботу циклу; 4) ККД циклу; 5) кількість теплоти, одержану робочим тілом за цикл; 6) кількість теплоти, яку газ віддає охолоджувачу за цикл.

Розв'язування

$\Delta U - ?\;\; A - ?\;\; C - ?$

$T_1 = 400\,К$,

$p_1 = 708\,кПа = 7{,}08 \cdot 10^5\,Па$,

$V_1 = 2л = 2 \cdot 10^{-3}\,м^3$,

$V_2 = 5л = 5 \cdot 10^{-3}\,м^3$,

$V_3 = 8л = 8 \cdot 10^{-3}\,м^3$,

$i = 5$.

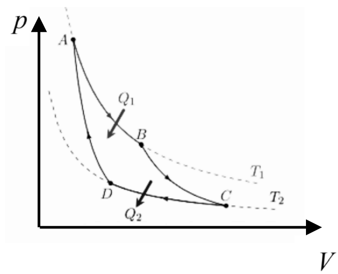


Рисунок 2

1) Напишемо рівняння ізотерми для процесу $A \to B$

$$\frac{m}{M} R = \frac{p_1 V_1}{T_1}. \tag{1}$$

Із рівняння ізотерми визначимо тиск для стану B

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow \; p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2}.$$

Виконаємо розрахунки

$$p_2 = \frac{708 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 283,2 \cdot 10^3 \ Па.$$

Оскільки процес $A \to B$ є ізотермічним, то температура в точці B дорівнює T_1.

Процес $B \to C$ є адіабатним, тоді

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma} \Rightarrow p_3 = \frac{p_2 V_2^{\gamma}}{V_3^{\gamma}}.$$

Виконаємо розрахунки

$$p_3 = \frac{283,2 \cdot 10^3 \cdot \left(5 \cdot 10^{-3}\right)^{\gamma}}{\left(8 \cdot 10^{-3}\right)^{\gamma}} = 146,7 \cdot 10^3 \ Па.$$

Рівняння ізотерми для процесу $C \to D$

$$p_3 V_3 = p_4 V_4.$$

$$p_3 V_3 = \frac{m}{M} R T_3 \quad \Rightarrow \quad T_3 = T_1 \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1}.$$

Виконаємо розрахунки

$$T_3 = 400 \frac{146,7 \cdot 8}{708 \cdot 2} = 331 K.$$

Рівняння адіабатного процесу $D \to A$

$$\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_4}.$$

Враховуючи , що $T_3 = T_4$, одержимо

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_3} \;\Rightarrow\; V_4 = V_1 \sqrt[\gamma-1]{\frac{T_1}{T_3}}.$$

Виконаємо розрахунки

$$V_4 = 2\cdot 10^{-3} \sqrt[\gamma-1]{\frac{331}{400}} = 3,24\cdot 10^{-3}\ м^3.$$

$$p_4 V_4^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma} \;\Rightarrow p_4 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma}.$$

Виконаємо розрахунки

$$p_4 = 708\cdot 10^3 \cdot \left(\frac{2\cdot 10^{-3}}{3,24\cdot 10^{-3}}\right)^{1,4} = 360\cdot 10^3\ Па.$$

2) Визначимо роботу ізотермічного процесу на ділянці $A \to B$

$$A_1 = \frac{m}{M} R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

З урахуванням виразу (1)

$$A_1 = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Виконаємо розрахунки

$$A_1 = 708 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \ln \frac{5}{3} = 1\,297\ \text{Дж}.$$

Визначимо роботу адіабатного процесу на ділянці $B \to C$

$$A_2 = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_3) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_1 - T_3) = \frac{i}{2} p_1 V_1 (T_1 - T_3).$$

Виконаємо розрахунки

$$A_2 = \frac{5}{2} 708 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} (400 - 331) = 244\,260\ \text{Дж}.$$

Визначимо роботу ізотермічного процесу на ділянці $C \to D$

$$A_3 = \frac{p_1 V_1}{T_1} T_3 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Виконаємо розрахунки

$$A_3 = \frac{708 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{400} \cdot 331 \cdot \ln \frac{3,24}{8} = -1\,059\ \text{Дж}.$$

Визначимо роботу адіабатного процесу на ділянці $D \to A$

$$A_4 = \frac{m}{M} C_V (T_3 - T_1) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R(T_3 - T_1) = \frac{i}{2} p_1 V_1 (T_3 - T_1) = -A_2.$$

3) Корисна робота за повний цикл

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Виконаємо розрахунки

$$A = 1297 - 1059 = 238\ \text{Дж}.$$

4) ККД цикла

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Виконаємо розрахунки

$$\eta = \frac{400 - 331}{400} = 0{,}173.$$

5) Кількість теплоти, одержану робочим тілом за цикл,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{A}{\eta}.$$

Виконаємо розрахунки

$$Q_1 = \frac{238}{0{,}173} = 1\,376\ \text{Дж}.$$

6) Кількість теплоти, яку газ віддає охолоджувачу за цикл,

$$A = Q_1 - Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_1 - A.$$

Виконаємо розрахунки

$$Q_2 = 1376 - 238 = 1\,138\,Дж.$$

Відповідь:

1) координати перетину ізотерм і адіабат $p_1 = 7{,}08 \cdot 10^5\,Па,\ V_1 = 2 \cdot 10^{-3}\,м^3,\ T_1 = 400\,K;$
$p_2 = 2{,}83 \cdot 10^5\,Па,\ V_2 = 5 \cdot 10^{-3}\,м^3,\ T_2 = 400\,K;$
$p_3 = 1{,}47 \cdot 10^5\,Па,\ V_3 = 8 \cdot 10^{-3}\,м^3,\ T_3 = 331\,K;$
$p_4 = 3{,}6 \cdot 10^5\,Па,\ V_4 = 3{,}24 \cdot 10^{-3}\,м^3,\ T_4 = 331\,K.$

2) $A_1 = 1\,297\,Дж;$ $A_2 = 244\,260\,Дж;$ $A_3 = -1\,059\,Дж;$ $A_4 = -\,244\,260\,Дж.$

3) $A = 238\,Дж.$

4) $\eta = 0{,}173.$

5) $Q_1 = 1\,376\,Дж.$

6) $Q_2 = 1\,138\,Дж.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

9.1 У посудині, що має об'єм $V = 6$ *л*, міститься двоатомний газ за нормальних умов. Визначити його теплоємність C_V за сталого об'єму.

Відповідь: $C_V = 5{,}5$ *Дж/К*.

9.2 Визначити кількість теплоти Q, яку потрібно надати кисню об'ємом $V = 50\,л$ під час його ізохорного нагрівання, щоб тиск газу підвищився на $\Delta p = 0{,}5\,МПа$.

Відповідь: $Q = 62{,}5\,кДж$.

9.3 Кисень масою $m = 200\,г$ займає об'єм $V_1 = 100\,л$ і перебуває під тиском $p_1 = 200\,кПа$. Під час нагрівання газ розширився за сталого тиску до об'єму $V_2 = 300\,л$, а потім його тиск зріс до $p_3 = 500\,кПа$ за сталого об'єму. Знайти зміну внутрішньої енергії ΔU газу, роботу А, що виконана газом, і теплоту Q, що передана газу.

Відповідь: $\Delta U = 325\,кДж$; $A = 40\,кДж$; $Q = 365\,кДж$.

9.4 Визначити роботу A, яку виконує азот, якщо йому за сталого тиску надати кількість теплоти $Q = 21\,кДж$. Знайти також зміну ΔU внутрішньої енергії газу.

Відповідь: $A = 6\,кДж$; $\Delta U = 15\,кДж$.

9.5 Кисень нагрівають від $T_1 = 323\,K$ до $T_2 = 333\,K$. Маса кисню $m = 0{,}16\,кг$. Знайти кількість теплоти, одержаної газом, і зміну його внутрішньої енергії під час ізохорного та ізобарного процесів. Початковий тиск близький до атмосферного.

Відповідь: $Q = \Delta U_{ізх} = 14{,}5\,кДж$; $\Delta U_{ізб} = 10{,}4\,кДж$.

9.6 Яка частина ω_1 кількості теплоти Q, наданої ідеальному газу під час ізобарного процесу, витрачається на збільшення ΔU внутрішньої енергії газу і яка частина ω_2 – на роботу A його розширення? Розглянути три випадки, якщо газ: 1) одноатомний; 2) двоатомний; 3) триатомний.

Відповідь: 1) $\omega_1 = 0,6,$ $\omega_2 = 0,4;$ 2) $\omega_1 = 0,71,$ $\omega_2 = 0,29;$ 3) $\omega_1 = 0,75,$ $\omega_2 = 0,25.$

9.7 Визначити роботу, виконану азотом, якому за сталого тиску надали кількість теплоти $Q = 21\,кДж.$

Відповідь: $A = 6\,кДж.$

9.8 Під час ізобаричного нагрівання аргон виконав роботу $A = 8\,Дж$. Яку кількість теплоти було надано газу?

Відповідь: $Q = \dfrac{7}{2}A = 28\,Дж.$

9.9 0,2 кг азоту нагрівається за сталого тиску від температури $T_1 = 293\,K$ до $T_2 = 373\,K$. Яку кількість теплоти поглинає газ? На скільки збільшилася внутрішня енергія газу? Яку роботу проти зовнішніх сил виконує газ?

Відповідь: $Q = 16,64\,кДж;$ $\Delta U = 11,885\,кДж;$ $A = 4,755\,кДж.$

9.10 Азот масою $m = 0,1\,кг$ був ізобарно нагрітий від температури $T_1 = 200\,K$ до температури $T_2 = 400\,K$. Визначити роботу $A,$ виконану газом, теплоту $Q,$ одержану ним, зміну ΔU внутрішньої енергії азоту.

Відповідь: $A = 5,94\,кДж;$ $\Delta U = 14,8\,кДж;$ $Q = 20,8\,кДж.$

9.11 Під час ізотермічного розширення азоту за температури $T = 280\,K$ об'єм його збільшився в два рази. Визначити: 1) роботу A, що виконана під час розширення газу; 2) зміну ΔU внутрішньої енергії; 3) кількість теплоти Q, одержану газом. Маса азоту $m = 0,2\,кг$.

Відповідь: $A = 11,5\,кДж$; $\Delta U = 0$; $Q = A$.

9.12 У скільки разів збільшиться об'єм водню, що містить кількість речовини $\nu = 0,4\,моль$ за ізотермічного розширення, якщо водночас газ одержить кількість теплоти $Q = 800\,Дж$? Температура водню $T = 300\,К$.

Відповідь: $n = 2{,}23$.

9.13 Газ, який в об'ємі $V_1 = 10^{-2}\,м^3$ перебуває під тиском $p_1 = 200\,кПа$, ізотермічно розширився до об'єму $V_2 = 28 \cdot 10^{-2}\,м^3$. Яку роботу виконав газ під час розширення?

Відповідь: $A = 2{,}086$ кДж.

9.14 Азот за температури $T = 300\,К$ і тиску $p = 2 \cdot 10^5\,Па$ займав об'єм $V = 4 \cdot 10^{-3}\,м^3$. Внаслідок адіабатичного розширення його температура знизилася до 273 *К*. Яку роботу виконав газ під час розширення?

Відповідь: $A = 174{,}1\,Дж$.

9.15 Під час стискання $m = 1\,кг$ повітря, взятого за температури $T = 293\,К$, його тиск зростає від $p_1 = 9,8\,кПа$ до $p_2 = 98\,кПа$. Обчислити роботу в разі ізотермічного та адіабатного стискання.

Відповідь: $A_1 = -193\,кДж$; $A_2 = -196\,кДж$.

9.16 За адіабатного розширення тиск повітря масою $m = 1,29\,кг$ зменшується від $p_1 = 200\,кПа$ до $p_2 = 100\,кПа$, а температура змінюється від $T_1 = 300\,К$ до деякої кінцевої температури. Визначити кінцевий об'єм повітря, його температуру, внутрішню енергію та виконану під час розширення роботу.

Відповідь: $V_2 = 0{,}9\,м^3$; $T_2 = 246\,К$;
$A = -\Delta U = 4{,}99 \cdot 10^4\,Дж$.

9.17 Кисень масою $m = 0{,}0165\,кг$, що має початковий тиск $p_1 = 159\,кПа$ і температуру $T_1 = 300\,К$, адіабатично стискають до 0,1 його початкового об'єму. Знайти кінцевий тиск і температуру газу, виконану над газом роботу та зміну внутрішньої енергії.

Відповідь: $p_2 = 3{,}9\,МПа$; $T_2 = 750\,К$;
$A = -\Delta U = -4{,}67\,кДж$.

9.18 Об'єм двоатомного газу $V_1 = 0{,}5\,л$ за тиску $p_1 = 0{,}5\,атм$. Газ адіабатично стискається до об'єму V_2 та тиску p_2, а потім за сталого об'єму V_2 охолоджується до початкової температури. Водночас його тиск дорівнює $p_0 = 1\,атм$. 1) Зобразити графік цього процесу. 2) Знайти об'єм V_2 та тиск p_2.

Відповідь: $V_2 = 0{,}25\,л$; $p_2 = 1{,}32\,атм$.

9.19 Визначити молярну теплоємність (виразити через R) ідеального двоатомного газу в політропному процесі з показником політропи, який дорівнює: 1) $n = 0{,}9$; 2) $n = 0{,}99$; 3) $n = 0{,}999$; 4) $n = 1{,}1$.

Відповідь: 1) $C = 12{,}5R$; 2) $C = 102{,}5R$;
3) $C = 1\,002{,}5R$; 4) $C = -7{,}5R$.

9.20 Виразити молярну теплоємність ідеального газу під час політропного процесу через показник політропи та показник адіабати. Визначити, за яких значень показника політропи теплоємність ідеального газу під час політропного процесу має значення: 1) додатне; 2) від'ємне; 3) дорівнює нулю; 4) нескінченно велике.

Відповідь: $C = \dfrac{R(n-\gamma)}{(\gamma-1)(n-1)}$; 1) $n<1$ та $n>\gamma$; 2) $1<n<\gamma$; 3) $n=\gamma$; 4) $n=1$.

9.21 Під час політропного процесу ідеальний газ стиснули від об'єму $V_1 = 10\,л$ до об'єму $V_2 = 5\,л$. Водночас тиск збільшився від $p_1 = 1\,000\,ГПа$ до $p_2 = 5\,000\,ГПа$. Визначити: 1) показник політропи; 2) молярну теплоємність газу для наведеного процесу.

Відповідь: 1) $n = 2,3$; 2) $C = 14\,Дж/(моль\cdot К)$.

9.22 Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура T_1 нагрівача в чотири рази ($n=4$) більша за температуру охолоджувача. Яку частину ω кількості теплоти, одержану за один цикл від нагрівача, газ віддасть охолоджувачу?

Відповідь: $\omega = 0,25$.

9.23 Визначити роботу ізотермічного стискання газу, що виконує цикл Карно, ККД якого дорівнює $\eta = 0,4$. Робота ізотермічного розширення – $A_1 = 8\,Дж$.

Відповідь: $A_2 = 4,8\,Дж$.

9.24 Газ, що є робочою речовиною циклу Карно, одержав від нагрівача теплоту $Q_1 = 4,38\,кДж$ і виконав роботу $A = 2,4\,кДж$. Визначити температуру нагрівача, якщо температура охолоджувача $T_2 = 273\,К$.

Відповідь: $T_1 = 604\,К$.

9.25 Газ, що здійснює цикл Карно, віддав холодильнику 67 % теплоти, одержаної від нагрівача. Визначити температуру T_2 охолоджувача, якщо температура нагрівача $T_1 = 430\,К$.

Відповідь: $T_2 = 290\,К$.

9.26 Газ, що здійснює цикл Карно, одержує теплоту $Q_1 = 84\,кДж.$ Визначити роботу A газу, якщо температура T_1 нагрівача в три рази вища за температуру T_2 теплоприймача.

Відповідь: $A = 56\,Дж.$

9.27 Замкнутий цикл, який виконують $m = 0,3\,кг$ азоту, зображений на рисунку 3. Визначити: 1) кількість теплоти, одержану від нагрівника за один цикл; 2) ККД циклу; 3) який ККД мав би ідеальний тепловий цикл, ізотерми якого відповідають найбільшій і найменшій температурам цього циклу?

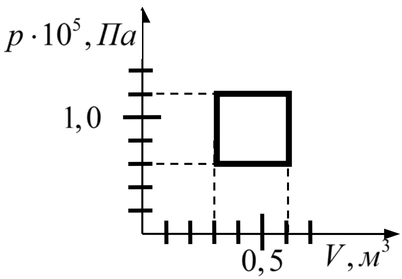


Рисунок 3

Відповідь: $Q_1 = 36\,кДж$; η = 50 %; $\eta_{ід} = 75$ %.

9.28 Газ, що є робочою речовиною циклу Карно, одержав від нагрівача теплоту $Q_1 = 4,38\,кДж$ і виконав роботу $A = 2,4\,кДж.$ Визначити температуру T_1 нагрівача, якщо температура охолоджуача $T_2 = 273\,K.$

Відповідь: $T_1 = 604\,K.$

9.29 Визначити параметри робочого тіла (повітря) для кількості речовини $\nu = 1\,кмоль$ у характерних точках цикла Карно. Визначити роботу й термічний ККД цикла за умови, якщо $p_{\min} = 100\,кПа$, $T_{\min} = 300\,K$, $p_{\max} = 25\,МПа$, $T_{\max} = 1200\,K.$

Відповідь: $p_1 = p_{\max}$; $T_1 = T_{\max}$; $T_2 = T_{\max}$; $p_2 = 12,8\,МПа$; $p_3 = 0,1\,МПа$; $T_3 = T_4 = T_{\min}$; $p_4 = 0,95\,МПа.$

9.30 Ідеальна теплова машина, робочою речовиною якої є повітря, здійснює цикл Карно. Об'єм повітря за температури $T_1 = 400\,K$ і тиску $p_1 = 708\,кПа$ дорівнює $V_1 = 2\,л$. Після ізотермічного розширення об'єм повітря збільшився до $V_2 = 5\,л$, а після адіабатного розширення – $V_3 = 8\,л$. Визначити: 1) координати перетину ізотерм і адіабат у координатах $\left(p, V\right)$; 2) роботу, яку виконує машина на кожній ділянці цикла; 3) корисну роботу цикла; 4) ККД цикла; 5) кількість теплоти, одержану робочим тілом за цикл; 6) кількість теплоти, яку газ віддає охолоджувачу за цикл.

Відповідь: 1) координати перетину ізотерм і адіабат
$p_1 = 7{,}08 \cdot 10^5\,Па,\ V_1 = 2 \cdot 10^{-3}\,м^3,\ T_1 = 400\,K;$
$p_2 = 2{,}83 \cdot 10^5\,Па,\ V_2 = 5 \cdot 10^{-3}\,м^3,\ T_2 = 400\,K;$
$p_3 = 1{,}47 \cdot 10^5\,Па,\ V_3 = 8 \cdot 10^{-3}\,м^3,\ T_3 = 331\,K;$
$p_4 = 3{,}6 \cdot 10^5\,Па,\ V_4 = 3{,}24 \cdot 10^{-3}\,м^3,\ T_4 = 331\,K.$

2) $A_1 = 1\,297\,Дж;$ $A_2 = 244\,260\,Дж;$ $A_3 = -1\,059\,Дж;$ $A_4 = -\,244\,260\,Дж.$

3) $A = 238\,Дж.$

4) $\eta = 0{,}173.$

5) $Q_1 = 1\,376\,Дж.$

6) $Q_2 = 1138\,Дж.$

10 ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. РЕАЛЬНІ ГАЗИ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

10.1 Зміна ентропії

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T},$$

де A і B – межі інтегрування, що відповідають початковому та кінцевому станам системи. Вираз справедливий лише за оборотного процесу.

10.2 Перший закон термодинаміки через ентропію

$$TdS = dU + pdV,$$

де T – термодинамічна температура; dS – зміна ентропії; dU – зміна внутрішньої енергії; p – тиск; dV – зміна об’єму.

10.3 Зміна ентропії під час нагрівання тіла

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = cm\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = cm\ln\frac{T_2}{T_1},$$

де $dQ = cmdT$ – кількість теплоти, що витрачається на нагрівання тіла від температури T_1 до T_2; c – питома теплоємність речовини; m – маса тіла.

10.4 Зміна ентропії під час плавлення, пароутворення

$$\Delta S_{ПЛ} = \frac{\lambda m}{T}; \quad \Delta S_{ПР} = \frac{rm}{T},$$

де λ та r – питома теплота плавлення та пароутворення.

10.5 Зміна ентропії під час адіабатного процесу

$$\Delta S_{АД} = 0.$$

Адіабатний процес є ізоентропійним.

10.6 Рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної кількості речовини ν газу

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT.$$

Рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу

$$\left(p + \frac{a}{V_M{}^2}\right)(V_M - b) = RT,$$

де a і b – сталі Ван-дер-Ваальса (розраховані на один моль газу); V – об’єм, що займає газ; V_M – молярний об’єм; p – тиск газу на стінки посудини.

10.7 Внутрішній тиск, зумовлений силами взаємодії молекул

$$p' = \frac{a}{V_M{}^2}, \text{ або } p' = \frac{\nu^2 a}{V^2}.$$

10.8 Зв'язок критичних параметрів – об'єму, тиску та температури газу зі сталими *a* і *b* Ван-дер-Ваальса

$$V_{M\,кр} = 3b\,,\; P_{кр} = \frac{a}{27b^2}\,,\; T_{кр} = \frac{8a}{27Rb}.$$

10.9 Внутрішня енергія реального газу

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V_M}\right),$$

де C_V – молярна теплоємність газу за сталого об'єму.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 10.1

Знайти зміну ентропії за ізотермічного розширення азоту масою $m = 0,01\,кг$, якщо тиск газу зменшився від $p_1 = 100\,кПа$ до $p_2 = 50\,кПа$.

Розв'язування

$\Delta S - ?$
$m = 0,01\,кг$,
$p_1 = 100\,кПа = 10^5\,Па$,
$p_2 = 50\,кПа = 0,5\cdot 10^5\,Па$,
$T = const$,
$M = 28\cdot 10^3\,кг/моль$.

Для ізотермічного процесу

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T}. \qquad (1)$$

У разі ізотермічного процесу $T = const \Rightarrow dU = 0$ перший закон термодинаміки має вигляд

$$dQ = dA.$$

Робота

$$dA = pdV.$$

З рівняння Менделєєва – Клапейрона знайдемо тиск

$$p = \frac{m}{M} RT \frac{1}{V},$$

тоді

$$dQ = \frac{m}{M} RT \frac{1}{V} dV ,$$

звідки знаходимо

$$Q = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} . \qquad (2)$$

Із рівняння ізотермічного процесу

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

знайдемо

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1} . \qquad (3)$$

Підставимо (3) і (2) в (1) та одержимо

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{p_2}{p_1} .$$

Підставимо числові значення

$$\Delta S = \frac{0,01}{28 \cdot 10^3} 8,31 \cdot \ln 2 = 2,057 \; Дж/К .$$

Відповідь: $\Delta S = 2,057 \; Дж/К$.

Задача 10.2

Знайти приріст ентропії $m = 800\,г$ водню під час його стискання від $p_1 = 10^5\,Па$ за температури $300\,К$ до $p_2 = 15 \cdot 10^5\,Па$ за температури 400 $К$.

Розв'язування

$\Delta S - ?$

$m = 800\,г = 0{,}8\,кг,$
$p_1 = 10^5\,Па,$
$p_2 = 15 \cdot 10^5\,Па,$
$T_1 = 300\,К,$
$T_2 = 400\,К,$
$i = 5,$
$M = 2 \cdot 10^3\,кг/моль,$

Зміна ентропії

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}. \qquad (1)$$

Перший закон термодинаміки у загальному випадку

$$TdS = dU + pdV, \qquad (2)$$

де T – термодинамічна температура; dS – зміна ентропії; dU – зміна внутрішньої енергії; p – тиск; dV – зміна об'єму.

Із рівняння (2) знайдемо зміну ентропії

$$dS = \frac{dU + pdV}{T}.$$

Зміна внутрішньої енергії визначається співвідношенням

$$dU = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RdT.$$

Для розв’язання задачі скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{T} = \frac{m}{M}\frac{R}{V},$$

$$dS = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\frac{dT}{T} + \frac{pdV}{T} = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\frac{dT}{T} + \frac{m}{M}R\frac{dV}{V},$$

$$dS = \frac{m}{M}R\left(\frac{i}{2}\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V}\right).$$

Інтегрування одержаного виразу дає

$$\Delta S = \frac{m}{M}R\left(\frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Відношення об’ємів знайдемо з рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$V = \frac{m}{pM}RT \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2},$$

$$\Delta S = \frac{m}{M}R\left(\frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2}\right).$$

Підставимо числові значення в одержаний вираз і підрахуємо

$$\Delta S = \frac{0,8}{2\cdot 10^{-3}} 8,31\left(\frac{5}{2}\ln\frac{400}{300} + \ln\frac{15\cdot 10^5}{400}\frac{300}{10^5}\right) =$$

$$= 10,43\cdot 10^5\ Дж/К.$$

Відповідь: $\Delta S = 10,43\cdot 10^5\ Дж/К$.

Задача 10.3

Кисень, маса якого $m = 0,2\,кг$, нагрівають від температури $T_1 = 300\,K$ до $T_2 = 400\,K$. Знайти зміну ентропії, якщо відомо, що початковий і кінцевий тиски однакові й близькі до атмосферного.

Розв’язування

$\Delta S - ?$
$m = 0,2\,кг$, $p_1 = p_2 = 10^5\ Па$, $T_1 = 300\,K$, $T_2 = 400\,K$.

Зміна ентропії

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}. \qquad (1)$$

Перший закон термодинаміки для ізобарного процесу

$$dQ = \frac{m}{M} C_p dT, \qquad (2)$$

де m – маса газу; M – молярна маса; для кисню $M = 32\cdot 10^{-3}\ кг/моль$; C_P – теплоємність газу за сталого тиску

$$C_P = \frac{i+2}{2} R, \qquad (3)$$

де R – газова стала; $i = 5$ – число степенів вільності молекул газу двоатомного газу.

З урахуванням (3) та (2) рівняння (1) набере вигляду

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_p \int_A^B \frac{dT}{T} = \frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Підставимо числові значення та підрахуємо

$$\Delta S = \frac{5+2}{2} \frac{0,02}{32 \cdot 10^3} 8,31 \cdot \ln \frac{400}{300} = 52\, Дж/К.$$

Відповідь: $\Delta S = 52\, Дж/К$.

Задача 10.4

Знайти зміну ентропії під час нагрівання води, маса якої $m = 0,2\, кг$, від температури $t_1 = 0\ {}^0C$ до $t_2 = 100\ {}^0C$ та перетворенні її в пару тієї самої температури.

Розв’язування

$\Delta S - ?$
$m = 0,2\, кг$,
$T_1 = 0\ {}^0C = 273\, K$,
$T_2 = 100\ {}^0C = 373\, K$,
$c = 4\,200\, Дж/(кг \cdot K)$,
$r = 2,3 \cdot 10^6\, Дж/кг$.

Повна зміна ентропії під час нагрівання води та перетворення її в пару дорівнює

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2, \qquad (1)$$

де ΔS_1 – зміна ентропії води під час її нагрівання; ΔS_2 – зміна ентропії води під час її перетворення в пару.

Зміна ентропії під час нагрівання тіла

$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{dQ}{T} = cm\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = cm\ln\frac{T_2}{T_1}, \qquad (2)$$

де $dQ = cmdT$ – кількість теплоти, що витрачається на нагрівання тіла від температури T_1 до T_2; c – питома теплоємність речовини; m – маса тіла.

Зміна ентропії під час пароутворення

$$\Delta S_2 = \frac{rm}{T_2}, \qquad (3)$$

де r – питома теплота пароутворення.

Підставимо вирази (3) і (2) в (1) та одержимо

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = cm\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{rm}{T_2}.$$

Після підрахунків одержимо

$$\Delta S = 4\,200\cdot 0,2\ln\frac{373}{273} + \frac{2,3\cdot 10^6 0,2}{373} = 1\,495\ Дж/К.$$

Відповідь: $\Delta S = 1\,495\, Дж/К$.

Задача 10.5

У дуже міцному закритому стальному балоні міститься вода, яка за кімнатної температури займає половину об'єму балону. Знайти густину і тиск водяної пари під час підвищення температури до 673 *К*.

Розв’язування

$\rho - ?\ \ p - ?$
$T_K = 647\,K$,
$T = 647\,K$,
$m_B = 0,5\,m$,
$\rho_B = 1\,000\,кг/м^3$.

Із таблиці критичних температур знаходимо, що критична температура для води дорівнює $647\,K$. Отже, нагрівання води в балоні до температури вищої за критичну призведе до того, що вся вода буде у газоподібному стані.

Густину водяної пари визначимо, враховуючи, що об’єм тієї самої маси води внаслідок нагрівання збільшиться у два рази. Таким чином, густина ρ пари, яка дорівнює відношенню маси до об’єму, буде в два рази менша за густину води

$$\rho = 0,5\rho_B .$$

$$\rho = 0,5 \cdot 1\,000 = 500\,кг/м^3 .$$

Оскільки густина пари в балоні величезна порівняно з густиною газів за нормальних умов (наприклад, густина повітря становить $1,29\,кг/м^3$), то водяну пару необхідно розглядати як реальний газ. Скористаємось рівнянням Ван-дер-Ваальса довільної кількості речовини ν газу

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu b\right) = \nu RT, \qquad (1)$$

де $\nu = \dfrac{m}{M}$ – кількість речовини; M – молярна маса води. Молярна маса води дорівнює $M = 18 \cdot 10^{-3}\,кг/моль$.

З рівняння (1) знайдемо тиск

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}.$$

Врахуємо, що $V = \dfrac{m}{\rho}$ та вираз для кількості речовини, і знайдемо

$$p = \frac{RT}{\dfrac{M}{\rho} - b} - \frac{\rho^2 a}{M^2}. \qquad (2)$$

Візьмемо з таблиць значення поправок Ван-дер-Ваальса a і b для води ($a = 0,545\ \dfrac{Н \cdot м^4}{моль^2}$, $b = 3,04 \cdot 10^{-5}\ м^3 / моль$), та підставивши усі величини у формулу (2) після виконаних обчислень, одержимо

$$p = \frac{8,31 \cdot 647}{\dfrac{18 \cdot 10^{-3}}{500} - 3,04 \cdot 10^{-5}} - \frac{500^2 \cdot 0,545}{\left(18 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 5,1 \cdot 10^8\ Па.$$

Перевіримо розмірність

$$[p] = \frac{[R][T]}{\dfrac{[M]}{[\rho]} - [b]} - \frac{[\rho]^2 [a]}{[M]^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{Дж}{моль \cdot K} \cdot K}{\dfrac{кг \cdot м^3}{моль \cdot кг}} = \frac{Дж}{м^3} = \frac{Н \cdot м}{м^3} = \frac{Н}{м^2} = Па.$$

Відповідь: $\rho = 500\,кг/м^3$; $p = 5{,}1 \cdot 10^8\,Па.$

Задача 10.6

Знайти тиск $m = 0{,}28\,кг$ азоту, який є за температури $T = 300\,K$ у посудині, об'єм якої дорівнює:1) $V = 1\,м^3$; 2) $V = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\,м^3$.

Розв'язування

$p - ?$
$m = 0{,}28\,кг$,
$T = 300\,K$,
1) $V = 1\,м^3$,
2) $V = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\,м^3$.

Для того щоб з'ясувати, в якому разі можна вважати газ ідеальним, а в якому реальним, – знайдемо його молярний об'єм V_M

$$V_M = \frac{V}{\nu} = \frac{V \cdot M}{m}.$$

Враховуючи, що молярна маса азоту $M = 28 \cdot 10^{-3}\,кг/моль$, дістанемо:

$$1)\ V_M = \frac{1 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0{,}28} = 0{,}1\frac{м^3}{моль},$$

$$2)\ V_M = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0{,}28} = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\,\frac{м^3}{моль}.$$

Порівнюючи ці значення з молярним об’ємом газу за нормальних умов $V_M = 22,4 \cdot 10^{-3} \dfrac{м^3}{моль}$, бачимо, що у першому випадку газ достатньо розріджений і його можна вважати ідеальним. У другому випадку газ потрібно вважати реальним.

1) Рівняння стану ідеального газу для одного моля

$$pV_M = RT .$$

Звідси одержимо

$$p = \frac{RT}{V_M} .$$

Підставимо числові значення та виконаємо підрахунки

$$p = \frac{8,31 \cdot 300}{0,1} = 24\,930\,Па \approx 25\,кПа.$$

2) У другому випадку тиск азоту знаходимо з рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу

$$\left(p + \frac{a}{{V_M}^2}\right)\left(V_M - b\right) = RT,$$

де a і b – сталі Ван-дер-Ваальса (розраховані на один моль газу); V_M – молярний об’єм; p – тиск газу на стінки посудини.

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M{}^2}.$$

Взявши з таблиць значення сталих Ван-дер-Ваальса для азоту ($a = 0,13\frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$, $b = 3,7 \cdot 10^{-5}\frac{м^3}{моль}$) та підставивши усі величини у формулу для тиску, одержимо

$$p = \frac{8,31 \cdot 300}{0,5 \cdot 10^{-4} - 3,7 \cdot 10^{-5}} - \frac{0,13}{\left(0,5 \cdot 10^{-4}\right)^2} = 1,4 \cdot 10^8\, Па.$$

Відповідь: 1) $p = 25\, кПа$; 2) $p = 140\, МПа$.

Задача 10.7

$m = 10\, г$ гелію за тиску $p = 10^8\, Па$ має об'єм $V = 0,1\, л$. Чому дорівнює температура газу? Якою була б температура гелію, якщо його вважати ідеальним газом?

Розв'язування

$p - ?$
$m = 10\, г = 10^{-2}\, кг,$
$V = 0,1\, л = 10^{-4}\, м^3,$
$M = 4 \cdot 10^{-3}\, кг/моль.$

У разі ідеального газу скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT_{ід} \;\Rightarrow\; T_{ід} = \frac{pVM}{mR},$$

$$T_{ід} = \frac{10^8 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 10^{-2}} = 481\, K.$$

Для визначення температури реального газу скористаємося рівнянням Ван-дер-Ваальса довільної кількості речовини ν газу

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu b\right) = \nu RT,$$

де a і b – сталі Ван-дер-Ваальса (розраховані на один моль газу).

$$T = \frac{\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu b\right)}{\nu R}.$$

Кількість речовини $\nu = \frac{m}{M} = \frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} = 2,5\,моль$.

Взявши з таблиць значення сталих Ван-дер-Ваальса для гелію

$$(\,a = 0,00343\frac{Н \cdot м^4}{моль^2},\ b = 2,34 \cdot 10^{-5}\,\frac{м^3}{моль}\,)$$

та підставивши усі величини у формулу для температури, одержимо

$$T = \frac{\left(10^8 + \frac{2,5^2 \cdot 0,00343}{\left(10^{-4}\right)^2}\right)\left(10^{-4} - 2,5 \cdot 2,34 \cdot 10^{-5}\right)}{2,5 \cdot 8,31} = 2\,042K.$$

Відповідь: $T_{ід} = 481\,K;\ T = 2042\,K.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

10.1 Обчислити зміну ентропії під час плавлення 2 *кг* льоду, що має температуру 273 *К*.

Відповідь: $\Delta S = 2,462\,Дж/К$.

10.2 Обчислити зміну ентропії за ізобаричного розширення $m = 8\,г$ гелію від об’єму $V_1 = 10^{-2}\,м^3$ до $V_2 = 2,5\cdot 10^{-2}\,м^3$.

Відповідь: $\Delta S = 38,5\,Дж/К$.

10.3 Визначити зміну ентропії за ізобаричного розширення $m = 6\,г$ водню, якщо його тиск зміниться від $p_1 = 10^5\,Па$ до $p_2 = 0,5\cdot 10^5\,Па$.

Відповідь: $\Delta S = 17,7\,Дж/К$.

10.4 2 кг води нагрівається від 283 *К* до 373 *К* і перетворюється в пару. Визначити зміну ентропії.

Відповідь: $\Delta S = -14\,400\,Дж/К$.

10.5 Знайти зміну ентропії за ізотермічного розширення азоту масою $m = 0,01\,кг$, якщо тиск газу зменшився від $p_1 = 100\,кПа$ до $p_2 = 50\,кПа$.

Відповідь: $\Delta S = 2,057\,Дж/К$.

10.6 Кисень, маса якого $m = 0,2\,кг$, нагрівають від температури $T_1 = 300\,К$ до $T_2 = 400\,К$. Знайти зміну ентропії, якщо відомо, що початковий і кінцевий тиски однакові й близькі до атмосферного.

Відповідь: $\Delta S = 52\,Дж/К$.

10.7 Визначити зміну ентропії за ізотермічного розширення $m = 10\,г$ кисню від об’єму $V_1 = 25\,л$ до $V_2 = 100\,л$.

Відповідь: $\Delta S = 3,61\,Дж/К$.

10.8 Визначити зміну ентропії кисню за ізобаричного нагрівання від температури 290 *К* до температури 293 *К*.

Відповідь: $\Delta S = 2,9\ Дж/К$.

10.9 Знайти приріст ентропії $m = 800\ г$ водню під час його стискання від $p_1 = 10^5\ Па$ за температури 300 *К* до $p_2 = 15 \cdot 10^5\ Па$ за температури 400 *К*.

Відповідь: $\Delta S = 10,43 \cdot 10^5\ Дж/К$.

10.10 За ізохорного охолодження 2 *кг* азоту до деякої температури від температури 390 *К* його ентропія зменшилася на 890 *Дж/К*. До якої температури був охолоджений азот?

Відповідь: $T = 290\ К$.

10.11 Під час нагрівання трьох молів двоатомного ідеального газу його термодинамічна температура збільшилась у 2 рази. Визначити зміну ентропії, якщо нагрівання відбувається: 1) ізохорно; 2) ізобарно.

Відповідь: 1) $\Delta S = 53,6\ Дж/К$; 2) $\Delta S = 121\ Дж/К$.

10.12 Теплоізольована посудина розділена на дві рівні частини перегородкою, в якій зроблено отвір, що може закриватись. В одній половині посудини міститься $m = 10\ г$ водню. Друга половина відкачана до повного вакууму. Після відкривання отвору в перегородці газ заповнює об’єм усієї посудини. Вважаючи газ ідеальним, визначити зміну його ентропії.

Відповідь: $\Delta S = 29\ Дж/К$.

10.13 Знайти зміну ентропії під час нагрівання води, маса якої $m = 0,2\ кг$, від температури $t_1 = 0\ ^0C$ до $t_2 = 100\ ^0C$ та перетворення її в пару тієї самої температури.

Відповідь: $\Delta S = 1495\ Дж/К$.

10.14 Ідеальний газ під час ізотермічного розширення виконує роботу $A = 800\,Дж$. Як змінюється при цьому ентропія газу?

Відповідь: $\Delta S = 2\,Дж/К$.

10.15 Теплоємність газу з простими кристалічними ґратками змінюється в околі абсолютного нуля за законом $C = \alpha T^3$, де α – стала. Визначити ентропію тіла за цих умов.

Відповідь: $S = C/3$.

10.16 Зобразити на діаграмі T, S цикл, який виконує ідеальний газ для випадків, коли цикл складається: 1) із двох ізобар і двох ізохор; 2) із двох ізотерм і двох адіабат (цикл Карно); 3) двох ізотерм і двох ізохор.

10.17 Обчислити, користуючись рівнянням Ван-дер-Ваальса, тиск 1,1 кг вуглекислого газу, що є в балоні місткістю $V = 20\,л$ за температури 286 *К*.

Відповідь: $p = 25,7 \cdot 10^5$ *Па*.

10.18 За значенням сталих Ван-дер-Ваальса для азоту $a = 0,13\dfrac{Н \cdot м^4}{моль^2}$, $b = 3,7 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{м^3}{моль}$ знайти критичні значення об’єму, тиску і температури.

Відповідь: $V_{КР} = 11,58 \cdot 10^{-5}\dfrac{м^3}{моль}$;

$p_{КР} = 33,8 \cdot 10^5\ Па$; $T_{КР} = 126\,К$.

10.19 У дуже міцному закритому стальному балоні міститься вода, яка за кімнатної температури займає половину об’єму балону. Знайти густину і тиск водяної пари під час підвищення температури до 673 *К*.

Відповідь: $\rho = 500\,кг/м^3$; $p = 5,1 \cdot 10^8\ Па$.

10.20 $m = 10\,г$ гелію за тиску $p = 10^8\,Па$ має об'єм $V = 0{,}1\,л$. Чому дорівнює температура газу? Якою була б температура гелію, якщо його вважати ідеальним газом?

Відповідь: $T = 2042\,K$; $T = 481\,K$.

10.21 Знайти тиск $m = 0{,}28\,кг$ азоту, який є за температури $T = 300\,K$ у посудині, об'єм якої дорівнює: 1) $V = 1\,м^3$; 2) $V = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\,м^3$.

Відповідь: 1) $p = 25\,кПа$; 2) $p = 140\,МПа$.

10.22 Обчислити власний об'єм молекул кисню та тиск, зумовлений силами їх взаємодії, якщо в балоні місткістю $V = 10\,л$ є $m = 500\,г$ газу.

Відповідь: $V = 1{,}24 \cdot 10^{-4}\,м^3$; $p = 3{,}32 \cdot 10^5\,Па$.

10.23 У балоні об'ємом $V = 10\,л$ міститься азот масою $m = 250\,г$ за температури $T = 280\,K$. Знайти (в %), яку частину об'єму балона становить власний об'єм молекул газу та внутрішній тиск від тиску газу на стінки балона.

Відповідь: $w = 0{,}86\%$; $w = 5{,}05\%$.

10.24 Один моль газу займає деякий критичний об'єм за критичної температури, який втричі більший за його критичний об'єм. У скільки разів тиск газу в цьому стані менший за критичний тиск?

Відповідь: в 1,5 раза.

10.25 1 000 молів гелію займають об'єм $V = 0{,}237\,м^3$ за температури $T = 73\,K$. Знайти тиск гелію.

Відповідь: $p = 27 \cdot 10^5\,Па$.

10.26 1 кмоль деякого газу займає об'єм $V_1 = 1\,м^3$. Під час розширення газу до об'єму $V_2 = 1{,}5\,м^3$ була виконана робота $A = 45\,300\,Дж$ проти сил міжмолекулярного притягання. Визначити сталу *a* Ван-дер-Ваальса.

Відповідь: $a = 0,136 \frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$.

10.27 Знайти зміну внутрішньої енергії $m = 20\,г$ хлору під час ізотермічного розширення від $V_1 = 2 \cdot 10^{-5}\,м^3$ до $V_2 = 50 \cdot 10^{-5}\,м^3$.

Відповідь: $\Delta U = 6,14 \cdot 10^5\,Дж$.

10.28 Яку температуру має $m = 2\,г$ азоту, об'єм якого $V = 82 \cdot 10^{-5}\,м^3$ за тиску $p = 2 \cdot 10^5\,Па$? Газ вважати реальним.

Відповідь: $T = 66,1\,K$.

10.29 У посудині об'ємом $V = 2 \cdot 10^{-5}\,м^3$ міститься $m = 8\,г$ кисню за температури 300 K. Визначити внутрішню енергію кисню. Газ вважати реальним.

Відповідь: $U = 1,13\,кДж$.

10.30 Вуглекислий газ масою $m = 88\,г$ має об'єм $V = 1\,л$ за температури 290 K. Обчислити внутрішню енергію газу, якщо: 1) газ ідеальний; 2) газ реальний.

Відповідь: 1) $U = 14,5\,кДж$; 2) $U = 13\,кДж$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Черняк Л. М. Лекції з загальної фізики / Л. М. Черняк. – Суми : Вид-во Алан – ЕКС, 2003. – Книга 1.
2. Ігнатенко В. М. Курс лекцій з механіки / В. М. Ігнатенко. – Суми : Вид-во СумДу, 2007.
3. Ігнатенко В. М. Механічні коливання і хвилі / В. М. Ігнатенко. – Суми : Вид-во СумДу, 2007.
4. Опанасюк А. С. Збірник задач для контрольних робіт та тестування з дисципліни «Загальна фізика» : навч. посібник : у 3 ч. / А. С. Опанасюк, Б. А. Міщенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2006. – Ч. 1.
5. Опанасюк А. С. Збірник задач для контрольних робіт та тестування з дисципліни «Загальна фізика» : навч. посібник : у 3 ч. / А. С. Опанасюк, Б. А. Міщенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2006. – Ч. 2.
6. Опанасюк А. С. Збірник задач для контрольних робіт та тестування з дисципліни «Загальна фізика» : навч. посібник : у 3 ч. / А. С. Опанасюк, Б. А. Міщенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2006. – Ч. 3.
7. Дущенко В. П. Загальна фізика : навч. посібник / В. П. Дущенко, І. М. Кучерук. – Київ : Вища школа, 1987.
8. Загальні основи фізики : навч. посібник : у 2 ч. / І. Г. Багацька, Д. Б. Головко, А. А. Маляренко, Ю. Л. Ментковський. – Київ : Либідь, 1998. – Книга 1.

ДОДАТОК А
(довідковий)

ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИКИ

1 Формули з алгебри

Розв'язок квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Таблиця А.1 – Многочлени

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a + 1)$	

Таблиця А.2 – Логарифми

$a^x = b,\ a > 0 \Leftrightarrow \log_a b = x$	
$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$
Якщо $x > 0,\ y > 0$, то $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_a(x^n) = n\log_a x$
$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log_a x,\ n \neq 1$	

Продовження додатка А

2 Тригонометричні функції

Таблиця А.3 – Значення деяких тригонометричних функцій

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Таблиця А.4 – Основні властивості тригонометричних функцій

$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(x + 2\pi k) = \sin x,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg} x$	$\mathrm{tg}(x + \pi k) = \mathrm{tg} x,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(x + 2\pi k) = \cos x,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg} x$	$\mathrm{ctg}(x + \pi k) = \mathrm{ctg} x,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Таблиця А.5 – Формули зведення

Функція	$90^\circ - x$	$180^\circ - x$	$270^\circ - x$	$-x$	$90^\circ - x$	$180^\circ - x$	$270^\circ - x$
	$\frac{\pi}{2} - x$	$\pi - x$	$\frac{3\pi}{2} - x$		$\frac{\pi}{2} + x$	$\pi + x$	$\frac{3\pi}{2} + x$
$\sin\alpha$	$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$
$\cos\alpha$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg} x$	$-\mathrm{tg} x$	$\mathrm{ctg} x$	$-\mathrm{tg} x$	$-\mathrm{ctg} x$	$\mathrm{tg} x$	$-\mathrm{ctg} x$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg} x$	$-\mathrm{ctg} x$	$\mathrm{tg} x$	$-\mathrm{ctg} x$	$-\mathrm{tg} x$	$\mathrm{ctg} x$	$-\mathrm{tg} x$

Продовження додатка А

Таблиця А.6 – Тотожні перетворення тригонометричних виразів

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
$\mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x = 1$
$1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$	$\mathrm{tg}2x = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$	
$\mathrm{ctg}2x = \dfrac{\mathrm{ctg}^2 x - 1}{2\mathrm{ctg}x}$	$\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$
$\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$	$\mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
$\mathrm{ctg}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$	
$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$	$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$
$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$	$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
$\mathrm{tg}(x + y) = \dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}$	$\mathrm{tg}(x - y) = \dfrac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}$
$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x + y}{2} \cdot \cos\dfrac{x - y}{2}$	$\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x + y}{2} \cdot \sin\dfrac{x - y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x + y}{2} \cdot \cos\dfrac{x - y}{2}$	$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x + y}{2} \cdot \sin\dfrac{x - y}{2}$
$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \dfrac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$	$\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y = \dfrac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$
$\mathrm{ctg}x + \mathrm{ctg}y = \dfrac{\sin(x + y)}{\sin x \cdot \sin y}$	$\mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}y = \dfrac{\sin(x - y)}{\sin x \cdot \sin y}$
$\sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right]$	

Продовження таблиці А.6

$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$	
$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x-y)+\sin(x+y)\right]$	
$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$	$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
$\mathrm{tg}3x=\frac{3\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^3x}{1-3\mathrm{tg}^2x}$	$\mathrm{ctg}3x=\frac{3\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}^3x}{1-3\mathrm{ctg}^2x}$
$\sin x+\cos y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$	
$\sin x-\cos y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	$1+\sin x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$
$1-\sin x=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$	$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$

Таблиця А.7 – Деякі похідні від функцій

$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(e^x\right)'=e^x$
$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$	$\left(u^{\mathrm{v}}\right)'=\mathrm{v}\,u^{\mathrm{v}-1}\left(u\right)'+u^{\mathrm{v}}\ln u\left(\mathrm{v}\right)$
$\left(\sin x\right)'=\cos x$	$\left(\cos x\right)'=-\sin x$
$\left(\mathrm{tg}x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$	$\left(\mathrm{ctg}x\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\mathrm{cosec}^2x$

Таблиця А.8 – Деякі часто вживані інтеграли

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ за $(n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln\lvert a\rvert} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$	
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$ за $\lvert x\rvert < a$	
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ за $\lvert x\rvert > a$	
$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$	$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}$
$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$	$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} a^{-2}$
$\int_0^\infty x^{1/2} e^{-ax} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2}$	$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} a^{-5/2}$
$\int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{2}\sqrt{\pi} a^{-5/2}$	$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$

Продовження таблиці А.8

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2,405$
$\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}$	$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$
$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0,225$	$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 1,18$

Таблиця А.9 – Формули для наближених обчислень

Якщо $a \ll 1$, то в першому наближенні можна взяти	
$\frac{1}{1 \pm a} = 1 \mp a$	$\frac{1}{\sqrt{1 \pm a}} = 1 \mp \frac{1}{2}a$
$(1 \pm a)^2 = 1 \mp 2a$	$e^a = 1 + a$
$\sqrt{1 \pm a} = 1 \pm \frac{1}{2}a$	$\ln(1 + a) = a$
Якщо кут $\alpha < 5^\circ$ або $\alpha < 0,1\,рад$ і заданий у радіанах, то в першому наближенні можна взяти	
$\sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha = \alpha, \quad \cos\alpha = 1$	

Продовження додатка А

Таблиця А.10 – Множники і префікси для утворення десятикратних і часткових одиниць

Префікс				**Префікс**			
Множник	**Назва**	**Позначення**		**Множник**	**Назва**	**Позначення**	
		укр.	**міжнар.**			**укр.**	**міжнар.**
10^{18}	екса	Е	E	10^{-1}	деци	д	d
10^{15}	пета	П	P	10^{-2}	санти	с	c
10^{12}	тера	Т	T	10^{-3}	мілі	м	m
10^{9}	гига	Г	G	10^{-6}	мікро	мк	m
10^{6}	мега	М	M	10^{-9}	нано	н	n
10^{3}	кіло	кг	k	10^{-12}	піко	п	p
10^{2}	гекто	г	h	10^{-15}	фемто	ф	f
10^{1}	дека	да	da	10^{-18}	атто	а	a

Додаток Б
(довідковий)

ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З МЕХАНІКИ ТА ТЕРМОДИНАМІКИ

Таблиця Б.1 – Похідні одиниці СІ, які використовуються в механіці та термодинаміці

Величина	Похідна одиниця			
Назва	Назва	Позначення		Примітки
		укр.	міжнар.	
Площа	Квадратний метр	$м^2$	m^2	
Об’єм	Кубічний метр	$м^3$	m^3	
Швидкість	Метр за секунду	$м/с$	m/s	
Прискорення	Метр за секунду в квадраті	$м/с^2$	m/s^2	
Частота	Герц	$Гц$	Hz	$Гц = с^{-1}$
Частота обертання	Секунда в мінус першому степені	$с^{-1}$	s^{-1}	
Кутова швидкість	Радіан за секунду	$рад/с$	rad/s	
Кутове прискорення	Радіан за секунду в квадраті	$рад/с^2$	rad/s^2	
Густина	Кілограм на кубічний метр	$кг/м^3$	kg/m^3	

Продовження таблиці Б.1

Величина	Похідна одиниця			
Назва	**Назва**	**Позначення**		**Примітки**
		укр.	**між-нар.**	
Момент інерції	Кілограм-метр у квадраті	$кг \cdot м^2$	$kg \cdot m^2$	
Імпульс	Ньютон-секунда	$Н \cdot с$	$N \cdot s$	$1Н \cdot с = \frac{кг \cdot м}{с}$
Момент імпульсу	Кілограм-метр у квадраті за секунду	$кг \cdot м^2/с$	$kg \cdot m^2/s$	
Сила	Ньютон	$Н$	N	$1Н = 1\frac{кг \cdot м}{с^2}$
Момент сили	Ньютон-метр	$Н \cdot м$	$Н \cdot м$	$1Н \cdot м = \frac{кг \cdot м^2}{с^2}$
Тиск	Паскаль	$Па$	Pa	$1Па = \frac{Н}{м^2}$
Механічна напруга	Паскаль	$Па$	Pa	$1Па = \frac{Н}{м^2}$
Поверхневий натяг	Ньютон на метр	$Н/м$	N/m	
Робота, енергія	Джоуль	$Дж$	J	$1Дж = 1Н \cdot м$
Потужність	Ватт	$Вт$	W	$1Вт = 1\frac{Дж}{с}$
Динамічна в’язкість	Паскаль-секунда	$Па \cdot с$	$Pa \cdot s$	
Кінематична в’язкість	Квадратний метр за секунду	$м^2/с$	m^2/s	

Таблиця Б.2 – Позасистемні одиниці, які використовуються у фізиці та астрономії

Назва величини	Позасистемні одиниці			
	Назва	Позначення		Значення в одиницях СІ
		укр.	між нар.	
Довжина	Астрономічна одиниця	а. о.	–	$1{,}49600 \cdot 10^{11}$ м
	Світловий рік	св. р.	l.y.	$9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м
	Парсек	пк	pc	$3{,}0857 \cdot 10^{16}$ м
Оптична сила	Діоптрія	дптр	–	$1 м^{-1}$
Маса	Атомна одиниця маси	а. о. м.	u	$1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ кг
Площа	Барн	б	b	$10^{-28} м^2$
Енергія	Електрон-вольт	еВ	eV	$1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ Дж
Площа земельних ділянок	Гектар	га	ha	$10^4 м^2$
Об’єм	Літр	л	l	$10^{-3} м^3$
Плоский кут	Градус	$\ldots^{o}$	$\ldots^{o}$	$\pi/180$ рад
	Хвилина	$\ldots'$	$\ldots'$	$\pi/10\,800$ рад
	Секунда	$\ldots''$	$\ldots''$	$\pi/648\,000$ рад
Час	Хвилина	хв	min	60 с
	Година	год	h	3 600 с
	Доба	доба	d	86 400 с
	Тиждень	тиж	–	604 800 с

Продовження таблиці Б.2

<table>
<tr><th rowspan="3">Назва величини</th><th colspan="4">Позасистемні одиниці</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Назва</th><th colspan="2">Позначення</th><th>Значення в одиницях СІ</th></tr>
<tr><th>укр.</th><th>між нар.</th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>Місяць</td><td>міс</td><td>–</td><td>$2{,}592 \cdot 10^6$с</td></tr>
<tr><td></td><td>Рік</td><td>рік</td><td>–</td><td>$3{,}11 \cdot 10^7$с</td></tr>
<tr><td>Маса</td><td>Тонна</td><td>т</td><td>t</td><td>10^3кг</td></tr>
<tr><td>Температура Цельсія, різниця температур</td><td>Градус Цельсія</td><td>$^\circ C$</td><td>$^\circ C$</td><td>Температура Цельсія $t = T - 273{,}15$, де T – термодинамічна температура. За розміром градус Цельсія дорівнює Кельвіну</td></tr>
</table>

Таблиця Б.3 – Фундаментальні фізичні константи

Гравітаційна стала	$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3 /(кг · с^2)
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ м/с
Стала Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Стала Дірака	$\hbar = h/2\pi = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Нормальне прискорення вільного падіння	$g = 9{,}81$м/с^2
Універсальна молярна газова стала	$R = 8{,}31$ Дж/(моль · К)
Стала Авогадро	$N_a = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Стала Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Стандартний об’єм (об’єм одного моля газу)	$V_0 = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Елементарний заряд	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Питомий заряд електрона	$e/m_e = 1{,}7588 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	$\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Продовження таблиці Б.3

Стала Фарадея	$F = 9{,}65 \cdot 10^{4}$ Кл/моль
Стала Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^{2}К^4)
Стала в законі зміщення Віна	$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}\ м \cdot К$
Стала Рідберга	$R = 1{,}10 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$; $R` = 2{,}07 \cdot 10^{-18}$ м$^{-1}$
Енергія іонізації атома водню	$E_i = 2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж (13,6 еВ)
Енергія спокою електрона	$E_{0e} = 8{,}16 \cdot 10^{-14}$ Дж = = 0,511 МеВ
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_Б = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Боровський радіус	$a = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м
Уніфікована атомна одиниця маси	1 а. о. м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг

Таблиця Б.4 – Деякі астрономічні величини

Радіус Землі	$6{,}37 \cdot 10^{6}$ м
Маса Землі	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радіус Місяця	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ м
Маса Місяця	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг
Радіус Сонця	$6{,}95 \cdot 10^{8}$ м
Маса Сонця	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг
Відстань від центра Землі до центра Місяця	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ м
Відстань від центра Землі до центра Сонця	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ м

Продовження додатка Б

Таблиця Б.5 – Густини деяких газів за нормальних умов

Газ	Густина ρ, кг/м^3	Газ	Густина ρ, кг/м^3
Азот	1,25	Гелій	0,18
Аргон	1,78	Кисень	1,43
Водень	0,09	Повітря	1,29

Таблиця Б.6 – Густини деяких рідин (за 15 ^0C)

Рідина	Густина $\rho \cdot 10^3$, кг/м^3	Рідина	Густина $\rho \cdot 10^3$, кг/м^3
Вода	1,00	Масло оливкове	0,96
Бензин	0,80	Сірководень	1,26
Гліцерин	1,26	Спирт	0,80
Ефір	0,70	Ртуть	13,6
Керосин	0,80		

Таблиця Б.7 – Густини деяких твердих тіл

Тверде тіло	Густина $\rho \cdot 10^3$, кг/м^3	Тверде тіло	Густина $\rho \cdot 10^3$, кг/м^3
Алюміній	2,69	Молібден	10,2
Барій	3,50	Нікель	8,5
Ванадій	6,02	Ніхром	8,4
Вісмут	9,80	Олово	7,98
Вольфрам	19,30	Платина	21,4
Залізо (сталь)	7,87	Свинець	11,34
Золото	19,3	Срібло	10,5
Кам’яна сіль	2,2	Тантал	16,6
Кобальт	8,9	Титан	4,54
Константан	8,9	Уран	18,7
Лід	0,92	Фарфор	2,3

Продовження таблиці Б.7

Тверде тіло	**Густина $\rho \cdot 10^3$, кг/м^3**	**Тверде тіло**	**Густина $\rho \cdot 10^3$, кг/м^3**
Літій	0,53	Хром	7,19
Латунь	8,55	Цезій	1,87
Марганець	7,4	Цинк	7,13
Мідь	8,96		

Таблиця Б.8 – Механічні властивості твердих тіл

Тверде тіло	**Модуль Юнга E, ГПа**	**Модуль зсуву G, ГПа**	**Коефіцієнт лінійного розширення $\alpha \cdot 10^6$, К$^{-1}$**
Алюміній	70,6	26,2	23,8
Вольфрам	410	140	4,3
Залізо (сталь)	210	81	11,9
Константан	210	–	17,0
Мідь	129,8	48,3	16,7
Молібден	324,8	125,6	5,09
Нікель	199,5	76,0	13,4
Срібло	82,7	30,3	18,7
Тантал	185,7	69,2	6,57
Титан	120,2	45,6	8,4

Таблиця Б.9 – Швидкість звуку в деяких матеріалах

Речовина	**Швидкість звуку за 0 $^{\circ}C$ v, м/с**
Берилій	2 250
Вода	1 450
Водень	1 270
Вуглекислий газ	260

Продовження таблиці Б.9

Речовина	Швидкість звуку за 0 $^{\circ}C$ v, м/с
Залізо	5 100
Мідь	3 500
Повітря	332
Сталь	5 300

Таблиця Б.10 – Ефективний діаметр молекул, динамічна в'язкість і теплопровідність газів за нормальних умов

Речовина	Ефективний діаметр d молекул, нм	Динамічна в'язкість η, мкПа · с	Теплопровідність, λ, мВт/(м · К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водень	0,28	8,66	168
Повітря	0,27	17,2	24,1
Гелій	0,22	18,9	142
Кисень	0,36	19,8	24,4
Пара води	0,30	8,32	15,8

Таблиця Б.11 – Динамічна в'язкість деяких рідин

Речовина	Коефіцієнт динамічної в'язкості за 20 $^{\circ}C$ η, мПа · с
Вода	1,00
Гліцерин	1 480
Мастило касторове	987
Мастило машинне	100
Ртуть	1,58

Продовження додатка Б

Таблиця Б.12 – Критичні параметри і поправки Ван-дер-Ваальса

Газ	**Критична температура $T_{кр}$, К**	**Критичний тиск $P_{кр}$, МПа**	**Поправки Ван-дер-Ваальса**	
			a, Н · м^4/моль^2	**$B \cdot 10^{-5}$ м^3/моль**
Азот	126	3,39	0,135	3,86
Аргон	151	4,86	0,134	3,22
Водяна пара	647	22,1	0,545	3,04
Вуглекислий газ	304	7,38	0,361	4,28
Кисень	155	5,08	0,136	3,17
Неон	44,4	2,72	0,209	1,70
Хлор	417	7,71	0,650	5,62

Таблиця Б.13 – Теплові властивості деяких матеріалів

Речовина	**Температура плавлення, t, °C**	**Питома теплоємність c, Дж/(кг · К)**	**Питома теплота плавлення $\lambda \cdot 10^{-5}$, Дж/кг**
Алюміній	659	896	3,22
Залізо	1 530	500	2,72
Латунь	900	386	–
Лід	0	2 100	3,35
Мідь	1 100	395	1,76
Олово	232	230	0,586
Платина	1 770	117	1,13
Свинець	327	126	0,226
Срібло	960	234	0,88
Сталь	1 300	460	–
Цинк	420	391	1,17

Продовження додатка Б

Таблиця Б.14 – Термодинамічні величини, які характеризують чисту воду

Питома теплоємність води	c = 4 190 Дж/(кг · К)
Питома теплота пароутворення води	r = 2 258 кДж/кг
Коефіцієнт поверхневого натягу води	σ = 73 мН/м
Динамічна в'язкість води	η = 1,00 мПа · с

Періодична система хімічних елементів Д. І. Менделєєва

Порядковий номер — Символ елемента — Атомна маса — Назва елемента

26 55,847 Fe Ферум Залізо

Період	Ряд	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	VIII	VIII	VIII
1	1	H 1 1,0079 Гідроген Водень							He 2 4,0026 Гелій			
2	2	Li 3 6,941 Літій	Be 4 9,012 Берилій	B 5 10,81 Бор	C 6 12,011 Карбон Вуглець	N 7 14,0067 Нітроген Азот	O 8 15,999 Оксиген Кисень	F 9 18,998 Флуор Фтор	Ne 10 20,179 Неон			
3	3	Na 11 22,990 Натрій	Mg 12 24,305 Магній	Al 13 26,981 Алюміній	Si 14 28,086 Силіцій Кремній	P 15 30,973 Фосфор	S 16 32,06 Сульфур Сірка	Cl 17 35,453 Хлор	Ar 18 39,948 Аргон			
4	4	K 19 39,098 Калій	Ca 20 40,08 Кальцій	21 Sc 44,956 Скандій	22 Ti 47,90 Титан	23 V 50,941 Ванадій	24 Cr 51,996 Хром	25 Mn 54,938 Манган Марганець		26 Fe 55,847 Ферум Залізо	27 Co 58,933 Кобальт	28 Ni 58,70 Нікол Нікель
	5	29 Cu 63,546 Купрум Мідь	30 Zn 65,39 Цинк	Ga 31 69,72 Галій	Ge 32 72,59 Германій	As 33 74,921 Арсен Миш'як	Se 34 78,96 Селен	Br 35 79,904 Бром	Kr 36 83,80 Криптон			
5	6	Rb 37 85,468 Рубідій	Sr 38 87,62 Стронцій	39 Y 88,906 Ітрій	40 Zr 91,22 Цирконій	41 Nb 92,906 Ніобій	42 Mo 95,94 Молібден	43 Tc [98,906] Технецій		44 Ru 101,07 Рутеній	45 Rh 102,905 Родій	46 Pd 106,4 Паладій
	7	47 Ag 107,868 Аргентум Срібло	48 Cd 112,41 Кадмій	In 49 114,82 Індій	Sn 50 118,71 Станум Олово, цина	Sb 51 121,75 Стибій	Te 52 127,60 Телур	I 53 126,904 Іод Йод	Xe 54 131,30 Ксенон			
6	8	Cs 55 132,91 Цезій	Ba 56 137,33 Барій	57 *La 138,905 Лантан	72 Hf 178,49 Гафній	73 Ta 180,948 Тантал	74 W 183,85 Вольфрам	75 Re 186,207 Реній		76 Os 190,2 Осмій	77 Ir 192,22 Іридій	78 Pt 195,09 Платина
	9	79 Au 196,967 Аурум Золото	80 Hg 200,59 Меркурій Ртуть	Tl 81 204,37 Талій	Pb 82 207,2 Плюмбум Свинець, оливо	Bi 83 208,980 Бісмут Вісмут	Po 84 [209] Полоній	At 85 [210] Астат	Rn 86 [222] Радон			
7	10	Fr 87 [223] Францій	Ra 88 226,025 Радій	89 **Ac [227] Актиній	104 Unq [261] Уннілквадій	105 Unp [262] Уннілпентій	106 Unh [263] Уннілгексій	107 Uns [264] Уннілсептій		108 Uno [265] Уннілоктій	109 Une [266] Унніленій	110 Uun [272] Унунній
Вищі оксиди		R_2O	RO	R_2O_3	RO_2	R_2O_5	RO_3	R_2O_7	RO_4			
Леткі водневі сполуки					RH_4	RH_3	H_2R	HR				

*Лантаноїди	58 Ce 140,12 Церій	59 Pr 140,908 Празеодим	60 Nd 144,24 Неодим	61 Pm [145] Прометій	62 Sm 150,36 Самарій	63 Eu 151,96 Європій	64 Gd 157,25 Гадоліній	65 Tb 158,925 Тербій	66 Dy 162,50 Диспрозій	67 Ho 164,93 Гольмій	68 Er 167,26 Ербій	69 Tm 168,934 Тулій	70 Yb 173,04 Ітербій	71 Lu 174,97 Лютецій
**Актиноїди	90 Th 232,038 Торій	91 Pa [231] Протактиній	92 U 238,029 Уран	93 Np [237] Нептуній	94 Pu [244] Плутоній	95 Am [243] Америцій	96 Cm [247] Кюрій	97 Bk [247] Берклій	98 Cf [251] Каліфорній	99 Es [254] Ейнштейній	100 Fm [257] Фермій	101 Md [258] Менделєвій	102 No [259] Нобелій	103 Lr [260] Лоуренсій

Навчальне видання

Ігнатенко Вікторія Михайлівна,
Нефедченко Василь Федорович,
Опанасюк Анатолій Сергійович

Посібник до практичних занять із фізики

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 1

Художнє оформлення обкладинки В. Ф. Нефедченка
Редакторка Н. М. Мажуга
Комп'ютерне верстання В. М. Ігнатенко

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 17,21. Обл.-вид. арк. 14,81. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.