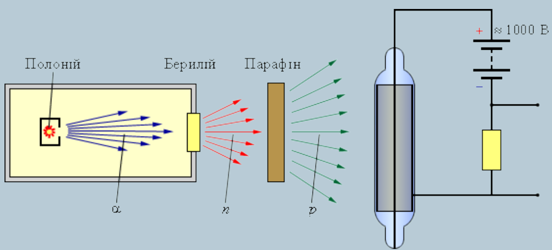
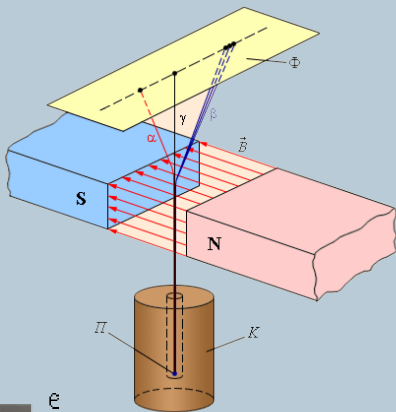
Ігнатенко В. М., Нефедченко В. Ф., Опанасюк А. С.

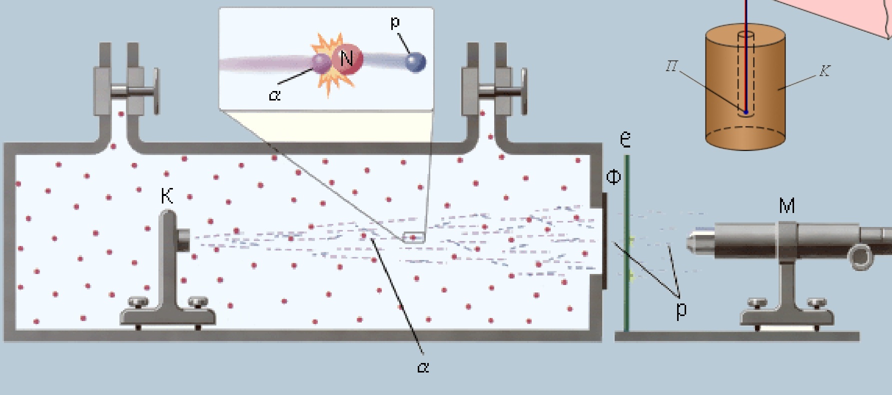
ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ІЗ ФІЗИКИ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 3







Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Ігнатенко В. М., Нефедченко В. Ф., Опанасюк А. С.

ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ІЗ ФІЗИКИ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 3

Видання друге, виправлене

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2023

УДК 53(076.2)
І-26

Рецензенти:

О. В. Лисенко – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики та моделювання складних систем Сумського державного університету;

А. І. Салтикова – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, фізики та методики їх навчання Сумського державного педагогічного університету ім. А. С. Макаренка

Рекомендовано до видання вченою радою
Сумського державного університету
(протокол № 16 від 24 червня 2021 року)

Ігнатенко В. М.

І-26 Посібник до практичних занять із фізики : у 3 ч. – 2-ге вид., виправл. / В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, А. С. Опанасюк. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – Ч. 3. – 265 с.

ISBN 978-966-657-962-4
ISBN 978-966-657-965-5

Навчальний посібник містить понад 1 000 задач і складений відповідно до робочої програми для інженерних спеціальностей. Наведені основні теоретичні відомості з кожного розділу загальної фізики та приклади розв'язування типових задач.

Призначений для студентів ЗВО інженерних спеціальностей.

УДК 53(076.2)

ISBN 978-966-657-962-4

ЗМІСТ

С.

16 ОСНОВИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОПТИКИ. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА.. 5
Зведення основних формул.. 5
Приклади розв'язування задач.................................... 9
Задачі для самостійного розв'язування 25
17 ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА 31
Зведення основних формул.. 31
Приклади розв'язування задач.................................... 34
Задачі для самостійного розв'язування 47
18 ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА.. 54
Зведення основних формул.. 54
Приклади розв'язування задач.................................... 56
Задачі для самостійного розв'язування 69
19 ЗАКОНИ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ 75
Зведення основних формул.. 75
Приклади розв'язування задач.................................... 79
Задачі для самостійного розв'язування 92
20 КВАНТОВА ПРИРОДА СВІТЛА. ФОТОЕФЕКТ ТА ЕФЕКТ КОМПТОНА 98
Зведення основних формул.. 98
Приклади розв'язування задач.................................... 100
Задачі для самостійного розв'язування 114
21 ТЕОРІЯ ДЕ-БРОЙЛЯ. РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА 120
Зведення основних формул.. 120
Приклади розв'язування задач.................................... 126
Задачі для самостійного розв'язування 149
22 АТОМ ВОДНЮ. РЕНТГЕНІВСЬКІ СПЕКТРИ.... 154
Зведення основних формул.. 154
Приклади розв'язування задач.................................... 158
Задачі для самостійного розв'язування 172

23 ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА 177
Зведення основних формул 177
Приклади розв’язування задач.................................... 185
Задачі для самостійного розв’язування 202
24 БУДОВА ЯДРА АТОМА.
РАДІОАКТИВНІСТЬ 208
Зведення основних формул 208
Приклади розв’язування задач.................................... 216
Задачі для самостійного розв’язування 227
25 ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ
ЧАСТИНКИ.. 233
Зведення основних формул 233
Приклади розв’язування задач.................................... 235
Задачі для самостійного розв’язування 251
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ 257
ДОДАТОК А.. 258

16 ОСНОВИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОПТИКИ. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

16.1 Абсолютний показник заломлення середовища

$$n = \frac{c}{\mathrm{v}} = \sqrt{\varepsilon\mu} ,$$

де c – швидкість світла у вакуумі; v – фазова швидкість електромагнітної хвилі у середовищі; ε і μ – діелектрична та магнітна проникності речовини.

Для середовища, що не має феромагнітних властивостей, $\mu = 1$, тоді

$$n = \sqrt{\varepsilon} .$$

16.2 Відносний показник заломлення двох середовищ

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} .$$

Для неферомагнітних середовищ

$$n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} .$$

16.3 Граничний кут повного внутрішнього відбиття

$$\sin\alpha_{гр} = n_{21}.$$

16.4 Оптична довжина шляху світлової хвилі

$$L = nl,$$

де l – геометрична довжина шляху світлової хвилі в середовищі з показником заломлення n.

16.5 Оптична різниця ходу двох світлових хвиль

$$\Delta = L_2 - L_1 = n_2 l_2 - n_1 l_1,$$

де n_1 і n_2 – показники заломлення середовищ, у яких поширюються хвилі.

16.6 Зв’язок різниці фаз з оптичною різницею ходу світлових хвиль

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda},$$

де λ – довжина світлової хвилі.

16.7 Закон Снелліуса для заломлення світла

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21},$$

де n_{12} – відносний показник заломлення.

16.8 Умова спостереження інтерференційних максимумів

$$\Delta = \pm k\lambda, \quad \Delta\varphi = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

де k – порядок інтерференції.

16.9 Умова спостереження інтерференційних мінімумів

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad \Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

16.10 Ширина інтерференційної смуги в дослідах Юнга

$$\Delta X = \frac{L}{d}\lambda,$$

де L – відстань від щілини до екрана, на якому спостерігається інтерференція; d – відстань між щілинами.

16.11 Оптична різниця ходу світлових хвиль, що виникає під час відбивання монохроматичного світла від тонкої плівки:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2},$$

або

$$\Delta = 2dn\cos\beta + \frac{\lambda}{2},$$

де d – товщина плівки; n – показник заломлення плівки; α – кут падіння; β – кут заломлення світла в плівці.

16.12 Радіуси світлих кілець Ньютона у відбитому світлі й темних кілець у прохідному світлі

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

де k – номер кільця; R – радіус кривизни лінзи.

16.13 Радіуси темних кілець Ньютона у відбитому світлі та світлих кілець у прохідному світлі

$$r_k = \sqrt{kR\lambda} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 16.1

Визначити довжину l відрізка, на якому укладається стільки ж довжин хвиль світла у вакуумі, скільки їх укладається на відрізку довжиною $l_1 = 3$ *мм* у воді.

Розв'язування

$l - ?$
$l_1 = 3\,мм = 3 \cdot 10^{-3}\,м$, $n = 1{,}33$.

Відомо, що за час одного періоду коливань хвиля поширюється на відстань, яка дорівнює її довжині. Тому для випадку поширення світла у воді можна записати

$$\lambda = vT = \frac{c}{n}T = \frac{\lambda_0}{n}, \tag{1}$$

де λ – довжина хвилі у вакуумі; λ_1 – у середовищі; v – швидкість світла у воді; n – показник заломлення середовища.

Відповідно до умови задачі маємо, що на відрізках l і l_1 укладається однакова кількість довжин хвиль:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{l_1}{\lambda_1}. \tag{2}$$

Підставимо співвідношення (1) у (2), тоді одержимо

$$l = l_1 n.$$

Після підставлення значень фізичних величин в одержане співвідношення визначимо

$$l = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1,33 = 4 \cdot 10^{-3} \left(м \right).$$

Відповідь: $l = 4 \cdot 10^{-3}$ *м*.

Задача 16.2

Рибак із берега ставка дивиться на камінь, що лежить на дні. Глибина ставка $H = 1\,м$. На якій глибині h буде отримане зображення, якщо кут променя з нормаллю до поверхні води дорівнює $\alpha = 60^0$.

Розв'язування

$h - ?$

$H = 1\,м,$

$\alpha = 60^0,$

$n = 1,33.$

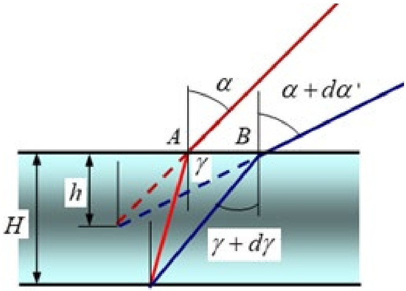


Рисунок 1

Скористаємося законом Снелліуса для заломлення світла

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21}, \qquad (1)$$

де n_{12} – відносний показник заломлення, що дорівнює

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}.$$

З виразу (1) одержимо

$$\sin\gamma = \frac{n_1 \sin\alpha}{n_2}. \qquad (2)$$

Унаслідок тригонометричних перетворень приходимо до

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{n_1^2 \sin^2\alpha}{n_2^2}} = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2}-\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

Перепишемо (1) у вигляді

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\gamma.$$

Диференціювання останнього виразу приводить до

$$n_1 \cos\alpha d\alpha = n_2 \cos\gamma d\gamma.$$

Звідси

$$d\gamma = d\alpha \frac{n_1 \cos\alpha}{n_2 \cos\gamma}. \qquad (4)$$

З рисунка 1 бачимо, що

$$AB = H\left[tg\left(\gamma + d\gamma\right) - tg\gamma\right] = h\left[tg\left(\alpha + d\alpha\right) - tg\alpha\right].$$

Після нескладних перетворень з урахуванням виразів (2), (3) і (4) одержимо

$$h = H\frac{\left[\mathrm{tg}\left(\gamma + d\gamma\right) - \mathrm{tg}\gamma\right]}{\left[\mathrm{tg}\left(\alpha + d\alpha\right) - \mathrm{tg}\alpha\right]} = H\frac{d\left(\mathrm{tg}\gamma\right)}{d\left(\mathrm{tg}\alpha\right)} = H\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha} =$$

$$= H\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}\frac{n_1\cos\alpha}{n_2\cos\gamma} = H\frac{n_1}{n_2}\frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\gamma},$$

$$h = H\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma} = H\frac{\cos^3\alpha}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\left(\frac{n_2^2}{n_1^2}-\sin^2\alpha\right)^{3/2}}.$$

Враховуючи, що для повітря $n_1 = 1$, спростимо останній вираз:

$$h = \frac{H\cdot n_2^2\cdot\cos^3\alpha}{\left(n_2^2-\sin^2\alpha\right)^{3/2}}.$$

Підставимо значення фізичних величин в одержане співвідношення:

$$h = \frac{1,33^2\cdot\cos^3 60^0}{\left(1,33^2-\sin^2 60^0\right)^{3/2}} = 0,215\,м.$$

Оскільки в око потрапляють промені з невеликим кутовим відхиленням, отримане зображення предмета виявляється виразним.

Відповідь: $h = 0,215\,м$.

Задача 16.3

Розсіяне монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,6\,мкм$ падає на тонку плівку речовини з показником заломлення $n = 1,5$. Визначити товщину плівки за умови, що кутова відстань між сусідніми максимумами, які спостерігаються у відбитому світлі під кутами з нормаллю, близькими до $\theta = 45^0$, дорівнює $\delta\theta = 3^0$.

Розв'язування

$d - ?$

$\lambda = 0,6\,мкм = 6 \cdot 10^{-7}\ м,$

$\theta = 45^0,$

$\delta\theta = 3^0,$

$n = 1,5.$

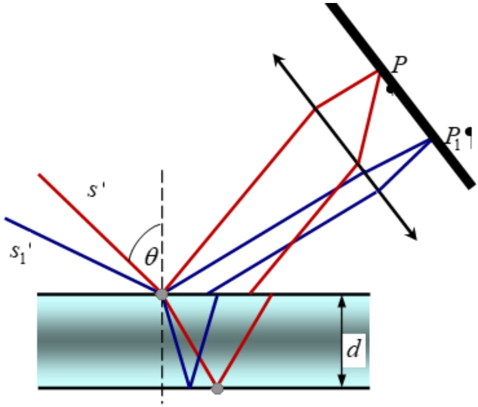


Рисунок 2

Розсіяним називають світло, в якому напрямки поширення світлових променів різні. Таке світло під час відбивання від плоскопаралельної пластинки (плівки) внаслідок інтерференції буде створювати **смуги рівного нахилу** як у відбитому світлі, так і у світлі, яке пройшло. Схема виникнення смуг рівного нахилу зображена на рисунку 2. Усі промені, які падають на пластинку під певним кутом θ, зійдуться на екрані в одній точці P. Промені іншого нахилу, такі як промінь s_1, зійдуться в іншій точці екрана P_1. Кожному куту падіння відповідає своя смуга рівного нахилу, локалізована на нескінченності.

Умова максимумів під час інтерференції

$$\Delta = \pm k\lambda\,, \tag{1}$$

Оптична різниця ходу в тонкій плівці з урахуванням зміни фази хвилі на π (зсув на $\lambda/2$) дорівнює

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} - \lambda/2 . \tag{2}$$

З виразів (1) і (2) одержимо умову того, що світло, відбите від плівки, під кутом θ буде мати максимальну інтенсивність

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda ,$$

де d – товщина плівки; n – її показник заломлення; k – номер максимуму.

Тоді умови максимумів у відбитому світлі для кутів

$$\theta_1 = \theta - \delta\theta/2 \quad \text{і} \quad \theta_2 = \theta + \delta\theta/2$$

запишуться у вигляді

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1} = \left(k_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda ,$$
$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_2} = \left(k_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda . \tag{3}$$

За умовою задачі $k_2 = k_1 - 1$, тоді вирази (3) наберуть вигляду

$$2d\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_2}\right) = \left(k_1 - k_2\right)\lambda = \lambda .$$

Звідси визначимо товщину плівки

$$d = \frac{\lambda}{2\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_2}\right)}.$$

Підставимо значення фізичних величин в одержане співвідношення:

$$d = \frac{6\cdot 10^{-7}}{2\left(\sqrt{1,5^2 - \sin^2 43,5^0} - \sqrt{1,5^2 - \sin^2 46,5^0}\right)} =$$
$$= 15\cdot 10^{-6}\left(м\right) = 15\left(мкм\right).$$

Цей спосіб визначення товщини плівки використовують на практиці. Однією з його переваг є те, що джерело світла може бути достатньо протяжним, обмеження накладаються лише на монохроматичність випромінювання.

Відповідь: $d = 15\,мкм$.

Задача 16.4

Дві когерентні плоскі світлові хвилі з довжиною λ падають на екран, як показано на рисунку 3. Амплітуди хвиль однакові, й кут між їх напрямками поширення становить $\phi << 1$. Знайти відстань між сусідніми максимумами на екрані.

Розв’язування

$\Delta X - ?$
λ, $\phi << 1$.

На рисунку 3 зазначені джерела хвиль S і S', відстань між якими дорівнює d. Хвилі інтерферують у точці А екрана, поширюючись у повітрі (показник заломлення $n = 1$). Відпо-

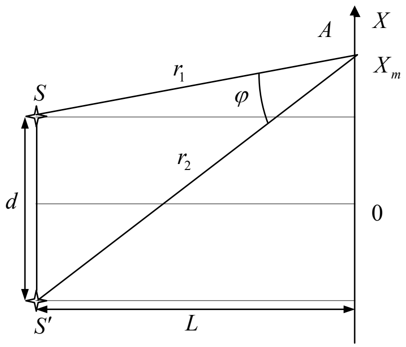


Рисунок 3

відно координата m-го інтерференційного максимуму дорівнює X_m. З рисунка 3 простежуємо, що оптичні довжини шляху хвиль від двох джерел у точці А дорівнюють

$$r_2^2 = L^2 + \left(X_m + \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$r_1^2 = L^2 + \left(X_m - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Звідси знайдемо, що

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) =$$

$$= L^2 + \left(X_m + \frac{d}{2}\right)^2 - L^2 - \left(X_m + \frac{d}{2}\right)^2 = 2X_m d.$$

Ураховуючи, що оптична різниця ходу променів дорівнює

$$\Delta = r_2 - r_1,$$

одержуємо

$$\Delta\,(r_2 + r_1) = 2X_m d.$$

Оскільки відстань L від джерел хвиль до екрана істотно більша за відстань між джерелами d, то можна вважати, що $r_1 + r_2 = 2L$. У результаті визначимо, що

$$\Delta\,(r_1 + r_2) = 2\Delta L = 2X_m d,$$

звідси одержимо

$$\Delta = \frac{2dX_m}{r_2 + r_1}.$$

У разі малих кутів $\phi \sim tg\varphi = \frac{d}{L}$, звідси

$$\Delta = \frac{X_m d}{L} \sim X_m \varphi .$$

Використовуючи умову спостереження інтерференційного максимуму $\Delta = m\lambda$, знайдемо координату m-го максимуму:

$$\Rightarrow m\lambda = X_m \varphi \;\; \Rightarrow \;\; X_m = \frac{m\lambda}{\varphi}. \qquad (2)$$

Відповідно відстань між сусідніми максимумами дорівнює

$$\Delta X = X_{m+1} - X_m = \frac{(m-1)\lambda}{\varphi} - \frac{m\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda}{\varphi}.$$

Відповідь: $\Delta X = X_{m+1} - X_m = \dfrac{\lambda}{\varphi}$.

Задача 16.5

Відстань між двома когерентними джерелами $d = 0,9\,мм$. Монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,64\,мкм$ від джерел потрапляє на екран, що міститься на відстані $L = 3,5\,м$ від них. Визначити кількість інтерференційних смуг на одиницю довжини екрана.

Розв'язування

$k/x - ?$

$d = 0,9\,мм = 9 \cdot 10^{-4}\,м,$

$\lambda = 0,64\,мкм = 6,4 \cdot 10^{-7}\,м,$

$L = 3,5\,м.$

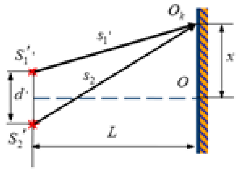


Рисунок 4

У точці O на екрані буде спостерігатися максимальна освітленість. Оскільки точка O рівновіддалена від джерел S_1' та S_2', то оптична різниця ходу хвиль $S_1'O$ і $S_2'O$ буде дорівнювати нулю. У довільній точці екрана O_k максимум освітленості буде спостерігатися за умови, якщо оптична різниця ходу променів дорівнює цілому числу довжин хвиль:

$$\Delta = s_2 - s_1 = k\lambda. \tag{1}$$

Різниця ходу променів у досліді Юнга дорівнює $\Delta = \dfrac{xd}{L}$.

Враховуючи вираз (1), одержуємо

$$\Delta = \frac{xd}{L} = k\lambda. \qquad (2).$$

З виразу (2) можна визначити кількість світлих інтерференційних смуг на одиницю довжини екрана:

$$\frac{k}{x} = \frac{d}{\lambda L}.$$

Підставимо в цей вираз числові значення та одержимо

$$\frac{k}{x} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{6,4 \cdot 10^{-7} \cdot 3,5} = 401(м^{-1}).$$

Відповідь: $k/x = 401\,м^{-1}$.

Задача 16.6

На скляний клин із малим кутом нормально до його грані падає паралельний пучок променів монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6$ мкм. Кількість m інтерференційних смуг, що в цьому разі виникає й припадає на відрізок клина довжиною $l = 1\,мм$, дорівнює $m = 10$. Знайти кут θ між гранями клина.

Розв’язування

$\theta - ?$
$\lambda = 0,6\,мкм = 6\cdot 10^{-7}\ м,$ $l = 1\,мм = 10^{-3}\ м,$ $m = 10,$ $n = 1,5.$

Темні смуги спостерігаються на тих ділянках клина, для яких різниця ходу променів кратна непарному числу половин довжини хвилі:

$$\Delta = \left(2k+1\right)\frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$

де (k = 0, ±1, ±2, ...).

Різниця ходу Δ двох хвиль складається з різниці оптичних довжин шляхів цих хвиль $\left(2dn\cos\gamma\right)$ і половини довжини хвилі ($\lambda/2$). Величина $\lambda/2$ є додатковою різницею ходу, що виникає під час відбивання світлової хвилі 1 (рис. 5) від оптично більш щільного середовища. Підставивши у формулу (1) різницю ходу Δ світлових хвиль, одержимо

$$\left(2d_k n\cos\gamma + \frac{\lambda}{2} = \left(2k+1\right)\frac{\lambda}{2}\right), \qquad (2)$$

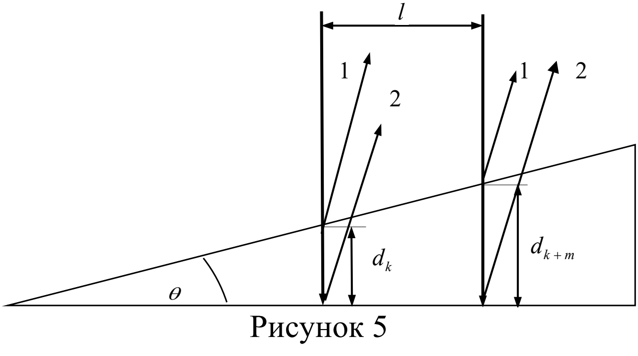


Рисунок 5

де n – показник заломлення скла ($n = 1{,}5$); d_k – товщина клина в тому місці, де спостерігається темна смуга, що відповідає номеру k; γ – кут заломлення світла.

Згідно з умовою задачі кут падіння дорівнює нулю, отже, й кут заломлення γ дорівнює нулю, а тому $\cos\gamma = 1$. Розкривши дужки в правій частині виразу (2), після спрощення одержимо

$$2d_k n = k\lambda . \tag{3}$$

Нехай довільній темній смузі k-го номера відповідає товщина d_k клина, а темній смузі $(k + m)$-го номера – товщина d_{k+m} клина. Тоді (рис. 5), враховуючи, що m смуг укладається на відстані l, знайдемо

$$tg\theta = \frac{\left(d_{k+m} - d_k\right)}{l} . \tag{4}$$

За малих кутів $tg\theta \approx \sin\theta \approx \theta$.

Виразимо з (3) d_k і d_{k+m}, підставимо їх у співвідношення (4) та одержимо

$$\theta = \frac{\left(k+m\right)\lambda - k\lambda}{2nl} = \frac{m\lambda}{2nl} .$$

Підставимо значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\theta = \frac{10 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3} \left(рад\right).$$

Виразимо кут θ у градусах. Для цього можна скористатися співвідношеннями між радіаном і градусом:

$$1\,рад = 57,3^0 .$$

Тоді $\theta = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 57,3^0 = 0,11^0$.

Відповідь: $2 \cdot 10^{-3}\ рад = 0,11^0$.

Задача 16.7

Між скляною пластинкою і плоско-опуклою лінзою, що лежить на ній, міститься рідина (рис. 6). Знайти показник заломлення рідини, якщо радіус r третього темного кільця Ньютона під час спостереження у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6\ мкм$ дорівнює $0{,}82\ мм$. Радіус кривини лінзи $R = 0{,}5\ м$.

Розв'язування

$n - ?$

$r = 0,82\,мм = 8,2 \cdot 10^{-4}\ м,$

$\lambda = 0,6\,мкм = 6 \cdot 10^{-7}\ м,$

$k = 3,$

$R = 0,5\,м.$

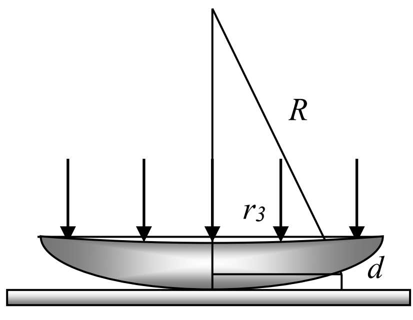


Рисунок 6

Схема установки спостереження кілець Ньютона зображена на рисунку 6. З рисунка зрозуміло, що

$$R^2 = (R-b)^2 + r^2 = R^2 - 2Rb + r^2, \qquad (1)$$

де R – радіус кривини лінзи; b – товщина зазору між лінзою та скляною пластинкою.

У виразі (1) ми знехтували величиною b^2 порівняно з $2Rb$. З цього співвідношення після простих перетворень одержимо

$$b = \frac{r^2}{2R}. \qquad (2)$$

Оптична різниця ходу двох променів, відбитих від верхньої й нижньої поверхонь зазору між пластиною й лінзою, дорівнює

$$\Delta = 2bn = 2\frac{r^2}{2R}n = \frac{r^2}{R}n, \qquad (3)$$

де n – коефіцієнт заломлення рідини в зазорі.

Щоб урахувати, що під час відбиття від пластинки виникає зміна фази світла на π, до правої частини виразу (3) додамо $\lambda/2$.

Умова спостереження інтерференційного мінімуму має вигляд

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (4)$$

де k – порядок інтерференційного мінімуму.

Прирівнявши вирази (3) і (4), визначимо

$$\frac{r^2}{R}n + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (5)$$

Після перетворень одержимо таке співвідношення:

$$\frac{r^2}{R}n = (2k+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}(2k+1-1) = k\lambda .$$

З цього виразу знайдемо n:

$$n = \frac{r^2}{k\lambda R} . \qquad (6)$$

У випадку третього кільця Ньютона $k = 3$.

Після підставлення числових значень фізичних величин у (6) одержимо

$$n = \frac{(0{,}82 \cdot 10^{-3})^2}{3 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5} = 1{,}34 .$$

Відповідь: $n = 1,34$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

16.1 Визначити довжину l відрізка, на якому укладається стільки ж довжин хвиль світла у вакуумі, скільки їх укладається на відрізку довжиною $l_1 = 3$ *мм* у воді.

Відповідь: $l = 4 \cdot 10^{-3}$ *м*.

16.2 Оптична різниця ходу двох інтерферувальних хвиль монохроматичного світла дорівнює $\Delta = 0,3\lambda$. Визначити різницю фаз цих хвиль $\Delta\varphi$.

Відповідь: $\Delta\varphi = 0,6\pi$.

16.3 Промінь світла падає під кутом $\alpha = 30°$ на плоскопаралельну пластину з показником заломлення $n = 1,5$ і виходить паралельно променю, що падає, змістившись на $\Delta x = 1,95$ *см*. Знайти товщину пластини.

Відповідь: $d = 2,75$ *см*.

16.4 На плоскопаралельну скляну пластину товщиною $d = 1$ *см* падає промінь світла під кутом $\alpha = 60°$. Частина світла відбивається від верхньої, а частина – від нижньої граней. Знайти відстань між сусідніми променями, відбитими від пластини.

Відповідь: $\Delta x = 7,06$ мм.

16.5 На шляху монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ *мкм* поміщена плоскопаралельна скляна пластинка товщиною $d = 0,1$ *мм*. Світло падає на неї нормально. На який кут потрібно повернути пластину, щоб оптична довжина шляху змінилася на половину довжини хвилі?

Відповідь: $\alpha = 5°27'$.

16.6 Промінь світла падає на плоскопаралельну скляну пластину товщиною $d = 6$ *см* під кутом $\alpha = 60°$ до нормалі. Знайти величину зміщення променя, що пройшов через цю пластину.

Відповідь: $\Delta x = 3,08$ *см*.

16.7 Людина з човна розглядає предмет, який лежить на дні водойми. Глибина водойми скрізь однакова й дорівнює $H = 3\,м$. Як уявна глибина водойми h залежить від кута θ, що утворює промінь зору з нормаллю до поверхні води? Чому вона дорівнює за $\theta = 30^0$?

Відповідь: $h = \dfrac{Hn^2 \cos^3\theta}{\left(n^2 - \sin^2\theta\right)^{3/2}}$, $h = 1,84\,м$.

16.8 Визначити граничні кути повного внутрішнього відбивання світла для поверхонь поділу:

а) скло – повітря; б) вода – повітря; в) скло – вода.

Показник заломлення скла дорівнює $n = 1,52$.

Відповідь: а) $\alpha_{гр} = 41^0 8'$; б) $\alpha_{гр} = 48^0 45'$; в) $\alpha_{гр} = 61^0 10'$.

16.9 Під час падіння білого світла під кутом $\alpha = 45^0$ на скляну пластинку кути заломлення для променів різних довжин хвиль виявилися такими:

$\lambda, нм$	759	687	589	486	397
γ	$24^0 2'$	$23^0 57'$	$23^0 47'$	$23^0 27'$	$22^0 57'$

Побудувати графік залежності показника заломлення матеріалу пластинки від довжини хвилі.

16.10 Показники заломлення деякого сорту скла для червоного та фіолетового променів дорівнюють відповідно $n_Ч = 1,51$ та $n_Ф = 1,53$. Знайти граничні кути повного внутрішнього відбивання в разі падіння цих променів на межу поділу скло – повітря.

Відповідь: $\varphi_Ч = 41^0 28'$; $\varphi_Ф = 40^0 49'$.

16.11 На дно посудини, наповненої водою до висоти $h = 10\,см$, поміщене точкове джерело світла. На поверхні води плаває кругла непрозора пластинка так, що її центр міститься над джерелом світла. Який найменший радіус повинен бути в цій пластинці, щоб жодний промінь не зміг вийти через поверхню води?

Відповідь: $r = 0,114\,м$.

16.12 У посудині з водою на глибині $h = 25\ см$ міститься точкове джерело світла. Над ним плаває непрозоре коло. За якого найменшого діаметра кола світло не вийде з води?

Відповідь: $d = 0,285\ м$.

16.13 Довге тонке волокно, виконане з прозорого матеріалу з показником заломлення $n = 1,35$, утворює світловод. Визначити максимальний кут α до осі світловода, під яким світловий промінь ще може падати на торець, щоб пройти світловод із мінімальним послабленням.

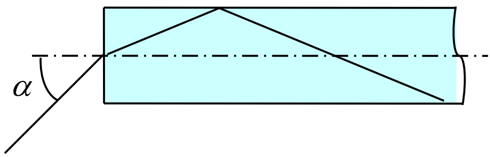


Рисунок 7 – До задачі 16.13

Відповідь: $\alpha = \arcsin\sqrt{n^2 - 1} = 65^0$.

16.14 Монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 500\,нм$ падає на мильну плівку $(n = 1,33)$, товщина якої дорівнює $d = 0,1\,мкм$. Плівка міститься в повітрі. Визначити найменший кут падіння, за якого плівка в прохідному світлі здається темною.

Відповідь: $\alpha = 21^0$.

16.15 На мильну плівку, що міститься в повітрі, падає нормально пучок променів білого світла. За якої найменшої товщини плівки d відбите світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,55\ мкм$ виявиться максимально посиленим у результаті інтерференції? Показник заломлення плівки $n = 1,3$.

Відповідь: $d = 0,1\ мкм$.

16.16 Взимку на склі тролейбусів та автобусів утворюються тонкі плівки полою, які забарвлюють усе, що через них спостерігається, в зеленуватий колір $(\lambda = 530\,нм)$. Оцінити найменшу товщину цих плівок (показник заломлення полою дорівнює $n = 1,33$.

Відповідь: $d = 99,6\,нм$.

16.17 На плоскопаралельну плівку, показник заломлення якої дорівнює $n = 1,33$, під кутом $\alpha = 45^0$ падає паралельний пучок білого світла. За якої найменшої товщини плівки d відбите світло набере максимально жовтого кольору (λ = 0,6 *мкм*)?

Відповідь: d = 0,133 *мкм*.

16.18 На поверхні скла міститься плівка води. На неї під кутом $\alpha = 30°$ до нормалі падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,68\,мкм$. Визначити швидкість, із якою внаслідок випаровування зменшується товщина плівки, якщо за час $t = 15\,хв$ інтерференційна картина зміщується на одну смугу.

Відповідь: $\text{v} = 0,3\,нм/с$.

16.19 На тонкий скляний клин (n = 1,55) падає нормально монохроматичне світло. Кут θ між поверхнями клина дорівнює $2'$. Визначити довжину світлової хвилі λ за умови, що відстань між сусідніми інтерференційними максимумами у відбитому світлі дорівнює $\Delta x = 0,3\,мм$.

Відповідь: λ = 543 *нм*.

16.20 Між краями двох добре відшліфованих плоских пластинок поміщений тонкий дріт діаметром $d = 0,05\,мм$, протилежні кінці пластинок щільно притиснуті одна до одної. Світло падає перпендикулярно до поверхні пластинки. На пластинці довжиною $l = 10\,см$ спостерігаються інтерференційні смуги, відстань між якими $\Delta x = 0,6\,мм$. Визначити довжину хвилі світла.

Відповідь: λ = 0,6 *мкм*.

16.21 На екрані спостерігається інтерференційна картина внаслідок накладання променів від двох когерентних джерел ($\lambda = 500\,нм$). На шляху одного з променів перпендикулярно до нього помістили скляну пластинку ($n = 1,6$) товщиною $d = 5\,мкм$. Визначити, на скільки смуг зміститься в цьому разі інтерференційна картина.

Відповідь: $m = 6$.

16.22 У досліді Юнга визначити відстань між третім і п'ятим мінімумами на екрані, якщо відстань двох когерентних джерел $(\lambda = 600\,нм)$ від екрана $L = 1\,м$, відстань між джерелами $d = 0,2\,мм$.

Відповідь: $\Delta x_{53} = 6\,мм.s$

16.23 У досліді Юнга (інтерференція від двох точкових джерел) скляна пластинка товщиною 2 *см* міститься на шляху одного з інтерферувальних променів перпендикулярно до цього променя. На скільки можуть відрізнятися один від одного значення показника заломлення в різних місцях пластинки, щоб зміна різниці ходу від цієї неоднорідності не перевищувала 1 *мкм*?

Відповідь: $\Delta n = 5 \cdot 10^{-5}$.

16.24 Відстань між двома когерентними джерелами світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,5\,мкм$ дорівнює $d = 0,1\,мм$. Відстань між інтерференційними смугами в середній частині екрана дорівнює $\Delta x = 1\,см$. Знайти відстань від джерел до екрана.

Відповідь: $L = 2\,м$.

16.25 На екрані спостерігається інтерференційна картина від двох когерентних джерел світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,48\,мкм$. Коли на шляху одного пучка помістили тонку пластину плавленого кварцу, інтерференційна картина змістилася на $N = 69$ смуг. Знайти товщину кварцової пластини.

Відповідь: $d = 72\,мкм$.

16.26 Плоско-опукла лінза своїм опуклим боком лежить на скляній пластині. Визначити товщину повітря-ного клина там, де у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6$ *мкм* спостерігається перше світле кільце Ньютона.

Відповідь: $d = 0{,}15$ *мкм*.

16.27 Плоско-опукла лінза опуклим боком лежить на скляній пластині. Визначити товщину d шару повітря там, де у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6$ *мкм* спостерігається перше світле кільце Ньютона.

Відповідь: $d = 0{,}15$ *мкм*.

16.28 На скляну пластинку покладена опуклим боком плоско-опукла лінза. Радіус 5-го світлого кільця Ньютона у відбитому світлі дорівнює $r_5 = 5$ *мм*. Знайти радіус 3-го світлого кільця.

Відповідь: $r_3 = 3{,}73$ *мм*.

16.29 Установка для спостереження кілець Ньютона у відбитому світлі освітлюється монохроматичним світлом, що падає нормально. Після того як простір між лінзою й скляною пластиною заповнили рідиною, радіуси темних кілець зменшилися в 1,12 раза. Знайти показник заломлення рідини.

Відповідь: $n = 1{,}56$.

16.30 Між скляною пластинкою та плоско-опуклою лінзою, що лежить на ній, налито рідину, показник заломлення якої менший за показник заломлення скла. Радіус восьмого темного кільця Ньютона під час спостереження у відбитому світлі $(\lambda = 700\,нм)$ дорівнює $r_8 = 2\,мм$. Радіус кривини лінзи $R = 1\,м$. Знайти показник заломлення рідини.

Відповідь: $n = 1{,}4$.

17 ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

17.1 Радіуси зон Френеля для сферичної хвилі

$$r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} k\lambda} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

де k – номер зони; α – відстань від джерела до фронту хвилі; b – відстань від фронту хвилі до центра екрана; λ – довжина хвилі.

17.2 Радіуси зон Френеля для плоскої хвилі

$$r_k = \sqrt{kb\lambda} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

17.3 Умова спостереження дифракційних мінімумів за дифракції на одній щілині

$$b \sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

де k – номер мінімуму; φ – кут дифракції (рис. 1); b – ширина щілини.

17.4 Умова спостереження дифракційних максимумів за дифракції на одній щілині

$$b \sin\varphi = \pm\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

17.5 Умова спостереження головних дифракційних максимумів за дифракції на ґратці

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda \ \ (k = 0, 1, 2, 3, ...),$$

де d – період дифракційної ґратки; k – порядок максимуму.

17.6 Умова спостереження головних дифракційних мінімумів за дифракції на ґратці

$$b\sin\varphi = \pm k\lambda\ ,$$

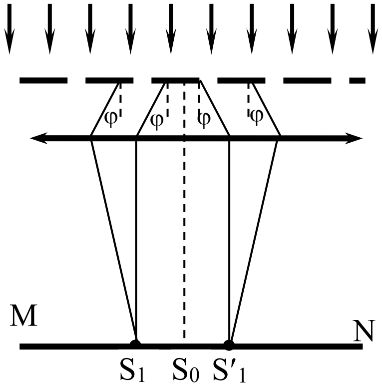


Рисунок 1

де b – ширина прозорої щілини; $k = 1, 2, 3, ...$ – порядок (номер) мінімумів.

17.7 Умова спостереження додаткових мінімумів за дифракції на ґратці

$$d\sin\varphi = \pm\frac{k'}{N} \ \ (k' = 1, 2, 3, ..., \text{крім } 0, N, 2N, 3N, ...),$$

де N – кількість щілин решітки.

17.8 Роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN\ ,$$

де $\Delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвиль двох сусідніх спектральних ліній, за якої ці лінії в спектрі можуть спостерігатися роздільно; λ – довжина хвилі, поблизу якої проводять вимірювання.

17.9 Кутова дисперсія дифракційної ґратки

$$D_{\phi} = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{k}{d\cos\varphi},$$

де $\delta\varphi$ – кутова відстань між двома спектральними лініями з різницею довжин хвиль $\delta\lambda$; φ – кут дифракції; $k = 1, 2, 3, ...$ – порядок дифракційних максимумів (мінімумів).

17.10 Лінійна дисперсія дифракційної ґратки

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda},$$

де δl – лінійна відстань між двома спектральними лініями з різницею довжин хвиль $\delta\lambda$.

17.11 Формула Вульфа – Брегга для дифракції рентгенівських променів

$$2d\sin\theta = k\lambda,$$

де θ – кут ковзання; d – відстань між атомними площинами, $k = 1, 2, 3, ...$ – порядок дифракційних максимумів.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 17.1

Плоска світлова хвиля з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5$ *мкм* падає нормально на діафрагму з круглим отвором діаметром $d = 1$ *мм*. На якій відстані b від отвору міститься точка спостереження, якщо отвір відкриває одну зону Френеля?

Розв'язування

$b - ?$
$\lambda = 0{,}5\,мкм = 5\cdot 10^{-7}\,м,$
$d = 1мм = 10^{-3}\,м,$
$k = 1.$

Радіус r_k зони Френеля з номером k для плоскої хвилі дорівнює

$$r_k = \sqrt{bk\lambda}\,.$$

Звідси одержимо вираз для відстані

$$b = \frac{d^2}{4k\lambda}\,.$$

Підставимо значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо обчислення:

$$b = \frac{\left(10^{-3}\right)^2}{4\cdot 1\cdot 5\cdot 10^{-7}} = \frac{10^{-6}}{20\cdot 10^{-7}} = 0{,}5\left(м\right).$$

Відповідь: $b = 0{,}5\,м$.

Задача 17.2

Плоска монохроматична світлова хвиля з інтенсивністю I_0 падає нормально на непрозорий екран із круглим отвором. Яка інтенсивність світла I спостерігається за екраном у точці, для якої радіус отвору дорівнює радіусу першої зони Френеля?

Розв'язування

I – ?
I_0.

Амплітуда A_k коливань у точці P, розміщеній на прямій, що проходить через центр отвору та джерело, буде визначатися через амплітуди a_k коливань, що надходять до точки P від окремих зон Френеля. Оскільки фази коливань, що надходять до точки P від двох сусідніх зон, відрізняються на π, то амплітуда сумарного коливання A_k, спричиненого дією k зон, дорівнює

$$A_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - .... \pm a_k. \qquad (1)$$

Останній член виразу має додатний знак, якщо $k = 2m + 1$, і від'ємний, якщо $k = 2m$. Можна вважати, що амплітуда коливань, спричинених k-ю зоною, наближено дорівнює півсумі амплітуд коливань, спричинених $(k - 1)$-ю і $(k + 1)$-ю зонами:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Тоді, групуючи доданки в співвідношенні (1), можна одержати таку наближену формулу для обчислення результуючого коливання в точці P:

$$A_k = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_k}{2},$$

де знаки «плюс» і «мінус» відповідають непарному та парному числам зон відповідно. Таким чином, амплітуда сумарного коливання у точці *P* залежить від числа відкритих зон *k*. Внесок окремих зон зменшується зі збільшенням *k*. За повністю відкритого отвору (за відсутності діафрагми) $k = \infty$. Дія останньої зони є нескінченно малою, й $A_\infty = \frac{1}{2}a_1$. За умовою задачі точка *P* розміщена так, що $k = 1$. У цьому разі

$$A_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} = a_1 .$$

Тоді відношення амплітуд коливань у точці *P* дорівнює

$$\frac{A_1}{A_\infty} = \frac{a_1}{\frac{1}{2}a_1} = 2 .$$

Врахуємо ту обставину, що інтенсивність коливань пропорційна квадрату амплітуди, тобто

$$I \sim A^2 ,$$

тоді

$$\frac{A_1}{A_\infty} = \frac{I^2}{I_0^2} = 2 \ \Rightarrow \ \frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{A_1}{A_\infty}} ,$$

звідси

$$I = I_0\sqrt{\frac{A_1}{A_\infty}} = I_0\sqrt{2} .$$

Відповідь: $I = I_0\sqrt{2}$.

Задача 17.3

На щілину шириною $b = 0{,}1$ *мм* падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5$ *мкм*. За щілиною міститься збиральна лінза, у фокальній площині якої розміщений екран. Що буде спостерігатися на екрані, якщо кут ϕ дифракції дорівнює: а) $\varphi_1 = 17'$; б) $\varphi_2 = 43'$?

Розв'язування

$k - ?$

$\lambda = 0{,}5\,мкм = 5\cdot 10^{-7}\ м,$

$b = 0{,}1\,мм = 10^{-4}\ м,$

$\varphi_1 = 17',$

$\varphi_2 = 43'.$

За дифракції плоских хвиль на щілині (дифракції Фраунгофера) мінімуми інтенсивності світла спостерігаються в напрямках ϕ, обумовлених умовою

$$b\sin\phi = \pm k\lambda,$$

де k – номер інтерференційного мінімуму; b – ширина щілини.

Максимуми інтенсивності спостерігаються, якщо в отворі укладається непарне число зон Френеля. У цьому разі напрямки ϕ визначають таким співвідношенням:

$$b\sin\phi = \pm(2k+1)\lambda/2.$$

Для малих кутів

$$\sin\phi \approx \phi.$$

У цьому разі одержуємо таку умову спостереження мінімумів інтенсивності:

$$\phi = \pm k\lambda/b.$$

Максимуми інтенсивності будуть спостерігатися під кутами

$$\phi = \pm (2k+1)\lambda/2b.$$

Підставляючи числові значення фізичних величин, знаходимо, що мінімуми та максимуми дифракції будуть спостерігатися під такими кутами:

$k_{\min} = 1$,	$k_{\min} = 2$,	$k_{\max} = 1$,	$k_{\max} = 2$,
$\varphi_1 = 17,2'$,	$\varphi_2 = 37,4'$,	$\varphi_1 = 25,8'$,	$\varphi_2 = 43'$.

Порівнюючи одержані значення з наведеними в умові задачі, простежуємо, що під кутом $\varphi_1 = 17,2'$ буде спостерігатися перший мінімум інтенсивності, а під кутом $\varphi_2 = 43'$ – другий максимум інтенсивності.

Відповідь: під кутом $\varphi_1 = 17,2'$ буде спостерігатися перший мінімум інтенсивності $k_{\min} = 1$, а під кутом $\varphi_2 = 43'$ – другий максимум інтенсивності світла $k_{\max} = 2$.

Задача 17.4

На дифракційну ґратку нормально до її поверхні падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,5\,мкм.$ Розміщена поблизу ґратки лінза проєктує дифракційну картину на плоский екран, віддалений від лінзи на відстань $L = 1\,м.$ Відстань між двома максимумами інтенсивності першого порядку, що спостерігаються на екрані, дорівнює $l = 20,2\,см.$ Визначити: а) сталу d дифракційної ґратки; б) кількість штрихів n на один сантиметр; в) кількість максимумів N, одержаних у цьому разі; г) максимальний кут відхилення $\varphi_{\max}$ променів, що відповідає останньому дифракційному максимуму.

Розв'язування

$d - ?\;\; n - ?\;\; N - ?\;\; \varphi_{\max} - ?$

$\lambda = \lambda = 0,5\,мкм = 5 \cdot 10^{-7}\,м,$

$L = 1\,м,$

$l = 20,2\,см = 0,202\,м,$

$h = 1\,см = 10^{-2}\,м,$

$k = 1.$

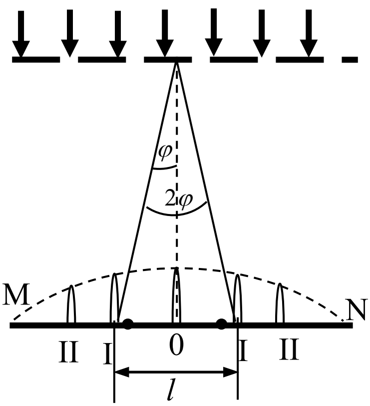


Рисунок 2

1 Стала дифракційної ґратки, довжина хвилі та кут відхилення променів, що відповідає k-му максимуму, пов'язані співвідношенням

$$d \sin \phi = \pm k\lambda \,, \tag{1}$$

де d – період дифракційної ґратки; k – порядок максимуму.

У нашому випадку $k = 1$. Оскільки $\dfrac{l}{2} \ll L$, то $tg\varphi = \sin\varphi$. З рисунка 2 простежуємо, що

$$tg\varphi = \frac{l/2}{L}.$$

З урахуванням трьох останніх співвідношень вираз (1) набере вигляду

$$d\frac{l}{2L} = \lambda, \qquad (2)$$

звідси знайдемо сталу ґратки

$$d = \frac{2L\lambda}{l}.$$

Підставляючи числові значення фізичних величин, обчислюємо

$$d = \frac{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{0,202} = 4,95 \cdot 10^{-6}\left(м\right).$$

2 Кількість штрихів на $1\,см$ визначимо з виразу

$$n = \frac{h}{d}.$$

Розрахунок дає

$$n = \frac{10^{-2}}{4,95 \cdot 10^{-6}} = 2,02 \cdot 10^{3}.$$

3 Для визначення кількості максимумів, які дає дифракційна ґратка, спочатку підрахуємо максимальне зна-

чення $k_{\max}$, зважаючи на те, що максимальний кут відхилення променів ґраткою не може перевищувати 90^0.

З формули (1) знайдемо

$$k_{\max} = d \sin\varphi / \lambda . \qquad (3)$$

Підставляючи числові значення фізичних величин, обчислюємо

$$k_{\max} = 4,95 \cdot 10^{-6} / 5 \cdot 10^{-7} = 9,9 .$$

Число k обов'язково повинне бути цілим. У той самий час воно не може набути значення, що дорівнює 10, оскільки в цьому значенні $\sin\varphi$ повинне бути більшим за одиницю, що неможливо. Таким чином,

$$k_{\max} = 9 .$$

Визначимо загальну кількість максимумів дифракційної картини, отриманих за допомогою дифракційної ґратки. Ліворуч та праворуч від центрального максимуму буде спостерігатися однакова кількість максимумів, що дорівнює $k_{\max}$, тобто разом $2k_{\max}$. Якщо врахувати центральний нульовий максимум, то одержимо загальну кількість максимумів

$$N = 2k_{\max} + 1 .$$

Підставимо значення $k_{\max}$ та обчислимо

$$N = 2 \cdot 9 + 1 = 19 .$$

4 Для визначення максимального кута відхилення променів, що відповідає останньому дифракційному максимуму, знайдемо зі співвідношення (3) синус цього кута:

$$\sin\varphi_{\max} = k_{\max}\lambda/d\ .$$

Звідси

$$\varphi_{\max} = \arcsin\left(k_{\max}\lambda/d\right).$$

Підставляючи числові значення фізичних величин, обчислюємо

$$\varphi_{\max} = \arcsin\left(9\cdot 5\cdot 10^{-7}/4{,}95\cdot 10^{-6}\right) = 65{,}4^{0}\ .$$

Відповідь: а) $d = 4{,}95\cdot 10^{-6}\ м$; б) $n = 2{,}02\cdot 10^{3}$;
в) $N = 2\cdot 9 + 1 = 19$; г) $\varphi_{\max} = 65{,}4^{0}$.

Задача 17.5

Яку найменшу роздільну здатність R повинна мати дифракційна ґратка, щоб з її допомогою можна було розрізнити дві спектральні лінії калію ($\lambda_1 = 578$ *нм* і $\lambda_2 = 580$ *нм*)? Яку найменшу кількість N штрихів потрібно нанести на ґратку, щоб ці спектральні лінії було можливим розрізнити у спектрі другого порядку?

Розв’язування

$R - ?\quad N - ?$
$\lambda_1 = 578\,нм = 5{,}78 \cdot 10^{-7}\ м,$
$\lambda_2 = 580\,нм = 5{,}8 \cdot 10^{-7}\ м,$
$k = 2.$

Роздільною силою спектрального приладу називають величину

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \tag{1}$$

де λ – довжина хвилі; $\Delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвиль двох спектральних ліній, за якої вони можуть бути розділені (спостерігатися в спектрі окремо) за допомогою цього приладу.

Для дифракційної ґратки

$$R = kN, \tag{2}$$

де k – номер дифракційного максимуму; N – кількість штрихів ґратки. Тоді можна записати

$$N = \frac{R}{k}. \tag{3}$$

Підставимо числові значення фізичних величин у вирази (1) і (3) та одержимо

$$R = \frac{5{,}8 \cdot 10^{-7}}{5{,}80 \cdot 10^{-7} - 5{,}78 \cdot 10^{-7}} = \frac{5{,}8}{0{,}02} = 290,$$

$$N = \frac{290}{2} = 145.$$

Відповідь: $R = 290$; $N = 145$.

Задача 17.6

Визначити відстань між атомними площинами в кристалі кам'яної солі, якщо дифракційний максимум першого порядку спостерігається під час падіння рентгенівських променів із довжиною хвилі $\lambda = 0,147\,нм$ під кутом $\theta = 15^0 12'$ до поверхні кристала.

Розв'язування

$d - ?$

$\lambda = 0,147\,нм = 1,47 \cdot 10^{-10}\,м,$

$\theta = 15^0 12' = 15,20^0,$

$k = 1.$

Дифракція рентгенівських променів на кристалах – це результат інтерференції рентгенівського випромінювання, яке дзеркально відбивається від системи паралельних площин, що проходять через вузли – атоми (наприклад, A (рис. 3)) кристалічної ґратки. Ці площини називають атомними. Відбивання спостерігається лише в напрямках, що відповідають дифракційним максимумам, які задовольняє співвідношення

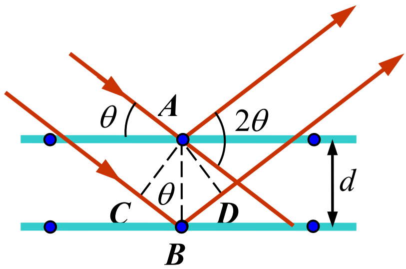


Рисунок 3

$$\Delta = |BC| + |BD| = 2d\sin\theta \quad \text{та} \quad 2d\sin\theta = k\lambda, \qquad (1)$$

де $k = 1, 2, 3, \ldots$ – порядок дифракційного максимуму; θ – кут ковзання, тобто кут між променем, що падає, та площиною кристала; d – відстань між сусідніми площинами.

Із співвідношення (1)

$$d = \frac{k\lambda}{2\sin\theta}.$$

Підставимо числові дані та проведемо розрахунки:

$$d = \frac{1 \cdot 1,47 \cdot 10^{-10}}{2\sin 15,20^0} = 2,8 \cdot 10^{-10}\left(м\right) = 0,28\,нм.$$

Відповідь: $d = 0,28\,нм.$

Задача 17.7

Нормально до поверхні дифракційної ґратки падає промінь світла. За ґраткою знаходиться збиральна лінза, у фокальній площині якої міститься екран. Оптична сила лінзи дорівнює $\Phi = 1\,дптр$. Визначити сталу дифракційної ґратки за умови, що за малих кутів дифракції лінійна дисперсія $D_l = 1\,мм/нм$.

Розв'язування

$d - ?$
$D_l = 1\,мм/нм = 10^6,$
$\Phi = 1\,дптр.$

Лінійна дисперсія приладу дорівнює

$$D_l = FD_f\,,$$

де F – фокусна відстань лінзи, яка збирає на екрані світло, що дифрагувало на ґратці; $D_f = df/dl$ – кутова дисперсія. Для дифракційної ґратки

$$D_l = \frac{k}{d\cos\varphi},$$

де k – порядок спектра; d – стала ґратки.

Для малих кутів дифракції

$$D_l = \frac{F\,k}{d}.$$

Оскільки фокусна відстань лінзи дорівнює $F = 1/\Phi$, де Φ – оптична сила лінзи, то одержимо

$$D_l = \frac{k}{\Phi\,d},$$

звідси стала ґратки дорівнює

$$d = \frac{k}{\Phi D_l}.$$

Підставимо числові дані для $k = 1$ та визначимо, що

$$d = \frac{1}{1\cdot 10^6} = 10^{-6}\,(м).$$

Відповідь: $d = 10^{-6}$ *м*.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

17.1 Плоска світлова хвиля з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5$ *мкм* падає нормально на діафрагму з круглим отвором діаметром $d = 1$ *мм*. На якій відстані b від отвору міститься точка спостереження, якщо отвір відкриває одну зону Френеля?

Відповідь: $b = 0{,}5$ *м*.

17.2 Між точковим джерелом світла та екраном помістили діафрагму з круглим отвором, радіус якого r можна змінювати. Відстані від діафрагми до джерела та екрана дорівнюють $a = 100$ *см* і $b = 125$ *см* відповідно. Визначити довжину хвилі світла, якщо максимум освітленості в центрі дифракційної картини на екрані спостерігається за $r_1 = 1$ *мм* і наступний максимум – за $r_2 = 1{,}29$ *мм*.

Відповідь: $\lambda = 0{,}6$ *мкм*.

17.3 Знайти радіуси r_k перших п’яти зон Френеля для плоскої хвилі, якщо відстань від хвильової поверхні до точки спостереження $b = 1$ *м*. Довжина хвилі світла $\lambda = 500$ *нм*.

Відповідь: $r_1 = 0{,}71$ *мм*; $r_2 = 1{,}0$ *мм*; $r_3 = 1{,}22$ *мм*; $r_4 = 1{,}41$ *мм*; $r_5 = 1{,}58$ *мм*.

17.4 Плоска монохроматична світлова хвиля з інтенсивністю I_0 падає нормально на непрозорий екран із круглим отвором. Яка інтенсивність світла I спостерігається за екраном у точці, для якої радіус отвору дорівнює радіусу першої зони Френеля?

Відповідь: $I = I_0\sqrt{2}$.

17.5 Визначити радіус п’ятої зони Френеля для плоского хвильового фронту з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5$ *мкм*, якщо точка спостереження міститься на відстані $l = 1$ *м* від фронту хвилі.

Відповідь: $r_5 = 1{,}58$ *мм*.

17.6 На діафрагму з круглим отвором діаметром $d = 4\ мм$ падає нормально паралельний пучок променів монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5\ мкм$. Точка спостереження міститься на відстані $l = 1\ м$. Скільки зон Френеля укладається в отворі?

Відповідь: $k = 8$.

17.7 На щілину падає нормально паралельний пучок променів із довжиною λ. Ширина щілини дорівнює $b = 6\lambda$. Під яким кутом буде спостерігатися третій дифракційний мінімум світла?

Відповідь: $\varphi = 30^0$.

17.8 Плоска світлова хвиля довжиною $\lambda = 0{,}7\ мкм$ падає нормально на діафрагму з круглим отвором радіусом $r = 1{,}4\ мм$. Визначити відстані від діафрагми до трьох найбільш віддалених від неї точок, у яких спостерігається мінімум інтенсивності.

Відповідь: $l_1 = 1{,}4\ м$; $l_2 = 0{,}7\ м$; $l_3 = 0{,}47\ м$.

17.9 Світло від монохроматичного джерела з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6\ мкм$ падає нормально на діафрагму з круглим отвором. Діаметр отвору $D = 6\ мм$. За діафрагмою на відстані $L = 3\ м$ від неї розміщений екран. 1 Скільки зон Френеля укладається в отворі діафрагми? 2 Яким буде центр дифракційної картини: темним чи світлим?

Відповідь: 1 $k = 5$. 2 У центрі дифракційної картини буде світла пляма.

17.10 На щілину шириною $a = 0{,}05\ мм$ падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0{,}5\ мкм$). Визначити кут φ між початковим напрямком пучка світла та напрямком на четверту темну дифракційну смугу.

Відповідь: $\varphi = 2^0 45'$.

17.11 На щілину шириною $d = 0{,}021\ мм$ падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі

$\lambda = 0{,}63$ *мкм*. Скільки дифракційних мінімумів можна спостерігати на екрані за цією щілиною?

Відповідь: $k = 33$.

17.12 На щілину шириною $b = 0{,}1$ *мм* падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5$ *мкм*. За щілиною розміщена збиральна лінза, у фокальній площині якої міститься екран. Що буде спостерігатися на екрані, якщо кут ϕ дифракції дорівнює: а) $\varphi_1 = 17'$; б) $\varphi_2 = 43'$?

Відповідь: під кутом $\varphi_1 = 17{,}2'$ буде спостерігатися перший мінімум інтенсивності $k_{\min} = 1$, а під кутом $\varphi_2 = 43'$ – другий максимум інтенсивності світла $k_{\max} = 2$.

17.13 Дифракційна ґратка освітлена нормально монохроматичним світлом, що падає. Максимум другого порядку спостерігається під кутом $\phi_2 = 14°$. Під яким кутом спостерігається максимум третього порядку?

Відповідь: $\phi_3 = 21°17'$.

17.14 Дифракційна ґратка містить $N = 200$ штрихів на один міліметр. На неї нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6$ *мкм*. Максимум якого найбільшого порядку дає ця ґратка?

Відповідь: $k = 8$.

17.15 На дифракційну ґратку нормально до її поверхні падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5$ *мкм*. Розміщена поблизу ґратки лінза проєктує дифракційну картину на плоский екран, віддалений від лінзи на відстань $L = 1$ *м*. Відстань між двома максимумами інтенсивності першого порядку, що спостерігаються на екрані, дорівнює $l = 20{,}2$ *см*. Визначити: а) сталу d дифракційної ґратки; б) кількість штрихів n на один сантиметр; в) кількість максимумів N, одержаних у цьому разі;

г) максимальний кут відхилення $\varphi_{\max}$ променів, що відповідає останньому дифракційному максимуму.

Відповідь: а) $d = 4,95 \cdot 10^{-6}\, м$; б) $n = 2,02 \cdot 10^{3}$;

в) $N = 2 \cdot 9 + 1 = 19$; г) $\varphi_{\max} = 65,4^{0}$.

17.16 Під час освітлення дифракційної ґратки білим світлом спектри другого та третього порядків частково перекриваються. На яку довжину хвилі в спектрі другого порядку накладається фіолетова лінія з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,4\, мкм$ в спектрі третього порядку?

Відповідь: $\lambda_2 = 0,6\, мкм$.

17.17 Інфрачервоне випромінювання лазера на вуглекислому газі з довжиною хвилі $\lambda = 10,6\, мкм$ падає нормально на систему паралельних щілин шириною $50\, мкм$. Відстань між щілинами також дорівнює $50\, мкм$. Який максимальний номер $k_{\max}$ дифракційного максимуму може спостерігатися в цьому разі?

Відповідь: $k_{\max} = 9$.

17.18 На дифракційну ґратку нормально падає пучок світла. Червона лінія ($\lambda_1 = 630\, нм$) спостерігається в спектрі третього порядку під кутом $\phi = 60^{0}$. Яка спектральна лінія λ_2 спостерігається під таким самим кутом у спектрі четвертого порядку? Яку кількість штрихів n на одиницю довжини має дифракційна ґратка?

Відповідь: $\lambda_2 = 475\, нм$, $n = 460\, штр/мм$.

17.19 На дифракційну ґратку нормально падає пучок променів від газорозрядної трубки. Якому значенню повинна дорівнювати стала дифракційної ґратки d, щоб у напрямку $\varphi = 41^{0}$ збігалися максимуми двох ліній: $\lambda_1 = 656,3\, нм$ та $\lambda_2 = 410,2\, нм$?

Відповідь: $d = 5\, мкм$.

17.20 На дифракційну ґратку нормально падає пучок монохроматичного світла. Максимум третього порядку спостерігається під кутом $\varphi_3 = 36^0 48'$ до нормалі. Знайти сталу ґратки, виражену в довжинах хвиль падаючого випромінювання. Скільки максимумів утворює така дифракційна ґратка?

Відповідь: $d = 5\lambda$; $N = 11$.

17.21 Кутова дисперсія дифракційної ґратки за малих кутів дифракції становить $D_\phi = 5$ *хв/нм*. Визначити роздільну здатність ґратки, якщо її довжина дорівнює $d = 2$ *см*.

Відповідь: $R = 29\ 000$.

17.22 На дифракційну ґратку, що містить $N = 500$ штрихів на один міліметр, нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 700$ *нм*. За ґраткою розміщена збиральна лінза з фокусною відстанню $f = 50$ *см*, у фокальній площині якої міститься екран. На екрані спостерігається спектр другого порядку. Визначити лінійну дисперсію цієї системи в міліметрах на нанометр.

Відповідь: $D_l = 0{,}7$ *мм/нм*.

17.23 Нормально до поверхні дифракційної ґратки падає промінь світла. За ґраткою знаходиться збиральна лінза, у фокальній площині якої міститься екран. Оптична сила лінзи дорівнює $\Phi = 1$*дптр*. Визначити сталу дифракційної ґратки за умови, що за малих кутів дифракції лінійна дисперсія $D_l = 1\,мм/нм$.

Відповідь: $d = 10^{-6}$ *м*.

17.24 На дифракційну ґратку нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 650$ *нм*. За ґраткою розміщена збиральна лінза з екраном у фокальній площині. На екрані під кутом $\phi = 30°$ спостерігається дифракційна картина. За якої фокусної відстані лінзи лінійна дисперсія дорівнює $D_l = 0{,}5$ *мм/нм*?

Відповідь: $f = 42{,}2$ *см*.

17.25 На якій відстані містяться на екрані дві лінії ртутної дуги з довжинами хвиль $\lambda_1 = 577$ *нм* і $\lambda_2 = 579{,}1$ *нм* у спектрі першого порядку, отриманому за допомогою дифракційної ґратки з періодом $d = 2$ *мкм* і лінзи – з фокусною відстанню $f = 0{,}6$ *м*?

Відповідь: $x = 0{,}72$ *мм*.

17.26 Яку найменшу роздільну здатність R повинна мати дифракційна ґратка, щоб з її допомогою можна було розрізнити дві спектральні лінії калію ($\lambda_1 = 578$ *нм* і $\lambda_2 = 580$ *нм*)? Яку найменшу кількість N штрихів потрібно нанести на ґратку, щоб ці спектральні лінії було можливим розрізнити у спектрі другого порядку?

Відповідь: $R = 290$; $N = 145$.

17.27 Стала дифракційної ґратки дорівнює $d = 2$ *мкм*. Яку різницю довжин хвиль $\Delta\lambda$ може розділити ця ґратка в області жовтих променів ($\lambda = 600$ *нм*) у спектрі другого порядку? Ширина ґратки дорівнює $a = 2{,}5$ *см*.

Відповідь: $\Delta\lambda = 24$ *пм*.

17.28 На грань кристала кам’яної солі падає паралельний пучок рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 147$ *пм*. Визначити відстань d між атомними площинами кристала, якщо дифракційний максимум другого порядку спостерігається, коли випромінювання падає під кутом $\theta = 31^0 30'$ до поверхні кристала.

Відповідь: $d = 0{,}284$ *нм*.

17.29 Визначити відстань між атомними площинами в кристалі кам’яної солі, якщо дифракційний максимум першого порядку спостерігається під час падіння рентгенівських променів із довжиною хвилі $\lambda = 0{,}147$ *нм* під кутом $\theta = 15^0 12'$ до поверхні кристала.

Відповідь: $d = 0{,}28$ *нм*

17.30 Чому дорівнює довжина хвилі монохроматичного рентгенівського випромінювання, що падає на кристал кальциту, якщо дифракційний максимум першого порядку спостерігається, коли кут ковзання дорівнює $\theta = 3^0$? Відстань між атомними площинами кристала дорівнює $d = 0,3\,нм.$

Відповідь: $\lambda = 31\,пм.$

18 ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

18.1 Закон Брюстера

$$tg\theta_Б = \frac{n_2}{n_1},$$

де $\theta_Б$ – кут падіння, за якого світло, що відбилося від діелектрика, повністю поляризоване; n_2 і n_1 – показники заломлення другого та першого середовищ відповідно.

18.2 Закон Малюса для ідеального поляризатора

$$I = I_0 \cos^2 \phi,$$

де I_0 – інтенсивність поляризованого світла, що падає на поляризатор; I – інтенсивність цього світла після проходження поляризатора; ϕ – кут між площинами поляризації світла, що падає на поляризатор, та поляризатора.

Закон Малюса для поляризатора з поглинанням

$$I = I_0 (1-k) \cos^2 \alpha,$$

де k – коефіцієнт поглинання світла в аналізаторі.

18.3 Ступінь поляризації світла неідеальним поляризатором

$$P = \frac{I_p}{I} \qquad \text{або} \qquad P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

де I_p – інтенсивність поляризованого світла, що виходить із поляризатора; I – інтенсивність природного світла, що падає на поляризатор; $I_{\max}$ та $I_{\min}$ – максимальна та мінімальна інтенсивності світла, яке пропускає поляризатор.

18.4 Кут повороту площини поляризації під час проходження світла через оптично активну речовину:

а) для твердих тіл

$$\phi = \alpha d,$$

де α – стала обертання; d – довжина шляху, пройденого світлом в оптично активній речовині;

б) для розчинів

$$\varphi = [\alpha]Cd\ ,$$

де $[\alpha]$ – питоме обертання; C – масова концентрація оптично активної речовини в розчині; d – довжина шляху світла в речовині.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 18.1

Пучок світла з повітря падає на поверхню рідини під кутом $\theta_1 = 54^0$. Визначити кут заломлення θ_2 пучка, якщо відбитий пучок повністю поляризований.

Розв'язування

$\theta_2 - ?$
$\theta_1 = 54^0$.

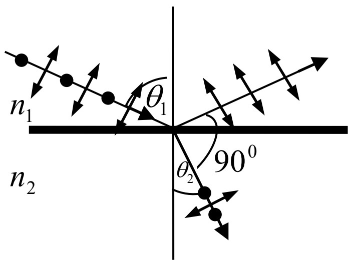


Рисунок 1

Відбитий пучок світла буде повністю поляризованим (рис. 1), якщо світло падає на межу поділу двох середовищ під кутом Брюстера. Цей кут визначають за такою формулою:

$$\mathrm{tg}\theta_1 = n_2/n_1,$$

де n_1 і n_2 – показники заломлення середовищ, у яких поширюються падаючий та заломлений промені відповідно.

Кут заломлення θ_2 можна визначити за допомогою закону заломлення світлових променів на межі поділу двох середовищ:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Враховуючи, що $\mathrm{tg}\theta_1 = \dfrac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}$, одержуємо

$$\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Звідси випливає, що

$$\cos\theta_1 = \sin\theta_2,$$

або

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \sin\theta_2.$$

Тоді

$$\frac{\pi}{2} - \theta_1 = \theta_2 \;\Rightarrow\; \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, якщо світло падає на межу поділу середовищ під кутом Брюстера, то сума кутів падіння та заломлення дорівнює 90^0.

А отже, можна легко визначити кут заломлення:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1, \qquad \theta_2 = 90^0 - 54^0 = 36^0.$$

Відповідь: $\theta_2 = 36^0$.

Задача 18.2

Граничний кут повного внутрішнього відбивання пучка світла на межі поділу рідини з повітрям дорівнює $\theta = 43^0$. Визначити кут Брюстера θ_B для падіння променя з повітря на поверхню цієї рідини.

Розв'язування

$\theta_Б - ?$
θ=43^0.

Кут повного внутрішнього відбивання на межі поділу рідини з показником заломлення n і повітря з показником заломлення $n_П = 1$ визначаємо з умови

$$\sin\theta_Б = \frac{n}{n_П} = n. \quad (1)$$

Звідси показник заломлення рідини дорівнює $n = \sin 43^0$. Кут Брюстера визначаємо з умови

$$\mathrm{tg}\,\theta_Б = \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Порівнюючи співвідношення (1) і (2), одержуємо

$$\mathrm{tg}\,\theta_Б = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Отже,

$$\theta_Б = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right).$$

За допомогою обчислень одержуємо

$$\theta_Б = \text{arctg}\left(\frac{1}{\sin 43^0}\right) = 55,7^0.$$

Відповідь: $\theta_Б = 55,7^0$.

Задача 18.3

У частково поляризованому світлі амплітуда вектора напруженості електричного поля, що відповідає максимальній інтенсивності світла, в $m = 2$ рази більша за амплітуду, що відповідає мінімальній інтенсивності світла. Визначити ступінь поляризації P світла.

Розв’язування

$P - ?$
$m = 2$.

Згідно з визначенням ступінь поляризації P світла дорівнює

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \tag{1}$$

де $I_{\max}$ і $I_{\min}$ – відповідно максимальна та мінімальна інтенсивності світла, що пройшло через аналізатор. Враховуючи, що інтенсивність світла I пропорційна квадрату амплітуди E вектора напруженості електричного поля, одержуємо

$$I = k^2 E^2, \tag{2}$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Підставимо співвідношення (2) в (1) та одержимо

$$P=\frac{kE_{max}^2-kE_{min}^2}{kE_{max}^2+kE_{min}^2}=\frac{E_{max}^2-E_{min}^2}{E_{max}^2+E_{min}^2}.$$

Відповідно до умови задачі $E_{max}=mE_{min}=2E_{min}$, тому

$$P=\frac{m^2-1}{m^2+1}=\frac{3}{5}.$$

Відповідь: P = 0,6.

Задача 18.4

Ступінь поляризації P частково поляризованого світла дорівнює 0,5. У скільки разів відрізняється максимальна інтенсивність світла, що проходить через аналізатор, від мінімальної?

Розв’язування

I_{max}/I_{min} – ?
P = 0,5.

Ступінь поляризації P світла за визначенням дорівнює

$$P=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}},$$

де I_{max} і I_{min} – відповідно максимальна та мінімальна інтенсивності світла, що пройшло через аналізатор. Поділимо чисельник і знаменник цього виразу на I_{min} та одержимо

$$P = \frac{\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}} - 1}{\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}} + 1}.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно $I_{\max}/I_{\min}$, приходимо до співвідношення

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1+P}{1-P}.$$

Підставимо в отримане співвідношення числові значення та одержимо

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1+0,5}{1-0,5} = \frac{1,5}{0,5} = 3.$$

Відповідь: $I_{\max}/I_{\min} = 3$.

Задача 18.5

На шляху частково поляризованого світла, ступінь поляризації P якого дорівнює 0,6, поставили аналізатор так, що інтенсивність світла, яке пройшло через нього, стала максимальною. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, якщо площину пропускання аналізатора повернути на кут $\alpha = 30^0$?

Розв'язування

$I_{\max}/I_{a} - ?$
P=0,6,
$\alpha = 30^0$.

Відповідно до закону Малюса, якщо на поляризатор падає плоскополяризоване світло з інтенсивністю I_{0p}, то інтенсивність світла на виході поляризатора I_p буде дорівнювати

$$I_p = I_{0p} \cos^2 \alpha \ ,$$

де α – кут між площиною поляризації світла, що падає, та площиною пропускання поляризатора. Якщо на поляризатор падає природне неполяризоване світло з випадковими напрямками коливань світлового вектора, то для визначення інтенсивності світла, яке пройшло через поляризатор, потрібно у співвідношенні Малюса виконати усереднення за всіма кутами α. Враховуючи, що середнє значення $\cos^2\alpha$ дорівнює

$$< \cos^2 \alpha > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \, ,$$

одержуємо ослаблення інтенсивності падаючого природного світла $I_{0\text{p}}$ вдвічі.

Тепер, знаючи, як поляризоване й природне світло проходить через поляризатор, подамо частково поляризоване світло у вигляді суми природного світла з інтенсивністю $I_{0\text{e}}$ та плоскополяризованого світла з інтенсивністю $I_{0\text{p}}$. Якщо таку суміш пропустити через аналізатор, то відповідно до закону Малюса максимальна інтенсивність прохідного світла буде дорівнювати

$$I_{\text{max}} = I_{0\text{p}} + (1/2)I_{0\text{e}},$$

а мінімальна –

$$I_{\text{min}} = (1/2)I_{0\text{e}}.$$

Тоді ступінь поляризації цього світла може бути визначений таким чином:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{0p}}{I_{0p} + I_{oe}}. \tag{1}$$

За умовою задачі спочатку поляризатор був у положенні, коли інтенсивність прохідного світла була максимальною, тобто

$$I_{\max} = I_{0p} + (1/2)I_{0e}.$$

Площина поляризації поляризованого компонента в цьому разі збігається з площиною пропускання поляризатора. Якщо тепер поляризатор повернути на кут α, то інтенсивність поляризованого компонента світла зменшиться за законом Малюса. Інтенсивність прохідного природного компонента не зміниться та буде, як і раніше, дорівнювати половині інтенсивності природного компонента у світлі, що падає на поляризатор. Тоді інтенсивність прохідного світла дорівнюватиме

$$I_\alpha = \frac{1}{2} I_{0e} + I_{0p} \cos^2 \alpha .$$

Відношення інтенсивностей $I_{\max}/I_a$, яке потрібно визначити в задачі:

$$\frac{I_{\max}}{I_\alpha} = \frac{I_{0p} + \frac{1}{2} I_{0e}}{\frac{1}{2} I_{0e} + I_{0p} \cos^2 \alpha}, \tag{2}$$

виразимо через відношення інтенсивностей I_{0p}/I_{0e}, поділивши чисельник і знаменник співвідношення (2) одночасно на I_{0e}:

$$\frac{I_{\max}}{I_\alpha}=\frac{\dfrac{I_{0p}}{I_{0e}}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{I_{0p}}{I_{0e}}\cos^2\alpha}. \tag{3}$$

Виконаємо перетворення в співвідношенні (1), розділивши спочатку чисельник і знаменник цього виразу на I_{0p}:

$$P=\frac{1}{1+I_{oe}/I_{0p}}.$$

Звідси одержимо

$$I_{0p}/I_{oe}=P/(1-P). \tag{4}$$

Підставивши (4) у (2), одержимо

$$\frac{I_{\max}}{I_\alpha}=\frac{\dfrac{P}{1-P}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{P}{1-P}\cos^2\alpha}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин у це співвідношення та обчислимо:

$$\frac{I_{\max}}{I_\alpha}=\frac{\dfrac{0,6}{1-0,6}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{0,6}{1-0,6}\cos^2 30^0}=\frac{\dfrac{0,6}{0,4}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{0,6}{0,4}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4}{1+\dfrac{9}{4}}=1,23\,.$$

Відповідь: $I_{\max}/I_a = 1,23$.

Задача 18.6

Природне світло падає на систему з трьох послідовно розміщених однакових поляроїдів. Кут між площиною пропускання середнього поляроїда та площинами пропускання двох інших дорівнює $\varphi = 60^0$. Кожний поляроїд має таке поглинання, що за час падіння на нього лінійно поляризованого світла максимальний коефіцієнт пропускання дорівнює 0,81. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла після проходження цієї системи?

Розв'язування

$I_e / I_2 - ?$

$\varphi = 60^0$,
$k = 0,19$.

Під час падіння природного світла на ідеальний поляроїд через нього проходить світло, інтенсивність якого дорівнює половині початкової інтенсивності, тобто

$$I_0 = 0,5 I_e. \qquad (1)$$

Максимальна інтенсивність світла, яке проходить через цей поляроїд, дорівнює 0,81 від інтенсивності світла, що падає на нього, тобто коефіцієнт поглинання дорівнює $k = 0,19$.

За законом Малюса інтенсивність світла, яке пройшло через другий поляроїд, дорівнює

$$I_1 = I_0 \cos^2 \varphi. \tag{2}$$

Ураховуючи втрати світла внаслідок поглинання в обох поляроїдах, перепишемо співвідношення (2) у вигляді

$$I_1 = I_0 \left(1-k\right)\cos^2 \varphi. \tag{3}$$

На третій поляроїд падає світло, інтенсивність якого I_1. Третій поляроїд також пропускає

$$I_2 = I_1 \left(1-k\right)\cos^2 \varphi. \tag{4}$$

Підставивши вирази (3) у співвідношення (4), одержимо

$$I_2 = 0,5 I_e \left(1-k\right)^3 \cos^4 \varphi. \tag{5}$$

З одержаного виразу знайдемо, в скільки разів зменшиться інтенсивність світла після проходження системи:

$$\frac{I_e}{I_2} = \frac{2}{\left(1-k\right)^3 \cos^4 \varphi}.$$

Підставимо значення фізичних величин в одержаний вираз та обчислимо:

$$\frac{I_e}{I_2} = \frac{2}{\left(1-0,19\right)^3 \cos^4 60^0} = 60.$$

Відповідь: у 60 разів.

Задача 18.7

Пластинка кварцу товщиною $d_1 = 1\,мм$, вирізана перпендикулярно до оптичної осі кристала, повертає площину поляризації монохроматичного світла певної довжини хвилі на кут $\varphi_1 = 20^0$. Визначити: 1) якою повинна бути товщина d_2 кварцової пластинки між двома «паралельними» ніколями, щоб світло не проходило через таку систему; 2) якої довжини l трубку з розчином цукру з масовою концентрацією $C = 0,4\,кг/л$ потрібно помістити між ніколями для досягнення такого самого ефекту? Питоме обертання цукру $[\alpha] = 0,665\,град./\left(м \cdot кг \cdot м^{-3}\right)$.

Розв'язування

$d_2 - ?\ \ l - ?$
$d_1 = 1\,мм = 10^{-3}\,м$,
$\varphi_1 = 20^0$,
$C = 0,4\,кг/л = 400\,кг/м^3$,
$[\alpha] = 0,665\,град./\left(м \cdot кг \cdot м^{-3}\right)$.

1. Кут повороту площини поляризації кварцовою пластинкою визначаємо за співвідношенням

$$\varphi = \alpha\, d\,. \tag{1}$$

Світло повністю гаситься за умови, що кут повороту площини поляризації дорівнює $\varphi_2 = 90^0$. Тоді товщина пластинки дорівнює

$$d_2 = \varphi_2 / \alpha\,. \tag{2}$$

Сталу обертання знайдемо з формули (1):

$$\alpha = \varphi_1 / d_1 \ . \tag{3}$$

Підставимо цей вираз у співвідношення (2) та одержимо

$$d_2 = \varphi_2 d_1 / \varphi_1 \ . \tag{4}$$

Виконаємо обчислення за цим співвідношенням і визначимо товщину пластинки:

$$d_2 = 90 \cdot 10^{-3} / 20 = 4,5 \cdot 10^{-3} \left(м \right).$$

2. Довжину трубки з цукровим розчином визначимо зі співвідношення $\varphi_2 = [\alpha] C l$:

$$l = \frac{\varphi_2}{[\alpha] C} \ .$$

Підставимо в одержаний вираз значення фізичних величин та виконаємо розрахунки:

$$l = \frac{90}{0,665 \cdot 400} = 0,338 \left(м \right).$$

Відповідь: 1) $d_2 = 4,5$ *мм*; 2) $l = 0,338\,м$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

18.1 Пучок природного світла, що поширюється у воді, відбивається від грані алмаза, зануреного у воду. За якого кута падіння відбите світло повністю поляризоване?

Відповідь: $\theta = 61^0 12'$.

18.2 Пучок світла з повітря падає на поверхню рідини під кутом $\theta_1 = 54^0$. Визначити кут заломлення θ_2 пучка, якщо відбитий пучок повністю поляризований.

Відповідь: $\theta_2 = 36^0$.

18.3 Кут Брюстера $\theta_Б$ під час падіння світла з повітря на кристал кам'яної солі дорівнює 57^0. Визначити швидкість світла в цьому кристалі.

Відповідь: $\text{v} = 1{,}94\ 10^8\ м/с$.

18.4 Знайти кут повної поляризації під час відбивання світла від скла, показник заломлення якого дорівнює $n = 1{,}57$.

Відповідь: $\phi = 1{,}004\ рад$ (57°30′).

18.5 Граничний кут повного внутрішнього відбивання пучка світла на межі поділу рідини з повітрям дорівнює $\theta = 43^0$. Визначити кут Брюстера $\theta_В$ для падіння променя з повітря на поверхню цієї рідини.

Відповідь: $\theta_Б = 55{,}7^0$.

18.6 Пучок природного світла падає на скляну призму з показником заломлення $n = 1{,}6$. Визначити кут падіння θ, якщо відбитий пучок максимально поляризований.

Відповідь: $\theta = 58^0$.

18.7 Промінь світла проходить через рідину $\left(n = 1{,}6\right)$, налиту у скляну $\left(n = 1{,}5\right)$ посудину, та відбивається від дна. Відбитий промінь повністю поляризований під час падіння світла на дно посудини під кутом $\theta_Б = 42{,}62^0$. Визначити: 1) показник заломлення рідини;

2) під яким кутом повинен падати на дно посудини промінь, щоб відбулося повне внутрішнє відбиття?

Відповідь: 1) $n = 1,63$; 2) $\alpha_{гр} = 67^0$.

18.8 У частково поляризованому світлі амплітуда вектора напруженості електричного поля, що відповідає максимальній інтенсивності світла, в $m = 2$ рази більша за амплітуду, що відповідає мінімальній інтенсивності світла. Визначити ступінь поляризації P світла.

Відповідь: $P = 0,6$.

18.9 Є два однакових недосконалих поляризатори, кожний із яких обумовлює ступінь поляризації $P = 0,8$. Який максимальний ступінь поляризації можуть забезпечити ці два поляризатори, встановлені послідовно один за одним?

Відповідь: $P_{\max} = 0,976$.

18.10 У частково поляризованому світлі амплітуда світлового вектора, що відповідає максимальній інтенсивності світла, вдвічі більша за амплітуду, що відповідає мінімальній інтенсивності. Визначити ступінь поляризації світла P.

Відповідь: $P = 0,6$.

18.11 На поляризатор падає пучок частково поляризованого світла. За деякого положення поляризатора інтенсивність світла, що пройшло через нього, стала мінімальною. Коли площину пропускання поляризатора повернули на кут $\beta = 45^0$, інтенсивність світла зросла в $k = 1,5$ раза. Визначити ступінь поляризації P світла.

Відповідь: $P = 0,348$.

18.12 Ступінь поляризації частково поляризованого світла $P = 0,25$. Знайти відношення інтенсивності поляризованої складової цього світла до інтенсивності природної складової.

Відповідь: 0,3.

18.13 Ступінь поляризації P частково поляризованого світла дорівнює 0,5. У скільки разів амплітуда світлового вектора, що відповідає максимальній інтенсивності світла, більша за амплітуду, що відповідає мінімальній інтенсивності?

Відповідь: $A_{\max}/A_{\min} = 1{,}73$.

18.14 Аналізатор удвічі зменшує інтенсивність світла, що пройшло через поляризатор. Визначити кут θ між площинами поляризації поляризатора та аналізатора.

Відповідь: $\theta = 45^0$.

18.15 Кут між площинами поляризації поляризатора та аналізатора дорівнює $\theta = 45°$. У скільки разів $k = I_0/I$ зменшиться інтенсивність світла, що виходить з аналізатора, якщо цей кут збільшити до $\theta_1 = 60°$?

Відповідь: $k = 2$.

18.16 Кут α між площинами поляризації поляризатора та аналізатора дорівнює 30^0. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, що виходить з аналізатора, якщо цей кут збільшити до 60^0?

Відповідь: втричі.

18.17 У скільки разів послабиться інтенсивність світла, що проходить через два поляризатори, площини поляризації яких утворюють кут $\alpha = 30^0$, якщо в кожному поляризаторі окремо втрачається 10 % інтенсивності світла, що на нього падає?

Відповідь: у 3,3 раза.

18.18 Під час падіння природного світла на деякий поляризатор через нього проходить 30 % світлового потоку, через два таких поляризатори – 13,5 %. Знайти кут між площинами пропускання цих поляризаторів.

Відповідь: $\theta = 30°$.

18.19 Пучок природного світла падає на систему з шести поляризаторів, площина пропускання кожного з яких повернута на $\theta = 30°$ відносно площини пропускання попереднього. Яка частина світлового потоку проходить через цю систему?

Відповідь: $k = 0{,}12$.

18.20 Аналізатор у $k = 2$ рази зменшує інтенсивність світла, що проходить до нього від поляризатора. Визначити кут α між площинами пропускання поляризатора та аналізатора. Втратами світла в аналізаторі знехтувати.

Відповідь: $\alpha = 45^0$.

18.21 Поглинання світла в призмі Ніколя таке, що найбільша інтенсивність поляризованого світла, яке пройшло через нього, дорівнює 90 % інтенсивності поляризованого світла, що падає на нього.

1) У скільки разів зменшиться інтенсивність природного світла під час проходження його через дві призми Ніколя, площини поляризації яких становлять кут 63^0?

2) У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, якщо, крім двох призм Ніколя, зазначених в умові 1, світло проходить ще через одну, напрямок площини поляризації якої є таким самим, як і для першої призми?

Відповідь: 1) у 12 разів; 2) у 65 разів.

18.22 Який кут утворюють площини поляризації двох ніколей, якщо інтенсивність світла, що вийшло з другого ніколя, зменшилася в 5 разів? Урахувати, що поляризатор поглинає 10 %, а аналізатор – 8 % світла, що на них падає.

Відповідь: $\varphi = 46^0$.

18.23 На шляху частково поляризованого світла зі ступенем поляризації $P = 0{,}6$ поставили аналізатор так, щоб він пропускав максимальну інтенсивність світла. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, що проходить через аналізатор, якщо його площину пропускання повернути на $\alpha = 30°$?

Відповідь: в 1,23 раза.

18.24 На шляху частково поляризованого світла розміщений поляризатор у положенні, що пропускає максимальну кількість світла. Під час його повороту на $\theta = 60°$ інтенсивність прохідного світла зменшилася втричі. Знайти ступінь поляризації падаючого світла P.

Відповідь: $P = 0,8$.

18.25 Пластинку кварцу товщиною $d_1 = 2\,мм$, вирізану перпендикулярно до оптичної осі, помістили між двома поляризаторами, площини пропускання яких збігаються. Після проходження пластинки площина поляризації світла повернулася на кут $\varphi = 53^0$. Визначити товщину d_2 пластинки, за якої світло не проходить через аналізатор.

Відповідь: $d_2 = 3,4\,мм$.

18.26 Чистий нікотин у скляній трубці довжиною $l = 8$ *см* повертає площину поляризації жовтого світла на кут $\varphi = 137°$. Густина нікотину $\rho = 1\,010$ *кг/м*^{3}. Визначити питоме обертання нікотину.

Відповідь: $[\alpha] = 0{,}03$ *рад* · *м*^{2}/*кг* (1,7 *град.* · *м*^{2}/*кг*).

18.27 Розчин глюкози з масовою концентрацією $\rho = 280$ *кг/м*^{3}, що міститься в скляній трубці, повертає площину поляризації монохроматичного світла на $\varphi = 32°$. Визначити масову концентрацію глюкози в іншому розчині, налитому в ту саму трубку, якщо він повертає площину поляризації світла на $\varphi = 24°$.

Відповідь: $\rho_1 = 210$ *кг/м*^{3}.

18.28 Кут повороту площини поляризації жовтого світла під час проходження через трубку з розчином цукру дорівнює $\varphi = 40°$. Довжина трубки $d = 15$ *см*. Питоме обертання цукру дорівнює $[\alpha] = 0{,}0117$ (*рад* · *м*^{2})/*кг*. Визначити масову концентрацію цукру в розчині.

Відповідь: $\rho = 398$ *кг/м*^{3}.

18.29 Пластинка кварцу товщиною $d_1 = 1\,мм$, вирізана перпендикулярно до оптичної осі кристала, повертає площину поляризації монохроматичного світла певної довжини хвилі на кут $\varphi_1 = 20^0$. Визначити: 1) якою повинна бути товщина d_2 кварцової пластинки між двома «паралельними» ніколями, щоб світло не проходило через таку систему; 2) якої довжини l трубку з розчином цукру з масовою концентрацією $C = 0,4\,кг/л$ потрібно помістити між ніколями для досягнення такого самого ефекту? Питоме обертання цукру $[\alpha] = 0,665\,град./\left(м \cdot кг \cdot м^{-3}\right)$.

Відповідь: 1) $d_2 = 4,5\ мм$; 2) $l = 0,338\,м$.

18.30 У скільки разів зміниться інтенсивність світла, що проходить через два ніколі, кут між головними напрямками яких дорівнює 60^0, якщо між ними помістити пластинку лівоповоротного кварцу товщиною $d_1 = 3\,мм$, вирізану перпендикулярно до оптичної осі. Така сама пластинка, але товщиною $d_2 = 1,5\,мм$ повертає площину поляризації на $\varphi_2 = 25^0$. Втратами світла в ніколях і кварці знехтувати.

Відповідь: $I_0/I_3 = 17,1$.

19 ЗАКОНИ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

19.1 Енергія фотона

$$W_ф = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda},$$

де ν, ω та λ – частота, циклічна частота та довжина хвилі випромінювання відповідно; h і $\hbar$ – стала Планка та стала Планка – Дірака відповідно, $h = 2\pi\hbar$; c – швидкість світла у вакуумі.

19.2 Імпульс фотона

$$p_ф = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

19.3 Маса фотона

$$m_ф = \frac{W_ф}{c^2} = \frac{hc}{\lambda}.$$

19.4 Характеристики теплового випромінювання

Потік енергії (потужність) випромінювання дорівнює відношенню енергії, що переноситься електромагнітною хвилею через будь-яку поверхню, до часу, значно більшого за період коливань електромагнітної хвилі:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

Спектральна випромінювальна здатність (монохроматична густина випромінювання) – енергія, випромінювана за одиницю часу одиницею поверхні тіла в одиничному інтервалі частот:

$$r_{\omega,T} = \frac{dW_\omega}{dt \cdot dS \cdot d\omega}.$$

Інтегральна випромінювальна здатність (енергетична світність)

$$\mathrm{R}_e = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dW}{dtdS}.$$

Зв'язок енергетичної світності зі спектральною випромінювальною здатністю

$$\mathrm{R}_e = \int_0^\infty r_{\omega,T} d\omega.$$

Поглинальна здатність (коефіцієнт поглинання) дорівнює відношенню потоку випромінювання, що поглинається тілом Φ'_ω, до монохроматичного потоку Φ_ω випромінювання, що падає на нього з циклічною частотою ω:

$$a_{\omega,T} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega}.$$

19.5 Закон Стефана – Больцмана

$$\mathrm{R}_e = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega = \sigma T^4 ,$$

де $\mathrm{R}_e = \dfrac{W}{St}$ – енергетична світність абсолютно чорного тіла; W – енергія, випромінювана тілом за час t; S – його площа; $r_{\omega,T}$ – випромінювальна здатність; ω – циклічна частота випромінювання; T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана – Больцмана $\left[\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{Вт}{м^2 \cdot K^4}\right]$.

19.6 Енергетична світність сірого тіла

$$\mathrm{R}_e = a_T \sigma T^4 ,$$

де a_T – коефіцієнт чорноти (коефіцієнт поглинання) сірого тіла.

19.7 Закон зміщення Віна

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання; b – стала закону зміщення Віна $\left(b = 2,9 \cdot 10^{-3}\ м \cdot K\right)$.

19.8 Формула Планка

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1},$$

$$r_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1},$$

де $r_{\lambda,T}$, $r_{\omega,T}$ – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла; λ – довжина хвилі; ω – циклічна частота; c – швидкість світла у вакуумі; k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура; h – стала Планка; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ – стала Планка, поділена на 2π ($\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ *Дж* $\cdot$ *с*).

19.9 Залежність максимальної випромінювальної здатності від температури

$$\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = CT^5,$$

де C – стала [C = 1,30 · 10^{-5} *Вт/(м*^{3} · *К*^{5}*)*].

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 19.1

Лазер у безперервному режимі випромінює світло з довжиною хвилі $\lambda = 600\,нм$ за потужності $P = 40\,мВт$. Скільки фотонів він випромінює за $t = 1\,с$?

Розв'язування

$N - ?$

$\lambda = 600\,нм = 6 \cdot 10^{-7}\ м,$
$P = 40\,мВт = 0,4\,Вт,$
$t = 1\ с.$

Енергія фотона

$$W_Ф = \frac{hc}{\lambda},$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина світлової хвилі.

Енергія лазерного випромінювання за час t дорівнює

$$W = Pt,$$

тоді кількість фотонів, випромінюваних за час t лазером,

$$N = \frac{W}{W_Ф} = \frac{Pt\lambda}{hc}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо обчислення:

$$N = \frac{0,4 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 1,2 \cdot 10^{18}.$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$N = \frac{[P][t][\lambda]}{[h][c]} = \frac{Вт \cdot с \cdot м}{Дж \cdot с \cdot \frac{м}{с}} = \frac{Дж \cdot с \cdot м}{Дж \cdot с \cdot м} = 1 .$$

Відповідь: $N = 1,2 \cdot 10^{18}$.

Задача 19.2

Визначити енергію W, випромінювану за час $t = 1$ хв зі спостережувального вікна плавильної печі площею $S = 8$ см^2, якщо її температура $T = 1,2$ кК.

Розв'язування

$W - ?$
$S = 8\,см^2 = 8 \cdot 10^{-4}\,м^2,$ $t = 1\,хв = 60\,с,$ $T = 1,2\,кК.$

Потік енергії, випромінюваної зі спостережувального вікна плавильної печі, дорівнює

$$\Phi_e = R_e S . \qquad (1)$$

Енергетичну світність абсолютно чорного тіла, яким можна вважати це вікно, визначимо із закону Стефана – Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4 . \qquad (2)$$

Енергія, випромінювана піччю, дорівнює

$$W = \Phi_e t . \qquad (3)$$

Підставивши співвідношення (2) (3) в (1), одержимо

$$W = \sigma T^4 St\,.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин остаточно одержимо

$$W = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \left(1,2 \cdot 10^3\right)^4 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = 5\ 643,5\ (Дж).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[W] = [\sigma][T]^4[S][t] = (\text{Вт/м}^2\ \text{К}^4) \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с} = \text{Вт} \cdot \text{с} = \text{Дж}.$$

Відповідь: W = 5643,5 *Дж*.

Задача 19.3

Муфельна піч, що споживає потужність $N = 1\,кВт$, має отвір площею $S = 100\,см^2$. Визначити частку η потужності, розсіювану стінками печі, якщо температура її внутрішньої поверхні дорівнює $T = 1\,кК$.

Розв'язування

$\eta - ?$
$N = 1\,кВт = 10^3\ Вт,$ $S = 100\,см^2 = 10^{-2}\,м^2,$ $T = 1\,кК = 10^3\,K.$

Потік енергії, випромінюваної через отвір муфельної печі, дорівнює

$$\Phi_e = \mathrm{R}_e\, S\,, \qquad (1)$$

де R_e – енергетична світність отвору.

Отвір муфельної печі можна розглядати як абсолютно чорне тіло, звідси, скориставшись законом Стефана – Больцмана, можна записати

$$\mathrm{R}_e\left(T\right)=\sigma T^4 . \tag{2}$$

Підставивши цей вираз в (1), одержимо

$$\Phi_e\left(T\right)=\sigma T^4 S .$$

Скориставшись законом збереження енергії, запишемо

$$\eta N=\Phi_e\left(T\right)=\sigma T^4 S .$$

Звідси

$$\eta=\frac{\sigma T^4 \mathrm{S}}{N} .$$

Підставивши числові значення фізичних величин, одержимо таку відповідь:

$$\eta=\frac{5,67\cdot 10^{-8}\cdot (10^3)^4\cdot 100\cdot 10^{-4}}{10^3}=0,57 .$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[\eta]=\frac{[\sigma][T]^4[S]}{[N]}=((\text{Вт/м}^2\ \text{К}^4)\cdot \text{К}^4\cdot \text{м}^2)/\text{Вт} = 1.$$

Відповідь: $\eta=0,57$.

Задача 19.4

Як і в скільки разів зміниться енергетична світність абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання переміститься з червоної межі видимого спектра $\left(\lambda_{m1} = 780\,нм\right)$ на фіолетову $\left(\lambda_{m2} = 390\,нм\right)$?

Розв'язування

$\Phi_{e1}/\Phi_{e2} - ?$
$\lambda_{m1} = 780\,нм,$
$\lambda_{m2} = 390\,нм.$

Потік енергії, випромінюваної тілом, дорівнює

$$\Phi_e = R_e S\,, \tag{1}$$

де R_e – енергетична світність абсолютно чорного тіла; S – його площа.

Енергетичну світність абсолютно чорного тіла визначимо з рівняння Стефана – Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4\,. \tag{2}$$

Для визначення температури тіла скористаємося законом зміщення Віна

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_m}\,. \tag{3}$$

Підставивши вираз (2) і (3) в (1), одержимо

$$\Phi_e = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4 S\,. \tag{4}$$

Для різних довжин хвиль потік енергії, випромінюваної тілом, визначають за такими виразами:

$$\Phi_{e1} = \sigma(\frac{b}{\lambda_{m1}})^4 S, \tag{5}$$

$$\Phi_{e2} = \sigma(\frac{b}{\lambda_{m2}})^4 S. \tag{6}$$

Поділивши рівняння (6) на (5), одержимо

$$\frac{\Phi_{e2}}{\Phi_{e1}} = \frac{\sigma(b/\lambda_{m2})^4 S}{\sigma(b/\lambda_{m1})^4 S} = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}\right)^4. \tag{7}$$

Підставивши у вираз (7) числові значення величин, одержимо

$$\frac{\Phi_{e2}}{\Phi_{e1}} = \frac{(780 \cdot 10^{-9})^4}{(390 \cdot 10^{-9})^4} = (2)^4 = 16.$$

Відповідь: $\frac{\Phi_{e2}}{\Phi_{e1}} = 16$.

Задача 19.5

У разі збільшення термодинамічної температури T абсолютно чорного тіла вдвічі довжина хвилі λ_m, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, зменшиться на $\Delta\lambda = 400$ *нм*. Визначити початкову й кінцеву температури T_1 і T_2.

Розв'язування

$T_1 - ?\ \ T_2 - ?$	
$\Delta\lambda = 400$ *нм.*	

Відповідно до закону зміщення Віна довжина, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, дорівнює

$$\lambda_m = \frac{b}{T}. \tag{1}$$

Для різних довжин хвиль цей вираз запишемо у вигляді

$$\lambda_{m1} = \frac{b}{T_1}, \tag{2}$$

$$\lambda_{m2} = \frac{b}{T_2}. \tag{3}$$

За умовою задачі

$$\Delta\lambda = \lambda_{m1} - \lambda_{m2} = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{T_2}. \tag{4}$$

Врахуємо, що $T_2 = 2T_1$, тоді одержимо

$$\Delta\lambda = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{2T_1} = \frac{b}{2T_1}.$$

Звідси

$$T_1 = \frac{b}{2\Delta\lambda}, \tag{5}$$

$$T_2 = 2T_1 = \frac{b}{\Delta\lambda}. \qquad (6)$$

Підставивши у вирази (5) та (6) числові значення величин, одержимо

$$T_1 = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 400 \cdot 10^{-9}} = 3,625 \cdot 10^3\ (K),$$

$$T_2 = 2T_1 = 7,25\ 10^3\ (K).$$

Перевіримо розмірності одиниць одержаної величини:

$$T = \frac{[b]}{[\lambda]} = м \cdot K/м = K\ .$$

Відповідь: $T_1 = 3,625 \cdot 10^3\ K$, $T_2 = 7,25\ 10^3\ K$.

Задача 19.6

Розрахувати справжню температуру T розжареної вольфрамової стрічки, якщо радіаційний пірометр показує температуру $T_{рад} = 2,5\,кК$. Припустити, що поглинальна здатність для вольфраму не залежить від частоти випромінювання й дорівнює $a_T = 0,35$.

$T - ?$
$T_{рад} = 2,5\ кК = 2,5 \cdot 10^3\ K$, $a_T = 0,35.$

Розв'язування

Радіаційною температурою $T_{рад}$ називають температуру, за якої енергетична світність R_e^* абсолютно чорного тіла дорівнює енергетичній світності R_e тіла, досліджуваного за його справжньої температури T:

$$R_e^*\left(T_{рад}\right) = R_e\left(T\right). \tag{1}$$

Енергетичні світності чорного та сірого тіл знайдемо з закону Стефана – Больцмана:

$$R_e^*\left(T_{рад}\right) = \sigma T_{рад}^4, \tag{2}$$

$$R_y\left(T\right) = a\sigma T^4. \tag{3}$$

Підставивши вирази (2) (3) в (1), одержимо

$$\sigma T_{рад}^4 = a\sigma T^4. \tag{4}$$

З цього співвідношення справжня температура вольфрамової стрічки дорівнює

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} T_{рад}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{0,35}} \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 3\,250\left(K\right).$$

Відповідь: $T = 3250$ K.

Задача 19.7

Визначити величину сонячної сталої, тобто потік сонячної світлової енергії за одиницю часу через площу $S = 1\,м^2$ на орбіті Землі. Вважати, що Сонце випромінює як абсолютно чорне тіло. Температура поверхні Сонця $T = 5800\,K$.

Розв'язування

$P_C - ?$
$r = 6,95 \cdot 10^8\ м,$ $R = 1,49 \cdot 10^{11}\ м,$ $T = 5800\,K.$

За визначенням

$$P_C = W/St = N/S. \tag{1}$$

Енергетичну світність чорного тіла визначають за законом Стефана – Больцмана

$$\mathrm{R}_e = \sigma T^4, \tag{2}$$

де T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана – Больцмана $\left[\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4\right)\right]$; N – потужність випромінювання.

Потужність, випромінювана з усієї поверхні Сонця, дорівнює

$$N = \mathrm{R}_e S. \tag{3}$$

Вважаючи Сонце кулею, підставимо площу його поверхні $S = 4\pi r^2$ (r – радіус Сонця) у вираз (3) та одержимо

$$N = 4\pi \mathrm{R}_e r^2 = 4\pi\sigma r^2 T^4. \tag{4}$$

Інтенсивність світла послаблюється обернено пропорційно квадрату відстані від джерела випромінювання, тобто сонячна стала буде дорівнювати

$$P_C = \frac{4\pi r^2 \sigma T^4}{4\pi R^2} = \frac{r^2 \sigma T^4}{R^2}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз, проведемо обчислення та отримаємо величину сонячної сталої

$$P_C = \frac{7^2 \cdot 10^{16}\, 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4}{1,4^2 \cdot 10^{22}} = 1,6 \cdot 10^3 \left(\frac{Вт}{м^2}\right) = 1,6 \left(\frac{кВт}{м^2}\right).$$

Відповідь: $P_C = 1,6\ кВт/м^2$.

Задача 19.8

Температура поверхні Сонця $T_0 = 5500\ K$. Оцінити температуру Землі за умови, що вона перебуває в стані теплової рівноваги. Припустити, що поглинальна здатність Сонця й Землі дорівнює одиниці.

Розв'язування

$T - ?$
$r = 6,95 \cdot 10^8\ м,$ $R = 1,49 \cdot 10^{11}\ м,$ $T_0 = 5500\, K.$

Оскільки за умовою задачі поглинальні здатності Сонця та Землі дорівнюють одиниці, то енергетичні світності Сонця й Землі можна визначити за законом Стефана – Больцмана:

$$\mathrm{R}_{eC} = \sigma T_0^{\,4}, \qquad (1)$$

де T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана – Больцмана $\left[\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4\right)\right]$.

Потужність, випромінювана з усієї поверхні Сонця, дорівнює

$$N = \mathrm{R}_{eC}\, S\,, \tag{2}$$

де S – площа поверхні Сонця.

Вважаючи Сонце кулею, підставимо площу його поверхні $S = 4\pi r^2$ (r – радіус Сонця) у вираз (2) та одержимо

$$N = 4\pi\, \mathrm{R}_{eC}\, r^2 = 4\pi\sigma r^2 T_0^{\,4}\,. \tag{3}$$

де N – потужність випромінювання.

Потік енергії випромінювання Сонця на одиницю тілесного кута дорівнює

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N}{4\pi} = \sigma r^2 T_0^{\,4}\,. \tag{4}$$

Та частина потоку енергії, яка потрапляє в тілесний кут,

$$\Delta\Omega = \frac{\pi R_З^2}{R^2}\,, \tag{5}$$

де $R_З$ – радіус Землі; R – її відстань від Сонця.

Таким чином, енергію випромінювання Сонця, що поглинається Землею за одиницю часу, визначаємо за співвідношенням

$$N' = \frac{dN}{d\Omega}\Delta\Omega = \frac{\pi\sigma r^2 R_З^2 T_0^{\,4}}{R^2}. \tag{6}$$

Енергія випромінювання Землі за одиницю часу дорівнює

$$N'' = 4\pi R_З^2\,\mathrm{R}_{eЗ} = 4\pi\sigma R_З^2 T^4, \tag{7}$$

де $\mathrm{R}_{eЗ}$ – випромінювальна здатність Землі; T – температура її поверхні.

Оскільки Земля перебуває в тепловій рівновазі з навколишнім середовищем, то вирази (6) і (7) можна прирівняти. Тоді

$$\frac{\pi\sigma r^2 R_З^2 T_0^{\,4}}{R^2} = 4\pi\sigma R_З^2 T^4 \;\Rightarrow\; T = \sqrt[4]{\frac{r^2 T_0^{\,4}}{4R^2}} = T_0\sqrt{\frac{r}{2R}}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз, проведемо обчислення та отримаємо

$$T = 5500\sqrt{\frac{6,95\cdot 10^8}{2\cdot 1,49\cdot 10^{11}}} = 266\;(K).$$

Відповідь: $T = 266\ K$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

19.1 Лазер у безперервному режимі випромінює світло з довжиною хвилі $\lambda = 600\,нм$ за потужності $P = 40\,мВт$. Скільки фотонів він випромінює за $t = 1\,c$?

Відповідь: $N = 1,2 \cdot 10^{18}$.

19.2 Визначити границі (в $еВ$), в яких перебуває енергія фотонів, що відповідають видимій частині спектра.

Відповідь: $1,6 \le W \le 3,1\,еВ$.

19.3 Пилинка освітлюється імпульсом лазерного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,63\,мкм.$ Визначити кількість фотонів, поглинених пилинкою, якщо внаслідок дії світла вона набула швидкості $\mathrm{v} = 1\,мм/с$. Маса пилинки $m = 0,1\,мг.$ Вважати, що пилинка поглинає все світло, яке на неї падає.

Відповідь: $N = 9,5 \cdot 10^{16}$.

19.4 За якої температури T середня кінетична енергія теплового руху молекул одноатомного газу дорівнює енергії фотонів рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,1\,нм$?

Відповідь: $T = 9,6 \cdot 10^{7}\ K$.

19.5 Визначити енергію, яку випромінює поверхня розплавленої платини площею $S = 50\,см^2$ за $t = 1\,хв$, якщо поглинальна здатність платини $a_T = 0,8$. Температура плавлення платини дорівнює $T = 1\,770\ ^{\circ}C$.

Відповідь: $W = 237\,кДж$.

19.6 Середня енергетична світність поверхні Землі дорівнює $Re = 0,54\,Дж/\left(см^2 \cdot хв\right)$. Якою повинна бути температура T поверхні Землі, якщо умовно вважати, що вона випромінює як сіре тіло з коефіцієнтом чорноти $a_T = 0,25$?

Відповідь: $T = 280\,K$.

19.7 Беручи коефіцієнт чорноти вугілля за температури $T = 600\,K$ таким, що дорівнює $a_T = 0,8$, визначити: а) енергетичну світність R_e вугілля; б) енергію W_e, випромінювану з поверхні вугілля площею $S = 5\,см^2$ за час $t = 10\,хв$.

Відповідь: $R_e = 5,88\,кДж/\left(м^2 \cdot c\right)$, $W_e = 1,76\,кДж$.

19.8 Визначити відносне збільшення $\Delta R_e/R_e$ енергетичної світності абсолютно чорного тіла за збільшення його температури на 1 %.

Відповідь: $\Delta R_e/R_e = 4$ %.

19.9 Визначити, в скільки разів необхідно зменшити термодинамічну температуру чорного тіла, щоб його енергетична світність зменшилася в 16 разів.

Відповідь: $T_1/T_2 = 2$.

19.10 Яку температуру має тіло, яке за температури навколишнього середовища $T = 17\,^{\circ}C$ випромінює енергії в $n = 100$ разів більше, ніж поглинає?

Відповідь: $T = 916\,K$.

19.11 Чорне тіло має температуру $T_1 = 500\,K$. Якою буде температура T_2 тіла, якщо в результаті нагрівання енергетична світність тіла збільшиться в $n = 5$ разів?

Відповідь: $T_2 = 748\,K$.

19.12 Визначити температуру печі, якщо відомо, що з отвору в ній розміром $S = 6,1\,см^2$ за час $t = 1\,c$ випромінюється $W = 35\,Дж$ енергії. Випромінювання вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

Відповідь: $T = 1\,кK$.

19.13 Яку кількість енергії випромінює Сонце за $t = 1\,хв$? Випромінювання Сонця вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла. Температуру поверхні Сонця взяти такою, що дорівнює $T = 5,8\,кК$.

Відповідь: $W = 2,34\ 10^{29}\,Дж$.

19.14 Розжарена металева поверхня площею $S = 10\,см^2$ випромінює за одну хвилину $W = 4\cdot10^4\,Дж$ енергії. Температура поверхні дорівнює $T = 2,5\,кК$. Знайти: а) яке було б випромінювання цієї поверхні, якби вона була абсолютно чорною; б) відношення енергетичних світностей цієї поверхні та абсолютно чорного тіла за цієї температури.

Відповідь: а) $W = 1,33\cdot10^5$ Дж; б) $a_T = 0,3$.

19.15 Діаметр вольфрамової спіралі в електричній лампочці дорівнює $d = 0,3\,мм$, довжина спіралі $l = 5\,см$. У разі вмикання лампочки в коло з напругою $U = 127\,В$ через неї проходить струм силою $I = 0,31\,А$. Визначити температуру лампочки. Вважати, що за рівноваги все тепло, що виділяється в нитці, йде на випромінювання. Відношення енергетичних світностей вольфраму та абсолютно чорного тіла вважати для цієї температури таким, що дорівнює $0,31$.

Відповідь: $T = 2,5\,кК$.

19.16 Температура вольфрамової спіралі у 25-ватній електричній лампочці дорівнює $T = 2,45\,кК$. Відношення її енергетичної світності до енергетичної світності абсолютно чорного тіла за цієї температури дорівнює $a_T = 0,3$. Знайти величину випромінювальної поверхні спіралі.

Відповідь: $S = 4\cdot10^{-5}\,м^2$.

19.17 Знайти величину сонячної сталої, тобто кількість променистої енергії, випромінюваної Сонцем щохвилини через площадку $S = 1\,см^2$, перпендикулярну до сонячних променів, яка розміщена на такій самій відстані від нього, що й Земля. Температуру поверхні Сонця взяти такою, що дорівнює $T = 5800\,К$. Випромінювання Сонця вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

Відповідь: $N_C = 1{,}37 \cdot 10^3\,кВт$.

19.18 Енергетична світність чорного тіла $R_e = 10$ *кВт/м*^{2}. Визначити довжину хвилі, що відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світності цього тіла.

Відповідь: $\lambda_m = 4{,}47\,мкм$.

19.19 Температура чорного тіла $T = 2\,кК$. Визначити довжину хвилі λ_m, на яку припадає максимум енергії випромінювання, і випромінювальну здатність $(r_{л,\,T})_m$ для цієї довжини хвилі.

Відповідь: $\lambda_m = 1{,}45\,мкм$, $(r_{л,\,T})_m = 413$ *ГВт/м*^{3}.

19.20 Визначити температуру T й енергетичну світність абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 600\,нм$.

Відповідь: $T = 4830$ *К*, $R_e = 31$ *МВт/м*^{3}.

19.21 Максимум випромінювальної здатності Сонця припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 0{,}48\,мкм$. Вважаючи, що Сонце випромінює, як чорне тіло, визначити: а) температуру його поверхні; б) потужність, випромінювану поверхнею.

Відповідь: а) $T = 6{,}04\,кК$; б) $N = 4{,}58 \cdot 10^{26}\,Вт$.

19.22 Знайти, яку кількість енергії з $S = 1\,см^2$ поверхні за $t = 1\,с$ випромінює абсолютно чорне тіло, якщо відомо, що його максимальна випромінювальна здатність припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 484\,нм$.

Відповідь: $W = 7{,}35\,Дж$.

19.23 У яких частинах спектра містяться довжини хвиль, що відповідають максимуму випромінювальної здатності, якщо джерелом світла є: а) спіраль електричної лампочки $\left(T = 3\,кК\right)$; б) поверхня Сонця $\left(T = 6\,кК\right)$ і в) атомна бомба, в якій на момент вибуху температура досягає 10 млн градусів. Випромінювання вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

Відповідь: а) $\lambda_m = 1$ *мкм* – інфрачервона область; б) $\lambda_m = 5 \cdot 10^{-5}$ *см* – область видимого світла; в) $\lambda_m \sim 0{,}3$ *нм* – область рентгенівських променів.

19.24 На яку довжину хвилі припадає максимум випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла, що має температуру тіла людини, тобто $T = 37\,^{\circ}C$?

Відповідь: $\lambda_m = 9{,}3$ *мкм*.

19.25 Абсолютно чорне тіло має температуру $T_1 = 2{,}9\,кК$. Унаслідок охолодження цього тіла довжина хвилі, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, змінилася на $\Delta\lambda = 9\,мкм$. До якої температури T_2 охолодилося тіло?

Відповідь: $T_2 = 290\,К$.

19.26 Поверхня тіла нагріта до температури $T = 1\,кК$. Потім одна половина цієї поверхні нагрівається на $\Delta T = 100\,К$, інша – охолоджується на $\Delta T = 100\,К$. У скільки разів зміниться енергетична світність поверхні цього тіла?

Відповідь: збільшиться в 1,06 раза.

19.27 Яку потужність потрібно підводити до зачорненої металевої кульки радіусом $r = 2\,см$, щоб підтримувати її температуру на $\Delta T = 27\,^{\circ}C$ вищою за температуру навколишнього середовища? Температура навколишнього середовища дорівнює $T = 20\,^{\circ}C.$ Вважати, що тепло втрачається лише внаслідок випромінювання.

Відповідь: $N = 0{,}84\ Bm.$

19.28 Визначити поглинальну здатність тіла, для якого температура, виміряна радіаційним пірометром, дорівнює $T_{рад} = 1{,}4\,кК$, тоді як справжня температура тіла дорівнює $T = 3{,}2\,кК$.

Відповідь: $a_T = 0{,}037$.

19.29 Справжня температура розжареної вольфрамової стрічки дорівнює $T = 3{,}5\,кК.$ Яку температуру показує радіаційний пірометр, якщо поглинальна здатність вольфраму не залежить від частоти випромінювання й дорівнює $a_T = 0{,}35$?

Відповідь: $T_{рад} = 2\,692\,K.$

19.30 Температура поверхні Сонця $T_0 = 5\,500\ K.$ Оцінити температуру Землі за умови, що вона перебуває у стані теплової рівноваги. Припустити, що поглинальна здатність Сонця й Землі дорівнює одиниці.

Відповідь: $T = 266\ K$.

20 КВАНТОВА ПРИРОДА СВІТЛА. ФОТОЕФЕКТ ТА ЕФЕКТ КОМПТОНА

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

20.1 Енергія фотона

$$W_{\Phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

де h – стала Планка; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – стала Планка – Дірака; c – швидкість світла у вакуумі; ν – та λ – відповідно частота та довжина електромагнітного випромінювання.

20.2 Формула Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту:

а) у загальному випадку

$$W_{\Phi} = h\nu = A + W_{K\max},$$

де $W_{\Phi} = h\nu$ – енергія фотона, що падає на поверхню металу; A – робота виходу електрона з металу; $W_{K\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона;

б) у разі якщо енергія фотона значно більша за роботу виходу ($h\nu >> A$), то

$$h\nu = W_{K\max}.$$

20.3 Червона межа фотоефекту

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A}, \text{ або } \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A}; \; \nu_0 = \frac{A}{h}, \text{ або } \omega_0 = \frac{A}{\hbar},$$

де λ_0 – максимальна довжина хвилі випромінювання; ν_0 – та ω_0 – мінімальні частота й циклічна частота, за яких ще можливий фотоефект.

20.4 Зміна довжини хвилі $\Delta\lambda$ фотона під час розсіювання його на частинці (ефект Комптона) на кут θ:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1-\cos\theta)\text{, або } \Delta\lambda = 2\frac{2\pi\hbar}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

де m – маса частинки віддачі; λ і λ' – довжини падаючої та розсіяної хвиль.

20.5 Комптонівська довжина хвилі

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}.$$

(Під час розсіювання фотона на електроні $\lambda_C = 2{,}436$ *пм*).

У разі комптонівського розсіювання світла закон збереження енергії записують так:

$$W_\phi = W'_\phi + W_K,$$

де W_ϕ і W'_ϕ – енергія фотона до та після розсіювання відповідно; W_K – кінетична енергія частинки віддачі. Якщо ефект Комптона викликаний фотоном з енергією, набагато меншою за енергію спокою частинки, то можна використовувати нерелятивістське значення для W_K. У іншому випадку потрібно використовувати формули релятивістської механіки.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 20.1

Яку частину енергії фотона становить енергія, витрачена на виконання роботи виходу електронів із фотокатода, якщо червона межа фотоефекту для матеріалу фотокатода дорівнює $\lambda_0 = 540\,нм.$ Кінетична енергія фотоелектронів дорівнює $W_K = 0,5\,еВ$.

Розв'язування

$\eta - ?$

$\lambda_0 = 540\,нм = 5,4 \cdot 10^{-7}\ м,$
$W_K = 0,5\,еВ = 8 \cdot 10^{-20}\ Дж,$
$h = 6,63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с,$
$c = 3 \cdot 10^8\ м/с.$

Формула Ейнштейна для фотоефекту

$$W_Ф = h\nu = A + W_{K,\max}, \quad (1)$$

де $W_Ф = h\nu$ – енергія фотона, що падає на поверхню металу, де h – стала Планка; A – робота виходу електрона з металу; $W_{K,\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Довжина хвилі червоної межі дорівнює $\lambda_0 = hc/A$, звідси знайдемо роботу виходу електрона $A = hc/\lambda_0$ та підставимо у формулу (1):

$$W_Ф = \frac{hc}{\lambda_0} + W_K. \quad (2)$$

Частина енергії фотона, витрачена на виконання роботи виходу електронів із фотокатода, дорівнює

$$\eta = \frac{A}{W_{\Phi}} = \frac{hc}{\lambda_0 \left(hc/\lambda_0 + W_K \right)}. \qquad (3)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин остаточно одержимо

$$\eta = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} / 5,4 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} / 5,4 \cdot 10^{-7} + 8 \cdot 10^{-20}} =$$

$$= \frac{3,68 \cdot 10^{-19}}{3,68 \cdot 10^{-19} + 0,8 \cdot 10^{-19}} = 0,82.$$

Відповідь: $\eta = 82\,\%$.

Задача 20.2

На металеву пластину падає монохроматичний пучок світла з частотою $\nu = 7,3 \cdot 10^{14}\ Гц$. Червона межа фотоефекту для цього матеріалу дорівнює $\lambda_0 = 560\, нм$. Визначити максимальну швидкість $\mathrm{v}_{\max}$ фотоелектронів.

Розв'язування

$\mathrm{v}_{\max} - ?$

$\nu = 7,3 \cdot 10^{14}\ Гц$,

$\lambda_0 = 560\, нм = 5,6 \cdot 10^{-7}\ м$,

$m = 9,1 \cdot 10^{-31}\ кг$.

Для визначення максимальної швидкості фотоелектронів скористаємося рівнянням Ейнштейна для фотоефекту:

$$h\nu = A + \frac{m\mathrm{v}_{\max}^2}{2}. \qquad (1)$$

Робота виходу фотоелектронів із металу дорівнює

$$A = h\frac{c}{\lambda_0}. \quad (2)$$

Підставимо вираз (2) в (1):

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{m\text{v}_{\max}^2}{2}. \quad (3)$$

Розв'язавши це рівняння відносно швидкості, одержимо $\text{v}_{\max}$:

$$\text{v}_{\max}^2 = \frac{2h}{m}\left(\nu - \frac{c}{\lambda_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{v}_{\max} = \sqrt{\frac{2h}{m}\left(\nu - \frac{c}{\lambda_0}\right)}.$$

Підставивши числові значення фізичних величин в останнє співвідношення, одержимо відповідь

$$\text{v}_{\max} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}(7{,}3\cdot 10^{14} - \frac{3\cdot 10^{8}}{560\cdot 10^{-9}})} = 5{,}32\cdot 10^{5} \; (\textit{м/с}).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[\text{v}] = \sqrt{\frac{[h]}{[m]}\left([\nu] - \frac{[c]}{[\lambda]}\right)} = \sqrt{\frac{Дж\cdot с}{кг\cdot с}} = \sqrt{\frac{Н\cdot м\cdot с}{кг\cdot с}} = \sqrt{\frac{кг\cdot м^2}{кг\cdot с^2}} = \frac{м}{с}.$$

Відповідь: $\text{v}_{\max} = 5{,}32\cdot 10^{5}\; м/с$.

Задача 20.3

Фотон з енергією $W_{\Phi} = 10\,еВ$ падає на срібну пластину й спричиняє фотоефект. Визначити імпульс *p*, отриманий пластиною, вважаючи, що напрями руху фотона й фотоелектрона лежать на одній прямій, перпендикулярній до поверхні пластини.

Розв’язування

$p - ?$

$W_{\Phi} = 10\,еВ = 1,6 \cdot 10^{-18}\ Дж.$

Під час падіння фотона на срібну пластинку з неї вибивається фотоелектрон. Імпульс, що передається пластинці, складається з імпульсу фотоелектрона та імпульсу фотона:

$$p = p_{ф} + p_e\,. \tag{1}$$

Імпульс фотона дорівнює

$$p_{\Phi} = \frac{W_{\Phi}}{c}, \tag{2}$$

де c – швидкість світла.

Імпульс електрона визначаємо за співвідношенням

$$p_e = m\mathrm{v}_e\,. \tag{3}$$

Швидкість фотоелектрона знайдемо з рівняння Ейнштейна для фотоефекту:

$$W_{\Phi} = A + \frac{m\mathrm{v}_e^2}{2} \;\Rightarrow\; \mathrm{v}_e = \sqrt{\frac{2(W-A)}{m}}. \tag{4}$$

Підставивши вираз (4) в (3), одержимо

$$p_e = m\sqrt{\frac{2(W-A)}{m}} = \sqrt{2m(W-A)}\,. \tag{5}$$

Тепер підставимо співвідношення (2) і (5) в (1):

$$p = \frac{W_{\Phi}}{c} + \sqrt{2m(W-A)}\,. \tag{6}$$

Після підставлення числових значень величин одержимо відповідь:

$$p = \frac{10\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{3\cdot 10^{8}} + \sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{-19}\left(10\cdot 1{,}6 - 7{,}5\right)} =$$
$$= 1{,}24\cdot 10^{-19}\left(кг\cdot м/с\right).$$

Зробимо перевірку розмірності фізичної величини:

$$[p] = \frac{[W]}{[c]} + \sqrt{[m][W]} = \frac{Дж}{м/с} + \sqrt{кг\cdot Дж} =$$
$$= \frac{Н\cdot м\cdot с}{м} + \sqrt{кг\cdot Н\cdot м} = \frac{кг\cdot м\cdot с}{с^2} + \sqrt{\frac{кг\cdot кг\cdot м\cdot м}{с^2}} =$$
$$= \frac{кг\cdot м}{с} + \frac{кг\cdot м}{с} = \frac{кг\cdot м}{с}.$$

Відповідь: $p = 1{,}24\cdot 10^{-19}\,кг\cdot м/с$.

Задача 20.4

Визначити максимальну швидкість електрона, вибитого з поверхні металу γ-квантом з енергією $W_Ф = 1,53\,МеВ$.

Розв'язування

$\text{v} - ?$
$W_0 = 0,511\,МеВ = 8,18 \cdot 10^{-12}$ *Дж*, $W_Ф = 1,53\,МеВ = 2,45 \cdot 10^{-13}$ *Дж*, $c = 3 \cdot 10^8$ *м/с*.

Формула Ейнштейна для фотоефекту

$$W_Ф = h\nu = A + W_{K,\max},$$

де $W_Ф = h\nu$ – енергія фотона, що падає на поверхню металу, де h – стала Планка; A – робота виходу електрона з металу; $W_{K,\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Оскільки робота виходу є набагато меншою за енергію γ-кванта: $A \ll W_Ф$, то електрон буде релятивістським і його кінетичну енергію можна визначити зі співвідношення

$$W_K = W_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\text{v}^2/c^2}} - 1\right) = \frac{W_0}{\sqrt{1-\text{v}^2/c^2}} - W_0,$$

де W_0 – енергія спокою електрона; c – швидкість світла у вакуумі.

Виконаємо нескладні перетворення:

$$W_K + W_0 = \frac{W_0}{\sqrt{1-\text{v}^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{\text{v}^2}{c^2} = \left(\frac{W_0}{W_K + W_0}\right)^2,$$

$$\mathrm{v} = c\sqrt{1-\left(\frac{W_0}{W_K + W_0}\right)^2}\ .$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо обчислення:

$$\mathrm{v} = 3\cdot 10^8\sqrt{1-\left(\frac{0,511}{1,53+0,511}\right)^2} = 2,9\cdot 10^8\left(м/c\right).$$

Відповідь: $\mathrm{v} = 2,9\cdot 10^8\ м/c$.

Задача 20.5

Яка частка енергії фотона припадає за ефекту Комптона на електрон віддачі, якщо розсіювання фотона відбувається на кут $\theta = \dfrac{\pi}{2}$? Енергія фотона до розсіювання $W_1 = 0,51 MeB$.

Розв’язування

$\omega - ?$
$W_1 = 0,51 MeB$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Відповідно до формули Комптона зміна довжини хвилі фотона, розсіяного на електроні, дорівнює

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\left(1-\cos\theta\right).$$

де λ та λ' – довжини хвиль падаючого на електрон та розсіяного фотонів.

Виразимо довжини хвиль λ та λ' фотонів до чи після розсіювання через енергію, врахувавши, що $W = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$, тоді

$$\frac{hc}{W'} - \frac{hc}{W} = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta\right). \qquad (1)$$

Поділимо обидві частини рівності (1) на hc та одержимо

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{mc^2}\left(1 - \cos\theta\right).$$

Із цього співвідношення знайдемо енергію розсіяного фотона:

$$W' = \frac{W}{\dfrac{W}{mc^2}\left(1 - \cos\theta\right) + 1}.$$

Відповідно до закону збереження енергії кінетична енергія електрона віддачі дорівнює

$$W_k = W - W' = W - \frac{W}{\dfrac{W}{mc^2}\left(1 - \cos\theta\right) + 1}.$$

Тепер можемо визначити частку енергії, що припадає на електрон віддачі:

$$\omega = 1 - \frac{1}{\dfrac{W}{mc^2}\left(1 - \cos\theta\right) + 1}. \qquad (2)$$

Після підставлення у (2) числових значень фізичних величин одержимо

$$\omega = 1 - \frac{1}{\dfrac{0,51\cdot 10^{6}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}{9,1\cdot 10^{-31}\cdot (3\cdot 10^{8})^{2}}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{2}\right)+1} = 0,499.$$

Відповідь: $\omega = 0,499$.

Задача 20.6

Визначити імпульс електрона віддачі, якщо фотон з енергією $W_{Ф} = 1,53\,MeB$ у результаті розсіювання на вільному електроні втратив третину своєї енергії.

Розв'язування

$p - ?$
$W_{Ф} = 1,53\,MeB = 1,53\cdot 10^{-13}$ *Дж.*

Для розв'язування задачі спочатку знайдемо енергію розсіяного фотона. Для цього скористаємося формулою Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1-\cos\theta),$$

де λ, λ' – довжини хвиль падаючого на електрон та розсіяного фотонів.

Виразимо довжини хвиль λ' і λ відповідних фотонів через їх енергії E' і E. У результаті одержимо

$$\frac{hc}{W'}-\frac{hc}{W}=\frac{h}{mc}\left(1-\cos\theta\right). \qquad (1)$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на $2\pi\hbar c$:

$$\frac{1}{W'}-\frac{1}{W}=\frac{1}{mc^2}\left(1-\cos\theta\right). \qquad (2)$$

Врахуємо, що за умовою задачі енергія розсіяного фотона становить $W'=\frac{2W}{3}$, звідси одержимо:

$$\frac{3}{2W}-\frac{1}{W}=\frac{1-\cos\theta}{mc^2},$$

$$\frac{1}{2W}=\frac{1-\cos\theta}{mc^2},$$

$$1-\cos\theta=\frac{mc^2}{2W}. \qquad (3)$$

Тепер знайдемо із співвідношення (2) енергію розсіяного фотона W':

$$W'=\frac{W}{W\left(1-\cos\theta\right)/mc^2+1}. \qquad (4)$$

Кінетичну енергію електрона віддачі можна визначити за законом збереження енергії:

$$W_K=W-W'=W-\frac{W}{W\left(1-\cos\theta\right)/mc^2+1}.$$

Кінетична енергія пов’язана з імпульсом частинки співвідношенням

$$W_K = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{\left(m\mathrm{v}\right)^2}{2m} = \frac{{p_e}^2}{2m}.$$

Звідси

$$p_e = \sqrt{2mW_K}. \tag{5}$$

Підставивши у вираз (5) значення W_K із співвідношення (4), одержимо

$$p_e = \sqrt{2m\left(W - \frac{W}{W(1-\cos\theta)/mc^2+1}\right)}. \tag{6}$$

Нарешті, підставимо в (6) значення кута розсіювання фотона з виразу (3) та знайдемо

$$p_e = \sqrt{2m(W - \frac{W}{\frac{Wmc^2}{2W/mc^2}+1})} = \sqrt{2m\left(W - \frac{2W}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt{2mW\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}mW}.$$

Після підставлення числових величин остаточно одержимо

$$p_e = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}53 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 4{,}71 \cdot 10^{-22} \left(кг \cdot м / с \right).$$

Зробимо перевірку розмірності фізичної величини:

$$[p] = \sqrt{[m][W]} = \sqrt{кг \cdot Дж} = \sqrt{кг \cdot Н \cdot м} =$$

$$= \sqrt{\frac{кг \cdot кг \cdot м \cdot м}{c^2}} = \frac{кг \cdot м}{c}.$$

Відповідь: $p_e = 4{,}71 \cdot 10^{-22}\ кг \cdot м / с$.

Задача 20.7

Фотон розсіявся під кутом $\theta = 120^0$ на вільному електроні, що перебував у стані спокою. Внаслідок ефекту Комптона електрон одержав кінетичну енергію $W_K = 0{,}45\, МеВ.$ Визначити енергію фотона до розсіювання.

Розв'язування

$W - ?$
$W_K = 0{,}45\, МеВ = 7{,}2 \cdot 10^{-14}\ Дж,$ $\theta = 120^0,$ $c = 3 \cdot 10^8\ м/с,$ $W_0 = 0{,}511\, МеВ = 8{,}176 \cdot 10^{-14}\ Дж.$

Зміну довжини хвилі $\Delta\lambda$ фотона під час розсіювання його на частинці (ефект Комптона) на кут θ визначаємо за формулою

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}\left(1 - \cos\theta\right), \qquad (1)$$

де λ та λ' – довжини хвиль падаючого на електрон та розсіяного фотонів.

Виразимо довжини хвиль λ та λ' фотонів до й після розсіювання через енергію, врахувавши, що $W = h\nu = hc/\lambda$, тоді

$$\frac{hc}{W'} - \frac{hc}{W} = \frac{h}{m_0 c}\left(1-\cos\theta\right). \tag{2}$$

Поділимо обидві частини рівності (1) на hc та одержимо

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{m_0 c^2}\left(1-\cos\theta\right). \tag{3}$$

Кінетична енергія, яку одержав електрон унаслідок ефекту Комптона, дорівнює різниці енергій фотона до розсіювання та його енергії після розсіювання:

$$W_K = W - W', \quad \text{звідси} \qquad W' = W - W_K. \tag{4}$$

Підставимо вираз (4) у співвідношення (3) та одержимо

$$\frac{1}{W - W_K} - \frac{1}{W} = \frac{1}{m_0 c^2}\left(1-\cos\theta\right). \tag{5}$$

Врахуємо, що енергія спокою електрона дорівнює $W_0 = m_0 c^2$.

Виконаємо перетворення та одержимо квадратне рівняння відносно W:

$$W \cdot W_0 - \left(W - W_K\right)W_0 = \left(W - W_K\right)W\left(1 - \cos\theta\right),$$

або

$$\left(1 - \cos\theta\right)W^2 - W_K\left(1 - \cos\theta\right) \cdot W - W_K \cdot W_0 = 0\,. \qquad (6)$$

Позитивний корінь цього рівняння визначаємо за виразом

$$W = \frac{W_K\left(1 - \cos\theta\right)}{2\left(1 - \cos\theta\right)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{W_K{}^2\left(1 - \cos\theta\right)^2 + 4\left(1 - \cos\theta\right)W_K \cdot W_0}}{2\left(1 - \cos\theta\right)}.$$

Підставимо в цей вираз числові значення фізичних величин та визначимо енергію фотона до розсіювання:

$$W = \frac{0,45\left(1 - \cos 120^0\right)}{2\left(1 - \cos 120^0\right)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\left[0,45\left(1 - \cos 120^0\right)\right]^2 + 4\left(1 - \cos 120^0\right)0,45 \cdot 0,511}}{2\left(1 - \cos 120^0\right)} =$$

$$= 0,68\left(MeB\right) = 0,68 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} = 1,09 \cdot 10^{-13}\left(Дж\right).$$

Відповідь: $W = 0,68\,MeB$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

20.1 Знайти червону межу фотоефекту для літію.

Відповідь: $\lambda_0 = 517\,нм$.

20.2 Червона межа фотоефекту для деякого металу дорівнює $\lambda_0 = 275\,нм.$ Чому дорівнює мінімальне значення енергії фотона, що спричиняє фотоефект?

Відповідь: $W_0 = 4,5\,MeB.$

20.3 Червона межа фотоефекту для цинку $\lambda_0 = 310\,нм.$ Визначити максимальну кінетичну енергію $W_{\max}$ фотоелектронів в електрон-вольтах, якщо на цинк падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 200\,нм.$

Відповідь: $W_{\max} = 2,2\,eB$.

20.4 Червона межа фотоефекту для деякого металу дорівнює $\lambda_0 = 275\,нм.$ Знайти: а) роботу виходу електрона з цього металу; б) максимальну швидкість електронів, що вириваються з цього металу світлом із довжиною хвилі $\lambda = 180\,нм$; в) максимальну кінетичну енергію цих електронів.

Відповідь: а) $A = 4,5\,eB$; б) $\mathrm{v}_{\max} = 9,1\cdot 10^5\ м/с$; в) $W_{\max} = 3,8\cdot 10^{-19}\ Дж.$

20.5 Якою є найменша частота світла, за якої ще можливий фотоефект, якщо робота виходу електронів з металу дорівнює $A = 2,06\,eB$?

Відповідь: $\nu_0 = 5\cdot 10^{14}\ Гц.$

20.6 Яку кінетичну енергію мають електрони, що вириваються з поверхні цезію під час опромінення її світлом із частотою $\nu = 10^{15}\ Гц$? Червона межа фотоефекту для цезію дорівнює $\nu_0 = 5\cdot 10^{14}\ Гц$.

Відповідь: $W_K = 2,06\,eB$.

20.7 На скільки зміниться довжина хвилі червоної межі фотоефекту, якщо цинковий катод фотоелемента замінити на літієвий?

Відповідь: $\Delta\lambda = 226\,нм$.

20.8 На фотоелемент із катодом із літію падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 200\,нм$. Знайти найменше значення затримувальної різниці потенціалів $U_з$ фотоелемента.

Відповідь: $U_з = 3{,}9\ еВ$.

20.9 Для припинення фотоефекту, спричиненого опромінюванням ультрафіолетовим світлом платинової пластинки, потрібно застосувати затримувальну різницю потенціалів $U_1 = 3{,}7\,В$. Якщо платинову пластинку замінити іншою, затримувальну напругу потрібно збільшити до $U_2 = 6\,В$. Визначити роботу виходу A електронів із поверхні цієї пластинки.

Відповідь: $A = 4\,еВ$.

20.10 На металеву пластину падає пучок ультрафіолетового випромінювання $\left(\lambda = 0{,}25\,мкм\right)$. Фотострум припиняється за мінімальної затримувальної різниці потенціалів $U_З = 0{,}96\,В$. Визначити роботу виходу A електронів із металу.

Відповідь: $A = 3{,}37\,еВ$.

20.11 Фотони з енергією $W = 5\,еВ$ виривають електрони з металу з роботою виходу $A = 4{,}7\,еВ$. Визначити максимальний імпульс p, отриманий пластиною. Вважати, що напрямки руху фотона й фотоелектрона лежать на одній прямій, перпендикулярній до поверхні пластини.

Відповідь: $p = 2{,}96 \cdot 10^{-19}\ кг\ м/с$.

20.12 На поверхню металу падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}1\,мкм$. Червона межа фотоефекту $\lambda_0 = 0,3\,мкм.$ Яка частка енергії фотона витрачається на надання електрону кінетичної енергії?

Відповідь: $\omega = 2/3$.

20.13 Визначити, до якого потенціалу зарядиться ізольована срібна кулька в разі опромінення її ультрафіолетовим світлом із довжиною хвилі $\lambda = 208\,нм.$ Робота виходу електронів із срібла $A = 4,7\,еВ.$

Відповідь: $\varphi = 1,27\,В.$

20.14 Катод фотоелемента освітлений монохроматичним світлом із довжиною хвилі $\lambda.$ За від'ємного потенціалу на аноді $U_1 = -1В$ струм у колі припиняється. За зменшення довжини хвилі в півтора раза для припинення струму знадобилося подати на анод від'ємний потенціал $U_2 = -3,5\,В.$ Визначити роботу виходу матеріалу катода.

Відповідь: $A = 2\,еВ.$

20.15 У разі освітлення катода вакуумного фотоелемента монохроматичним світлом із довжиною хвилі $\lambda = 310\,нм$ фотострум припиняється за певної затримувальної напруги. У разі збільшення довжини хвилі на 25 % затримувальна напруга зменшиться на $\Delta U = 0,8\,В,$ Визначити за цими експериментальними даними сталу Планка.

Відповідь: $h = 6,61 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$.

20.16 Рентгенівське випромінювання довжиною хвилі $\lambda = 55,8\,пм$ розсіюється плиткою графіту (комптон-ефект). Визначити довжину хвилі λ_1 світла, розсіяного під кутом $\theta = 60^0,$ до напрямку падаючого пучка світла.

Відповідь: $\lambda_1 = 57\,пм.$

20.17 Визначити кут θ розсіювання фотона, що зіткнувся з вільним електроном, якщо зміна довжини хвилі під час розсіювання дорівнює $\Delta\lambda = 3,62\,пм.$

Відповідь: $\theta = 120^0$ або $\theta = 240^0$.

20.18 Визначити максимальну зміну довжини хвилі $\Delta\lambda_{\max}$ під час комптонівського розсіювання світла на вільних електронах і вільних протонах.

Відповідь: $\Delta\lambda_e = 4,84\,нм$, $\Delta\lambda_p = 2,64\,фм$.

20.19 Яка частина енергії фотона за ефекту Комптона припадає на нейтрон віддачі, якщо кут розсіяння $\theta = 180^0$? Енергія фотона до розсіювання дорівнює $W = 5\,МеВ$.

Відповідь: $\eta = 0,004$.

20.20 Гамма-квант з енергією $W = 1\,МеВ$ розсіюється під кутом $\theta = 90^0$ на вільному протоні, який перебуває в стані спокою. Визначити, яка кінетичну енергію гамма-квант надає протону. З якою швидкістю буде рухатися протон після зіткнення?

Відповідь: $W_K = 1,07\,кеВ$, $\mathrm{v} = 4,5 \cdot 10^5\,м/с$.

20.21 У скільки разів довжина хвилі гамма-випромінювання, розсіяного під кутом $\theta = 180^0$ до початкового напрямку, більша за довжину хвилі падаючого випромінювання $(\lambda = 2,7\,пм)$?

Відповідь: у 2,8 раза.

20.22 У результаті ефекту Комптона фотон з енергією $W_1 = 1,02\,МеВ$ був розсіяний на вільних електронах на кут $\theta = 150^0$. Визначити енергію W_2 розсіяного фотона.

Відповідь: $W_2 = 0,22\,МеВ$.

20.23 Яка частина енергії фотона за ефекту Комптона припадає на електрон віддачі, якщо кут розсіяння $\theta = 180^0$? Енергія фотона до розсіювання дорівнює $W = 0,255\,МеВ$.

Відповідь: $\omega = 0,5$.

20.24 Фотон з енергією $W_1 = 0,51 MeB$ під час розсіювання на вільному електроні втратив половину своєї енергії. Визначити кут розсіювання θ.

Відповідь: $\theta = 90^0$.

20.25 Визначити імпульс p електрона віддачі за ефекту Комптона, якщо фотон з енергією, що дорівнює енергії спокою електрона, був розсіяний на кут $\theta = 180^0$.

Відповідь: $p = 3,6 \cdot 10^{-22}$ *кг · м/с*.

20.26 Рентгенівські промені з довжиною хвилі $\lambda = 20\,нм$ унаслідок ефекту Комптона розсіюються під кутом $\theta = \pi/2$. Визначити: а) зміну довжини хвилі рентгенівських променів під час розсіювання; б) енергію електрона віддачі; в) імпульс електрона віддачі.

Відповідь: а) $\Delta\lambda = 2,4\,пм$; б) $W_k = 6,6\,кеВ$;
в) $p_e = 4,4 \cdot 10^{-23}\,кг \cdot м/с$.

20.27 Рентгенівські промені з довжиною хвилі $\lambda = 70,8\,пм$ розсіюються парафіном. Визначити довжину хвилі рентгенівських променів, розсіяних у напрямках: а) $\theta = \pi/2$; б) $\theta = \pi$ до початкового напрямку пучка.

Відповідь: а) $\lambda' = 73,2\,пм$; б) $\lambda' = 75,6\,пм$.

20.28 Фотон з енергією $W = 1,025\,MeB$ розсіявся на вільному електроні, що спочатку перебував у стані спокою. Визначити кут розсіювання фотона, якщо довжина хвилі розсіяного фотона дорівнює комптонівській довжині хвилі.

Відповідь: $\theta = 60^0$.

20.29 Вузький пучок монохроматичного рентгенівського випромінювання падає на речовину. З'ясувалося, що довжини хвиль випромінювання, розсіяного під кутами $\theta = 60^0$ і $\theta = 120^0$, відрізняються в півтора раза. Визначити довжину хвилі падаючого випромінювання, припустивши, що розсіювання відбувається на вільних електронах.

Відповідь: $\lambda = 3,64\,пм$.

20.30 Фотон з енергією $W = 0,25\,МеВ$ розсіявся на вільному електроні, що спочатку перебував у стані спокою. Внаслідок ефекту Комптона довжина хвилі фотона змінилася на 20 %. Визначити кінетичну енергію електрона віддачі.

Відповідь: $W_K = 41,7\,кеВ$.

21 ТЕОРІЯ ДЕ-БРОЙЛЯ. РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

21.1 Довжина хвилі де Бройля:

а) у класичному наближенні $\left(\mathrm{v} \ll c,\ p = m_0\mathrm{v}\right)$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\mathrm{v}},$$

де m_0 – маса спокою частинки; v – її швидкість; $\hbar$ – стала Планка – Дірака, $\hbar = h/2\pi$;

б) у релятивістському випадку

$$\left(\mathrm{v} \approx c,\ p = \frac{m_0\mathrm{v}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/\mathrm{c}^2}}\right)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\mathrm{v}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}.$$

21.2 Зв'язок довжини хвилі де Бройля з кінетичною енергією частинки W_K:

а) в класичному наближенні $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0W_K}}$;

б) у релятивістському випадку $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)}}$,

де W_0 – енергія спокою частинки $\left(W_0 = m_0c^2\right)$.

21.3 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга:

а) для координати та імпульсу частинки

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar ,$$

де Δp_x – невизначеність проєкції імпульсу частинки на вісь x; Δx – невизначеність її координати;

б) для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar ,$$

де ΔW – невизначеність енергії цього квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

21.4 Одновимірне часове рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} ,$$

де i – уявна одиниця $\left(i = \sqrt{-1}\right)$; m – маса частинки; ψ – хвильова функція, що описує стан частинки.

Хвильова функція, що описує одновимірний рух вільної частинки,

$$\psi\left(x, t\right) = A \exp \frac{i}{\hbar}\left(px - Wt\right),$$

де A – амплітуда хвилі де Бройля; p – імпульс частинки; W – повна енергія частинки.

21.5 Умова нормування хвильової функції

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi\left(x, t\right)\right|^2 dV = 1 .$$

21.6 Одновимірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(W - U\right)\psi = 0 ,$$

де W – повна енергія частинки; *U (x)* – потенціальна енергія; ψ *(x)* – координатна (або амплітудна) частина хвильової функції.

21.7 Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів у тривимірному випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial^2 z} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(W - U\right)\psi = 0 .$$

Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів в операторній формі

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(W - U\right)\psi = 0 ,$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$ – оператор Лапласа.

21.8 Рівняння Шредінгера гармонічного осцилятора

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(W - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0,$$

де m – маса частинки; $\omega = \sqrt{k/m}$ – власна частота класичного гармонічного осцилятора; k – коефіцієнт жорсткості.

Під час розв'язування рівняння Шредінгера потрібно враховувати стандартні умови, які повинна задовольняти хвильова функція: скінченність (в усьому просторі), однозначність, неперервність самої ψ-функції та її першої й другої похідних.

21.9 Ймовірність $d\Psi$ знайти частинку в інтервалі від x до $x + dx$ (в одновимірному випадку) визначають за формулою

$$d\Psi = \left|\psi(x)\right|^2 dx,$$

де $\left|\psi(x)\right|^2$ – густина ймовірності.

Ймовірність Ψ знайти частинку в інтервалі від x_1 до x_2 визначають інтегруванням $d\Psi$ за зазначеними межами інтегрування:

$$\Psi = \int_{x_1}^{x_2} \left|\psi(x)\right|^2 dx.$$

21.10 Власні значення енергії W_n частинки, що перебуває на n-му енергетичному рівні в нескінченно

глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, визначають за формулою

$$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad \left(n = 1, 2, 3, ...\right),$$

де l – ширина потенціальної ями.

Власна хвильова функція, що відповідає цій енергії, має вигляд

$$\psi_n\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x .$$

Власні значення енергії гармонічного осцилятора

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega ,$$

де n = 0, 1, 2, 3, …

Енергія нульових коливань гармонічного осцилятора

$$W_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega .$$

21.11 Коефіцієнт заломлення $n_з$ **хвиль де Бройля** на межі невисокого потенціального бар’єра нескінченної ширини (рис. 1)

$$n_з = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_1}{k_2} ,$$

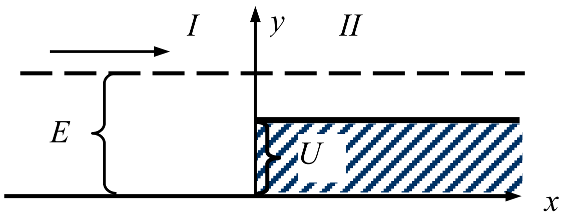


Рисунок 1 – Проходження квантовою частинкою невисокого потенціального бар’єра нескінченної ширини

де λ_1 і λ_2 – довжини хвиль де Бройля в областях *I* і *II* (частинка рухається з області *I* в область *II*); k_1 і k_2 – відповідні значення хвильових чисел.

21.12 Коефіцієнти відбивання ρ і проходження τ хвиль де Бройля на межі невисокого $(U < W)$ потенціального бар’єра нескінченної ширини (рис. 1):

$$\rho = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2, \quad \tau = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2},$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа хвиль де Бройля в областях *I* і *II*.

21.13 Коефіцієнт прозорості *D* прямокутного потенціального бар’єра скінченної ширини

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} d\sqrt{2m(U - W)}\right],$$

де U – висота потенціального бар’єра; W – енергія частинки; d – ширина бар’єра; m – маса частинки.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 21.1

Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорювальну різницю потенціалів U. Знайти довжину хвилі де Бройля λ для двох випадків: а) $U_1 = 60\,B$; б) $U_2 = 600\,кB$.

Розв'язування

$\lambda - ?$
$U_1 = 60\,B$, $U_2 = 600\,кB = 6 \cdot 10^5\ B$.

Довжина хвилі де Бройля λ частинки залежить від її імпульсу p, її визначають за виразом

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \qquad (1)$$

Імпульс частинки можна знайти, якщо відома її кінетична енергія E_k. Зв'язок імпульсу з кінетичною енергією для нерелятивістського (якщо $W_K \le W_0$) і релятивістського (якщо $W_K \approx W_0$) випадків визначається за співвідношеннями:

$$p = \sqrt{2m_0 W_K}\ ,\ p = \frac{1}{c}\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)},$$

де $W_0 = m_0 c^2$ – енергія спокою частинки.

Вираз (1) з урахуванням цих співвідношень запишемо в нерелятивістському та релятивістському випадках таким чином:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 W_K}}, \ \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)}}. \tag{2}$$

Порівняємо кінетичні енергії електронів, що пройшли задані в умові задачі різниці потенціалів $U_1 = 60\ B,\ U_2 = 600\ кB$, з енергією спокою електрона й залежно від цього зробимо висновок, яку з наведених формул необхідно використовувати для розрахунків довжини хвилі де Бройля.

Кінетична енергія електрона, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів U, дорівнює

$$W_K = |e|U. \tag{3}$$

У першому випадку

$$W_{K1} = |e|U_1 = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 60\ Дж = 60\,eB = 0,5\cdot 10^{-4}\ MeB,$$

тобто енергія набагато менша від енергії спокою електрона: $W_0 = m_0c^2 = 0,51\,MeB$. Тому для розрахунків можна використати нерелятивістську формулу.

У другому випадку кінетична енергія

$$W_{K2} = |e|U_2 = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^{5}\ Дж = 0,6\,MeB,$$

тобто більша за енергію спокою електрона. Тому в цьому випадку необхідно використати релятивістську формулу.

З урахуванням виразу (3) співвідношення (2) наберуть вигляду:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{eU_2\left(eU_2 + 2m_0c^2\right)}}. \qquad (4)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (4) одержимо відповідь:

$$\lambda_1 \frac{6,63\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 60}} = 1,58\cdot 10^{-10}\left(м\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{\sqrt{\left(2\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\right)^2 + 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^{5}\right)1,6\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^{5}}} =$$

$$= 1,26\cdot 10^{-12}\left(м\right).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$\frac{\left|\hbar\right|}{\left(\left|m\right|\left|e\right|\left|U\right|\right)^{1/2}} = \frac{1\,Дж\cdot с}{\left(1\,кг\cdot 1\,Кл\cdot 1\,В\right)^{1/2}} = \left(\frac{1\,Дж}{1\,кг}\right)^{1/2} 1\,с =$$

$$= \left(\frac{1\,кг\cdot м^2/с^2}{1\,кг}\right)^{1/2}\cdot 1\,с = 1\,м.$$

Відповідь: $\lambda_1 = 1,58\cdot 10^{-10}\,м$, $\lambda_2 = 1,26\cdot 10^{-12}\,м$.

Задача 21.2

Паралельний пучок моноенергетичних електронів спрямований на вузьку щілину шириною $b = 1\,мкм$, Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, який міститься на відстані $l = 20\,см$ від щілини, ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x = 48\,мкм$.

Розв'язування

$\mathrm{v} - ?$
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,кг$, $b = 1\,мкм = 10^{-6}\,м$, $l = 20\,см = 0{,}2\,м$, $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,Дж/с$, $\Delta x = 48\,мкм = 4{,}8 \cdot 10^{-5}\,м$.

Умова мінімумів під час дифракції на щілині

$$b \sin\varphi = \pm k\lambda, \qquad (1)$$

де b – ширина щілини; φ і k – кут і порядок дифракції; λ – довжина хвилі. В умові цієї задачі $k = 1$, тоді $\sin\varphi = \lambda/b$. З рисунка 2 знаходимо, що ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x = 2l\,\mathrm{tg}\varphi$. Оскільки кут φ є малим $(\Delta x \ll l)$, то $\sin\varphi \simeq \mathrm{tg}\varphi$. Отже,

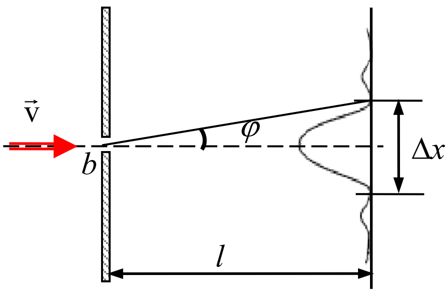


Рисунок 2

$$\Delta x = 2l \sin\varphi = \frac{2l\lambda}{b} \;\Rightarrow \lambda = \frac{\Delta x b}{2l}. \qquad (3)$$

Довжину хвилі де-Бройля λ частинки, що залежить від її швидкості, визначаємо за виразом

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m\mathrm{v}} \Rightarrow \mathrm{v} = \frac{2\pi\hbar}{m\lambda} = \frac{4\pi\hbar l}{m\Delta x b}. \tag{4}$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$\mathrm{v} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 0{,}2}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}} =$$

$$6{,}06 \cdot 10^{6} \left(м/с \right) = 6{,}06 \left(Мм/с \right).$$

Відповідь: $\mathrm{v} = 6{,}06\, Мм/с$.

Задача 21.3

Кінетична енергія електрона в атомі водню приблизно дорівнює $W_K = 10\, еВ$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

Розв'язування

l_{min} – ?
$W_K = 10\, еВ = 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ *Дж.*

Для розв'язування задачі використаємо співвідношення невизначеностей

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

де Δx – невизначеність координати частинки; Δp_x – невизначеність імпульсу частинки; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

Нехай атом має лінійні розміри l, тоді електрон атома буде перебувати десь у межах цієї області з похибкою

$$\Delta x = \frac{l}{2}.$$

У цьому разі співвідношення невизначеностей набирає вигляду

$$\left(\frac{l}{2}\right)\Delta p_x \geq \hbar,$$

Звідси

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}. \tag{1}$$

Фізично розумна невизначеність імпульсу Δp_x не повинна перевищувати значення самого імпульсу p_x, тобто $\Delta p_x \leq p_x$. Імпульс p_x пов'язаний із кінетичною енергією W_K співвідношенням

$$p_x = \sqrt{2mW_K}.$$

Підставивши ці вирази в (1) та перейшовши від нерівності до рівності, одержимо

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mW_K}}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо таку відповідь:

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = 1,23 \cdot 10^{-10} \left(м \right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{\sqrt{[m][W_k]}} = \frac{1 Дж \cdot с}{\sqrt{1 кг \cdot 1 Дж}} = \sqrt{\frac{1 Дж}{1 кг}} \cdot 1\, с =$$

$$= \sqrt{\frac{1 кг \cdot м^2 / с^2}{1 кг}} \cdot 1\, с = 1\, м.$$

Відповідь: $l_{\min} = 1,23 \cdot 10^{-10}\ м$.

Задача 21.4

Електрон із кінетичною енергією $W_K = 15\, еВ$ локалізований в області розміром $l = 1\, мкм.$ Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості.

Розв'язування

$\Delta v_x / v_x - ?$
$W_K = 10\, еВ = 1,6 \cdot 10^{-18}\ Дж.$

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга має вигляд

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar\,, \tag{1}$$

де Δx – невизначеність координати електрона; Δp_x – невизначеність його імпульсу.

Врахуємо, що імпульс частинки дорівнює

$$p = m\text{v} \Rightarrow \Delta p = m\Delta \text{v}_x . \qquad (2)$$

Підставимо вираз (1) у (2) та одержимо

$$\Delta x m \Delta \text{v}_x \geq \hbar .$$

Врахуємо, що $\Delta x = d/2$, тоді

$$\frac{d}{2} m \Delta \text{v}_x \geq \hbar .$$

Звідси

$$\Delta \text{v}_x \geq \frac{2\hbar}{md} . \qquad (3)$$

Імпульс частинки пов’язаний із його кінетичною енергією виразом

$$p = m\text{v} = \sqrt{2mW_K} .$$

З рівняння знайдемо, що

$$\text{v} = \sqrt{\frac{2mW_K}{m^2}} = \sqrt{\frac{2W_K}{m}} . \qquad (4)$$

Відносну невизначеність швидкості електрона визначимо розділивши рівняння (3) на (4):

$$\frac{\Delta v_x}{v} = \frac{2\hbar}{md\sqrt{\frac{2W_K}{m}}} = \frac{2\hbar}{d\sqrt{2mW_K}} .$$

Після підставлення числових значень величин одержимо

$$\frac{\Delta v_x}{v} = \frac{2\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}}{10^{-6}\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10}} = 3{,}18\cdot 10^{-4} .$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{[d]\sqrt{[m][W_K]}} = \frac{Дж\cdot с}{м\cdot\sqrt{кг\cdot Дж}} = \sqrt{\frac{Дж}{кг}}\cdot\frac{с}{м} =$$

$$= \sqrt{\frac{кг\cdot м^2}{кг\cdot с^2}} = \frac{м}{с}\cdot\frac{с}{м} = 1 .$$

Відповідь: $\frac{\Delta v_x}{v} = 3{,}18\cdot 10^{-4}$.

Задача 21.5

Довжина хвилі фотона, випромінюваного атомом, дорівнює $\lambda = 0{,}6\,мкм$. Враховуючи, що час життя збудженого стану $\Delta t = 10^{-8}\,с$, визначити відношення природної ширини енергетичного рівня, на який електрон був збуджений, до енергії, випромінюваної атомом.

Розв'язування

$\Delta W/W - ?$

$\lambda = 0,6\ мкм = 6 \cdot 10^{-7}\ м,$
$\Delta t = 10^{-8}\ с.$

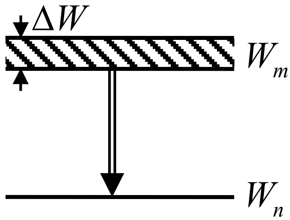


Рисунок 3

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar ,$$

де ΔW – невизначеність енергії цього квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

$$\Delta W = \hbar / \Delta t .$$

Енергія, випромінювана атомом, дорівнює

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

тоді відношення ширини енергетичного рівня, на який електрон був збуджений, до енергії, випромінюваної атомом, дорівнює

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\hbar\lambda}{\Delta t h c} = \frac{\hbar\lambda}{2\pi\hbar c \Delta t} = \frac{\lambda}{2\pi c \Delta t} .$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо розрахунки:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-8}} = 3{,}18 \cdot 10^{-8}.$$

Відповідь: $\Delta W / W = 3{,}18 \cdot 10^{-8}$.

Задача 21.6

Електрон перебуває в одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною l (рис. 4). У яких точках та інтервалі $0 \leq x \leq l$ густина ймовірності перебування електрона на першому та другому енергетичних рівнях однакова? Розрахувати густину ймовірності для цих точок.

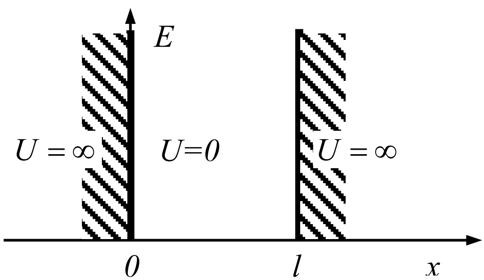


Рисунок 4 – Частинка в одновимірній потенціальній ямі

Розв’язування

$x - ?\ \ W - ?$
l, $W_1 = W_2$.

Припустимо, що квантова частинка може рухатися лише вздовж осі x. У цьому разі рух обмежується непроникними для частинки стінками: $x = 0$ і $x = l$. Потенціальна енергія має вигляд, зображений на рисунку 4: вона дорівнює нулю за $0 \le x \le l$ і перетворюється на нескінченність за $x < 0$ та $x > l$.

Для розв’язування задачі використаємо рівняння Шредінгера для одновимірного випадку:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U\right)\psi=0. \qquad (1)$$

За межі потенціальної ями частинка потрапити не може. Тому ймовірність виявлення частинки зовні ями дорівнює нулю. Відповідно й функція ψ за межами потенціальної ями повинна дорівнювати нулю. З умови неперервності випливає, що хвильова функція ψ дорівнює нулю й на межах ями, тобто

$$\psi(0)=\psi(l)=0. \qquad (2)$$

Цю умову повинен задовольняти розв'язок рівняння (1).

В області $0<x<l$, де хвильова функція не дорівнює нулю, рівняння (1) має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$$

(у цій області $U=0$). Введемо позначення

$$k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E,$$

у результаті одержимо добре відоме з теорії коливань співвідношення

$$\psi''+k^2\psi=0.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\psi(x) = A\sin(kx+\alpha).$$

Умову (2) можна задовольнити відповідним вибором сталих k і α. З умови $\psi(0)=0$ одержимо

$$\psi(0) = A\sin\alpha = 0,$$

звідси випливає, що стала α повинна дорівнювати нулю. Крім того, повинна виконуватись умова

$$\psi(l) = A\sin kl = 0, \qquad (3)$$

що можливо лише в разі, якщо

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

($n=0$ відпадає, оскільки в цьому разі $\psi=0$, тобто частинка не існує).

Підставивши значення k у співвідношення (3), одержимо власні функції частинки в потенціальній ямі шириною *l:*

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Для знаходження коефіцієнта *A* використаємо умову нормування хвильової функції, яка в цьому разі має вигляд

$$A^2\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = 1.$$

На кінцях проміжку інтегрування підінтегральна функція перетворюється на нуль. Тому значення інтеграла можна одержати помноживши середнє значення $\sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ (яке, як добре відомо, дорівнює 0,5) на довжину проміжку l: $A^2\left(\frac{1}{2}\right)l = 1$, звідси $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$. Таким чином, власні функції мають вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де $n = 1, 2, 3, ...$

На першому та другому енергетичних рівнях ці функції мають вигляд

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}. \qquad (4)$$

Ймовірність перебування частинки в будь-якій точці потенціальної ями на цих рівнях визначаємо за співвідношеннями:

$$W_1 = \int_0^l \psi_1^2(x)\,dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}dx,$$

$$W_2 = \int_0^l \psi_2^2(x)\,dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}dx.$$

Згідно з умовою задачі густина ймовірності перебування квантової частинки в деяких точках на першому й другому рівнях енергії однакова, звідси $\psi_1^{\,2}\left(x\right)=\psi_2^{\,2}\left(x\right)$. Після зіставлення співвідношень (4) одержимо

$$\frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}=\frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}.$$

Розв'язавши тригонометричне рівняння $\sin\frac{\pi x}{l}=\pm\sin\frac{2\pi x}{l}$, одержимо $x_1=\frac{l}{3}$, $x_2=\frac{2l}{3}$.

Підставивши відповідні значення x у співвідношення $W=\frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}$, одержимо таку відповідь:

$$W_1=\frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{2}{l}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2l},\;\; W_2=\frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi}{3}=\frac{3}{2l}.$$

Відповідь: $W=\frac{3}{2l}$.

Задача 21.7

Електрон перебуває в збудженому стані $\left(n=3\right)$ в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, ширина якої l. Визначити ймовірність Ψ виявлення електрона в середній третині ями. Зобразити графічно густину ймовірності виявлення електрона в цьому стані та пояснити фізичний зміст одержаного результату.

Розв'язування

$W-?$
$\psi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi n}{l}x,$ $n=3,$ $\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{2}{3}.$

Власна функція для частинки в потенціальній ямі має вигляд

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (1)$$

де l – ширина ями; n – головне квантове число (номер енергетичного рівня); x – координата частинки.

У нашому випадку

$$\psi_3(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right). \quad (2)$$

Густина ймовірності є квадратом модуля хвильової функції

$$\left|\psi_3(x)\right|^2=\frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right),$$

$\left|\psi_3(x)\right|^2=\max$ за умови

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right)=1\Rightarrow\frac{3\pi}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k=0,1,2,3,...$$

Таким чином, координати максимумів густини ймовірності виявлення частинки

$$x = \frac{l\left(1/2 + k\right)}{3} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{l}{6},\; x_2 = \frac{l}{2},\; x_3 = \frac{5l}{6},$$

$$\left|\psi_3\left(x\right)\right|^2 = \min \text{ за умови}$$

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3\pi}{l}x = \pi k,\; k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Відповідно координати мінімумів густини ймовірності виявлення частинки

$$x = kl/3 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = l/3,\; x_3 = 2l/3,\; x_4 = l.$$

Графічно густина ймовірності виявлення електрона в цьому стані зображена на рисунку 4.

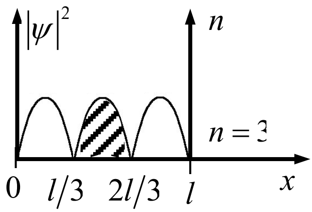


Рисунок 4 – Густина ймовірності виявлення електрона в потенціальній ямі на енергетичному рівні з головним квантовим числом $n = 3$

Ймовірність W виявлення електрона в середній третині ями визначається інтегралом, після розв'язування якого отримаємо

$$W = \int\limits_{l/3}^{2l/3} \left|\psi_3\left(x\right)\right|^2 dx = \int\limits_{l/3}^{2l/3} \frac{2}{l}\sin^2\frac{3\pi}{l}x\,dx =$$

$$=\frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{6\pi}{l}x\right)dx=\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}dx-\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\cos\frac{6\pi}{l}x\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}-\frac{1}{l}\frac{l}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}\left(\sin\frac{6\pi}{l}\frac{2l}{3}-\sin\frac{6\pi}{l}\frac{l}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}\left(\sin 4\pi-\sin 2\pi\right)=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $W=1/3$.

Задача 21.8

Визначити енергію основного стану атома водню.

Розв’язування

$W-?$
$n=1.$

Рівняння Шредінгера для тривимірного випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U\right)\psi=0.$$

Оскільки задача є симетричною, це рівняння зручно записати у сферичних координатах. Зв’язок між декартовими та сферичними координатами має такий вигляд:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=r\cos\theta.$$

Після підставлення цих виразів рівняння Шредінгера набирає вигляду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2\varphi}=-\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi\,. \quad (1)$$

Для того щоб одержати рівняння Шредінгера для атома водню, необхідно врахувати, що потенціальна енергія електрона має вигляд $U=-k\frac{e^2}{r}$, де $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Для розв'язування диференціального рівняння хвильову функцію візьмемо у вигляді $\psi=e^{-r/a}$. Підставляючи цей вираз у співвідношення (1) і враховуючи, що часткові похідні $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ та $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ перетворюються на нуль, одержимо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\left(e^{-r/a}\right)}{\partial r}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{k_0e^2}{r}\right)e^{-r/a}.$$

Після низки перетворень одержимо:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^2}{a}e^{-r/a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{k_0e^2}{r}\right)e^{-r/a},$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{a}-\frac{2r}{a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{k_0e^2}{r}\right),$$

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)-\left(\frac{2}{a}\right)\frac{1}{r}=-\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)-\left(\frac{2mk_0e^2}{\hbar^2}\right)\frac{1}{r}. \qquad (2)$$

Прирівнявши члени, що містять $\frac{1}{r}$, одержимо

$$\left(\frac{2}{a}\right)=\left(\frac{2mk_0e^2}{\hbar^2}\right),$$

звідси

$$a=\frac{\hbar^2}{k_0me^2}. \qquad (3)$$

Прирівнявши вільні члени рівняння (2), одержимо

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)=-\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right),$$

або

$$E=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

Підставляючи в це рівняння співвідношення (3), одержуємо кінцевий результат:

$$E=-k_0{}^2\frac{me^4}{2\hbar^2}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{me^4}{2\hbar^2}.$$

Після підставлення числових значень *m, e*, $\hbar$ знайдемо:

$$E = -\left(\frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\right)^2 \cdot \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^4}{2\cdot\left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2} =$$

$$= -\,21{,}8\cdot 10^{-19}\left(\textit{Дж}\right) = -13{,}6\left(eB\right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[E] = \frac{1}{[\varepsilon_0]^2}\frac{[m][e]^4}{[\hbar]^2} = \frac{\textit{кг}\cdot \textit{Кл}^4}{(\textit{Ф}/\textit{м})^2\ (\textit{Дж}\cdot \text{с})^2} = \frac{\textit{Кл}^4\cdot \textit{кг}\cdot \textit{м}^2}{\textit{Ф}^2\cdot \textit{Дж}^2\cdot c^2} =$$

$$= \frac{\textit{Ф}^4\cdot B^4\cdot H\cdot \textit{м}}{\textit{Ф}^2\cdot \textit{Дж}^2} = \frac{\textit{Ф}^2\cdot B^4}{\textit{Дж}} = \frac{\textit{Кл}^2 B^4}{B^2\textit{Дж}} = \frac{\textit{Кл}^2 B^2}{\textit{Дж}} = \frac{\textit{Дж}^2}{\textit{Дж}} = \textit{Дж}\,.$$

Відповідь: $W = 1 - 13{,}6\ eB$.

Задача 21.9

Моноенергетичний потік електронів $\left(W = 100\,eB\right)$ падає на низький прямокутний потенціальний бар’єр нескінченної ширини. Визначити висоту потенціального бар’єра *U*, якщо відомо, що 4 % електронів, що падають на бар’єр, відбивається.

Розв’язування

$U - ?$
$E = 100\ eB,$ $\rho = 0{,}4.$

Коефіцієнт відбивання електронів від низького потенціального бар’єра задаємо виразом

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 ,$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа, що відповідають руху електронів в областях *I* та *II*.

В області *I* кінетична енергія електрона дорівнює E_k, відповідно хвильове число задаємо виразом

$$k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE_k} .$$

Оскільки координата електрона не визначена, імпульс електрона визначається точно, а з цього випливає, що можна говорити про точне значення його кінетичної енергії.

В області *II* кінетична енергія електрона дорівнює $E - U$, відповідно хвильове число записуємо у вигляді

$$k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)} .$$

Коефіцієнт відбивання можна записати таким чином:

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{2mE} - \sqrt{2m(E-U)}}{\sqrt{2mE} + \sqrt{2m(E-U)}} \right)^2 . \qquad (1)$$

Поділимо чисельник та знаменник дробу (1) на $\sqrt{2mE}$:

$$\rho = \left(\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{U}{E}}}{1+\sqrt{1+\dfrac{U}{E}}} \right)^2 . \qquad (2)$$

Розв'язавши рівняння (2) відносно $\sqrt{1-\dfrac{U}{E}}$, одержимо

$$\sqrt{1-\frac{U}{E}} = \frac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}} .$$

Підносячи обидві частини рівності до квадрата, знайдемо висоту потенціального бар'єра:

$$U = \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}} \right)^2 \right] E . \qquad (3)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (3) одержуємо таку відповідь:

$$U = \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{0,04}}{1+\sqrt{0,04}} \right)^2 \right] 100 = 55,6 \ (eB) .$$

Відповідь: $U = 55,6$ *еВ*.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

21.1 Визначити довжину хвилі де Бройля λ електрона, якщо його швидкість $v = 1\,Мм/с$. Виконати такий самий розрахунок для протона.

Відповідь: $\lambda = 0{,}73\ нм$, $\lambda = 3{,}8 \cdot 10^{-13}\ нм$.

21.2 Кінетична енергія протона дорівнює його енергії спокою. Обчислити довжину хвилі де Бройля цього протона.

Відповідь: $\lambda_p = 2{,}7\ пм$.

21.3 Визначити, за якої швидкості руху довжина хвилі де Бройля для електрона дорівнює комптонівській довжині хвилі.

Відповідь: $v = 2{,}12 \cdot 10^8\ м/с$.

21.4 Заряджена частинка, прискорена різницею потенціалів $U = 500\,В$, має довжину хвилі де Бройля $\lambda = 1{,}282\ пм$. Вважаючи заряд частинки таким, що дорівнює заряду електрона, визначити її масу.

Відповідь: $m = 1{,}672 \cdot 10^{-27}\ кг$.

21.5 Визначити кінетичні енергії протона та електрона, для яких довжина хвилі де Бройля дорівнює $\lambda = 0{,}06\ нм$.

Відповідь: $W_{K,p} = 727\,фДж$, $W_{K,e} = 0{,}396\ фДж$.

21.6 Протон має кінетичну енергію, що дорівнює його енергії спокою. У скільки разів зміниться довжина хвилі де Бройля протона, якщо його кінетична енергія збільшиться вдвічі?

Відповідь: $\lambda_2/\lambda_1 = 1{,}63$.

21.7 Якої енергії необхідно додатково надати електрону, щоб його дебройлівська довжина хвилі зменшилася від $\lambda_1 = 100\,пм$ до $\lambda_2 = 50\,пм$?

Відповідь: $W = 0{,}45\,кеВ$.

21.8 Електрон рухається по колу радіусом $r = 0,5\,см$ в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 8$ *мТл*. Визначити довжину хвилі де Бройля λ електрона.

Відповідь: $\lambda = 0,1$ *нм*.

21.9 Знайти довжину хвилі де Бройля для α-частинки, нейтрона та молекули азоту, що рухаються із середньою квадратичною швидкістю за температури $t = 25\ ^\circ C$.

Відповідь: $\lambda_\alpha = 73\,пм$, $\lambda_n = 145\,пм$, $\lambda_N = 28\,пм$.

21.10 Визначити довжину хвилі де Бройля для електрона, що рухається по першій борівській орбіті в атомі водню.

Відповідь: $\lambda_e = 0,33$ *нм*.

21.11 Використовуючи постулати Бора, знайти зв'язок між довжиною хвилі де Бройля та довжиною колової електронної орбіти.

Відповідь: $l_n = n\lambda_n$.

21.12 Скориставшись співвідношенням невизначеностей, оцінити розмитість енергетичного рівня в атомі водню: а) для основного стану; б) для збудженого стану (час його життя дорівнює $\tau = 10^{-8}\,c$).

Відповідь: а) $\Delta W = 0$; б) $\Delta W = 414\,неВ$.

21.13 Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити розміри ядра атома, вважаючи, що мінімальна енергія нуклона в ядрі 8 *МеВ*.

Відповідь: $d = 1,6$ *фм*.

21.14 Використовуючи співвідношення невизначеностей, показати, що в ядрі не можуть перебувати електрони. Лінійні розміри ядра взяти такими, що дорівнюють $d = 5,8 \cdot 10^{-15}\,м$. Врахувати, що питома енергія зв'язку в середньому становить 8 *МеВ/нуклон*.

Відповідь: $W = 80\,МеВ \gg 8\,МеВ$.

21.15 Середня кінетична енергія електрона в основному стані атома водню дорівнює $W_k = 13,6\,eB$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, знайти найменшу похибку, з якою можна обчислити координату електрона в атомі.

Відповідь: Δx = 52,8 *пм*.

21.16 Оцінити найменші похибки, з якими можна визначити швидкість електрона, протона та кульки масою $m = 1\,мг$, якщо координати частинок і центра кульки встановлені з невизначеністю Δx = 1 *мкм*.

Відповідь: $\Delta \text{v}_e = 115\,м/c$, $\Delta \text{v}_p = 0,063\,м/c$, $\Delta \text{v}_к = 10^{-22}\,м/c$.

21.17 Електрон із кінетичною енергією $W_k = 15\,eB$ = = 15 *еВ* міститься в металевій пилинці діаметром d = 1 мкм. Оцінити відносну похибку $\Delta \text{v}/\text{v}$, із якою може бути визначена його швидкість.

Відповідь: $\Delta \text{v}/\text{v} = 10^{-4}$.

21.18 Електронний пучок прискорюється в електронно-променевій трубці різницею потенціалів $U = 1\,кB$. Відомо, що невизначеність швидкості дорівнює 0,1 % від її числового значення. Визначити невизначеність координати електрона. Чи є електрони в такому досліді класичною частинкою?

Відповідь: $\Delta x = 38,8\,нм$, ні.

21.19 Знайти невизначеність енергії електрона, коли він перебуває в атомі діаметром $d = 0,3\,нм$.

Відповідь: $\Delta W = 16,7\,eB$.

21.20 Атом випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 0,55\,мкм$. Тривалість випромінювання $\Delta t = 10\,нс$. Визначити найменшу похибку, з якою можна виміряти довжину хвилі випромінювання.

Відповідь: $\Delta\lambda = 1,6 \cdot 10^{-14}$ *м*.

21.21 Знайти хвильову функцію і значення енергії частинки масою *m*, що перебуває в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною l.

Відповідь: $\psi = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $E = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$.

21.22 Частинка в потенціальний ямі шириною l перебуває в збудженому стані. Визначити ймовірність знаходження частинки в інтервалі $0 < x < l/4$ на другому енергетичному рівні.

Відповідь: $\Psi = 0,25$.

21.23 Електрон перебуває в потенціальній ямі шириною *l*. У яких точках в інтервалі *(0 < x < l)* густина ймовірностей перебування електрона на першому й другому енергетичних рівнях однакова? Підрахувати густину ймовірності для цих точок. Розв’язок пояснити графічно.

Відповідь: $x_1 = \dfrac{l}{3}$, $x_2 = \dfrac{2l}{3}$, $|\varphi(x)|^2 = \dfrac{3}{2l}$.

21.24 Частинка в потенціальному ящику перебуває в основному стані. Яка ймовірність *W* знаходження частинки: а) в середній третині ящика; б) у крайній третині ящика?

Відповідь: а) *W* = 0,61; б) *W* = 0,2.

21.25 Частинка в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною *l* перебуває в збудженому стані (*n* = 3). Визначити, в яких точках інтервалу $0 < x < l$ густина ймовірності перебування частинки має максимальне та мінімальне значення.

Відповідь: $W_{\min} \Rightarrow x = \dfrac{l}{3}, \dfrac{2l}{3}$; $W_{\max} \Rightarrow x = \dfrac{l}{6}, \dfrac{l}{2}, \dfrac{5l}{6}$.

21.26 Електрон міститься в одновимірній потенціальній ямі шириною *l*. Визначити середнє значення координати $< x >$ електрона (*0 < x < l*).

Відповідь: $\langle x \rangle = l/2$.

21.27 Електрон перебуває в основному стані в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої $l = 0{,}1\,нм$. Визначити імпульс електрона.

Відповідь: $p = 3{,}3 \cdot 10^{-24}$ *кг·м/с*.

21.28 Електрон перебуває в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої $l = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ *м*. Визначити енергію, випромінювану під час переходу електрона з третього енергетичного рівня на другий.

Відповідь: $W = 1{,}52 \cdot 10^{-19}\ Дж = 0{,}95\,еВ$.

21.29 Електрон із довжиною хвилі де Бройля $\lambda_1 = 100\,пм$ проходить широкий прямокутний потенціальний бар'єр висотою $U_0 = 100\,еВ$. Визначити довжину хвилі де Бройля λ_2 після проходження бар'єра.

Відповідь: $\lambda_2 = 172\,пм$.

21.30 Моноенергетичний потік електронів $(W = 100\,еВ)$ падає на низький прямокутний потенціальний бар'єр нескінченної ширини. Визначити висоту потенціального бар'єра U, якщо відомо, що 4 % електронів, що падають на бар'єр, відбивається.

Відповідь: $U = 55{,}6\ еВ$.

22 АТОМ ВОДНЮ. РЕНТГЕНІВСЬКІ СПЕКТРИ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

22.1 Момент імпульсу електрона на стаціонарних орбітах атома Бора (принцип квантування орбіт):

$$L = m\mathrm{v}r = n\hbar \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

де m – маса електрона; r – радіус орбіти; v – швидкість електрона на орбіті; n – головне квантове число; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

22.2 Енергія фотона, що випромінює атом водню під час переходу з одного стаціонарного стану в інший:

$$W_{\Phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = W_m - W_n,$$

де ν – частота випромінювання; W_m і W_n – енергії атома в стаціонарних станах, із якого і на який переходить атом відповідно.

22.3 Енергія електрона, розміщеного на *n*-й орбіті,

$$W_n = -\frac{hR}{n^2} = \frac{W_1}{n^2},$$

де $R = \dfrac{me^4}{64\varepsilon_0{}^2\pi^3\hbar^3} = 3,29\cdot 10^{15}\,c^{-1}$ – стала Рідберга; ε_0 – діелектрична стала.

22.4 Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається воднеподібним атомом під час переходу електрона з однієї орбіти на іншу:

$$\frac{1}{\lambda}=Z^2R'\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right),$$

де R' – стала Рідберга $\left(R'=R/c=1,097\cdot10^7\ м^{-1}\right)$; Z – заряд ядра у відносних одиницях ($Z=1$ для водню).

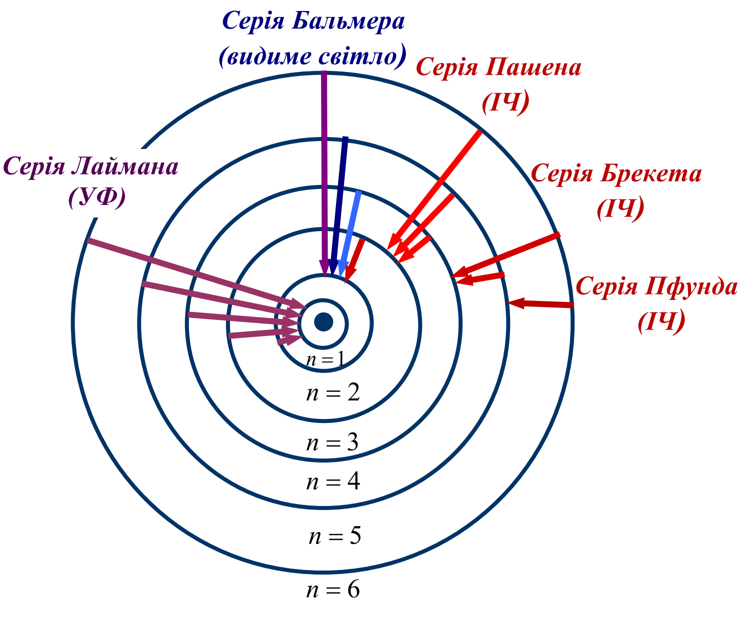


Рисунок 1 – До ілюстрації серіальної формули

22.5 Короткохвильова межа $\lambda_{\min}$ суцільного рентгенівського спектра

$$\lambda_K = \frac{hc}{eU},$$

де e – заряд електрона; U – різниця потенціалів, прикладена до рентгенівської трубки; h – стала Планка.

22.6 Закон Мозлі в загальному випадку

$$\sqrt{\omega} = C\left(Z - \sigma\right),$$

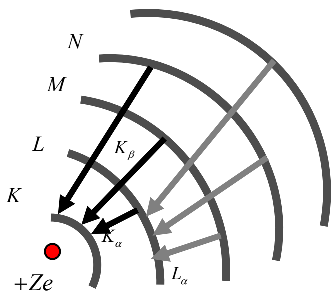


Рисунок 2 – До ілюстрації закону Мозлі

де ω – частота ліній рентгенівського спектра; Z – атомний номер елемента, що випромінює цей спектр; σ – стала екранування; C – стала.

Враховуючи, що $C = \sqrt{R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)}$, **закон Мозлі** в загальному випадку набере вигляду

$$\omega = R''\left(Z - \sigma\right)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \text{ або } \frac{1}{\lambda} = R'\left(Z - \sigma\right)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

де R'' – стала Рідберга $\left(R'' = 2\pi R = 2{,}07 \cdot 10^{16}\ c^{-1}\right)$, n = 1, 2, 3, …, m = n + 1, n + 2, … – головні квантові числа.

Тоді для ліній K_α (стала екранування $\sigma = 1$)

$$\omega_{K_\alpha} = R''(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) \quad \text{або} \quad \frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4}R'(Z-1)^2;$$

для ліній K_β (стала екранування $\sigma = 1$)

$$\omega_{K_\beta} = R''(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right) \quad \text{або} \quad \frac{1}{\lambda_{K_\beta}} = \frac{8}{9}R'(Z-1)^2;$$

для ліній L_α (стала екранування $\sigma = 7,5$)

$$\omega_{L_\alpha} = R(Z-7,5)^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) \quad \text{або} \quad \frac{1}{\lambda_{L_\alpha}} = \frac{5}{36}R'(Z-7,5)^2.$$

22.7 Енергія фотона K_α-лінії рентгенівського випромінювання:

$$W_{K_\alpha} = \hbar\omega = \frac{3}{4}W_i(Z-1)^2,$$

де W_i – енергія іонізації атома водню.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 22.1

Визначити енергію електрона, що перебуває на другій орбіті атома водню.

Розв'язування

$W_n - ?$
$n = 2.$

Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти й швидкість v електрона на ній пов'язані співвідношенням

$$m\text{v}r = n\hbar, \tag{1}$$

де e і m – заряд і маса електрона; n – головне квантове число (n = 1, 2, 3, ...); $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r і v. За друге рівняння використаємо рівняння руху електрона. Згідно з теорією Бора електрон обертається навколо ядра. У цьому разі сила взаємодії між електричним зарядом ядра та електроном надає електрону доцентрового прискорення. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{m\text{v}^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}, \tag{2}$$

звідси

$$m\text{v}^2 r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Поділимо (3) на (2) та одержимо

$$\mathrm{v} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \qquad (4)$$

Тоді радіус n-ї орбіти електрона

$$r = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}. \qquad (5)$$

Енергія атома складається з кінетичної енергії електрона та енергії взаємодії електрона з ядром:

$$W = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}. \qquad (6)$$

З використанням співвідношень (4) та (5) одержимо для енергії електрона на n-му рівні

$$W_n = \frac{1}{2}\frac{me^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 n^2\hbar^2} - \frac{1}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}\frac{me^4}{\hbar^2 n^2} = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 n^2\hbar^2}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин знайдемо

$$W_n = -\left(\frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\right)^2 \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^4}{2\cdot\left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2}\frac{1}{2^2} =$$

$$= 5{,}47\cdot 10^{-19}\left(\text{Дж}\right) = 3{,}42\left(eB\right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = \frac{1}{[\varepsilon_0]^2}\frac{[m][e]^4}{[\hbar]^2} = \frac{кг \cdot Кл^4}{(Ф/м)^2\ (Дж \cdot с)^2} = \frac{Кл^4 \cdot кг \cdot м^2}{Ф^2 \cdot Дж^2 \cdot c^2} =$$

$$= \frac{Ф^4 \cdot В^4 \cdot Н \cdot м}{Ф^2 \cdot Дж^2} = \frac{Ф^2 \cdot В^4}{Дж} = \frac{Кл^2 В^4}{В^2 Дж} = \frac{Кл^2 В^2}{Дж} = \frac{Дж^2}{Дж} = Дж .$$

Відповідь: $W_n = -5,47 \cdot 10^{-19}\ Дж = -3,42\ еВ$.

Задача 22.2

Розрахувати, користуючись теорією Бора, період обертання електрона в атомі водня, який перебуває в збудженому стані, з головним квантовим числом $n = 2$.

Розв'язування

$T - ?$
$n = 2.$

Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти та швидкість v електрона на ній пов'язані співвідношенням

$$m\text{v}r = n\hbar , \tag{1}$$

де e і m – заряд і маса електрона; n – головне квантове число (n = 1, 2, 3, ...); $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r і v.

З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{m\text{v}^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} , \tag{2}$$

звідси

$$m\mathrm{v}^2 r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Поділимо (3) на (2) та одержимо, що швидкість електрона на n-й орбіті дорівнює

$$\mathrm{v} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \qquad (4)$$

Тоді радіус n-ї орбіти електрона

$$r = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}. \qquad (5)$$

Період обертання електрона по орбіті визначаємо за співвідношенням

$$T = \frac{2\pi r}{\mathrm{v}}. \qquad (6)$$

Підставивши у вираз (6) значення v та r із співвідношень (4) та (5), одержимо

$$T = \frac{2\pi 4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2 \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n}} = \frac{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3}{me^4}. \qquad (7)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (7) одержимо

$$T = \frac{32 \cdot (3{,}14)^3 \cdot \left(8{,}85 \cdot 10^{-12}\right)^2 \cdot \left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\right)^3 \cdot 2^3}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^4} =$$

$$=12{,}1 \cdot 10^{-16}\ (c).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[T] = \frac{[\varepsilon_0]^2[\hbar]^3}{[m][e]^4} = \frac{\left(\varPhi/\text{м}\right)^2\left(Дж \cdot c\right)^3}{кг \cdot Кл^4} = \frac{\varPhi^2 \cdot Дж^3 c^3}{Кл^4 кг \cdot м^2} =$$

$$= \frac{Кл^2\, Дж^3 c}{В^2 Кл^4 Н \cdot м} = \frac{Дж^2 \cdot c}{В^2 Кл^2} = \frac{Дж^2 \cdot c}{Дж^2} = c.$$

Відповідь: $T = 1{,}21 \cdot 10^{-17}$ c.

Задача 22.3

Електрон у збудженому атомі гелію перейшов із п’ятого енергетичного рівня на другий. Визначити енергію фотона, який у цьому разі випромінюється.

Розв’язування

$W - ?$
$n = 2$, $m = 5$.

Для визначення енергії фотона скористаємося серіальною формулою для воднеподібних іонів:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{1}$$

де λ – довжина хвилі фотона; R – стала Рідберга; z – заряд ядра у відносних одиницях (за $Z = 1$ формула набирає вигляду, що є характерним для водню); n – номер орбіти, на яку перейшов електрон; m – номер орбіти, з якої перейшов електрон (n і m – головні квантові числа).

Енергію фотона W визначаємо за співвідношенням

$$W = \frac{hc}{\lambda}.$$

Тому, помноживши обидві частини рівняння (1) на hc, одержимо вираз для енергії фотона у вигляді

$$W = Z^2 hcR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Оскільки всі величини у співвідношенні відомі, проведемо розрахунок W:

$$W = 1{,}1 \cdot 10^7 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) =$$

$$= 1{,}83 \cdot 10^{-18}\,(Дж) = 11{,}48\,(еВ).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = [R][h][c] = м^{-1} \cdot Дж \cdot с \cdot м/\text{с} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $W = 1{,}83 \cdot 10^{-18}\ Дж = 11{,}48\, еВ$.

Задача 22.4

Визначити найбільші й найменші довжини світлових хвиль, випромінюваних у серіях Лаймана, Бальмера та Пашена.

Розв'язування

$\lambda - ?$

$R' = 1,097 \cdot 10^7\ м^{-1}.$

Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається воднеподібним атомом під час переходу електрона з однієї орбіти на іншу:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \qquad (1)$$

де R' – стала Рідберга; Z – заряд ядра у відносних одиницях ($Z = 1$ для водню); $n = 1, 2, 3, ...,$ $k = n + 1,\ n + 2, ...$

З формули (1) визначимо довжину хвилі

$$\lambda = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)}.$$

У серії Лаймана переходи електрона здійснюються на першу орбіту з усіх інших, тобто $n = 1$, $k = 2, 3, 4, ..., \infty$. Отже, максимальну та мінімальну довжини хвиль визначаємо таким чином:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R'\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{4}{3R'} = \frac{4}{3 \cdot 1,097 \cdot 10^7} =$$

$$= 1,22 \cdot 10^{-7}\,(м) = 0,122\,(мкм),$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R'\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{R'} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7} =$$

$$= 9,1 \cdot 10^{-8}\,(м) = 0,091(мкм).$$

У видимій області спектра містяться лінії серії Бальмера $(n = 2,\ k = 3,\ 4,\ 5,\ ...,\ \infty)$:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = \frac{36}{5R'} = \frac{36}{5 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 6,56 \cdot 10^{-7}\,(м) =$$

$$= 0,656(мкм),$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{4}{R'} = \frac{4}{1,097 \cdot 10^7} = 3,65 \cdot 10^{-7}\,(м) =$$

$$= 0,365(мкм).$$

У серії Пашена перехід електрона відбувається на орбіту з головним квантовим числом $n = 3$, тоді $k = 4,\ 5,\ 6,\ ...,\ \infty$:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R'\left(\dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2}\right)} = \frac{144}{7R'} = \frac{144}{7 \cdot 1,097 \cdot 10^7} =$$

$$= 1,875 \cdot 10^{-6}\,(м) = 1,875\,(мкм),$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R'\left(\dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{\infty}\right)} = \frac{9}{R'} = \frac{9}{1,097 \cdot 10^7} =$$

$$= 8,2 \cdot 10^{-7}\,(м) = 0,82\,(мкм).$$

Відповідь: серія Лаймана: $\lambda_{\max} = 0,122\ мкм$, $\lambda_{\min} = 0,091\,мкм$; серія Бальмера: $\lambda_{\max} = 0,656\,мкм$, $\lambda_{\min} = 0,365\,мкм$; серія Пашена: $\lambda_{\max} = 1,875\,мкм$, $\lambda_{\min} = 0,82\,мкм$.

Задача 22.5

Фотон вибиває з атома водню, що перебуває в основному стані, електрон із кінетичною енергією $W_K = 10\,еВ$. Визначити енергію W цього фотона.

Розв’язування

$W - ?$
$W_K = 10\,еВ.$

Енергія фотона витрачається на іонізацію атома водню й надання електрону кінетичної енергії:

$$W = W_K + W_i. \tag{1}$$

Енергія іонізації атома водню дорівнює

$$W_i = h\nu = h\frac{c}{\lambda}, \tag{2}$$

де λ знайдемо, застосувавши серіальну формулу та врахувавши, що відбувається перехід електрона між основним станом $n = 1$ і рівнем вакууму $m = \infty$:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{3}$$

де R – стала Рідберга; Z – заряд ядра атома водню; n і m – головні квантові числа.

Підставивши співвідношення (3) в (4), одержимо

$$W_i = hcRZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{4}$$

Із виразів (1) (4) визначимо енергію фотона

$$W = W_K + hcRZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо

$$W = 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} + 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,1 \cdot 10^7 \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) =$$

$$= 2,35\left(\text{Дж}\right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W]=[W_k]+[R][h][c]=\text{Дж}+\text{м}^{-1}\cdot\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м/с}=\text{Дж}.$$

Відповідь: $W=2,35\ \text{Дж}$.

Задача 22.6

Визначити швидкість v електронів, що падають на антикатод рентгенівської трубки, якщо мінімальна довжина хвилі в суцільному спектрі рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda_{\min}=1\,\text{нм}$.

Розв'язування

$\text{v}-?$
$\lambda_{\min}=1\,\text{нм}=10^{-9}\ \text{м}.$

Скористаємося формулою для коротковхвильової межі суцільного рентгенівського спектра

$$\lambda_{\min}=\frac{hc}{eU}, \tag{1}$$

де U – різниця потенціалів, прикладена до рентгенівської трубки.

Тоді

$$eU=\frac{hc}{\lambda_{\min}}. \tag{2}$$

Прискорювальна різниця потенціалів, прикладена до трубки, надає електрону кінетичної енергії

$$eU=\frac{m\text{v}^2}{2}. \tag{3}$$

З виразів (2) і (3) одержимо формулу для швидкості

$$\frac{m\text{v}^2}{2}=\frac{hc}{\lambda_{\min}} \;\Rightarrow\; \text{v}=\sqrt{\frac{2hc}{m\lambda_{\min}}},$$

$$\text{v}=\sqrt{\frac{2\cdot 6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{-9}}}=2,08\cdot 10^{7}\left(м/с\right).$$

Одержаний вираз свідчить, що електрони, які падають на антикатод, є нерелятивістськими.

Відповідь: $\text{v}=2,08\cdot 10^{7}\ м/с$.

Задача 22.7

Визначити довжину хвилі λ_{K_α} та енергію W_{K_α} фотона K_α-лінії рентгенівського спектра, випромінюваної ренієм $\left(Z=75\right)$ під час бомбардування його швидкими електронами.

Розв'язування

$\lambda_{K\alpha}-?$ $W_{K\alpha}-?$
$z=75.$

Під час бомбардування ренію швидкими електронами виникає рентгенівське випромінювання, що має лінійчастий спектр. Ці електрони проникають усередину електронної оболонки атома та вибивають електрони, що належать до глибинних електронних оболонок. Найближча до ядра електронна оболонка (K-оболонка) має два електрони. Якщо один із цих електронів виявляється вибитим за межі атома, то на вільне місце переходить електрон з оболонки, що міститься вище (L, M, N). У цьому разі виникає відповідна лінія

K-серії. Під час переходу електрона з L-оболонки на К-оболонку випромінюється найінтенсивніша K_α-лінія рентгенівського спектра.

Довжину хвилі цієї лінії визначають за законом Мозлі для ліній K_α:

$$\omega_{K_\alpha} = R'\left(Z-1\right)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}R'\left(Z-1\right)^2.$$

Враховуючи, що $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$, одержуємо

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4}R\left(z-1\right)^2.$$

З цього співвідношення довжина хвилі дорівнює

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3R\left(z-1\right)^2}.$$

Після підставлення значень фізичних величин в останнє співвідношення одержимо відповідь

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3\cdot 1{,}1\cdot 10^7(75-1)^2} = 2{,}2\cdot 10^{-11}\ \left(м\right).$$

Знаючи довжину хвилі, визначимо енергію фотона за формулою

$$W_{K_\alpha} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Після підставлення числових значень величин знайдемо

$$W_{K_\alpha} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2,2 \cdot 10^{-11}} = 5,64 \cdot 10^{-14} \left(\textit{Дж}\right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = \frac{[\hbar][c]}{[\lambda]} = \cdot \frac{\textit{Дж} \cdot c \cdot \textit{м}/\text{c}}{\textit{м}} = \textit{Дж}\ .$$

Відповідь: $\lambda_{K_\alpha} = 2,2 \cdot 10^{-11}$ *м* , $W_{K_\alpha} = 5,64 \cdot 10^{-14}$ *Дж* .

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

22.1 Використовуючи постулати Бора, одержати формули: 1) для швидкості руху електрона по орбіті в атомі водню. Визначити цю швидкість для двох перших електронних орбіт (v_1 і v_2); 2) для радіусів дозволених електронних орбіт в атомі водню. Визначити ці радіуси для двох перших електронних орбіт (r_1 і r_2).

Відповідь: 1) $v_1 = 2,19 \cdot 10^6\ м/с$, $v_2 = 1,09 \cdot 10^6\ м/с$; 2) $r_1 = 52,5\,пм$, $r_2 = 210,3\,пм$.

22.2 Знайти: а) період обертання електрона на першій борівській орбіті в атомі водню; б) його кутову швидкість.

Відповідь: а) $T_{об} = 1,43 \cdot 10^{-16}\ с$;
б) $\omega = 4,4 \cdot 10^{16}\ рад/с$.

22.3 Визначити потенціальну $W_П$, кінетичну $W_К$ і повну W енергію електрона, що перебуває на першій орбіті атома водню.

Відповідь: $W_П = -27,2\,еВ$, $W_К = 13,6\,еВ$,
$W = -13,6\,еВ$.

22.4 Скориставшись теорією Бора, визначити для електрона, що перебуває на першій і другій орбітах в атомі водню, відношення повних енергій.

Відповідь: $W_2/W_1 = 4$.

22.5 Довести, що для атома водню на борівських стаціонарних орбітах уміщується ціле число довжин хвиль де Бройля. Визначити довжини хвиль на першій і третій орбітах.

Відповідь: $2\pi r_n = n\lambda$, $\lambda_1 = 332\ пм$, $\lambda_3 = 996\ пм$.

22.6 Скориставшись теорією Бора, визначити для електрона, що перебуває на першій і другій орбітах в атомі водню, відношення магнітного моменту p_m електрона до механічного L.

Відповідь: $p_m/L = 8,79 \cdot 10^{10}$ $Кл/кг$.

22.7 Якої мінімальної енергії потрібно надати електрону в атомі водню, щоб перевести його з основного стану в перший збуджений?

Відповідь: $W_{\min} = 10,2\,еВ$.

22.8 Під час переходу електрона в атомі водню з однієї орбіти на іншу випромінюються фотони, що відповідають довжині хвилі $\lambda = 652\,нм$ (червона лінія). Яку енергію ΔW втрачає в цьому разі атом водню?

Відповідь: $\Delta W = 1,9\,еВ$.

22.9 У скільки разів збільшиться радіус орбіти електрона в атомі водню, що перебуває в основному стані, в разі збудження цим квантом з енергією W = 12,09 *еВ*?

Відповідь: $r_n/r_1 = 9$.

22.10 Атом водню переведений із нормального стану в збуджений з головним квантовим числом $n = 2$. Знайти енергію збудження атома.

Відповідь: W = 10,2 *еВ*.

22.11 Перехід електрона в атомі водню з *n*-ї на *k*-ту орбіту $(k = 1)$ супроводжується випромінюванням фотона з довжиною хвилі $\lambda = 102,6\,нм.$ Знайти радіус *n*-ї орбіти.

Відповідь: r = 477 *пм*.

22.12 Знайти найменшу й найбільшу довжини хвиль спектральних ліній водню у видимій області спектра.

Відповідь: λ_{max} = 656 *нм*, λ_{min} = 410 *нм*.

22.13 Знайти найменшу й найбільшу довжини хвиль спектральних ліній водню: 1) серії Лаймана; 2) серії Пфунда.

Відповідь: 1) $\lambda_{\max} = 122\,нм$, $\lambda_{\min} = 91\,нм$; 2) $\lambda_{\max} = 7,46\,мкм$, $\lambda_{\min} = 2,28\,мкм$.

22.14 Які спектральні лінії з'являться в спектрі атомарного водню під час його опромінення ультрафіолетовим світлом із довжиною хвилі $\lambda = 100\,нм$.

Відповідь: $\lambda_1 = 121,6\,нм$, $\lambda_2 = 102,6\ нм$, $\lambda_3 = 656\ нм$.

22.15 Фотон з енергією $\varepsilon = 12,12\,еВ$ поглинається атомом водню, що перебуває в основному стані, та переводить атом у збуджений стан. Визначити головне квантове число цього стану.

Відповідь: $n = 3$.

22.16 Визначити перший потенціал U_1 збудження атома водню.

Відповідь: $U_1 = 10,2\,В$.

22.17 Перший потенціал збудження атома водню дорівнює $U_1 = 10,2\,В$. За якої температури T середня кінетична енергія атомів водню дорівнює енергії збудження?

Відповідь: $T = 7,88 \cdot 10^4\,K$.

22.18 Атомарний водень, збуджений світлом певної довжини хвилі, під час переходу в основний стан випромінює лише три спектральних лінії. Визначити довжини хвиль цих ліній і зазначити, до яких серій вони належать.

Відповідь: $\lambda_1 = 122$ *нм* – серія Лаймана; $\lambda_2 = 103$ *нм* – серія Лаймана; $\lambda_3 = 656$ *нм* – серія Бальмера.

22.19 Яку роботу необхідно виконати, щоб видалити електрон із другої орбіти атома водню за межі притягання його ядром?

Відповідь: $A = 0,545$ *аДж*.

22.20 Знайти: 1) радіус першої борівської електронної орбіти для іонізованого атома гелію; 2) швидкість електрона на ній.

Відповідь: $r_1 = 26,3\,пм$, $v_1 = 4,38\,Мм/с$.

22.21 Визначити енергію основного стану W_1, $еВ$, і потенціал іонізації U_i, $В$, іона He^+.

Відповідь: $W_1 = -54,4\,еВ$, $U_i = 40,8\,В$.

22.22 Визначити найменшу енергію $W_{\min}$, яку потрібно надати в основному стані тричі іонізованому атому берилію, щоб збудити повний спектр цього атома.

Відповідь: $W_{\min} = -218\,еВ$.

22.23 Визначити короткохвильову межу λ_{min} суцільного спектра рентгенівського випромінювання, якщо рентгенівська трубка працює під напругою $U = 30\ кВ$.

Відповідь: $\lambda_{min} = 41\ пм$.

22.24 Збільшення напруги на рентгенівській трубці вдвічі зменшує короткохвильову межу суцільного спектра на $\Delta\lambda = 0{,}025\ нм$. Визначити початкове значення напруги U_1.

Відповідь: $U_1 = 25\ кВ$.

22.25 Антикатод рентгенівської трубки бомбардується електронами, швидкість яких $v = 100\,Мм/с$. Визначити максимальну частоту випромінювання в суцільному рентгенівському спектрі з урахуванням залежності маси електрона від швидкості його руху.

Відповідь: $\nu = 1,6 \cdot 10^{23}\ с^{-1}$.

22.26 Розрахувати довжину хвилі λ та енергію W фотона, який належить K_α-лінії в спектрі характеристичного рентгенівського випромінювання платини.

Відповідь: $\lambda = 20,5\,нм$, $W = 60,5\,кеВ$.

22.27 За якої найменшої напруги U_{min} на рентгенівській трубці починають з’являтися лінії серії K_α для міді?

Відповідь: $U_{min} = 8$ *кВ*.

22.28 Довжина хвилі γ-випромінювання радію дорівнює $\lambda = 0,0016\,пм$. Яку різницю потенціалів потрібно прикласти до рентгенівської трубки, щоб одержати рентгенівські промені з цією довжиною хвилі?

Відповідь: $U_{min} = 770$ *кВ*.

22.29 Під час дослідження лінійчастого рентгенівського спектра деякого елемента виявилося, що довжина хвилі лінії K_α дорівнює $\lambda = 76\,пм$. Що це за елемент?

Відповідь: $Z = 41$, ніобій.

22.30 Визначити довжину хвилі найдовшої лінії K-серії характеристичного рентгенівського спектра, якщо анод рентгенівської трубки виготовлений із платини. Стала екранування дорівнює одиниці.

Відповідь: $\lambda = 20,4\,пм$.

23 ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

23.1 Молярну внутрішню енергію хімічно простих (що складаються з однакових атомів) твердих тіл у класичній теорії теплоємності визначають за формулою

$$U_M = 3RT,$$

де R – газова стала; T – термодинамічна температура.

23.2 Теплоємність тіла за сталого об'єму визначають першою похідною від внутрішньої енергії U за температурою, тобто

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT}.$$

Молярна теплоємність

$$C_M = \frac{dQ}{\nu dT},$$

де $\nu = m/M$ – кількість молів; M – молярна маса речовини.

Питома теплоємність

$$c = \frac{dQ}{m\,dT}.$$

23.3 Закон Дюлонга й Пті. Молярну теплоємність C_M хімічно простих твердих тіл визначають за співвідношенням

$$C_M = 3R .$$

23.4 Закон Неймана-Коппа. Молярна теплоємність хімічно складних тіл (що складаються з різних атомів) дорівнює

$$C_M = 3nR ,$$

де n – загальна кількість частинок у хімічній формулі сполуки.

23.5 Середнє значення енергії $\langle W \rangle$ квантового осцилятора, що припадає на один ступінь вільності, у квантовій теорії Ейнштейна визначають за формулою

$$\langle W \rangle = W_0 + \frac{\hbar\omega}{\exp\left[\hbar\omega/(kT)\right] - 1},$$

де W_0 – нульова енергія $(W_0 = 0{,}5\hbar\omega)$; ω – циклічна частота коливань осцилятора; k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура.

23.6 Молярну внутрішню енергію кристала у квантовій теорії теплоємності Ейнштейна визначають за співвідношенням

$$U_M = U_{M,0} + 3R\frac{\theta_E}{\exp(\theta_E/T) - 1},$$

де $U_{M,0} = 1,5R\theta_E$ – молярна нульова енергія за теорією Ейнштейна; $\theta_E = \hbar\omega/k$ – характеристична температура Ейнштейна.

23.7 Молярна теплоємність кристала у квантовій теорії теплоємності Ейнштейна дорівнює

$$C_M = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{\exp(\theta_E/T)}{\left[\exp(\theta_E/T)-1\right]^2}.$$

За низьких температур $(T \ll \theta_E)$:

$$C_M = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \exp(-\theta_E/T).$$

23.8 Молярна внутрішня енергія кристала за теорією Дебая дорівнює

$$U_M = U_{M,0} + 3RT\cdot 3\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int\limits_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx,$$

де $U_{M,0} = \frac{9}{8}R\theta_D$ – молярна нульова енергія кристала за теорією Дебая; $\theta_D = \hbar\omega_{\max}/k$ – характеристична температура Дебая, $x = \hbar\omega/(kT)$.

23.9 Молярну теплоємність кристала за теорією Дебая визначають за співвідношенням

$$C_M = 3R\left[12\left(\frac{T_1}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3(\theta_D/T_1)}{e^{\theta_D/T_1} - 1}\right].$$

Граничний закон Дебая. В області низьких температур $(T << \theta_D)$ остання формула набирає вигляду

$$C_M = \frac{12\pi^4}{5} R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3.$$

23.10 Енергія ε фонона пов’язана з циклічною частотою ω коливань класичної хвилі співвідношенням

$$\varepsilon = \hbar\omega.$$

23.11 Квазіімпульс фонона

$$p = 2\pi\hbar/\lambda.$$

23.12 Швидкості поздовжніх v_l та поперечних v_t хвиль у кристалі визначають за формулами:

$$\mathrm{v}_l = \sqrt{E/\rho}, \ \mathrm{v}_t = \sqrt{G/\rho},$$

де E і G – модулі відповідно поздовжньої та поперечної пружностей (модуль Юнга та модуль зсуву); ρ – густина тіла.

23.13 Закони Ома та Джоуля – Ленца в диференціальній формі:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad \omega_P = \sigma E^2,$$

де j – густина струму; ω_P – об’ємна густина теплової потужності; σ – питома провідність; E – напруженість електричного поля.

23.14 Питому електричну провідність визначають за співвідношенням

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n \langle l \rangle}{m \langle u \rangle},$$

де e і m – заряд і маса електрона; n – концентрація електронів; $\langle l \rangle$ – середня довжина їх вільного пробігу; $\langle u \rangle$ – середня швидкість хаотичного руху електронів.

23.15 Закон Відемана – Франца має вигляд

$$\frac{\lambda}{\sigma} = 3 \frac{k^2}{e^2} T,$$

де λ – теплопровідність; σ – питома електропровідність; k – стала Больцмана.

23.16 Розподіл Фермі за енергіями для вільних електронів у металі має вигляд:

за $T \neq 0$

$$dn(W) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{W^{1/2} dW}{\exp\left[\left(W - W_F \right) / kT \right] + 1},$$

за $T = 0$

$$dn(W) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} W^{1/2} dW \;\; (W < W_F),$$

де $dn(W)$ – концентрація електронів, енергія яких перебуває в інтервалі значень від W до $W+dW$; m і W – маса та енергія електрона; W_F – рівень (або енергія) Фермі.

23.17 Енергія рівня Фермі в металі за $T=0$:

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3},$$

де n – концентрація вільних носіїв.

23.18 Питому електропровідність власних напівпровідників визначають за формулою

$$\sigma = en\left(\mu_n + \mu_p\right),$$

де e – заряд електрона; n – концентрація носіїв заряду (електронів та дірок); μ_n і μ_p – рухливості електронів та дірок.

23.19 Концентрація вільних носіїв у власному напівпровіднику дорівнює

$$n_i = p_i = \frac{2\left(2\pi kT\sqrt{m_n m_p}\right)^{3/2}}{h^3}\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right),$$

де m_n, m_p – ефективні маси електронів та дірок; ΔW – ширина забороненої зони матеріалу.

23.20 Концентрація вільних носіїв у домішковому напівпровіднику дорівнює

$$n = \frac{2\left(2\pi m_n kT\right)^{3/2}}{h^3}\exp\left(\frac{W_a}{2kT}\right),$$

де W_a – енергія активації атомів домішки.

23.21 Залежність питомого опору провідника від температури

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \alpha T\right),$$

де ρ і ρ_0 – питомі опори відповідно за T та $T = 0^\circ C$; T – температура за шкалою Цельсія; α – температурний коефіцієнт опору.

23.22 Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначають за формулою

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right),$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; σ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає.

23.23 Положення рівня Фермі у власному напівпровіднику визначають за співвідношенням

$$W_F = -\frac{\Delta W}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p}{m_n}.$$

23.24 Внутрішня контактна різниця потенціалів на межі між металами

$$U_i = \frac{W_{F1} - W_{F2}}{e},$$

де W_{F1} і W_{F2} – енергії Фермі ізольованих зразків металів; e – заряд електрона.

23.25 Зовнішня різниця потенціалів між двома зразками металів, розділених повітряним проміжком, дорівнює

$$U_K = \frac{A_{B1} - A_{B2}}{e},$$

де A_{B1} та A_{B2} – роботи виходу ізольованих зразків металів; e – заряд електрона.

23.26 Залежність струму I від напруги U для ідеального *p-n*-переходу

$$I = I_S \left(e^{eU/(kT)} - 1 \right),$$

де I_S – максимальне значення зворотного струму; e – елементарний заряд, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ *Кл*; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ *Дж*/*K* $= 8,625 \cdot 10^{-5}$ *еВ*/*K*; T – абсолютна температура.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 23.1

Визначити, з якого матеріалу виготовлена металева кулька, маса якої $m = 25\,г$, якщо відомо, що для її нагрівання від $T_1 = 10\,^0C$ до $T_2 = 30\,^0C$ необхідно витратити кількість теплоти $Q = 117\,Дж$. Під час розв'язування задачі скористатися законом Дюлонга й Пті.

Розв'язування

$M - ?$

$m = 25\,г = 0,025\,кг,$

$T_1 = 10\,^0C = 283\,K,$

$T_2 = 30\,^0C = 303\,K,$

$Q = 117\,Дж.$

За визначенням молярна теплоємність дорівнює кількості теплоти dQ, необхідної для нагрівання одного моля речовини на один Кельвін:

$$C_M = \frac{dQ}{\nu dT},$$

звідси

$$dQ = \nu C_M dT \;\Rightarrow\; Q = \nu C_M \Delta T \;\Rightarrow\; Q = \nu C_M \left(T_2 - T_1\right). \quad (1)$$

Кількість речовини визначаємо зі співвідношення $\nu = m/M$, де M – молярна маса речовини.

За законом Дюлонга й Пті молярна теплоємність C_M хімічно простих твердих тіл визначаємо за співвідношенням

$$C_M = 3R.$$

Підставимо молярну теплоємність із закону Дюлонга й Пті у вираз (1) та одержимо

$$Q = 3R\frac{m}{M}(T_2 - T_1) \Rightarrow M = 3R\frac{m}{Q}(T_2 - T_1).$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$M = 3 \cdot 8,31 \cdot \frac{25 \cdot 10^{-3}}{117} \cdot (303 - 283) = 0,1065 \left(кг/моль\right).$$

За таблицею Менделєєва знаходимо, що цей метал – паладій.

Відповідь: $M = 0,1065\, кг/моль$ – паладій.

Задача 23.2

Визначити кількість теплоти ΔQ, необхідної для нагрівання кристала $NaCl$ масою $m = 20\, г$ на $\Delta T = 2\, K$ у двох випадках, коли нагрівання відбувається від температури: а) $T_1 = \theta_D$; б) $T_2 = 2\, K$. Характеристична температура Дебая для $NaCl$ дорівнює $\theta_D = 320\, K$.

Розв'язування

$\Delta Q - ?$

$m = 20\, г = 0,2\, кг,$

$\Delta T = 2\, K,$

$T_1 = \theta_D,$

$T_2 = 2\, K,$

$\theta_D = 320\, K.$

Кількість теплоти ΔQ, необхідної для нагрівання тіла від температури T_1 до T_2, можна підрахувати за формулою

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C dT\,, \tag{1}$$

де C – теплоємність тіла.

Теплоємність тіла пов'язана з молярною теплоємністю C_M співвідношенням

$$C = \frac{m}{M} C_M\,,$$

де m – маса тіла; $M = 58,5 \cdot 10^{-3}$ $кг/моль$ – молярна маса.

Тоді вираз (1) набере вигляду

$$\Delta Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_M dT\,. \tag{2}$$

У загальному випадку C_M є функцією температури, тому її не можна виносити за знак інтеграла. Але у випадку а) зміною теплоємності порівняно з її значенням за температури T_1 можна знехтувати та вважати, що на всьому інтервалі ΔT вона є сталою. З урахуванням вищевикладеного формула (2) набере вигляду

$$\Delta Q = \frac{m}{M} C_M \Delta T\,. \tag{3}$$

Молярна теплоємність за теорією Дебая

$$C_M = 3R\left[12\left(\frac{T_1}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3(\theta_D/T_1)}{e^{\theta_D/T_1} - 1}\right],$$

де $R = 8,31\dfrac{Дж}{моль \cdot К}$, $x = \dfrac{\hbar\omega}{kT}$.

У першому випадку за $T_1 = \theta_D$ із таблиці інтегралів знаходимо

$$\int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - 0,225,$$

тоді

$$C_M = 3R\left[12 \cdot 1 \cdot 0,225 - \frac{3 \cdot 1}{e^1 - 1}\right] = 2,87\,R.$$

Підставимо значення C_M у співвідношення (3) та одержимо

$$\Delta Q = \frac{0,02}{58,5 \cdot 10^{-3}} 2,87 \cdot 8,31 \cdot 2 = 16,3(Дж).$$

У випадку б) за $T \ll \theta_D$ для знаходження ΔQ скористаємося граничним законом Дебая, а саме:

$$C_M = \frac{12\pi^4}{5} R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3,$$

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}\int\limits_{T_2}^{T_2+\Delta T} T^3 dT =$$

$$= \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}\left[\frac{\left(T_2+\Delta T\right)^4}{4} - \frac{T_2{}^4}{4}\right].$$

Враховуючи, що $T_2 + \Delta T = 2T_2$, одержимо

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}\left[\frac{\left(2T_2\right)^4}{4} - \frac{T_2{}^4}{4}\right] = \frac{3\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}15T_2{}^4.$$

Виконаємо обчислення:

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5}\frac{8,31}{320^3}\frac{0,02}{58,5\cdot 10^{-3}}15\cdot 2^4 = 1,22\cdot 10^{-3}\left(Дж\right).$$

Відповідь: а) $\Delta Q = 16,3\,Дж$; б) $\Delta Q = 1,22\,мДж$.

Задача 23.3

Однакові маси свинцю та кремнію охолоджують за допомогою рідкого гелію від $T_1 = 10\,K$ до $T_2 = 4,2\,K$. Визначити відношення кількостей теплоти $\frac{Q_1}{Q_2}$, необхідних для такого охолодження. Температури Дебая дорівнюють $\theta_D\left(Pb\right) = 95\,K$ та $\theta_D\left(Si\right) = 645\,K$ відповідно. Умову $T \ll \theta_D$ вважати такою, що виконується.

Розв'язування

$Q_1/Q_2 - ?$

$T_1 = 10\,K$,

$T_2 = 4,2\,K$,

$\theta_D(Pb) = 95\,K$,

$\theta_D(Si) = 645\,K$,

$M_{Si} = 28 \cdot 10^{-3}$ *кг/моль*,

$M_{Pb} = 0,207$ *кг/моль*.

Для знаходження молярної теплоємності за умови $T \ll \theta_D$ можна скористатися граничним законом Дебая

$$C_M = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 . \qquad (3)$$

Кількість теплоти ΔQ, необхідної для нагрівання тіла від температури T_1 до T_2, можна підрахувати за формулою

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C dT , \qquad (1)$$

де C – теплоємність тіла.

Теплоємність тіла пов'язана з молярною теплоємністю C_M співвідношенням

$$C = m/M\, C_M ,$$

де m – маса тіла; M – молярна маса.

Тоді вираз (1) набере вигляду

$$\Delta Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_M dT . \qquad (2)$$

У загальному випадку C_M є функцією температури, тому її не можна виносити за знак інтеграла.

$$Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D^{\ 3}}\frac{m}{M}\int_{T_1}^{T_2} T^3 dT = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D^{\ 3}}\frac{m}{M}\left[\frac{T_2^{\ 4}}{4} - \frac{T_1^{\ 4}}{4}\right].$$

Відношення кількостей теплоти, необхідних для охолодження однакових мас свинцю та кремнію, дорівнює

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\left[\theta_D\left(Pb\right)\right]^3}\frac{m}{M_{Pb}}\left[\frac{T_2^{\ 4}}{4} - \frac{T_1^{\ 4}}{4}\right]}{\frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\left[\theta_D\left(Si\right)\right]^3}\frac{m}{M_{Si}}\left[\frac{T_2^{\ 4}}{4} - \frac{T_1^{\ 4}}{4}\right]} = \frac{M_{Si}\left[\theta_D\left(Si\right)\right]^3}{M_{Pb}\left[\theta_D\left(Pb\right)\right]^3},$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{28\cdot 10^{-3}\cdot\left[645\right]^3}{0,207\cdot\left[95\right]^3} = 42,3.$$

Відповідь: $Q_1/Q_2 = 42,3.$

Задача 23.4

Визначити енергію Фермі для міді, зважаючи на припущення, що кількість вільних електронів дорівнює кількості атомів металу.

Розв’язування

$\varepsilon_F - ?$
$\rho = 8,93\cdot 10^3\ кг/м^3$.

Енергію Фермі в металі за $T = 0$ визначаємо за співвідношенням

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}, \qquad (1)$$

де m – маса електрона; n – концентрація вільних носіїв; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ $Дж \cdot с$ – стала Планка – Дірака.

Концентрація атомів міді дорівнює

$$n = \frac{\rho N_A}{M}, \qquad (2)$$

де N_A – стала Авогадро; ρ – густина міді; $M = 63,5 \cdot 10^{-3}$ $кг/моль$ – молярна маса міді.

Підставимо формулу (2) у співвідношення (1) та одержимо

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 \rho N_A}{M}\right)^{2/3}.$$

Підставимо числові значення та виконаємо розрахунки:

$$\varepsilon_F = \frac{1,05^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{3 \cdot 3,14^2 \cdot 8,93 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{63,5 \cdot 10^{-3}}\right)^{2/3} =$$

$$= 1,13 \cdot 10^{-18}\ (Дж).$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\left[\varepsilon_F\right]=\frac{\left[\hbar\right]^2}{\left[m\right]}\left(\frac{\left[\rho\right]\left[N_A\right]}{\left[M\right]}\right)^{2/3}=\frac{\left(Дж\cdot c\right)^2}{кг}\left(\frac{\left[кг/м^3\right]\left[моль^{-1}\right]}{\left[кг/моль\right]}\right)^{2/3}=$$

$$=\frac{Дж\cdot c^2\cdot кг\cdot м\cdot м}{кг\cdot c^2\cdot м^2}=Дж.$$

Відповідь: $\varepsilon_F=1,13\cdot10^{-18}\ Дж.$

Задача 23.5

Визначити максимальну енергію $\omega_{\max}$ фонона, який може виникнути в кристалі, температура Дебая якого $\theta_D=300\,K$. Яку довжину хвилі мав би фотон із такою самою енергією?

Розв'язування

$\omega_{\max}-?\ \ \lambda-?$
$\theta_D=300\,K.$

Найбільша частота $\omega_{\max}$, що може виникнути в кристалічній ґратці, пов'язана з температурою Дебая співвідношенням

$$\hbar\omega_{\max}=k\theta_D,$$

де $\hbar$ – стала Планка – Дірака, $\hbar=1,05\cdot10^{-34}\ Дж\cdot c$; k – стала Больцмана, $k=1,38\cdot10^{-23}\ Дж/K$.

Звідси випливає, що максимальна енергія фотона

$$\varepsilon_{\max}=\hbar\omega_{\max}=k\theta_D.$$

Довжина хвилі фотона з частотою $\omega_{\max}$ дорівнює

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi \hbar c}{k\theta_D}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо розрахунки:

$$\varepsilon_{\max} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 4{,}14 \cdot 10^{-21} \left(Дж \right),$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 4{,}8 \cdot 10^{-5} \left(м \right).$$

Відповідь: $\varepsilon_{\max} = 4{,}14 \cdot 10^{-21}\ Дж,\ \lambda = 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ м.$

Задача 23.6

Питома провідність кремнію дорівнює $\gamma_1 = 19\, См/м$ за температури $T_1 = 600\, К$ і $\gamma_2 = 4095\, См/м$ – за температури $T_2 = 1200\, К$. Визначити ширину ΔW забороненої зони кремнію.

Розв'язування

$\Delta W - ?$

$\gamma_1 = 19\, См/м$,

$T_1 = 600\, К$,

$\gamma_2 = 4095\, См/м$,

$T_2 = 1200\, К$,

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К$.

Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначаємо за формулою

$$\gamma = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT} \right), \tag{1}$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана.

Злогарифмуємо вираз (1) та одержимо

$$\ln\gamma = \ln\gamma_0 + \ln\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right) \Rightarrow \ln\gamma = \ln\gamma_0 - \frac{\Delta W}{2kT}.$$

Тоді

$$\ln\gamma_1 = \ln\gamma_0 - \frac{\Delta W}{2kT_1}, \qquad (2)$$

$$\ln\gamma_2 = \ln\gamma_0 - \frac{\Delta W}{2kT_2}. \qquad (3)$$

Віднімемо співвідношення (2) від (3) та одержимо

$$\ln\gamma_2 - \ln\gamma_1 = \frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Тоді ширину забороненої зони кремнію можна визначити з виразу

$$\Delta W = 2k\frac{\ln\gamma_2/\gamma_1}{\left(1/T_1 - 1/T_2\right)}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо розрахунки:

$$\Delta W = 2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\ln\left(4095/19\right)}{\left(1/600 - 1/1200\right)} =$$

$$= 1,78 \cdot 10^{-19} \left(Дж\right) = 1,11\left(eB\right).$$

Відповідь: $\Delta W = 1,78 \cdot 10^{-19} \left(Дж\right) = 1,11\left(eB\right).$

Задача 23.7

У скільки разів зміниться в разі підвищення температури від $T_1 = 300\,K$ до $T_2 = 310\,K$ електропровідність власного напівпровідника, ширина забороненої зони якого дорівнює $\Delta W = 0,3\,eB$.

Розв’язування

$\Delta W - ?$	Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначаємо за формулою
$T_1 = 300\,K$, $T_2 = 310\,K$, $\Delta W = 0,3\,eB = 0,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ Дж$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\ Дж/K$.	

$$\gamma = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right), \qquad (1)$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана.

Тоді для двох різних температур одержимо:

$$\gamma_1 = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right),$$

$$\gamma_2 = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right).$$

Звідси

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\gamma_0 \exp\left(-\dfrac{\Delta W}{2kT_2}\right)}{\gamma_0 \exp\left(-\dfrac{\Delta W}{2kT_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \exp\left[\frac{0,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{310}\right)\right] = 1,21.$$

Відповідь: $\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} = 1,21$, питома електропровідність збільшиться в 1,21 раза.

Задача 23.8

Зразок германію нагрівають від $0\,^0C$ до $17\,^0C$. Визначити, як зміниться його опір. Ширина забороненої зони германію дорівнює $\Delta W = 0,72\,eB$.

Розв'язування

$R_1/R_2 - ?$
$T_1 = 0^0\,C = 273\,K$,
$T_2 = 17^0\,C = 290\,K$,
$\Delta W = 0,72\,eB = 1{,}152 \cdot 10^{-19}$ *Дж.*

Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначаємо за формулою

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right),$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ *Дж/К*.

Тоді

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right),$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right),$$

звідси

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 \exp\left(-\dfrac{\Delta W}{2kT_2}\right)}{\sigma_0 \exp\left(-\dfrac{\Delta W}{2kT_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Питома провідність є оберненою величиною питомого опору $\rho = 1/\sigma$. Опір циліндричного провідника дорівнює

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S},$$

де l – довжина провідника; S – площа його перерізу.

Зі збільшенням температури опір власного напівпровідника зменшиться, відношення опорів дорівнює

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\frac{R_1}{R_2} = \exp\left[\frac{1,152 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{290}\right)\right] = 2,45.$$

Відповідь: $\sigma_2/\sigma_1 = 2,45$.

Задача 23.8

Опір *p*-*n*-переходу, що перебуває під зворотною напругою $U = 0{,}1\,В$, дорівнює $R = 692\,Ом$. Чому дорівнює опір переходу в разі прямого підключення? Температура дорівнює $T = 300\,K$.

Розв'язування

$R_2 - ?$
$U = 0{,}1\,В,$ $R_1 = 692\,Ом,$ $T = 300\,K.$

Сила струму в *p*-*n*-переході

$$I = I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right),$$

де I_S – максимальне значення зворотного струму; U – зовнішня напруга на переході; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}\,Кл$; k – стала Больцмана, $k = 1{,}38\cdot10^{-23}\,Дж/K = 8{,}625\cdot10^{-5}\,еВ/K$; T – абсолютна температура.

За законом Ома для ділянки кола опір дорівнює

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right)}.$$

У разі зворотного та прямого підключень маємо

$$R_1 = \frac{-U}{I_S\left(e^{-eU/(kT)} - 1\right)} \text{ та } R_2 = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right)}.$$

Тоді

$$\frac{R_2}{R_1} = -\frac{e^{-eU/(kT)} - 1}{e^{eU/(kT)} - 1} \Rightarrow R_2 = -R_1 \frac{e^{-eU/(kT)} - 1}{e^{eU/(kT)} - 1}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$R_2 = -692 \frac{e^{\frac{-1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} - 1}{e^{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} - 1} = 692 \frac{0,979}{46,7} = 14,5\left(Ом\right).$$

Відповідь: $R_2 = 14,5\,Ом$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

23.1 Визначити, з якого матеріалу виготовлена металева кулька, маса якої $m = 25\,г$, якщо відомо, що для її нагрівання від $T_1 = 10\,^0C$ до $T_2 = 30\,^0C$ потрібно витратити кількість теплоти $Q = 98\,Дж.$ Під час розв'язування задачі скористатися законом Дюлонга й Пті.

Відповідь: $M = 0{,}1276\,кг/моль$ – телур.

23.2 Металева кулька падає з висоти $h = 10{,}9\,м$ на масивну плиту. Після удару її температура збільшується на $\Delta T = 0{,}5\,K.$ Визначити, з якого матеріалу виготовлена кулька за умови, що 50 % кінетичної енергії кульки витратилося на її нагрівання. Під час розв'язування задачі скористатися законом Дюлонга й Пті.

Відповідь: $M = 0{,}195\,кг/моль$ – платина.

23.3 Використовуючи закон Дюлонга й Пті, визначити, в скільки разів питома теплоємність алюмінію більша за питому теплоємність платини.

Відповідь: у 7,22 раза.

23.4 Користуючись теорією теплоємності Ейнштейна, визначити зміну ΔU_M молярної внутрішньої енергії кристала під час нагрівання його від нуля до $T_1 = 0{,}1\theta_E$. Характеристична температура Ейнштейна $\theta_E = 300\,K.$

Відповідь: $\Delta U_M = 340\,Дж/моль$.

23.5 Користуючись теорією теплоємності Дебая, визначити зміну ΔU_M молярної внутрішньої енергії кристала під час нагрівання його від нуля до $T = 0{,}1\,\theta_E$. Характеристична температура Дебая для цього кристала дорівнює $\theta_D = 300\,K.$ Вважати $T << \theta_D$.

Відповідь: $\Delta U_M = 14{,}6\,кДж$.

23.6 Знайти відношення θ_E/θ_D характеристичних температур Ейнштейна і Дебая.

Примітка. Використати вирази для нульової енергії за теоріями Ейнштейна і Дебая

Відповідь: $\theta_E/\theta_D = 3/4$.

23.7 Розрахувати, використовуючи теорію Дебая, молярну нульову енергію U_{M0} кристала міді. Характеристична температура θ_D міді дорівнює 320 *К*.

Відповідь: $U_{M0} = 2,99\,МДж$.

23.8 Однакові маси свинцю та кремнію охолоджують за допомогою рідкого гелію від $T_1 = 10\,K$ до $T_2 = 4,2\,K$. Визначити відношення кількостей теплоти Q_1/Q_2, необхідної для такого охолодження. Температури Дебая: $\theta_D\left(Pb\right) = 95\,K$ та $\theta_D\left(Si\right) = 645\,K$ відповідно. Умову $T \ll \theta_D$ вважати такою, що виконується.

Відповідь: $Q_1/Q_2 = 42,3$.

23.9 Визначити енергію U_0 нульових коливань охолодженого до затвердіння одного моля аргону (температура Дебая $\theta_D = 92\,K$).

Відповідь: $U_0 = 860\,Дж$.

23.10 Яка кількість теплоти потрібна для нагрівання кристала калію масою $m = 0,2\,кг$ від температури $T_1 = 4\,K$ до температури $T_2 = 5\,K$. Характеристична температура Дебая для калію $\theta_D = 100\,K$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати такою, що виконується.

Відповідь: $Q = 0,92\,Дж$.

23.11 Використовуючи квантову теорію теплоємності Дебая, визначити змінювання ΔU_M молярної внутрішньої енергії кристала під час його нагрівання на $\Delta T = 2\ K$ від температури $T = \theta_D / 2$.

Відповідь: $\Delta U_M = 41,4\ кДж$.

23.12 Визначити концентрацію n вільних електронів у металі за температури $T = 0\ K$. Енергію Фермі взяти $\varepsilon_F = 1\, eB$.

Відповідь: $n = 4,57 \cdot 10^{27}\ м^{-3}$.

23.13 Визначити кількість вільних електронів, що припадає на один атом натрію за температури $T = 0\ K$. Рівень Фермі для натрію дорівнює $\varepsilon_F = 3,12\, eB$. Густина натрію $\rho = 970\, кг/м^3$.

Відповідь: $N = 0,9$.

23.14 Визначити значення енергії Фермі та концентрацію електронів у зоні провідності за температур $T_1 = 300\, K$ і $T_2 = 1\,000\, K$ у кристалі германію. Ширина забороненої зони германію дорівнює $\Delta W = 0,74\, eB$. Припустити, що ефективні маси електронів провідності та дірок дорівнюють масі вільного електрона.

Відповідь: $W_F = 0,37\, eB$, $n_1 = 1,53 \cdot 10^{19}\, м^{-3}$, $n_2 = 2,09 \cdot 10^{24}\, м^{-3}$.

23.15 Визначити значення енергії Фермі та концентрацію електронів у зоні провідності за температур $T_1 = 300\, K$ і $T_2 = 1\,000\, K$ у кристалі алмазу. Ширина забороненої зони алмазу дорівнює $\Delta W = 5,4\, eB$. Припустити, що ефективні маси електронів провідності та дірок дорівнюють масі вільного електрона.

Відповідь: $W_F = 2,7\, eB$, $n_1 = 1,14 \cdot 10^{-20}\, м^{-3}$, $n_2 = 3,81 \cdot 10^{12}\, м^{-3}$.

23.16 Визначити рівень Фермі ε_F у власному напівпровіднику, якщо енергія активації дорівнює $\Delta W_0 = 0{,}1\,eB$. За нульовий рівень відліку кінетичної енергії електронів взяти найнижчий рівень зони провідності.

Відповідь: $\varepsilon_F = -\,0{,}05\,eB$.

23.17 Власний напівпровідник (германій) має за деякої температури питомий опір $\rho = 0{,}48\ Ом \cdot м$. Визначити концентрацію n носіїв заряду, якщо рухливості й електронів, і дірок відповідно дорівнюють $\mu_n = 0{,}36\,м^2/(B \cdot c)$ та $\mu_p = 0{,}16\,м^2/(B \cdot c)$.

Відповідь: $n = 2{,}5 \cdot 10^{19}\ м^3$.

23.18 Визначити відношення концентрацій n_1/n_2 вільних електронів літію та цезію за $T = 0$, якщо відомо, що рівні Фермі в цих металах відповідно $\varepsilon_{F1} = 4{,}72\,eB$ і $\varepsilon_{F2} = 1{,}53\,eB$.

Відповідь: $n_1/n_2 = 5{,}41$.

23.19 У скільки разів кількість вільних електронів, які припадають на один атом металу за $T = 0$, більша в алюмінії, ніж у міді, якщо рівні Фермі відповідно $\varepsilon_{F1} = 11{,}7\,eB$, $\varepsilon_{F2} = 7\,eB$?

Відповідь: втричі.

23.20 Обчислити середню кінетичну енергію $< W >$ електронів у металі за температури $T = 0\ K$, якщо рівень Фермі $\varepsilon_F = 7\,eB$.

Відповідь: $< W > = \dfrac{3}{5}\varepsilon_F = 4{,}2\,eB$.

23.21 Метал перебуває за температури $T = 0$ К. Визначити, в скільки разів кількість електронів із кінетичною енергією від $W_F/2$ до W_F більша за кількість електронів з енергією від 0 до $W_F/2$.

Відповідь: в $1,83$ раза.

23.22 Електрони в металі перебувають за температури $T = 0$ K. Знайти відносну кількість $\Delta N/N$ вільних електронів, кінетична енергія яких відрізняється від енергії Фермі не більше ніж на $2\,\%$.

Відповідь: $\Delta N/N = 0,03$.

23.23 Визначити відношення концентрації $n_{\max}$ електронів у металі (за $T = 0$ K), енергія яких відрізняється від максимальної не більше ніж на $\Delta\varepsilon$, до концентрації $n_{\min}$ електронів, енергія яких не перебільшує значення $\varepsilon = \Delta\varepsilon$ $\left(\Delta\varepsilon = 0,01\,\varepsilon_F\right)$.

Відповідь: у $n_{\max}/n_{\min}$ = $14,9$ раза.

23.24 Питома провідність кремнію з домішками дорівнює $\gamma = 112\,См/м$. Визначити рухливість γ_p дірок та їх концентрацію n_p, якщо стала Холла $R_H = 3,66 \cdot 10^{-4}\ м^3/Кл$, за умови, що напівпровідник має лише діркову провідність.

Відповідь: $\gamma_p = 3,5 \cdot 10^{-2}\ м^2/В \cdot с$, $n_p = 2 \cdot 10^{22}\ м^3$.

23.25 У скільки разів зміниться в разі підвищення температури від $300\,K$ до $310\,K$ провідність: а) металу; б) власного напівпровідника, ширина забороненої зони якого $\Delta W = 0,3\,еВ$? Яким є характер зміни в обох випадках?

Відповідь: а) $\gamma_2/\gamma_1 = 1/1,003$, зменшиться в 1,003 раза; б) $\gamma_2/\gamma_1 = 1,21$, збільшиться в 1,21 раза.

23.26 Кристал германію, ширина забороненої зони якого $\Delta W = 0,72\,еВ$, нагрівають від температури $T_1 = 0\ {}^0C$

до температури $T_2 = 20\,^0C$. У скільки разів збільшиться його питома провідність?

Відповідь: у $\sigma_2/\sigma_1 = 2,83$ раза.

23.27 Визначити ширину забороненої зони бездомішкового напівпровідника, червона межа внутрішнього фотоефекту якого $\lambda_0 = 654\,нм$.

Відповідь: $\Delta W = 1,9\,еВ$.

23.28 Опір *p*-*n*-переходу, що перебуває під зворотною напругою $U = 0,1\,B$, дорівнює $R = 692\,Ом$. Чому дорівнює опір переходу в разі прямого підключення за температури $T = 300\,K$?

Відповідь: $R_2 = 14,5\,Ом$.

23.29 Опір *p*-*n*-переходу, що перебуває під прямою напругою $U = 1\,B$, $R_1 = 10\,Ом$. Чому дорівнює опір переходу в разі зворотного підключення? Температура дорівнює $T = 300\,K$.

Відповідь: $R_2 = 6,1 \cdot 10^{17}\,Ом$.

23.30 Пряма напруга, прикладена до *p*-*n*-переходу, $U = 2\,B$. У скільки разів збільшиться сила струму через перехід, якщо змінити температуру від $T_1 = 27\,^0C$ до $T_2 = 0\,^0C$?

Відповідь: в $I_2/I_1 = 2,09 \cdot 10^3$ разів.

24 БУДОВА ЯДРА АТОМА. РАДІОАКТИВНІСТЬ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

24.1 Ядро позначають тим самим символом, що й нейтральний атом:

$$ {}^{A}_{Z}X , $$

де X – символ хімічного елемента; Z – атомний номер (кількість протонів у ядрі); A – масове число (кількість нуклонів у ядрі). Кількість N нейтронів у ядрі дорівнює різниці $A - Z$.

24.2 Радіус ядра атома можна обчислити за формулою

$$ R = R_0 A^{1/3} , $$

де $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ *м*.

24.3 Закон радіоактивного розпаду має вигляд

$$ N = N_0 e^{-\lambda t} , $$

де N – кількість атомів, що не розпалися за час t; N_0 – кількість атомів, що не розпалися, на момент, взятий за початковий (за $t = 0$); λ – стала радіоактивного розпаду.

24.4 Період піврозпаду $T_{1/2}$ – проміжок часу, за який кількість атомів, які не розпалися, зменшується вдвічі. Період піврозпаду пов’язаний із сталою розпаду співвідношенням

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

24.5 Кількість атомів, які розпалися за час t, дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Якщо проміжок часу $\Delta t << T_{1/2}$, то для визначення кількості атомів, які розпалися, можна використовувати наближену формулу

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t.$$

24.6 Середній час життя τ радіоактивного ізотопу – проміжок часу, за який кількість ядер, які не розпалися, зменшується в e разів:

$$\tau = 1/\lambda .$$

24.7 Кількість атомів, що міститься в радіоактивному ізотопі, дорівнює

$$N = \frac{m}{M} N_A ,$$

де m – маса ізотопу; M – його молярна маса; N_A – стала Авогадро.

24.8 Активність A нукліда в радіоактивному джерелі (активність ізотопу) є величиною, що дорівнює відношенню кількості dN ядер, які розпалися в ізотопі, до проміжку часу dt, за який відбувся розпад. Активність визначають за формулою

$$A = -\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

або після заміни N за основним законом радіоактивного розпаду одержимо

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

24.9 Активність ізотопу в початковий момент часу ($t = 0$) дорівнює

$$A_0 = \lambda N_0 .$$

24.10 Активність ізотопу змінюється з часом за тим самим законом, що й кількість ядер, які не розпалися:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

24.11 Питома активність a радіоактивного джерела – це величина, що дорівнює відношенню його активності A до маси m цього ізотопа, тобто

$$a = A/m .$$

24.12 Дефект маси ядра

$$\Delta m = \left[Z m_p + \left(A - Z \right) m_n \right] - m_a ,$$

де m_p, m_n, m_H, m_a – маси протона, нейтрона, ядра та атома водню відповідно; Z – зарядове число; А – масове число.

24.13 Енергія зв'язку нуклона в ядрі

$$W_{зв} = \Delta mc^2,$$

де Δm – дефект маси ядра; c – швидкість світла у вакуумі. У разі якщо енергію виражають у мегаелектрон-вольтах, а масу – в атомних одиницях маси, то

$$c^2 = 931{,}4\, МеВ / а.\, о.\, м.$$

24. 14 Питома енергія зв'язку – енергія, що припадає на один нуклон:

$$\Delta W_{пит} = \frac{W_{зв}}{A}.$$

ЕЛЕМЕНТИ ДОЗИМЕТРІЇ

24.15 Закон поглинання γ-випромінювання речовиною (закон Бугера):

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

де I_0 – інтенсивність γ-випромінювання, що падає на речовину; I – інтенсивність γ-випромінювання, яке пройшло в речовині відстань x; μ – лінійний коефіцієнт поглинання.

24.16 Масовий коефіцієнт поглинання

$$k = \frac{\mu}{\rho},$$

де ρ – густина речовини, що послаблює випромінювання; μ – лінійний коефіцієнт поглинання.

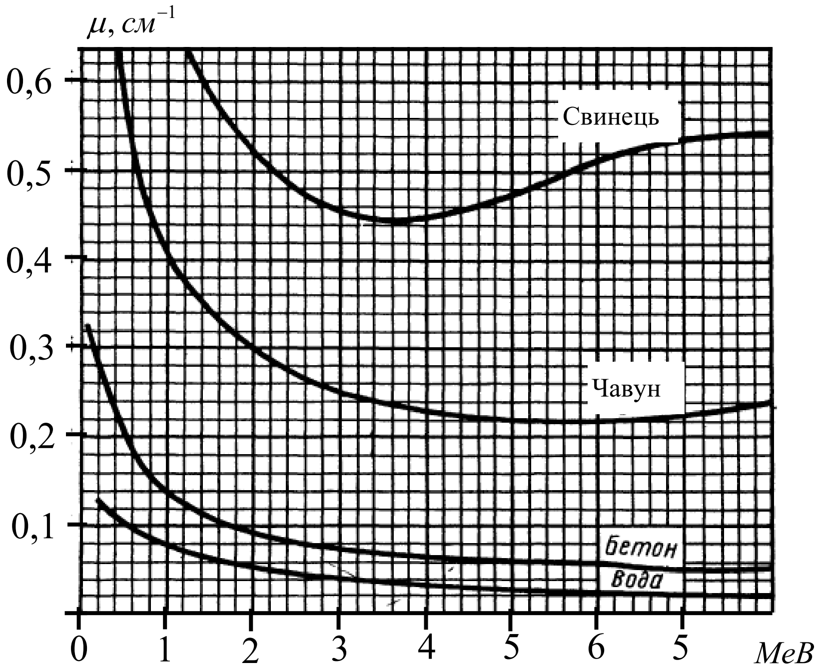


Рисунок 1 – Залежність лінійного коефіцієнта поглинання від енергії фотонів

Доза опромінення (експозиційна доза) – це величина, що дорівнює відношенню суми електричних зарядів усіх іонів одного знака, які утворилися в повітрі внаслідок іонізувальної здатності радіоактивного випромінювання, до маси цього повітря:

$$D_E = \frac{\Delta q}{\Delta m}.$$

24.17 Один рентген $(1P)$ – це позасистемна одиниця вимірювання експозиційної дози.

Один рентген відповідає дозі опромінення, за якої в $1\ м^3$ сухого повітря за нормальних умов утворюється $2,08 \cdot 10^{15}$ пар іонів.

24.18 Потужність дози опромінення

$$\breve{D}_E = \frac{\Delta \breve{D}_E}{\Delta t}.$$

24.19 Доза поглинання – це величина, що показує, яка кількість енергії випромінювання поглинається одиницею маси речовини:

$$D_n = \frac{\Delta W}{\Delta m}.$$

24.20 Відносна біологічна ефективність випромінювання – це показник, за допомогою якого визначають, у скільки разів біологічна дія іонізувальних випромінювань цього типу (наприклад, альфа-, бета-променів, нейтронів іт. ін.) більша (або менша) за дію на той самий біологічний об’єкт стандартного випромінювання (жорстких рентгенівських та гамма-променів). Значення показника ВБЕ наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Відносна біологічна ефективність випромінювання

Тип радіації	**ВБЕ**
Рентгенівські промені та гамма-випромінювання до 3 *МеВ*, бета-частинки	1
Теплові нейтрони	5
Протони й дейтрони	10
Швидкі нейтрони	10
Альфа-частинки	20

Таблиця 2 – Одиниці вимірювання доз випромінювання та зв'язок між ними

Тип дози	**Одиниця вимірювання в СІ**	**Позасистемна одиниця**	**Зв'язок**
Доза опромінення (експозиційна доза)	$1\,Кл/кг$	$1\,Р$	$1\,Кл/кг = 3876\,Р$
Потужність дози опромінення	$1\,А/кг$	$1\,Р/с$	$1\,А/кг = 3876\,Р/с$
Доза поглинання	$1\,Гр = \frac{1\,Дж}{1\,кг}$	$1\,рад$	$1\,рад = 0{,}01\,Гр$
Біологічна доза	$1\,Бер$	$1\,Рем$ $1\,Sv$	$1\,Бер = 1\,рад \cdot ВБЕ$ $1\,Бер = 1\,Рем$ $1\,Sv = 100\,Рем =$ $= 100\,Бер$

Одиницями біологічної дози є 1 Бер, 1 Рем та 1 Зіверт.

1 Бер (біологічний еквівалент рентгена) або 1 Рем (від англ.: радіаційний еквівалент людини) *– одиниця вимірювання еквівалентної (біологічної) дози радіації, що враховує різні шляхи передавання енергії від іонізувальної радіації до тканин людського організму*:

$$1\ Бер = 1\ рад \cdot ВБЕ.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 24.1

Період піврозпаду ізотопу стронцію ${}^{90}_{38}Sr$ становить 28 років. Знайти середній час життя ядра цього ізотопу.

Розв'язування

$\tau - ?$
$T_{1/2} = 28\ років.$

Кількість ядер $dN(t)$, що розпадаються за проміжок часу від t до $t + dt$, дорівнює

$$dN = -\lambda N dt,$$

де λ – стала розпаду.

Час життя кожного з цих ядер дорівнює t. Загальний час життя всіх N_0 ядер, які існували за $t = 0$, може бути одержаний інтегруванням виразу $tdN(t)$. Розділивши результат на N_0, одержимо середній час життя радіоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t dN(t) = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N(t)dt = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N_0 \exp(-\lambda t)dt =$$

$$= \int_0^\infty t\lambda \exp(-\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}.$$

З урахуванням того, що стала розпаду λ і період піврозпаду пов'язані співвідношенням

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}},$$

одержимо

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}. \qquad (1)$$

Після підставлення числових значень величин у співвідношення (1) знайдемо

$$\tau = \frac{28}{0,693} = 40,4 \text{ (року)}.$$

Відповідь: $\tau = 40,4$ року.

Задача 24.2

Середній час життя атомів деякої радіоактивної речовини $\tau = 1\,c$. Визначити ймовірність ω того, що ядро атома розпадеться за проміжок часу $t = 1\,c$.

Розв’язування

$\omega - ?$
$\tau = 1\,c$, $t = 1\,c$.

За проміжок часу t розпадається кількість атомів

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left[1 - \exp(-\lambda t)\right] =$$

$$= N_0\left[1 - \exp(-t/\tau)\right],$$

де N – кількість атомів, що не розпалися за час t; N_0 – кількість атомів, які не розпалися на момент, взятий за початковий (за $t = 0$); λ – стала радіоактивного розпаду.

Ймовірність розпаду одного атома дорівнює

$$\omega = \frac{\Delta N}{N_0} = 1 - \exp\,(-\frac{t}{\tau}).$$

Після підставлення числових значень у це співвідношення визначимо

$$\omega = 1 - \exp\,(-\frac{1}{1}) = 0,63.$$

Відповідь: $\omega = 0,63$.

Задача 24.3

Визначити початкову активність A_0 радіоактивного магнію ^{27}Mg масою $m = 0,2\,мкг$, а також його активність A через одну годину. Припустимо, що всі атоми ізотопу є радіоактивними.

Розв'язування

$A_0 - ?\;\; A - ?$
$m = 0,2\,мкг = 2\cdot 10^{-10}\,кг$,
$t = 1\,год = 3600\,с$,
$M = 27\cdot 10^{-3}\,кг/моль$.

Активність ізотопу в початковий момент часу ($t = 0$) дорівнює

$$A_0 = \lambda N_0, \tag{1}$$

де λ – стала радіоактивного розпаду; N_0 – кількість атомів у початковий момент.

Візьмемо до уваги, що

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \qquad (2)$$

де $T_{1/2}$ – період піврозпаду, для ^{27}Mg $T_{1/2} = 10\,хв = 600\,с$.

Кількість атомів визначимо із співвідношення

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A, \qquad (3)$$

де N_A – стала Авогадро (кількість атомів в одному молі речовини), $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,моль^{-1}$; M – молярна маса магнію.

З урахуванням виразів (2) і (3) співвідношення (1) набере вигляду

$$A_0 = \frac{mN_A}{MT_{1/2}} \ln 2. \qquad (4)$$

Активність ізотопу змінюється з часом за законом

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \qquad (5)$$

Замінимо у формулі (5) сталу розпаду її значенням (2), тоді одержимо

$$A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} = A_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-t/T_{1/2}} = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}. \qquad (6)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (4) та (6) знайдемо

$$A_0 = \frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3} \cdot 600} 0,697 = 5,15 \cdot 10^{12} \left(Бк \right) = 5,15 \left(ТБк \right),$$

$$A = \frac{5,15 \cdot 10^{12}}{2^{3600/600}} = 8,05 \cdot 10^{10} \left(Бк \right) = 80,5 \left(ГБк \right).$$

Відповідь: $A_0 = 5,15\,ТБк$; $A = 80,5\,ГБк$.

Задача 24.4

Визначити дефект маси Δm, енергію зв'язку $E_{зв}$ та питому енергію зв'язку ядра ${}^{11}_{5}B$.

Розв'язування

$\Delta m - ?$ $E_{зв} - ?$ $\Delta E_{пит} - ?$
${}^{11}_{5}B$.

Дефект маси ядра дорівнює

$$\Delta m = \left[Zm_p + \left(A - Z \right) m_n \right] - m_a,$$

де Z – зарядове число; А – масове число; m_p, m_n і m_a – маси протона, нейтрона та атома.

У нашому випадку $Z = 5$, $A = 11$. У таблицях А.7 та А.8 додатка А знайдемо маси протона m_p, нейтрона m_n та атома ${}^{11}_{5}B$ m_a:

$$m_p = 1,00728\,а.\,о.\,м.,$$
$$m_n = 1,00867\,а.\,о.\,м.,$$
$$m_a = 11,00931\,а.\,о.\,м.$$

Підставимо ці дані у формулу для визначення дефекту маси й одержимо

$$\Delta m = 5 \cdot 1,00728 + (11-5) \cdot 1,00867 - 11,00931 =$$

$$= 0,08186 (а.\,о.\,м.).$$

Енергія зв'язку нуклона в ядрі

$$E_{зв} = \Delta m c^2,$$

де $c^2 = 931,4\, МеВ / а.\,о.\,м.$

За допомогою розрахунків одержуємо

$$E_{зв} = 0,08186 \cdot 931,4 = 76,2\, МеВ = 12,2\, (пДж).$$

Питома енергія зв'язку (енергія, що припадає на один нуклон) дорівнює

$$\Delta E_{пит} = \frac{E_{зв}}{A}.$$

За допомогою обчислень маємо

$$\Delta E_{пит} = \frac{76,2}{11} = 6,93 (МеВ / нуклон).$$

Відповідь: $\Delta m = 0,08186\, а.\,о.\,м.$, $E_{зв} = 12,2\, пДж$, $\Delta E_{пит} = 6,93\, МеВ / нуклон$.

Задача 24.5

Період піврозпаду ${}^{60}_{27}Co$ дорівнює $T_{1/2} = 5,3$ року. Визначити, яка частка початкової кількості ядер розпадеться за $t = 5$ років.

Розв'язування

$\Delta N - ?$
$t = 5$ *років*,
$T_{1/2} = 5,3$ *року*.

Кількість атомів, які розпалися за час t, дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right), \quad (1)$$

де λ – стала радіоактивного розпаду; N_0 – кількість атомів у початковий момент.

Частка початкової кількості ядер, що розпадеться за час t,

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Візьмемо до уваги, що стала розпаду

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad (2)$$

де $T_{1/2}$ – період піврозпаду,

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}.$$

За допомогою розрахунків одержимо

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5,3}5} = 0,48 .$$

Відповідь: $\Delta N / N_0 = 0,48$.

Задача 24.6

Визначити товщину шару половинного ослаблення $d_{1/2}$ паралельного пучка γ-випромінювання для води, якщо лінійний коефіцієнт поглинання води для цього випромінювання дорівнює $\mu = 0,047\, см^{-1}$.

Розв'язування

$d_{1/2} - ?$
$\mu = 0,047\, см^{-1}$.

Під час проходження γ-випромінювання через шар речовини його поглинання здійснюється завдяки трьом факторам: фотоефекту, ефекту Комптона та утворенню пар (електрон – позитрон). Внаслідок дії цих трьох факторів інтенсивність γ-випромінювання зменшується за експонентою залежно від товщини шару:

$$I = I_0 e^{-\mu d} . \qquad (1)$$

Після проходження шару води, товщина якого дорівнює товщині шару половинного ослаблення $d_{1/2}$, інтенсивність пучка γ-випромінювання дорівнюватиме $I = I_0/2$, тоді після підставлення у вираз (1) та виконання низки нескладних перетворень одержимо

$$\frac{1}{2}I_0 = I_0 e^{-\mu d} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = e^{-\mu d_{1/2}} \;\Rightarrow\; \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\mu d_{1/2}} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -\ln 2 = -\mu d_{1/2} \;\Rightarrow\; d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \qquad (2)$$

Підставимо в одержаний вираз (2) значення $\ln 2$ й коефіцієнта поглинання μ та проведемо розрахунки:

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{4,7} = 0,147\,м\,.$$

Таким чином, шар води товщиною $d_{1/2} = 0,147\,м$ зменшує інтенсивність γ-випромінювання вдвічі.

Відповідь: $d_{1/2} = 0,147\,м$.

Задача 24.7

Космічне випромінювання на рівні моря на екваторі утворює в повітрі об'ємом $V = 1\,см^3$ у середньому $N = 24$ пар іонів за час $t_1 = 10\,с$. Визначити дозу опромінення, отриману людиною впродовж одного року. Скільки рентген отримає людина за цей час?

$\breve{D}_E - ?\ D(P) - ?$
$V = 1\,см^3 = 10^{-6}\,м^3$,
$t_1 = 10\,с$,
$N = 24$,
$t_2 = 1\,р = 365 \cdot 24 \cdot 3600\,с$.

Розв'язування

Дозу опромінення, отриману людиною, можна визначити за формулою

$$D_E = \breve{D}_E t_2, \qquad (1)$$

де $\breve{D}_E$ – потужність дози опромінення.

Потужність дози

$$\breve{D}_E = \frac{qm}{t_1},$$

де q – заряд іонів одного знака, утворених випромінюванням за час t_1 у повітрі, маса якого m.

Масу повітря визначимо як добуток густини ρ повітря на його об'єм V:

$$m = \rho V,$$

де $\rho = 1,29\,кг/м^3$ – густина повітря за нормальних умов.

Заряд усіх іонів одного знака дорівнює добутку елементарного заряду $|e|$ на кількість іонів N:

$$q = |e| N.$$

Тоді з урахуванням вищевикладеного формула (1) набере вигляду

$$D_E = \frac{q}{mt_1} t_2 = \frac{|e| N t_2}{\rho V t_1}. \qquad (2)$$

Підставимо числові значення фізичних величин у співвідношення (2) та одержимо

$$D_E = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 24 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{1,29 \cdot 10^{-6} \cdot 10} = 9,41 \cdot 10^{-6} \left(Кл/кг \right).$$

Знайдемо дозу опромінення людини в рентгенах, зважаючи на визначення рентгена: 1 Р відповідає дозі опромінення, за якої в 1 $м^3$ сухого повітря за нормальних умов утворюється $2,08 \cdot 10^{15}$ пар іонів. Визначимо, скільки пар іонів n утворюється в 1 $м^3$ сухого повітря за нормальних умов за отриманої дози опромінення $D_n = 9,41 \cdot 10^{-6}\ Кл/кг$:

$$n = \frac{N}{Vt_1} t.$$

Тоді доза опромінення в рентгенах дорівнює

$$D_n(P) = \frac{N}{2,08 \cdot 10^{15} V t_1} t.$$

За допомогою обчислень одержуємо

$$D(P) = \frac{24}{2,08 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-6} \cdot 10} 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 0,36(P).$$

Відповідь: $D_E = 9,41 \cdot 10^{-6}\ Кл/кг$, $D_n(P) = 0,36\,P$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

24.1 Визначити атомні номери, масові числа та хімічні символи ядер, які утворяться, якщо в ядрах $^{3}_{2}He$, $^{7}_{4}Be$, $^{15}_{8}O$ протони замінити нейтронами, а нейтрони – протонами.

Відповідь: $^{3}_{1}H$, $^{7}_{3}Li$, $^{15}_{7}N$.

24.2 Яку частку від маси нейтрального атома плутонію становить маса його електронної оболонки?

Відповідь: $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$.

24.3 Визначити зарядове та масове числа ізотопу, утворюваного з торію $^{232}_{90}Th$ після двох α- та двох β-перетворень.

Відповідь: $Z = 88$, $A = 224$.

24.4 Внаслідок радіоактивного розпаду уран $^{238}_{92}U$ перетворюється на свинець $^{206}_{82}Pb$. Скільки α- та β-перетворень у цьому разі відбулося?

Відповідь: 8 α-перетворень та 6 β-перетворень.

24.5 Визначити середню густину ядра та середню об’ємну густину його електричного заряду.

Відповідь: $\rho = 1,4 \cdot 10^{17}\ кг/м^3$, $\rho_{ел} = 7 \cdot 10^{24}\ Кл/м^3$.

24.6 Визначити вік мінералу, в якому на один атом урану припадає: а) один атом свинцю; б) 0,2 атома свинцю.

Відповідь: а) $t = 4,5 \cdot 10^9$ років; б) $t = 1,44 \cdot 10^9$ років.

24.7 Визначити, в скільки разів початкова кількість ядер радіоактивного ізотопу зменшиться за три роки, якщо за один рік вона зменшилася в 4 рази.

Відповідь: $n = 64$.

24.8 Визначити у відсотках, яка частина початкової кількості ядер радіоактивного ізотопу не розпадеться за час t, що дорівнює двом середнім термінам життя τ радіоактивного ядра.

Відповідь: $\omega = 13{,}5$ %.

24.9 Визначити, що й у скільки разів є більш тривалим: три періоди піврозпаду $T_{1/2}$ чи два середніх терміни життя радіоактивного ядра τ.

Відповідь: $3T = 2{,}08\tau$.

24.10 Визначити період піврозпаду радіоактивного ізотопу, якщо $5/8$ від початкової кількості ядер цього ізотопу розпалося за час t = 849 с.

Відповідь: $T_{1/2}$ = 10 *хв*.

24.11 Вивести формулу для визначення швидкості радіоактивного розпаду через період піврозпаду $T_{1/2}$ й початкове число N_0 радіоактивних атомів.

Відповідь: $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 \exp\left(-\dfrac{t \ln 2}{T_{1/2}}\right)$.

24.12 Лічильник Гейгера зареєстрував за 1 хв 4 000 β-частинок, що утворилися під час розпаду ядер радіоактивного ізотопу, а через одну добу – лише 1 000 розпадів. Визначити період піврозпаду ізотопу.

Відповідь: $T_{1/2} = 0{,}5$ доби.

24.13 Знайти сталу розпаду λ і середній час життя τ радіоактивного ізотопу ${}^{55}_{27}Co$, якщо відомо, що його активність зменшується на $\eta = 4\,\%$ за одну годину? Продукт розпаду нерадіоактивний.

Відповідь: $\lambda = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\ c^{-1}$, $\tau = 1$ рік.

24.14 Із кожного мільйона атомів радіоактивного ізотопу щосекунди розпадається 200 атомів. Визначити період піврозпаду ізотопу.

Відповідь: $T_{1/2} - \dfrac{N}{A}\ln 2 = 3\,466\ с = 0,96\ год.$

24.15 Несистемною одиницею радіоактивності ізотопу є кюрі (Ки) – це активність препарату, що чисельно дорівнює активності 1 г радію, тобто тій кількості розпадів, що відбуваються в 1 г радію за 1 с. Визначити цю кількість, знаючи, що період піврозпаду радію $T_{1/2}$ = 1 620 років.

Відповідь: $A = 3,7 \cdot 10^{10}\ Бк.$

24.16 На скільки відсотків зменшиться активність ізотопу іридію ${}^{193}_{77}Ir$ за час $t = 15\ діб$?

Відповідь:

$$\frac{A_0 - A}{A_0} = 1 - \exp\left(-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}\right) = 0,129 = 12,9\ \%.$$

24.17 Визначити дефект маси, енергію зв'язку та питому енергію зв'язку ядра атома важкого водню.

Відповідь: $\Delta m = 0,0024\ а.\,о.\,м.$, $E_{зв} = 2,23\ MeB.$

24.18 Визначити: а) енергію зв'язку ядер гелію ${}^{4}_{2}He$ та дейтерію ${}^{2}_{1}H$; б) яку енергію потрібно витратити, щоб розщепити ядро гелію на два дейтони ${}^{2}_{1}H$?

Відповідь: а) $E_{зв,\,He} = 28,3\ MeB$, $E_{зв,\,H} = 2,2\ MeB$; б) $E = 23,6\ MeB.$

24.19 Визначити енергії зв'язку нейтрона та протона в ядрі ізотопу бора ${}^{11}_{5}B$. Пояснити чому вони є різними.

Відповідь: $E_{зв,\,n} = 11,46\ MeB$, $E_{зв,\,p} = 11,24\ MeB.$

24.20 Визначити масу m_a нейтрального атома, якщо ядро цього атома складається з трьох протонів та двох нейтронів, й енергія зв'язку ядра $E_{зв} = 26,3\,МеВ.$ Якого елемента це атом?

Відповідь: $m_a = 5,01258\,а.\,о.\,м.,$ це атом літію ${}^{5}_{3}Li.$

24.21 Пластина товщиною $d = 1\,см$ послаблює інтенсивність γ-випромінювання вдвічі. У скільки разів зменшиться інтенсивність цього випромінювання під час проходження через 10 пластин?

Відповідь: $\dfrac{I_0}{I_{10}} = 1027.$

24.22 Розрахувати товщину захисного шару чавуну, що послаблює інтенсивність випромінювання з енергією $W = 4\,МеВ$ у п'ять разів.

Відповідь: $d = 7\,см.$

24.23 Розрахувати товщину захисного водяного шару, що послаблює інтенсивність випромінювання з енергією $W = 1,5\,МеВ$ у п'ять разів.

Відповідь: $d = 27,3\,см.$

24.24 Повітря в деякому об'ємі опромінюється рентгенівськими променями. Доза опромінення дорівнює $D\left(P\right) = 4,5\,P.$ Визначити, яка частка атомів, що містяться в цьому об'ємі, буде іонізована цим випромінюванням?

Відповідь: $\dfrac{N_1}{N} = 3,5 \cdot 10^{-10}.$

24.25 Визначити дозу поглинання під час поглинання енергії γ-випромінювання ${}^{60}Co$ (енергія кванта $\varepsilon = 1,3\,МеВ$) в об'ємі, маса якого $m = 70\,кг,$ упродовж однієї доби. Активність поглинутого випромінювання $A = 100\,мКи.$

Відповідь: $D_п = 0,6\,Гр.$

24.26 Яка частина всіх молекул повітря за нормальних умов іонізується рентгенівським випромінюванням за експозиційної дози $D_E = 258\,мкКл/кг$? Чому дорівнює ця доза в рентгенах?

Відповідь: $\omega = 7,73 \cdot 10^{-11}$, $D_E = 1\,P$.

24.27 Повітря за нормальних умов опромінюється γ-випромінюванням. Визначити, яку енергію W поглинає повітря масою $m = 5\,г$ за експозиційної дози опромінення $D_E = 258\,мкКл/кг$. Визначити також дозу поглинання для повітря за умови, що енергія γ-квантів $\varepsilon = 6,8\,еВ$.

Відповідь: $W = 8,77\,мкДж$, $D_п = 1,75\,мГр$.

24.28 Ефективний об'єм іонізаційної камери кишенькового дозиметра $V = 1\,см^3$, електроємність $C = 2\,пФ$. Камера містить повітря за нормальних умов. Дозиметр був заряджений до потенціалу $\varphi_1 = 150\,В$. Під дією випромінювання потенціал зменшився до $\varphi_2 = 110\,В$. Визначити експозиційну дозу опромінення.

Відповідь: $D_E = 62\,мкКл/кг$.

24.29 Потужність експозиційної дози, створювана джерелом γ-випромінювання з енергією фотонів $\varepsilon = 2\,МеВ$, дорівнює $\breve{D}_E = 0,86\,мкА/кг$. Визначити експозиційну, поглинуту та біологічну дози такого випромінювання впродовж однієї доби. Чому дорівнює біологічна доза α-, β-випромінювання, а також потоку теплових нейтронів із такою самою експозиційною дозою?

Відповідь: $D_E = 740\,мКл/кг$, $D_п = 0,148 \cdot 10^5\,Гр$, $D_Б = 287\,БеР$, $D_{Б,\alpha} = 5740\,БеР$, $D_{Б,\beta} = 287\,БеР$, $D_{Б,n} = 1435\,БеР$.

24.30 Потужність експозиційної дози з енергією фотонів $W = 2\,МеВ$ $\breve{D}_E = 0,86\,мкА/кг$. Визначити товщину d свинцевого екрана, що зменшує потужність експозиційної дози до рівня гранично допустимої $\breve{D}_{ЕГ} = 0,86\,нА/кг$.

Під час розв'язування задачі скористатися графіком на рисунку 1.

Відповідь: $d = 13\,см.$

25 ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

25.1 Символічний запис ядерної реакції:

$$ {}_{Z}^{A}X + a \rightarrow {}_{Z'}^{A'}Y + b \text{ або } {}_{Z}^{A}X\left(a,b\right) \rightarrow {}_{Z'}^{A'}Y \,, $$

де ${}_{Z}^{A}X$ і ${}_{Z'}^{A'}Y$ – початкове й кінцеве ядра відповідно із зарядовими числами Z та Z' та масовими числами A і A'; a – частинка, що бомбардує ядро, b – частинка, що утворюється в результаті реакції.

Під час позначення частинок використовують такі символи:

p – протон; n – нейтрон; d – дейтон; α – альфа-частинка; γ – гамма-фотон.

Під час ядерної реакції виконують закони збереження:

а) масового числа;
б) зарядового числа;
в) релятивістської повної енергії;
г) імпульсу.

25.2 Енергія ядерної реакції

$$ Q = \left[\left(m_1 + m_2\right) - \left(m_3 + m_4\right)\right]c^2 \,, $$

де m_1 і m_2 – маса спокою ядра-мішені та частинки, що його бомбардує; $\left(m_3 + m_4\right)$ – сума мас спокою ядер продуктів реакції.

Поріг ядерної реакції – це мінімальне значення кінетичної енергії частинки, що бомбардує нерухому мішень – ядро, за якої відбувається ця реакція. У цьому разі швидкості частинок, утворюваних унаслідок реакції, дорівнюють нулю.

Таблиця 1 – Кваркова модель адронів

НАЗВА	**ПОЗНАЧЕННЯ**	**КОЛІР**	**МАСА**	**ЗАРЯД**
UP (верхній)	U	$u_с, u_з, u_ч$	310	$+\frac{2}{3}$
Down (нижній)	D	$d_с, d_з, d_ч$	310	$-\frac{1}{3}$
Charm (зачарований)	C	$c_с, c_з, c_ч$	1 500	$+\frac{2}{3}$
Strange (дивний)	S	$s_с, s_з, s_ч$	505	$-\frac{1}{3}$
Top Truth (правдивий)	T	$t_с, t_з, t_ч$	2 250	$+\frac{2}{3}$
Botton beuty (красивий)	B	$b_с, b_з, b_ч$	5 000	$-\frac{1}{3}$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 25.1

Знайти енергію реакції ${}_4^9Be + {}_1^1p \rightarrow {}_2^4He + {}_3^6Li$, якщо відомо, що кінетична енергія протона $W_p = 5,45\,MeB$, ядра гелію $W_{He} = 4\,MeB$ і що ядро гелію вилетіло під кутом $\alpha = 90^0$ до напрямку руху протона. Ядро-мішень ${}_4^9Be$ нерухоме.

Розв'язування

$\omega - ?$
$W_p = 5,45\,MeB,$ $W_{He} = 4\,MeB,$ $\alpha = 90^0.$

Енергія реакції Q є різницею між сумою кінетичних енергій ядер-продуктів реакції й кінетичною енергією ядра, що спричиняє реакцію:

$$Q = W_{Li} + W_{He} - W_p . \qquad (1)$$

У цьому виразі невідома кінетична енергія W_{Li} літію. Для її визначення скористаємося законом збереження імпульсу

$$\vec{p}_p = \vec{p}_{He} + \vec{p}_{Li} . \qquad (2)$$

Вектори $\vec{p}_H$ і $\vec{p}_{He}$ за умовою задачі взаємно перпендикулярні й, отже, разом із вектором $\vec{p}_{Li}$ утворюють прямокутний трикутник. Тому

$$\left(p_{Li}\right)^2 = \left(p_{He}\right)^2 + \left(p_p\right)^2 . \qquad (3)$$

Виразимо в цій рівності імпульси ядер через їх кінетичні енергії. Оскільки кінетичні енергії ядер за умовою набагато менші від енергій спокою цих ядер, то можна скористатися формулою класичної фізики:

$$p^2 = 2mW. \tag{4}$$

Замінивши в рівнянні (3) квадрати імпульсів ядер їх виразами (4), після спрощення одержимо

$$m_{Li}W_{Li} = m_{He}W_{He} + m_p W_p,$$

звідси

$$W_{Li} = \frac{m_{He}W_{He} + m_p W_p}{m_{Li}}.$$

Підставивши цей вираз у співвідношення (1), знайдемо

$$Q = \frac{m_{He}W_{He} + m_p W_p}{m_{Li}} + W_{He} - W_H. \tag{5}$$

Після підставлення у вираз (5) числових значень величин у *МеВ* та *а. о. м.* одержимо

$$Q = \frac{4,00260 \cdot 4 + 1,00728 \cdot 5,45}{6,01513} + 4 - 5,45 = 2,13\left(MeB\right).$$

Відповідь: $Q = 2,13\, MeB$.

Задача 25.2

Унаслідок розпаду радіоактивне ядро магнію ${}^{23}_{12}Mg$ вивільнило позитрон і нейтрино. Визначити енергію Q β^{+}-розпаду ядра.

Розв’язування

Реакцію β^{+}-розпаду ядра магнію можна записати так:

$${}^{23}_{12}Mg \to {}^{23}_{11}Na + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu.$$

Припускаючи, що ядро магнію було нерухомим, і враховуючи, що маса спокою нейтрино практично дорівнює нулю, запишемо рівняння енергетичного балансу. На підставі закону збереження релятивістської повної енергії маємо

$$m_{Mg}c^2 = m_{Na}c^2 + W_{Na} + m_e c^2 + W_e + W_\nu, \tag{1}$$

де $m_{Mg}c^2$ – енергія спокою ядра магнію; $m_{Na}c^2$ – енергія спокою ядра натрію; W_{Na} – кінетична енергія ядра натрію; $m_e c^2$ – енергія спокою позитрона; W_e – кінетична енергія позитрона; W_ν – енергія нейтрино.

Енергія розпаду

$$Q = W_{Na} + W_e + W_\nu = \left(m_{Mg} - m_{Na} - m_e\right)c^2. \tag{2}$$

Виразимо маси ядер магнію й натрію через маси відповідних нейтральних атомів:

$$Q = \left(\left(m_{Mg} - 12m_e\right) - \left(m_{Na} - 11m_e\right) - m_e\right)c^2. \qquad (3)$$

Оскільки маси спокою електрона й позитрона однакові, то після спрощень співвідношення (3) одержимо

$$Q = \left(m_{Mg} - m_{Na} - 2m_e\right)c^2.$$

Підставивши числові значення фізичних величин у *МеВ* та *а. о. м.* у цей вираз, визначимо

$$Q = \left(22,99414 - 21,99444 - 2\cdot 0,00055\right)\cdot 931,4 = 3,05\ \left(МеВ\right).$$

Відповідь: $Q = 3,05$ *МеВ*.

Задача 25.3

Яку масу води, взятої за $0\ ^{o}C$, можна закип'ятити використовуючи енергію термоядерного синтезу гелію з дейтерієм і тритієм, якщо ККД перетворення енергії $\eta = 10\ \%$? Маса гелію, що утворився, дорівнює 1 *г*.

$m_B - ?$
$\eta = 10\ \%$,
$m = 1 г = 10^{-3}\ кг$,
$T = 0\ ^{0}C$,
$c = 4200\ Дж/\left(моль\cdot К\right)$.

Розв'язування

Запишемо рівняння ядерної реакції синтезу гелію:

$${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n .$$

Маси спокою частинок, що утворилися, менші за маси спокою частинок, що вступили в реакцію, тому в процесі синтезу ядер вивільниться енергія

$$Q_0 = \left(m_{^2_1H} + m_{^3_1H} - m_{He} - m_n \right) c^2. \quad (1)$$

За одиничного акту термоядерного синтезу вивільняється енергія Q_0 й витрачається маса $m_0 =$ 5 *а. о. м.* = 5 · 1,67 · 10^{-27} *кг* дейтерію та тритію. Отже, використавши паливо масою m, ми вивільнимо енергію

$$Q = Q_0 \frac{m}{m_0}. \quad (2)$$

Вода в цьому разі отримає таку кількість теплоти:

$$Q_B = \eta Q. \quad (3)$$

Використавши зв'язок між кількістю теплоти й теплоємністю води, можна записати

$$Q_B = c_B m_B \Delta t. \quad (4)$$

Прирівнявши співвідношення (3) та (4), одержимо

$$\eta Q = c_B m_B \Delta t,$$

звідси

$$m_B = \frac{\eta Q}{c_B \Delta t}. \quad (5)$$

Підставивши в цей вираз співвідношення (1) та (2), остаточно одержимо

$$m_B = \frac{\eta\left(m_{{}_1^2H} + m_{{}_1^3H} - m_{He} - m_n\right)c^2}{c_B m_0 \Delta t}. \tag{6}$$

Після підставлення числових значень у цей вираз визначимо

$$m_B = \frac{0{,}1\cdot\left(2{,}01410 + 3{,}01605 - 4{,}00260 - 1{,}00867\right)}{4190\ \cdot 5\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 100}\times$$

$$\times 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\right)^{2} = 50\cdot 10^{3}\ (кг).$$

Це в 50 млн разів більше за масу термоядерного палива, що було використане на нагрівання!

Відповідь: $m_B = 50\,т$.

Задача 25.4

У реакції ${}_7^{14}N\left(\alpha, p\right){}_8^{17}O$ кінетична енергія α-частинки $W_\alpha = 7{,}7\, MeB.$ Визначити, під яким кутом до напрямку руху α-частинки вилітає протон, якщо відомо, що його кінетична енергія $W_p = 7{,}7\, MeB.$

Розв'язування

$\varphi - ?$

$W_\alpha = 7{,}7\, MeB,$

$W_p = 8{,}5\, MeB.$

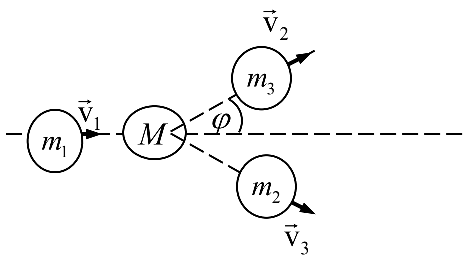


Рисунок 1

Позначимо, як показано на рисунку 1, m_1, m_2, m_3 – масові числа відповідно α-частинки, протона та ядра віддачі (у нашому випадку це ядро атома кисню); W_1, W_2, W_3 – їх кінетичні енергії. Оскільки ядро атома азоту не рухається (його масове число дорівнює M), то закон збереження енергії має вигляд

$$W_1 + Q =, W_2 + W_3, \tag{1}$$

де Q – енергія ядерної реакції.

Запишемо закон збереження імпульсу

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3. \tag{2}$$

Із співвідношення (2) та рисунка 1 маємо для числових значень імпульсу рівняння

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\varphi. \tag{3}$$

Оскільки

$$p^2 = (m\text{v})^2 = \frac{m\text{v}^2}{2}2m = W2m,$$

то рівняння (3) набере вигляду

$$2m_3W_3 = 2m_1W_1 + 2m_2W_2 - 2\cos\varphi\sqrt{2m_1W_12m_2W_2},$$

або

$$W_3 = \frac{m_1}{m_3} W_1 + \frac{m_2}{m_3} W_2 - \frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1 m_2 W_1 W_2}. \qquad (4)$$

Виключимо з (1) і (4) енергію W_3 та одержимо формулу, що пов’язує кінетичну енергію частинок, які бомбардують, із кінетичною енергією отриманих частинок:

$$W_1\left(\frac{m_3 - m_1}{m_3}\right) + Q = W_2\left(\frac{m_2 + m_3}{m_3}\right) - \frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1 m_2 W_1 W_2}. \quad (5)$$

Знайдемо енергію ядерної реакції

$$Q = \left[\left(m_1 + M\right) - \left(m_2 + m_3\right)\right]c^2. \qquad (6)$$

Розв’яжемо (5) відносно $\cos\varphi$ та одержимо

$$\cos\varphi = \frac{m_2 + m_3}{2}\sqrt{\frac{W_2}{m_1 m_2 W_1}} - \frac{m_3 - m_1}{2}\sqrt{\frac{W_1}{m_1 m_2 W_2}} - \frac{m_3 Q}{2\sqrt{m_1 m_2 W_1 W_2}}. \qquad (7)$$

Візьмемо значення мас частинок, що беруть участь у реакції, з таблиць А7 та А8 додатка А:

$$m_1 = 4{,}00388\, а.\, о.\, м., \quad M = 14{,}00752\, а.\, о.\, м.,$$
$$m_2 = 1{,}00814\, а.\, о.\, м., \quad m_3 = 17{,}00453\, а.\, о.\, м.,$$

та підрахуємо енергію реакції

$$Q = \left[\left(4,00388 + 14,00752\right) - \left(1,00814 + 17,00453\right)\right]931,4 =$$
$$= -1,183\left(MeB\right).$$

Підставимо числові значення в співвідношення (7) та одержимо

$$\cos\varphi = \frac{1+17}{2}\sqrt{\frac{8,5}{4\cdot 1\cdot 7,7}} - \frac{17-4}{2}\sqrt{\frac{7,7_{\;1}}{4\cdot 1\cdot 8,5}} - \frac{17\cdot\left(-1,183\right)}{2\sqrt{4\cdot 1\cdot 7,7\cdot 8,5}} =$$

$$= 0,59\,.$$
$$\varphi = arctg\,0,59 = 30,5^0.$$

Відповідь: $\varphi = 30,5^0$.

Задача 25.5

Яка енергія вивільняється під час згорання $m = 1\,г$ ядерного палива у термоядерній реакції ${}^6_3Li\left({}^2_1H,\alpha\right){}^4_2He$? Порівняти одержаний результат з енергією, яку можна отримати під час розпаду $m = 1\,г$ урану ${}^{235}U$. За кожного акту розпаду ядра ${}^{235}U$ вивільняється енергія $W_1 = 200\,MeB$.

Розв’язування

$W_{Li} - ?\quad W_U - ?$

$m = 1\,г = 10^{-3}\,кг,$

$W_1 = 200\,MeB.$

Запишемо рівняння термоядерної реакції:

$${}^6_3Li + {}^2_1H \rightarrow {}^4_2\alpha + {}^4_2He\,.$$

Енергію, що вивільняється під час цієї реакції, можна визначити із співвідношення

$$Q = \Delta m c^2, \tag{1}$$

де $c^2 = 931,4\, МеВ / а.\, о.\, м.$ для дефекту маси, виміряної в $а.\, о.\, м.$ Дефект маси дорівнює $\Delta m = \left(m_{{}^6_3Li} + m_{{}^2_1H} \right) - 2m_{{}^4_2He}$. З таблиць визначимо маси частинок, що беруть участь у реакції:

$$m_{{}^6_3Li} = 6,01513\, а.\, о.\, м., \quad m_{{}^2_1H} = 2,01410\, а.\, о.\, м.,$$
$$m_{{}^4_2He} = 4,00260\, а.\, о.\, м.$$

Підставимо ці дані у формулу для дефекту маси та одержимо

$$\Delta m = \left(6,01513 + 2,01410\right) - 4,00260 = 0,024\left(а.\, о.\, м.\right).$$

За одиничного акту термоядерного синтезу вивільняється енергія

$$Q = 0,024 \cdot 931,4 = 22,38\left(МеВ\right)$$

й витрачаються маси літію ${}^6_3Li$ та дейтерію в співвідношенні 3:1. Отже, з $m = 1\, г$ на літій ${}^6_3Li$ припадає $m_1 = 0,75\, г = 0,75 \cdot 10^{-3}\, кг$.

Кількість атомів ${}^6_3Li$ визначимо із співвідношення

$$N_{Li} = \frac{m_1}{M_{Li}} N_A, \qquad (2)$$

де N_A – стала Авогадро (кількість атомів в одному молі речовини), $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ $моль^{-1}$; M_{Li} – молярна маса літію ${}^6_3Li$, $M_{Li} = 6 \cdot 10^{-3}$ $кг/моль$.

Таким чином, кількість актів термоядерного синтезу N. Енергія, що в цьому разі вивільняється, дорівнює

$$W_{Li} = NQ = \frac{m_1}{M_{Li}} N_A Q.$$

За допомогою обчислень одержимо

$$W_{Li} = \frac{0,75 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 22,38 = 16,84 \cdot 10^{23} \left(МеВ\right)$$

або

$$W_{Li} = 16,84 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} = 2,69 \cdot 10^{11} \left(Дж\right) =$$

$$= 2,69 \cdot 10^{5} \left(МДж\right).$$

Визначимо, яка кількість атомів міститься в $m = 1$ $г$ урану ${}^{235}U$:

$$N_U = \frac{m}{M_U} N_A. \qquad (2)$$

Молярна маса урану ${}^{235}U$, $M_U = 235 \cdot 10^{-3}$ $кг/моль$.

Енергія, що вивільняється під час розпаду N_U атомів урану, дорівнює

$$W_U = N_U W_1 = \frac{m}{M_U} N_A W_1.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в останній вираз та одержимо

$$W_U = \frac{10^{-3}}{235 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 200 = 5,12 \cdot 10^{23} \left(MeB \right),$$

$$W_U = 5,12 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} = 8,2 \cdot 10^{10} \left(Дж \right) = 0,82 \cdot 10^{5} \left(МДж \right).$$

Таким чином, енергія, що вивільняється під час згоряння $m = 1\,г$ ядерного палива в термоядерній реакції ${}_3^6Li\left({}_1^2H, \alpha \right){}_2^4He$, в 3,28 раза більша за енергію, яку можна отримати під час розпаду $m = 1\,г$ урану ${}^{235}U$.

Відповідь: $W_{Li} = 2,69 \cdot 10^5\ МДж$,
$W_U = 0,82 \cdot 10^5\ МДж$.

Задача 25.6

Позитрон та електрон анігілюють з утворенням двох фотонів. Визначити: а) енергію кожного з утворених фотонів $W_ф$ за умови, що кінетична енергія електрона та позитрона до їх зіткнення дорівнювала нулю; б) довжину хвилі λ цих фотонів.

Розв'язування

$W_ф - ?\quad \lambda - ?$
$m_e = 9,1\cdot 10^{-31}$ *кг.*

Запишемо реакцію анігіляції електрона та позитрона:

$$e_{-1}^{0} + e_{1}^{0} \to 2\gamma.$$

Енергія γ-квантів, які утворилися, згідно з формулою Ейнштейна для зв'язку маси та енергії дорівнює

$$2W_ф = 2m_e c^2,$$

де m_e – маса спокою електрона (позитрона); c – швидкість світла у вакуумі. Тоді

$$W_ф = m_e c^2.$$

Підставимо числові значення фізичних величин у це співвідношення та одержимо

$$W_ф = 9,1\cdot 10^{-31}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\right)^2 = 8,19\cdot 10^{-14}\,\left(Дж\right) = -0,51\left(МеВ\right).$$

Енергію фотона визначають за формулою

$$W_ф = \frac{hc}{\lambda},$$

де $h = 6,63\cdot 10^{-34}\ Дж\cdot c$ – стала Планка.

Тоді

$$\lambda = \frac{hc}{W_\phi}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та виконаємо обчислення:

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{8,19 \cdot 10^{-14}} = 2,43 \cdot 10^{-12} \left(м \right).$$

Відповідь: а) енергія кожного фотона $W_\phi = 0,51\, МеВ$; б) $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-12}$ *м*.

Задача 25.7

Електрон і позитрон, утворені фотоном з енергією $W = 5,7\, МеВ,$ рухаються в камері Вільсона, що міститься в магнітному полі, за траєкторіями з радіусом кривизни $R = 3\, см.$ Визначити магнітну індукцію B поля.

Розв’язування

$n_2/n_1 - ?$
$W = 5,7\, МеВ = 9,12 \cdot 10^{-13}\, Дж,$ $R = 3\, см = 0,03\, м.$

Кінетична енергія електрона (позитрона) $W_K = 0,5\left(W - W_0\right),$ де W_0 – енергія спокою електрона. Енергія спокою електрона $W_0 = 0,511\, МеВ.$

На електрон (позитрон) у магнітному полі діє сила Лоренца, модуль якої

$$qB\mathrm{v} = \frac{m\mathrm{v}^2}{R} \;\Rightarrow\; B = \frac{m\mathrm{v}}{qR} \;\Rightarrow\; B = \frac{p}{qR}. \qquad (1)$$

Згідно з теорією відносності імпульс частинки $p = m\text{v}$ пов'язаний із її кінетичною енергією співвідношенням

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_K\left(W_K + 2m_0c^2\right)}, \qquad (2)$$

де m_0 – маса спокою частинки.

Підставимо вираз (2) у співвідношення (1) та одержимо вираз для індукції магнітного поля, що діє на частинки в камері Вільсона:

$$B = \frac{1}{qcR}\sqrt{W_K\left(W_K + 2m_0c^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{qcR}\sqrt{0,5\left(W - W_0\right)\left(0,5\left(W - W_0\right) + 2m_0c^2\right)}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$B = \frac{1}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot 3\cdot 10^{-2}}\cdot\Big(0,5\cdot 1,6\cdot 10^{-13}\left(5,7 - 0,511\right)\times$$

$$\times\left(0,5\cdot 1,6\cdot 10^{-13}\left(5,7-0,511\right) + 1,022\cdot 1,6\cdot 10^{-13}\right)\Big)^{1/2} =$$

$$= \frac{1,6\cdot 10^{-13}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 9\cdot 10^{6}}\cdot\Big(0,5\left(5,7-0,511\right)\times$$

$$\times\left(0,5\left(5,7-0,511\right) + 1,022\right)\Big)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \sqrt{2,59\left(2,59+1,022\right)} = 0,34 \ \left(Тл\right).$$

Відповідь: $B = 0,34$ *Тл.*

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

25.1 Визначити порядковий номер Z та масове число A частинки, позначеної літерою x, у символічному записі ядерної реакції: а) ${}^{14}_{6}C + {}^{4}_{2}He \to {}^{17}_{8}C + x$; б) ${}^{27}_{13}Al + x \to {}^{1}_{1}H + {}^{26}_{12}Mg$. Які це частинки?

Відповідь: а) $Z = 0,\ A = 1,$ це ${}^{1}_{0}n$-нейтрон; б) $Z = 0,\ A = 0,$ це ${}^{1}_{0}n$-гамма-квант.

25.2 Написати не зазначені позначення в нижченаведених записах ядерних реакцій:

а) ${}^{27}_{13}Al(n, \alpha)x$; б) ${}^{19}_{9}F(p, x){}^{16}_{8}O$; в) ${}^{55}_{25}Mn(x, n){}^{55}_{26}Fe$;

г) ${}^{27}_{13}Al(\alpha, p)x$; ґ) ${}^{14}_{7}N(n, x){}^{14}_{6}C$; д) $x(p, \alpha){}^{22}_{11}Na$.

Відповідь: а) ${}^{24}_{11}Na$; б) ${}^{4}_{2}He$; в) ${}^{1}_{1}H$; г) ${}^{30}_{14}Si$; ґ) ${}^{1}_{1}H$; д) ${}^{25}_{12}Mg$.

25.3 Написати не зазначені позначення в нижченаведених записах ядерних реакцій, спричинених фотонами:

а) ${}^{27}_{13}Al(\gamma, x){}^{26}_{12}Mg$; б) ${}^{27}_{13}Al(\gamma, n)x$;

в) ${}^{63}_{29}Cu(\gamma, x){}^{62}_{29}Cu$; г) $x(\gamma, n){}^{131}_{74}W$.

Відповідь: а) ${}^{1}_{1}H$; б) ${}^{26}_{13}Al$; в) ${}^{1}_{0}n$; г) ${}^{132}_{74}W$.

25.4 Визначити енергію, що вивільняється за нижченаведених ядерних реакцій:

а) ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \to {}^{1}_{1}H + {}^{3}_{1}H$; б) ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \to {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n$.

Відповідь: а) $Q = 4{,}04\,MeB$; б) $Q = 3{,}26\,MeB$.

25.5 Знайти енергію, що вивільняється за таких ядерних реакцій:

а) ${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{2}He \to {}^{1}_{1}H + {}^{4}_{2}He$; б) ${}^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \to {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$;

в) ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \to {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$; г) ${}^{6}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \to {}^{3}_{2}He + {}^{4}_{2}He$;

Відповідь: а) $Q = 18,3\,MeB$; б) $Q = 22,4\,MeB$; в) $Q = 17,3\,MeB$; г) $Q = 4,02\,MeB$.

25.6 Визначити енергію, поглинену під час ядерної реакції: ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$.

Відповідь: $Q = 1,18\,MeB$.

25.7 Під час бомбардування ізотопу азоту ${}^{14}_{7}N$ нейтронами утворюється ізотоп вуглецю ${}^{14}_{6}C$, що виявляється β-радіоактивним. Написати рівняння обох реакцій.

25.8 Під час бомбардування ізотопу алюмінію ${}^{27}_{13}Al$ α-частинками утворюється радіоактивний ізотоп фосфору ${}^{30}_{15}P$, який потім розпадається з вивільненням позитрона. Написати рівняння обох реакцій. Визначити питому активність отриманого ізотопу, якщо відомо, що його період піврозпаду дорівнює 130 *с*.

Відповідь: $a = 1,1 \cdot 10^{23} \left(c \cdot кг\right)^{-1}$.

25.9 Під час бомбардування ізотопу азоту ${}^{23}_{11}Na$ дейтронами утворюється β-радіоактивний ізотоп натрію ${}^{24}_{11}Na$. Лічильник β-частинок установлений поблизу препарату, що містить радіоактивний ${}^{24}_{11}Na$. Під час першого вимірювання показання лічильника дорівнювали 170 імпульсів за одну хвилину, а через добу – 56 імпульсів за одну хвилину. Написати рівняння обох реакцій. Знайти період піврозпаду ізотопу ${}^{24}_{11}Na$.

Відповідь: $T_{1/2} = 15$ годин.

25.10 Яку кількість води можна нагріти від $0\,{}^{0}C$ до кипіння, якщо використати все тепло, що вивільниться під час реакції ${}^{7}_{3}Li\left(p,\alpha\right)$ за повного розпаду одного грама літію?

Відповідь: $m = 5,7 \cdot 10^5$ *кг*.

25.11 Ізотоп гелію ${}_2^3He$ утворюється під час бомбардування ядер тритію ${}_1^3H$ протонами. Написати рівняння ядерної реакції та визначити енергію, що вивільняється під час цієї реакції. Знайти «поріг» $W_П$ ядерної реакції.

Відповідь: $Q = -0,78\,MeB$, реакція проходить із поглинанням енергії, $W = 1,04\,MeB$.

25.12 Визначити поріг $W_П$ ядерної реакції ${}_7^{14}N(\alpha, p)$.

Відповідь: $W_П = 1,52\,MeB$.

25.13 Визначити поріг $W_П$ ядерної реакції ${}_3^7Li(p, n)$.

Відповідь: $W_П = 1,89\,MeB$.

25.14 На атомній електростанції за один рік витрачається $m = 19{,}2$ кг урану ${}_{92}^{235}U$. Ураховуючи, що під час кожного акту розпаду ядра ${}_{92}^{235}U$ вивільняється енергія $W = 200\,MeB$, і коефіцієнт корисної дії під час вироблення електроенергії дорівнює $\eta = 25$ %, визначити електричну потужність атомної електростанції.

Відповідь: $N = 125$ *МВт*.

25.15 Порівняйте енергії, що виділяються під час термоядерного синтезу ${}_1^2H + {}_1^2H \rightarrow {}_2^4He$ (W_T) та розпаду ядра урану ${}_{92}^{235}U$ (W_U), якщо в обох випадках витрачаються однакові маси ядерного палива. Кожний акт розпаду супроводжується виділенням енергії $W = 200\,MeB$.

Відповідь: $W_T / W_U = 7,55$.

25.16 Яку енергію в кіловат-годинах можна отримати від поділу $m = 1\,г$ урану $^{235}_{92}U$, якщо в одному акті розпаду ядра $^{235}_{92}U$ вивільняється енергія $W = 200\,MeB$?

Відповідь: $W = 2{,}5 \cdot 10^4$ *кВт · годин.*

25.17 Вважаючи, що в одному акті розпаду ядра $^{235}_{92}U$ вивільняється енергія $W = 200\,MeB$, визначити енергію, що виділяється під час розпаду одного кілограма ізотопу $^{235}_{92}U$, а також масу кам'яного вугілля з теплотворною здатністю $q = 30\,кДж/г$, яка є еквівалентною в тепловому відношенні одному кілограму урану.

Відповідь: $W = 8{,}2 \cdot 10^{10}\,кДж$, $m = 2{,}7 \cdot 10^6\,кг$.

25.18 Яка кількість урану $^{235}_{92}U$ витрачається за одну добу на атомній електростанції потужністю $N = 5000\,кВт$? ККД електростанції $\eta = 17\,\%$ і під час кожного акту розпаду ядра $^{235}_{92}U$ вивільняється енергія $W = 200\,MeB$.

Відповідь: $m = 31\,г$.

25.19 Під час вибуху водневої бомби відбувається термоядерна реакція утворення гелію з дейтерію та тритію. 1 Написати рівняння ядерної реакції. 2 Визначити енергію, що вивільняється під час цієї реакції. 3 Яку енергію (в кіловат-годинах) можна отримати в результаті утворення $m = 1\,г$ гелію?

Відповідь: 2 $Q = 17{,}6\,MeB$,

3 $W = 11{,}8 \cdot 10^4$ *кВт · годин.*

25.20 До якої групи елементарних частинок належать: 1) Λ^0 – гіперон; 2) протон; 3) таулептон; 4) π^0-мезон?

25.21 До якої групи елементарних частинок належать: 1) мюонне нейтрино; 2) нейтрон; 3) фотон; 4) K^0-мезон?

25.22 Електрон і позитрон, утворені фотоном з енергією $W = 5,7\,МеВ$, рухаються в камері Вільсона, що міститься в магнітному полі, за траєкторіями з радіусом кривизни $R = 3\,см$. Визначити магнітну індукцію B поля.

Відповідь: $B = 0,34$ $Тл$.

25.23 K^+-мезон розпадається (в стані спокою) на два π-мезони. Вважаючи, що маса спокою K^+-мезона дорівнює $966,2\,m_e$, де m_e – маса спокою електрона, визначити енергію кожного з π-мезонів, що утворилися. Різницею мас спокою зарядженого й нейтрального піонів знехтувати. Зазначити схему розпаду.

Відповідь: $W = 247,5\,МеВ$.

25.24 K^0-мезон розпадається на два заряджених π-мезони. Маса кожного з π-мезонів, які утворилися, в 1,77 раза більша за його масу спокою. Вважаючи, що спочатку K^0-мезон не рухався, і його маса спокою дорівнює $965\,m_e$, де m_e – маса спокою електрона, визначити: а) масу спокою π-мезонів, які утворилися; б) швидкість π-мезонів на момент їх утворення.

Відповідь: а) $m = 273\,m_e$; б) $v = 2,48 \cdot 10^8\ м/с$.

25.25 Позитрон та електрон анігілюють з утворенням двох фотонів. Визначити: а) енергію кожного з утворених фотонів за умови, що кінетична енергія електрона та позитрона до їх зіткнення дорівнювала нулю; б) довжину хвилі цих фотонів.

Відповідь: а) енергія кожного фотона $W_ф = 0,51\,МеВ$; б) $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-12}\ м$.

25.26 У процесі здійснення реакції $\gamma \to {}_{-1}^{0}e + {}_{+1}^{0}e$ енергія фотона $W_ф = 2,02\,МеВ.$ Визначити повну кінетичну енергію позитрона та електрона на момент їх виникнення.

Відповідь: $W_K = 1\,МеВ.$

25.27 Через лічильник Гейзера – Мюллера проходить $n = 10^8$ електронів за одне розрядження. Визначити середній струм, що проходить через лічильник, за умови, що за одну хвилину відбувається 600 розряджень.

Відповідь: $I = 0,16\,нА.$

25.28 Під час пружного центрального зіткнення нейтрона з нерухомим ядром речовини-сповільнювача кінетична енергія нейтрона зменшується в 1,4 раза. Визначити масу $m_я$ ядер речовини-сповільнювача.

Відповідь: $m_я = 12\,а.\,о.\,м.$ (графіт).

25.29 Побудувати такі кваркові схеми: 1) нейтрона та антинейтрона; 2) протона й антипротона; 3) нейтрального каона.

Відповідь: $n = udd$ і $\tilde{n} = \tilde{u}\tilde{d}\tilde{d}$; $p = uud$ і $\tilde{p} = \tilde{u}\tilde{u}\tilde{d}$; $к^0 = d\tilde{s}.$

25.30 Під час зіткнення нейтрона та антинейтрона відбувається їх анігіляція, внаслідок цього утворюються два γ-кванти, а енергія частинок переходить в енергію γ-квантів. 1 Визначити енергію кожного з утворених γ-квантів. 2 Яку енергію можна отримати від анігіляції $m = 1\,г$ нейтронів та $m = 1\,г$ антинейтронів? Вважати, що кінетична енергія нейтрона та антинейтрона до їх зіткнення є нехтовно малою.

Відповідь: $W_\gamma = 942\,МеВ,\; W = 1,8 \cdot 10^{14}\,Дж.$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Черняк Л. М. Лекції з загальної фізики : у 3 кн. / Л. М. Черняк. – Суми : Вид-во Алан-ЕКС, 2003. – Книга 2. – 400 с.
2. Черняк Л. М. Лекції з загальної фізики : у 3 кн. / Л. М. Черняк. – Суми : Вид-во Алан-ЕКС, 2003. – Книга 3. – 288 с.
3. Опанасюк А. С. Збірник задач для контрольних робіт та тестування з дисципліни «Загальна фізика» / А. С. Опанасюк, Б. А. Міщенко. – Суми : СумДУ, 2006. – Ч. 2. – 142 с.
4. Опанасюк А. С. Збірник задач для контрольних робіт та тестування з дисципліни «Загальна фізика» / А. С. Опанасюк, Б. А. Міщенко. – Суми : СумДУ, 2006. – Ч. 3. – 146 с.
5. Дущенко В. П. Загальна фізика / В. П. Дущенко, І. М. Кучерук. – Київ : Вища школа, 1987. – 195 с.
6. Загальні основи фізики : у 2 кн. / І. Г. Багацька, Д. Б. Головко, А. А. Маляренко, Ю. Л. Ментковський. – Київ : Либідь, 1998. – Книга 1. – 192 с.

ДОДАТОК А
(довідковий)

ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З ЕЛЕКТРИКИ

Таблиця А.1 – Діелектрична проникність деяких матеріалів

Речовина	Діелектрична проникність ε
Гас	2
Вода	81
Мастило	5
Мастило (трансформаторне)	2.2
Віск	7,8
Ебоніт	3,0
Кварц	2,7
Масло (трансформаторне)	2,2
Парафін	2,1
Слюда	6,0
Скло	7,0
Фарфор	5,0

Таблиця А.2 – Показники заломлення (середні для видимого світла)

Речовина	Показник заломлення n
Алмаз	2,42
Вода	1,33
Лід	1,31
Скипидар	1,48
Скло	1,5–1,9
Сірковуглець	1,63

Таблиця А.3 – Робота виходу А електронів із деяких металів

Метал	***A*, еВ**	***A*, Дж**
Калій	2,2	$3,5\cdot10^{-19}$
Літій	2,3	$3,7\cdot10^{-19}$
Натрій	2,5	$4\cdot10^{-19}$
Платина	6,3	$1,01\cdot10^{-18}$
Срібло	4,7	$7,5\cdot10^{-19}$
Цинк	4,0	$6,4\cdot10^{-19}$
Вольфрам	4,53	$7,25\cdot10^{-19}$
Цезій	1,2	$1,92\cdot10^{-19}$

Таблиця А.4 – Енергія іонізації атомів деяких ізотопів

Речовина	***E*, Дж**	***E*, еВ**
Азот-7	$2,33\cdot10^{-18}$	14,54
Берилій-4	$1,49\cdot10^{-18}$	9,32
Бор-5	$1,33\cdot10^{-18}$	8,30
Водень-1	$2,18\cdot10^{-18}$	13,6
Гелій-2	$3,94\cdot10^{-18}$	24,58
Кисень-8	$2,18\cdot10^{-18}$	13,62
Літій-3	$1,21\cdot10^{-18}$	5,6
Натрій-11	$0,82\cdot10^{-18}$	5,14
Неон-10	$3,45\cdot10^{-18}$	21,56
Ртуть-80	$1,66\cdot10^{-18}$	10,44
Вуглець-6	$1,80\cdot10^{-18}$	11,27
Фтор-9	$2,79\cdot10^{-18}$	17,42

Таблиця А.5 – Межа К-серії рентгенівських променів для різних матеріалів антикатода

Речовина	**Довжина хвилі,** λ, *нм*
Вольфрам	1,78
Золото	1,53
Мідь	13,8
Платина	1,58
Срібло	4,84

Таблиця А.6 – Типи радіоактивних перетворень і періоди піврозпаду деяких радіоактивних ізотопів

Ізотоп	**Тип розпаду**	**Період піврозпаду** $T_{1/2}$
Актиній $^{225}_{89}Ac$	*б*	10 діб
Іридій $^{192}_{77}Ir$	*б-, г*	75 діб
Йод $^{131}_{53}I$	*б-, г*	8 діб
Кобальт $^{60}_{27}Co$	*б-, г*	5,3 року
Магній $^{27}_{12}Mg$	*б-*	10 хвилин
Натрій $^{22}_{11}Na$	*г*	2,6 року
Радій $^{219}_{88}Ra$	*б*	10^{-3} с
Радій $^{226}_{88}Ra$	*б, г*	$1{,}62 \cdot 10^3$ років
Радон $^{222}_{86}Rn$	*б*	3,8 доби
Стронцій $^{90}_{38}Sr$	*б-*	27 років
Торій $^{229}_{90}Th$	*б, г*	$7 \cdot 10^3$ років
Уран $^{238}_{92}U$	*б, г*	$4{,}5 \cdot 10^9$ років
Фосфор $^{32}_{15}P$	*б-*	14,3 доби

Таблиця А.7 – Маси та енергії спокою деяких частинок

	Маса спокою		**Енергія спокою**	
	m_0*, *кг	***m_0*, *а. о. м***	***E*, *Дж***	***E*, *МеВ***
Електрон	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8{,}16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1{,}50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1{,}51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3{,}35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3{,}00 \cdot 10^{-10}$	1 876
α-частинка	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5{,}96 \cdot 10^{-10}$	3 733

Таблиця А.8 – Маси нейтральних атомів (*а. о. м.*)

Елемент	**Порядковий номер**	**Ізотоп**	**Маса**
Водень	1	^{1}H ^{2}H ^{3}H	1,00783 2,01410 3,01605
Гелій	2	^{3}He ^{4}He	3,01603 4,00260
Літій	3	^{6}Li ^{7}Li	6,01513 7,01601
Берилій	4	^{7}Be ^{8}Be ^{9}Be ^{10}Be	7,01693 8,00531 9,01219 10,01354
Бор	5	^{9}B ^{10}B ^{11}B	9,01333 10,01294 11,00931
Вуглець	6	^{10}C ^{12}C ^{13}C ^{14}C	10,00168 12,00000 13,00335 14,00324

Продовження таблиці А.8

Елемент	**Порядковий номер**	**Ізотоп**	**Маса**
Азот	7	^{13}N ^{14}N ^{15}N	13,00574 14,00307 15,00011
Кисень	8	^{16}O ^{17}O ^{18}O	15,99491 16,99913 17,99916
Фтор	9	^{19}F	18,99840
Натрій	11	^{22}Na ^{23}Na	21,99444 22,98977
Магній	12	^{23}Mg	22,99414
Алюміній	13	^{30}Al	29,99817
Кремній	14	^{30}Si ^{31}Si	29,98325 30,97535
Фосфор	15	^{31}P	30,97376
Калій	19	^{41}K	40,96184
Кальцій	20	^{40}Ca ^{44}Ca	39,97542 43,95549
Кобальт	27	^{56}Co	55,95769
Мідь	29	^{63}Cu	62,94962
Кадмій	48	^{113}Cd	112,94206
Ртуть	80	^{200}Hg	200,02800

Продовження таблиці А.8

Елемент	**Порядковий номер**	**Ізотоп**	**Маса**
Свинець	82	^{206}Pb	205,97446
Полоній	84	^{210}Po	209,98297
Уран	92	^{235}U ^{238}U	235,11750 238,12376

Періодична система хімічних елементів Д. І. Менделєєва

Період	Ряд	Групи I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			
1	1	H 1 1,0079 Гідроген Водень							He 2 4,0026 Гелій			
2	2	Li 3 6,941 Літій	Be 4 9,012 Берилій	B 5 10,81 Бор	C 6 12,011 Карбон Вуглець	N 7 14,0067 Нітроген Азот	O 8 15,999 Оксиген Кисень	F 9 18,998 Флуор Фтор	Ne 10 20,179 Неон			
3	3	Na 11 22,990 Натрій	Mg 12 24,305 Магній	Al 13 26,981 Алюміній	Si 14 28,086 Силіцій Кремній	P 15 30,973 Фосфор	S 16 32,06 Сульфур Сірка	Cl 17 35,453 Хлор	Ar 18 39,948 Аргон			
4	4	K 19 39,098 Калій	Ca 20 40,08 Кальцій	21 44,956 Sc Скандій	22 47,90 Ti Титан	23 50,941 V Ванадій	24 51,996 Cr Хром	25 54,938 Mn Манган Марганець		26 55,847 Fe Ферум Залізо	27 58,933 Co Кобальт	28 58,70 Ni Нікол Нікель
	5	29 63,546 Cu Купрум Мідь	30 65,39 Zn Цинк	Ga 31 69,72 Галій	Ge 32 72,59 Германій	As 33 74,921 Арсен Миш'як	Se 34 78,96 Селен	Br 35 79,904 Бром	Kr 36 83,80 Криптон			
5	6	Rb 37 85,468 Рубідій	Sr 38 87,62 Стронцій	39 88,906 Y Ітрій	40 91,22 Zr Цирконій	41 92,906 Nb Ніобій	42 95,94 Mo Молібден	43 [98,906] Tc Технецій		44 101,07 Ru Рутеній	45 102,905 Rh Родій	46 106,4 Pd Паладій
	7	47 107,868 Ag Аргентум Срібло	48 112,41 Cd Кадмій	In 49 114,82 Індій	Sn 50 118,71 Станум Олово, цина	Sb 51 121,75 Стибій	Te 52 127,60 Телур	I 53 126,904 Іод Йод	Xe 54 131,30 Ксенон			
6	8	Cs 55 132,91 Цезій	Ba 56 137,33 Барій	57 138,905 *La Лантан	72 178,49 Hf Гафній	73 180,948 Ta Тантал	74 183,85 W Вольфрам	75 186,207 Re Реній		76 190,2 Os Осмій	77 192,22 Ir Іридій	78 195,09 Pt Платина
	9	79 196,967 Au Аурум Золото	80 200,59 Hg Меркурій Ртуть	Tl 81 204,37 Талій	Pb 82 207,2 Плюмбум Свинець, оливо	Bi 83 208,980 Бісмут Вісмут	Po 84 [209] Полоній	At 85 [210] Астат	Rn 86 [222] Радон			
7	10	Fr 87 [223] Францій	Ra 88 226,025 Радій	89 [227] **Ac Актиній	104 [261] Unq Уннілквадій	105 [262] Unp Уннілпентій	106 [263] Unh Уннілгексій	107 [264] Uns Уннілсептій		108 [265] Uno Уннілоктій	109 [266] Une Унніленій	110 [272] Uun Унунілій
Вищі оксиди		R_2O	RO	R_2O_3	RO_2	R_2O_5	RO_3	R_2O_7	RO_4			
Леткі водневі сполуки					RH_4	RH_3	H_2R	HR				

Порядковий номер — 26; Атомна маса — 55,847; Символ елемента — Fe; Назва елемента — Ферум Залізо

*Лантаноїди	58 140,12 Ce Церій	59 140,908 Pr Празеодим	60 144,24 Nd Неодим	61 [145] Pm Прометій	62 150,36 Sm Самарій	63 151,96 Eu Європій	64 157,25 Gd Гадоліній	65 158,925 Tb Тербій	66 162,50 Dy Диспрозій	67 164,93 Ho Гольмій	68 167,26 Er Ербій	69 168,934 Tm Тулій	70 173,04 Yb Ітербій	71 174,97 Lu Лютецій
**Актиноїди	90 232,038 Th Торій	91 [231] Pa Протактиній	92 238,029 U Уран	93 [237] Np Нептуній	94 [244] Pu Плутоній	95 [243] Am Америцій	96 [247] Cm Кюрій	97 [247] Bk Берклій	98 [251] Cf Каліфорній	99 [254] Es Ейнштейній	100 [257] Fm Фермій	101 [258] Md Менделєвій	102 [259] No Нобелій	103 [260] Lr Лоуренсій

Навчальне видання

Ігнатенко Вікторія Михайлівна,
Нефедченко Василь Федорович,
Опанасюк Анатолій Сергійович

ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ІЗ ФІЗИКИ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 3

Видання друге, виправлене

Художнє оформлення обкладинки В. Ф. Нефедченка
Редакторка С. М. Симоненко
Комп'ютерне верстання В. М. Ігнатенко

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 15,46. Обл.-вид. арк. 14,94. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.