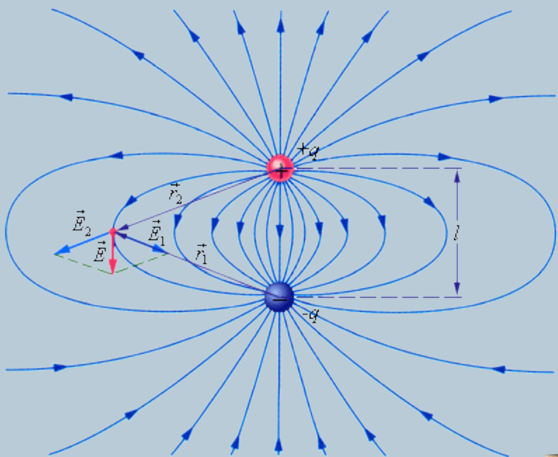
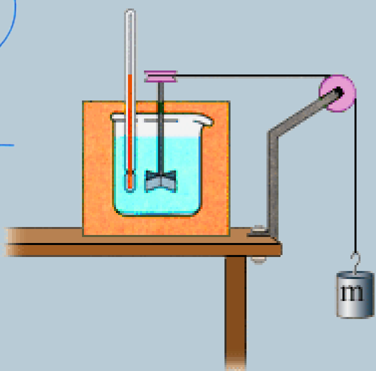
Ігнатенко В. М., Нефедченко В. Ф., Опанасюк А. С.

ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ІЗ ФІЗИКИ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 2





Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Ігнатенко В. М., Нефедченко В. Ф., Опанасюк А. С.

ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ІЗ ФІЗИКИ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 2

Видання друге, виправлене

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2023

УДК 53(076.2)
І-26

Рецензенти:

О. В. Лисенко – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри прикладної математики та моделювання складних систем Сумського державного університету;

А. І. Салтикова – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, фізики та методик їх навчання Сумського державного педагогічного університету ім. А. С. Макаренка

Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 16 від 24 червня 2021 року)

Ігнатенко В. М.

І-26 Посібник до практичних занять із фізики : у 3 ч. – 2-ге вид., виправл. / В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, А. С. Опанасюк. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – Ч. 2. – 154 с.

ISBN 978-966-657-962-4
ISBN 978-966-657-964-8

Навчальний посібник містить понад 1 000 задач і складений відповідно до робочої програми для інженерних спеціальностей. Наведені основні теоретичні відомості з кожного розділу загальної фізики та приклади розв’язування типових задач.

Призначений для студентів ЗВО інженерних спеціальностей.

УДК 53(076.2)

ISBN 978-966-657-962-4
ISBN 978-966-657-964-8 (частина 2)

ЗМІСТ С.

11 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ ТА РЕЧОВИНІ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

Електричне поле у вакуумі

11.1 Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

де F – сила взаємодії двох точкових зарядів q_1 і q_2; r – відстань між зарядами; ε – діелектрична проникність середовища; ε_0 – електрична стала,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{Ф/м} = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}.$$

11.2 Закон збереження заряду

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = const,$$

де $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраїчна сума зарядів, що входять до ізольованої системи; n – кількість зарядів.

11.3 Напруженість електричного поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

де $\vec{F}$ – сила, що діє на точковий заряд q, який поміщений у цю точку поля.

Сила, що діє на точковий заряд q, розміщений в електричному полі, дорівнює

$$\vec{F} = q\vec{E} .$$

11.4 Принцип суперпозиції (накладання) електричних полів: напруженість $\vec{E}$ результуючого поля, створеного двома (і більше) точковими зарядами, дорівнює векторній (геометричній) сумі напруженостей полів, створених у цій точці окремими зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n .$$

У разі двох електричних полів із напруженостями $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ абсолютне значення вектора напруженості дорівнює

$$E = \sqrt{E_1^{\,2} + E_2^{\,2} + 2E_1E_2\cos\alpha} ,$$

де α – кут між векторами $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$.

11.5 Потік вектора напруженості $\vec{E}$ **електричного поля:**

а) через довільну поверхню S, яка поміщена в неоднорідне поле,

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha\, dS, \text{ або } \Phi_E = \int_S E_n\, dS,$$

де α – кут між вектором напруженості $\vec{E}$ і нормаллю $\vec{n}$ до елемента поверхні; dS – площа елемента поверхні; E_n – проєкція вектора напруженості на нормаль;

б) через плоску поверхню, яка поміщена в однорідне електричне поле,

$$\Phi_E = E \cdot S \cos\alpha.$$

Потік вектора напруженості $\vec{E}$ через замкнену поверхню S

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS,$$

де інтегрування ведеться за всією поверхнею.

11.6 Теорема Гауса в інтегральній формі. Потік вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ через будь-яку замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, що обмежуються цією поверхнею, поділеній на ε_0,

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i,$$

де $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраїчна сума зарядів, що містяться всередині цієї замкненої поверхні; n – кількість зарядів.

Теорема Гауса в диференціальній формі

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho,$$

де $\rho = \dfrac{dq}{dV}$ – об’ємна густина заряду в цій точці простору; q, V – відповідно заряд та об’єм цієї області.

11.7 Напруженість електричного поля точкового заряду q на відстані r від заряду

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

11.8 Напруженість електричного поля металевої сфери радіуса R, що має заряд q, на відстані r від центра сфери:

– у середині сфери ($r < R$) $\qquad E = 0$,

– на поверхні сфери ($r = R$) $\qquad E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\varepsilon R^2}$,

– поза сферою ($r > R$) $\qquad E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\varepsilon r^2}$.

11.9 Напруженість поля, створеного нескінченно довгою рівномірно зарядженою ниткою (або циліндром) на відстані r від її осі,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\tau}{\varepsilon r},$$

де τ – лінійна густина заряду.

У разі циліндра радіусом R формула справедлива за $r \geq R$. За $r < R$ – $E = 0$.

Лінійна густина заряду

$$\tau = \frac{dq}{dl}.$$

11.10 Напруженість поля, яке створює нескінченна рівномірно заряджена площина,

$$E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

де σ – поверхнева густина заряду.

Поверхнева густина заряду

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

11.11 Напруженість поля, що створюється двома паралельними нескінченними рівномірно та різнойменно зарядженими площинами, з однаковою за абсолютним значенням поверхневою густиною σ заряду (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

11.12 Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля

$$\oint_L E_l dl = 0.$$

11.13 Потенціал електричного поля

$$\varphi = W_n / q,$$

або

$$\varphi = \frac{A}{q}.$$

11.14 Потенціал електричного поля, створюваного точковим зарядом q на відстані r від заряду,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

11.15 Потенціал електричного поля, створюваного металевою сферою радіуса R, яка несе заряд q, на відстані r від центру сфери:

– у середині сфери $(r < R)$ $\qquad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$,

– на поверхні сфери $(r = R)$ $\qquad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$,

– поза сферою $(r > R)$ $\qquad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$.

11.16 Потенціал електричного поля, створеного системою *n* точкових зарядів, у цій точці за принципом суперпозиції електричних полів дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, створених окремими точковими зарядами q_1, q_2, ..., q_n,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i .$$

11.17 Енергія W взаємодії системи точкових зарядів q_1, q_2, ..., q_n

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i ,$$

де φ_i – потенціал поля, яке створюється всіма $n-1$ зарядами (за винятком i-го) в точці, де розміщений заряд q_i.

11.18 Зв'язок потенціалу з напруженістю електричного поля

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Для електричного поля зі сферичною симетрією цей зв'язок має вигляд

$$\vec{E} = -\frac{d\phi}{dr}\frac{\vec{r}}{r} ,$$

або у скалярній формі

$$E = \frac{d\phi}{dr} .$$

У разі однорідного поля

$$E = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{d},$$

де φ_1 і φ_2 – потенціали точок двох еквіпотенціальних поверхонь; d – відстань між цими поверхнями вздовж електричної силової лінії.

11.19 Робота електричного поля з переміщення точкового заряду q із точки поля з потенціалом φ_1 у точку з потенціалом φ_2:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ або } A = q\int_L E_l dl,$$

де E_l – проєкція вектора напруженості $\vec{E}$ на напрямок переміщення; dl – переміщення.

Для однорідного поля $\left(\vec{E} = const\right)$

$$A = qEl\cos\alpha,$$

де l – переміщення; α – кут між напрямами вектора $\vec{E}$ і переміщення $\vec{l}$.

Провідники в електричному полі

11.20 Електроємність ізольованого провідника або конденсатора

$$C = \frac{dq}{d\varphi},$$

де dq – заряд, переданий провіднику (конденсатору); $d\varphi$ – зміна потенціалу, яка викликана цим зарядом.

11.21 Електроємність ізольованої провідникової сфери радіусом R, яка поміщена в нескінченне середовище з діелектричною проникністю ε,

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R\,.$$

11.22 Електроємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де S – площа кожної з пластин; d – відстань між ними; ε – діелектрична проникність діелектрика, який заповнює простір між пластинами.

Електроємність плоского конденсатора, який заповнений n шарами діелектрика товщиною d_i кожний, діелектричні проникності яких ε_i (шаруватий конденсатор),

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2 + \ldots + d_n/\varepsilon_n}.$$

11.23 Електроємність сферичного конденсатора (дві концентричні сфери радіусами R_1 і R_2, простір між якими заповнено діелектриком із діелектричною проникністю ε)

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2/(R_2 - R_1)\,.$$

11.24 Електроємність послідовно з'єднаних конденсаторів:

– у загальному випадку $$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n},$$

де n – кількість конденсаторів;

– у разі двох конденсаторів $$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2};$$

– у разі n однакових конденсаторів з електроємністю C_1 кожний $$C = \frac{C_1}{n}.$$

11.25 Електроємність паралельно з'єднаних конденсаторів:

– у загальному випадку $$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

де n – кількість конденсаторів;

– у разі двох конденсаторів $$C = C_1 + C_2;$$

– у разі n однакових конденсаторів з електроємністю C_1 кожний $$C = nC_1.$$

Енергія електричного поля

11.26 Енергія зарядженого провідника

$$W = \frac{1}{2} C\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q\varphi.$$

11.27 Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} qU,$$

де C – електроємність конденсатора; U – різниця потенціалів на його пластинах.

11.28 Об'ємна густина енергії (енергія електричного поля, що припадає на одиницю об'єму)

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED,$$

де $\vec{E}$ – напруженість електричного поля в середовищі з діелектричною проникністю ε; $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ – електричне зміщення.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 11.1

Три точкові заряди $q_1 = q_2 = q_3 = 1\,нКл$ розміщені у вершинах рівностороннього трикутника (рис. 1). Який заряд q_4 потрібно помістити в центрі трикутника, щоб система зарядів була в рівновазі?

Розв'язування

$q_4 - ?$

$q_1 = q_2 = q_3 = 1\,нКл = 10^{-9}\ Кл.$

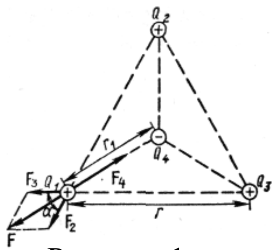


Рисунок 1

Усі три заряди, що є у вершинах трикутника, розміщені в однакових умовах. Тому достатньо розглянути умову рівноваги будь-якого з трьох зарядів, наприклад q_1. Заряд q_1 буде розміщуватися в рівновазі, якщо векторна сума сил, що діють на нього, дорівнює нулю (рис. 1):

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \tag{1}$$

де F_2, F_3, F_4 – сили, з якими відповідно діють на заряд q_1 заряди q_2, q_3, q_4; $\vec{F}$ – рівнодійна сил $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$.

Оскільки сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_4$ направлені за однією прямою в протилежні сторони, векторну рівність (1) можна замінити скалярною: $F - F_4 = 0$, звідси $F_4 = F$. Виразимо в останньому співвідношенні F через F_2 і F_3. Враховуючи, що $F_3 = F_2$, одержимо

$$F_4 = F_2\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)}\,.$$

За законом Кулона, врахувавши, що $q_2 = q_3 = q_1$, знайдемо

$$\frac{q_1 q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)},$$

звідси

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)}. \qquad (2)$$

Із геометричних побудов у рівносторонньому трикутнику видно, що

$$r_1 = \frac{r/2}{cos\left(\alpha/2\right)} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}, \quad \cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Відповідно формула (2) набере вигляду

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}}.$$

Проведемо обчислення:

$$q_4 = \frac{10^{-9}}{\sqrt{3}} = 5,77 \cdot 10^{-10} = 57,7\ нКл.$$

Необхідно зазначити, що рівновага системи зарядів буде нестійкою.

Відповідь: $q_4 = 57,7\ нКл.$

Задача 11.2

По тонкому кільцю рівномірно розподілений заряд $q = 40\,нКл$ із лінійною густиною $\tau = 50\,нКл/м$. Визначити напруженість E електричного поля, що створюється цим зарядом у точці А, яка лежить на осі кільця і віддалена від його центра на відстань, що дорівнює половині радіуса (рис. 2).

Розв'язування

$E - ?$

$q = 40\,нКл = 4 \cdot 10^{-8}\ Кл,$

$\tau = 50\,{нКл}/{м} = 5 \cdot 10^{-8}\ {Кл}/{м},$

$a = \dfrac{R}{2}.$

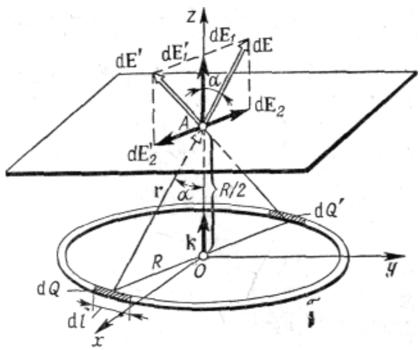


Рисунок 2

Сумістимо координатну площину xOy з площиною кільця, а вісь z – з віссю кільця (рис. 2). На кільці виділимо малу ділянку довжиною dl. Оскільки заряд $dq = \tau dl$, що є на цій ділянці, можна вважати точковим, то напруженість

dE електричного поля, що створюється цим зарядом, може бути записана у вигляді

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{1}$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, напрямлений від елемента dl до точки А.

Розкладемо вектор $d\vec{E}$ на дві складові: $d\vec{E}_1$, перпендикулярну до площини кільця (співнапрямлену з віссю z), і $d\vec{E}_2$, паралельну площині кільця (площини xOy), тобто

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2.$$

Напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точці А знайдемо інтегруванням

$$\vec{E} = \int_L \vec{E}_1 + \int_L \vec{E}_2,$$

де інтегрування проводять за всіма елементами зарядженого кільця. Для кожної пари зарядів dq і dq' $\left(dq = dq'\right)$, розміщених симетрично відносно центра кільця, вектори $d\vec{E}_2$ і $d\vec{E}_2^{'}$ в точці А дорівнюють за модулем і протилежні за напрямом: $d\vec{E}_2 = -d\vec{E}_2'$. Тому векторна сума (інтеграл) $\int_L d\vec{E}_2 = 0$. Складові $d\vec{E}_1$ для всіх елементів кільця співнапрямлені з віссю z (одиничним вектором $\vec{k}$), тобто $d\vec{E}_1 = \vec{k}\ \ dE_1$. Тоді

$$\vec{E} = \vec{k}\int_L dE_1.$$

Візьмемо до уваги, що

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 + \left(R/2\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R,$$

$$\cos\alpha = \left(R/2\right)/\,r = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Підставимо ці вирази в (1) та одержимо

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\tau}{5R^2\sqrt{5}}dl = \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 R^2}. \qquad (2)$$

Після інтегрування знайдемо

$$\vec{E} = \vec{k}\int_0^{2\pi R}\frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 R^2} = \vec{k}\frac{2\tau}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 R}.$$

Із співвідношення $q = 2\pi R\tau$ визначимо радіус кільця $R = \dfrac{q}{2\pi\tau}$. Тоді остаточно одержимо

$$\vec{E} = \vec{k}\,\frac{2\tau \cdot 2\pi\tau}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 \cdot q} = \vec{k}\,\frac{4 \cdot \pi\tau^2}{5\sqrt{5} \cdot \varepsilon_0 q}.$$

Звідси модуль напруженості дорівнює

$$\left|E\right| = \frac{4 \cdot \pi\tau^2}{5\sqrt{5} \cdot \varepsilon_0 q}. \qquad (3)$$

Перевіримо розмірність

$$\frac{\left[\tau^2\right]}{\left[\varepsilon_0\right]\left[Q\right]} = \frac{\left(1\,Кл/м\right)^2}{1\,Ф/м \cdot 1\,Кл} = \frac{1\,Кл}{1\,Ф \cdot 1\,м} = 1\,В/м.$$

Виразимо фізичні величини, що входять у формулу (3), в одиницях СІ і проведемо обчислення

$$E = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(5 \cdot 10^{-8}\right)^2}{5\sqrt{5} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-8}}\,В/м = 7{,}92\,кВ/м.$$

Відповідь: $E = 7{,}92\,кВ/м$.

Задача 11.3

Тонкий стрижень довжиною $l = 20\,см$ несе рівномірно розподілений заряд $\tau = 0{,}1\,мкКл/м$. Визначити напруженість E електричного поля, створеного розподіленим зарядом у точці A, що лежить на осі стрижня на відстані $a = 20\,см$ від його кінця.

Розв’язування

$E - ?$

$l = 20\,см = 0{,}2\,м,$

$\tau = 0{,}1\,мкКл/м = 1 \cdot 10^{-7}\,Кл/м,$

$a = 20\,см = 0{,}2\,м.$

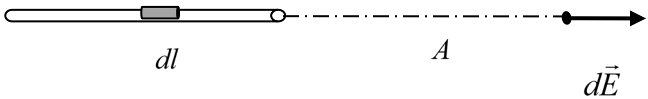


Рисунок 3

Виділимо на стрижні ділянку довжиною dr із зарядом $dq = \tau dr,$ який у точці А створює напруженість електричного поля dE :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

де $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,Ф/м$ – електрична стала.

Напруженість електричного поля буде інтегралом від цього виразу:

$$E = \int dE = \int\limits_a^{l+a} \frac{\tau dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_a^{l+a} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}\Bigg|_a^{a+l}.$$

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right).$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз і проведемо розрахунки

$$E = \frac{10^{-7}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{0{,}2 + 0{,}2} \right) = 2{,}25 \cdot 10^{3}\ В/м.$$

Відповідь: $E = 2{,}25\, кВ/м$.

Задача 11.4

На тонкому стрижні довжиною l рівномірно розподілений заряд із лінійною густиною $\tau = 10\, нКл/м$. Знайти потенціал φ, що створюється розподіленим зарядом у точці A, розміщеній на осі стрижня і віддаленій від його найближчого кінця на відстань l.

Розв'язування

$\varphi - ?$

$\tau = 10\, нКл/м = 10^{-8}\ Кл/м.$

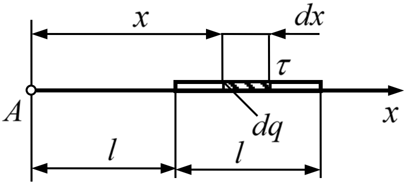


Рисунок 4

У задачі розглядається поле, що створюється розподіленим зарядом. У цьому разі роблять так. На стрижні виділяють нескінченно малу ділянку довжиною dx. Тоді на цій ділянці буде зосереджений заряд $dq = \tau dx$, який можна вважати точковим. Потенціал $d\varphi$, що створюється цим точковим зарядом у точці A (рис. 4), можна визначити за формулою

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x}. \qquad (1)$$

За принципом суперпозиції електричних полів потенціал електричного поля, що створюється зарядженим стрижнем у точці *A*, знайдемо інтегруванням виразу (1)

$$\varphi = \int_{l}^{2l} \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x}.$$

Після інтегрування одержимо

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln x \Big|_{l}^{2l} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln 2. \qquad (2)$$

Підставимо числові значення фізичних величин у СІ у співвідношення (2) і проведемо обчислення

$$\varphi = 9 \cdot 10^{9} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 0,693\ B = 62,4\ B.$$

Відповідь: $\varphi = 62,4\ B$.

Задача 11.5

Дві концентричні провідні сфери радіусами $R_1 = 6\,см$ і $R_2 = 10\,см$ несуть відповідно заряди $q_1 = 1\,нКл$ і $q_2 = -0,5\,нКл$. Знайти напруженість *E* поля в точках, віддалених від центра сфер на відстані $r_1 = 5\,см$, $r_2 = 9\,см$, $r_3 = 15\,см$ (рис. 5). Побудувати графік *E* (*r*).

Розв’язування

$E-?$

$q_1 = 1\,нКл = 10^{-9}\,Кл,$

$q_2 = -0{,}5\,нКл = -0{,}5\cdot 10^{-9}\,Кл,$

$R_1 = 6\,см = 0{,}06\,м,$

$R_2 = 10\,см = 0{,}1\,м,$

$r_1 = 5\,см = 0{,}05\,м,$

$r_2 = 9\,см = 0{,}09\,м,$

$r_3 = 15\,см = 0{,}15\,м.$

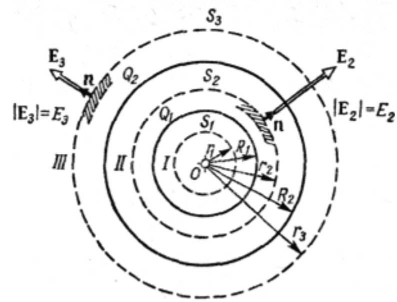


Рисунок 5

Зазначимо, що точки, в яких потрібно знайти напруженості електричного поля, лежать у трьох різних областях (рис. 5): області 1 ($r_1 < R_1$), області 2 ($R_1 < r_2 < R_2$) та області 3 ($r_3 > R_2$).

1 Для визначення напруженості E_1 в області ***I*** проведемо гаусову поверхню S_1 радіусом r_1 і скористаємося теоремою Гауса. Оскільки сумарний заряд, що є всередині гаусової поверхні, дорівнює нулю, одержимо

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0 .$$

Із міркувань симетрії $E_n = E_1 = const$. Отже, $E_1 \oint_{S_1} dS = 0$ і E_1 (напруженість поля в області 1) у всіх точках, що задовольняють умову $r_1 < R_1$, буде дорівнювати нулю.

2 В області ***II*** гаусову поверхню проведемо радіусом r_2. У цьому разі діелектричну проникність середовища ε будемо вважати такою, що дорівнює одиниці (вакуум). Оскільки всередині гаусової поверхні є лише заряд q_1, запишемо

$$\int_{S_2} E_n dS = q_1 / \varepsilon_0 .$$

Оскільки $E_n = E_1 = const$, то E можна винести за знак інтеграла

$$E \int_{S_2} dS = q_1 / \varepsilon_0 , \text{ або } ES_2 = q_1 / \varepsilon_0 .$$

Позначивши напруженість E для області ***II*** через E_2, одержимо

$$E_2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S_2},$$

де $S_2 = 4\pi r_2^2$ – площа гаусової поверхні.

Тоді остаточно одержимо

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \qquad (1)$$

3 В області ***III*** гаусова поверхня проводиться радіусом r_3. Позначимо напруженість E області 3 через E_3 і врахуємо, що в цьому разі гаусова поверхня охоплює обидві сфери і, отже, сумарний заряд буде дорівнювати $q_1 + q_2$. Тоді $E_3 = \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}$.

Врахувавши, що $q_2 < 0$, цей вираз можна переписати у вигляді

$$E_3 = \frac{q_1 - |q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \qquad (2)$$

Переконаємося в тому, що права частина співвідношень (1) і (2) дає одиницю напруженості

$$\frac{[q]}{[\varepsilon_0][r^2]} = \frac{1\,Кл}{1\,Ф/м \cdot 1\,м^2} = \frac{1\,Кл}{1\,Ф \cdot 1\,м} = 1\,В/м.$$

Визначимо всі величини в одиницях СІ і проведемо обчислення:

$$E_1 = 0,$$

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^9}{(0,09)^2}\,В/м = 1,11\,кВ/м,$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0,5) \cdot 10^{-9}}{(0,15)^2}\,В/м = 200\,В/м.$$

Побудуємо графік $E(r)$. В області ***I*** $(r < R_1)$ $E = 0$.

В області ***II*** $(R_1 \le r < R_2)$

$$E_2\left(r\right) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

У точці $r = R_1$ напруженість $E_2\left(R_1\right) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = 2,5\,\frac{кВ}{м}$.

У точці $r = R_2$ (r прямує до R_2 зліва) $E_2\left(R_2\right) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 0,9\,\frac{кВ}{м}$.

В області ***ІІІ*** $\left(r > R_2\right)$

$$E_3 = \frac{q_1 - \left|q_2\right|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

У точці $r = R_2$ (r прямує до R_2 справа) $E_3\left(R_2\right) = \frac{q_1 - \left|q_2\right|}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 0,45\,\frac{кВ}{м}$.

Отже, функція $E(r)$ у точках $r = R_1$ і $r = R_2$ зазнає розриву.

Графік залежності E від r наведений на рисунку 6.

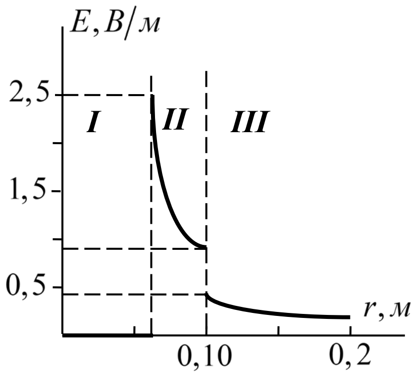


Рисунок 6

Задача 11.6

Електричне поле створюється двома зарядами $q_1 = 4\,мкКл$ і $q_2 = -\,2\,мкКл,$ що розміщені на відстані $a = 0{,}1\,м$ один від одного. Визначити роботу $A_{1,\,2}$ сил поля з переміщення заряду $q = 50\,нКл$ із точки 1 у точку 2 (рис. 7).

Розв'язування

$A_{1,2} - ?$

$q_1 = 4\,мкКл = 4 \cdot 10^{-6}\,Кл,$

$q_2 = -\,2\,мкКл = -\,2 \cdot 10^{-6}\,Кл,$

$a = 0{,}1\,м,$

$q = 50\,нКл = 5 \cdot 10^{-8}\,Кл.$

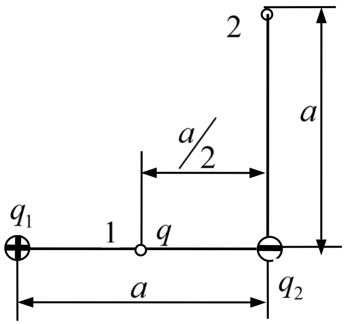


Рисунок 7

Для визначення роботи $A_{1,\,2}$ сил поля скористаємося співвідношенням

$$A_{1,\,2} = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right). \tag{1}$$

Застосовуючи принцип суперпозиції електричних полів, визначимо потенціали φ_1 і φ_2 точок 1 і 2 поля:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a/2} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a/2} = \frac{2\left(q_1 + q_2\right)}{4\pi\varepsilon_0 a}, \tag{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q_1/\sqrt{2} + q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}. \qquad (3)$$

Тоді, підставивши вирази (2) і (3) в (1), одержимо

$$A_{1,2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[2\left(q_1 + q_2\right) - \left(q_1/\sqrt{2} + q_2\right)\right],$$

або

$$A_{1,2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[q_1\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + q_2\right].$$

Перевіримо розмірність

$$\frac{[q][q_1]}{[\varepsilon_0][a]} = \frac{1\,Кл \cdot 1\,Кл}{1\,Ф/м \cdot 1\,м} = 1\,Кл \cdot 1\,В = 1\,Дж.$$

Підставимо числові значення фізичних величин у СІ і проведемо обчислення

$$A_{1,2} = \frac{50 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^{9}}{0,1}\left[4\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\right] \cdot 10^{-6}\ Дж = 14,3\ мкДж.$$

Відповідь: $A_{1,2} = 14,3\ мкДж.$

Задача 11.7

Електричне поле створене нескінченною зарядженою прямою ниткою з рівномірно розподіленим зарядом $(\tau = 10\, нКл/м)$. Визначити кінетичну енергію W_{K2} електрона в точці 2, якщо в точці 1 його кінетична енергія $W_{K1} = 200\, еВ$.

Розв'язування

$W_{K2} - ?$

$\tau = 10\, нКл/м = 10^{-8}\ Кл/м$,
$W_{K1} = 200\, еВ = 3,2 \cdot 10^{-17}\ Дж$,
$r_1 = 3a$,
$r_2 = a$.

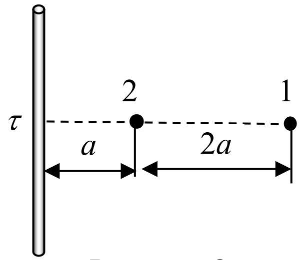


Рисунок 8

Зміна кінетичної енергії дорівнює роботі електричного поля з переміщення заряду з точки 1 у точку 2:

$$\Delta W_K = W_{K2} - W_{K1} = A.$$

Тоді $W_{K2} = A + W_{K1}$.

Роботу електричного поля знайдемо як

$$A = \int F dr = -\int_{3a}^{a} eE dr,$$

де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\ Кл$ – заряд електрона.

Напруженість електричного поля зарядженої нитки дорівнює

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

тоді

$$A = -e\int_{3a}^{a}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = -e\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{3a}^{a}\frac{dr}{r} = -e\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{3a} = \frac{\tau e}{2\pi\varepsilon_0}\ln 3.$$

Тут $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,Ф/м$ – електрична стала. Тепер одержимо вираз для кінетичної енергії електрона в точці 2

$$W_{K2} = \frac{\tau e}{2\pi\varepsilon_0}\ln 3 + W_{K1}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз і підрахуємо

$$W_{K2} = \frac{10^{-8}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{2\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln 3 + 3{,}2\cdot 10^{-17} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 397{,}6\,Дж.$$

$$W_{K2} = 398\,eB.$$

Відповідь: $W_{K2} = 398\,eB$.

Задача 11.8

Яка кількість теплоти Q вивільниться під час розрядження плоского конденсатора, якщо різниця потенціалів між пластинами дорівнює $U = 15\,кВ$, відстань $d = 1\,мм$, діелектрик – слюда, і площа кожної пластини становить $S = 300\,см^2$?

Розв’язування

$Q - ?$
$U = 15\,кВ = 1{,}5 \cdot 10^4\ В$, $\varepsilon = 7$, $d = 1\,мм = 10^{-3}\,м$, $S = 300\,см^2 = 3 \cdot 10^{-2}\ м^2$.

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{1}{2}CU^2,$$

де C – електроємність конденсатора; U – різниця потенціалів на його пластинах.

Кількість теплоти, яка вивільняється під час розрядження конденсатора, $Q = W$.

Електроємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де S – площа кожної з пластин; d – відстань між ними; ε – діелектрична проникність діелектрика, який заповнює простір між пластинами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ Ф/м$ – електрична стала.

Тоді

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}U^2.$$

Підставимо числові значення величин і виконаємо розрахунки

$$Q = \frac{1}{2}\frac{7\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^{-2}}{10^{-3}}\left(1,5\cdot 10^4\right)^2 = 0,21\,Дж.$$

Відповідь: $Q = 0,21\left(Дж\right)$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

11.1 Точкові заряди $q_1 = 20\,мкКл$, $q_2 = -10\,мкКл$ розміщені на відстані $d = 5\,см$ один від одного. Визначити напруженість E поля в точці, що віддалена на $r_1 = 3\,см$ від першого і на $r_2 = 4\,см$ від другого заряду. Визначити також силу F, що діє в цій точці на точковий заряд $q = 1\,мкКл$.

Відповідь: $E = 1,52 \cdot 10^9\ В/м$; $F = 1,52\,кН$.

11.2 Два позитивні точкові заряди q і $9q$ закріплені на відстані $d = 100\,см$ один від одного. Визначити, в якій точці на прямій, що проходить через заряди, потрібно розмістити третій заряд так, щоб він був у рівновазі. Який знак повинен мати цей заряд для того, щоб рівновага була стійкою, якщо переміщення зарядів можливе лише уздовж прямої, що проходить через закріплені заряди?

Відповідь: на відстані $r = 0,25$ $м$ від заряду q. Заряд повинен бути позитивним.

11.3 Дві однаково заряджених кульки підвішені в одній точці на нитках однакової довжини. Водночас нитки розійшлися на кут α. Кульки занурюють в олію. Яка густина ρ олії, якщо кут розходження ниток під час занурення в олію залишається незмінним? Густина матеріалу кульок $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3\ кг/м^3$, діелектрична проникність олії $\varepsilon = 2,2$.

Відповідь: $\rho = 820\ кг/м^3$.

11.4 Чому дорівнює потенціальна енергія $W_п$ системи чотирьох однакових точкових зарядів $q = 10\,нКл$, розміщених у вершинах квадрата зі стороною $a = 10\,см$?

Відповідь: $W = 48,7\,мкДж$.

11.5 Точкові заряди $q_1 = 30\,мкКл$ і $q_2 = -20\,мкКл$ розміщені на відстані $d = 20\,см$ один від одного. Визначити напруженість електричного поля E в точці, що віддалена від першого заряду на відстань $r_1 = 30\,см$, а від другого – на $r_2 = 15\,см$.

Відповідь: $E = 5{,}86\ МВ/м$.

11.6 Порошинка масою $m = 5\,нг$, що несе на собі $N = 10$ надлишкових електронів, пройшла у вакуумі прискорювальну різницю потенціалів $U = 1\,МВ$. Визначити кінетичну енергію W_K і швидкість порошинки.

Відповідь: $W_K = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ Дж = 10\,МеВ$; $\mathrm{v} = 0{,}8\,м/с$.

11.7 Тонкий стрижень довжиною $l = 20\,см$ несе рівномірно розподілений заряд $\tau = 0{,}5\,мкКл/м$. Визначити напруженість E електричного поля, створеного розподіленим зарядом у точці A, що лежить на осі стрижня на відстані $a = 20\,см$ від його кінця.

Відповідь: $E = 11{,}2\,кВ/м$.

11.8 Електричне поле створене нескінченною зарядженою прямою ниткою з рівномірно розподіленим зарядом $(\tau = 10\,нКл/м)$. Визначити кінетичну енергію W_{K2} електрона в точці 2 (рис. 9), якщо в точці 1 його кінетична енергія $W_{K1} = 200\,еВ$.

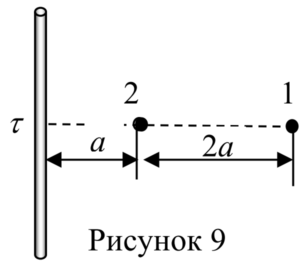


Рисунок 9

Відповідь: $W_{K2} = 398\,еВ$.

11.9 По тонкому півкільцю радіусом $R = 10\,см$ рівномірно розподілений заряд із лінійною густиною

$\tau = 1\dfrac{мкКл}{м}$. Визначити напруженість E електричного поля, що створене розподіленим зарядом у точці O, яка збігається з центром кільця.

Відповідь: $E = 180\,кВ/м$.

11.10 Тонкий нескінченний стрижень, обмежений з одного боку, несе рівномірно розподілений заряд із лінійною густиною $\tau = 0,5\,мкКл/м$. Визначити напруженість E електричного поля, створеного розподіленим зарядом у точці A, що лежить на осі стрижня на відстані $a = 20\,см$ від його початку.

Відповідь: $E = 22,5\,кВ/м$.

11.11 Знайти потенціал і напруженість електричного поля в центрі сфери радіуса R, зарядженою з поверхневою густиною σ.

Відповідь: $\varphi = \dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0}$, $\vec{E} = 0$.

11.12 Заряд $q = 2\,мкКл$ розподілений рівномірно за об'ємом кулі радіуса $R = 40\,мм$. Знайти потенціал і напруженість електричного поля в центрі кулі.

Відповідь: $\varphi = 6,8 \cdot 10^5\ В$, $\vec{E} = 0$.

11.13 Два точкових заряди $q_1 = 6\,нКл$ і $q_2 = 3\,нКл$ розміщені на відстані $d = 60\,см$ один від одного. Яку роботу необхідно виконати зовнішнім силам, щоб зменшити відстань між зарядами вдвічі?

Відповідь: $A = 2,7 \cdot 10^{-7}$ *Дж*.

11.14 Дві паралельні заряджені площини, поверхнева густина заряду яких становить $\sigma_1 = 2\,мкКл/м$ і $\sigma_2 = -\,0,8\,мкКл/м$, розміщені на відстані $d = 0,6\,см$ одна від одної. Визначити різницю потенціалів U між площинами.

Відповідь: $U = 950\,B$.

11.15 Чотири однакові краплі ртуті, заряджені до потенціалу $\varphi = 10\,B$, зливаються в одну. Який потенціал φ_1 краплі, що утворилася?

Відповідь: $\varphi = 25,2\,B$.

11.16 Тонкий стрижень зігнутий у кільце радіусом $R = 10$см. Він рівномірно заряджений із лінійною густиною $\tau = 800\dfrac{нКл}{м}$. Визначити потенціал у точці, що розміщена на осі кільця на відстані $h = 10\,см$ від його центра.

Відповідь: $\varphi = 32,1\,кB$.

11.17 Тонка квадратна рамка рівномірно заряджена з лінійною густиною заряду $\tau = 200\dfrac{nКл}{м}$. Визначити потенціал φ поля в точці перетину діагоналей.

Відповідь: $\varphi = 12,7\,B$.

11.18 Електрон, що мав кінетичну енергію $E_k = 10\,eB$, влетів в однорідне електричне поле в напрямку силових ліній поля. Яку швидкість буде мати електрон, пройшовши в цьому полі різницю потенціалів $U = 8\,B$?

Відповідь: $\mathrm{v} = 8,4 \cdot 10^5\ м/с$.

11.19 Електричне поле створене зарядженою провідною кулею, радіус якої R і потенціал $\varphi = 300\ B$. Визначити роботу сил поля під час переміщення заряду $Q = 0,2\ мкКл$ із точки, що розміщена на відстані $r_1 = 4R$ від центра кулі, в точку з $r_2 = 2R$.

Відповідь: $A = -1,5 \cdot 10^{-5}\ Дж$.

11.20 Електрон з енергією $E_k = 400\,eB$ (у нескінченності) рухається вздовж силової лінії в напрямку до поверхні металевої зарядженої сфери радіусом $R = 10\,см.$ Визначити мінімальну відстань $a,$ на яку наблизиться електрон до поверхні сфери, якщо заряд її становить $q = -10\,нКл.$

Відповідь: $x = 12{,}5$ *см*.

11.21 Електрон рухається вздовж силової лінії однорідного електричного поля. У деякій точці поля з потенціалом $\varphi_1 = 100\,B$ електрон мав швидкість $v_1 = 6\,Мм/с.$ Визначити потенціал φ_2 точки поля, дійшовши до якої електрон втратить половину своєї швидкості.

Відповідь: $\varphi_2 = 23\,B.$

11.22 Конденсатор ємністю $C_1 = 10\,мкФ$ заряджений до напруги $U = 10\,B.$ Визначити заряд на обкладинках цього конденсатора після того, як паралельно до нього був під'єднаний інший, незаряджений конденсатор ємністю $C_2 = 20\,мкФ.$

Відповідь: $q = 33{,}3\,мкКл.$

11.23 Конденсатори ємністю $C_1 = 2\,мкФ,$ $C_2 = 5\,мкФ$ і $C_3 = 10\,мкФ$ з'єднані послідовно і розміщені під напругою $U = 850\,B.$ Визначити напругу й заряд на кожному із конденсаторів.

Відповідь: $q_1 = q_2 = q_3 = 1{,}06\,мКл;$ $U_1 = 530\,B;$ $U_2 = 212\,B;$ $U_3 = 107\,B.$

11.24 Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин радіусом $R = 10\,см$ кожна. Відстань між пластинами $d = 2\,мм.$ Конденсатор з'єднаний із джерелом напруги $U = 80\,B.$ Визначити заряд q і напруженість E поля конденсатора в двох випадках: а) діелектрик – повітря; б) діелектрик – скло.

Відповідь: $E = 40\ кВ/м$; $q_1 = 11\,нКл$; $q_2 = 77\,нКл$.

11.25 Простір між пластинами плоского конденсатора заповнено діелектриком (фарфор), об’єм якого дорівнює $V = 100\,см^3$. Поверхнева густина заряду на пластинах конденсатора дорівнює $\sigma = 8{,}85\ нКл/м^2$. Визначити роботу A, яку потрібно здійснити, щоб видалити діелектрик із конденсатора. Тертям діелектрика і пластин знехтувати.

Відповідь: $A = 63{,}5\ нДж$.

11.26 Плоский конденсатор із площею пластин $S = 200\ см^2$ кожна заряджений до різниці потенціалів $U = 2\,кВ$. Відстань між пластинами $d = 2\,см$. Діелектрик – скло. Визначити енергію W поля конденсатора і густину енергії ω поля.

Відповідь: $W = 0{,}12\,Дж$; $w = 300\,Дж/м^3$.

11.27 Яка кількість теплоти Q вивільниться під час розрядження плоского конденсатора, якщо різниця потенціалів між пластинами дорівнює $U = 15\,кВ$, відстань $d = 1\,мм$, діелектрик – слюда, і площа кожної пластини становить $S = 300\,см^2$?

Відповідь: $Q = 0{,}21\,Дж$.

11.28 Ізольована металева сфера електроємністю $C = 10\,пФ$ заряджена до потенціалу $\varphi = 3\,кВ$. Визначити енергію W поля, яке розміщене в сферичному шарі, обмеженому сферою і концентричної з нею сферичною поверхнею, радіус якої в три рази більший, ніж радіус сфери.

Відповідь: $A = 30\ мкДж$.

11.29 Парафінова куля радіусом $R = 10\,см$ заряджена рівномірно по об’єму з об’ємною густиною

$\rho = 10$ *нКл/м*^{3}. Визначити енергію W_1 електричного поля, зосередженого в самій кулі, та енергію W_2 поза нею.

Відповідь: $W_1 = 7{,}9\,нДж$; $W_2 = 78{,}8\,нДж$.

11.30 Електричне поле створене зарядженою ($q = 0{,}1\,мкКл$) сферою радіусом $R = 10\,см.$ Яка енергія W поля зосереджена в об'ємі, обмеженому сферою й концентричною з нею сферичною поверхнею, радіус якої вдвічі більший за радіус сфери.

Відповідь: $W = 0{,}2\,мкДж$.

12 СТРУМ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

12.1 Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt},$$

де dq – заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час dt.

12.2 Густина електричного струму

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS}\vec{n},$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор, який за напрямком збігається з напрямком руху позитивних носіїв заряду.

12.3 Опір однорідного провідника

$$R = \rho\frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір речовини провідника; l – його довжина.

12.4 Провідність Ω провідника й питома провідність σ речовини

$$\Omega = \frac{1}{R}, \qquad \sigma = \frac{1}{\rho}.$$

12.5 Залежність питомого опору від температури

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \alpha t\right),$$

де ρ і ρ_0 – питомі опори відповідно за t і $0\,^{\circ}C$; t – температура (за шкалою Цельсія); α – температурний коефіцієнт опору.

12.6 Опір з'єднаних провідників:

– послідовно $$R = \sum_{i=1}^{n} R_i\ ;$$

– паралельно $$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i},$$

де R_i – опір i-го провідника; n – кількість провідників.

12.7 Закон Ома в інтегральній формі:

– для неоднорідної ділянки кола

$$I = \frac{\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \pm \xi_{12}}{R} = \frac{U}{R}\ ;$$

– для однорідної ділянки кола ($\xi_{12} = 0$)

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}\ ;$$

– для замкненого кола $\left(\varphi_1 = \varphi_2\right)$

$$I = \frac{\xi}{R + r},$$

де $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – різниця потенціалів на кінцях ділянки кола; ξ_{12} – ЕРС джерел струму, що входять у цю ділянку; U – напруга на ділянці кола; R – зовнішній опір кола (дільниці кола); r – опір джерела струму (внутрішній опір); ξ – ЕРС усіх джерел струму в колі.

12.8 Правила Кірхгофа

Перше правило

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

де n – кількість струмів, що сходяться у вузлі.

Друге правило

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \ ,$$

де I_i – сила струму на i-й ділянці; R_i – опір i-ї ділянки; ξ_i – ЕРС джерел струму на i-й ділянці; n – кількість ділянок, що містять опір; k – кількість ділянок, що містять джерела струму.

12.9 Робота, яка виконується електростатичним полем,

$$dA = IUdt = \frac{U^2}{R}dt = I^2 Rdt.$$

12.10 Потужність струму

$$N = IU = \frac{U^2}{R} = I^2 R.$$

12.11 Закон Джоуля – Ленца

$$dq = I^2 R dt,$$

де dq – кількість теплоти, що виділяється на ділянці кола за час dt.

12.12 Закон Ома в диференціальній формі

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

де σ – питома провідність провідника; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля.

12.13 Закон Джоуля – Ленца в диференціальній формі

$$\omega = \sigma E^2,$$

де ω – об’ємна густина теплової потужності.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 12.1

Визначити заряд, який пройшов по провіднику з опором $R = 10\,Ом$ за рівномірного збільшення напруги на кінцях провідника від $U_1 = 20\,В$ до $U_2 = 50\,В$ упродовж $t = 30\,с$.

Розв'язування

$q - ?$
$R = 10\,Ом,$ $U_1 = 20\,В,$ $U_2 = 50\,В,$ $t = 30\,с.$

Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt},$$

де dq – заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час dt. Звідси

$$q = \int_0^t I dt. \qquad (1)$$

Згідно з законом Ома $I = \dfrac{U}{R}$, тоді

$$q = \int_0^t \frac{U}{R} dt. \qquad (2)$$

Згідно з умовою задачі напруга рівномірно збільшується з часом, тобто

$$U = U_1 + kt, \qquad (3)$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Підставимо (3) у формулу (2) та знайдемо

$$q = \int_0^t \frac{U_1 + kt}{R} dt = \frac{U_1}{R}\int_0^t dt + \frac{k}{R}\int_0^t tdt.$$

Виконаємо інтегрування та одержимо

$$q = \frac{U_1 t}{R} + \frac{kt^2}{2R} = \frac{t}{2R}\left(2U_1 + kt\right). \qquad (4)$$

Значення коефіцієнта пропорційності k знайдемо з формули (3) за умови, що за $t = 20\,с$ $U = 50\,В$,

$$k = \frac{U - U_1}{t} = \frac{50 - 20}{30} = 1\,В/с.$$

Перевіримо розмірність

$$\frac{[t]}{[R]}\left([U_1] + [k][t]\right) = \frac{1с}{1Ом}1В = \frac{1с \cdot 1А}{1В}1В = 1Кл.$$

Підставимо значення числових величин у формулу (4), одержимо

$$q = \frac{30}{2 \cdot 10}\left(2 \cdot 20 + 1 \cdot 30\right) = 105\,Кл.$$

Відповідь: $q = 105\,Кл.$

Задача 12.2

Котушка та амперметр з'єднані послідовно та під'єднані до джерела струму. До клем котушки приєднаний вольтметр з опором $r = 4$ кОм. Амперметр показує силу струму $I = 0,3$ А, вольтметр – напругу $U = 120$ В. Визначити опір R котушки. Визначити відносну похибку ε, яка буде допущена під час вимірювання опору, якщо знехтувати силою струму, що проходить через вольтметр.

Розв'язування

$R - ?$ $\varepsilon - ?$

$U = 120\,В,$

$I = 0,3\,А,$

$r = 4\,кОм = 4 \cdot 10^3\,Ом.$

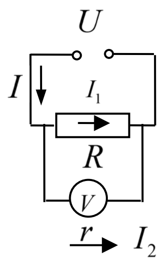


Рисунок 1

За законом Ома для ділянки кола (рис. 1) маємо

$$I_1 R = I_2 r = U \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{U}{r}.$$

$$I = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I - I_2 = I - \frac{U}{r}.$$

Опір котушки

$$R = \frac{U}{I_1} = \frac{U}{I - \frac{U}{r}}.$$

Зайдемо числове значення опору:

$$R = \frac{120}{0,3 - \dfrac{120}{4 \cdot 10^3}} = 444\,Ом.$$

Якщо знехтувати силою струму, що проходить через вольтметр $I_2 = 0,\ I_1 = I$,

$$IR' = U \qquad \Rightarrow \qquad R' = \frac{U}{I}.$$

$$R' = \frac{120}{0,3} = 400\,Ом.$$

Визначимо відносну похибку ε, яка буде допущена під час вимірювання опору, якщо знехтувати силою струму, що проходить через вольтметр,

$$\varepsilon = \frac{R - R'}{R} 100\ \%.$$

Проведемо розрахунки

$$\varepsilon = \frac{444 - 400}{444} 100\ \% = 9,9\ \%.$$

Відповідь: $R = 444\ Ом$; $\varepsilon = 9,9\ \%$.

Задача 12.3

Джерело струму з ЕРС $\xi = 1{,}1\,B$ і внутрішнім опором $r = 1\,Ом$ замкнуте на зовнішній опір $R = 9\,Ом.$ Знайти: 1) силу струму в колі I; 2) напругу в зовнішньому колі U; 3) напругу всередині джерела струму U_B; 4) ККД джерела струму η.

Розв’язування

$I - ?\ U - ?$

$U_B - ?\ \eta - ?$

$\xi = 1{,}1\,B,$

$r = 1\,Ом,$

$R = 9\,Ом.$

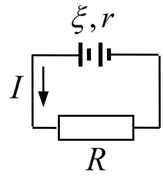


Рисунок 2

1 Силу струму в колі (рис. 2) знайдемо з закону Ома для замкненого кола

$$I = \frac{\xi}{R + r}.$$

Підставимо числові значення

$$I = \frac{1{,}1}{9 + 1} = 0{,}11\,A.$$

2 Напругу в зовнішньому колі знайдемо з закону Ома для ділянки кола

$$U = IR.$$

$$U = 0,11 \cdot 9 = 0,99\,B.$$

3 Напругу в джерелі струму також знайдемо з закону Ома для ділянки кола

$$U_B = Ir,$$

$$U_B = 0,11 \cdot 1 = 0,11\,B.$$

4 Коефіцієнт корисної дії показує, яку частину від загальної потужності становить корисна потужність:

$$\eta = \frac{N_K}{N_З}\,. \tag{1}$$

Корисна потужність у колі сталого струму – це та, що витрачається на нагрівання зовнішнього опору, тобто

$$N_K = I^2 R\,. \tag{2}$$

Загальна (повна) потужність

$$N_З = I^2 \left(R + r \right). \tag{3}$$

З урахуванням (2) і (3) співвідношення (1) набере вигляду

$$\eta = \frac{I^2 R}{I^2 \left(R + r \right)} = \frac{R}{\left(R + r \right)}.$$

Обчислення дають

$$\eta = \frac{9}{(9+1)} = 0,9.$$

Відповідь: 1) $I = 0,11\,A$; 2) $U = 0,99\,B$; 3) $U_B = 0,11\,B$; 4) $\eta = 0,9$.

Задача 12.4

Джерела струму з електрорушійними силами $\xi_1 = 10\,B$ та $\xi_2 = 4\,B$ під'єднані до кола (див. рис. 3). Визначити сили струмів, які йдуть по опорах R_2 та R_3, за умови, що $R_1 = R_4 = 2\,Ом$ і $R_2 = R_3 = 4\,Ом$. Опором джерел струму знехтувати.

Розв'язування

$I_2 - ?$ $I_3 - ?$

$\xi_1 = 10\,B$,

$\xi_2 = 4\,B$,

$R_1 = R_4 = 2\,Ом$,

$R_2 = R_3 = 4\,Ом$,

$r_1 = r_2 = 0$.

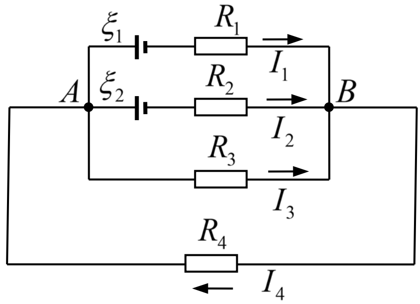


Рисунок 3

Сили струмів у розгалуженій мережі визначають за допомогою законів Кірхгофа. Для того щоб знайти чотири значення сили струму, потрібно скласти чотири рівняння. Водночас перед складанням рівнянь за законом Кірхгофа необхідно, по-перше, довільно вибрати напрямки струмів, що йдуть через опори, та зазначити їх стрілками на рисунку; і, по-друге, вибрати напрямок обходу контурів (це необхідно для складання рівнянь за другим законом Кірхгофа). Виберемо напрямки струмів так, як вони показані на рисунку 3 та домовимося обходити контури за годинниковою стрілкою.

Схема в цій задачі має два вузли A і B. Але складати рівняння за першим законом Кірхгофа потрібно лише для одного вузла, оскільки рівняння складене для другого вузла буде таким самим.

Під час складання рівнянь за першим законом Кірхгофа потрібно підкорятися правилу знаків, а саме: струм, який підходить до вузла в рівнянні має знак плюс, а струм, який виходить із вузла – мінус.

За першим законом Кірхгофа для вузла B ми маємо

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0. \quad (1)$$

Останні три рівняння одержимо з другого закону Кірхгофа. Число незалежних рівнянь, які можна скласти за другим законом Кірхгофа, також є меншим за число контурів (у нашому випадку контурів шість, а незалежних рівнянь три). Для того щоб знайти необхідне число незалежних рівнянь, потрібно дотримуватися такого правила: вибирати контури так, щоб кожний новий контур містив хоча б одну гілку, яка не розглядалася б у жодному з попередніх контурів.

Під час складання рівнянь за другим законом Кірхгофа потрібно виконувати таке правило знаків:

1) якщо струм за напрямком збігається з вибраним напрямком обходу контурів, то відповідний добуток IR входить до рівняння із знаком плюс, у протилежному разі – мінус;

2) якщо під час обходу контура йдемо від мінуса до плюса всередині джерела струму, то відповідна ЕРС

входить до рівняння з знаком плюс, у протилежному разі – з знаком мінус.

За другим законом Кірхгофа для контурів $AR_1BR_2A,\ AR_1BR_3A,\ AR_3BR_4A$:

$$I_1R_1 - I_2R_2 = \xi_1 - \xi_2, \qquad (2)$$

$$I_1R_1 - I_3R_3 = \xi_1, \qquad (3)$$

$$I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \qquad (4)$$

Підставимо в рівняння (2)–(4) числові значення опорів і ЕРС та разом з (1) одержимо систему рівнянь

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0,$$
$$2I_1 - 4I_2 = 6,$$
$$2I_1 - 4I_3 = 10,$$
$$4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Скористаємося методом визначників. Для цього ще раз у такому вигляді:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0,$$
$$2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6,$$
$$2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 = 10,$$
$$0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Значення сил струмів знайдемо з виразів

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta},\ I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta},$$

де Δ – визначник системи рівнянь; Δ_{I_2} і Δ_{I_3} – визначники одержані під час заміни відповідних стовпчиків визначника Δ стовпчиками, складеними з вільних членів чотирьох вищенаведених рівнянь. Знаходимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96,$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -96.$$

Тоді одержимо

$$I_2 = 0, \; I_3 = -1\,A.$$

Знак мінус свідчить про те, що під час довільного вибору напрямків струмів, напрямок струму I_3 був зазначений протилежно напрямку струму в цьому колі. Насправді струм I_3 йде від вузла B до вузла A.

Відповідь: $I_2 = 0$, $I_3 = -1\,A$.

Задача 12.5

Сила струму в провіднику опором $R = 20\,Ом$ збільшується впродовж часу $\Delta t = 2\,c$ за лінійним законом від $I_0 = 0$ до $I = 6\,A$ (рис. 4). Визначити теплоту Q_1 і Q_2, що виділилася в цьому провіднику за першу та другу секунди, а також знайти відношення цих величин Q_1/Q_2 .

Розв'язування

$Q_1 - ?\ Q_2 - ?\ \dfrac{Q_1}{Q_2} - ?$

$R = 20\,Ом,$

$I_0 = 0,$

$I = 6\,A.$

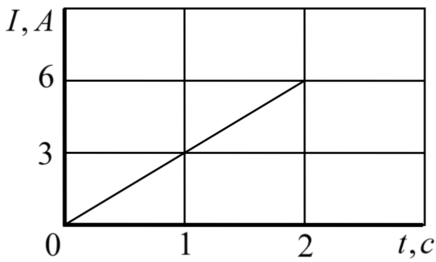


Рисунок 4

Закон Джоуля – Ленца

$$dQ = I^2 R dt\ , \tag{1}$$

де сила струму I є деякою функцією часу.

У цьому разі ця функція лінійна (рис. 4)

$$I = kt\ , \tag{2}$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що характеризує швидкість зміни сили струму:

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t}\ .$$

З урахуванням співвідношення (2) формула (1) набере вигляду

$$dQ = k^2 t^2 R dt\ . \tag{3}$$

Для визначення теплоти, що виділилася за скінченний інтервал часу Δt, вираз (3) потрібно проінтегрувати від t_1 до t_2:

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R \left(t_2^3 - t_1^3 \right).$$

Проведемо обчислення:

$$Q_1 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20 \cdot (1 - 0)\,Дж = 60\,Дж,$$

$$Q_2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20 \cdot (8 - 1)\,Дж = 420\,Дж,$$

отже,

$$Q_2/Q_1 = 420/60 = 7,$$

тобто за другу секунду виділиться теплоти в сім разів більше, ніж за першу.

Відповідь: $Q_1 = 60\,Дж$; $Q_2 = 420\,Дж$; $Q_2/Q_1 = 7$.

Задача 12.6

Обмотка електричного кип'ятильника має дві секції. Якщо ввімкнена лише перша секція, то вода закипає через $t_1 = 15\,хв$, якщо тільки друга, то – через $t_2 = 30\,хв$. Через скільки хвилин закипає вода, якщо обидві секції ввімкнути послідовно, паралельно? Вважати, що все тепло йде лише на нагрівання води.

Розв'язування

$t_{пос} - ?\ t_{пар} - ?$
$t_1 = 15\,хв = 900\,с,$ $t_2 = 30\,хв = 1\,800\,с.$

Для розв'язування задачі скористаємося законом Джоуля – Ленца для випадку сталого струму

$$Q = \frac{U^2}{R} t\ .$$

Якщо ввімкнена лише перша секція,

$$Q = \frac{U^2}{R_1} t_1 \ \Rightarrow\ R_1 = \frac{U^2}{Q} t_1.$$

Якщо ввімкнена лише друга секція,

$$Q = \frac{U^2}{R_2} t_2 \ \Rightarrow\ R_2 = \frac{U^2}{Q} t_2.$$

Якщо обидві секції ввімкнути послідовно,

$$Q = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t_{пос} \ \Rightarrow$$

$$t_{пос} = \frac{Q\left(R_1 + R_2\right)}{U^2} = \frac{Q\left(\dfrac{U^2}{Q} t_1 + \dfrac{U^2}{Q} t_2\right)}{U^2} = t_1 + t_2.$$

Якщо обидві секції ввімкнути паралельно,

$$Q = \frac{U^2}{R_1 R_2}\left(R_1 + R_2\right) t_{пар} \quad \Rightarrow$$

$$t_{пар} = \frac{QR_1R_2}{U^2\left(R_1 + R_2\right)} = \frac{Q\dfrac{U^2}{Q}t_1\dfrac{U^2}{Q}t_2}{U^2\left(\dfrac{U^2}{Q}t_1 + \dfrac{U^2}{Q}t_2\right)} = \frac{t_1t_2}{\left(t_1 + t_2\right)}.$$

Проведемо обчислення

$$t_{пос} = t_1 + t_2 = 15 + 30 = 45\,хв;$$

$$t_{пар} = \frac{t_1t_2}{\left(t_1 + t_2\right)} = \frac{15 \cdot 30}{\left(15 + 30\right)} = 10хв.$$

Відповідь: $t_{пос} = 45\,хв;\ t_{пар} = 10хв.$

Задача 12.7

Визначити напруженість електричного поля в провіднику з алюмінію об'ємом $V = 10\ см^3$, якщо під час проходження по ньому сталого струму за час $t = 4\ хв$ виділилася кількість теплоти $Q = 2{,}3\ кДж$. Питомий опір алюмінію $\rho = 26\ нОм \cdot м$.

Розв'язування

$E - ?$	Закон Джоуля – Ленца
$V = 10\,см^3 = 10^{-5}\,м^3,$ $Q = 2{,}3\,кДж = 2{,}3 \cdot 10^3\ Дж,$ $\rho = 26\,нОм \cdot м = 2{,}6 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м,$ $I = const,$ $t = 4\,хв = 240\,с.$	$Q = I^2Rt$,

.

де Q – кількість теплоти, що виділяється на ділянці кола за час t.

Використаємо закон Ома в диференціальній формі

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

де σ – питома провідність провідника; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля.

Опір однорідного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір речовини провідника; l – його довжина.

Питома провідність σ речовини пов'язана з питомим опором

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

Густина електричного струму дорівнює відношенню сили струму до площі S поперечного перерізу провідника

$$j = \frac{I}{S} \Rightarrow I = jS = \sigma ES,$$

тоді

$$Q = \left(\frac{1}{\rho} ES\right)^2 \rho \frac{l}{S} t = \frac{1}{\rho} E^2 Slt = \frac{1}{\rho} E^2 Vt.$$

Звідси знайдемо напруженість електричного поля

$$Q = \frac{1}{\rho} E^2 Vt \;\Rightarrow\; E = \sqrt{\frac{Q\rho}{Vt}}\,.$$

Проведемо розрахунки

$$E = \sqrt{\frac{2,3 \cdot 10^3 \cdot 2,6 \cdot 10^{-8}}{10^{-5} \cdot 240}} = 0,147\, В/м.$$

Відповідь: E = 0,141 *В/м*.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

12.1 Котушка та амперметр з'єднані послідовно та під'єднані до джерела струму. До клем котушки приєднаний вольтметр з опором $r = 4$ кОм. Амперметр показує силу струму $I = 0{,}3$ А, вольтметр – напругу $U = 120$ В. Визначити опір R котушки. Визначити відносну похибку ε, яка буде допущена під час вимірювання опору, якщо знехтувати силою струму, що проходить через вольтметр.

Відповідь: $R = 444\,Ом$; $\delta = 9{,}9\,\%$.

12.2 ЕРС батареї $\xi = 80\,В$, внутрішній опір $R_i = 5\,Ом$. Зовнішнє електричне коло споживає потужність $N = 100\,Вт$. Визначити силу струму I в колі, напругу U, під якою є зовнішнє коло і його опір R.

Відповідь: $I = 1{,}36\,А$; $U = 73{,}8\,В$; $R = 54\,Ом$.

12.3 Визначити заряд, який пройшов по провіднику з опором $R = 10\,Ом$ за рівномірного збільшення напруги на кінцях провідника від $U_1 = 20\,В$ до $U_2 = 50\,В$ упродовж $t = 30\,с$.

Відповідь: $q = 105\,Кл$.

12.4 Від батареї, ЕРС якої становить $\xi = 600\,В$, потрібно передати енергію на відстань $l = 1\,км$. Потужність, що споживається, дорівнює $N = 5\,кВт$. Знайти мінімальні втрати потужності в мережі, якщо діаметр мідного дроту становить $d = 0{,}5\,см$.

Відповідь: $P_{\min} = 128\,Вт$.

12.5 За зовнішнього опору $R_1 = 8\,Ом$ сила струму в електричному колі $I_1 = 0{,}8\,А$, за опору $R_2 = 15\,Ом$ сила струму $I_2 = 0{,}5\,А$. Визначити силу струму $I_{К.З}$ короткого замикання джерела ЕРС.

Відповідь: $I_{K.З} = 2,54\,A$.

12.6 ЕРС батареї становить $\xi = 24\,B$. Найбільша сила струму, яку може дати батарея, $I_{\max} = 10\,A$. Визначити максимальну потужність $N_{\max}$, що може виділятися в зовнішньому електричному колі.

Відповідь: $N_{\max} = 60\,Bm$.

12.7 Від джерела з напругою $U = 800\,B$ необхідно передати споживачу потужність $N = 10\,кBm$ на деяку відстань. Який найбільший опір може мати лінія передачі, щоб втрати енергії в ній не перевищували 10 % від переданої потужності?

Відповідь: $R = 53\,Ом$.

12.8 Під час вмикання електромотора в мережу з напругою $U = 220\,B$ він споживає струм $I = 5\,A$. Визначити потужність, що використовується мотором і його ККД, якщо опір R обмотки мотора дорівнює 6 Ом.

Відповідь: $N = 1,1\,кBm$; $\eta = 86,4$ %.

12.9 У мережу з напругою $U = 100\,B$ під'єднали послідовно котушку з опором $R_1 = 2\,Ом$ і вольтметр. Вольтметр показує напругу $U_1 = 80\,B$. Коли котушку замінили іншою, вольтметр показав напругу $U_2 = 60\,B$. Визначити опір R_2 іншої котушки.

Відповідь: $R_2 = 5,33\,кОм$.

12.10 ЕРС батареї становить $\xi = 12\,B$. Під час сили струму $I = 4\,A$ ККД батареї дорівнює $\eta = 0,6$. Визначити внутрішній опір r батареї.

Відповідь: $r = 1,2\,Ом$.

12.11 Знайти опір R графітового провідника, виготовленого у вигляді прямого колового зрізаного конуса висотою $h = 20\,см$ і радіусами основ $r_1 = 1{,}2\,см$ і $r_2 = 0{,}8\,см$. Температура провідника дорівнює t =20 °C.

Відповідь: $R =$ 2,58 *мОм*.

12.12 До джерела струму з *ЕРС* $\xi = 1{,}5\,B$ приєднали котушку з опором $R = 0{,}1\,Ом$. Амперметр показав силу струму $I_1 = 0{,}5\,A$. Коли до джерела струму приєднали послідовно ще одне джерело з тією самою ЕРС, сила струму в котушці стала дорівнювати $I_2 = 0{,}4\,A$. Визначити внутрішні опори r_1 і r_2 першого і другого джерел струму.

Відповідь: $r_1 = 2{,}9\,Ом$; $r_2 = 4{,}5\,Ом$.

12.13 Джерела струму з електрорушійними силами $\xi_1 = 10\,B$ та $\xi_2 = 4\,B$ під'єднані до кола (див. рис. 5). Визначити сили струмів, які йдуть по опорах R_2 та R_3, за умови, що $R_1 = R_4 = 2\,Ом$ і $R_2 = R_3 = 4\,Ом$. Опором джерел струму знехтувати.

Відповідь: $I_2 = 0$, $I_3 = -1\,A$.

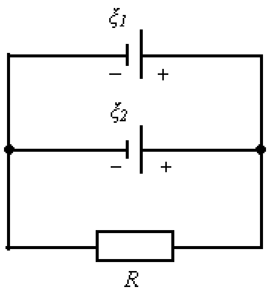


Рисунок 5

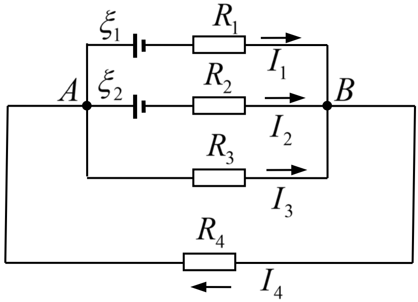


Рисунок 6

12.14 Дві батареї акумуляторів ($\xi_1 = 10\,B$, $r_1 = 1\,Ом$; $\xi_2 = 8\,B$; $r_2 = 2\,Ом$) і реостат $\left(R = 6\,Ом\right)$ з'єднані, як показано на рисунку 6. Знайти силу струму в батареях і реостаті.

Відповідь: $I_1 = 6,4\,A$; $I_2 = 5,8\,A$; $I_R = 0,6\,A$.

12.15 До батареї акумуляторів, ЕРС якої дорівнює $\xi = 2\,B$ і внутрішній опір $r = 0,5\,Ом$, приєднали провідник. Визначити: *а*) опір *R* провідника, за якого потужність, що виділяється в ньому, максимальна; *б*) потужність N, яка в цьому разі вивільняється у провіднику.

Відповідь: $R = 0,5\,Ом$; $P = 2\,Вт$.

12.16 По провіднику опором $R = 3\,Ом$ проходить струм, сила якого зростає. Кількість теплоти, що виділилась у провіднику за час $t = 8\,c$, дорівнює $Q = 200\,Дж$. Визначити заряд *q*, що проходить за цей час уздовж провідника. В початковий момент часу сила струму в провіднику дорівнює нулю.

Відповідь: $q = 20\,Кл$.

12.17 У мідному провіднику об’ємом V = 6 $см^3$ під час проходження по ньому постійного струму за час $t = 1\,хв$ виділилася кількість теплоти $Q = 216\,Дж$. Визначити напруженість *E* електричного поля в провіднику.

Відповідь: $E = 0,1\,В/м$.

12.18 Визначити густину струму *j* в залізному провіднику довжиною $l = 10\,м$, якщо він перебуває під напругою $U = 6\,B$.

Відповідь: $j = 6,1$ $МА/м^2$.

12.19 Дві групи з трьох послідовно з’єднаних елементів з’єднані паралельно. ЕРС кожного елемента дорівнює $\xi = 1,2\,B$, внутрішній опір $r = 0,2\,Ом$. Батарея замкнена на зовнішній опір $R = 1,5\,Ом$. Знайти силу струму *I* в зовнішньому колі.

Відповідь: $I = 2\,A$.

12.20 Два елементи ($\xi_1 = 1,2\,B$; $r_1 = 0,1\,Ом$; $\xi_2 = 0,9\,B$; $r_2 = 0,3\,Ом$) з’єднані однойменними полюсами.

Опір з'єднувальних провідників дорівнює $R = 0,2\,Ом.$ Визначити силу струму I в колі.

Відповідь: $I = 0,5\,A.$

12.21 ЕРС батареї дорівнює $\xi = 20\,B.$ Опір зовнішнього кола дорівнює $R = 2\,Ом,$ сила струму $I = 4\,A.$ Знайти ККД батареї. За якого значення зовнішнього опору ККД буде дорівнювати 99 %?

Відповідь: $\eta = 0{,}4;\ R = 297\,Ом.$

12.22 Обмотка електричного кип'ятильника має дві секції. Якщо ввімкнена лише перша секція, то вода закипає через $t_1 = 15\,хв,$ якщо лише друга, – через $t_2 = 30\,хв.$ Через скільки хвилин закипає вода, якщо обидві секції ввімкнути послідовно, паралельно? Вважати, що все тепло йде лише на нагрівання води.

Відповідь: $t_{пос} = 45\,хв;\ t_{пар} = 10\,хв.$

12.23 Сила струму в провіднику рівномірно зростає від $I_0 = 0$ до деякого максимального значення впродовж часу $\tau = 10\,c.$ За цей час у провіднику виділилася кількість теплоти $Q = 1\,кДж.$ Визначити швидкість наростання струму в провіднику, якщо опір його дорівнює $R = 3\,Ом.$

Відповідь: $\Delta I/\Delta t = 1\ A/c.$

12.24 Сила струму в провіднику опором $R = 100\,Ом$ рівномірно зменшується від $I_0 = 10\,A$ до $I = 0$ за час $t = 30\,c.$ Визначити кількість теплоти, яка виділиться за цей час у провіднику.

Відповідь: $Q = 100\,кДж.$

12.25 Сила струму в провіднику опором $R = 20\,Ом$ збільшується впродовж часу $\Delta t = 2\,c$ за лінійним законом від $I_0 = 0$ до $I = 6\,A$. Визначити теплоту Q_1 і Q_2, що виділилася в цьому провіднику за першу та другу секунди, а також знайти відношення цих величин Q_1/Q_2 .

Відповідь: Q_1 = 60 *Дж*; Q_2 = 420 *Дж*; Q_2/Q_1 = 7.

12.26 Який зовнішній опір R потрібно під'єднати до $n=5$ однакових послідовно з'єднаних джерел ($\xi = 1,5\,B$ і внутрішній опір $r = 0,3\,Ом$), щоб потужність, яка віддається у зовнішнє коло, була максимальною? Чому в цьому разі дорівнюють сила струму в колі та повна потужність батареї?

Відповідь: $R = 1,5\,Ом$; $I = 2,5\,A$; $N = 18,8\,Вт$.

12.27 Визначити струм короткого замикання джерела ЕРС, якщо за зовнішнього опору $R_1 = 50\,Ом$ струм у колі $I_1 = 2,2\,A$, а за $R_2 = 110\,Ом$ – $I_2 = 0,1\,A$.

Відповідь: $I_З = 1,2\,A$.

12.28 Визначити силу струму в підвідних дротах за короткого замикання, якщо на двох опорах $R_1 = 200\,Ом$ і $R_2 = 500\,Ом$ під час вмикання їх по черзі виділяється однакова теплова потужність $N = 200\,Вт$.

Відповідь: I_K = *1,63 А*.

12.29 Визначити: 1) ЕРС ξ джерела струму; 2) його внутрішній опір r, якщо в зовнішньому колі під час сили струму $I_1 = 3\,A$ розвивається потужність $N_1 = 18\,Вт$, а під час сили струму $I_2 = 1\,A$ – потужність $N_2 = 10\,Вт$.

Відповідь: $\xi = 12\,B$; $r = 2\,Ом$.

12.30 Визначити напруженість електричного поля в провіднику з алюмінію об'ємом V = 10 $см^3$, якщо під час проходження по ньому сталого струму за час t = 4 *хв* виділилася кількість теплоти Q = 2,3 *кДж*. Питомий опір алюмінію ρ = 26 *нОм · м*.

Відповідь: E = 0,141 *В/м*.

13 МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ ТА РЕЧОВИНІ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

13.1 Закон Біо – Савара – Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \left[d\vec{l}\, \vec{r} \right] \frac{I}{r^3},$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція поля, яку створює елемент провідника зі струмом; μ – магнітна проникність; μ_0 – магнітна стала $\left(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м\right)$; $d\vec{l}$ – вектор, який за модулем дорівнює довжині dl елемента провідника і збігається за напрямком зі струмом (елемент провідника); I – сила струму; $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від початку елемента провідника до точки, в якій визначається магнітна індукція.

Модуль вектора $d\vec{B}$:

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I \sin\alpha}{r^2} dl,$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{r}$.

13.2 Зв'язок магнітної індукції $\vec{B}$ з напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

або у вакуумі

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}.$$

13.3 Магнітна індукція в центрі колового провідника зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{I}{R},$$

де R – радіус кривини провідника.

13.4 Магнітна індукція поля, що створюється **нескінченно довгим прямим провідником зі струмом,**

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r},$$

де r – відстань від осі провідника.

Магнітна індукція поля, що створюється відрізком провідника,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \right).$$

Позначення зрозумілі з рисунка 1. Вектор індукції $\vec{B}$ перпендикулярний до площини креслення, спрямований до нас, тому зображений у вигляді точки.

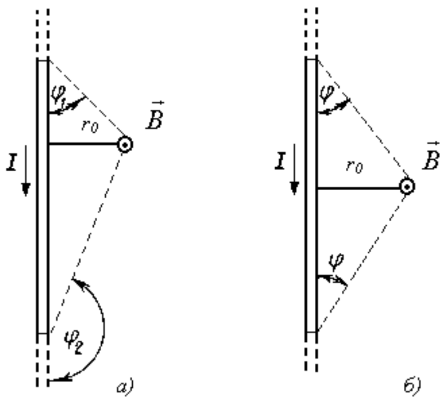


Рисунок 1

За симетричного розміщення кінців провідника відносно точки, в якій визначається магнітна індукція (рис. 1*б*), $-\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 = \cos\varphi$, і тому

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi}\frac{I}{r_0}\cos\varphi .$$

13.5 Магнітна індукція поля, яке створює **соленоїд** у середній його частині (або тороїд на його осі),

$$B = \mu_0 \mu n I ,$$

де n – кількість витків, що припадає на одиницю довжини соленоїда; I – сила струму в одному витку.

13.6 Принцип суперпозиції магнітних полів: магнітна індукція $\vec{B}$ результуючого поля дорівнює векторній сумі магнітних індукцій $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, …, $\vec{B}_n$ полів, що існують у цій точці, тобто

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i .$$

У разі накладання двох полів

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 ,$$

а абсолютне значення вектора магнітної індукції

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos\alpha} ,$$

де α – кут між векторами $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$.

13.7 Закон повного струму для струму провідності

$$\oint H_l dl = I,$$

де H_l – проєкція вектора $\vec{H}$ на напрямок дотичної до контура, що містить елемент dl; I – сила струму, що охоплюється контуром.

Якщо контур охоплює *n* струмів, то

$$\oint H_l dl = \sum_{i=1}^{n} I_i,$$

де $\sum_{i=1}^{n} I_i$ – алгебраїчна сума струмів, які охоплює контур.

13.8 Магнітний потік *Ф* через плоский контур площею *S*:

– у разі однорідного поля $\left(\vec{B} = const\right)$

$$Ф = BS\cos\alpha, \text{ або } Ф = B_n S,$$

де α – кут між вектором нормалі $\vec{n}$ до площини контура й вектором магнітної індукції $\vec{B}$; B_n – проєкція вектора $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$ ($B_n = B\cos\alpha$);

– у разі неоднорідного поля

$$Ф = \int_S B_n dS,$$

де інтегрування ведеться по всій площі *S*.

13.9 Потокозчеплення, тобто повний магнітний потік, зчеплений зі всіма витками соленоїда або тороїда,

$$\psi = N\Phi,$$

де Φ – магнітний потік через один виток; N – кількість витків соленоїда або тороїда.

13.10 Магнітне поле тороїда, осердя якого зроблене з двох частин, виготовлених із речовин із різними магнітними проникностями:

а) магнітна індукція на осьовій лінії тороїда

$$B = \frac{IN}{l_1/(\mu_1\mu_0) + l_2/(\mu_2\mu_0)},$$

де I – сила струму в обмотці тороїда; N – кількість її витків; l_1 і l_2 – довжини першої та другої частин осердя тороїда; μ_1 і μ_2 – магнітні проникності речовин першої й другої частин осердя тороїда; μ_0 – магнітна стала;

б) напруженість магнітного поля на осьовій лінії тороїда в першій і другій частинах осердя

$$H_1 = \frac{B}{\mu_1\mu_0},\ H_2 = \frac{B}{\mu_2\mu_0};$$

в) магнітний потік в осерді тороїда

$$\Phi = \frac{IN}{l_1/\left(\mu_1\mu_0 S\right) + l_2/\left(\mu_2\mu_0 S\right)}.$$

13.11 Зв'язок індукції B **магнітного поля у феромагнетику та напруженості намагнічувального поля** H, наведеного на графіку (рис. 2)

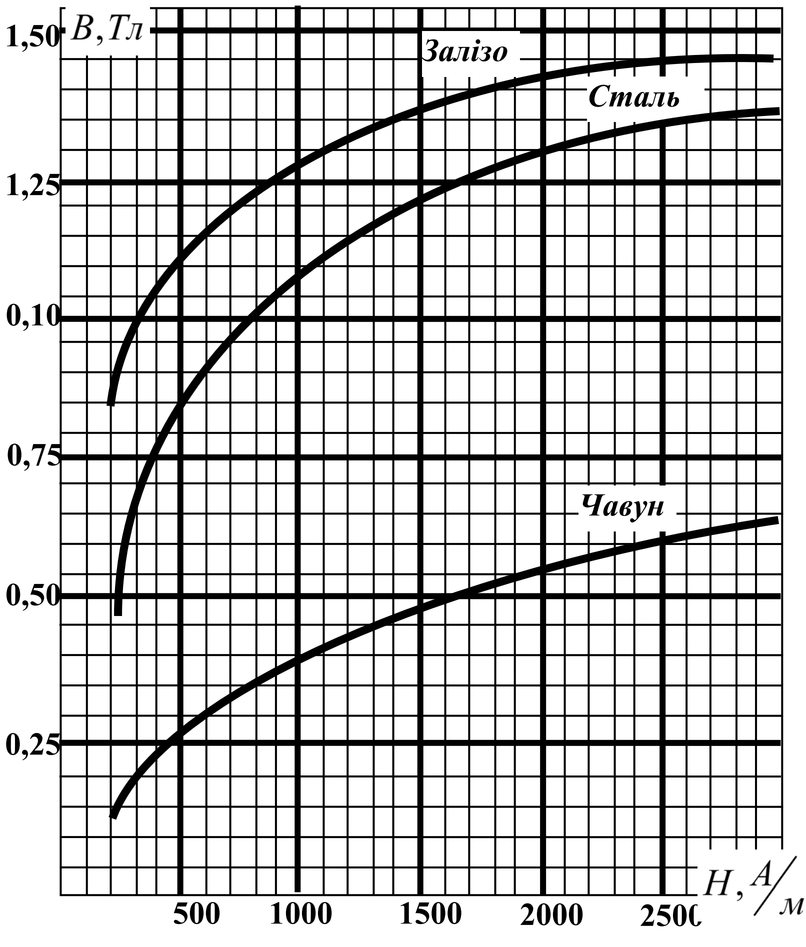


Рисунок 2

13.12 Магнітна проникність μ магнетика пов'язана з магнітною індукцією $\vec{B}$ поля в ньому і напруженістю $\vec{H}$ зовнішнього поля співвідношенням

$$\mu = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \vec{H}}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 13.1

По відрізку прямого дроту довжиною $l = 80\,см$ проходить струм силою $I = 50\,A.$ Визначити магнітну індукцію *B* поля, що створюється цим струмом, у точці A, яка рівновіддалена від кінців відрізка дроту і на відстані $r_0 = 30\,см$ від його середини (рис. 3).

Розв'язування

$B - ?$
$l = 8\,см = 0,08\,м,$ $I = 50\,A,$ $r_0 = 30\,см = 0,3\,м.$

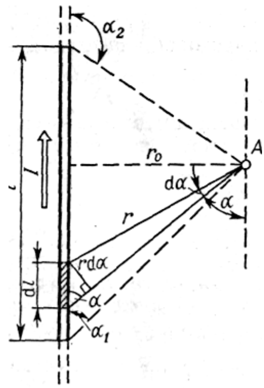


Рисунок 3

Для розв'язування задачі скористаємося законом Біо – Савара – Лапласа та принципом суперпозиції магнітних полів. Закон Біо – Савара – Лапласа дозволяє визначити магнітну індукцію *dB*, що створюється елементом струму *Idl*. Зазначимо, що вектор $d\vec{B}$ у точці А напрямлений за площину креслення. Принцип суперпозиції дозволяє для визначення *B* скористатися геометричним складанням (інтегруванням):

$$\vec{B} = \int_{l} d\vec{B}\,, \tag{1}$$

де символ l означає, що інтегрування проводиться по всій довжині дроту.

Запишемо закон Біо – Савара – Лапласа у векторній формі

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I\left[d\vec{l}\cdot\vec{r}\right]}{4\pi r^3},$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція, що створюється елементом дроту довжиною dl із струмом I у точці, визначеній радіусом-вектором $\vec{r}$; μ_0 – магнітна стала; μ – магнітна проникність середовища, в якому розміщений дріт (у нашому разі $\mu = 1$, оскільки середовище – повітря). Помітимо, що вектори $d\vec{B}$ від різних елементів струму співнапрямлені (рис. 3), тому вираз (1) можна переписати в скалярній формі:

$$B = \int_{L} dB\,, \tag{2}$$

де

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I\sin\alpha}{4\pi r^2}dl\,.$$

У скалярній формі закону Біо – Савара – Лапласа кут α – це кут між елементом струму $Id\vec{l}$ і радіусом-вектором $\vec{r}$. Отже,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{\sin\alpha}{r^2} dl. \tag{3}$$

Перетворимо підінтегральний вираз так, щоб у ньому була лише одна змінна – кут α. Для цього виразимо довжину елемента дроту dl через кут $d\alpha$: $dl = \dfrac{r d\alpha}{\sin\alpha}$ (рис. 3). Врахуємо також, що

$$r = \frac{r_0}{\sin\alpha}.$$

Тоді вираз (3) можна переписати у вигляді

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \, d\alpha,$$

де α_1 і α_2 – межі інтегрування. Виконаємо інтегрування:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right). \tag{4}$$

Помітимо, що за симетричного розміщення точки *A* відносно відрізка дроту $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$. З урахуванням цього формула (4) набере вигляду

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos\alpha_1. \tag{5}$$

Із рисунка 3 видно, що

$$\cos\alpha_1 = \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + r_0^2}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}\,.$$

Підставивши цей вираз у співвідношення (4), знайдемо

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}\,.$$

Після підстановки у вираз числових значень фізичних величин одержимо

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 50}{2\pi\cdot 0{,}3}\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{4\cdot(0{,}3)^2 + (0{,}8)^2}} = 26{,}7\cdot 10^{-6}\,(Тл).$$

Напрямок вектора магнітної індукції поля, що створене прямим струмом, можна визначити за правилом свердлика (правилом правого гвинта).

Перевіримо розмірність одержаної величини (*Тл*):

$$\frac{[\mu_0][I][l]}{[r^3]} = \frac{1Гн\cdot 1А\cdot 1м}{1м^3} = \frac{1Гн\cdot 1А^2}{1А\cdot 1м^2} = \frac{1Дж}{1А\cdot 1м^2} =$$

$$= \frac{1Н\cdot 1м}{1А\cdot 1м^2} = 1\,Тл.$$

Тут ми скористалися визначенням магнітної індукції

$$B = \frac{M_{\max}}{p}.$$

Тоді $1Тл = \dfrac{1Н \cdot 1м}{1А \cdot 1м^2}$.

Відповідь: $B = 26,7 \cdot 10^{-6}$ *Тл.*

Задача 13.2

По тонкому провідному кільцю радіусом $R = 10\,см$ проходить струм $I = 80\,А.$ Знайти магнітну індукцію B у точці A, рівновіддаленій від усіх точок кільця на відстань $r = 20\,см.$

Розв’язування

$B - ?$
$R = 10\,см = 0,1\,м,$ $I = 80\,А,$ $r = 20\,см = 0,2\,м.$

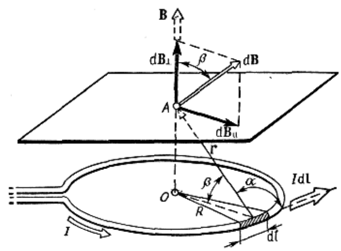


Рисунок 4

Для розв’язування задачі скористаємося законом Біо – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l} \cdot \vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (1)$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція поля, створеного елементом струму $Id\vec{l}$ у точці, що визначена радіусом-вектором $\vec{r}$.

Виділимо на кільці елемент *dl* і від нього в точку А проведемо радіус-вектор $\vec{r}$ (рис. 4). Вектор $d\vec{B}$ направимо відповідно до правила свердлика перпендикулярно до вектора $\vec{r}$.

Згідно з принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ у точці *A* визначається інтегруванням

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B},$$

де інтегрування проводиться за всіма елементами *dl* кільця.

Розкладемо вектор $d\vec{B}$ на дві складові: $d\vec{B}_\perp$, перпендикулярну до площини кільця, і $d\vec{B}_\parallel$, паралельну площині кільця, тобто

$$d\vec{B} = d\vec{B}_\perp + d\vec{B}_\parallel,$$

тоді

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}_\perp + \int_l d\vec{B}_\parallel .$$

Із міркувань симетрії легко помітити, що $\int_l d\vec{B}_\parallel = 0$.

Одночасно вектори $d\vec{B}_\perp$ від різних елементів *dl* співнапрямлені, внаслідок цього результату векторне додавання (інтегрування) можна замінити скалярним

$$B = \int_L dB_\perp,$$

де $dB_\perp = dB\cos\beta$, а $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$ (оскільки елемент $d\vec{l}$ перпендикулярний $\vec{r}$, $\sin\alpha = 1$). Отже,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\cos\beta\int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I\cos\beta\cdot 2\pi R}{4\pi r^2}. \qquad (2)$$

У цьому співвідношенні врахуємо, що $\cos\beta = \frac{R}{r}$ та проведемо скорочення

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{r^3}. \qquad (3)$$

Виразимо всі фізичні величини у (3) в одиницях СІ і проведемо обчислення

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 80\cdot(0,1)^2}{2\cdot(0,2)^3} = 6,28\cdot 10^{-5}\ (Тл).$$

Вектор $\vec{B}$ напрямлений по осі кільця (пунктирна стрілка на рис. 4) відповідно до правила свердлика.

Перевіримо розмірність одержаної величини ($Тл$):

$$\frac{[\mu_0][I][R^2]}{[r^3]} = \frac{1Гн\cdot 1А\cdot 1м^2}{м\cdot 1м^3} = \frac{1Гн\cdot 1А^2}{1А\cdot 1м^2} = \frac{1Дж}{1А\cdot 1м^2} =$$

$$= \frac{1H \cdot 1м}{1A \cdot 1м^2} = 1\,Тл.$$

Відповідь: $B = 6{,}28 \cdot 10^{-5}\ Тл.$

Задача 13.3

Два нескінченно довгих дроти схрещені під прямим кутом (рис. 5). По дротах проходять струми $I_1 = 80\,A$ та $I_2 = 60\,A$. Відстань між дротами дорівнює $d = 10\,см$. Визначити магнітну індукцію $\vec{B}$ у точці A, однаково віддаленій від обох дротів.

Розв’язування

$B - ?$

$I_1 = 80\,A,$
$I_2 = 60\,A,$
$d = 10\,см = 0{,}1\,м.$

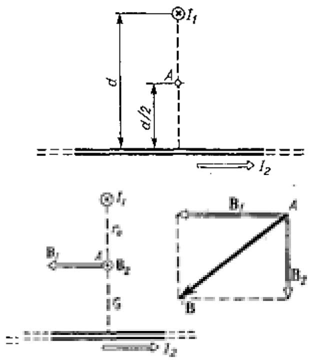


Рисунок 5

Відповідно до принципу суперпозиції магнітних полів магнітна індукція $\vec{B}$ поля, створеного струмами I_1 і I_2 в точці А, визначається векторною сумою полів, створених кожним струмом окремо $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

Помітимо, що вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ взаємно перпендикулярні (їх напрями розміщені за правилом свердлика і зображені в двох проєкціях на рис. 5). Тоді модуль вектора $\vec{B}$ можна визначити за теоремою Піфагора

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}\ , \tag{1}$$

де $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ визначаються за формулами розрахунку магнітної індукції для нескінченно довгого прямолінійного дроту із струмом

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_0} \text{ і } B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_0}\ . \tag{2}$$

У цьому разі $r_0 = \dfrac{d}{2}$. Тоді, підставивши співвідношення (2) у (3), одержимо

$$B = \frac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2}\ . \tag{3}$$

Проведемо обчислення

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi \cdot 10^{-1}}\sqrt{80^2 + 60^2} = 4 \cdot 10^{-4}\ (Тл).$$

Перевіримо розмірність одержаної величини (*Тл*):

$$\frac{[\mu_0][I]}{[r]} = \frac{1Гн \cdot 1А}{м \cdot 1м} = \frac{1Гн \cdot 1А^2}{1А \cdot 1м^2} = \frac{1Дж}{1А \cdot 1м^2} = \frac{1Н \cdot 1м}{1А \cdot 1м^2} = 1\,Тл.$$

Відповідь: $B = 4 \cdot 10^{-4}\,Тл.$

Задача 13.4

Стрижень довжиною $l = 10\,см$ заряджений рівномірно розподіленим зарядом із лінійною густиною $\tau = 0,2\,мкКл/м$. Стрижень обертається з частотою $\nu = 20\,c^{-1}$ відносно осі, що перпендикулярна до нього і проходить через його кінець (рис. 6). Визначити магнітний момент p_m, обумовлений обертанням стрижня.

Розв’язування

$p_m - ?$

$\tau = 0,2\,мкКл/м$,

$l = 10\,см = 0,1\,м$,

$\nu = 20\,c^{-1}$.

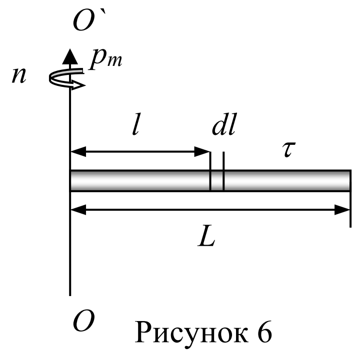


Рисунок 6

Виділимо на стрижні елемент довжиною dl (рис. 6), на цьому елементі є заряд $dq = \tau dl$. Під час обертання стрижня відносно осі ОО` цей заряд обумовлює струм

$$dI = \frac{dq}{T} = dq \cdot \nu, \qquad (1)$$

де T – період обертання стрижня; ν – частота обертання.

Магнітний момент, що створюється струмом dI, за визначенням дорівнює

$$dp_m = SdI \,, \qquad (2)$$

де площу контура S можна знайти зі співвідношення

$$S = \pi l^2 . \qquad (3)$$

Підставимо співвідношення (1) і (3) в (2), тоді знайдемо

$$dp_m = \pi l^2 \cdot \nu dq = \pi l^2 \nu \tau dl.$$

Проінтегруємо цей вираз за довжиною стрижня L:

$$p_m = \int_0^L \pi l^2 \nu \tau dl = \pi \nu \tau \int_0^L l^2 dl = \pi \nu \tau \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} \pi \nu \tau L^3 . \quad (4)$$

Підставивши числові значення фізичних величин у співвідношення (4), одержимо відповідь

$$p_m = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 20 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot (0{,}1)^3 = 4{,}2 \cdot 10^{-9} \left(A \cdot м^2 \right).$$

Перевіримо розмірність одержаної величини ($A \cdot м^2$):

$$[\nu][\tau][L^3] = 1\frac{1}{с} \cdot 1\frac{Кл}{м} \cdot 1м^3 = A \cdot м^2 .$$

Відповідь: $p_m = 4{,}2 \cdot 10^{-9} \, A \cdot м^2$.

Задача 13.5

Диск радіусом $R = 8\,см$ несе рівномірно розподілений по поверхні заряд $\sigma = 100\,нКл/м^2$ (рис. 7). Визначити магнітний момент p_m, обумовлений обертанням диска відносно осі, що проходить через його центр і перпендикулярна до площини диска. Кутова швидкість обертання диска $\omega = 60\,рад/с$.

Розв'язування

$p_m - ?$

$\sigma = 100\,нКл/м^2$,
$R = 8\,см = 0,08\,м$,
$\omega = 60\,рад/с$.

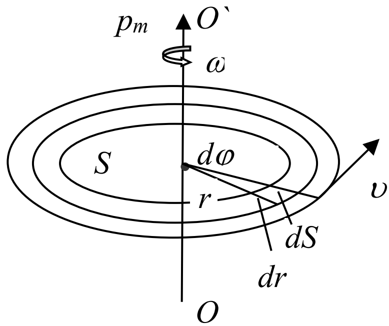


Рисунок 7

Для знаходження магнітного моменту диска зобразимо його у вигляді сукупності тонких кілець шириною $d\vec{r}$ (рис. 7).

Виділимо на диску елемент площі $dS = rd\varphi \cdot dr$ із зарядом dq:

$$dq = \sigma dS = \sigma r d\varphi dr. \qquad (1)$$

Під час обертання диска відбувається переміщення електричних зарядів. Сила струму, що відповідає цьому руху, визначається співвідношенням

$$dI = \frac{dq}{dt}. \qquad (2)$$

З урахуванням рівняння (16) одержимо

$$dI = \frac{\sigma r d\varphi dr}{dt}. \qquad (3)$$

Магнітний момент цього струму визначається співвідношенням

$$dp_m = Sdl, \qquad (4)$$

де площа контура дорівнює $S = \pi r^2$.

Після підстановки виразів (2) і (3) в (4) та з урахуванням того, що за визначенням $\frac{d\varphi}{dt} = \omega,$ одержимо

$$dp_m = \pi r^2 \frac{\sigma r d r d\varphi}{dl} = \pi r^2 \sigma r d r \omega. \qquad (5)$$

Повний магнітний момент диска буде дорівнювати сумі (інтегралу) векторів $d\vec{p}_m$. Оскільки ці вектори мають однаковий напрям, векторну суму можна замінити скалярною. Після інтегрування (5) одержимо

$$p_m = \int_0^R \pi r^2 \sigma \omega r dr = \pi \sigma \omega \int_0^R r^3 dr = \left.\frac{\pi \sigma r^4}{4}\right|_0^R \omega = \frac{\pi \sigma R^4}{4}\omega. \qquad (6)$$

Підставивши числові значень фізичних величин, знайдемо відповідь

$$p_m = \frac{3,14 \cdot 10^{-6} \cdot (8 \cdot 10^{-2})^4 \cdot 60}{4} = 1,93 \cdot 10^{-9} \left(A \cdot м^2 \right).$$

Перевіримо розмірність одержаної величини ($A \cdot м^2$):

$$[\sigma][R^4][\omega] = 1\frac{Кл}{м^2} \cdot 1м^4 \cdot 1\frac{рад}{с} = A \cdot м^2.$$

Відповідь: $p_m = 1,93 \cdot 10^{-9}\, A \cdot м^2$.

Задача 13.6

Чавунне кільце має повітряний зазор, довжина якого $l_0 = 5\,мм$. Довжина середньої лінії кільця $l = 1\,м$. Скільки витків N містить обмотка на кільці, якщо під час сили струму $I = 4\,A$ індукція магнітного поля дорівнює $B = 0,5\,Тл$?

Розв'язування

$N - ?$
$l_0 = 5\,мм = 5 \cdot 10^{-3}\,м,$ $l = 1\,м,$ $B = 0,5\,Тл,$ $I = 4\,A.$

Нехтуючи розсіюванням магнітного потоку, можна вважати, що індукція поля в повітряному зазорі дорівнює індукції поля в чавуні. Скористаємося законом повного струму

$$\oint H_l dl = I .$$

У цьому разі закон повного струму набере вигляду

$$IN = Hl + H_0 l_0 .$$

За графіком (рис. 2) знаходимо, що за $B = 0,5\,Тл$ напруженість магнітного поля в чавуні дорівнює $H = 1,2\,{}^{кА}\!/\!_{м}$. Оскільки для повітря $\mu = 1$, то напруженість поля в повітряному зазорі

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} = 0,4\,МА/м.$$

Тоді число витків

$$N = \frac{Hl + H_0 l_0}{I} = 800.$$

Відповідь: $N = 800$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

13.1 Нескінченно довгий дріт із струмом $I = 10\,A$ зігнутий так, як це показано на рисунку 8. Визначити магнітну індукцію *B* у точці О. Відстань $a = 10\,см$.

Відповідь: *B* = 10 *мкТл*.

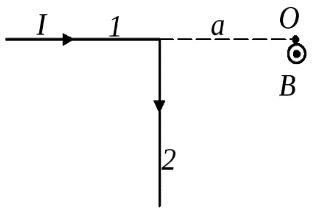


Рисунок 8

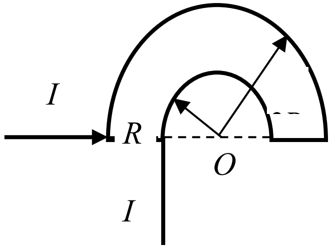


Рисунок 9

13.2 Нескінченно довгий дріт із струмом $I = 100\,A$ зігнутий так, як це показано на рисунку 9. Визначити магнітну індукцію *B* у точці О. Радіус дуги $R = 10\,см$.

Відповідь: *B* = 357 *мкТл*.

13.3 По нескінченно довгому дроту, зігнутому так, як це показано на рисунку 10, проходить струм $I = 200\,A$. Визначити магнітну індукцію *B* у точці О. Радіус дуги $R = 10\,см$.

Відповідь: *B* = 0,5 *мТл*.

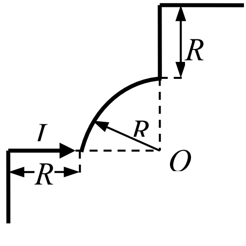


Рисунок 10

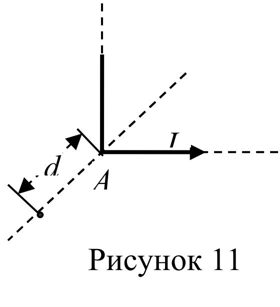


Рисунок 11

13.4 По контуру у вигляді квадрата проходить струм силою $I = 50\,A.$ Довжина сторони квадрата дорівнює $a = 20\,см.$ Визначити магнітну індукцію *B* у точці перетину діагоналей.

Відповідь: *B* = 282 *мкТл*.

13.5 Нескінченно довгий дріт із струмом $I = 50\,A$ зігнутий так, як це показано на рисунку 11. Визначити магнітну індукцію *B* у точці *A,* що лежить на бісектрисі прямого кута на відстані $d = 10\,см$ від його вершини.

Відповідь: *B* = 41 *мкТл*.

13.6 Визначити магнітну індукцію *B* у центрі тонкого дротяного кільця радіусом $R = 10\,см$ зі струмом $I = 10\,A.$

Відповідь: *B* = 62,8 *мкТл*.

13.7 Із тонкого дроту виготовлений коловий виток радіусом $R = 10\,см.$ Визначити індукцію магнітного поля на осі витка в точці, віддаленій від його центра на відстань $a = 10\,см.$ Струм у провіднику $I = 0,5\,A.$

Відповідь: *B* = 1,25 *мкТл*.

13.8 По тонкому кільцю радіусом $R = 20\,см$ проходить струм $I = 100\,A$. Визначити магнітну індукцію *B* на осі кільця в точці *A* (рис. 12). Кут $\beta = \pi/3$.

Відповідь: *B* = 0,2 *мТл*.

13.9 Визначити магнітну індукцію *B* на осі тонкого дротяного кільця радіусом $R = 10\,см$ у точці, розміщеній на відстані $d = 20\,см$ від центра кільця, якщо під час проходження струму по кільцю в центрі кільця індукція B_0 = 50 *мкТл*.

Відповідь: *B* = 4,47 *мкТл*.

13.10 Круговий виток радіусом $R = 15\,см$ зорієнтований так, що перпендикуляр, проведений до дроту з центра витка, є нормаллю до площини витка. Сила струму в дроті $I_1 = 1\,A$, сила струму у витку $I_2 = 5\,A$. Відстань від центра витка до дроту $d = 20\,см.$ Визначити магнітну індукцію в центрі витка.

Відповідь: B = 6,68 *мкТл.*

13.11 По нескінченно довгому дроту, зігнутому так, як це показано на рисунку 13, проходить струм $I = 200\,A$. Визначити магнітну індукцію B у точці О. Радіус дуги $R = 10\,см$.

Відповідь: B = 0,88 *мТл.*

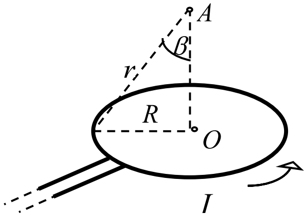


Рисунок 12

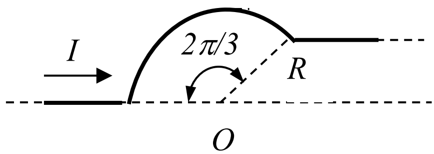


Рисунок 13

13.12 По двох нескінченно довгих дротах, схрещених під прямим кутом, проходять струми I_1 і $I_2 = 2I_1$ $(I_1 = 100\,A)$. Визначити магнітну індукцію B у точці A, яка рівновіддалена від дротів на відстань $d = 10\,см$ (рис. 14).

Відповідь: B = 280 *мкТл.*

13.13 По тонкому кільцю проходить струм $I = 80\,A$. Визначити магнітну індукцію B у точці A, рівновіддаленій від точок кільця на відстань $r = 10\,см$ (рис. 12). Кут $\beta = \pi/6$.

Відповідь: B = 126 *мкТл.*

13.14 По двох нескінченно довгих прямих паралельних дротах проходять однакові струми $I = 60\,A$. Визначити магнітну індукцію B у точці A (рис. 15), що рівновіддалена від дротів на відстань $d = 10\,см.$ Кут $\beta = \pi/3$.

Відповідь: B = 120 мкТл.

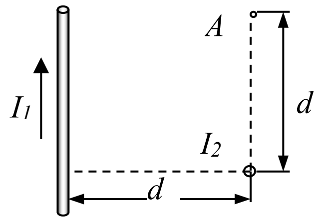


Рисунок 14

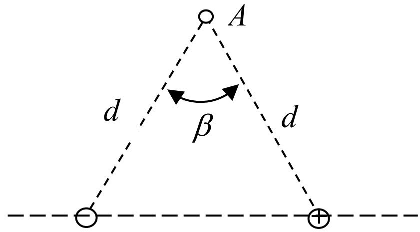


Рисунок 15

13.15 По нескінченно довгому прямому дроту, зігнутому під кутом $\alpha = 120^\circ$, проходить струм силою $I = 50\,A$. Знайти магнітну індукцію B у точках, що лежать на бісектрисі кута і віддалені від його вершини на відстань $a = 5\,см$.

Відповідь: $B_1 = 120\,мкТл$; $B_2 = 350\,мкТл$.

13.16 По двох нескінченно довгих прямих паралельних дротах, що розміщені на відстані $a = 10\,см$ один від одного у вакуумі, проходять струми $I_1 = 20\,A$ і $I_2 = 30\,A$ однакового напряму. Визначити магнітну індукцію поля, що створюється струмами в точках, які лежать на прямій, що з'єднує обидва дроти, якщо: 1) точка А лежить на відстані $r_1 = 2\,см$ лівіше лівого дроту; 2) точка В лежить на відстані $r_2 = 3\,см$ правіше правого дроту; 3) точка С лежить на відстані $r_3 = 4\,см$ правіше лівого дроту.

Відповідь: $B_A =$ 0,25 $мТл$; $B_B =$ 0,23 $мТл$; $B_C =$ 0.

13.17 По двох нескінченно довгих прямих паралельних провідниках, відстань між якими $d = 15\,см$, проходять струми $I_1 = 70\,A$ і $I_2 = 50\,A$ в протилежних напрямах. Визначити магнітну індукцію B у точці, віддаленій на $r_1 = 20\,см$ від першого і $r_2 = 30\,см$ від другого провідника.

Відповідь: $B = 142{,}8\ мкТл$.

13.18 Визначити магнітну індукцію в центрі кругового витка з дроту радіусом $R = 10\,см$, по якому проходить струм $I = 1\,A$.

Відповідь: $B = 6{,}28\ мкТл$.

13.19 По поверхні диска радіусом $R = 15\,см$ рівномірно розподілений заряд $q = 0{,}2\,мкКл$. Диск обертається з кутовою швидкістю $\omega = 30\,рад/с$ відносно осі, яка перпендикулярна до площини диска й проходить через його центр. Визначити магнітний момент p_m, обумовлений обертанням диска.

Відповідь: $p_m = 34\ нА \cdot м^2$.

13.20 Визначити циркуляцію вектора індукції магнітного поля вздовж контура, який охоплює струми $I_1 = 10\,A$ і $I_2 = 15\,A$, що йдуть в одному напрямку, та струм $I_3 = 20\,A$, що йде в протилежному напрямку.

Відповідь: $\oint B_l dl = 6{,}28\,мкТл \cdot м$.

13.21 За перерізом провідника рівномірно розподілений струм, густина якого становить $j = 2\,МА/м^2$. Знайти циркуляцію вектора напруженості вздовж кола радіусом $R = 5\,мм$, яке проведено всередині провідника та зорієнтовано так, що його площина становить кут $\alpha = 30^\circ$ із вектором густини струму.

Відповідь: $\oint H_l dl = 78{,}6\,A$.

13.22 Знайти магнітний потік Ф, що створюється соленоїдом із площею перерізу $S = 10\,см^2$, якщо він містить $n = 10$ витків на кожний сантиметр його довжини. Сила струму в соленоїді $I = 20\,A$.

Відповідь: $\Phi = 25{,}2\,мкВб$.

13.23 Плоский контур, площа якого дорівнює $S = 25\,см^2$, розміщений в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,04\,Тл.$ Визначити магнітний потік Ф, який пронизує контур за умови, що його площина становить кут $\alpha = 30^\circ$ із лініями індукції магнітного поля.

Відповідь: $\Phi = 50\,мкВб.$

13.24 Соленоїд, довжина якого $l = 1\,м$ і площа поперечного перерізу $S = 16\,см^2$, містить $N = 2\,000$ витків. Визначити потокозчеплення Ψ за умови, що струм в обмотці соленоїда становить $I = 10\,A.$

Відповідь: $\Psi = 80,5\,мкВб \cdot виток.$

13.25 В одній площині з довгим прямим провідником, по якому проходить струм $I = 50\,A,$ міститься прямокутна рамка так, що її більші сторони довжиною $l = 65\,см$ паралельні провіднику, а відстань від провідника до найближчої з цих сторін дорівнює її ширині. Знайти магнітний потік, що пронизує рамку.

Відповідь: $\Phi = 4,5\,мкВб.$

13.26 Соленоїд, довжина якого $l = 50\,см,$ містить $N = 2\,000$ витків. До соленоїда прикладена напруга $U = 60\,B.$ Визначити індукцію магнітного поля в соленоїді, якщо опір його обмоток дорівнює $R = 120\,Ом.$

Відповідь: $B = 2,5\,мкТл.$

13.27 Визначити індукцію B і напруженість H магнітного поля на осі тороїда без осердя, обмотка якого містить $N = 200$ витків. Струм в обмотці $I = 5\,A.$ Зовнішній діаметр тороїда дорівнює $d_1 = 30\,см,$ внутрішній – $d_2 = 20\,см.$

Відповідь: $H = 1,37\,кА/м;\ B = 1,6\,мТл.$

13.28 На залізне кільце намотано в один шар $N = 500$ витків дроту. Середній діаметр кільця дорівнює $d = 25\,см.$ Визначити магнітну індукцію B у залізі та магнітну проникність μ заліза за умови, що сила струму в обмотці становить: 1) $I = 0,5\,A$; 2) $I = 2,5\,A$.

Примітка. Для визначення магнітної проникності скористатися графіком рисунка 2

Відповідь: 1) $B = 1\,Тл,$ $\mu = 2,5 \cdot 10^3$; 2) $B = 1,4\,Тл,$ $\mu = 700.$

13.29 Замкнутий соленоїд (тороїд) із стальним осердям містить $n = 10$ на кожний сантиметр довжини. По соленоїду проходить струм, сила якого становить $I = 2\,A.$ Визначити магнітний потік в осерді, якщо площа його перерізу $S = 4\,см^2$.

Примітка. Для визначення магнітної проникності скористатися графіком рисунка 2

Відповідь: $\Phi = 0,52\,мВб.$

13.30 Чавунне кільце має повітряний зазор, довжина якого $l_0 = 5\,мм.$ Довжина середньої лінії кільця $l = 1\,м.$ Скільки витків N містить обмотка на кільці, якщо під час сили струму $I = 4\,A$ індукція магнітного поля дорівнює $B = 0,5\,Тл$?

Відповідь: $N = 800.$

14 СИЛА ЛОРЕНЦА ТА СИЛА АМПЕРА

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

14.1 Сила Ампера

$$d\vec{F} = \left[d\vec{l}, \vec{B} \right] I,$$

де I – сила струму; $d\vec{l}$ – вектор, який дорівнює за модулем довжині dl елементу провідника та збігається за напрямком зі струмом; $\vec{B}$ – магнітна індукція поля.

Модуль сили Ампера

$$dF = BIdl \sin \alpha,$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{B}$.

14.2 Сила взаємодії двох прямих нескінченно довгих паралельних провідників зі струмами I_1 і I_2, які розміщені на відстані d один від одного, що діє на відрізок провідника довжиною l, визначається за формулою

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l.$$

14.3 Магнітний момент контура зі струмом

$$\vec{p}_m = I\vec{S},$$

де $\vec{S}$ – вектор, який дорівнює за модулем площі S, яку охоплює контур, і збігається за напрямком із нормаллю до його площини.

14.4 Механічний момент, який діє на контур зі струмом, розміщений в однорідному магнітному полі

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right].$$

Модуль механічного моменту

$$M = p_m B \sin\alpha,$$

де α – кут між векторами $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$.

14.5 Потенціальна енергія контура зі струмом у магнітному полі

$$W_n = \vec{p}_m \vec{B} = p_m B \cos\alpha.$$

14.6 Сила, яка діє на контур зі струмом у магнітному полі (змінному вздовж осі x),

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos\alpha,$$

де $\frac{\partial B}{\partial x}$ – зміна магнітної індукції вздовж осі x, розрахована на одиницю довжини; α – кут між векторами $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$.

14.7 Сила Лоренца $\vec{F}$, що діє на заряд q, який рухається зі швидкістю $\vec{\mathrm{v}}$ у магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ (сила), виражається формулою

$$\vec{F} = q\left[\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}\right].$$

Модуль сили Лоренца

$$F = q\text{v}B\sin\alpha,$$

де α – кут, який утворений вектором швидкості $\vec{\text{v}}$ руху частинки та вектором $\vec{B}$ індукції магнітного поля.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 14.1

По трьом паралельним провідникам, які розміщені на однаковій відстані $a = 10\,см$ однин від одного, проходять однакові струми $I = 100\,A$. У двох провідниках напрямки струмів збігаються. Визначити силу F, що діє на відрізок довжини кожного провідника $l = 1\,м$.

Розв'язування

$F - ?$

$a = 10\,см = 0{,}1\,м$,
$I = 100\,A$,
$l = 1\,м$.

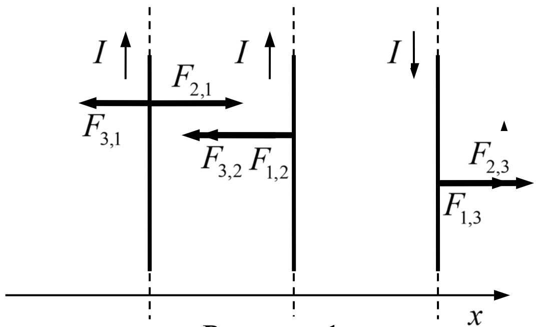


Рисунок 1

Сила взаємодії двох прямих нескінченно довгих паралельних провідників зі струмами I_1 і I_2, які розміщені на відстані d один від одного, що діє на відрізок провідника довжиною l, визначається за формулою

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l,$$

де μ_0 – магнітна стала, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,Гн/м$; μ – магнітна проникність середовища, у цьому разі $\mu = 1$; d – відстань між провідниками.

На кожен із провідників у нашій задачі діють по дві сили так, як зображено на рисунку 1. Запишемо вирази для модуля кожної з цих сил, враховуючи, що згідно з умовою задачі $I_1 = I_2 = I_3 = I$,

$$F_{2,1} = F_{1,2} = F_{3,2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{a}l, \qquad F_{3,1} = F_{1,3} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2a}l.$$

Тоді сила, яка діє на перший провідник,

$$F_1 = F_{2,1} - F_{3,1} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{a}l - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2a}l = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2a}l, \qquad (1)$$

на другий –

$$F_2 = -F_{1,2} - F_{1,3} = -2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{a}l, \qquad (2)$$

та на третій –

$$F_3 = F_{1,3} - F_{2,3} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{a}l + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2a}l = 3\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2a}l. \qquad (3)$$

Виразимо числові значення величин в одиницях СІ і підставимо в (1), (2), (3):

$$F_1 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\frac{100^2}{2\cdot 0,1}l = 0,01H,$$

$$F_2 = -2\frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\frac{100^2}{0,1}l = -0,04(H),$$

$$F_3 = 3\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi}\frac{100^2}{2 \cdot 0{,}1} l = 0{,}03 \left(H \right).$$

Перевіримо розмірність одержаної величини $\left(H \right)$:

$$\left[\mu_0 \right] \frac{\left[I^2 \right]}{\left[a \right]} \left[l \right] = Гн/м \cdot \frac{A^2}{м} \cdot м = \frac{Вб}{A} \cdot \frac{A^2}{м} =$$

$$= Тл \cdot м^2 \cdot \frac{A}{м} = \frac{H}{A \cdot м} \cdot A \cdot м = H.$$

Відповідь: $F_1 = 0{,}01H$; $F_2 = -0{,}04H$; $F_3 = 0{,}03H$.

Задача 14.2

Плоский квадратний контур (рис. 2) із стороною $a = 10\,см$, по якому проходить струм $I = 100\,A$, вільно встановився в однорідному магнітному полі $\left(B = 1Тл \right)$. Визначити роботу A, яка виконується зовнішніми силами під час повороту контура відносно осі, що проходить через середину його протилежних сторін, на кут $\varphi_1 = 90^\circ$. Під час повороту контура сила струму, що підтримується в ньому, не змінюється.

Розв’язування

$A - ?$
$a = 10\,см = 0{,}1\,м$,
$B = 1Тл$,
$I = 100\,A$,
$\varphi_1 = 90^\circ$.

Як відомо, на контур із струмом у магнітному полі діє момент сили (рис. 2)

$$M = p_m B \sin\varphi, \qquad (1)$$

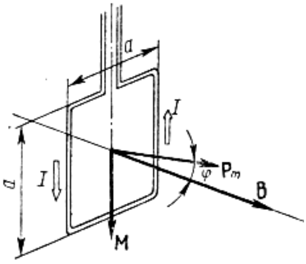


Рисунок 2

де $p_m = IS = Ia^2$ – магнітний момент контура; B – магнітна індукція; φ – кут між векторами $\vec{p}_m$ (який направлений по нормалі до контура) і $\vec{B}$.

За умовою задачі в початковому положенні контур вільно встановився в магнітному полі. Водночас момент сили дорівнює нулю ($M = 0$), а, отже, $\varphi = 0$, тобто вектори $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$ співнапрямлені. Якщо зовнішні сили виведуть контур із положення рівноваги, то момент сил, що виникне (див. рис. 2), прагнутиме повернути контур у початкове положення. Проти цього моменту і здійснюється робота зовнішніми силами. Оскільки момент сил є змінним (залежить від кута повороту φ), то для розрахунку роботи застосуємо формулу роботи в диференціальній формі $dA = Md\varphi$. Тоді

$$dA = IBa^2 \sin\varphi d\varphi. \qquad (2)$$

Взявши інтеграл від виразу (2), знайдемо роботу під час повороту рамки на кінцевий кут:

$$A = IBa^2 \int_0^{\varphi} \sin\varphi d\varphi. \qquad (3)$$

Робота під час повороту на кут $\varphi_1 = 90^\circ$ дорівнює

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin\phi d\phi = IBa^2 \left(-\cos\phi\right)\Big|_0^{\pi/2} = IBa^2. \qquad (4)$$

Виразимо числові значення величин в одиницях СІ і підставимо в (4):

$$A_1 = 100 \cdot 1 \cdot (0{,}1)^2 = 1 Дж.$$

Перевіримо розмірність одержаної величини $(Дж)$:

$$[A][B][a] = 1A \cdot 1Тл \cdot 1м^2 = 1A \cdot \frac{1H}{1A \cdot 1м} \cdot 1м^2 = 1H \cdot 1м = 1Дж.$$

Відповідь: $A_1 = 1\ Дж.$

Задача 14.3

В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 1Тл$ розміщена квадратна рамка зі стороною $a = 10\,см,$ по якій проходить струм $I = 4\,A.$ Площа рамки перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Визначити роботу, яку необхідно витратити для повороту рамки відносно осі, що проходить через середини її протилежних сторін: 1) на 90°; 2) на 180°; 3) на 360°.

$A - ?$
$a = 10\,см = 0{,}1\,м,$
$I = 4\,A,$
$B = 1Тл,$
$\varphi_0 = 0; \varphi_1 = \pi/2,$
$\varphi_2 = \pi; \varphi_3 = 2\pi.$

Розв'язування

Робота з переміщення замкнутого контура зі струмом у магнітному полі

$$A = I\Delta\Phi, \qquad (1)$$

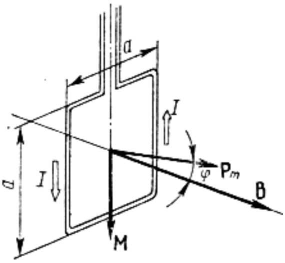


Рисунок 3

де $\Delta\Phi$ – зміна магнітного потоку, який пронизує поверхню, обмежену контуром; I – сила струму в контурі.

Магнітний потік Φ через плоский контур площею S – у разі однорідного поля

$$\Phi = BS\cos\alpha, \qquad (2)$$

де α – кут між вектором нормалі $\vec{n}$ до площини контура і вектором магнітної індукції (рис. 3). Площа витка

$$S = a^2. \qquad (3)$$

За умовою задачі в початковому положенні площа рамки перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Водночас кут $\alpha = \varphi_0 = 0$. Це означає, що

$$\Phi_1 = BS\cos\varphi_0,$$

тоді за формулою (2)

$$\Phi_2 = BS\cos(\varphi_0 - \varphi_1),$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS\cos(\varphi_0 - \varphi_1) - BS\cos\varphi_0,$$

$$\Delta\Phi == BS\left[\cos(\varphi_0 - \varphi_1) - \cos\varphi_0\right]. \qquad (4)$$

З урахуванням (3) і (4) співвідношення (1) набере вигляду

$$A = IBa^2\left[\cos\left(\varphi_0 - \varphi_1\right) - \cos\varphi_0\right]. \qquad (5)$$

Виразимо числові значення величин в одиницях СІ і підставимо в (5):

$$A_1 = 4\cdot 1\cdot 0{,}1^2\left[\cos\left(0-\frac{\pi}{2}\right)-1\right] = -\,4\cdot 1\cdot 0{,}1^2\cos 0^0 = -\,0{,}04\,Дж;$$

$$A_2 = 4\cdot 1\cdot 0{,}1^2\left[\cos\left(0-\pi\right)-1\right] = -\,0{,}08\,Дж;$$

$$A_3 = 4\cdot 1\cdot 0{,}1^2\left[\cos\left(0-2\pi\right)-1\right] = 4\cdot 1\cdot 0{,}1^2\left(1-1\right) = 0.$$

Перевіримо розмірність одержаної величини ($Дж$):

$$[A][B][d^2] = 1A\cdot 1Тл\cdot 1м^2 = 1A\cdot\frac{1H}{1A\cdot 1м}\cdot 1м^2 = 1H\cdot 1м = 1Дж.$$

Відповідь: $A_1 = 0{,}04\,Дж$; $A_2 = 0{,}08\,Дж$; $A_3 = 0$.

Задача 14.4

Протон, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів $U = 600\,B,$ влетів в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0{,}3\,Тл$ і почав рухатися по колу. Визначити радіус R кола.

Розв’язування

$R - ?$
$U = 600\,B,$ $B = 0{,}3\,Тл.$

Рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі буде відбуватися по колу лише в тому разі, коли частинка влетить у магнітне поле перпендикулярно до ліній магнітної індукції, $\vec{v} \perp \vec{B}$.

Оскільки сила Лоренца перпендикулярна до вектора $\vec{v}$, то вона надасть частинці (протону) нормальне прискорення a_n. Згідно з другим законом Ньютона

$$\vec{F}_л = m\vec{a}_n, \tag{1}$$

де m – маса протона.

На рисунку 4 траєкторія протона суміщена з площиною креслення і зазначений (довільно) напрям вектора $\vec{v}$. Силу Лоренца спрямуємо перпендикулярно до вектора $\vec{v}$ до центра кола (вектори $\vec{a}_n$ і $\vec{F}_л$ співнапрямлені). Використовуючи правило лівої руки, визначимо напрям магнітних силових ліній (напрям вектора $\vec{B}$).

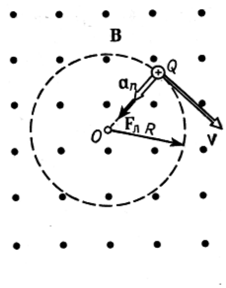


Рисунок 4

Перепишемо вираз (1) у скалярній формі (в проєкції на напрямок радіуса):

$$F_л = ma_n. \tag{2}$$

Модуль сили Лоренца дорівнює $F = q\text{v}B\sin\alpha$. У цьому разі $\vec{v} \perp \vec{B}$ і $\sin\alpha = 1$, тоді $F = q\text{v}B$. Оскільки нормальне прискорення $a_n = \dfrac{\text{v}^2}{R}$, то співвідношення (2) набере вигляду

$$q\text{v}B = \frac{m\text{v}^2}{R}.$$

Звідси знайдемо радіус кола:

$$R = \frac{m\text{v}}{qB}. \qquad (3)$$

Зазначимо, що $m\text{v} = p$, де p – імпульс протона, вираз (3) можна записати у вигляді

$$R = \frac{p}{qB}. \qquad (4)$$

Імпульс протона знайдемо, скориставшись зв'язком між роботою сил електричного поля і зміною кінетичної енергії протона, тобто $A = \Delta W_K$, або

$$q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = W_{K2} - W_{K1},$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ – прискорювальна різниця потенціалів (або прискорювальна напруга *U*); W_{K2}, W_{K1} – початкова й кінцева кінетичні енергії протона.

Нехтуючи початковою кінетичною енергією протона $W_{K1} \approx 0$ і виразивши кінетичну енергію W_{K2} через імпульс *p*, одержимо

$$qU = \frac{p^2}{2m}.$$

Знайдемо з цього співвідношення імпульс $p=\sqrt{2mqU}$ і підставимо його у формулу (4):

$$R=\frac{\sqrt{2mqU}}{qB},$$

або

$$R=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}. \qquad (5)$$

Підставивши у цей вираз числові значення фізичних величин, проведемо обчислення R:

$$R=\frac{1}{0,3}\sqrt{\frac{2\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot 600}{1,6\cdot 10^{-19}}}=11,8\ мм.$$

Переконаємося в тому, що права частина рівності дає одиницю довжини $(м)$:

$$\frac{1}{[B]}\sqrt{\frac{[m][U]}{[q]}}=\frac{1}{1\,Тл}\sqrt{\frac{1\,кг\cdot 1\,В}{1\,Кл}}=\frac{1}{1\,Тл}\sqrt{\frac{1\,кг\cdot 1\,Дж}{1\,Кл\cdot 1\,Кл}}=$$

$$=\frac{1А\cdot м^2}{1А\cdot 1с}\sqrt{\frac{1\,кг\cdot 1с^2}{1\,кг\cdot 1м^2}}=1\,м.$$

Відповідь: $R=11,8\cdot 10^{-3}\ м.$

Задача 14.5

Електрон рухається в однорідному магнітному полі ($B = 10\,мТл$) по гвинтовій лінії, радіус якої дорівнює $R = 1\,см$ і крок $h = 6\,см$ (рис. 5). Визначити період T обертання електрона і його швидкість v.

Розв'язування

$T - ?$ $\text{v} - ?$

$B = 10\,мТл = 10^{-2}\,Тл,$

$R = 1\,см = 10^{-2}\,м,$

$h = 6\,см = 6 \cdot 10^{-2}\,м.$

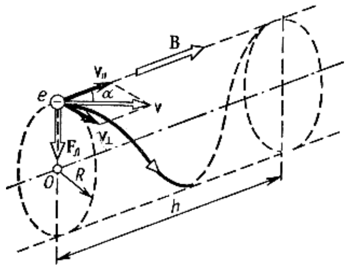


Рисунок 5

Електрон рухатиметься по гвинтовій лінії, якщо він влітає в однорідне магнітне поле під деяким кутом $(\alpha \neq \pi/2)$ до ліній магнітної індукції. Розкладемо, як це показано на рисунок 5, швидкість $\vec{\text{v}}$ електрона на дві складові: паралельну вектору $\vec{B}$ $(\text{v}_{\parallel})$ і перпендикулярну до нього $(\text{v}_{\perp})$. Швидкість $\text{v}_{\parallel}$ у магнітному полі не змінюється й забезпечує переміщення електрона вздовж силової лінії. Швидкість $\text{v}_{\perp}$ унаслідок дії сили Лоренца буде змінюватися лише за напрямом ($F_Л \perp \text{v}_{\perp}$) (за відсутності паралельної складової $(\text{v}_{\parallel} = 0)$ рух електрона відбувався б по колу в площині, перпендикулярній до магнітних силових ліній). Отже, електрон бере участь одночасно в двох рухах:

рівномірному переміщенні зі швидкістю $v_{\parallel}$ і рівномірному русі по колу зі швидкістю $v_{\perp}$.

Період обертання електрона пов'язаний із перпендикулярною складовою швидкості співвідношенням

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}. \qquad (1)$$

Знайдемо $v_{\perp}$. Для цього скористаємося тим, що сила Лоренца надає електрону нормального прискорення $a_n = \frac{v_{\perp}^2}{R}$. Згідно з другим законом Ньютона можна написати

$$F_{Л} = ma_n$$

або

$$|e| v_{\perp} B = \frac{m v_{\perp}^2}{R}, \qquad (2)$$

де $v_{\perp} = v \sin\alpha$.

Із цього співвідношення знайдемо $v_{\perp}$ та підставимо в (1), після простих перетворень одержимо

$$T = 2\pi \frac{m}{|e| B}. \qquad (3)$$

Модуль швидкості v, як це показано на рисунку 5, можна виразити через $v_{\perp}, v_{\parallel}$:

$$\mathrm{v}=\sqrt{\mathrm{v}_{\perp}^{2}=\mathrm{v}_{\|}^{2}}.$$

Із співвідношення (2) виразимо перпендикулярну складову швидкості:

$$\mathrm{v}_{\perp}=\frac{|e|BR}{m}.$$

Паралельну складову швидкості $\mathrm{v}_{\|}$ знайдемо з таких міркувань. За час, що дорівнює періоду обертання *T*, електрон пройде вздовж силової лінії відстань, що дорівнює кроку гвинтової лінії, тобто $h=T\,\mathrm{v}_{\|}$, звідси

$$\mathrm{v}_{\|}=\frac{h}{T}.$$

Підставивши замість *T* праву частину співвідношення (3), одержимо

$$\mathrm{v}_{\|}=\frac{|e|BR}{2\pi m}.$$

Отже, модуль швидкості електрона дорівнює

$$\mathrm{v}=\sqrt{\mathrm{v}_{\perp}^{2}=\mathrm{v}_{\|}^{2}}=\frac{|e|B}{m}\sqrt{R^{2}+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2}}. \tag{4}$$

Проведемо обчислення періоду обертання та швидкості електрона:

$$T = \frac{2\pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{-9} = 3{,}57\ нс;$$

$$\mathrm{v} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} \left[0{,}01^2 + \left(\frac{0{,}06}{2\pi} \right)^2 \right] = 2{,}46 \cdot 10^7\ м/с.$$

Переконаємося в тому, що права частина рівності (3) дає одиницю часу (с), а співвідношення (4) – одиницю швидкості (м/с):

$$\frac{[m]}{[e][B]} = \frac{1\,кг}{1\,Кл \cdot 1\,Тл} = \frac{1\,кг \cdot А \cdot м^2}{1\,А \cdot с \cdot Н \cdot м} = \frac{1\,кг \cdot с^2 \cdot м^2}{1\,с \cdot кг \cdot м} = 1\,с.$$

Оскільки R і h мають однакову одиницю вимірювання – метр (м), у квадратних дужках ми поставимо лише одну з величин (наприклад, R):

$$\frac{[e][B]}{[m]}\left[R^2\right]^{1/2} = \frac{1Кл \cdot 1Тл}{1кг}(м^2)^{1/2} = \frac{1А \cdot с \cdot Н \cdot м \cdot м}{кг \cdot А \cdot м^2} =$$

$$= \frac{1Н \cdot с}{1кг} = \frac{1кг \cdot м \cdot с}{1кг \cdot с^2} = 1\,м/с.$$

Відповідь: $T = 3{,}57 \cdot 10^{-9}\ с$, $\mathrm{v} = 2{,}46 \cdot 10^7\ м/с$.

Задача 14.6

Альфа-частинка пройшла прискорювальну різницю потенціалів $U = 104\,B$ і влетіла в схрещені під прямим кутом електричне ($E = 10$ $кВ/м$) і магнітне $\left(B = 0{,}1Тл\right)$ поля. Знайти відношення заряду альфа-частинки до її маси, якщо, рухаючись перпендикулярно до обох полів, частинка не відхиляється від прямолінійної траєкторії (рис. 6).

Розв’язування

$\dfrac{q}{m} - ?$

$U = 104\,B,$

$E = 10\,кВ/м = 10^4\ В/м,$

$B = 0{,}1Тл.$

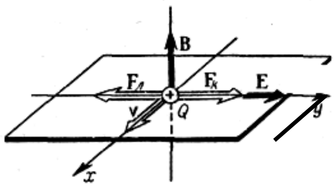


Рисунок 6

Для того щоб знайти відношення заряду q альфа-частинки до її маси m, скористаємося зв’язком між роботою сил електричного поля та зміною кінетичної енергії частинки:

$$qU = \frac{m\text{v}^2}{2}.$$

Звідси

$$\frac{q}{m} = \frac{\text{v}^2}{2U}. \qquad (1)$$

Швидкість v альфа-частинки знайдемо з таких міркувань. У схрещених електричному та магнітному полях на заряджену частинку, що рухається, діють дві сили:

а) сила Лоренца $F_Л = q\mathrm{v}B,$ спрямована перпендикулярно до швидкості $\vec{\mathrm{v}}$ і вектора магнітної індукції $\vec{B}$;

б) кулонівська сила $F_K = qE,$ співнапрямлена з вектором напруженості $\vec{E}$ електростатичного поля $\left(q > 0\right)$.

На рисунку 6 спрямуємо вектор магнітної індукції $\vec{B}$ вздовж осі Oz, швидкість v – у позитивному напрямі осі Ox, тоді $F_ё$ і F_K будуть спрямовані так, як показано на рисунку.

Альфа-частинка рухається прямолінійно за умови, якщо геометрична сума сил $F_Л$ = F_K дорівнює нулю. В проєкції на вісь Oy одержимо таку рівність (водночас враховано, що $\vec{\mathrm{v}} \perp \vec{B}$ і $\sin\alpha = 1$):

$$qE - q\mathrm{v}B = 0 .$$

Звідси

$$\mathrm{v} = \frac{E}{B}. \tag{2}$$

Підставивши цей вираз у формулу (1), одержимо

$$\frac{q}{m} = \frac{E^2}{2UB^2} . \tag{3}$$

Проведемо обчислення

$$\frac{q}{m} = \frac{\left(10^4\right)^2}{2 \cdot 104 \cdot 0,1^2} = 4,81 \cdot 10^7 = 48,1 МКл/кг.$$

Переконаємося в тому, що права частина рівності дає одиницю питомого заряду (*Кл/кг*) :

$$\frac{\left[E^2\right]}{\left[U\right]\left[B^2\right]} = \frac{\left(1\,В/м\right)^2}{1\,В \cdot (1\,Тл)^2} = \frac{(1\,В \cdot А)^2}{1\,В \cdot (1\,Н)^2} = \frac{1\,Дж \cdot Кл}{(1\,Н \cdot с)^2} =$$

$$= \frac{1\,Кл \cdot м}{1\,Н \cdot с^2} = 1\,Кл/кг.$$

Відповідь: $\frac{q}{m} = 48,1 МКл/кг.$

Задача 14.7

Тонке кільце масою $m = 10 г$ і радіусом $R = 8 см$ заряджене рівномірно з лінійною густиною $\tau = 10 нКл/м$. Кільце рівномірно обертається з частотою $\nu = 15 с^{-1}$ відносно осі, що перпендикулярна до площини кільця і проходить через його центр. Визначити: 1) магнітний момент кругового струму p_m, що створюється кільцем; 2) відношення магнітного моменту до моменту імпульсу кільця p_m/L.

$p_m - ?$ $p_m/L - ?$
$m = 10 г = 10^{-2}\,кг,$
$R = 8 см = 0,08 м,$
$\tau = 10 нКл/м = 10^{-8}\,Кл/м,$
$\nu = 15 с^{-1}.$

Розв'язування

Магнітний момент контура зі струмом

$$\vec{p}_m = I\vec{S},$$

де $\vec{S}$ – вектор, який дорівнює за модулем площі S, яку охоплює контур, і збігається за напрямком із нормаллю до його площини (рис. 7). Площа кільця дорівнює $S = \pi R^2$.

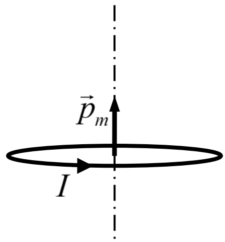


Рисунок 7

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\tau dl}{dt} = \tau \text{v} = \tau\omega R = 2\pi\nu\tau R.$$

Тоді модуль магнітного моменту

$$p_m = 2\pi^2\nu\tau R^3.$$

Проведемо розрахунки

$$p_m = 2\pi^2 \cdot 15 \cdot 10^{-8}\left(8 \cdot 10^{-2}\right)^3 = 1{,}5 \cdot 10^{-9}\ A \cdot м^2.$$

Момент імпульсу

$$L = I\omega,$$

де $I = mR^2$ – момент інерції кільця; $\omega = 2\pi\nu$ – кутова швидкість. Тоді

$$L = 2\pi m R^2 \nu.$$

Відношення магнітного моменту до моменту імпульсу кільця дорівнює

$$p_m / L = \pi\tau R / m.$$

Виразимо числові значення величин в одиницях СІ і підставимо в одержаний вираз

$$\frac{p_m}{L} = \frac{\pi \cdot 10^{-8} \cdot 0,08}{10^{-2}} = 2,51 \cdot 10^{-7} \frac{Кл}{кг}.$$

Відповідь: $p_m = 1,5\, нА \cdot м^2$; $p_m / L = 251\, нКл/кг$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

14.1 В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}1\,Тл$ розміщена квадратна рамка площею $S = 25\,см^2$. Нормаль до площини рамки утворює з напрямом магнітного поля кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити обертальний момент, що діє на рамку, якщо по ній проходить струм $I = 1\,A$.

Відповідь: $M = 217\,мкН \cdot м$.

14.2 Тонке провідне кільце із струмом $I = 40\,A$ розміщене в однорідному магнітному полі $(B = 80\,мТл)$. Площина кільця перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Радіус кільця дорівнює $R = 20\,см$. Знайти силу *F*, що розтягує кільце.

Відповідь: $F = 0{,}64\,мН$.

14.3 В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}5\,Тл$ розміщена прямокутна рамка довжиною $a = 8\,см$ і шириною $b = 5\,см$, що містить $N = 100$ витків тонкого дроту. Струм у рамці $I = 1\,A$, а площина рамки паралельна лініям магнітної індукції. Визначити: 1) магнітний момент рамки; 2) обертальний момент, що діє на рамку.

Відповідь: $p_m = 0{,}4\,A \cdot м^2$; $M = 0{,}2\,Н \cdot м$.

14.4 В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 1\,Тл$ розміщена квадратна рамка зі стороною $a = 10\,см$, по якій проходить струм $I = 4\,A$. Площа рамки перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Визначити роботу, яку необхідно витратити для повороту рамки відносно осі, що проходить через середини її протилежних сторін: 1) на 90°; 2) на 180°; 3) на 360°.

Відповідь: $A_1 = 0{,}04\,Дж$; $A_2 = 0{,}08\,Дж$; $A_3 = 0$.

14.5 Електрон, прискорений різницею потенціалів $U = 0,5\,кВ$, рухається паралельно прямолінійному довгому провіднику на відстані $r = 1\,см$ від нього. Визначити силу, що діє на електрон, якщо по провіднику проходить струм $I = 10\,A$.

Відповідь: $F = 4{,}24\ 10^{-16}\,Н$.

14.6 По трьом паралельним провідникам, які розміщені на однаковій відстані $a = 10\,см$ один від одного, проходять однакові струми $I = 100\,A$. У двох провідниках напрямки струмів збігаються. Визначити силу F, що діє на відрізок довжини кожного провідника $l = 1\,м$.

Відповідь: $F_1 = 0,01\,H$; $F_2 = -\,0,04\,H$; $F_3 = 0,03\,H$.

14.7 Тонке кільце масою $m = 10\,г$ і радіусом $R = 8\,см$ заряджене рівномірно з лінійною густиною $\tau = 10\,нКл/м$. Кільце рівномірно обертається з частотою $\nu = 15\,c^{-1}$ відносно осі, що перпендикулярна до площини кільця і проходить через його центр. Визначити: 1) магнітний момент кругового струму, що створюється кільцем; 2) відношення магнітного моменту до моменту імпульсу кільця.

Відповідь: $p_m = 1,5\,нA \cdot м^2$; $p_m/L = 251\,нКл/кг$.

14.8 Два нескінченні прямолінійні паралельні провідники з однаковими струмами, що проходять в одному напрямі, розміщені один від одного на відстані R. Щоб їх розсунути до відстані $2R$, на кожен сантиметр довжини провідника витрачається робота $A = 138\,нДж$. Визначити силу струму в провідниках.

Відповідь: $I = 10\,A$.

14.9 Прямий дріт довжиною $l = 20\,см$ із струмом $I = 5\,A$, що розміщений в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}1\,Тл,$ розміщений перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Визначити роботу сил поля, під дією яких провідник перемістився на $a = 2\,см.$

Відповідь: $A = 2\,мДж.$

14.10 Квадратний провідний контур із стороною $a = 20\,см$ і струмом $I = 10\,A$ вільно підвішений в однорідному магнітному полі з магнітною індукцією $B = 0{,}2\,Тл.$ Визначити роботу, яку необхідно виконати, щоб повернути контур на кут $\alpha = 180^\circ$ навколо осі, перпендикулярної до напряму магнітного поля.

Відповідь: $A = 0{,}16\,Дж.$

14.11 В однорідному магнітному полі з магнітною індукцією $B = 1\,Тл$ розміщена плоска котушка з числом витків $N = 100$ і радіусом $r = 10\,см,$ площина якої з напрямом поля утворює кут $\alpha = 60^\circ.$ По котушці проходить струм $I = 10\,A.$ Визначити: 1) обертальний момент, що діє на котушку; 2) роботу, яка потрібна для видалення цієї котушки з магнітного поля.

Відповідь: $M = 15{,}7\,Н \cdot м;$ $A = 27{,}2\,Дж.$

14.12 Протон, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів $U = 600\,B,$ влетів в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0{,}3\,Тл$ і почав рухатися по колу. Визначити радіус *R* кола.

Відповідь: $R = 11{,}8 \cdot 10^{-3}\,м.$

14.13 Протон пройшов прискорювальну різницю потенціалів $U = 800\,B$ і, влетівши в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 47\,мТл$, став рухатися по гвинтовій лінії з кроком $h = 6\,см.$ Визначити радіус *R* гвинтової лінії.

Відповідь: $R = 86\,мм.$

14.14 Заряджена частинка пройшла прискорювальну різницю потенціалів $U = 104\,B$ і влетіла в схрещені під прямим кутом електричне $\left(E = 10\,кВ/м\right)$ і магнітне $\left(B = 0{,}1\,Тл\right)$ поля. Знайти відношення Q/m заряду частинки до її маси, якщо, рухаючись перпендикулярно до обох полів, вона має прямолінійну траєкторію.

Відповідь: $Q/m = 48\,МКл/кг$.

14.15 Електрон в атомі водню рухається навколо ядра по коловій орбіті деякого радіуса. Знайти відношення магнітного моменту p_m еквівалентного колового струму до моменту імпульсу L орбітального руху електрона. Заряд електрона і його масу вважати відомими. Визначити напрями векторів $\vec{p}_m$ і $\overleftarrow{L}$.

Відповідь: $p_m/L = 4{,}8 \cdot 10^7\ Кл/кг$.

14.16 Електрон рухається в однорідному магнітному полі ($B = 10\,мТл$) по гвинтовій лінії, радіус якої дорівнює $R = 1\,см$ і крок $h = 6\,см$. Визначити період T обертання електрона і його швидкість v.

Відповідь: $T = 3{,}57 \cdot 10^{-9}\ с$, $\text{v} = 2{,}46 \cdot 10^7\ м/с$.

14.17 Альфа-частинка пройшла прискорювальну різницю потенціалів $U = 300\,B$ і, потрапивши в однорідне магнітне поле, стала рухатися по гвинтовій лінії радіусом $R = 1\,см$ і кроком $h = 4\,см$. Визначити магнітну індукцію B поля.

Відповідь: $B = 0{,}3\,Тл$.

14.18 Протон влітає із швидкістю $\text{v} = 100\,км/с$ в область простору, де є електричне $\left(E = 0{,}21\,кВ/м\right)$ і магнітне $\left(B = 3{,}3\,мТл\right)$ поля. Напруженість E електричного поля і магнітна індукція B збігаються за напрямом. Визначити прискорення a протона для початкового моменту руху в полі, якщо напрям вектора його швидкості v: 1) збігається із загальним напрямом векторів $\vec{E}$ і $\vec{B}$; 2) перпендикулярний до цього напряму.

Відповідь: $a_1 = 20{,}1$ $Гм/с^2$; $a_2 = 37{,}5$ $Гм/с^2$.

14.19 Два іони різних мас з однаковими зарядами влетіли в однорідне магнітне поле і почали рухатися по колах радіусами $R_1 = 3\,см$ і $R_2 = 1{,}73\,см$. Визначити відношення мас іонів, якщо вони пройшли однакову прискорювальну різницю потенціалів.

Відповідь: $m_1/m_2 = 3$.

14.20 Альфа-частинка влетіла в схрещені під прямим кутом магнітне $(B = 5\,мТл)$ та електричне $(E = 30\,кВ/м)$ поля. Визначити прискорення a альфа-частинки, якщо її швидкість $\vec{v}$ $(v = 2 \cdot 10^6\,м/с)$ перпендикулярна до векторів $\vec{E}$ і $\vec{B}$, причому сили, що діють із боку цих полів, напрямлені протилежно.

Відповідь: $a_2 = 9{,}64 \cdot 10^{11}\,м/с^2$.

14.21 Протон рухається по колу радіусом $R = 0{,}5\,см$ із лінійною швидкістю $v = 10^6\,м/с$. Визначити магнітний момент p_m, що створюється еквівалентним коловим струмом.

Відповідь: $p_m = 4 \cdot 10^{-16}\,А \cdot м^2$.

14.22 Іон у магнітному полі $(B = 0{,}01\,Тл)$ рухається по колу. Визначити кінетичну енергію W_K іона, якщо магнітний момент еквівалентного колового струму дорівнює $p_m = 1{,}6 \cdot 10^{-14}\,А \cdot м^2$.

Відповідь: $W_K = 1\,кеВ$.

14.23 Альфа-частинка, яка пройшла прискорювальну різницю потенціалів U, стала рухатися в однорідному магнітному полі $\left(B = 50\,мТл\right)$ по гвинтовій лінії з кроком $h = 5\,см$ і радіусом $R = 1\,см.$ Визначити яку різницю потенціалів вона пройшла.

Відповідь: $U = 9{,}76\,В$.

14.24 У схрещені під прямим кутом однорідні магнітне $\left(H = 1\,МА/м\right)$ та електричне $\left(E = 50\,кВ/м\right)$ поля влетів іон. За якої швидкості v іона (за модулем і напрямом) він буде рухатися в схрещених полях прямолінійно?

Відповідь: $\mathrm{v} = 40\,км/с$.

14.25 Електрон влетів в однорідне магнітне поле $\left(B = 0{,}2\,Тл\right)$ перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Визначити силу еквівалентного колового струму $I_{екв}$, що створений рухом електрона в магнітному полі.

Відповідь: $I_{екв} = 0{,}9\ нА$.

14.26 Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}1\,Тл$ перпендикулярно до ліній індукції. Визначити силу F, що діє на електрон з боку поля, якщо радіус кривини траєкторії дорівнює $R = 0{,}5\,см.$

Відповідь: $F = 1{,}4\ пН.$

14.27 Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}02\,Тл$ по колу, радіус якого $R = 12\,см.$ Визначити модуль імпульса електрона.

Відповідь: $p = 3{,}8 \cdot 10^{-22}\ Н \cdot с.$

14.28 Електрон, прискорений із стану спокою в електростатичному полі різницею потенціалів $U = 400\,В,$ рухається у вакуумі паралельно довгому тонкому дроту на відстані $r = 1\,см$ від нього. Визначити модуль сили, яка почне діяти на електрон, якщо по провіднику пропустити струм $I = 10\,A,$ а також радіус кривизни траєкторії в початковий момент часу.

Відповідь: $F = 3,77 \cdot 10^{-16}\,H;\ \ R = 34\,см.$

14.29 Однозарядний іон літію масою $m = 7\,а.\,о.\,м.$ пройшов прискорювальну різницю потенціалів $U = 300\,B$ і влетів у схрещені під прямим кутом однорідні магнітне та електричне поля. Визначити магнітну індукцію B поля, якщо траєкторія іона в схрещених полях є прямолінійною. Напруженість електричного поля дорівнює $E = 2\,кВ/м$.

Відповідь: $B = 0,22\,Тл.$

14.30 Електрон, пройшовши прискорювальну різницю потенціалів $U = 1,2\,кВ,$ потрапив у схрещені під прямим кутом однорідні магнітне та електричне поля. Визначити напруженість E електричного поля, якщо магнітна індукція поля дорівнює $B = 6\,мТл,$ а траєкторія – пряма лінія.

Відповідь: $E = 120\,кВ/м$.

15 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

15.1 Робота з переміщення замкнутого контура зі струмом у магнітному полі

$$A = I\Delta\Phi,$$

де $\Delta\Phi$ – зміна магнітного потоку, який пронизує поверхню, обмежену контуром; I – сила струму в контурі.

15.2 Основний закон електромагнітної індукції Фарадея

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt},$$

де ε_i – електрорушійна сила індукції; N – кількість витків у контурі; ψ – потокозчеплення.

15.3 Окремі випадки застосування основного закону електромагнітної індукції:

– **різниця потенціалів U на кінцях провідника довжиною l**, який рухається зі швидкістю v в однорідному магнітному полі,

$$U = Bl\,\mathrm{v}\sin\alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів швидкості $\vec{\mathrm{v}}$ та магнітної індукції $\vec{B}$;

– електрорушійна сила індукції ε_i, яка виникає в рамці, що містить N витків, площею S під час обертання рамки з кутовою швидкістю ω в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$:

$$\varepsilon = BNS\omega \sin \omega t,$$

де ωt – миттєве значення кута між вектором $\vec{B}$ і вектором нормалі $\vec{n}$ до площини рамки.

15.4 Заряд q, який проходить у контурі,

$$q = \Delta\psi / R,$$

де R – опір контура; $\Delta\psi$ – зміна потокозчеплення.

15.5 Електрорушійна сила самоіндукції ε_s, яка виникає в замкнутому контурі під час зміни сили струму в ньому,

$$\varepsilon_s = -L\frac{dl}{dt}, \text{ або } \langle \varepsilon_s \rangle = -L\frac{\Delta l}{\Delta t},$$

де L – індуктивність контура.

15.6 Потокозчеплення контура

$$\psi = LI,$$

де L – індуктивність контура.

15.7 Індуктивність соленоїда (тороїда)

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

де $n = \dfrac{N}{l}$ – кількість витків, що припадає на одиницю довжини соленоїда; V – об’єм соленоїда.

У всіх випадках для знаходження індуктивності соленоїда (тороїда) з осердям із використанням наведеної формули для визначення магнітної проникності необхідно користуватися графіком залежності B від H, а потім формулою

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

15.8 Миттєве значення сили струму *I* в колі, що має активний опір R та індуктивність L:

– після замикання кола

$$I = I_0\left(1 - e^{-\left(R/L\right)t}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\left(R/L\right)t}\right),$$

де ε – *ЕРС* джерела струму; t – час, що минув після замикання кола; I_0 – сила установленого струму (за $t \to \infty$);

– після розмикання кола

$$I = I_0 e^{-\left(R/L\right)t},$$

де I_0 – значення сили струму в колі за $t = 0$; t – час, що минув із моменту розмикання кола.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 15.1

Виток із струмом $I = 20\,A$ вільно встановився в однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 0,016\,Тл$. Діаметр витка дорівнює $d = 10\,см$. Визначити роботу A, яку виконують зовнішні сили під час повороту витка на кут $\alpha = \pi/2$ відносно осі, що збігається з діаметром. Під час повороту контура сила струму, що підтримується в ньому, є незмінною.

Розв'язування

$A-?$
$d = 10\,см = 0,1\,м,$ $I = 20\,A,$ $B = 0,016\,Тл,$ $\varphi = \dfrac{\pi}{2}.$

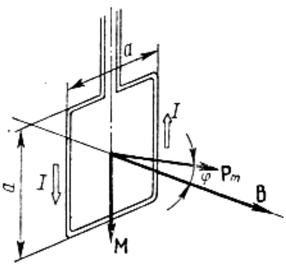


Рисунок 1

Робота з переміщення замкнутого контура зі струмом у магнітному полі

$$A = I\Delta\Phi, \qquad (1)$$

де $\Delta\Phi$ – зміна магнітного потоку, який пронизує поверхню, обмежену контуром; I – сила струму в контурі.

Магнітний потік Φ через плоский контур площею S у разі однорідного поля

$$\Phi = BS\cos\alpha, \qquad (2)$$

де α – кут між вектором нормалі $\vec{n}$ до площини контура і вектором магнітної індукції.

Площа витка

$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \qquad (3)$$

За умовою задачі в початковому положенні контур вільно встановився в магнітному полі. Водночас момент сили дорівнює нулю ($M = 0$), а, отже, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Це означає, що $\Phi_1 = 0$, тоді за формулою (2)

$$\Phi_2 = BS\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (4)$$

З урахуванням (3) і (4) співвідношення (1) набере вигляду

$$A = IB\frac{\pi d^2}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (5)$$

Виразимо числові значення величин в одиницях СІ і підставимо в (5):

$$A = 20 \cdot 0,016 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4}\cos 0^\circ = 2,5 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

Перевіримо розмірність одержаної величини ($Дж$):

$$[A][B][d^2] = 1A \cdot 1Тл \cdot 1м^2 = 1A \cdot \frac{1H}{1A \cdot 1м} \cdot 1м^2 = 1H \cdot 1м = 1Дж.$$

Відповідь: $A = 2,5\,мДж.$

Задача 15.2

В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1\,Тл$ рівномірно обертається рамка, яка містить $N = 1\,000$ витків, із частотою $\nu = 10\,с^{-1}$. Площа рамки дорівнює $S = 150\,см^2$. Визначити миттєве значення ЕРС індукції ε_i, що відповідає куту повороту рамки $\varphi = 30^\circ$.

Розв'язування

$\varepsilon_з - ?$
$N = 1\,000,$ $S = 150\,см^2 = 1,5 \cdot 10^{-4}\,м^2,$ $B = 0,1\,Тл,$ $\nu = 10\,с^{-1}.$

Миттєве значення ЕРС індукції визначається законом Фарадея для електромагнітної індукції

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

де $\Delta\Phi$ – зміна магнітного потоку, який пронизує поверхню, обмежену контуром; ε_i – електрорушійна сила індукції; N – кількість витків у контурі.

Під час обертання рамки магнітний потік Φ, який пронизує рамку в момент часу t, змінюється за законом

$$\Phi = BS\cos\omega t, \qquad (2)$$

де B – магнітна індукція; S – площа рамки; ω – колова частота.

Підставимо (2) в (1), продиференціюємо одержаний вираз за часом та одержимо миттєве значення ЕРС індукції:

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t.$$

Колова частота пов’язана з частотою обертання співвідношенням

$$\omega = 2\pi\nu,$$

тоді

$$\varepsilon_i = 2\pi\nu NBS \sin \varphi.$$

Підставимо числові значення та виконаємо обчислення

$$\varepsilon_i = 2\pi 10 \cdot 1\,000 \cdot 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \sin 30^\circ = 47,1\,B.$$

Відповідь: $\varepsilon_i = 47,1\,B.$

Задача 15.3

Соленоїд має $N = 800$ витків. Переріз його осердя з немагнітного матеріалу становить $S = 10\,см^2$. По обмотці проходить струм, який створює поле з індукцією $B = 8\,мТл.$ Визначити середнє значення ЕРС $\langle \varepsilon_s \rangle$ самоіндукції, яка виникає на затискачах соленоїда, якщо сила струму зменшується практично до нуля за час $\Delta t = 0,8\,мс.$

Розв'язування

$\langle \varepsilon_S \rangle - ?$
$N = 800,$
$S = 10\,см^2 = 10^{-5}\,м^2,$
$B = 8\,мТл = 8 \cdot 10^{-3}\,Тл,$
$\Delta t = 0{,}8\,мс = 8 \cdot 10^{-4}\,с.$

ЕРС індукції визначається законом електромагнітної індукції

$$\langle \varepsilon_s \rangle = -\frac{\Delta \psi}{\Delta t}\,, \qquad (1)$$

де $\Delta\psi$ – потокозчеплення.

Магнітний потік, що створюється соленоїдом, дорівнює

$$\Phi = BS\cos\alpha = BS. \qquad (2)$$

де α – кут між нормаллю до площини витків і вектором магнітної індукції. За умовою задачі $\alpha = 0,\ \cos\alpha = 1.$

Потокозчеплення соленоїда визначається виразом

$$\psi = N\Phi. \qquad (3)$$

Підставивши співвідношення (2) в (3), одержимо

$$\psi = NBS. \qquad (4)$$

Оскільки $\psi_2 = 0,$ то $\Delta\psi = \psi_1 = NBS.$

З урахуванням цього виразу (1) набере вигляду

$$\langle \varepsilon_s \rangle = -\frac{NBS}{\Delta t}. \qquad (5)$$

Підставивши числові значення фізичних величин у вираз (5), одержимо

$$\langle \varepsilon_s \rangle = \frac{800 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{0,8 \cdot 10^{-3}} = 8В.$$

Переконаємося в тому, що права частина цієї рівності дає одиницю напруги ($В$):

$$\frac{[B][S]}{[t]} = \frac{1Тл \cdot (1м^2)}{1с} = \frac{1Вб}{1с} = 1В.$$

Відповідь: $\langle \varepsilon_s \rangle = 8В.$

Задача 15.4

Квадратна дротяна рамка зі стороною $a = 5\,см$ і опором $R = 10\,мОм$ розміщена в однорідному магнітному полі $(B = 40\,мТл)$. Нормаль до площини рамки становить кут $\alpha = 30^\circ$ із лініями магнітної індукції. Визначити заряд q, який пройде по рамці, якщо магнітне поле вимкнути.

Розв'язування

$q - ?$

$a = 5\,см = 0,05\,м,$

$R = 10\,мОм = 10^{-2}\,Ом,$

$B = 40\,мТл = 4 \cdot 10^{-2}\,Тл,$

$\alpha = 30^\circ.$

Під час вимкнення магнітного поля відбудеться зміна магнітного потоку, що пронизує рамку. Внаслідок цього в рамці виникне ЕРС індукції, яку можна визначити, скориставшись основним законом електромагнітної індукції

$$\varepsilon_i = \frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

ЕРС індукції, що виникла, викличе в рамці індукційний струм, миттєве значення якого можна визначити, скориставшись законом Ома для повного кола:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R}, \tag{2}$$

де R – опір рамки.

Тоді, прирівнявши співвідношення (1) і (2), одержимо

$$I_i R = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Оскільки миттєве значення сили індукційного струму $I_i = \frac{dq}{dt}$, то й цей вираз можна переписати у вигляді

$$\frac{dq}{dtR} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

звідси

$$dq = -\frac{d\Phi}{R}. \tag{3}$$

Проінтегрувавши співвідношення (3), знайдемо

$$\int_0^q dq = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi,$$

або

$$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

З урахуванням того, що за вимкненого поля (кінцевий стан) $\Phi_2 = 0,$ остання рівність перепишеться у вигляді

$$q = \frac{\Phi_1}{R}. \qquad (4)$$

Знайдемо магнітний потік Φ_1. За визначенням магнітного потоку маємо

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha,$$

де S – площа рамки.

У цьому разі (рамка є квадратом) $S = a^2$.

Тоді

$$\Phi_1 = Ba^2\cos\alpha. \qquad (5)$$

Підставивши співвідношення (5) у (3), одержимо

$$q = \frac{Ba^2}{R}\cos\alpha.$$

Проведемо обчислення

$$q = \frac{0,04 \cdot 25 \cdot 10^{-4}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{0,01} = 8,67 \cdot 10^{-3}\ Кл.$$

Переконаємося в тому, що права частина цієї рівності дає одиницю заряду (*Кл*):

$$\frac{[B]\left[a^2\right]}{[R]}=\frac{1Тл\cdot(1м^2)}{1Ом}=\frac{1Н\cdot м^2}{1А\cdot м\cdot Ом}=\frac{1Дж}{1В}=1Кл.$$

Відповідь: $q=8,67\,мКл.$

Задача 15.5

Тонкий мідний дріт масою $m=5\,г$ зігнутий у вигляді квадрата, кінці якого замкнені. Квадрат розміщений в однорідному магнітному полі $B=0{,}2\,Тл$ так, що його площина перпендикулярна до ліній поля. Визначити заряд Δq, який пройде по провіднику, якщо квадрат, потягнувши його за протилежні вершини, витягнути в лінію.

Розв'язування

$\Delta q-?$
$m=5\,г=5\cdot10^{-3}\,кг,$ $B=0,2\,Тл.$

Заряд, що проходить через контур унаслідок зміни його форми, визначається виразом

$$q=\frac{\Delta\psi}{R}, \tag{1}$$

де $\Delta\Phi$ – зміна магнітного потоку, що пронизує контур; R – опір дроту, з якого виготовлений контур.

Зміна магнітного потоку дорівнює

$$\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1,\quad \Phi_2=0,$$

де Φ_2, Φ_1 – магнітні потоки, що пронизують контур до і після його деформації.

Магнітний потік, що пронизує контур у початковий момент, знайдемо із співвідношення

$$\Phi_2 = BS\cos\alpha = BS, \tag{2}$$

де α – кут між нормаллю до рамки і напрямком вектора магнітної індукції; S – площа контура.

Підставивши вираз (2) в (1), одержимо

$$\Delta q = \frac{BS}{R}. \tag{3}$$

Площа контура дорівнює $S = a^2$.

Опір контура знайдемо із співвідношення

$$R = \rho\frac{l}{S_0}, \tag{4}$$

де ρ – питомий опір міді; S_0 – площа перерізу дроту; l – довжина дроту.

За умовою задачі

$$l = 4a. \tag{5}$$

Підставивши співвідношення (4) і (5) у (3), одержимо

$$\Delta q = \frac{Ba^2 S_0}{\rho 4a}. \tag{6}$$

Площу поперечного перерізу дроту знайдемо з виразу $V = \dfrac{m}{\gamma}$, де γ – густина міді $\left(\gamma = 8{,}93 \cdot 10^3\, кг/м^3\right)$. Врахуємо, що $V = lS_0 = 4aS_0$, звідси

$$S_0 = \frac{m}{4\gamma a}. \tag{7}$$

Підставивши вираз (7) у (5), одержимо

$$\Delta q = \frac{Bam}{4\rho 4\gamma a} = \frac{mB}{16\rho\gamma}. \tag{8}$$

Після підставлення числових значень величин у співвідношення (8) одержимо остаточну відповідь

$$\Delta q = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}2}{16 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 8{,}93 \cdot 10^3} = 0{,}41\, Кл.$$

Перевіримо розмірність одержаної величини ($Кл$):

$$\frac{[m][B]}{[\rho][\gamma]} = \frac{1кг \cdot 1Тл}{1Ом \cdot м \cdot \dfrac{кг}{м^3}} = \frac{1Тл \cdot м^2}{1Ом} = \frac{1Вб}{1Ом} =$$

$$= \frac{1Вб \cdot 1с}{1Ом \cdot 1с} = \frac{1В \cdot 1с}{1Ом} = 1А \cdot 1с = 1Кл.$$

Відповідь: $\Delta q = 0{,}41\, Кл.$

Задача 15.6

Котушка діаметром $d = 2\,см$, що містить один шар $N = 500$ витків алюмінієвого дроту перерізом $S = 1\,мм^2$, які щільно прилягають один до одного, поміщена в магнітне поле. Вісь котушки паралельна до ліній індукції. Магнітна індукція поля рівномірно змінюється зі швидкістю $\Delta B/\Delta t = 1\,мТл/с$. Визначити теплову потужність, що виділяється в котушці, якщо її кінці замкнути накоротко. Питомий опір алюмінію $\rho = 26нОм \cdot м$.

Розв'язування

$P - ?$
$d = 2\,см = 2 \cdot 10^{-2}\,м,$
$N = 500,$
$S = 1\,мм^2 = 10^{-6}\,м^2,$
$\Delta B/\Delta t = 1\,мТл/с = 10^{-3}\,Тл/с,$
$\rho = 26нОм \cdot м = 2,6 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м.$

У кільці виникне ЕРС індукції, величина якої визначається основним законом електромагнітної індукції Фарадея

$$\xi_i = -\frac{d\psi}{dt},$$

де ξ_i – електрорушійна сила індукції; ψ – потокозчеплення $\psi = N\Phi$.

Магнітний потік Φ через плоский контур площею S_0 – у разі однорідного поля

$$\Phi = BS_0 \cos\alpha,$$

де α – кут між вектором нормалі $\vec{n}$ до площини контура і вектором магнітної індукції, у цьому разі $\alpha = 0$. Тоді

$$\psi = NBS_0,$$

$$\xi_i = -\frac{d\left(NBS_0\right)}{dt} = -NS_0\frac{dB}{dt} = NS_0\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Площа перерізу соленоїда дорівнює

$$S_0 = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$\xi_i = N\frac{\pi d^2}{4}\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

За законом Ома

$$\xi_i = IR \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\xi_i}{R}.$$

Опір провідника:

$$R = \rho\frac{l}{S}, \qquad l = \pi d, \qquad R = \rho\frac{\pi d}{S}.$$

Теплова потужність визначається законом Джоуля – Ленца:

$$P = I\xi_i = \frac{\xi_i^2}{R} = \frac{S}{\pi d\rho}\left(N\frac{\pi d^2}{4}\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2 = \frac{N^2\pi d^3 S}{16\rho}\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2,$$

$$P = \frac{N^2 \pi d^3 S}{16\rho}\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2,$$

$$P = \frac{500^2 \pi \left(2\cdot 10^{-2}\right)^3 10^{-6}}{16\cdot 2,6\cdot 10^{-8}}\left(10^{-3}\right)^2 = 1,51\cdot 10^{-5}\ Вт.$$

Відповідь: $P = 0,151\ мкВт.$

Задача 15.7

У котушці довжиною $l = 0,5\,м,$ діаметром $d = 5\,см$ і числом витків $N = 1\,500$ струм рівномірно збільшується на $\Delta I = 0,2\,A$ за 1 секунду. На котушку надіте кільце з мідного дроту $\left(\rho = 17\,нОм\cdot м\right)$ площею перерізу $S_0 = 3\,мм^2.$ Визначити силу струму в кільці.

Розв’язування

$I - ?$
$l = 0,5\,м,$
$d = 5\,см = 5\cdot 10^{-2}\,м,$
$N = 1\,500,$
$S_0 = 3\,мм^2 = 3\cdot 10^{-6}\,м^2,$
$\Delta I = 0,2\,A,$
$\Delta t = 1\,c,$
$\rho = 17\,нОм\cdot м = 1,7\cdot 10^{-8}\,Ом\cdot м.$

У кільці виникне ЕРС індукції, величина якої визначається основним законом електромагнітної індукції Фарадея

$$\xi_i = -\frac{d\psi}{dt},$$

де ξ_i – електрорушійна сила індукції; ψ – потокозчеплення.

Потокозчеплення контура дорівнює

$$\psi = LI,$$

де L – індуктивність контура.

Індуктивність соленоїда (тороїда):

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

де $n = \dfrac{N}{l}$ – кількість витків, що припадає на одиницю довжини соленоїда; V – об'єм соленоїда;

$$V = Sl = \frac{\pi d^2}{4} l;$$

$$\xi_i = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\left(LI\right)}{dt} = L\frac{\Delta I}{\Delta t} = \mu_0 \frac{N^2}{l^2}\frac{\pi d^2}{4} l \frac{\Delta I}{\Delta t} =$$

$$= \mu_0 \frac{\pi d^2 N^2}{4l}\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

$$\xi_i = \mu_0 \frac{\pi d^2 N^2}{4l}\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

За законом Ома

$$\xi_i = IR \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\xi_i}{R}.$$

Опір провідника:

$$R = \rho \frac{l_0}{S_0}.$$

Довжина кільця:

$$l_0 = \pi d; \qquad R = \rho \frac{\pi d}{S_0};$$

$$I = \frac{S_0 \xi_i}{\pi d \rho} = \mu_0 \frac{S_0 d\, N^2}{4\rho l} \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

$$I = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 1\,500^2}{4 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5} \frac{0{,}2}{1} = 2{,}5\ A.$$

Відповідь: $I = 2{,}5\ A.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

15.1 Дротяний виток діаметром $D = 5\,см$ і опором $R = 0,02\,Ом$ розміщений в однорідному магнітному полі $B = 0,3\,Тл.$ Площина витка утворює кут $\alpha = 40^\circ$ з лініями індукції. Який заряд q пройде по витку під час вимкнення магнітного поля?

Відповідь: $q = 9\,мКл.$

15.2 На картонний каркас довжиною $l = 0,8\,м$ і діаметром $D = 4\,см$ намотаний в один шар дріт діаметром $d = 0,25\,мм$ так, що нитки щільно прилягають одна до одної. Визначити індуктивність L соленоїда.

Відповідь: $L = 19\,мГн.$

15.3 В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1\,Тл$ рівномірно обертається рамка, яка містить $N = 1\,000$ витків, із частотою $\nu = 10\,с^{-1}$. Площа рамки дорівнює $S = 25\,см^2$. Визначити миттєве значення ЕРС індукції ε_i, що відповідає куту повороту рамки $\varphi = 30^\circ$.

Відповідь: $\left\langle \varepsilon_s \right\rangle = 8B.$

15.4 У дротяне кільце, приєднане до балістичного гальванометра, внесли прямий магніт. Водночас по електричному колу пройшов заряд $q = 50\,мкКл.$ Визначити зміну магнітного потоку $\Delta\Phi$ через кільце, якщо опір гальванометра $R = 10\,Ом.$

Відповідь: $\Delta\Phi = 0,5\,мВб.$

15.5 По котушці, індуктивність якої дорівнює $L = 0,03\,мГн,$ проходить струм силою $I = 0,6\,A.$ Під час розмикання електричного кола сила струму змінюється практично до нуля за час $\Delta t = 120\,мкс.$ Визначити середню ЕРС самоіндукції $<\varepsilon_s>$, що виникає в контурі.

Відповідь: $\langle \varepsilon_s \rangle = 0{,}15\ B.$

15.6 По котушці, індуктивність якої дорівнює $L = 80\,мГн,$ проходить струм силою $I = 2\,A.$ Визначити час зменшення сили струму під час розмикання електричного кола, якщо середня ЕРС самоіндукції, що виникає в контурі, дорівнює $\langle \varepsilon_s \rangle = 16\,B.$

Відповідь: $\Delta t = 10\,мс.$

15.7 У соленоїді рівномірно збільшують силу струму на $\Delta I = 0{,}1\,A$ за $t = 1\,c.$ Індуктивність соленоїда дорівнює $L = 0{,}01\,Гн$. Знайти середнє значення ЕРС самоіндукції $\langle \varepsilon_S \rangle$.

Відповідь: $\langle \varepsilon_S \rangle = 1\,мB.$

15.8 Рамка з дроту опором $R = 0{,}04\,Ом$ рівномірно обертається в однорідному магнітному полі $(B = 0{,}6\,Тл).$ Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції. Площа рамки $S = 200\,см^2.$ Визначити заряд $q,$ який пройде по рамці під час зміни кута між нормаллю до рамки і лініями індукції: 1) від 0° до 45°; 2) від 45° до 90°.

Відповідь: $q_1 = 88\,мКл;$ $q_2 = 0{,}21\,мКл.$

15.9 Соленоїд має $N = 800$ витків. Переріз його осердя з немагнітного матеріалу становить $S = 10\,см^2.$ По обмотці проходить струм, який створює поле з індукцією $B = 0{,}63\,мТл.$ Визначити середнє значення ЕРС $\langle \varepsilon_s \rangle$ самоіндукції, яка виникає на затискачах соленоїда, якщо сила струму зменшується практично до нуля за час $\Delta t = 0{,}8\,мс.$

Відповідь: $U = 0{,}63\ B$.

15.10 Електричне коло складається з котушки індуктивністю $L = 0{,}1\,Гн$ і джерела струму. Джерело струму вимкнули, не розриваючи електричне коло. Час, за який сила струму зменшилася до 0,001 початкового значення, дорівнює $t = 0{,}07\,c$. Визначити опір котушки.

Відповідь: $R = 10\,Ом$.

15.11 Рамка, що містить $N = 200$ витків тонкого дроту, може вільно обертатися відносно осі, що лежить у площині рамки. Площа рамки становить $S = 50\,см^2$. Вісь її обертання перпендикулярна до ліній індукції однорідного магнітного поля $\left(B = 0{,}05\,Тл\right)$. Визначити максимальну ЕРС $\varepsilon_{\max}$, яка індукується в рамці під час її обертання з частотою $\nu = 40\,Гц$.

Відповідь: $\varepsilon_{\max} = 12{,}6\,B$; $\varepsilon_{max} = 12{,}6\ B$.

15.12 Котушка, що намотана на немагнітний циліндричний каркас, має $N_1 = 250$ витків та індуктивність $L_1 = 36\,мГн$. Щоб збільшити індуктивність котушки до $L_2 = 100\,мГн$, її обмотку зняли та замінили іншою, з більш тонкого дроту, з таким розрахунком, щоб довжина котушки залишилася тією самою. Скільки витків у котушці після перемотування?

Відповідь: $N_2 = 417$.

15.13 Індуктивність соленоїда, намотаного в один шар на немагнітний каркас, дорівнює $L = 0{,}5\,мГн$. Довжина соленоїда становить $l = 0{,}6\,Ом$, діаметр $D = 2\,см$. Визначити відношення n числа витків соленоїда до його довжини.

Відповідь: $n = 1450\,м^{-1}$.

15.14 Соленоїд містить $N=100$ витків. Переріз осердя (з немагнітного матеріалу) $S=10\,см^2$. По обмотці проходить струм, що утворює поле з індукцією $B=8\,мТл$. Визначити середнє значення ЕРС $\langle\varepsilon_s\rangle$ самоіндукції, яка виникає на затискачах соленоїда, якщо сила струму зменшується практично до нуля за час $\Delta t=0,8\,мс$.

Відповідь: $\langle\varepsilon_s\rangle=1\,В$.

15.15 Кільце з мідного дроту масою $m=10\,г$ розміщене в однорідному магнітному полі $(B=0,5\,Тл)$ так, що площина кільця утворює кут $\alpha=60^\circ$ з лініями магнітної індукції. Визначити заряд, який пройде по кільцю, якщо магнітне поле зникне.

Відповідь: $q=2,27\,Кл$.

15.16 По котушці індуктивністю $L=8\,мкГн$ проходить струм $I=6\,А$. Визначити середнє значення ЕРС $\langle\varepsilon_s\rangle$ самоіндукції, що виникає в контурі, якщо сила струму змінюється практично до нуля за час $\Delta t=5\,мс$.

Відповідь: $\langle\varepsilon_s\rangle=9,6\,мВ$.

15.17 В електричному колі, що містить резистор опором $R=20\,Ом$ і котушку індуктивністю $L=0,06\,Гн$, проходить струм $I=20\,А$. Визначити силу струму I в колі через $\Delta t=0,2\,мс$ після його розмикання.

Відповідь: $I=18,7\,А$.

15.18 Джерело струму замкнули на котушку опором $R=20\,Ом$. Через час $t=0,1\,с$ сила струму в котушці I досягла 0,95 граничного значення. Визначити індуктивність L котушки.

Відповідь: $L=0,67\,Гн$.

15.19 У середній частині соленоїда, що містить $n = 8\,витків/см$, розміщений круговий виток діаметром $d = 4\,см.$ Площина витка розміщена під кутом $\alpha = 60^\circ$ до осі соленоїда. Визначити магнітний потік *Ф*, що пронизує виток, якщо по обмотці соленоїда проходить струм $I = 1\,A.$

Відповідь: $\Phi = 1{,}1\,мкВб.$

15.20 Соленоїд із площею перерізу $S = 10\,см^2$ має $N = 10^3$ витків. Під час сили струму $I = 5\,A$ магнітна індукція поля в соленоїді дорівнює $B = 50\,мТл.$ Визначити індуктивність *L* соленоїда.

Відповідь: $L = 0{,}01\,Гн.$

15.21 Визначити, яку кількість витків дроту діаметром $d = 0{,}3\,мм$ потрібно намотати на картонний циліндр діаметром $d = 1 см$, щоб отримати одношарову котушку з індуктивністю $L = 0{,}001\,Гн$.

Відповідь: $N = 3\,040.$

15.22 Визначити магнітний потік через поперечний переріз котушки (без осердя), що має на кожному сантиметрі довжини $n = 8$ витків. Радіус соленоїда $r = 2\,см,$ а сила струму в ньому $I = 2\,A.$

Відповідь: $\Phi = 2{,}53\,мкВб.$

15.23 В одній площині з нескінченним прямолінійним дротом із струмом $I = 20\,A$ розміщена квадратна рамка з стороною, довжина якої $a = 10\,см,$ водночас дві сторони рамки паралельні дроту, а відстань від дроту до найближчої сторони рамки дорівнює $d = 5\,см.$ Визначити магнітний потік Ф, що пронизує рамку.

Відповідь: $\Phi = 0{,}44\,мкВб.$

15.24 У магнітному полі, що змінюється згідно з законом $B = B_0 \cos \omega t$ $\left(B_0 = 0{,}1\,Тл,\ \omega = 4\,c^{-1}\right),$ розміщена квадратна рамка з стороною $a = 50\,см$, причому нормаль до рамки утворює з напрямом поля кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити ЕРС індукції, що виникає в рамці в момент часу $t = 5\,с$.

Відповідь: $\varepsilon = 64\,мВ$.

15.25 Площина витка з дроту площею $S = 100\,см^2$ і опором $R = 50\,Ом$, що розміщений в однорідному магнітному полі напруженістю $H = 10\,кА/м$, перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Під час повороту витка в магнітному полі гальванометр, замкнутий на виток, показує $q = 12,6\,мкКл$. Визначити кут повороту витка α.

Відповідь: $\alpha = 60^\circ$.

15.26 В однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,3\,Тл$ поміщена прямокутна рамка з рухомою стороною, довжина якої $l = 15\,см$. Визначити ЕРС індукції, що виникає в рамці, якщо її рухома сторона переміщається перпендикулярно до ліній магнітної індукції зі швидкістю $\mathrm{v} = 10\,м/с$.

Відповідь: $\varepsilon_i = 0,45\,В$.

15.27 Дві гладкі замкнуті металеві шини, відстань між якими 30 см, із перемичкою, яка може рухатися без тертя, розміщені в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1\,Тл$, перпендикулярному до площини контура. Перемичка масою $m = 5\,г$ ковзає вниз із сталою швидкістю $\mathrm{v} = 0,5\,м/с$. Визначити опір перемички, нехтуючи самоіндукцією контура та опором решти частин контура.

Відповідь: $R = 9,2\,мОм$.

15.28 Котушка діаметром $d = 2\,см$, що містить один шар $N = 500$ витків алюмінієвого дроту перерізом $S = 1\,мм^2$, які щільно прилягають один до одного, розміщена в магнітному полі. Вісь котушки паралельна до ліній індукції. Магнітна індукція поля рівномірно змінюється зі швидкістю $\Delta B/\Delta t = 1\,мТл/с$. Визначити теплову потужність, що виділяється в котушці, якщо її кінці замкнути накоротко. Питомий опір алюмінію $\rho = 26 нОм \cdot м$.

Відповідь: $P = 0{,}151\ мкВт$.

15.29 У котушці довжиною $l = 0{,}5\,м$, діаметром $d = 5\,см$ і числом витків $N = 1\,500$ струм рівномірно збільшується на $\Delta I = 0{,}2\,A$ за 1 секунду. На котушку надіте кільце з мідного дроту $(\rho = 17\,нОм \cdot м)$ площею перерізу $S_0 = 3\,мм^2$. Визначити силу струму в кільці.

Відповідь: $I = 2{,}5\,A$.

15.30 Через соленоїд, індуктивність якого дорівнює $L = 21\,мГн$, проходить струм, який змінюється з часом за законом $I = 5\sin 100\pi t$. Визначити часову залежність ЕРС самоіндукції, що виникає в соленоїді, та енергії магнітного поля соленоїда.

Відповідь: $\varepsilon_s = -\,7{,}85\cos 100\pi t,\ мВ$;
$W = 263\sin^2 100\pi t,\ мДж$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Черняк Л. М. Лекції з загальної фізики / Л. М. Черняк. – Суми : Вид-во Алан – ЕКС, 2003. – Книга 2. – 400 с.
2. Опанасюк А. С. Збірник задач для контрольних робіт та тестування з дисципліни «Загальна фізика» / А. С. Опанасюк, Б. А. Міщенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2006. – Ч. 1–3.
3. Дущенко В. П. Загальна фізика / В. П. Дущенко, І. М. Кучерук. – Київ : Вища школа, 1987. – 195 с.
4. Загальні основи фізики / І. Г. Багацька, Д. Б. Головко, А. А. Маляренко, Ю. Л. Ментковський. – Київ : Либідь, 1998. – Книга 1. – 192 с.

ДОДАТОК А
(довідковий)

ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З ЕЛЕКТРИКИ

Таблиця А.1 – Діелектрична проникність деяких матеріалів

Речовина	**Діелектрична проникність** ε
Гас	2
Вода	81
Мастило	5
Мастило (трансформаторне)	2,2
Віск	7,8
Ебоніт	3,0
Кварц	2,7
Парафін	2,1
Слюда	6,0
Скло	7,0
Фарфор	5,0

Таблиця А.2 – Питомий опір ρ_0 і температурний коефіцієнт α опору провідників

Речовина	ρ_0 **(за 20 $^{\circ}C$), $нОм \cdot м$**	α**, $град^{-1}$**
Алюміній	27	$3,6 \cdot 10^{-3}$
Графіт	$3,9 \cdot 10^{3}$	$-0,8 \cdot 10^{-3}$
Залізо	98	$6,2 \cdot 10^{-3}$
Мідь	17	$4,2 \cdot 10^{-3}$

Періодична система хімічних елементів Д. І. Менделєєва

Період	Ряд	Групи I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			
1	1	H 1 1,0079 Гідроген Водень							He 2 4,0026 Гелій			
2	2	Li 3 6,941 Літій	Be 4 9,012 Берилій	B 5 10,81 Бор	C 6 12,011 Карбон Вуглець	N 7 14,0067 Нітроген Азот	O 8 15,999 Оксиген Кисень	F 9 18,998 Флуор Фтор	Ne 10 20,179 Неон			
3	3	Na 11 22,990 Натрій	Mg 12 24,305 Магній	Al 13 26,981 Алюміній	Si 14 28,086 Силіцій Кремній	P 15 30,973 Фосфор	S 16 32,06 Сульфур Сірка	Cl 17 35,453 Хлор	Ar 18 39,948 Аргон			
4	4	K 19 39,098 Калій	Ca 20 40,08 Кальцій	21 44,956 Sc Скандій	22 47,90 Ti Титан	23 50,941 V Ванадій	24 51,996 Cr Хром	25 54,938 Mn Манган Марганець		26 55,847 Fe Ферум Залізо	27 58,933 Co Кобальт	28 58,70 Ni Нікол Нікель
	5	29 63,546 Cu Купрум Мідь	30 65,39 Zn Цинк	Ga 31 69,72 Галій	Ge 32 72,59 Германій	As 33 74,921 Арсен Миш'як	Se 34 78,96 Селен	Br 35 79,904 Бром	Kr 36 83,80 Криптон			
5	6	Rb 37 85,468 Рубідій	Sr 38 87,62 Стронцій	39 88,906 Y Ітрій	40 91,22 Zr Цирконій	41 92,906 Nb Ніобій	42 95,94 Mo Молібден	43 [98,906] Tc Технецій		44 101,07 Ru Рутеній	45 102,905 Rh Родій	46 106,4 Pd Паладій
	7	47 107,868 Ag Аргентум Срібло	48 112,41 Cd Кадмій	In 49 114,82 Індій	Sn 50 118,71 Станум Олово, цина	Sb 51 121,75 Стибій	Te 52 127,60 Телур	I 53 126,904 Іод Йод	Xe 54 131,30 Ксенон			
6	8	Cs 55 132,91 Цезій	Ba 56 137,33 Барій	57 138,905 *La Лантан	72 178,49 Hf Гафній	73 180,948 Ta Тантал	74 183,85 W Вольфрам	75 186,207 Re Реній		76 190,2 Os Осмій	77 192,22 Ir Іридій	78 195,09 Pt Платина
	9	79 196,967 Au Аурум Золото	80 200,59 Hg Меркурій Ртуть	Tl 81 204,37 Талій	Pb 82 207,2 Плюмбум Свинець, оливо	Bi 83 208,980 Бісмут Вісмут	Po 84 [209] Полоній	At 85 [210] Астат	Rn 86 [222] Радон			
7	10	Fr 87 [223] Францій	Ra 88 226,025 Радій	89 [227] **Ac Актиній	104 [261] Unq Уннілквадій	105 [262] Unp Уннілпентій	106 [263] Unh Уннілгексій	107 [264] Uns Уннілсептій		108 [265] Uno Уннілоктій	109 [266] Une Унніленій	110 [272] Uun Унуннілій
Вищі оксиди		R_2O	RO	R_2O_3	RO_2	R_2O_5	RO_3	R_2O_7	RO_4			
Леткі водневі сполуки					RH_4	RH_3	H_2R	HR				

*Лантаноїди	58 140,12 Ce Церій	59 140,908 Pr Празеодим	60 144,24 Nd Неодим	61 [145] Pm Прометій	62 150,36 Sm Самарій	63 151,96 Eu Європій	64 157,25 Gd Гадоліній	65 158,925 Tb Тербій	66 162,50 Dy Диспрозій	67 164,93 Ho Гольмій	68 167,26 Er Ербій	69 168,934 Tm Тулій	70 173,04 Yb Ітербій	71 174,97 Lu Лютецій
**Актиноїди	90 232,038 Th Торій	91 [231] Pa Протактиній	92 238,029 U Уран	93 [237] Np Нептуній	94 [244] Pu Плутоній	95 [243] Am Америцій	96 [247] Cm Кюрій	97 [247] Bk Берклій	98 [251] Cf Каліфорній	99 [254] Es Ейнштейній	100 [257] Fm Фермій	101 [258] Md Менделевій	102 [259] No Нобелій	103 [260] Lr Лоуренсій

Порядковий номер
Символ елемента
26 55,847 Fe Ферум Залізо
Атомна маса
Назва елемента

Навчальне видання

Ігнатенко Вікторія Михайлівна,
Нефедченко Василь Федорович,
Опанасюк Анатолій Сергійович

Посібник до практичних занять із фізики

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 2

Художнє оформлення обкладинки В. Ф. Нефедченка
Редакторка Н. М. Мажуга
Комп’ютерне верстання В. М. Ігнатенко

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 8,66. Обл.-вид. арк. 7,35. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.