Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Дворниченко А. В.

АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Конспект лекцій

у двох частинах

Частина 2

Суми
Сумський державний університет
2024

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Конспект лекцій

для здобувачів спеціальності
113 «Прикладна математика»
всіх форм здобуття вищої освіти

У двох частинах
Частина 2

Затверджено на засіданні
кафедри Прикладної математики
та моделювання складних систем
конспект лекцій з дисципліни
«Алгебра та аналітична
геометрія».
протокол №12 від 05.12.2023.

Суми
Сумський державний університет
2024

Алгебра та аналітична геометрія : конспект лекцій : у двох частинах / укладач А. В. Дворниченко. — Суми : Сумський державний університет, 2024. — Частина 2. — 125 с.

Кафедра прикладної математики та моделювання
складних систем

Зміст

С.

Лекція 13

Поліноми та дії над ними. Схема Горнера

13.1 Поліноми від однієї змінної

Означення 1 Формальним степеневим рядом від змінної x із коефіцієнтими із кільця R (або, іншими словами, над кільцем R, над кільцем коефіцієнтів R) є вираз вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i, \quad a_i \in R, i = 0, 1, \cdots . \tag{13.1}$$

$a_i \in R$ називають *коефіцієнтами ряду*. Коефіцієнт a_0 називають *вільним членом*. За домовленість вважають $x^0 = 1; a_0x^0 = a_0$.

Два ряди збігаються тоді й лише тоді (за визначенням), коли в них однакові відповідні коефіцієнти.

Доданки ряду з нульовими коефіцієнтами можна не писати. Якщо всі коефіцієнти дорівнюють нулю, то ряд позначають символом 0.

ПРИКЛАД 1

Вираз

$$2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$$

є формальним степеневим рядом із вільним членом 2. Коефіцієнтом при x^{14} є 16. ∎

Означення 2 Поліномом або многочленом, називають вираз виду

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{13.2}$$

де $a_i \in P$ (P-числове поле), а x – *незалежна змінна*, величини a_i називають *коефіцієнтами полінома*, а вирази a_ix^{n-i} – *членами або мономами полінома* $f(x)$, при цьому $n - i$ – *ступенем монома.*

Якщо $a_0 \neq 0$, то n називають *ступенем* полінома й позначають $\deg f$, а $a_0 x^n$ – його *старшим членом*. Коефіцієнт a_n називають *вільним членом*.

Поліном $f(x) = 0$ називають *нульовим*; його ступінь не визначено. Поліноми 1-, 2-, 3-го ступенів називають лінійними, квадратними й кубічними відповідно. Поліноми нульового ступеня разом із нульовим многочленом називають *константами*.

ПРИКЛАД 2

Вираз

$$1 + 5x + 25x^2 + 125x^3 + \cdots + 5^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 5^i x^i$$

є степеневим рядом над кільцем цілих чисел із вільним членом 1. Цей ряд не є многочленом, оскільки в ньому нескінченно багато ненульових доданків. $125x^3$ є одним із одночленів цього ряду.

Ряд

$$-12x^7 - 7x^3 + x^2$$

є многочленом над кільцем цілих чисел степеня 7 із нульовим вільним членом, старшим членом (мономом, одночленом, доданком) $-12x^7$ і старшим коефіцієнтом -12. ∎

З означення 2 видно, що поліном має кінцеве число коефіцієнтів. Коефіцієнти полінома утворюють нескінченну послідовність, у якій лише кінцеве число елементів відмінне від 0. Означення полінома вимагає, щоб у послідовності його коефіцієнтів хоча б один був відмінний від 0.

Для поліномів $f(x), g(x)$ нерівність $\deg f < \deg g$ виконується у двох випадках:

1) якщо $f(x) = 0, g(x) \neq 0$;

2) $f(x), g(x) \neq 0$ і їх степені порівнюються відповідно.

Степінь полінома може дорівнювати 0. Поліноми нульового степеня подано ненульовими дійсними числами.

13.2 Дії над поліномами

Означення 3 Поліноми $f(x), g(x)$ називають *рівними*, якщо вони мають однакові степені та, крім того, їх коефіцієнти при однакових степенях змінної x рівні між собою.

На множини $R[x]$ можна визначити операції додавання та множення. Ці операції будуть визначені також, як відповідні операції на числових множинах.

Нехай відомі многочлени

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_nx^m.$$

Для кожного $k \geq 0$ визначимо число c_k за допомогою рівності

$$c_k = a_k + b_k. \tag{13.3}$$

Якщо $p = \max(m, n)$, то легко зрозуміти, що $c_k = 0$, якщо $k > p$.

Означення 4 Поліном

$$s(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1} + c_kx^k,$$

де коефіцієнти c_i визначені рівністю 13.3, називають *сумою* поліномів $f(x)$ та $g(x)$.

З Означення 4 випливає така нерівність:

$$\deg s \leq \max(\deg f, \deg g).$$

Ця нерівність перетворюється на рівність, якщо:

$$\text{або} \quad \deg f \neq \deg g, \quad \text{або} \quad \deg f = \deg g,$$

але $a_n \neq -b_n$; в іншому разі нерівність стає строгою.

ПРИКЛАД 3

Знайти суму поліномів

$$f(x) = 3x^4 - 7x^2 + x - 3, \quad g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 2.$$

Розв'язування

$$f(x) + g(x) = 3x^4 + 2x^3 + (-7+5)x^2 + (1+3)x + (-3+(-2)) = \\ = 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4x - 5. \quad \blacksquare$$

Означення 5 Поліном

$$-f(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_{n-1}x^{n-1} - a_nx^n$$

називають протилежним до полінома (13.2).

Використовуючи властивості операції додавання на множині R, нескладно переконатися в тому, що визначена операція додавання має властивості асоціативності та комутативності, нульовий поліном є нейтральним елементом відносно додавання та, крім того,

$$f(x) + (-f(x)) = 0.$$

Щоб увести добуток двох многочленів, для кожного невід'ємного цілого k визначимо число

$$d_k = \sum_{i+j=k} a - ib_j. \tag{13.4}$$

$d_{n+m} = a_nb_m \neq 0$ і $d_l = 0$, якщо $l > n + m$.

Означення 6 Поліном

$$p(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_{m+n-1}x^{m+n-1} + d_{m+n}x^{m+n},$$

де коефіцієнти d_i, визначені рівністю (13.4), називають *добутком поліномів* $f(x), g(x)$.

ПРИКЛАД 4

Знайти добуток поліномів

$$f(x) = 2x^2 - x + 1, \quad g(x) = 3x - 1.$$

Розв'язування

$$f(x) \cdot g(x) = (2x^2 - x + 1) \cdot (3x - 1) =$$
$$= 2x^2 \cdot 3x + (-x) \cdot 3x + 1 \cdot 3x + 2x^2 \cdot (-1) + (-x) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) =$$
$$= 6x^3 - 3x^2 + 3x - 2x^2 + x - 1 = 6x^3 - 5x^2 + 4x - 1. \quad \blacksquare$$

Операції додавання та добутку мають такі властивості:

1) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ – комутативність додавання;

2) $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ – комутативність добутку;

3) $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$ – асоціативність додавання;

4) $f(x)(g(x)h(x)) = (f(x)g(x))h(x)$ – асоціативність добутку;

5) $f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x)$ – дистрибутивність.

Доведемо, наприклад, асоціативність добутку поліномів.

Якщо, крім поліномів

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad \text{і} \quad g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$$

є ще поліном

$$h(x) = c_0x^t + c_1x^{t-1} + \cdots + c_t, c_t \neq 0,$$

тоді коефіцієнтом при $x^{n+m+t-i}, i = \overline{0, n+m+t}$ у добутку $[f(x)g(x)]h(x)$ буде елемент

$$\sum_{j+m=i} \left(\sum_{k+i=j} a_k b_i \right) c_m = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m,$$

а в добутку $f(x)[g(x)h(x)]$ - рівне йому число

$$\sum_{j+k=i} a_k \left(\sum_{l+m=j} b_l c_m \right) = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m. \quad \blacksquare$$

Легко бачити, що в $P[x]$ константа 0 (і лише вона) є нейтральним елементом відносно додавання, тобто для будь-якого $f(x) \in P[x]$ справедливо $f(x) + 0 = f(x)$.

Операція віднімання виводиться як операція, обернена до додавання, а саме *різницею* або поліномом, одержаним у результаті віднімання поліномів $f(x)$ і $g(x)$, називають такий поліном:

$$h(x) = g(x) - f(x), \text{що} \quad f(x) + h(x) = g(x).$$

У $P[x]$ константа 1(й лише) є нейтральним елементом відносно добутку, тобто для будь-якого $f(x) \in P[x]$ виконується $f(x) \cdot 1 = f(x)$.

Для полінома $f(x) \in P[x]$ *зворотним* називають такий поліном $h(x)$, що $h(x) \cdot f(x) = 1$.

Обернений поліном, якщо він існує, позначають як $1/f(x)$. Із твердження $\deg(1/f(x)) = \deg f(x)$, звідки одержуємо, що обернений поліном існує тоді й лише тоді, коли $\deg f(x) = 0$, тобто $f(x)$– нульова константа.

Операцію ділення вводять як операцію, обернену операції добутку, а саме *операцію ділення*, або поліном, одержаний в результаті ділення націло $g(x)$ на $f(x)$, називають такий поліном:

$$h(x) = g(x)/f(x), \quad \text{що} \quad f(x)h(x) = g(x).$$

ПРИКЛАД 5

Знайти поліном $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, якщо

$$f(1) = 1; f(2) = 2; f(3) = 3.$$

Розв'язування

Для знаходження багаточлена потрібно визначити його коефіцієнти a_0, a_1, a_2. З умови задачі для коефіцієнтів маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 2, \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 3. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок СЛАУ методом Гауса. Для цього здійснюємо ряд послідовних виключень.

1) З першого рівняння $a_0 = 1 - a_1 - a_2$ підставляємо до другого

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ a_1 + 3a_2 = 1, \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 3. \end{cases}$$

2) З другого рівняння $a_1 = 1 - 3a_2$ підставимо в третє

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ a_1 + 3a_2 = 1, \\ 2a_2 = 0. \end{cases}$$

3) Використовуючи «зворотний» хід, знаходимо коефіцієнти

$$a_0 = 0; a_1 = 1; a_2 = 0.$$

Шуканий поліном має вигляд $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = x$. ∎

13.3 Ділення полінома з остачею

Нехай $f(x), g(x)$ – будь-які поліноми над полем P. Будемо говорити, що $g(x)$ діле $f(x)$ (позначення $g(x) | f(x)$), якщо

$$f(x) = q(x)g(x),$$

де $q(x)$ – деякий поліном.

Наприклад, поліном нульового степеня ділить будь-який поліном. Але не завжди один поліном ділить інший. У зв'язку із цим важливе значення має твердження, що називають теоремою про ділення з остачею.

ТЕОРЕМА 13.1 Теорема про ділення з остачею

Нехай $f(x), g(x)$ – будь-які поліноми над полем P, $g(x)$– ненульовий поліном. Тоді існує однозначно визначені поліноми $q(x)$ та $r(x)$ такі, що

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg g(x).$$

Поліноми $q(x)$ та $r(x)$ називають відповідно часткою від ділення та остачею від ділення. Остача від ділення може бути нульовим поліномом.

Доведення. Позначимо степені поліномів $f(x), g(x)$ через n та m відповідно. Доведемо спочатку існування поліномів $q(x)$ та $r(x)$. Зафіксуємо поліном $g(x)$, а поліном $f(x)$ буде змінюватися довільним чином.

Якщо $n < m$, то

$$f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x),$$

звідки випливає, що $q(x) = 0; r(x) = f(x)$.

Нехай $n \geq m$. Ураховуючи, що поліноми $f(x)$ та $g(x)$ записані за спаданням степеня, позначимо через a_0 та b_0 їх старші коефіцієнти.

Для доведення застосуємо існування поліномів $q(x)$ та $r(x)$ методом математичної індукції.

При $n = m$

$$r(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0} g(x). \tag{13.5}$$

Оскільки степені поліномів $f(x)$ та $a_0 b_0^{-1} g(x)$ рівні між собою, а їх старші коефіцієнти співпадають, тоді $\deg r(x) = \deg g(x)$. Якщо з рівності 13.5 виразити поліном $f(x)$, то стане зрозумілим, що частка дорівнює $a_0 b_0^{-1}$, а остача дорівнює $r(x)$.

Нехай $n > m$. припустимо, що для будь-якого полінома степеня, менше n, частка та остача від ділення на $g(x)$ існують. Розглянемо поліном

$$h(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g(x). \tag{13.6}$$

Нескладно зрозуміти, що $\deg h(x) < \deg f(x) = n$, тому до полінома $h(x)$ застосуємо правило індукції. Отже, знайдуться такі поліноми $v(x)$ та $r(x)$, для яких

$$h(x) = v(x)g(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg g(x) \tag{13.7}$$

із рівностей (13.6) та (13.7) легко отримати, що

$$f(x) = \left(a_0 b - 0^{-1} x^{n-m} + v(x)\right) g(x) + r(x).$$

Отже, існування частки та остачі від ділення $f(x)$ та $g(x)$ доведено.

Тепер перевіримо єдиність частки та остачі від ділення. Припустимо, що існують поліноми $q(x)$, $v(x)$, $r(x)$, $s(x)$ такі, що

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg g(x), \tag{13.8}$$

$$f(x) = v(x)g(x) + s(x), \quad \deg s(x) < \deg g(x), \tag{13.9}$$

Віднімаючи з рівності (13.8) рівність (13.9), після перетворень, приходимо до рівності

$$r(x) - s(x) = (v(x) - q(x))g(x), \quad \deg s(x) < \deg g(x), \tag{13.10}$$

Припустимо, що $r(x)$ та $s(x)$ різні. Тоді поліном $r(x) - s(x)$ нульовий, тобто $v(x) - q(x)$ теж нульовий поліном. Оскільки під час множення степені поліномів додають, то спепінь $(v(x) - q(x))g(x)$ не менше, ніж степінь $g(x)$. З іншого боку, степінь поліномів $r(x)$ та $s(x)$ строго менше степені $g(x)$; такій самій нерівності задовольняє й степінь різниці $r(x) - s(x)$, тобто, рівність (13.10) неможлива.

Отже, припущення про те, що $r(x)$ та $s(x)$ – різні поліноми, привело до протиріччя і довели, що $r(x) = s(x)$. Оскільки кільце поліномів не містить дільників нуля, та $g(x) \neq 0$, з рівності (13.10) випливає, що поліном $v(x) - q(x)$ нульовий, тобто $v(x) = q(x)$.

ПРИКЛАД 6

Необхідно поліном $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 5$ поділити з остачею на поліном $g(x) = x^2 + x - 1$.

Розв'язування

Запишемо розрахунки зручним способом (ділення «кутом» для натуральних чисел):

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + x^2 + 3x - 5 & x^2 + x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{2x^3 + x^2 - 2x \phantom{{}-5}} & 2x - 1 \\
-x^2 + 5x - 5 & \\
\underline{-x^2 - x + 1} & \\
6x - 6 &
\end{array}
$$

Отже, у результаті маємо

$$2x^3 + x^2 + 3x - 5 = (2x - 1)(x^2 + x - 1) + (6x + 6),$$

частка та остача від ділення $2x - 1$ та $6x - 6$, відповідно. ∎

Алгоритм ділення полінома на поліном аналогічний до алгоритму ділення числа на число стовпчиком або кутом, а саме:

1) записати ділене в рядок, зокрема всі степені змінної (ті, які відсутні, записати з коефіцієнтом 0);

2) записати в «куточку» дільник, зокрема всі степені змінної;

3) щоб знайти перший доданок (одночлен) у неповній частці, потрібно старший одночлен діленого поділити на старший одночлен дільника;

4) одержаний перший доданок частки помножити на весь дільник і результат записати під діленим, причому однакові ступені змінної записати один під одним;

5) від діленого відняти одержаний добуток;

6) до одержаного залишку застосувати алгоритм починаючи з пункту 1;

7) алгоритм завершено, коли одержана різниця матиме степінь, менше, ніж степінь дільника. Це – остача від ділення.

13.4 Схема Горнера

Розглянемо простий алгоритм, за допомогою якого довільний поліном $f(x)$ можна поділити з остачею на лінійний двочлен $x - c$.

Застосовуючи Теорему 13.1, запишемо

$$f(x) = g(x)(x - c) + r(x), \tag{13.11}$$

де $g(x)$ – частка, а $r(x)$ – остача від ділення. Зрозуміло, що

$$\deg g(x) = \deg f(x) - 1.$$

Нехай

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \\ g(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n. \end{aligned}$$

Якщо поліном $g(x)$ підставити в праву частину рівняння (13.11), розкрити дужки та привести подібні члени, одержимо рівність

$$f(x) = b_0x^n + (b_1 - cb_0)x^{n-1} + \cdots + (b_{n-1} + cb_{n-2})x + (r(x) - cb_{n-1}). \tag{13.12}$$

Порівнюючи коефіцієнти поліномів, що стоять у лівій та правій частинах рівняння (13.12), одержимо

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & b_0, \\ a_1 & = & b_1 - cb_0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-1} & = & b_{n-1} - cb_{n-2} \\ a_n & = & r(x) - cb_{n-1}. \end{array} \tag{13.13}$$

Із використанням певних перетворень, маємо

$$\begin{array}{lcl} b_0 & = & a_0, \\ b_1 & = & a_1 + cb_0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_{n-1} & = & a_{n-1} + cb_{n-2} \\ r(x) & = & a_n + cb_{n-1}. \end{array} \tag{13.14}$$

Рівність (13.14) дозволяє послідовно віднімати коефіцієнти частки та остачі від ділення. Алгоритм, що ґрунтується на застосуванні рівності (13.14) часто називають **схемою Горнера.**

ПРИКЛАД 7

Із застосуванням схеми Горнера, поділити поліном $f(x) = x^4+3x^2-2x$ на двочлен $x + 2$.

Розв'язування

Позначимо через $g(x) = b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3$ та $r(x)$ відповідно, частку та остачу від ділення. Із використанням (13.14) маємо

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 = 1, \\ b_1 &= a_1 + cb_0 = -2, \\ b_2 &= a_2 + cb_1 = 7, \\ b_3 &= a_3 + cb_2 = -16, \\ r(x) &= a_4 + cb_3 = 32. \end{aligned} \tag{13.15}$$

Ці розрахунки зручно записувати у вигляді таблиці

	1	0	3	-2	0
$c = -2$	1	-2	7	-16	32

Спосіб заповнення таблиці показано далі:

1) У першому рядочку записуємо всі коефіцієнти полінома $f(x)$.

2) На початку другого рядка для зручності записуємо число c.

3) Далі послідовно, почимнаючи з другої клітинки, заповнюємо другий рядок (див. рівності (13.15)).

Зауваження! Якщо необхідно виконати ділення на двочлен $g(x) = ax + b$, його перетворюють до виду $q(x) = a(x + b/a)$, тоді

$$f(x) = (ax + b)g(x) + r(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)g(x) + r(x).$$

Звідси видно, що розділивши за схемою Горнера $f(x)$ на $(x - (-b/a))$, ми знайдемо $a \cdot g(x)$. Тоді шукану частку $g(x)$ одержуємо, поділивши знайдене на a. Остача від ділення не зміниться.

Елемент c кільця K називають *коренем* полінома $f(x)$, якщо $f(c) = 0$.

ТЕОРЕМА 13.2 Теорема Безу

Поліном $f(x)$ ділиться на лінійний двочлен $x - c$ у кільці $K[x]$ тоді й лише тоді, коли c – його корінь.

Доведення. Нехай $f(x)$ ділиться на $x-c$, тобто $f(x) = (x-c)g(x)$. Тоді $f(c) = 0$.

Нехай $f(c) = 0$. Тоді в рівності $f(x) = (x - c)g(x) + r(x)$ буде $r = f(c) = 0$, тобто $f(x) = (x - c)g(x)$. ∎

ТЕОРЕМА 13.3

Число коренів ненульового полінома не перевищує його ступеня.

Доведення. Доведемо це твердження за допомогою індукції за рівнем полінома. Поліном нульового ступеня взагалі не має коренів, так що для нього твердження теореми справедливе.

Припустимо тепер, що твердження теореми справедливе для всіх поліномів степеня $n - 1$, і доведемо його для будь-якого полінома $f(x)$ степеня n. Припустимо, міркуючи від зворотного, що $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – корені поліном $f(x)$, причому $m > n$. За теоремою Безу, $f(x)$ ділиться на $x - x_1$, тобто $f(x) = (x - x_1)g(x)$, де $g(x)$– деякий поліном степеня $n - 1$. Елементи $x_2, \ldots, x_m$ кільця K є коренями полінома $g(x)$. Насправді, при $i = 2, \ldots, m$, маємо: $f(x_1) = (x_i - x_1)g(x_i)$. Оскільки $x_i - x_1 \neq 0$, а кільце K немає дільників нуля, то $g(x_i) = 0$.

Отже, поліном $g(x)$ має не менше ніж $m - 1$ коренів, що суперечить припущенню індукції, оскільки $\deg g(x) = n - 1 < m - 1$. ∎

Лекція 14

Найбільший спільний дільник. Алгоритм Евкліда

Означення 1 *Поліномом* (многочленом, багаточленом) степеня n називають функцію вигляду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{14.1}$$

де $a_n, a_{n?1}, \ldots, a_1, a_0$ коефіцієнти полінома, $a_n \neq 0$, x – змінна; n — максимальний степінь входження змінної x з ненульовим коефіцієнтом у функцію.

Якщо коефіцієнти полінома є дійсними числами, то кажуть, що поліном заданий у множині $R[x]$. Якщо коефіцієнти комплексні, то в множині $C[x]$.

Для усоблення поліноміальної функції її часто позначають $P_n(x)$, де n – показник степеня полінома.

Означення 2 *Коренем полінома* називають значення змінної $x = \alpha$, якщо $f(\alpha) = 0$.

14.1 Основна теорема алгебри

ТЕОРЕМА 14.1 Основна теорема алгебри

Комплексний поліном степеня $n > 0$ має рівно n комплексних коренів, з урахуванням кратності.

Інакше кажучи, його можна розкласти на n лінійних множників

$$P_n(\alpha) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n), \tag{14.2}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in C$ - корені полінома.

Якщо $x = \alpha$ є коренем полінома, то $P_n(\alpha) = (x - \alpha) \cdot Q_{n-1}(x)$, тобто поліном $P_n(x)$ без остачі ділиться на біном $x - \alpha)$. Поліном $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b - 1x + b_0$ носить назву *частки від ділення* $P_n(x)$ на $x - \alpha$.

У разі, коли деяке значення змінної $x = c$ не є коренем полінома, ділення полінома набирає вигляду

$$P_n(c) = (x - c) \cdot Q_{n-1}(x) + r_1, \tag{14.3}$$

де $Q_{n-1}(x)$ – *неповна частка від ділення* $P_n(x)$ на $x - c$, r_1 -– число, остача від ділення $P_n(x)$ на $x - c$, $r_1 \in C$.

Розглянемо (14.3) більш детально.

$$\begin{aligned} &a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \\ &= (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b - 1x + b_0) + r_1. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Для обчислення значення полінома в точці $x = c$ достатньо підставити це значення у поліном. Із правої частини (14.4) бачимо, що $P_n(c) = r_1$.

Отже, *значення полінома в довільній точці* $x = c$ дорівнює *остачі від ділення полінома* $P_n(x)$ на біном $x - c$.

14.2 Розкладання полінома за степенями бінома $x - c$

Задача полягає у розкладенні полінома (14.1) за степенями бінома $x - c$, тобто подати поліном у вигляді

$$P_n(x) = p_n(x - c)^n + p_{n-1}(x - c)^{n-1} + \ldots + p_1(x - c) + p_0.$$

Для ділення $P_n(x)$ на біном $x - c$ застосуємо схему Горнера.

Звернемо увагу, що в комірках другого стовпчика з першої до передостанньої стоять коефіцієнти неповної частки $Q_{n-1}(x)$. Це поліном зі степенем на 1 меншим, ніж у вихідного полінома. Його теж можна розділити на $x - c$, використовуючи схему Горнера. Процес ділення $Q_{n-1}(x)$ на $x - c$ можна подати так:

$$Q_{n-1}(x) = (x - c) \cdot M_{n-2}(x) + r_2, \tag{14.5}$$

$M_{n-2} = d_{n-2}x^{n-2} + d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + dd_1 x + d_0$ – неповна частка, $r_2 \in C$ – остача від ділення $Q_{n-1}(x)$ на $x - c$. Коефіцієнти для $M_{n-2}(x)$ беруть із відповідної схеми Горнера.

Підставимо (14.5) у (14.3):

$$\begin{aligned} P_n(x) = (x - c) \cdot ((x - c) \cdot M_{n-2}(x) + r_2) + r_1 = \\ (x - c)^2 \cdot M_{n-2}(x) + (x - c) \cdot r_2 + r_1 \end{aligned} \tag{14.6}$$

Процес розкладання виконуємо до полінома $V_1 = a_n(x-c) + r_n$. Розкладання кожного разу підставляємо до $P_n(x)$. На кінцевому етапі матимемо розкладання

$$P_n(x) = a_n(x-c)^n + (x-c)^{n-1}r_n + (x-c)^{n-2}r_{n-1} + \ldots + \\ +(x-c)^2 r_3 + (x-c)r_2 + r_1. \quad (14.7)$$

Тобто коефіцієнти розкладання будуть такі:

$$p_n = a_n; p_{n-1} = r_n; \ldots; p_1 = r_2; p - 0 = r_1.$$

ПРИКЛАД 1

Розкласти за степенями бінома $x - 2i$ поліном

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 7.$$

Розв'язування

Складемо схему Горнера ділення $P_4(x)$ на біном $x-2i$ подано в таблиці 1: Отже,

Таблиця 1 – Коефіцієнти ділення полінома $P_4(x)$ на біном $x - 2i$ за схемою Горнера

	1	-2	1	-5	7
$c = 2i$	1	-2+2i	-3-4i	3-6i	19+6i

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 7 = \\ = (x-2i)(x^3 - (2-2i)x^2 - (3+4i)x + 3 - 6i) + 19 + 6i.$$

Застосуємо схему Горнера для $Q_3(x) = x^3 - (2-2i)x^2 - (3+4i)x + 3 - 6i$, (таб. 2).

Отже,

$$x^3 - (2-2i)x^2 - (3+4i)x + 3 - 6i = \\ = (x-2i)(x^2 - (2-4i)x - 11 - 8i) + 19 - 28i.$$

Таблиця 2 – Коефіцієнти ділення полінома $Q_3(x)$ на біном $x - 2i$ за схемою Горнера

	1	-2+2i	-3-4i	3-6i
$c = 2i$	1	-2+4i	-11-8i	19-28i

Підставимо розкладання$Q_3(x)$ до $P_4(x)$

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 7 = \\ &= (x-2i)(x^3 - (2-2i)x^2 - (3+4i)x + 3 - 6i) + 19 + 6i = \\ &= (x-2i)\big((x-2i)(x^2 - (2-4i)x - 11 - 8i) + 19 - 28i\big) + 19 + 6i = \\ &= (x-2i)^2(x^2 - (2-4i)x - 11 - 8i) + (x-2i)(19-28i) + 19 + 6i. \end{aligned}$$

Застосуємо схему Горнера для $M_2(x) = x^2 - (2-4i)x - 11 - 8i$ (таб. 3):

Таблиця 3 – Коефіцієнти ділення полінома $M_2(x)$ на біном $x - 2i$ за схемою Горнера

	1	-2+4i	-11-8i
$c = 2i$	1	-2+6i	-23-12i

$$M_2(x) = (x-2i)(x - 2 + 6i) - 23 - 12i.$$

Підставимо розкладання $M_2(x)$ до $P_4(x)$

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 7 = \\ &= (x-2i)^2(x^2 - (2-4i)x - 11 - 8i) + \\ &\quad + (x-2i)(19-28i) + 19 + 6i = \\ &= (x-2i)^2\left((x-2i)(x-2+6i) - 23 - 12i\right) + \\ &\quad + (x-2i)(19-28i) + 19 + 6i = \\ &= (x-2i)^3(x-2+6i) - (x-2i)^2(23+12i) + \\ &\quad + (x-2i)(19-28i) + 19 + 6i. \end{aligned}$$

Застосуємо схему Горнера для $V_1(x) = x - 2 + 6i$ (таб. 4):

$$V_1(x) = (x-2i) \cdot 1 - 2 + 8i.$$

Таблиця 4 – Коефіцієнти ділення полінома $V_1(x)$ на біном $x - 2i$ за схемою Горнера

	1	-2+6i
$c = 2i$	1	-2+8i

Підставимо розкладання $V_1(x)$ до $P_4(x)$

$$\begin{aligned}P_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 7 = \\ &= (x-2i)^3(x-2+6i) - (x-2i)^2(23+12i) + \\ &\quad + (x-2i)(19-28i) + 19 + 6i = \\ &= (x-2i)^3\left((x-2i) - 2 + 8i\right) - (x-2i)^2(23+12i) + \\ &\quad + (x-2i)(19-28i) + 19 + 6i = \\ &= (x-2i)^4 - (x-2i)^3(2-8i) - (x-2i)^2(23+2i) + \\ &\quad + (x-2i)(19-28i) + 19 + 6i.\end{aligned}$$

Одержали розкладання полінома $P_4(x)$ за степенями бінома $x - 2i$

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 7 &= (x-2i)^4 - (x-2i)^3(2-8i) - \\ &- (x-2i)^2(23+2i) + (x-2i)(19-28i) + 19 + 6i.\end{aligned}$$

Коефіцієнти розкладання

$$p_4 = 1; p_3 = -2 + 8i; p_2 = -23 - 12i; p_1 = 19 - 28i; p_0 = 19 + 16i.$$

Процес розкладання можна позбавити громіздких викладок, якщо помітити, що коефіцієнтами розкладання є остачі в кожному розкладанні поліномів за схемою Горнера.

Для наочності процесу доцільно всі схеми об'єднати в одну.

Об'єднана схема Горнера репрезентована в таблиці 5

Із таблиці 5 бачимо, що коефіцієнти розкладання полінома за степенями $x-2i$ розташовані в останніх комірках кожного рядка та є коефіцієнтами біля степенів $x-2i$, розміщених у порядку зростання згори донизу. ∎

14.3 Похідна полінома

Означення 3 Нехай $f(x)$ – поліном над полем $P[x]$ характеристики 0, де $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. *Похідною*

Таблиця 5 – Об'єднана схема Горнера ділення полінома $P_4(x)$ на біном $x - 2i$

	1	-2	1	-5	7
$c = 2i$	1	-2+2i	-3-4i	3-6i	19+6i
$c = 2i$	1	-2+4i	-11-8i	19-28i	
$c = 2i$	1	-2+6i	23-12i		
$c = 2i$	1	-2+8i			
$c = 2i$	1				

полінома $f(x)$ називаєтся поліном

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1 + 0.$$

Оскільки характеристика поля P дорівнює 0, то похідна від полінома n-ї $(n > 0)$ є поліном $n - 1$ степеня.

ТЕОРЕМА 14.2

Нехай $f(x), g(x) \in P[x]$, тоді

1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;

2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

3) $(f^k(x))' = kf^{k-1}f'(x)$.

14.4 Обчислення похідних полінома в точці $x = c$

Задача полягає в обчисленні значення похідних полінома (14.1) до n-ї включно в точці $x = c$.

Із попередньої задачі маємо розкладання полінома $P_n(x)$ за степенями бінома $x - c$ (14.7)

$$P_n(x) = a_n(x-c)^n + (x-c)^{n-1}r_n + (x-c)^{n-2}r_{n-1} + \ldots + \\ + (x-c)^2 r_3 + (x-c)r_2 + r_1.$$

Для одержання значень похідних полінома до n-ї включно в точці $x = c$ запишемо розкладання функції в ряд Тейлора в околі точки $x = c$ і порівняємо два розкладання.

Ряд Тейлора для будь-якої безкінечно диференційованої функції $f(x)$ в околі точки $x = c$ має такий вигляд

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots,$$

де $f(c), f'(c), \ldots, f^{(n)}(c)$ – значення функції та її похідних у точці $x = c$.

У нашому прикладі $P_n(x)$ є функція, диференційована n разів, отже, для неї ряд Тейлора набере вигляду

$$P_n(x) = P_n(c) + \frac{P_n'(c)}{1!}(x-c) + \frac{P_n''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots, \tag{14.8}$$

де $P_n(c), P_n'(c), \ldots, P_n^{(n)}(c)$ – значення полінома та його похідних у точці $x = c$.

Порівняємо (14.7) та (14.8)

$$\begin{aligned} & a_n(x-c)^n + (x-c)^{n-1}r_n + (x-c)^{n-2}r_{n-1} + \ldots + \\ & \quad + (x-c)^2 r_3 + (x-c)r_2 + r_1 = \\ & \frac{P_n^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{P_n^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + \ldots + \\ & \quad + \frac{P_n''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{P_n'(c)}{1!}(x-c) + P_n(c). \end{aligned}$$

З порівняння можна записати таке

$$\begin{aligned} & P_n(c) = r_1; P_n'(c) = r_2; \\ & \frac{P_n''(c)}{2!} = r_3 \Rightarrow P_n''(c) = 2! \cdot r_3; \\ & \frac{P_n^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} = r_{n-1} \Rightarrow P_n^{(n-1)}(c) = (n-1)! \cdot r_n; \\ & \frac{P_n^{(n)}(c)}{n!} = a_n \Rightarrow P_n^{(n)}(c) = n! \cdot a_n; \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 2

Обчислити значення похідних полінома з прикладу 1

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 7$$

до 4-ї включно в точці $x = 2i$.

Розв'язування

Розглянемо об'єднану схему Горнера з прикладу 1. В останній комірці кожного рядка маємо значення $r_i, \quad i = \overline{1,4}$.

$$\begin{array}{lll}
r_1 = 19 + 6i & \Rightarrow & P_4(2i) = r_1 = 19 + 6i; \\
r_2 = 19 + 28i & \Rightarrow & P_4'(2i) = 19 + 28i; \\
r_3 = -23 - 12i & \Rightarrow & P_4''(2i) = 2! \cdot (-23 - 2i) = -46 - 24i; \\
r_4 = -2 + 8i & \Rightarrow & P_4^{III}(2i) = 3! \cdot (-2 + 8i) = -12 + 48i; \\
a_5 = 1 & \Rightarrow & P_4^{IV}(2i) = 4! = 24. \quad \blacksquare
\end{array}$$

14.5 Подільність поліномів

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ поліноми з $F[x]$, причому $g(x) \neq 0$. Поліном $f(x)$ ділиться на $g(x)$, якщо для деякого $q(x) \in F[x]$ маємо

$$f(x) = q(x)g(x),$$

тобто остача при діленні $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює нулю.

Властивості

1) Якщо $f(x) \vdots g(x)$ і $g(x) \vdots h(x)$, то $f(x) \vdots h(x)$.

2) Якщо $f(x) \vdots g(x)$ і $h(x) \vdots g(x)$, то $(f(x) + h(x)) \vdots g(x)$.

3) Якщо $f(x) \vdots g(x)$ і $f(x)h(x) \vdots g(x)$ для будь-якого $h(x)$.

4) Будь-який поліном ділиться на довільну ненульову константу.

5) Якщо $f(x) \vdots g(x)$ і $f(x) \vdots cg(x)$ з ненульовою константою c.

6) Щоб поліном $f(x)$ ділився на поліном $g(x)$ того ж степеня, необхідно і достатньо, щоб $f(x) = cg(x)$ для деякої константи c.

7) Для того, щоб $f(x)\vdots g(x)$ і $g(x)\vdots h(x)$, то $f(x)\vdots h(x)$, необхідно й достатньо, щоб $f(x) = cg(x)$ для деякої константи c.

Означення 4 Поліном $d(x)$ називають *спільним дільником* $f(x)$ і $g(x)$, якщо $d(x)\vdots f(x)$ і $d(x)\vdots g(x)$.

Означення 5 Загальний дільник $d(x)$ називають *найбільшим*, якщо він ділиться на будь-який інший спільний дільник поліномів $f(x)$ та $g(x)$.

ТЕОРЕМА 14.3

Для будь-яких $f(x), g(x) \in F[x]$, одночасно не рівних нулю, їх найбільший спільний дільник визначений однозначно з точністю до множника c, де c - довільна ненульова константа.

Доведення. Доведемо, що якщо НСД існує, то він визначений з точністю до множника c. Якщо $d(x), d_1(x)$ – найбільші спільні дільники поліномів $f(x)$ та $g(x)$, то $d_1(x)\vdots d_(x)$ і $d(x)\vdots d_1(x)$, за властивістю 7, маємо, що $d(x) = cd_1(x)$ для деякої константи c.

Для подальшого доведення застосуємо алгоритм Евкліда.

14.6 Алгоритм Евкліда

Для доведення існування НСД наведемо алгоритм Евкліда знаходження НСД. Якщо $f(x) \neq 0$, а $g(x) = 0$, nj pf як найбільший спільний дільник можна взяти $f(x)$. Тому, можна вважати, що $g(x) \neq 0$.

Розділимо $f(x)$ на $g(x)$, у частці одержимо $q_1(x)$, у остачі – $r_1(x)$. Якщо $r_1(x) \neq 0$, то розділимо $g(x)$ на $r_1(x)$, у частці одержимо $q_2(x)$, в остачі – $r_2(x)$, тощо. Обчислення продовжують доти, доки на деякому кроці s обчислений у результаті чергового поділу залишок $r_{s+1}(x)$ не буде нульовим. Доведемо, що $r_s(x)$ є найбільшим спільним дільником поліномів $f(x)$ та $g(x)$.

Маємо

$$\begin{array}{ll}
f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x), & (1)\\
g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x), & (2)\\
r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x), & (3)\\
\ldots & \\
r_{s-3}(x)=q_{s-1}(x)r_{s-2}(x)+r_{s-1}(x), & (s-1)\\
r_{s-2}(x)=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x), & (s)\\
r_{s-1}(x)=q_{s+1}(x)r_s, & (s+1)
\end{array}$$

З останньої рівності випливає, що $r_{s-1}(x) \vdots r_s(x)$. Тому в правій частині передостанньої рівності перший доданок ділиться на $r_s(x)$. Оскільки другий доданок, так само ділиться на $r_s(x)$, то й права частина ділиться на $r_s(x)$, тому на $r_s(x)$ ділиться й ліва частина цієї рівності, тобто $r_{s-2}(x)$.

Розглядаючи ці рівності знизу вгору, приходимо до висновку, що на $r_s(x)$ діляться всі праві та ліві частини всіх рівностей, тобто $f(x) \vdots r_s(x)$ та $g(x) \vdots r_s(x)$, тобто $r_s(x)$ – спільний дільник поліномів $f(x)$ та $g(x)$.

Покажемо, що будь-який спільний дільник $d(x)$ поліномів $f(x)$ та $g(x)$ є дільником полінома $r_s(x)$. Оскільки $f(x) \vdots d(x)$ і $g(x) \vdots d(x)$, то одержуємо, що $r_1(x) \vdots d(x)$. Далі, оскільки $g(x) \vdots d(x)$ і $r_1(x) \vdots d(x)$, то і $r_2(x) \vdots d(x)$. Розглядаючи далі ці рівності зверху вниз, приходимо до висновку, що $r_s(x) \vdots d(x)$. ∎

ТЕОРЕМА 14.4

Нехай $f(x), g(x), d(x)$ – ненульові поліноми з $F[x]$ та $d(x)$ – НСД поліномів $f(x)$ та $g(x)$. Тоді знайдуться такі $u(x)$ та $v(x)$ з $F[x]$, що

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$

Причому $\deg u(x) < \deg g(x)$, а $\deg v(x) < \deg f(x)$. Поліноми $u(x)$ та $v(x)$ називають **коефіцієнтами Безу**.

ПРИКЛАД 3

У кільці $R[x]$ поліномів із дійсними коефіцієнтами знайти найбільший спільний дільник поліномів

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, \quad g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$$

Розв'язування

Поділивши $f(x)$ на $g(x)$, одержуємо:

$$x^4+3x^3-x^2-4x-3 = (3x^3+10x^2+2x-3)\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)+\left(-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}\right).$$

Для зручності помножимо отриманий залишок на $9/5$. При цьому подальші остачі також збільшаться на деякі числа, відмінні від нуля, що несуттєво при знаходженні найбільшого спільного дільника, оскільки він знаходиться з точністю до константи.

Виконавши друге ділення, маємо, що:

$$3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 5x + 6)(3x - 5) + (9x + 27).$$

Одержану остачу від ділення поділимо на 9 і виконаємо третє ділення. У результаті одержуємо, що

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2).$$

Оскільки остача від ділення дорівнює нулю, то НСД $= x + 3$. ∎

Лінійне уявлення найбільшого спільного дільника поліномів можна знаходити двома способами: за допомогою алгоритму Евкліда чи методом невизначених коефіцієнтів. Алгоритм Евкліда дає також спосіб знаходження поліномів $u(x)$ і $v(x)$ з теореми про лінійне представлення НСД(f, g). Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
&r_0 = u_0 f + v_0 g, \quad u_0 = 1, v_0 = -q_0;\\
&r_1 = u_1 f + v_1 g, \quad u_1 = -q_1, v_1 = q_0 q_1 + 1;\\
&r_2 = r_0 - r_1 q_2 = f(u_0 - u_1 q_2) + g(v_0 - v_1 q_2), \text{тобто}\\
&r_2 = f u_2 + g v_2, \quad u_2 = -u_1 q_2 + u_0, v_2 = -v_1 q_2 + v_0;\\
&r_3 = f u_3 + g v_3, \quad u_3 = -u_2 q_3 + u_1, v_3 = -v_2 q_3 + v_1.
\end{aligned}$$

Продовжуючи, індуктивно одержимо для $k > 2$

$$r_k = fu_k + gv_k, \quad u_k = -u_{k-1}q_k + u_{k-2}, v_k = -v_{k-1}q_k + v_{k-2}.$$

І нарешті для $d = r_n$

$$d = fu_n + gv_n, \quad u_n = -u_{n-1}q_n + u_{n-2}, v_n = -v_{n-1}q_n + v_{n-2}.$$

ПРИКЛАД 4

Знайти лінійний вираз найбільшого спільного дільника $d(x)$ поліномів $f(x)$ і $g(x)$ з прикладу 3.

Розв'язування

Результати ділення з остачею, виконані під час розв'язання прикладу, показують, що

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) g(x) - \frac{5}{9}(x^2+5x+6), \quad g(x) = (3x-5)(x^2+5x+6)+9(x+3).$$

Звідси знайдемо

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= \frac{9}{5}f(x) + \frac{1}{5}(3x-1)g(x), \\ x + 3 &= \frac{1}{9}g(x) - \frac{1}{9}(3x-5)(x^2+5x+6) = \\ &= \frac{1}{5}(3x-5)f(x) + \frac{1}{9}g(x) - \frac{1}{45}(3x-5)(3x-1)g(x) = \\ &= \frac{1}{5}(3x-5)f(x) - \frac{1}{5}(x^2-2x)g(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$u(x) = \frac{1}{5}(3x-5), \quad v(x) = -\frac{1}{5}(x^2-2x). \qquad \blacksquare$$

На практиці лінійний вираз полінома $h(x)$ зручніше шукати не за допомогою алгоритму Евкліда, а **методом невизначених коефіцієнтів**.

Запишемо шукані поліноми $u(x)$ і $v(x)$ в загальному вигляді з певними невідомими коефіцієнтами. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у рівності $h = uf + vg$, одержимо систему рівнянь для коефіцієнтів поліномів u та v. Ці рівняння будуть лінійними.

Для застосування цього методу необхідно заздалегідь знати оцінки ступенів багаточленів u та v (інакше ми не знатимемо, у якому загальному вигляді їх записати).

ПРИКЛАД 5

Знайти лінійний вираз полінома $h = x - 2$ через поліноми

$$f = x^2 + 2, g = x^3 + x - 1.$$

Розв'язування

Ці поліноми мають різні корені (корені першого полінома рівні $\pm\sqrt{2i}$, ці корені не є коренями другого полінома, у чому можна переконатися безпосередньою перевіркою) і, за теоремою Безу мають різні розкладання на лінійні множники виду $ax + b$. Тому вони взаємно прості.

Тоді шуканий лінійний вираз існує, причому багаточлени u і v можна знаходити у вигляді $u = a_0x^2 + a_1x + a_2, v = b_0x + b_1$. Прирівнюючи коефіцієнти в разі однакових степенів x у рівності $(a_0x^2 + a_1x + a_2)(x^2 + 2) + (b_0x + b_1)$, одержуємо такі співвідношення:

$$\begin{cases} a_0 & & & +b_0 & & = & 0 \\ & a_1 & & & +b_1 & = & 0 \\ 2a_0 & & +a_2 & +b_0 & & = & 0 \\ & 2a_1 & & -b_0 & +b_1 & = & 1 \\ & & 2a_2 & & -b_1 & = & -2. \end{cases}$$

Звідси знаходимо: $a_0 = 1; a_1 = 0; a - 2 = -1; b_0 = -1; b_1 = 0$, тобто $u = x^2 - 1, v = -x$.

Іноді під час складання лінійних рівнянь для коефіцієнтів поліномів u, v зручніше не прирівнювати коефіцієнти в разі однакових степенів x, а надавати x різні значення, розв'язуючи одержану систему рівнянь. Надаючи x значення $0; \pm1; \pm2$, одержуємо систему рівнянь виду

$$\begin{cases} & & 2a_2 & & -b_0 & = & -2 \\ 3a_0 & +3a_1 & +3a_2 & +b_0 & +b_1 & = & -1 \\ 3a_0 & -3a_1 & +3a_2 & +3b_0 & -3b_1 & = & -3 \\ 24a_0 & +12a_1 & +6a_2 & +18b_0 & +9b_1 & = & 0 \\ 24a_0 & -12a_1 & +6a_2 & +22b_0 & -11b_1 & = & -4. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Розглянемо ще один приклад

ПРИКЛАД 6

Знайти лінійне представлення НСД $(f, g) = x + 1$ для поліномів

$$f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{та} \quad g(x) = x^4 - 1.$$

Розв'язування

Будемо шукати з умови, що $fu + gv = d$ функції u та v так:

$u = ax^2 + bx + c; v = ex^3 + kx^2 + lx + m,$

$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c) + (x^4 - 1)(ex^3 + kx^2 + lx + m) = x + 1.$

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти, одержуємо систему

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & x^7 & a + e = 0, \\ \text{при} & x^6 & a + b + k = 0, \\ \text{при} & x^5 & a + b + c + l = 0, \\ \text{при} & x^4 & a + b + c + m = 0, \\ \text{при} & x^3 & a + b + c - e = 0, \\ \text{при} & x^2 & a + b + c - k = 0, \\ \text{при} & x^1 & b + c - l = 1, \\ \text{при} & x = 0 & c - m = 1, \end{array}\right\}$$

Розв'язуючи систему, одержуємо, що

$$a = -\frac{1}{3}; b = 0; c = \frac{2}{3}; e = \frac{1}{3}; k = \frac{1}{3}; l = -\frac{1}{3}; m = -\frac{1}{3}.$$

Отже, лінійне представлення НСД $(f, g) = x + 1$ для поліномів $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ та $g(x) = x^4 - 1$ набуває вигляду

$$u(x) = \frac{1}{3}(-x^2 + 2); v(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 - x - 1). \quad \blacksquare$$

14.7 Взаємно прості поліноми

Означення 6. Поліноми $f(x)$, $g(x)$ називають *взаємно простими*, якщо

$$НСД(f(x), g(x)) = c, \quad c \neq 0 = const.$$

Оскільки НСД двох поліномів визначається лише з точністю до множника нульового степеня, то можна вважати, що $f(x)$ та $g(x)$ – взаємно прості, якщо

$$НСД(f(x), g(x)) = 1.$$

Згідно з теоремою 14.4 $u(x)$, $v(x)$ такі, що

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1,$$

де $\deg u(x) < \deg g(x); \deg v(x) < \deg f(x)$ для взаємно простих поліномів.

Властивості взаємно простих поліномів

1) Якщо $(f(x), g(x)) = 1$ та $(f(x), h(x)) = 1$, то $(f(x), g(x)h(x)) = 1$.

2) Якщо $(f(x), g(x)) = 1$ і добуток $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$, то $h(x)$ ділиться на $g(x)$.

3) Якщо $f(x)$ ділиться на поліноми $g(x)$ та $h(x)$ і $(g(x), h(x)) = 1$, то $f(x)$ ділиться на добуток $g(x)h(x)$.

4) Якщо $(f(x), g(x)) = h(x) \neq 0$, то $\left(\frac{f(x)}{h(x)}, \frac{g(x)}{h(x)}\right) = 1$.

Поліноми $f_1(x), \ldots, f_s(x), s > 2$ називають *взаємно простими*, якщо їх

$$НСД(f_1(x), \ldots, f_s(x)) = 1.$$

Поліноми $f_1(x), \ldots, f_s(x), s > 2$ називають *попарно взаємно простими*, якщо кожні два з них є взаємно простими.

Якщо многочлени попарно взаємно прості, то вони всі взаємно прості. Обернене твердження неправильне.

Лекція 15

Відділення кратних коренів. Раціональні дроби

15.1 Відділення кратних коренів

15.1.1 Кратні корені поліномів

Означення 1 Нехай $k \in N$. Елемент c поля F називають k – кратним коренем полінома $f(x) \in F[x]]$, якщо $f(x)$ ділиться в кільці $F[x]$ на $(x-c)^k$ і не ділиться на $(x-c)^{k+1}$. Корені кратності >1 називають *кратними*, а 1-кратні корені – *простими*. Якщо $k = 2$ або $k = 3$, то c називають подвійним або потрійним коренем полінома $f(x)$.

ТЕОРЕМА 15.1

Поліном $f(x)$ степеня $n > 0$ над полем F має в цьому полі не більше n коренів з урахуванням їх кратностей, тобто якщо $c_1, \ldots, c_m$ – різні корені полінома $f(x)$ у полі F і їх кратності дорівнюють, відповідно $k_1, \ldots, k_m$, то $k_1 + \ldots + k_m \leq n$.

Твердження. Корінь c полінома $f(x) \in F[x]$ є простим тоді й лише тоді, коли c не є коренем його похідної $f'(x)$, тобто $f'(c) \neq 0$.

15.1.2 Незвідні множники полінома та його похідної

Означення 2 Поліном $p(x)$ називають *розкладним*, якщо його можна представити у вигляді добутку $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ так, щоб обидва множники мали додатній степінь: $\deg g; \deg h > 0$.

Якщо ж таке розкладення неможливе, то цей поліном $p(x)$ називають *нерозкладним, або незвідним.*

Означення 3 Ненульовий поліном $p(x)$ є *незвідним*, якщо в будь-якому розкладанні $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ один із множників є сталим.

Розкладність і незвідність полінома залежить від того, над яким полем цей поліном розглядають.

ТЕОРЕМА 15.2

Якщо $p(x)$ – незвідний поліном і $p'(x) \neq 0$, то

$$\text{НСД}(p(x), p'(x)) = 1.$$

Доведення.

Нехай $d = (p(x), p'(x))$. Тоді $p(x) = d(x)q(x)$ та $p'(x) = d(x)r(x)$ для деяких поліномів $q(x)$ та $r(x)$.

Якщо $\deg q(x) = 0$, то

$$\begin{aligned}&\deg p(x) = \deg d(x)q(x) = \deg d(x) + \deg q(x) = \\ &= \deg d(x) \leq \deg p(x) \leq \deg p(x) - 1.\end{aligned}$$

Одержане протиріччя показує, що $\deg q(x) \neq 0$ і тому $q(x) \notin F[x]$.

Отже, $d(x) \in F[x]$. Оскільки $d \neq 0$, можна зробити висновок, що $d(x)$ асоціюється з 1. ∎

Означення 4 Кажуть, що кільце з 1 має *характеристику* 0, якщо не існує ненульових натуральних чисел n із властивістю

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = 0.$$

Твердження. Нехай F – поле характеристики 0. Якщо елемент $c \in F[x]$ є k – кратним коренем полінома $f(x) \in F[x]$, то c є $(k-1)$ – кратним коренем полінома $f'(x)$.

Наслідок. Нехай $f(x) \in F[x]$ – поліном над полем $F[x]$ характеристики 0. Множина кратних коренів у полі $F[x]$ полінома $f(x)$ співпадає з множиною усіх коренів у полі $F[x]$ полінома

$$d(x) = (f(x), f'(x)).$$

Доведення. Для довільного елемента $c \in F[x]$ рівність $f(c) = f'(c) = 0$ можлива тоді й лише тоді, коли двочлен $(x - c)$ ділить і $f(x)$ і $f'(x)$. А це рівносильно тому, що $(x - c)$ ділить $d(x)$, тобто $d(c) = 0$. ∎

15.1.3 Задача розкладання полінома на незвідні множники

Розв'язання задачі розкладання полінома на незвідні множники ґрунтується на таких твердженнях:

1) будь - який поліном першого степеня є незвідним;

2) якщо поліном $p(x)$ є незвідним, то незвідним буде будь-який поліном $ap(x)$, $a \in R$;

3) якщо $f(x)$ – довільний поліном, а $p(x)$ – незвідний, то або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, тобто $(f(x), p(x)) = p(x)$, або поліноми $f(x)$ та $p(x)$ є взаємно простими, тобто $(f(x), p(x)) = a$, $a \in R$;

4) якщо добуток двох поліномів $f(x)$ та $g(x)$ ділиться на незвідний поліном $p(x)$, то обов'язково або $f(x)$, або $g(x)$ ділиться на $p(x)$.

Наслідки тверджень: якщо поліном $f(x)$ із дійсними коефіцієнтами двома способами розкладено на незвідні множники

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\dots q_l(x), s \leq n, l \leq n,$$

то $s = l \leq n$.

Після відповідного впорядкування правильними будуть такі рівності:

$$p_1(x) = a_1q_1(x); p_2(x) = a_2q_2(x); \dots ; p_s(x) = a_lq_l(x)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_l \in R$.

Останнє твердження забезпечує **єдиність** розкладання полінома $f(x)$ на незвідні множники. З урахуванням того, що деякі незвідні множники можуть входити до розкладання полінома $f(x)$ неоднократно, таке єдине подання матиме вигляд

$$f(x) = ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\dots p_s^{k_s}(x), s \leq n, a \in R.$$

У зв'язку з тим, що в розкладанні врахована кратність входження незвідних поліномів, розв'язання задачі розкладання на незвідні множники почнемо із **задачі розкладання на кратні множники**

15.1.4 Алгоритм розкладання полінома на кратні множники

Будемо вважати, що в розкладання $f(x)$ поліноми входять із кратностями від 1 до n включно. Позначимо

- через $P_(x)$ добуток усіх поліномів, які входять у $f(x)$ із кратністю 1. Поліноми, що входять до $P_1(x)$, можуть мати степені від 1 до n;
- через $P_2(x)$ добуток усіх поліномів, які входять у $f(x)$ з кратністю 2.
- ....
- через $P_n(x)$ добуток усіх поліномів, які входять у $f(x)$ з кратністю n.

Тоді початкове розкладання полінома $f(x)$ на кратні множники матиме такий вигляд:

$$f(x) = P_1^1 \cdot P_2^2 \cdot \ldots \cdot P_n^n \tag{15.1}$$

На першому етапі знайдемо максимальну кратність поліномів, що входять до розкладання $f(x)$. Позначимо її $s \le n$.

Етап 1

1. Знаходимо похідну від $f(x) = P_1^1 \cdot P_2^2 \cdot \ldots \cdot P_n^n$ за змінною x

   $$f'(x) = P_2^2 \cdot \ldots \cdot P_n^n + 2P_1^1 \cdot P_2^2 \cdot \ldots \cdot P_n^n + \\ + nP_1^1 \cdot P_2^2 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-1} = P_2^1 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-1} \cdot Q_1(x),$$

   де $Q_1(x)$ – поліном, що залишився в дужках після винесення спільного множника.

2. Знаходимо НСД між $f(x)$ і $f'(x)$

   $$(f(x), f'(x)) = d_1(x) = P_2 \cdot P_3^2 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-1}.$$

   Степінь $d_1(x)$ менший за степінь $f(x)$.

3. Знаходимо похідну від $d_1(x) = P_2 \cdot P_3^2 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-1}$ за змінною x

$$d_1'(x) = P_3^2 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-1} + 2P_2^1 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-1} + \\ + (n-1)P_2^1 \cdot P_3^2 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-2} = P_3^1 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-2} \cdot Q_2(x).$$

4. Знаходимо НСД між $d_1(x)$ і $d_1'(x)$

$$\big(d_1(x), d_1'(x)\big) = d_2(x) = P_3^1 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-2}.$$

   Степінь $d_2(x)$ менший за степінь $d_1(x)$.

5. ....

6. Знаходимо похідну від $d_{s-1}(x) = P_s \cdot P_{s+1}^2 \cdot \ldots \cdot P_n^{n-s}$ за змінною x

$$d_{s-1}'(x) = 1.$$

7. Знаходимо НСД між $d_{s-1}(x)$ і $d_{s-1}'(x)$:

$$\big(d_{s-1}(x), d_{s-1}'(x)\big) = d_s(x) = 1.$$

Процес знаходження спільних дільників закінчено.

Максимальна кратність входження поліномів у розкладання $f(x)$ становить s.

Розкладання можна записати більш точно:

$$f(x) = P_1^1 \cdot P_2^2 \cdot \ldots \cdot P_s^s.$$

Водночас $P_{s+1}^{s+1} \cdot P_{s+2}^{s+2} \cdot \ldots \cdot P_n^n = 1$ – добуток ненульових поліномів нульового степеня.

Етап 2

Виділяємо зі знайдених спільних дільників добуток складових P_i у першому степені

$$1.\quad E_1=\frac{f(x)}{d_1(x)}=\frac{P_1^1\cdot P_2^2\cdot\ldots\cdot P_s^s}{P_2\cdot\ldots\cdot P_s^{s-1}}=P_1\cdot P_2\cdot\ldots\cdot P_s;$$

$$2.\quad E_2=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=\frac{P_2\cdot P_3^2\cdot\ldots\cdot P_s^{s-1}}{P_3\cdot\ldots\cdot P_s^{s-2}}=P_2\cdot\ldots\cdot P_s;$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$S-1.\quad E_{s-1}=\frac{d_{s-2}(x)}{d_{s-1}(x)}=\frac{P_{s-1}\cdot P_s^2}{P_s}=P_{s-1}\cdot P_s;$$

$$S.\quad E_s=\frac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)}=\frac{P_s}{1}=P_s.$$

На останньому кроці другого етапу знайшли поліном, який є добутком поліномів, що входять у розкладання $f(x)$ з кратністю s – $P_s(x)$.

Етап 3

Діленням E_{i-1}/E_i, $i=\overline{1,s}$ знаходимо складові $P_i(x)$, $i=\overline{1,s-1}$ у розкладанні полінома $f(x)$ на кратні множники

$$1.\quad P_1=\frac{E_1}{E_2}=\frac{P_1\cdot P_2\cdot\ldots\cdot P_s}{P_2\cdot\ldots\cdot P_s};$$

$$2.\quad P_2=\frac{E_2}{E_3}=\frac{P_2\cdot\ldots\cdot P_s}{P_3\cdot\ldots\cdot P_s};$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$S-1.\quad P_{s-1}=\frac{E_{s-1}}{E_s}=\frac{P_{s-1}\cdot P_s}{P_s}.$$

Розкладання на кратні множники відбулося. Залишилося перевірити, чи є поліноми $P_i(x)\quad i=\overline{1,s}$ незвідними для $x\in R$.

ПРИКЛАД 1

Відокремити кратні множники полінома

$$f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4.$$

Розв'язування

Етап 1

1. Знаходимо похідну від $f(x) = P_1^1 \cdot P_2^2 \cdot P_3^3 \cdot P_4^4 \cdot P_5^5 \cdot P_6^6$ за змінною x, скоротивши результат на 6

$$f'(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2.$$

2. Знаходимо НСД між $f(x)$ і $f'(x)$

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 & x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^6 - 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x} & x \\
:(-2) & \text{-}2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 10x + 4 & \\
 & x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 &
\end{array}$$

Перша остача $r_1 = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$.

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2 & x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x} & x - 1 \\
- & \text{-}x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2 & \\
 & \underline{\text{-}x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

$r_2 = 0$, тоді

$$(f(x), f'(x)) = d_1(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = P_2 \cdot P_3^2 \cdot P_4^3 \cdot P_5^4 \cdot P_6^5.$$

3. Знаходимо похідну від $d_1(x)$

$$d_1'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5.$$

4. Знаходимо НСД між $d_1(x)$ і $d_1'(x)$

$$\begin{array}{rl|l}
\text{x}4 & x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 & 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \\ \cline{3-3}
- & 4x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 20x - 8 & x + 1 \\
 & \underline{4x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 5x} & \\
\text{x}4 & x^3 - 6x^2 - 15x - 8 & \\
- & 4x^3 - 24x^2 - 60x - 32 & \\
 & \underline{4x^3 + 3x^2 - 6x - 5} & \\
:(-27) & \text{-}27x^2 - 54x - 27 & \\
 & x^2 + 2x + 1 &
\end{array}$$

Перша остача $r_1 = x^2 + 2x + 1$.

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r} 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \\ 4x^3 + 8x^2 + 4x \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} x^2 + 2x + 1 \\ \hline 4x - 5 \end{array} \\
-\begin{array}{r} -5x^2 - 10x - 5 \\ -5x^2 - 10x - 5 \\ \hline 0 \end{array} &
\end{array}
$$

$r_2 = 0$.

$$(d_1(x), d_1'(x)) = d_2(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = P_3 \cdot P_4^2 \cdot P_5^3 \cdot P_6^4.$$

5. Знаходимо похідну від $d_2(x)$

$$d_2'(x) = 2(x+1) \sim x + 1.$$

6. Знаходимо НСД між $d_2(x)$ і $d_2'(x)$

$$(d_2(x), d_2'(x)) = d_3(x) = x + 1 = P_4 \cdot P_5^2 \cdot P_6^3.$$

7. Знаходимо похідну від $d_3(x) = x + 1$ за змінною x

$$d_3'(x) = 1.$$

8. Знаходимо НСД між $d_3(x)$ і $d_3'(x)$

$$(d_3(x), d_3'(x)) = d_4(x) = 1 = P_5 \cdot P_6^2.$$

Процес знаходження спільних дільників закінчено.

Максимальна кратність входження поліномів у розкладання $f(x)$ становить $s = 4$.

Розкладання можна записати більш точно

$$f(x) = P_1^1 \cdot P_2^2 \cdot P_3^3 \cdot P_4^4.$$

Водночас $P_5 P_6^6 = 1$ – добуток ненульових поліномів нульового степеня.

Етап 2

Виділяємо зі знайдених спільних дільників добуток складових P_i у першому степені.

1. Ділимо поліном на перший НСД: $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ на $d_1(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 & x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\
- \\
\quad x^6 + x^5 - 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 & x^2 - x - 2 \\
\hline
\quad -x^5 - 3x^4 + x^3 + 11x^2 + 12x + 4 & \\
- \\
\quad -x^5 - x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2x & \\
\hline
\quad\quad -2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 10x + 4 & \\
\quad - \\
\quad\quad -2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 10x + 4 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$E_1 = \frac{P_1^1 \cdot P_2^2 \cdot P_3^3 \cdot P_4^4}{P_2 \cdot P_3^2 \cdot P_4^3} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 = x^2 - x - 2.$$

2. Ділимо $d_1(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ на $d_2(x) = (x+1)^2$.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 & x^2 + 2x + 1 \\
- \\
\quad x^4 + 2x^3 + x^2 & x^2 - x - 2 \\
\hline
\quad\quad -x^3 - 4x^2 - 5x - 2 & \\
\quad - \\
\quad\quad -x^3 - 2x^2 - x & \\
\hline
\quad\quad\quad -2x^2 - 4x - 2 & \\
\quad\quad - \\
\quad\quad\quad -2x^2 - 4x - 2 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$E_2 = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = \frac{P_2 \cdot P_3^2 \cdot P_4^3}{P_3 \cdot P_4^2} = P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 = x^2 - x - 2.$$

3.

$$E_3 = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = \frac{P_3 \cdot P_4^2}{P_4} = P_3 \cdot P_4 = \frac{(x+1)^2}{x+1} = x + 1.$$

4.

$$E_4 = \frac{d_3(x)}{d_4(x)} = \frac{P_4}{1} = P_4 = x + 1.$$

Незвідний поліном $x+1$ входить до розкладання полінома у 4-му степені.

Етап 3

Діленням $E_{i-1}/E_i, i = \overline{1,4}$ знаходимо складові $P_i(x), i = \overline{1,3}$ в розкладанні полінома $f(x)$ на кратні множники.

1.

$$P_1 = \frac{E_1}{E_2} = \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4}{P_2 \cdot P_3 \cdot P_4} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = 1.$$

2.
$$P_2 = \frac{E_2}{E_3} = \frac{P_2 \cdot P_3 \cdot P_4}{P_3 \cdot P_4} = \frac{x^2 - x - 2}{x+1} = x - 2.$$

3.
$$P_3 = \frac{E_3}{E_4} = \frac{P_{s-1} \cdot P_s}{P_s} = \frac{x+1}{x+1} = 1.$$

Розкладання на кратні множники відбулося.

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = (x-2)^2(x+1)^4.$$

Поліном розклали й на кратні, і на незвідні множники, оскільки біноми, на які відбулося розкладання, є незвідними поліномами.

Коренями даного полінома будуть числа $\alpha_{1,2} = 2; \alpha_{3,4,5,6} = -1.$ ∎

15.2 Раціональні дроби

Раціональним дробом називають вираз виду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x), Q_m(x)$ – поліноми степеня n і m відповідно та $Q_m(x) \neq 0$.

Якщо для раціонального дробу виконується $n \geq m$, то дріб називають *неправильним*, якщо $n < m$ – дріб називається *правильним*.

Серед раціональних дробів виділяють 4 типи найпростіших дробів:

1.
$$\frac{A}{x - x_0}; \quad A, x_0 \in R;$$

2.
$$\frac{A}{(x-x_0)^k}; \quad k \geq 2, k \in N, A, x_0 \in R;$$

3.
$$\frac{Ax+B}{x^2+x+q}; \quad A, B, p, q \in R, \quad D < 0;$$

4.
$$\frac{Ax+B}{(x^2+x+q)^r}; \quad r \geq 2; r \in N; A, B, p, q \in R, \quad D < 0;$$

15.2.1 Алгоритм розкладання дробу на найпростіші дроби

1. Якщо $n \geq m$, необхідно виділити цілу частину, поділивши поліном $P_n(x)$ на поліном $Q_m(x)$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

де $M(x)$ – поліном-частка (ціла частина); $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильний дріб.

2. Розкласти $Q_m(x)$ на множники:

$$Q_m(x) = (x-a)^k(x-b)^s \dots (x^2+px+q)^r, \quad k, s, \dots, r \in N.$$

3. Якщо розкладання знаменника має такий вигляд, то дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ можна подати у вигляді суми найпростіших дробів

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \\ &+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \dots + \\ &+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \dots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+px+q)^r}, \end{aligned}$$

де $A_1, A_2, \dots, A_k; B_1, B_2, \dots, B_k; C_1, \dots C_r; D_1, \dots D_r$ – невизначені коефіцієнти, які необхідно знайти.

4. Для знаходження коефіцієнтів привести праву частину рівності до спільного знаменника, який дорівнюватиме знаменнику початкового дробу, тобто $Q_m(x)$.

5. Прирівняти чисельники дробів.

6. Обчислити значення невизначених коефіцієнтів $A_1, A_2, \dots$ та інші. Для обчислення даних коефіцієнтів використовують такі методи:

   а) **метод невизначених коефіцієнтів**: поліноми в лівій та правій частинах рівності записати в стандартному вигляді та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях чисельника;

б) **метод часткових значень**: надати довільні значення змінної (зручніше використовувати значення $x = a; x = b$ тощо) та одержати рівності для вихідних коефіцієнтів;

в) комбінування методів а) та б).

7. Підставити одержані числові значення коефіцієнтів у рівність, що й буде шуканим розкладанням.

Розглянемо

$$Q_n(x) = C_n(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q)^{\beta_1}\dots(x^2+p_sx+q_ss)^{\beta_s},$$

де $\sum_{m=1}^{k}\alpha_m + 2\sum_{j=1}^{S}\beta_j = n$, $Q_n(x)$ – поліном n–ого степеня від x, C_n – константа.

ТЕОРЕМА 15.3

Якщо $P_m(x)$ та $Q_n(x)$ – поліноми степеня m і n відповідно, причому $m < n$ та коефіцієнти цих поліномів дійсні числа, то

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{\alpha_1-1}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_k^{\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + \frac{A_k^{(1)}}{x-a_k} +$$
$$+ \frac{B_1^{\beta_1}x + D_1^{\beta_1}}{(x^2+px+q_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{(x^2+px+q_1)} + \dots +$$
$$+ \frac{B_S^{\beta_S}x + D_S^{\beta_S}}{(x^2+p_Sx+q_S)^{\beta_S}} + \dots + \frac{B_S^{(1)}x + D_S^{(1)}}{(x^2+p_Sx+q_S)}$$

Усі коефіцієнти розкладання є дійсними числами та визначаються однозначно.

ПРИКЛАД 2

Репрезентувати дріб у вигляді найпростіших дробів

$$\frac{x^2}{x^4-16}.$$

Розв'язування

$$\frac{x^2}{x^4-16} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} =$$
$$= \frac{A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}.$$

Два поліноми однакові тоді й лише тоді, коли однакові коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\begin{array}{lll}
x=2: & 4 = 32A & \Rightarrow A = 1/8; \\
x=-2: & 4 = -32B & \Rightarrow B = -1/8; \\
x=0: & 0 = 8A - 8B - 4D & \Rightarrow D = 1/2; \\
x=1: & 1 = 15A - 5B - 3C - 3D & \Rightarrow C = 0.
\end{array}$$

Отже,

$$\frac{x^2}{x^4-16} = \frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}.$$

∎

Лекція 16

Побудова полінома найменшого степеня. Інтерполяція

16.1 Побудова полінома найменшого степеня

Оберненою для сім'ї задач про існування та визначення коренів поліномів є задача **побудови полінома за відомими коренями.**

Доведено, що поліноми n -го степеня, визначені на множині комплексних чисел $C[x]$, мають, точно n коренів. Причому кількість дійсних коренів або збігатиметься із загальною кількістю коренів n, або буде меншою за n на парне число.

З огляду на такий факт, можна зробити висновок, що n дійсних коренів належать до полінома мінімального степеня n.

Спосіб побудови коефіцієнтів такого полінома дає **теорема Вієта.**

ТЕОРЕМА 16.1 Теорема Вієта

Нехай x_1, x_2 – корені квадратного тричлена $x^2 + bx + c$. Тоді справедливі формули Вієта:

$$x_1 + x_2 = -b, x_1 x_2 = c.$$

ТЕОРЕМА 16.2 Обернена теорема Вієта

Нехай для чисел x_1 та x_2 виконуються співвідношення

$$x_1 + x_2 = -b, x_1 x_2 = c.$$

Тоді x_1 та x_2 є коренями квадратного тричлена $x^2 + bx + c$.

Теорему Вієта та обернену до неї можна сформулювати й для поліномів третього та більш високого степеня.

ТЕОРЕМА 16.3

Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корені полінома n–го степеня

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Тоді справедливі формули Вієта:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n-1}}{a_n} = (-1)^1(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n);\\
&\frac{a_{n-2}}{a_n} = (-1)^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n);\\
&\frac{a_{n-3}}{a_n} = (-1)^3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n);\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{a_1}{a_n} = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots +\\
&\quad + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n);\\
&\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.
\end{aligned} \quad (16.1)$$

(ліва частина k-ї рівності являє собою суму всіляких добутків, що складаються з різних елементів з набору $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.)

Якщо поліном заданий на множині $C[x]$, то, крім n дійсних коренів, поліном може мати парну кількість комплексних коренів і тому загальний степінь полінома буде більшим за n.

Якщо поліном має кратні корені, то кожен корінь рахують у теоремі Вієта стільки разів, якою є його кратність.

Отже, якщо задати n дійсних коренів полінома, можна за формулами Вієта побудувати зведений $(a_n = 1)$ поліном n – го

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Помноживши зведений поліном на довільну сталу $A \in R$, одержимо сукупність асоційованих поліномів найменшого степеня, тобто поліномів, які можна одержимо один з одного множенням на сталу (поліном нульового степеня).

ПРИКЛАД 1

Відомо, що числа 1, 2, -1, 4, 3 є коренями полінома. Побудувати поліном найменшого степеня, що має такі корені. Побудувати всі асоційовані до нього поліноми.

Розв'язування

Розглянемо формули Вієта для п'яти коренів. Маємо $n = 5$.

$$a_4 = (-1)^1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5);$$
$$a_3 = (-1)^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_5 + \\ + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_5 + \alpha_4\alpha_5).$$

Кількість доданків a_3 повинна дорівнювати кількості сполучень з 5 по 2 $C_5^2 = 5 \cdot 4/2! = 10$. Вимога виконана.

$$a_2 = (-1)^3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_5 + \alpha_1\alpha_3\alpha_+\alpha_1\alpha_3\alpha_5 + \\ + \alpha_1\alpha_4\alpha_5 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5).$$

Кількість доданків a_2 повинна дорівнювати кількості сполучень з 5 по 3 $C_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3/3! = 10$. Вимога виконана.

$$a_1 = (-1)^4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5 + \\ + \alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5).$$

Кількість доданків a_1 повинна дорівнювати кількості сполучень з 5 по 4 $C_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4/4! = 5$. Вимога виконана.

$$a_0 = (-1)^5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5.$$

Підставивши у виведені формули корені, одержимо коефіцієнти зведеного полінома

$$a_4 = -9; a_3 = 25; a_2 = -15; a_1 = -26; a_0 = 24.$$

Запишемо зведений поліном

$$P(x) = x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 15x^2 - 26x + 24.$$

Перевіримо, чи правильно знайдені коефіцієнти

$$P(1) = 1 - 9 + 25 - 15 - 26 + 24 = 0,$$

отже $x = 1$ – корінь полінома;

$$P(2) = 2^5 - 9 \cdot 2^4 + 25 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 - 26 \cdot 2 + 24 = 0,$$

отже $x = 2$ – корінь полінома;

Аналогічно перевіряють інші корені: -1, 4, 3.

Зведений поліном найменшого степеня побудований правильно.

Усі асоційовані поліноми можна записати так:

$$aP(x) = a \cdot (x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 15x^2 - 26x + 24), \forall a \in R. \quad \blacksquare$$

16.2 Інтерполяційний поліном

Розглянемо таблицю чисел

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Означення 1. Поліном $f(x) \in C[x]$ степеня не вище n, що задовольняє умовам $f(x_j) = y_j \quad (j = 0, 1, \ldots, n)$ називають *інтерполяційним поліномом*, що належить до інтерполяційної таблиці.

16.2.1 Інтерполяційний поліном Лагранжа

Задача інтерполяції передбачає обчислення невідомих значень функції шляхом набуття зваженого середнього значення функції у відомих сусідніх точках. За лінійної інтерполяції використовують відрізок прямої, що проходить через дві точки. Тангенс кута нахилу прямої між точками $(x_0; y_0)$ і $(x_1; y_1)$ дорівнює

$$m = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0).$$

Формулу прямої, що використовує тангенс кута нахилу в точці $(x_0; y_0)$ можна записати у вигляді

$$y = P(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0} \tag{16.2}$$

Якщо розкласти формулу (16.2), то в результаті одержимо поліном порядку ≤ 1. Обчислюючи $P(x)$ в точках x_0 і x_1 одержимо відповідно точки y_0 і y_1

$$\begin{aligned} P(x_0) &= y_0 + (y_1 - y_0)(0) = y_0; \\ P(x_1) &= y_0 + (y_1 - y_0)(1) = y_1. \end{aligned} \tag{16.3}$$

Для знаходження інтерполяційного полінома можна використати дещо інший спосіб, а саме записати $P(x)$ як

$$y = P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{16.4}$$

Кожний член у правій частині (16.4) включає лінійний множник, тому сума є поліномом степеня ≤ 1. Позначимо відношення в (16.4) відповідно через

$$L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}; \quad L_{1,1}(x) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{16.5}$$

Обчислення показують, що $L_{1,0}(x_0) = 1$; $L_{1,0}(x_1) = 0$; $L_{1,1}(x_0) = 0$; $L_{1,1}(x_1) = 1$. У такий спосіб поліном $P_1(x)$ (16.4) також проходить через ці дві точки:

$$P_1(x_0) = y_0(1) + y_1(0); \quad P_1(x_1) = y_0(0) + y_1(1). \tag{16.6}$$

Члени $L_{1,0}(x)$ і $L_{1,1}(x)$ називають *коефіцієнтами полінома Лагранжа*, що ґрунтуються на вузлах x_0 і x_1. Отже, можна записати (16.4) у вигляді суми

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} y_k L_{1,k}(x). \tag{16.7}$$

Загалом можна побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа $P_n(x)$ степеня не більше ніж n, що проходить через $n+1$ точку $(x_0; y_0)$ і $(x_1; y_1)$, …, $(x_n; y_n)$ і має вигляд:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x). \tag{16.8}$$

де $L_{n,k}$ – *коефіцієнти многочлена Лагранжа*, що ґрунтуються на заданих вузлах

$$L_{n,k} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \tag{16.9}$$

Або ввівши позначення для добутків можна записати

$$L_{n,k} = \frac{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k-x_j)} \tag{16.10}$$

Для кожного фіксованого k коефіцієнти полінома Лагранжа $L_{n,k}(x)$ володіють властивостями

$$L_{n,k} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j\neq k. \end{cases} \tag{16.11}$$

ТЕОРЕМА 16.4

Для будь-якої таблиці інтерполяції інтерполяційний поліном існує і єдиний.

Доведення

Існування. Легко бачити, що поліном (16.9) є інтерполяційним для таблиці.

Єдиність. Нехай $f(x), g(x)$ – два інтерполційні поліноми, що відповідають одній інтерполяційній таблиці. Розглянемо поліном $h(x) = f(x) - g(x)$. Маємо $h(x_j) = 0, (j = 0, 1, \dots, n)$. Отже, поліном $h(x)$ степеня, що не перевищує n, має не менше $n+1$ коренів. Одержуємо, що $h(x) = 0$, тобто $f(x) = g(x)$. ∎

ПРИКЛАД 2

Побудувати інтерполяційний поліном за таблицею з використанням інтерполяційного поліному Лагранжа

Розв'язування

x_j	1	2	3
y_j	-6	-6	-4

За формулою (16.9) маємо

$$P_2(x) = -6\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} - 6\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} - 4\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = x^2 - 3x - 4. \quad \blacksquare$$

Наслідки. Нехай F — деяке підполе поля C. Для будь-яких поліномів $f(x)$ і $g(x)$ з $F[x]$

$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow \forall c \in F \quad f(c) = g(c).$$

16.2.2 Інтерполяційний поліном Ньютона

Розглянемо ще один спосіб знаходження інтерполяційного полінома методом Ньютона. Інтерполяційний поліном для таблиці шукаються у вигляді

$$\begin{aligned} P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \\ + c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{16.12}$$

Послідовно вважаючи, що $x = x_j (j = 0, 1, \ldots, n)$, знаходимо c_0, $c_1, \ldots, c_n$.

На відміну від полінома Лагранжа, поліном Ньютона володіє рекурентною властивістю, тобто поліном степеня n $P_n(x)$ можна просто одержати за поліномом степеня $n-1$ $P_{n-1}(x)$ за допомогою рекурентного співвідношення

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \tag{16.13}$$

Ця властивість буває досить корисною на практиці, коли будують декілька поліномів $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$, щоб вибрати той, який задовольняє конкретні потреби.

ПРИКЛАД 3

Методом Ньютона побудувати інтерполяційний поліном за таблицею інтерполяції з прикладу 2.

Розв'язування

Шукаємо поліном у вигляді

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Вважаючи, що $x = x_0$, одержуємо $-6 = c_0$.

Вважаючи, що $x = x_1$, одержуємо $-6 = -6 + c_1(2 - 1)$, звідки $c_1 = 0$.

Вважаючи , що $x = x_2$, одержуємо $-4 = -6+0\cdot(2-1)+c_2(3-1)(3-2)$, звідки $c_2 = 1$.

Отже, $P_n(x) = -6 + (x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x - 4$. ∎

Для ефективного обчислення коефіцієнтів інтерполяційного полінома $f(x)$ у формі Ньютона введемо так звані розділені різниці.

Нехай $f(x)$ – інтерполяційний поліном, побудований за таблицею, а $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – деякі числа з F.

Розділеною різницею першого порядку називають величину

$$f(c_0, c_1) = \frac{f(c_0) - f(c_1)}{c_0 - c_1}. \tag{16.14}$$

Розділеною різницею другого порядку називають

$$f(c_0, c_{12}) = \frac{f(c_0, c_1) - f(c_1, c_2)}{c_0 - c_2}. \tag{16.15}$$

Узагалі, розділена різниця k-го порядку визначається через розділену різницю $(k-1)$–го порядку так:

$$f(c_0, c_1, \ldots, c_k) = \frac{f(c_0, c_1) - \ldots - f(c_{k-1}, c_k)}{c_0 - c_k}. \tag{16.16}$$

Зауважимо, що оскільки $f(x_0) = y_0$, тобто x_0 є коренем полінома $f(x) - y_0$, то $f(x, x_0)$ є поліномом і степінь цього полінома на 1 менше степеня $f(x)$.

Аналогічно, $f(x, x_0, x_1)$ також є поліном і його степінь на 1 менший від степеня $f(x, x_0)$, тощо. Нарешті, $f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Із визначення розділених різниць одержуємо

$$\begin{aligned}
&f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x, x_1), \\
&f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + (x - x_1) f(x, x_0, x_1), \\
&f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2) f(x, x_0, x_1, x_2),
\end{aligned}$$

і так далі, звідки

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \\
+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned} \tag{16.17}$$

Оскільки існує єдине представлення полінома $f(x)$, одержуємо, що коефіцієнти c_j– розділені різниці, а саме:

$$c_j = f(x_0, x_1, \ldots, x_j) \quad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

ПРИКЛАД 4

Побудувати інтерполяційний поліном $f(x)$ за таблицею

x_j	-3	-1	1	2
y_j	8	6	4	18

Розв'язування

При $n = 3$ інтерполяційний поліном Ньютона буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
P_n(x) = y_0 + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \\
+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3)
\end{aligned}$$

Перш ніж приступати до заповнення таблиці, розпишемо розділені різниці.

Розділені різниці 1-го порядку

$$f(x_0;x_1)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{6-8}{-1+3}=-1;$$
$$f(x_1;x_2)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-6}{1+1}=-1;$$
$$f(x_2;x_3)=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{18-4}{2-1}=14.$$

Розділені різниці 2-го порядку

$$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{f(x_1;x_2)-f(x_0;x_1)}{x_2-x_0}=\frac{-1+1}{1+3}=0;$$
$$f(x_1;x_2;x_3)=\frac{f(x_2;x_3)-f(x_1;x_2)}{x_3-x_1}=\frac{14+1}{2+1}=5;$$

Розділені різниці 3-го порядку

$$f(x_0;x_1;x_2;x_3)=\frac{f(x_1;x_2;x_3)-f(x_0;x_1;x_2)}{x_3-x_0}=\frac{5-0}{2+3}=1.$$

Складемо таблицю розділених різниць у вигляді таблиці (1).

Таблиця 1 – Таблиця розділених різниць

j	x_j	y_j	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0	$x_0=-3$	$y_0=\mathbf{8}$	**-1**	**0**	**1**
1	$x_1=-1$	$y_1=6$	-1	5	
2	$x_2=1$	$y_2=4$	14		
3	$x_3=2$	$y_3=18$			

Отже, одержуємо інтерполяційний поліном

$$P_3(x)=8+(-1)\cdot(x+3)+0\cdot(x+3)(x+1)+1\cdot(x+3)(x+1)(x-1)=$$
$$=8-x-3+(x+3)(x^2-1)=5-x+x^3+3x^2-x-3=$$
$$=x^3+3x^2-2x+2. \quad \blacksquare$$

Лекція 17

Найпростіші задачі аналітичної геометрії. Дії над векторами

Аналітична геометрія вивчає геометричні об'єкти засобами алгебри та математичного аналізу. Засновниками аналітичної геометрії є П'єр Ферма та Рене Декарт. Декартом було розроблено метод координат, що лежить в основі аналітичної геометрії.

17.1 Координати на прямій

Числова вісь – це пряма з обраним напрямком, початком відліку (початком координат) та одиницею вимірювання (масштабом) (рис. 17.1). Як відомо зі шкільного курсу математики, між дійсни-

Рисунок 17.1 – Числова вісь

ми числами та точками числової прямої можна встановити взаємно однозначну відповідність. Дійсне число, що відповідає положенню точки на числовій осі є координатою точки .

Положення кожної точки на числовій осі OX однозначно визначається її координатою x і навпаки, кожній точці відповідає єдина координата $x \in R$, де R – це множина дійсних чисел. Точки числової прямої ототожнюються з дійсними числами, що їм відповідають.

Відстань на прямій. Нехай точки та на прямій мають координати a та b відповідно (рис. 17.2).

Рисунок 17.2 – Відстань між точками A й B

Відстань ρ між точками A й B це довжина відрізка $[A, B]$, що з'єднує ці точки.

Для відстані $\rho(a, b)$ між точками (a) та (b) відповідає формула (17.1):

$$\rho(A, B) = \begin{cases} b - a, & b \geq a, \\ a - b, & b < a \end{cases} \Longleftrightarrow \rho(A, B) = |a - b|, \forall a, b \in R. \quad (17.1)$$

Властивості відстані

1) Невід'ємність: $\forall A, B \quad \rho(A, B) \geq 0; \quad \rho(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B.$

2) Симетричність: $\forall A, B \quad \rho(A, B) \geq \rho(B, A).$

3) Нерівність трикутника: $\forall A, B, \quad \rho(A,) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C).$

ПРИКЛАД 1

Користуючись поняттям відстані, знайти дійсні числа, що задовольняють

1) рівняння $|x + 5| = 4$,

2) нерівності $|x + 10| < |x - 6|$.

Розв'язування

1) Запишемо рівняння, користуючись поняттям відстані:

$$|x + 5| = 4 \Leftrightarrow \rho(x; -5) = 4.$$

Потрібно знайти на осі OX точки, відстань від яких до точки з координатою $x = -5$ дорівнює 4. Цими точками будуть $x = -9$ або $x = -1$.

2) Запишемо нерівність, користуючись поняттям відстані:

$$|x + 10| < |x - 6| \Leftrightarrow \rho(x, -10) < \rho(x, 6)$$

. Тобто на осі OX потрібно знайти такі точки, відстань від яких до точки з координатою $x = -10$ менше, ніж відстань до точки з координатою $x = 6$. Цій умові задовольняють точки, що лежать лівіше від середини відрізка$[10; 6]$, а саме точки, що належать інтервалу $x \in (-\infty; -2)$. ∎

17.2 Координати на площині

Існують різні системи координат на площині: декартові прямокутні, косо-кутні, полярні. Розглянемо прямокутну декартову та полярну системи координат.

Декартові прямокутні координати

Означення 1 *Координатною площиною* OXY називають площину з взаємно перпендикулярними числовими осями OX – вісь абсцис і OY – вісь ординат. Початок відліку (початок до ординат) лежить на перетині координатних осей, одиниці виміру на осях OX і OY однакові (рис. 17.3).

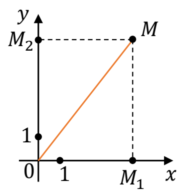


Рисунок 17.3 – Координатна площина

Надалі розглядатимемо прямокутну *праву систему координат* OXY, коли поворот від осі OX до осі OY відбувається **проти** годинникової стрілки на кут $\pi/2$. Якщо найкоротший поворот від осі OX до осі OY відбувається за годинниковою стрілкою, систему координат називають *лівою.*

Нехай M_1, M_2 – проєкції точки M на координатні осі.

Означення 2 *Декартовими прямокутними координатами* точки називають координати проєкцій точки M на координатні осі: координата $M_1(x)$ – абсциса, координата $M_2(y)$ – ордината точки M.

Між безліччю точок площини R^2 і безліччю впорядкованих пар раціональних чисел існує взаємно однозначна відповідність. Положення кожної точки на площині однозначно визначається її координатами (x, y) і навпаки, кожній точці відповідає єдина впорядкована пара – її координати (x, y).

17.3 Найпростіші задачі аналітичної геометрії на площині

Відстань між точками

Дані дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Щоб знайти відстань $\rho(M_1, M_2) = |M_1M_2|$, застосуємо теорему Піфагора (рис. 17.4 а))

$$\rho^2(M_1, M_2) = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2.$$

Тоді відстань $\rho(M_1, M_2)$ знайдемо за формулою (17.2)

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (17.2)$$

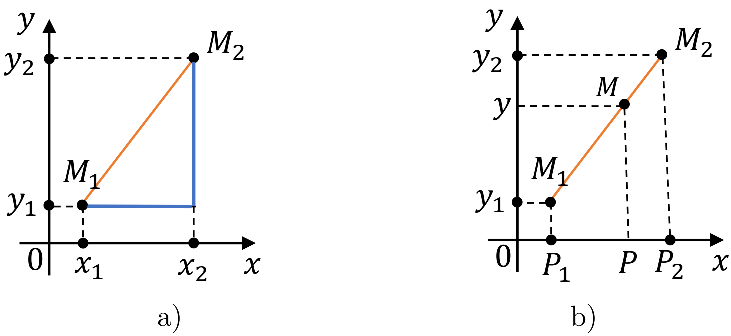


Рисунок 17.4 – a) відстань між точками; b) ділення відрізка в заданому відношенні

Ділення відрізка в заданому відношенні

Дані дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Необхідно знайти координати точки $M(x, y)$, що ділить відрізок M_1M_2 у відношенні

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

Нехай пряма M_1M_2 проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Пряма M_1M_2 не паралельна осі OY (рис. 17.4 b)).

За теоремою Фалеса

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}. \qquad (17.3)$$

Знаки модуля в рівності (17.3) опущені, оскільки при $x_1 < x_2$ виконується $x - x_1 > 0$; $x_2 - x > 0$; при $x_1 > x_2$ виконується $x - x_1 < 0$, $x_2 - x < 0$. Звідси

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (17.4)$$

Якщо пряма M_1M_2 паралельна осі OY, то $x = x_1 = x_2$ і формула (17.4) також виконується.

Аналогічно

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{17.5}$$

Отже, координати точки, що ділить відрізок у заданому відношенні мають вигляд (17.6):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{17.6}$$

Наслідок. Координати середини відрізка дорівнюють напівсумі координат кінців відрізка $\lambda = 1$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{17.7}$$

Зауваження. Якщо відношення довжин задано у вигляді

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

(рис. 17.5), то, підставляючи $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ у (17.6), одержимо:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{17.8}$$

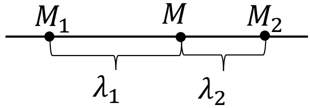


Рисунок 17.5 – Поділ відрізка у відношенні

Площа трикутника.

Площа трикутника ABC з вершинами $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$:

$$\begin{aligned} S = &\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \\ &= \frac{1}{2}|[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]| \end{aligned} \tag{17.9}$$

або

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17.10}$$

Умовою того, що точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ лежать на одній прямій, може слугувати рівність нулю площі відповідного трикутника, тобто

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

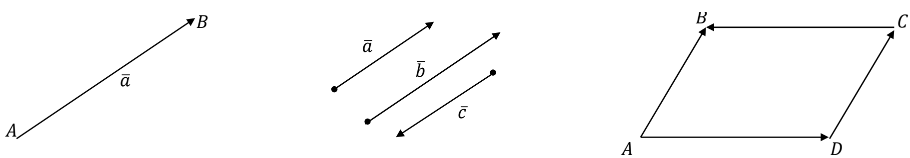
або

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

17.4 Елементи векторної алгебри

У різних дисциплінах використовують скалярні та векторні величини. Скалярна величина визначається одним числом, наприклад, масою, об'ємом, температурою. Векторна величина характеризується не лише числом, а й напрямом, наприклад, силою, швидкістю, прискоренням. Векторна алгебра вивчає геометричні вектори та операції над ними.

Означення 3 *Вектор* – це спрямований відрізок (рис. 17.6 a)). Позначають вектор $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$, а його довжину $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.



a) b) c)

Рисунок 17.6 – a) вектор ; b) колінеарні вектори; c) рівні вектори

Означення 4 Якщо вектори паралельні одній прямій, то їх називають *колінеарними*.

На рисунку (17.6 b)) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – колінеарні, водночас вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ спрямовані в один бік (співнаправлені), а вектори $\vec{b}$ та $\vec{c}$ – у різні боки. Записують це так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Означення 5 Одиничний вектор, співнаправлений із вектором $\vec{a}$ називають його *ортом* $\vec{a}_0$.

Зауваження.

$$\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}_0 = \vec{b}_0;$$
$$\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}_0 = -\vec{b}_0;$$
$$\vec{a}_0 = \vec{a} \cdot \tfrac{1}{|\vec{a}|}.$$

Означення 6 Вектори, паралельні одній площині, називають *компланарними.*

Означення 7 Два вектори називають **рівними**, якщо вони мають однакові довжини, колінеарні та однаково спрямовані.

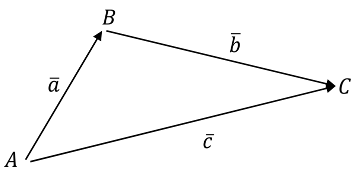
На рисунку (17.6 c)) у паралелограмі $ABCD$ вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ – рівні, оскільки $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, а вектори $\overrightarrow{CB}$ та $\overrightarrow{AD}$ нерівні, оскільки $\overrightarrow{CB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$.

17.5 Лінійні операції над векторами

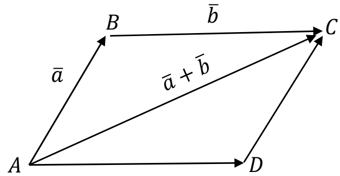
До лінійних операцій належать додавання, віднімання векторів, множення вектора на число.

Додавання векторів

Для додавання двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відкладемо від точки (рис. 17.7 a)) вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний $\vec{a}$, потім від точки відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний $\vec{b}$. Тоді вектор $\overrightarrow{AC}$ називають сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Це



a)



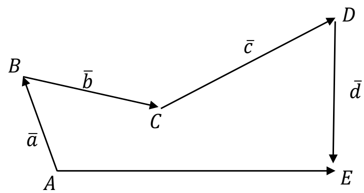
b)

Рисунок 17.7 – Додавання векторів

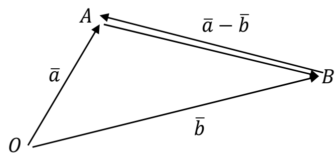
правило складання двох векторів називають *правилом трикутника.*

Для додавання двох векторів можна також користуватися правилом паралелограма: від якоїсь точки відкласти вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ та $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$і побудувати паралелограм $ABCD$ (рис. 17.7 b)). Тоді вектор $\overrightarrow{AC}$ дорівнює $\vec{a} + \vec{b}$.

Додавання більше двох векторів проводять за правилом багатокутника. Наприклад, для додавання чотирьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис.17.8 a)) від довільної точки A відкладаємо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потім з точки B відкладаємо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, із точки C відкладаємо $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, із точки D відкладаємо вектор $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$.



a)



b)

Рисунок 17.8 – a) додавання більше двох векторів; b) віднімання векторів

Тоді вектор AE (спрямований із початку першого вектора до кінця по останньому) дорівнює $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

Віднімання векторів

Для побудови вектора $\vec{a} - \vec{b}$ з довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ та $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, (рис. 17.8 b)). Тоді вектор різниці $\vec{a} - \vec{b}$ є вектор $\overrightarrow{BA}$, що з'єднує кінці векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і спрямований до вектора $\vec{a}$. **Добуток вектора на число.**

Означення 8 *Добутком* ненульового вектора $\vec{a}$ на число λ називають вектор $\vec{b}$, позначається $\lambda\vec{a}$, такий, що

$$
\begin{aligned}
&1) \quad |\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|;\\
&2) \quad \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}, \text{якщо} \quad \lambda \geq 0;\\
&3) \quad \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}, \text{якщо} \quad \lambda < 0.
\end{aligned}
$$

ТЕОРЕМА 17.1

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, якщо $\exists\lambda \neq 0, \lambda \in R$, та $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow, \exists\lambda \in R, \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}.$$

Доведення

Нехай $\vec{a}||\vec{b}$

1) якщо $\vec{a} \downdownarrows \vec{b}$, скористаємось означенням та властивостями ортів, розглянемо вектор

$$\lambda \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \vec{b_0} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a_0}| = \vec{a},$$

оскільки $\vec{a} \downdownarrows \vec{b} \Longrightarrow \vec{a}_0 = \vec{b}_0$.

2) якщо $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$, розглянемо вектор

$$\lambda \cdot \vec{b} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot \vec{b_0} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a_0}| = \vec{a},$$

оскільки $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b} \Longrightarrow \vec{a}_0 = -\vec{b}_0$.

Нехай $\exists\lambda \neq 0, \lambda \in R, \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$. Тоді за означенням добутку вектора на число вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні. ∎

З означення добутку вектора на число випливають властивості цього добутку

1) $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda$;

2) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda_1 + \vec{a} \cdot \lambda_2$;

3) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$.

17.6 Лінійна залежність та незалежність векторів

Означення 9 Лінійною комбінацією системи векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називають вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$, де λ_i – числа, $i = \overline{1, n}$.

Означення 10 Система векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ – **лінійно залежна**, якщо існують числа $\lambda_i \in R$, одночасно не рівні нулю, такі, що справедлива рівність $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Означення 11 Систему векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ називають **лінійно незалежною**, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли всі коефіцієнти в цій лінійній комбінації рівні нулю.

Іншими словами, для лінійно незалежної системи векторів виконується рівносильність

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0. \qquad (17.11)$$

ТЕОРЕМА 17.2

Будь-які два вектори, що лежать на прямій, лінійно незалежні.

Доведення. Нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ лежать на одній прямій $\Rightarrow$ $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні за означенням. Тоді за теоремою 17.1 існує $k \neq 0$ таке, що

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + (-k) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \exists \lambda_1 = 1; \lambda_2 = -k; \lambda_2 \neq 0,$$

що виконує умову визначення добутку вектора на число $\Rightarrow$ вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – лінійно залежні. ∎

Висновок: на прямій може бути лише один лінійно незалежний вектор.

ТЕОРЕМА 17.3

Будь-які два не колінеарні вектори на площині лінійно незалежні.

Доведення. Підемо від оберненого: вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ неколінеарні, але система векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ лінійно залежна $\Rightarrow$ за означенням лінійної комбінації системи векторів $\exists \lambda_1, \lambda_2$, одночасно $\neq 0$, такі, що $\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} = 0$..

Нехай $\lambda_2 \neq 0$, тоді $\lambda_2\vec{b} = -\lambda_1\vec{a}$. Тоді

$$\vec{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = k \cdot \vec{a} \Rightarrow$$

за теоремою 17.1 $\vec{a}||\vec{b}$, що суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне. Звідси можна зробити висновок, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ лінійно незалежні, що і потрібно було довести. ∎

ТЕОРЕМА 17.4

Будь-який вектор на площині може бути представлений у вигляді лінійної комбінації двох неколінеарних векторів.

Доведення Нехай $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, $\vec{a}$ не є колінеарним $\vec{b}$.

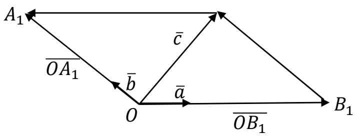


Рисунок 17.9 – Рисунок до теореми 17.4

Покажемо, що $\forall \vec{c} \in R^2$, який лежить у тій самій площині, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ може бути репрезентований у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Приведемо три вектори до загального початку O добудуємо $\vec{a}$ та $\vec{b}$ так, щоб вектор $\vec{c}$ був діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 17.9).

За правилом паралелограма $\vec{c} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$. Оскільки $\vec{b}||\overrightarrow{OA_1}$, то за теоремою 17.1 $\exists\lambda_1 \neq 0$, що $\overrightarrow{OA_1} = \lambda_1\vec{b}$; $\vec{a}||\overrightarrow{OB_1} \Longrightarrow$ за теоремою 17.1 $\exists\lambda_2 \neq 0$, що $\overrightarrow{OB_1} = \lambda_2\vec{a}$. Тоді

$$\vec{c} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{a}, \tag{17.12}$$

що й потрібно було довести. ∎

Наслідок. Будь-які три компланарні вектори лінійно залежні.

Висновок: на площині може бути максимально два лінійно незалежні вектори.

Рівність (17.12) називають розкладанням векторів за системою лінійно незалежних векторів.

ТЕОРЕМА 17.5

У тривимірному просторі будь-який вектор можна подати у вигляді лінійної комбінації трьох некомпланарних векторів.

Із теореми 17.5 випливає, що чотири вектори ліній залежні в тривимірному лінійному просторі.

Висновок: у тривимірному просторі може бути максимально три лінійно незалежних вектори.

17.7 Базис. Розкладання вектора за базисом

Означення 12. *Базисом* простору називають сукупність максимального числа лінійно незалежних векторів даного простору.

Очевидно, базисів у просторі нескінченно багато.

Означення 13 Система векторів утворює базис деякого простору, якщо:

1) система **лінійно незалежна**;

2) будь-який вектор даного простору можна подати у вигляді **лінійної комбінації** векторів цієї системи.

Той факт, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ утворюють базис записують так: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Означення 14 *Упорядкований набір коефіцієнтів* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ у розкладанні вектора за базисом (у лінійній комбінації)

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n$$

називають **координатами** даного вектора $\vec{a}$ в даному базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

У R^1 базис утворює будь-який вектор $\{\vec{e}_1\} \in R^1$. Отже, будь-який вектор

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1. \tag{17.13}$$

У R^2 базис утворює будь-яка пара двох неколінеарних векторів $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \in R^2$. Значить, будь-який вектор

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2. \tag{17.14}$$

У R^3 базис утворює будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \in R^3$. Отже, будь-який вектор

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3. \tag{17.15}$$

Означення 15 Якщо довжини базисних векторів дорівнюють одиниці, то базис називають *нормованим.*

Означення 16 Якщо всі вектори базису взаємно перпендикулярні, то базис називають *ортогональним.*

Означення 17 Базис, у якого базисні вектори нормовані та ортогональні, називають *ортонормованим.*

Означення 18 Систему координат з ортонормованою базою називають *декартовою прямокутною системою координат.* Скорочено –ДПСК.

У ДПСК базисні вектори прийнято позначати

- для R^1 – $\{\vec{i}\}$,
- для R^2 – $\{\vec{i}, \vec{j}\}$,
- для R^3 – $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

За теоремою 17.5 будь-який вектор тривимірного простору можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів із базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, тобто для будь-якого вектора $\vec{a}$,

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

де впорядкована трійка чисел (a_x, a_y, a_z) є координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Довжина вектора через його координати

Нехай $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Із геометричних міркувань, вектор є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, отже, його довжина в квадраті дорівнює сумі квадратів лінійних розмірів.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{17.16}$$

17.8 Напрямні косинуси вектора. Орт-вектор у координатній формі

Нехай у ДПСК кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{i}$ дорівнює α, $\vec{b}$ та $\vec{j}$ дорівнює β, $\vec{c}$ і $\vec{k}$ дорівнює γ або

$$(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) = \alpha, (\widehat{\vec{a},\vec{j}}) = \beta, (\widehat{\vec{a},\vec{k}}) = \gamma.$$

Оскільки координати вектора – це його проєкції на відповідні базисні вектори, то

$$\begin{aligned} a_x &= |\vec{a}| \cos\alpha; \\ a_y &= |\vec{a}| \cos\beta; \\ a_z &= |\vec{a}| \cos\gamma. \end{aligned} \tag{17.17}$$

Означення 19. Косинуси $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ у виразі (17.18) називають *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}$.

Якщо відомі координати вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то з формул (17.18) слідують формули для обчислення напрямних косинусів

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \tag{17.18}$$

Оскільки $|\vec{a}_0| = 1$ та $\vec{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то зв'язок між напрямними косинусами вектора

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{17.19}$$

17.9 Лінійні операції над векторами в координатній формі

Уведення базису та поняття координат вектора в деякому базисі дозволяє перейти від геометричного задання вектора до задання його числами (координатами) – **аналітичного способу** задання вектора.

Аналітичний спосіб задання вектора дозволяє вирішувати завдання з геометрії, фізики, механіки тощо, засобами алгебри.

За означенням, координати – коефіцієнти в розкладанні вектора по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, тоді

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3.$$

Записуватимемо: $\vec{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Координати однозначно визначають положення вектора в просторі. Найчастіше розглядатимемо координати вектора в ДПСК.

ТЕОРЕМА 17.6

Два вектори рівні тоді й лише тоді, коли рівні їх відповідні координати.

ТЕОРЕМА 17.7

Нехай вектор $\vec{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ заданий координатами в деякому базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Тоді $k\vec{a} = (k\lambda_1, k\lambda_2, k\lambda_3), \quad k \in R$.

Під час множення вектора на скаляр кожну координату множать на цей скаляр.

Доведення. За умовою $\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3$. Застосуємо властивості лінійних операцій над векторами. Матимемо

$$k\vec{a} = k(\lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3).$$

Тоді за означенням координат, як коефіцієнтів у розкладанні за базисом, упорядкований набір чисел $(k\lambda_1, k\lambda_2, k\lambda_3)$ є координатами вектора $k\vec{a}$, що й потрібно було довести. ∎

ТЕОРЕМА 17.8

Нехай вектори $\vec{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ та $\vec{b} = (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$ задані координатами в деякому базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (\lambda_1 + \lambda'_1, \lambda_2 + \lambda'_2, \lambda_3 + \lambda'_3).$$

Під час додавання двох векторів їх відповідні координати додають.

Доведення. За умовою

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3 \quad \text{та} \quad \vec{b} = \lambda_1' \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2' \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3' \cdot \vec{e}_3.$$

Скористайтеся властивостями лінійних операцій над векторами. Будемо мати

$$\vec{a} + \vec{b} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3 + \lambda_1' \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2' \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3' \cdot \vec{e}_3 =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_1') \cdot \vec{e}_1 + (\lambda_2 + \lambda_2') \cdot \vec{e}_2 + (\lambda_3 + \lambda_3') \cdot \vec{e}_3.$$

Тоді за визначенням координат як коефіцієнтів у розкладанні за базисом упорядкований набір чисел $(\lambda_1 + \lambda_1', \lambda_2 + \lambda_2', \lambda_3 + \lambda_3')$ є координатами вектора $\vec{a} + \vec{b}$, що й вимагалося довести. ∎

ТЕОРЕМА 17.9

Нехай $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Якщо $\vec{a} || \vec{b}$, то

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{17.20}$$

У колінеарних векторів координати пропорційні.

Доведення. За умовою $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ і $\vec{a} || \vec{b}$, тоді за теоремою 17.1 $\exists k \neq 0$, таке, що $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, тобто

$$(a_x, a_y, a_z) = k(b_x, b_y, b_z)$$

або за теоремою 17.7 $(a_x, a_y, a_z) = (kb_x, kb_y, kb_z)$. Звідси за теоремою 17.6

$$a_x = kb_x, a_y = kb_y, a_z = kb_z, \Longrightarrow \frac{a_x}{b_x} = k, \frac{a_y}{b_y} = k, \frac{a_z}{b_z} = k \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k.$$

що й потрібно було довести. ∎

ПРИКЛАД 4

Визначити колінеарні вектори серед векторів $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$ і $\vec{c} = (3, 6, -9)$.

Розв'язування

Для координат векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ маємо

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{-3}{6},$$

отже вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні.

Для координат векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ маємо

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \neq \frac{-3}{-9} \Rightarrow \vec{a}||\vec{c}. \quad \blacksquare$$

ПРИКЛАД 5

Знайти вектор $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{a}$ такий, що $|\vec{x}| = \sqrt{21}$, де $\vec{a} = (2, 4, -8)$.

Розв'язування

За умовою

$$\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{a}(k < 0) \Rightarrow \vec{x} = k\vec{a} \Rightarrow \vec{x} = (2k, 4k, -8k).$$

Тоді

$$|\vec{x}| = \sqrt{4k^2 + 16k^2 + 64k^2} \quad \text{або} \quad |\vec{x}| = \sqrt{84k^2}.$$

Оскільки $|\vec{x}| = \sqrt{21}$, то $2\sqrt{21}|k| = \sqrt{21} \Rightarrow |k| = 1/2$.

З умови маємо $k < 0?k = -1/2 \Rightarrow \vec{x} = (-1; -1; 4)$. $\blacksquare$

Лекція 18

Добутки векторів: скалярний, векторний, мішаний. Геометричний та фізичний зміст

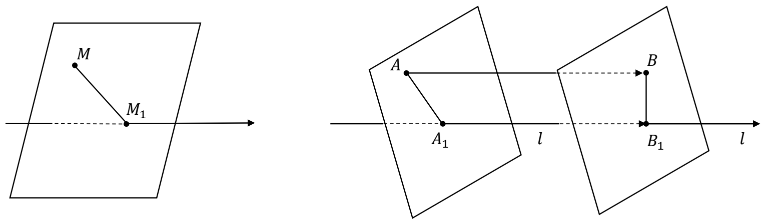
18.1 Проєкція вектора на вісь

Нехай у просторі задана вісь l, тобто спрямована пряма.

Означення 1 *Проєкцією точки* на вісь l називають основу M_1 перпендикуляра MM_1, опущеного з точки на вісь.

Точка M_1 – точка перетину осі с площиною, що проходить через точку перпендикулярно до осі (рис. 18.1 а).

Якщо точка лежить на осі l, то проєкція точки на вісь збігається з M. Нехай $\overrightarrow{AB}$ – довільний вектор ($\overrightarrow{AB} \neq 0$). Позначимо через



а) b)

Рисунок 18.1 – а) проєкція точки на вісь; b) проєкція вектора на вісь

A_1 і B_1 проєкції на вісь l, відповідно, початку і кінця вектора $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 18.1 b).

Означення 2 *Проєкцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називають додатне число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l однаково спрямовані, і від'ємне число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l протилежно спрямовані.

Якщо точки A_1 та B_1 збігаються ($\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0}$), то проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ дорівнює 0.

Проєкцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l позначають так: $np_l\overrightarrow{AB}$. Якщо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ або $\overrightarrow{AB} \perp l$, то $np_l\overrightarrow{AB} = 0$.

Кут φ між вектором $\vec{a}$ і віссю l (або кут між двома векторами) зображений на (рис. 18.2).

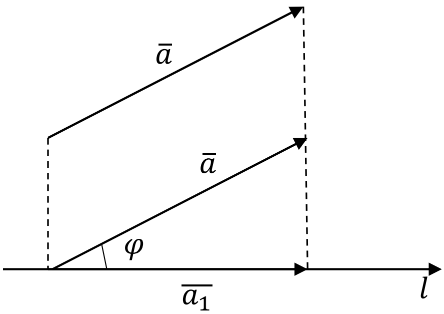


Рисунок 18.2 – Кут φ між вектором $\vec{a}$ і віссю l

Очевидно, що $0 \le \varphi \le \pi$.

Розглянемо деякі основні властивості проєкцій.

Властивість 1. Проєкція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором і віссю, тобто

$$np_l = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Доведення

Якщо $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, l}\right) < \frac{\pi}{2}$, то

$$np_l\vec{a} = +|\vec{a_1}| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Якщо $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, l}\right) > \frac{\pi}{2}(\varphi \le \pi)$, то

$$np_l\vec{a} = -|\vec{a_1}| = -|\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}| \cos\varphi.$$

Якщо $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, l}\right) = \frac{\pi}{2}$, то

$$np_l\vec{a} = 0 = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Наслідок 1. Проєкція вектора на вісь додатна (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут – прямий.

Наслідок 2. Проєкції рівних векторів на ту саму вісь рівні між собою.

Властивість 2. Проєкція суми кількох векторів на одну й ту саму вісь дорівнює сумі їх проєкцій на цю вісь.

Доведення

Нехай, наприклад, $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Маємо

$np_l = +|\vec{d_1}| = |\vec{a}_1| + |\vec{b}_1| + |\vec{c}_1|$, тобто за (рис. 18.3):

$$np_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b} + np_l\vec{c}.$$

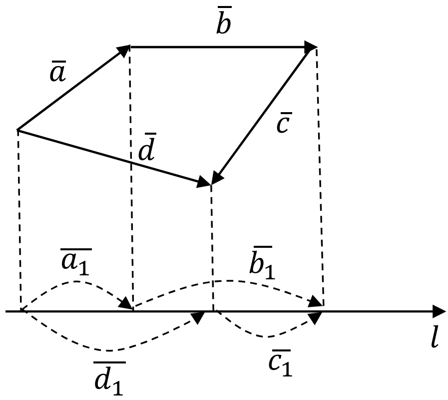


Рисунок 18.3 – Рисунок до властивості 2

Властивість 3. Під час множення вектора $\vec{a}$ на число λ його проєкцію на вісь також множать на це число, тобто.

$$np_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot np_l\vec{a}.$$

Доведення

При $\lambda > 0$ маємо

$$np_l(\lambda \cdot \vec{a}) = |\lambda\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot np_l\vec{a}.$$

При $\lambda < 0$ маємо

$$np_l(\lambda \cdot \vec{a}) = |\lambda\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot (-\cos\varphi) = \lambda \cdot np_l\vec{a}.$$

Властивість справедлива і для $\lambda = 0$.

Висновок: Отже, лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проєкціями цих векторів.

18.2 Скалярний добуток двох векторів

Означення 3. *Скалярним добутком двох векторів* називають число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \tag{18.1}$$

Зауваження. Оскільки проєкція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ за означенням дорівнює $|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, проєкція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ за означенням дорівнює $|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{18.2}$$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

ТЕОРЕМА 18.1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Доведення

Маємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$
$$\vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}. \quad \blacksquare$$

ТЕОРЕМА 18.2

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Доведення

На основі формули (18.2) та за властивостями проєкції вектора на вектор, одержимо:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Аналогічно

$$|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}(\lambda\vec{b}) = \lambda|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) \Rightarrow (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}). \quad \blacksquare$$

ТЕОРЕМА 18.3

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Висновок: із теорем (18.1–18.3) можна зробити висновок, що в разі розкривання дужок у скалярному добутку виконуються правила як під час множенні поліномів.

18.2.1 Геометричні властивості скалярного добутку

ТЕОРЕМА 18.4 Умова перпендикулярності

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Доведення

1. Нехай $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0.$$

2. Нехай $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тобто $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Тоді

   а) якщо $|\vec{a}| = 0$, то $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;
   б) якщо $|\vec{b}| = 0$, то $\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;
   в) якщо $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$, то $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$. ∎

ТЕОРЕМА 18.5

Скалярний квадрат вектора $\vec{a}^2$, скалярний добуток вектора на себе, дорівнює квадрату свого модуля.

Доведення

Очевидно, $\vec{a}^2 = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2. \tag{18.3}$$

Із формули (18.3) випливає ще один спосіб обчислення довжини вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \tag{18.4}$$

Зауваження. Формулу (18.4) застосовують у разі геометричого способу задання вектора.

18.2.2 Скалярний добуток у координатах

ТЕОРЕМА 18.6

Нехай у ДПСК $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.
Тоді
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Доведення
За умовою $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$
Обчислимо $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$.
Скористаємося алгебраїчними та геометричними властивостями скалярного добутку, при цьому матимемо

$$\begin{aligned} &a_x b_x(\vec{i}\cdot\vec{i}) + a_x b_y(\vec{i}\cdot\vec{j}) + a_x b_z(\vec{i}\cdot\vec{k}) + a_y b_x(\vec{j}\cdot\vec{i}) + a_y b_y(\vec{j}\cdot\vec{j}) + \\ &+ a_y b_z(\vec{j}\cdot\vec{k}) + a_z b_x(\vec{k}\cdot\vec{i}) + a_z b_y(\vec{k}\cdot\vec{j}) + a_z b_z(\vec{k}\cdot\vec{k}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ∎

Зауваження. Умова перпендикулярності у координатній формі

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{18.5}$$

18.2.3 Застосування скалярного добутку

Геометричне застосування

1) ***Перевірка перпендикулярності векторів.***

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{або} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

2) ***Обчислення кута між векторами.***

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, то

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

3) ***Знаходження проекції вектора на вектор.***

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} \Rightarrow np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} \Rightarrow$ в координатах:

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

4) ***Нерівність Коші.***

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ та $|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})| \le 1$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Rightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \le \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}.$$

ПРИКЛАД 2

Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ задовольняють умові $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$.
Обчислити

$$\mu = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{b},\vec{c}) + (\vec{c},\vec{a}),$$

якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 2$.

Розв'язування

Оскільки $-\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, то

$$\begin{aligned} 4 = \vec{c}^2 = (-\vec{c},-\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \\ = \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a},\vec{b})+2(\vec{b},\vec{c})+2(\vec{c},\vec{a}) = \\ = 1+16+4+2\mu. \end{aligned}$$

Отже, $\mu = -17/2$. ∎

ПРИКЛАД 3

Довжини ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ рівні. Знайти кут між векторами, якщо відомо, що вектор $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ та $\vec{q} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$ ортогональні.

Розв'язування

Оскільки $\vec{p} \perp \vec{q}$, то

$$0 = (\vec{p}, \vec{q}) = (\vec{a} + 3\vec{b}, 5\vec{a} + 3\vec{b}) =$$
$$= 5\vec{a}^2 + 18(\vec{a}, \vec{b}) + 9\vec{b}^2 = 5|\vec{a}|^2 + 18|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 9|\vec{b}|^2.$$

Ураховуючи, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, знаходимо $\cos\varphi = -7/9$, тобто

$$\varphi = -\arccos(7/9). \quad \blacksquare$$

Фізичне застосування

Обчислення роботи сили, що діє при прямолінійному переміщенні.

Нехай матеріальна точка переміщується прямолінійно з точки 0 у точку під дією сили $\vec{F}$. Тоді, якщо вектор $\vec{S} = \overrightarrow{OA}$ – переміщення матеріальної точки, а кут між векторами $\vec{F}$ і $\vec{S}$ дорівнює α, то робота A, яку здійснює ця сила, знаходиться за формулою

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{S},$$

тобто робота A дорівнює скалярному добутку сили на вектор переміщення.

Обчислення роботи рівнодіючої сили.

$$A = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) \cdot \vec{S}.$$

18.3 Векторний добуток векторів

Означення 4 Упорядковану трійку некомпланарних векторів називають *правою*, якщо під час спостереження з кінця третього вектора на площину, що визначається першими двома векторами, найкоротший поворот від першого вектора до другого відбувається проти годинникової стрілки (в додатному напрямку) і *лівій*, якщо цей поворот відбувається за годинниковою стрілкою (у від'ємному напрямку) (рис. 18.4).

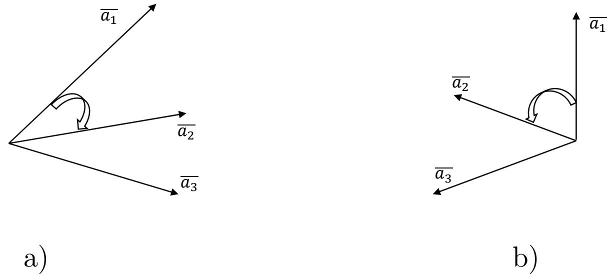


Рисунок 18.4 – a) ліва трійка некомпланарних векторів; b) права трійка некомпланарних векторів

Означення 5 *Векторним добутком* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, що задовольняє наступним умовам (рис. 18.5):

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$ та $\vec{c} \perp \vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp$ площині векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

2. упорядкована трійка векторів $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - права;

3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

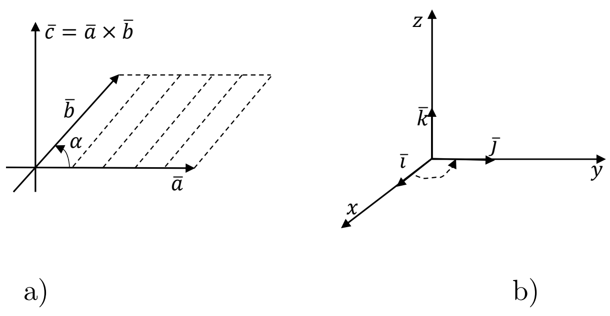


Рисунок 18.5 – Векторний добуток векторів

Зауваження. Перші дві умови визначають *напрям* векторного добутку, третя умова – *довжину* вектора векторного добутку. Позначають векторний добуток так: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$.

18.3.1 Алгебраїчні властивості векторного добутку

ТЕОРЕМА 18.7

Векторний добуток *антикоммутативний*, тобто

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \tag{18.6}$$

Доведення. Оскільки вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $-(\vec{b} \times \vec{a})$ перпендикулярні площині, що проходить через вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то ці вектори лежать на одній прямій, тобто є колінеарними. Крім того, $\vec{a} \times \vec{b}$ і $-(\vec{b} \times \vec{a})$ мають за означенням однакові модулі (площа паралелограма лишається незмінною).

Трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ є правою, трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}$ – лівою. Отже, вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $-(\vec{b} \times \vec{a})$ спрямовані протилежно. Тоді $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, що й потрібно було довести. ∎

ТЕОРЕМА 18.8

Для будь-якого $\lambda \in R$ та для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ справедливі рівності

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{b} \times (\lambda\vec{a}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}). \tag{18.7}$$

Іншими словами, векторний добуток *асоціативний* відносно скалярного множника.

ТЕОРЕМА 18.9

Векторний добуток має *розподільні* властивості:

1. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

ПРИКЛАД 4

Дано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Виразити такі вектори через вектор $\vec{c}$

1. $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}]$;
2. $[(\vec{a}+\vec{b})/2, \vec{b}-\vec{a}/2]$.

Розв'язування

1. Спочатку доведемо, що $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.
   За теоремою 18.7 $[\vec{a}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{a}]$, тоді $2[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$, а отже $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.
   Згідно властивості лінійності векторного добутку, маємо:

$$\begin{aligned}
[\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}] &= [\vec{a}, \vec{a}-\vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}] = \\
&= [\vec{a}, \vec{a}] - [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}] - [\vec{b}, \vec{b}] = \\
&= \vec{0} - [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{a}, \vec{b}] - \vec{0} = -2\vec{c}.
\end{aligned}$$

2. Аналогічно,

$$\begin{aligned}
[(\vec{a}+\vec{b})/2, \vec{b}-\vec{a}/2] &= \frac{1}{2}[\vec{a}, \vec{b}-\vec{a}/2] + \frac{1}{2}[\vec{b}, \vec{b}-\vec{a}/2] = \\
&= \frac{1}{2}[\vec{a}, \vec{b}] - \frac{1}{4}[\vec{a}, \vec{a}] + \frac{1}{2}[\vec{b}, \vec{b}] - \frac{1}{4}[\vec{b}, \vec{a}] = \\
&= \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}(-\vec{c}) = \frac{3}{4}\vec{c}.
\end{aligned}$$

Під час виконання прикладу використовували властивості векторного добутку. ∎

18.3.2 Геометричні властивості векторного добутку

ТЕОРЕМА 18.10

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Доведення

Необхідність. Нехай вектори $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$ є колінеарними. Покажемо, що векторний добуток дорівнює нуль-вектору.

Справді, оскільки вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарними, то кут α між цими векторами дорівнює нулю або $180°$. У цьому разі $\sin\alpha = 0$ а, отже, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Достатність. Нехай $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Покажемо, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарними. Якщо якийсь із векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – нульовий, то він є колінеарним будь-якому вектору. Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$, тоді з того, що $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ слідує, що $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = 0$, але тоді рівність можлива лише за умови, що $\sin\alpha = 0$, що означає колінеарність векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. ∎

Наслідок. З теореми 18.10 випливає, що $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ (векторний квадрат вектора дорівнює нуль-вектору).

ТЕОРЕМА 18.11

Площу паралелограма обчислюють як

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

ТЕОРЕМА 18.12

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

ПРИКЛАД 5

Знайти векторний добуток векторів ортонормованого базису.

Розв'язування

За властивістю колінеарності векторів маємо:

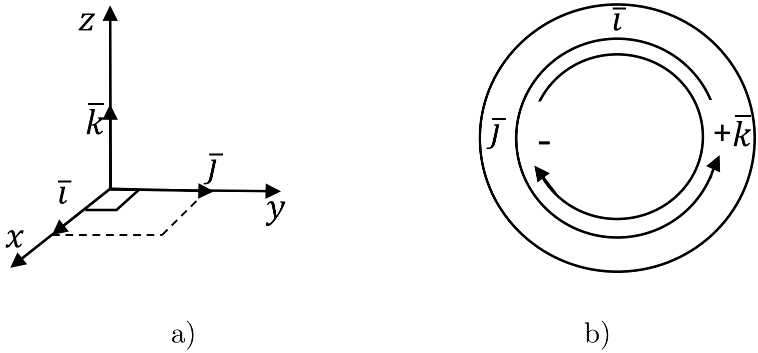


Рисунок 18.6 – а) векторний добуток векторів ортонормованого базису; b)векторний добуток векторів

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0};\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0};\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.$$

Розглянемо векторні добутки $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{i}$ (рис. 18.6 а). Для векторного добутку $\vec{i}\times\vec{j}$ маємо, що паралелограм, побудований на векторах $\vec{i}$ і $\vec{j}$ – квадрат зі стороною, рівною одиниці.

Отже, площа квадрата дорівнює одиниці. Вектор $\vec{i}\times\vec{j}$ перпендикулярний векторам $\vec{i}$ і $\vec{j}$, утворює з ними праву трійку, а, отже, векторний добуток $\vec{i}\times\vec{j}$ є одиничний вектор, спрямований вздовж осі OZ вгору, тобто $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$.

Аналогічно знаходимо, що $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

За теоремою 18.7 (властивості антикомутативності векторного добутку) маємо

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i};\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}. \quad \blacksquare$$

Зауваження. Векторний добуток векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ можна визначити за такою схемою (рис. 18.6 b).

Векторний добуток двох будь-яких суміжних векторів на колі є наступний вектор зі знаком «+», якщо напрямок руху збігається з додатним напрямком (проти ходу годинникової стрілки), та
«-», якщо рух збігається з від'ємним напрямком (за годинниковою стрілкою).

18.3.3 Векторний добуток у координатах

ТЕОРЕМА 18.13

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані в ортонормованому базисі, то координати їх векторного добутку в тому самому базисі можна одержати, розкривши визначник

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{18.8}$$

Доведення

Нехай

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Помножимо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ векторним чином, розкриваючи дужки за алгебраїчними властивостям (теореми 18.7, 18.8), а також, використовуючи результати векторного добутку векторів ортонормованого базису. Матимемо

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= a_xb_x\vec{i}\times\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\times\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\times\vec{k} + a_yb_x\vec{j}\times\vec{i} + \\ &+ a_yb_y\vec{j}\times\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\times\vec{k} + a_zb_z\vec{k}\times\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\times\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\times\vec{k} = \\ &= \vec{i}(a_yb_z - a_zb_y) - \vec{j}(a_xb_z - a_zb_x) + \vec{k}(a_xb_y - a_yb_x). \end{aligned}$$

Одержану формулу векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в координатній формі можна записати так:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad \blacksquare \tag{18.9}$$

18.3.4 Застосування векторного добутку

Геометричне застосування

1. ***Перевірка колінеарності двох векторів***

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

2. ***Визначення площі паралелограма***

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудована на цих векторах.

3. ***Визначення площі трикутника***

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площа трикутника становить половину площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Фізичне застосування векторного добутку

1. ***Момент сили***

Означення 6 Нехай тіло закріплене у точці A. У деякій точці B цього тіла прикладена сила $\vec{F}$. *Моментом сили* $\vec{F}$ відносно точки називають вектор, рівний $\overrightarrow{AB} \times \vec{F}$. Прийнято позначення $\overline{mom_A \vec{F}} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$; $\overline{M_A \vec{F}} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$.

ПРИКЛАД 6

Дано точки $(2;1;3)$; $(0;1;3)$ і сила $\vec{F}(0;4;3)$. Визначити $\overline{mom_B \vec{F}}$.

Розв'язування

Обчислимо $\overrightarrow{BA} = (2,0,0)$. Скористаємося означенням моменту сили та обчислимо його за формулою (18.8): $\overline{mom_B \vec{F}} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} =$

Спосіб 1

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 \cdot 3 - 0 \cdot 4) - \vec{j}(2 \cdot 3 - 0 \cdot 0) + \vec{k}(2 \cdot 4 - 0 \cdot 0) =$$

$$= \vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot 6 + \vec{k} \cdot 8 = -6\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Спосіб 2

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Отже, координати вектора $\overline{mom_B \vec{F}} = (0, -6, 8)$. ∎

2. ***Лінійна швидкість обертання***

Нехай точка точка твердого тіла обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі, тоді швидкість $\vec{v}$ точки визначають формулою $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, O – деяка нерухома точка осі l.

Три вектори можна перемножити:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ – вектор,
2) $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$ – число,
3) $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ – вектор.

18.4 Мішаний добуток векторів

Означення 7 *Мішаним або векторно-скалярним* добутком упорядкованої трійки векторів називають скалярний добуток одного із цих векторів на векторний добуток двох інших.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}.$$

Зауваження. Мішаний добуток – число.

18.4.1 Геометричні властивості мішаного добутку

ТЕОРЕМА 18.14

Мішаний добуток трьох некомпланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком «+», якщо ці вектори утворюють праву трійку, та зі знаком «-», якщо вони утворюють ліву трійку.

ТЕОРЕМА 18.15

Мішаний добуток трьох ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вони компланарні.

Доведення

Припустимо обернене: нехай $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$ і вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не є компланарними. Тоді на них можна побудувати паралелепіпед з об'ємом $V \neq 0$. Але за теоремою 18.14 $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \pm V$, звідки маємо $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} \neq 0$, що суперечить припущенню. Значить, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні.

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні. Тоді вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ буде перпендикулярний площині, у якій лежать вектори$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і, отже, вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{c}$. Значить, із властивостей скалярного добутку, матимемо $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$, що й треба було довести. ∎

18.4.2 Алгебраїчні властивості мішаного добутку

ТЕОРЕМА 18.16

Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці його співмножників:

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{c}\times\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Доведення

Правильність рівності випливає з того, що в цьому разі не змінюється ні об'єм паралелепіпеда, ні орієнтація векторів, що відповідають ребрам паралелепіпеда.

ТЕОРЕМА 18.17

Мішаний добуток не змінюється в разі зміни місцями знаків векторного та скалярного множення

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}.$$

Доведення

Із геометричного сенсу мішаного добутку випливає, що $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \pm V$ та $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \pm V$. Знаки в правих частинах рівностей збігаються, оскільки трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ мають однакову орієнтацію. Отже, $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$.

ТЕОРЕМА 18.18

Мішаний добуток змінює свій знак під час зміни місць будь-яких двох векторів-співмножників

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}; \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}; \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

18.4.3 Мішаний добуток у координатах

ТЕОРЕМА 18.19

Нехай упорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задана в ортонормованому базисі. Тоді мішаний добуток цих векторів може бути визначено за формулою

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Доведення

Обчислимо

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Тоді за визначенням $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ матимемо

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (18.10)$$

Розкладемо далі визначник

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

за елементами третього рядка

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \quad (18.11)$$

Порівнюючи одержані рівності (18.10) та (18.11), прийдемо до формули

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \qquad (18.12)$$

що й треба було довести. ∎

18.4.4 Застосування мішаного добутку

1. ***Обчислення об'єму паралелепіпеда та піраміди***

2. ***Вивчення можливого розташування трьох векторів***

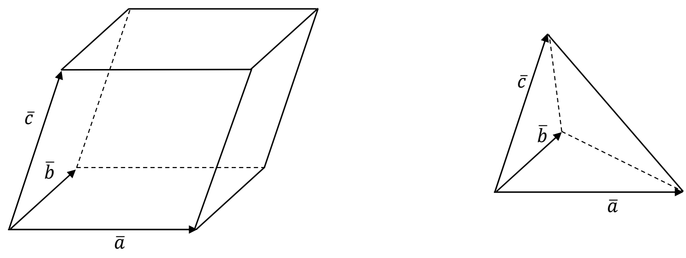
   (а) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow$ компланарні (лінійно залежні);

   (б) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0 \Leftrightarrow$ не компланарні (лінійно незалежні), утворюють праву трійку;

   (в) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0 \Leftrightarrow$ не компланарні (лінійно незалежні), утворюють ліву трійку.

3. ***Вивчення приналежності чотирьох точок площині***

   Нехай (x_1, y_1, z_1); $B(x_2, y_2, z_2)$; $C(x_3, y_3, z_3)$; $D(x_4, y_4, z_4)$.



a) b)

Рисунок 18.7 – a) $V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$; b) $V = \frac{1}{6}|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$

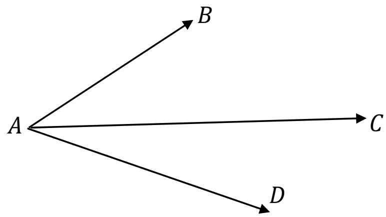


Рисунок 18.8 – Умову належності чотирьох точок одній площині

Точки будуть належати площині лише тоді, коли вектори $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$ будуть компланарними $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = 0$.

З останньої рівності маємо умову належності чотирьох точок одній площини (рис. 18.8):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18.13)$$

ПРИКЛАД 7

Дано вершини тетраедра $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$. Знайти об'єм тетраедра та висоту, опущену з вершини D.

Розв'язування

За властивістю мішаного добутку, об'єм піраміди знаходимо так:

$$V = \frac{1}{6}|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|,$$

де $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

Оскільки, $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 3;)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (4; 1; 0)$, то

$$V = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}.$$

Висоту h, опущену з вершини D знаходимо як

$$h = V/S_{\Delta ABC}.$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3; 9; 3).$$

Тоді площа трикутника ABC

$$S = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{3\sqrt{11}}{2}.$$

Отже, висота h

$$h = \frac{V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{11}}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{11}}. \quad \blacksquare$$

Лекція 19

Перетворення прямокутних координат на площині

19.1 Перетворення прямокутних декартових координат

Нехай на площині задано дві системи прямокутних декартових координат Oxy та $Ox'y'$.

Точка O' має координати (x_0, y_0) у системі OXY, вісь $O'x'$ утворює кут α з віссю Ox.

Система координат $Ox'y'$ одержана із системи Oxy за допомогою паралельного перенесення точки в точку $O'(x_0; y_0)$ та повороту на кут α навколо точки O' (рис. 19.1).

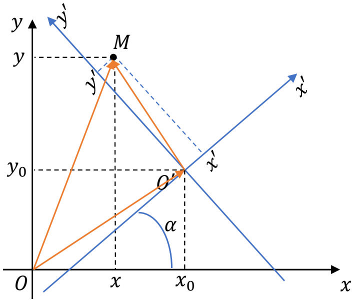


Рисунок 19.1 – Перетворення прямокутних декартових координат

Виведемо формули перетворення координат, використовуючи засоби векторної алгебри.

Нехай $M(x, y)$ та $M(x', y')$ – координати точки в системах Oxy та $Ox'y'$ відповідно.

Позначимо $\vec{i}, \vec{j}, \vec{i'}, \vec{j'}$ – орти відповідних осей Ox, Oy, Ox', Oy'.

Можемо записати

$$\begin{gathered} \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}; \\ \overrightarrow{OO'} = x - 0\vec{i} + y_0\vec{j}; \\ \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'}. \end{gathered} \tag{19.1}$$

.

З іншого боку, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

Помноживши векторну рівність (19.1) скалярно на орти $\vec{i}$ та $\vec{j}$ почергово, та користуючись властивостями скалярного добутку, одержуємо:

$$\begin{cases} x(\vec{i}, \vec{i}) + y(\vec{j}, \vec{i}) = x_0(\vec{i}, \vec{i}) + y_0(\vec{j}, \vec{i}) + x'(\vec{i'}, \vec{i}) + y'(\vec{j'}, \vec{i}), \\ x(\vec{i}, \vec{j}) + y(\vec{j}, \vec{j}) = x_0(\vec{i}, \vec{j}) + y_0(\vec{j}, \vec{j}) + x'(\vec{i'}, \vec{j}) + y'(\vec{j'}, \vec{j}). \end{cases} \tag{19.2}$$

Ураховуючи ортогональність відповідних осей та очевидні рівності

$$\begin{gathered}(\vec{i'},\vec{i})=(\vec{j'},\vec{j})=\cos\alpha;\\ (\vec{i'},\vec{j})=\cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha;\\ (\vec{j'},\vec{i})=\cos(\pi/2+\alpha)=-\sin\alpha.\end{gathered} \tag{19.3}$$

одержуємо

$$\begin{cases} x\cdot 1+y\cdot 0=x_0\cdot 1+y_0\cdot 0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha;\\ x\cdot 0+y\cdot 1=x_0\cdot 0+y_0\cdot 1+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;\end{cases} \tag{19.4}$$

Остаточно одержуємо

$$\begin{cases} x=x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha;\\ y=y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;\end{cases} \tag{19.5}$$

$$\begin{cases} x=x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha;\\ y=y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;\end{cases} \tag{19.6}$$

Розглянемо часткові випадки

1) поворот осей координат на кут α без паралельного перенесення $((x_0;y_0)=(0;0);O=O')$ (рис. 19.2 a)

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha;\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;\end{cases} \tag{19.7}$$

Ураховуючи, що стару систему координат можна одержати з нової повертанням на кут $-\alpha$, тоді «старі» координати виражаються через «нові» так:

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha;\\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha;\end{cases} \tag{19.8}$$

2) паралельне перенесення в точку $O'(x_0;y_0)$ без повороту осей, кут $\alpha=0$ (рис. 19.2 b):

$$\begin{cases} x=x_0+x';\\ y=y_0+y';\end{cases} \tag{19.9}$$

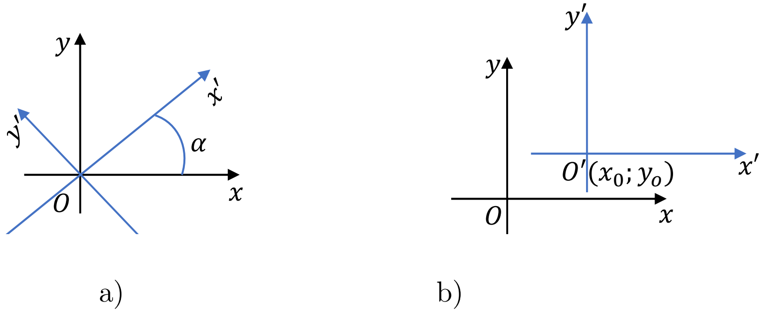


Рисунок 19.2 – a) поворот осей координаь на кут α; b) паралельне перенесення осей координат

ПРИКЛАД 1

Нова система координат була одержана перенесенням початку координат у точку $O'(2;-1)$ та поворотом на кут $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$.

1) записати формули, що виражають нові координати через старі. Знайти нові координати точки A', якщо відомі її старі координати $A(6;2)$;

2) записати формули, що виражають старі координати через нові. Знайти старі координати точки B, якщо відомі її нові координати $B'(5;5)$.

Розв'язування

1. Нові координати виражають через старі за формулами (19.8), попередньо врахувавши паралельне перенесення в точку $O'(a;b)$

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha; \\ y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha; \end{cases}$$

α – кут повороту координатних осей.

Знаючи, що $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, легко одержати, що $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Тоді нові координати набувають вигляду

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}(x-2) + \frac{3}{5}(y+1); \\ y' = -\frac{3}{5}(x-2) + \frac{4}{5}(y+1). \end{cases}$$

Тоді легко знайти координати точки A' в новій системі координат, підставивши координати $A(6;2)_{OXY}$ в попередню формулу.

У результаті обчислень $A'(5;0)_{OX'Y'}$.

2. Старі координати виражають через нові за формулами (19.7), попередньо врахувавши паралельне перенесення в точку $O'(a;b)$

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a; \\ y' = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b; \end{cases}$$

У нашому прикладі

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + 2; \\ y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' - 1. \end{cases}$$

Тоді легко знайти координати точки B в старій системі координат, підставивши координати $B'(5;5)_{O'X'Y'}$ в попередню формулу.

У результаті обчислень $B(3;6)_{OXY}$.

Отже, $A'(5;0)_{OX'Y'}$, $B(3;6)_{OXY}$.

19.2 Полярна система координат

У багатьох задачах аналітичної геометрії зручно використовувати полярні координати.

Означення 1 *Полярною піввіссю* називають промінь із обраним напрямом, що виходить з полюса F (початок відліку), та одиницею вимірювання.

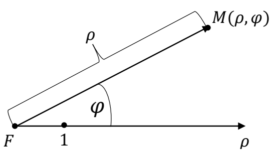


Рисунок 19.3 – Полярна система координат

Означення 2 *Полярним радіусом* точки називають відстань від точки до полюса $F : \rho = |FM|, \rho \in [0; \infty)$.

Означення 3 *Полярним кутом* φ точки називають направлений кут, що відраховують *проти* годинникової стрілки від полярної осі до вектора $\overrightarrow{FM}$.

Означення 4 *Полярними координатами* точки називають упорядковану пару (ρ, φ) (рис. 19.3).

Щоб між безліччю точок площини та безліччю впорядкованих пар дійсних чисел (ρ, φ) існувала взаємно однозначна відповідність, полярний кут φ визначають із точністю до доданка

$$2\pi k, k \in Z : \varphi \in [\alpha; \alpha + 2\pi), \quad \alpha \in R.$$

Зазвичай вважають $\varphi \in [0; 2\pi)$ або $\varphi \in [-\pi; \pi)$. Тоді положення кожної точки на площині, крім точки F – полюс, однозначно визначається її полярними координатами (ρ, φ) і навпаки, кожній точці відповідає єдина впорядкована пара – її координати (ρ, φ).

Для полюса $\rho = 0$, а кут φ не визначено однозначно та може бути будь-яким числом.

Зв'язок між полярними та декартовими координатами

Нехай полюс F збігається з початком координат точкою O, полярна піввісь збігається з додатною частиною осі OX у декартовій прямокутній системі OXY. Тоді для довільної точки площини $M(x, y)$ виконується (рис. 19.4 а)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{19.10}$$

Полярний радіус

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{19.11}$$

Для полярного кута φ можна записати (якщо ці вирази визначено)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{19.12}$$

Якщо полярний кут $\varphi \in [-\pi; \pi)$, то залежно від того, е якому

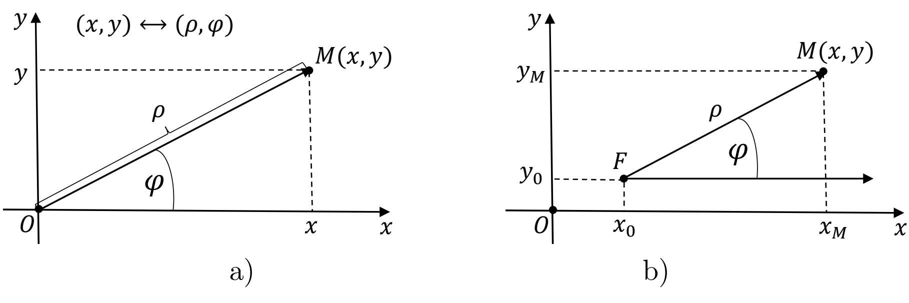


Рисунок 19.4 – Зв'язок між полярними та декартовими координатами: а) полюс F співпадає з O, b) полюс F не співпадає з O

квадранті знаходиться точка $M(x, y)$, кут φ може бути знайдений за однією з таких формул (якщо вирази визначено)

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{при} \quad x > 0, \\ sign \quad y \cdot \pi + arctg\frac{y}{x}, & \text{при} \quad x < 0, \\ sign \quad y \cdot \pi/2, & \text{при} \quad x = 0, y \neq 0, \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при} \quad y \geq 0, \\ -\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при} \quad y < 0, \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при} \quad x \geq 0, \\ sign \quad y \cdot \pi - \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

Якщо полюс F не збігається з точкою O, а має в системі OXY координати $F(x_0, y_0)$ (рис. 19.4 b), то

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\varphi, \\ y = y_0 + \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y-y_0}{x-x_0}, \text{при} \quad x \neq x_0. \end{cases} \tag{19.13}$$

ПРИКЛАД 2

Визначити, яку лінію становить рівняння $\rho = 2\sin\varphi$.

Розв'язування

Переходячи до прямокутної системи координат, за формулами (19.11) та (19.12) маємо

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

тобто $x^2 + y^2 - 2y = 0$ або $x^2 + (y-1)^2 = 0$.

Отже, дане рівняння представляє коло радіусу 1 із центром у точці $(0; 1)$, що проходить через полюс O і дотикається полярної осі X. ∎

Розглянемо декартову прямокутну, циліндричну та сферичну системи координат.

19.3 Декартові прямокутні координати

У тривимірному просторі R^3 розглянемо три взаємно перпендикулярні координатні осі OX – вісь абсцис, OY – вісь ординат і OZ – вісь аплікат. Початок координат – точка O лежить на перетині осей, одиниці вимірювання всіх осей однакові (рис. 19.5).

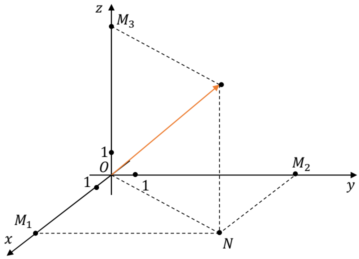


Рисунок 19.5 – Декартова система координат в R^3

Розглянемо прямокутну *праву* систему координат $Oxyz$ коли при повороті від осі OX до осі OY напрямок осі OZвибирається за правилом «правого гвинта» (правилом «буравчика»).

Тригранні кути, утворені координатними площинами називають октантами.

Нехай M_1, M_2, M_3 – проєкції точки M на координатні осі.

Означення 5 *Декартовими прямокутними координатами* точки називають координати проєкцій точки M на координатні осі: $M_1(x)$ – абсциса точки , $M_2(y)$ – ордината, $M_3(x)$ – апліката.

Між безліччю точок простору R^3 і безліччю впорядкованих трійок чисел існує взаємно однозначна відповідність. Положення кожної точки в просторі однозначно визначається її координатами (x, y, z) і навпаки, кожній точці відповідає єдина впорядкована трійка – її координати $(x, y, z) \in R^3$.

Відстань між точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ з просторової теореми Піфагора знаходимо як

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

19.4 Циліндрична система координат

Циліндрична система координат у просторі – це з'єднання полярної системи координат на площині та декартової системи на прямій, перпендикулярній площині. Нехай полярна вісь лежить у деякій площині P. Положення довільної точки M в просторі описується трьома координатами: (ρ, φ, h). Координати ρ та φ збігаються з полярними координатами на площині P, точка N – проекція точки M на площину P, h – координата проєкції точки M на вісь, перпендикулярну до площини P (рис. 19.6).

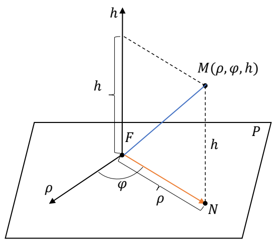


Рисунок 19.6 – Циліндрична система координат в R^3

Щоб між безліччю точок простору R^3, виключаючи вертикальну вісь, що проходить через полюс, і безліччю впорядкованих трійок дійсних чисел (ρ, φ, h) існувало взаємно-однозначна відповідність, полярний кут φ визначається з точністю до доданка $2\pi k$ $(k \in Z)$: $\varphi \in [\alpha; \alpha + 2\pi)$, $\alpha \in R$. Зазвичай вважають $\alpha = 0$ або $\alpha = -\pi$.

Для полюса F та вертикальної осі, що проходить через полюс F, $\rho = 0$, а кут φ не визначений однозначно й може бути будь-яким числом із проміжку $[\alpha; \alpha + 2\pi), \alpha \in R$.

Зв'язок між циліндричними та декартовими координатами

Нехай полярна вісь збігається з додатним напрямом осі OX у декартовій прямокутній системі $Oxyz$, полюс F збігається з початком координат точкою O, площина P збігається з площиною OXY (рис. 19.7).

Для довільної точки простору $M(x, y, z)$ можна записати

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = h. \end{cases} \tag{19.14}$$

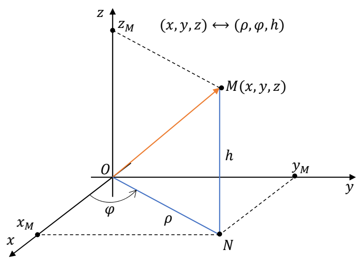


Рисунок 19.7 – Зв'язок між циліндричними та декартовими координатами

Звідси, як і в разі полярних координат, правильні формули

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \text{при} \quad x \neq 0, \\ h = z. \end{cases} \tag{19.15}$$

Формули (19.15) виконуються за умови

$$\begin{cases} \rho \geq 0, \\ \varphi \in [\alpha; \alpha + 2\pi), \\ h \in R. \end{cases}$$

19.5 Сферична система координат

У сферичній системі координат у просторі R^3 положення довільної точки у просторі описують трьома координатами: (r, φ, ψ). Радіус $r = |OM|$ – відстань від початку координат O до точки M, тобто довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

Кути φ та ψ характеризують положення точки M на сфері радіуса r.

Існує два способи задання сферичних координат. Розглянемо зв'язок між сферичними та декартовими координатами в обох випадках.

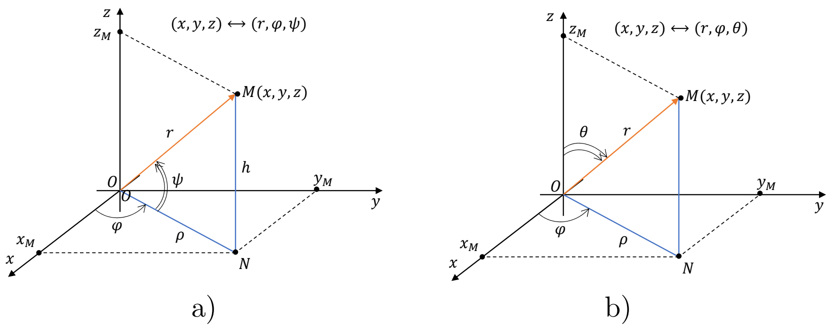


Рисунок 19.8 – a) сферична система координат; b) зв'язок між сферичними та декартовими координатами

1. Кути φ та ψ відповідають «довготі» та «широті» під час опису координат точки на земній кулі (рис. 19.8 a).

   Нехай точка N – проєкція точки M на площину OXY, $\varphi = \angle(OX; \overrightarrow{ON})$ – спрямований кут між віссю OX і $\overrightarrow{ON}$, $\psi = \angle(\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OM})$ – спрямований кут між вектором $\overrightarrow{ON}$ і $\overrightarrow{OM}$ – радіус-вектор точки M (рис. 19.8a).

   Тоді $\overrightarrow{ON} = r\cos\psi$ і

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi\cos\psi, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\psi, \\ z = r\sin\psi. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{при} \quad x \neq 0, \\ \psi = \arcsin(z/r). \end{array}\right. \tag{19.16}$$

Формули (19.16) виконуються за умови

$$\begin{cases} r \geq 0, \\ \varphi \in [\alpha; \alpha + 2\pi), \\ \psi \in [\pi/2; \pi/2]. \end{cases}$$

2. Кут φ такий же, як $\theta = \angle(OZ; \overrightarrow{OM}$ – спрямований кут між віссю OZ та радіус-вектор точки M (рис.19.8b).

   Тоді $\overrightarrow{ON} = r \sin\theta$ і

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{при} \quad x \neq 0, \\ \theta = \arccos(z/r). \end{cases} \tag{19.17}$$

Формули (19.17) виконуються за умови

$$\begin{cases} r \geq 0, \\ \varphi \in [\alpha; \alpha + 2\pi), \\ \theta \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Зауваження. Не можна плутати координату ρ у циліндричних координатах – відстань від точки O до проєкції точки M на площину OXY та координату r у сферичних координатах – відстань від точки O точки M.

Лекція 20

Пряма на площині

Означення 1 *Рівнянням лінії на площині Oxy* називають таке рівняння $F(x, y) = 0$ з двома змінними, якому задовольняють координати точок (x, y), що лежать на лінії, і лише вони. Змінні x та y називають *координатами* точок заданої лінії.

Зауваження. Рівняння лінії дозволяє вивчення геометричних властивостей лінії замінити дослідженням її рівняння.

Зауваження. В аналітичній геометрії на площині ми розглядатимемо задачі двох типів:

1) за рівнянням лінії визначити її вид, геометричні властивості, розташування на площині;

2) знаючи геометричні властивості лінії, задати її аналітично – рівнянням чи системою рівнянь, що пов'язують її координати.

Зауваження. В аналітичній геометрії *провести пряму* означає *описати її рівнянням*, що зв'язує координати точок цієї прямої.

Задача *Необхідно записати рівняння прямої L, якщо відомі координати точки $M_0(x_0; y_0) \in L$ та кут $\alpha = (\widehat{L, OX})$, (рис. 20.1.)*

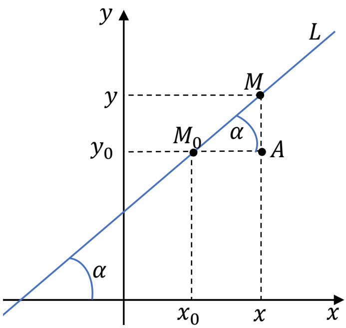


Рисунок 20.1 – Задання прямої точкою та кутом нахилу до осі OX

Для знаходження рівняння прямої, візьмемо довільну точку $M(x; y) \in L$ та розглянемо трикутник ΔM_0AM.

Для трикутника ΔM_0AM:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}; \quad \operatorname{tg}\alpha = k;$$

отже

$$M \in L \Leftrightarrow k = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow y - y_0 = k(x - x_0). \tag{20.1}$$

Рівняння (20.1) можна записати у вигляді $y = kx + (-kx_0 + y_0)$ або

$$y = kx + b \tag{20.2}$$

Висновок: пряму на площині можна задати точкою та кутом нахилу до додатного напряму осі OX або його тангенсом (кутовим коефіцієнтом).

Означення 2 Рівняння виду (20.2) називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k.

Означення 3 Якщо рівняння лінії (L) має вигляд $P(x, y) = 0$, де P – поліном n-ного степеня, то кажуть, що задана алгебраїчна лінія n-го порядку.

Наприклад, пряма $y = kx + b$ – лінія першого порядку, а парабола $y^2 = ax^2 + bx + c$, коло $x^2 + y^2 = R^2$ – алгебраїчні лінії другого порядку.

Графіки ж логарифмічних функцій, тригонометричних функцій тощо не є алгебраїчними лініями, їх називають трансцендентними лініями.

ТЕОРЕМА 20.1

Рівняння

$$Ax + By + C = 0 \tag{20.3}$$

задає пряму на площині.

Доведення

У рівнянні (20.3) можливі два випадки:

1) $B = 0$, тоді $Ax + C = 0$. Якщо $\ = 0$, то рівняння (20.3) втрачає сенс, тому очевидно, що $A \neq 0$, отже $x = -\frac{C}{A}$ – пряма, паралельна осі Y, тобто має вигляд $x = a$;

2) $B \neq 0$, тоді (20.3) перетворюється на еквівалентне рівняння

$$By = -C - Ax; \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Позначимо $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b$, отже, маємо, що рівняння (20.3) набуває вигляду $y = kx + b$, яке задає рівняння прямої на площині.

Означення 4 Рівняння $Ax + By + C = 0$ називають *загальним рівнянням прямої на площині.*

20.1 Способи задання прямої на площині

Означення 5 Вектор, перпендикулярний даній прямий, називають *вектором нормалі* даної прямої (нормальним вектором).

Позначається: $\vec{n}$, $\vec{N}_0$, $\vec{n}_L$.

Задача *Задання прямої точкою і вектором нормалі.*

Необхідно провести пряму L, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно вектору нормалі $\vec{n}(A; B)$ (рис. 20.2 a))

Розв'язування

Візьмемо довільну точку $M(x; y) \in L$, тоді

$$M_0 \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

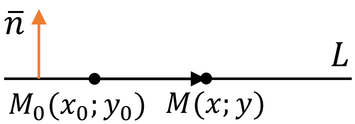
векторне рівняння шуканої прямої.

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0) \Rightarrow \overline{M_0M} \cdot \vec{n} = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

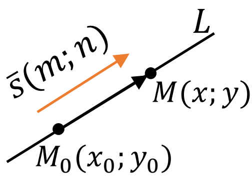
Отже, одержали

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{20.4}$$

рівняння, якому мають задовольняти координати довільної точки прямий.



a)



b)

Рисунок 20.2 – a) задання прямої точкою та вектором нормалі; b) задання прямої точкою та напрямним вектором

Доведемо, що це рівняння справді описує пряму. З (20.1) випливає, що

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Позначимо $-Ax_0 - By_0 = C$.

Отже, (20.1) рівносильно $Ax + By + C = 0$ – загальному рівнянню прямої.

За теоремою 20.1 воно визначає пряму на площині.

Висновок: пряму на площині можна задати точкою та нормальним вектором.

Означення 6 Вектор, що має напрямок заданої прямої, називають *напрямним вектором даної прямої.*

Позначається: $\vec{s}$, $\vec{q}$, $\vec{a}$, $\vec{S}_L$.

Задача *Задання прямої точкою і напрямним вектором.*

Необхідно провести пряму L на площині, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ у напрямку вектора $\vec{S}(m; n)$ (рис. 20.2 b).

Розв'язування

Нехай $M(x; y) \in L$, тоді за умовою колінеарності виконується умова

$$M(x; y) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \vec{S},$$

отже

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{20.5}$$

Одержали рівняння, якому повинні задовольняти всі точки заданої прямої.

Доведемо, що рівняння (20.5) описує шукану пряму. Перепишемо рівняння (20.5) за властивістю пропорції $n(x - x_0) = m(y - y_0)$. Тоді рівняння (20.5) рівносильне $n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0$ або $nx - my + (-nx_0 + my_0) = 0$.

Позначимо $n = A$; $-m = B$; $-nx_0 + my_0 = C$.

Тоді рівняння (20.5) набуває вигляду: $Ax + By + C = 0$. Тобто, рівняння (20.5) справді задає пряму, а отже, і пряму L, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ у напрямку вектора $\vec{S}(m; n)$.

Висновок: пряму на площині можна задати точкою та напрямним вектором.

Означення 7 Рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

називають *канонічним рівнянням прямої.*

Зауваження. Якщо коефіцієнт пропорційності для кожної точки заданої прямої в рівнянні (20.5) позначити через t будем мати:

$$\begin{cases} \frac{y-y_0}{n} = t, \\ \frac{x-x_0}{m} = t \end{cases}, t \in R, \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \tag{20.6}$$

Одержуємо новий спосіб задання прямої.

Означення 8 Рівняння (20.6) називають *параметричним рівнянням прямої.*

Задача *Задання прямої двома точками.*

Необхідно провести пряму L через точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ (рис. 20.3a).

Розв'язування

Візьмемо довільну точку $M(x; y) \in L$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ є напрямним вектором заданої прямої $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Значить, для прямої L можна скласти канонічне або параметричне рівняння:

$$M(x; y) \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}; \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{20.7}$$

Очевидно, рівняння (20.7) має вигляд канонічного (20.5), отже, воно задає шукану пряму.

Висновок: пряму на площині можна задати двома точками.

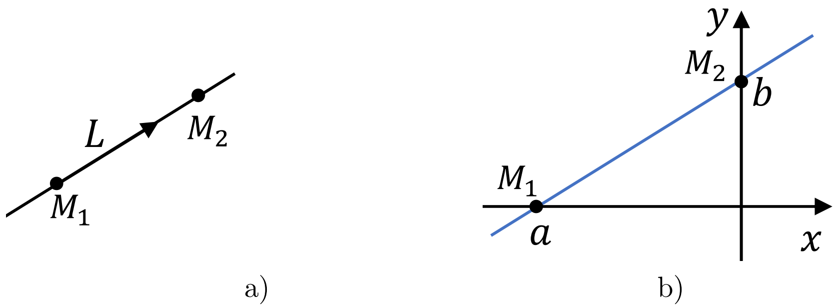


Рисунок 20.3 – a) задання прямої двома точками; b) задання прямої відрізками на координатних осях

Задача *Задання прямої величинами відрізків, що відсікаються прямою на осях координат.*

Необхідно провести пряму, якщо відомі величини відрізків, що відсікаються нею на координатних осях (рис. 20.3b), якщо a – величина відрізка, що відсікається прямою на осі OX; b – величина відрізка, що відсікається прямою на осі OY.

Розв'язування

З умови випливає, що точки $M_1(a;0)$, $M_2(0;b)$ належать прямій L, отже, з формули (20.7) випливає рівняння шуканий прямої

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0};\quad \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}\Rightarrow$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{20.8}$$

Висновок: пряму, яка не проходить через початок координат, можна задати величинами відрізків, що відсікаються нею на осях координат.

Означення 9 Рівняння (20.8) називають рівнянням прямої у відрізках на осях.

ПРИКЛАД 1

Для трикутника з вершинами $(-3;-1)$, $(1;5)$, $(7;3)$ скласти рівняння медіани та висоти, що виходять з вершини B.

Розв'язування

Необхідно скласти рівняння медіани як прямої, яка проходить через точки B і M – середину сторони , а висоти – як прямої, що проходить через точку B і перпендикулярній стороні .

Медіана BM проходить через точку B та точку M – середину відрізка AC. Знайдемо координати точки M

$$x_M=\frac{-3+7}{2}=2; y_M=\frac{-1+3}{2}=1.$$

Тоді рівняння медіани набуває вигляду

$$\frac{x-x_B}{x_M-x_B}=\frac{y-y_B}{y_M-y_B}\Rightarrow\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-5}{1-5}\Rightarrow 4x+y-9=0.$$

Висота BH перпендикулярна стороні AC. Запишемо рівняння AC

$$\frac{x+3}{7+3}=\frac{y+1}{3+1}\Rightarrow 2x-5y+1=0.$$

Напрямний вектор AC має координати: $\vec{S}_{AC}(5;2)$.

Оскільки $\overrightarrow{BH}(x-1; y-5)$ ортогональний $\vec{S}$, то

$$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{S} = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot 5 + (y-5) \cdot 2 = 0.$$

Остаточно рівняння для висоти BH: $5x + 2y - 15 = 0$. ∎

20.2 Кут між прямими

На практиці часто доводиться вирішувати й інші завдання: за рівнянням прямої визначити її геометричні властивості.

Означення 10 За *кут між прямими* на площині беруть один із суміжних кутів, утворених цими прямими під час їх перетину.

Залежно від способу задання прямої можна вивести формули для обчислення кутів між прямими.

1) Нехай прямі L_1 та L_2 задані загальними рівняннями

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

тоді кут між прямими можна визначити, як кут між нормалями до цих прямих

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \tag{20.9}$$

2) Нехай прямі L_1 та L_2 задані канонічними рівняннями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}; \quad L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}.$$

У цьому разі кут між прямими можна визначити, як кут між їх напрямними векторами:

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\vec{S}_1, \vec{S}_2}) = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|}. \tag{20.10}$$

3) Нехай прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$L_1 : y = k_1x + b_1; \quad L_2 : y = k_2x + b_2.$$

З геометричних міркувань випливає, що $\varphi = \beta - \alpha$ (рис.20.4), тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{tg}(\beta - \alpha)| = \left|\frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha}\right| = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\right|. \tag{20.11}$$

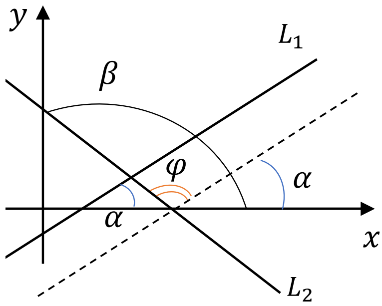


Рисунок 20.4 – Кут між прямими

20.3 Взаємне розташування двох прямих

Нехай задані дві прямі загальними рівняннями

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Прямі на площині можуть збігатися, бути паралельними, перетинатися.

1) $L_1 \equiv L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Доведення

Нехай $L_1 \equiv L_2$, отже, у загальних рівняннях відповідні коефіцієнти матимуть один і той самий коефіцієнт пропорційності, оскільки рівняння мають задавати одну й ту ж саму пряму, отже

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Нехай $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, тоді загальні рівняння задають одну й ту ж саму пряму (рівняння можна зробити однаковими).

2) Пряма L_1 паралельна прямій L_2 – це рівносильно рівності

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

оскільки в цьому разі $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, але L_1 не збігається з L_2.

3) $L_1 \cap L_2 = M_1$ ($\cap$ – перетин).

Нехай M_1 – точка перетину прямих, отже $\vec{n}_1$ не паралельний $\vec{n}_2$. Це рівнозначно тому, що

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

В пункті 3 може виникнути завдання знаходження точки M_1 – точки перетину прямих або про кут між прямими. Оскільки координати точки перетину прямих повинні задовольняти рівнянням цих прямих, то точку M_1 можна знайти, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{20.12}$$

ПРИКЛАД 2

Знайти точку M, симетричну точці $A(2;1)$ відносно прямої, що проходить через точки $B(-1;7)$ та $C(1;8)$.

Розв'язування

Спочатку запишемо алгоритм знаходження координат точки M

1) записати рівняння прямої BC;
2) записати рівняння прямої AA', перпендикулярної до BC;
3) знайти координати точки перетину прямих BC і AA', відкласти на прямий AA' з іншого боку прямої відрізок $A'M = 'A$.
4) знайти координати точки M, яка буде симетричною точці A відносно прямої BC.

Тепер замінимо кожну з дій складанням рівнянь та обчисленням координат точок.

1) Запишемо рівняння прямої BC у вигляді

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \frac{x+1}{1+1} = \frac{y-7}{8-7} \Rightarrow x - 2y + 15 = 0.$$

2) Запишемо рівняння вектора $\overrightarrow{AA'}(x-2; y-1)$, ортогональної до BC. Напрямний вектор прямої BC має координати $\vec{S}_{BC}(2;1)$. За властивістю ортогональних прямих

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{S}_{BC} = 0 \Rightarrow (x-2)\cdot 2 + (y-1)\cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

Рівняння прямої AA' має вигляд: $2x + y - 5 = 0$.

3) Щоб знайти точку перетину прямих AA' та BC, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y + 15 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1, \\ y = 7, \end{cases} \Rightarrow A'(-1; 7).$$

4) Знайдемо координати точки M, ураховуючи, що точка A' – середина відрізка AM

$$x_{A'} = \frac{x_A + x_M}{2}; y_{A'} = \frac{y_A + y_M}{2} \Rightarrow$$

$$x_M = 2x_{A'} - x_A = 2\cdot(-1) - 2 = -4; y_M = 2y_{A'} - y_A = 2\cdot 7 - 1 = 13.$$

Отже, координати точки M, симетричної точці A відносно прямої BC мають вигляд $M(-4; 13)$. ∎

20.4 Нормальне рівняння прямої

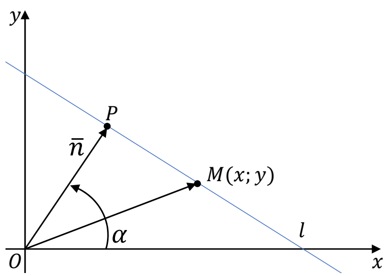


Рисунок 20.5 – Нормальне рівняння прямої

Нехай $\vec{n}$ – одиничний (тобто $|\vec{n}| = 1$) вектор нормалі, спрямований із початку координат у бік прямої та утворює з віссю Ox кут α, що відраховують проти годинникової стрілки;

$p \geq 0$ – відстань від прямої до початку координат $(0, 0)$.
Точка P – ортогональна проекція точки на пряму l(рис. 20.5).
Виведемо рівняння прямої l.

$$\vec{n} = \frac{1}{|OP|} \cdot \overrightarrow{OP}; \quad \vec{n} = (\cos\alpha; \sin\alpha).$$

Візьмемо будь-яку точку $M(x; y) \in l$; $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$.
Помножимо обидві частини рівняння скалярно на $\vec{n}$

$$\underbrace{(\overrightarrow{OM}, \vec{n})}_{(x,y)\cdot(\cos\alpha;\sin\alpha)} = \underbrace{(\overrightarrow{OP}, \vec{n})}_{|\overrightarrow{OP}|=p} + \underbrace{(\overrightarrow{PM}, \vec{n})}_{0}.$$

Тоді нормальне рівняння прямої набуває вигляду

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{20.13}$$

Зауваження. У загальному рівнянні прямої (20.3)

$$Ax + By + C = 0$$

вектор нормалі $\vec{N}(A; b)$ може бути визначено з точністю до постійного множника. Щоб перейти від загального рівняння (20.3) до нормального, потрібно помножити (20.3) на **нормуючий множник** $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ так, щоб $\mu C < 0$.

Тоді одинична нормаль

$$\vec{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат $(0, 0)$, $p = 0$ та знак μ неважливий.

20.5 Відстань від точки до прямої

Знайдемо відстань $d = d(M_0, l)$ від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої l (рис. 20.6), заданої нормальним рівнянням $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.
Нехай $(KM_0) \perp l, K \in l$. Тоді $d = |\overrightarrow{KM_0}|$.

$$\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KM_0}.$$

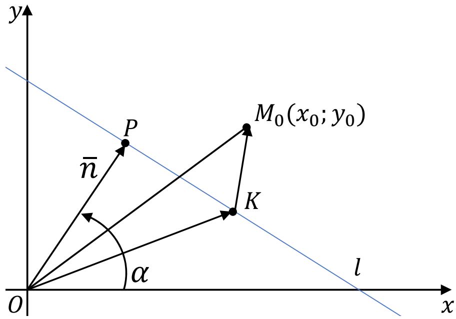


Рисунок 20.6 – Відстань від точки до прямої

Помножимо скалярно обидві частини рівності на $\vec{n}$

Ураховуючи, що $\overrightarrow{OM_0} = (x_0; y_0)$; $\quad \vec{n} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$, одержимо:

$$x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha = p + 0 \pm |\overrightarrow{KM_0}|.$$

Якщо $\overrightarrow{KM_0} \uparrow\uparrow \vec{n}$, то $d = (\overrightarrow{KM_0}, \vec{n})$.
Якщо $\overrightarrow{KM_0} \uparrow\downarrow \vec{n}$, то $d = -(\overrightarrow{KM_0}, \vec{n})$.

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{20.14}$$

Отже, щоб знайти відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$, *потрібно координати точки підставити в нормальне рівняння прямої, а також узяти абсолютну величину результату*

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \tag{20.15}$$

Зауваження. У разі підстановки координат точки M_0 у вираз $Ax_0 + By_0 + C(C < 0)$, знак без модуля показує, із якого боку від прямої лежить точка M_0

- якщо $Ax_0 + By_0 + C < 0$ – точка M_0 знаходиться з тієї самої сторони від l, що й $O(0,0)$;
- якщо $Ax_0 + By_0 + C > 0$ – точка M_0 знаходиться з іншого боку від l, ніж $O(0,0)$.

Зауваження. Щоб визначити, чи дві дані точки лежать по одну або різні сторони від прямої $Ax + By + C = 0$, потрібно підставити їх координати у вираз $Ax+By+C$. Якщо знаки в результаті підстановки збігаються, точки лежать по одну сторону прямої. В іншому випадку – по різні боки.

ПРИКЛАД 3

Прямі l_1 та l_2 задані загальними рівняннями

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Знайти рівняння бісектрис кутів між цими прямими.

Розв'язування

Будь-яка точка $M(x, y)$, що лежить на одній із двох бісектрис, рівновіддалена від прямих l_1 та l_2.

Записавши умову рівності відстаней до прямих, тобто, нормальні рівняння прямих l_1 та l_2 одержимо рівняння двох бісектрис.

Рівняння бісектрис між прямими:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad \blacksquare \tag{20.16}$$

20.6 Пучок прямих, що проходять через точку перетину двох даних прямих

Задані дві прямі

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Розглянемо рівняння

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \tag{20.17}$$

$\alpha, \beta \in R; \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$

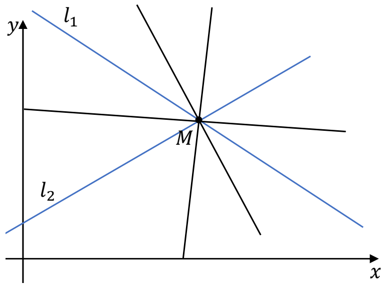


Рисунок 20.7 – Пучок прямих

Нехай точка M – точка перетину прямих l_1 та l_2, координати якої невідомі (рис. 20.7). Для $\forall \alpha, \beta$ рівняння (20.17) визначає пряму, оскільки є рівнянням першого степеня.

Якщо надати α та β конкретних значень, одержимо одну з прямих пучка, що проходять через точку M.

Якщо $\alpha = 0$, то це пряма l_2, при $\beta = 0$ – це пряма l_1.

Зауваження. Зазвичай обирають або $\alpha = 1$, або $\beta = 1$, тим самим виключаючи з пучка одну з прямих l_2 або l_1.

Пряма l_2 належить пучку (20.17) при $\alpha = 0$.

Якщо $\alpha = 1$, рівняння (20.17) не може мати вигляд

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

тобто пряма l_2 не входить у пучок

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Аналогічно, при $\beta = 1$, пряма l_1 не входить в пучок

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + (A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Зауваження. Якщо прямі l_1 та l_2 паралельні, одержимо «сімейство » паралельних прямих.

ПРИКЛАД 4

Трикутник PQR заданий координатами своїх вершин: $P(-1; 0)$, $Q(1; 2)$, $R(2; -4)$.

1. Написати рівняння

   а) сторін трикутника,

   б) висоти, проведеної з вершини Q,

   в) медіани, проведеної з вершини P,

   г) бісектриси кута R,

   д) описаного навколо трикутника PQR кола.

2. Знайти

   а) внутрішній кут QRP трикутника,

   б) площу трикутника PQR.

3. Написати рівняння прямої l, що проходить через точку перетину висоти (QH) та медіани (PD), та паралельній стороні (PQ) (не знаходячи точки).

Розв'язування

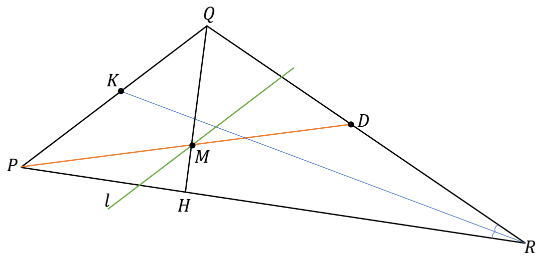


Рисунок 20.8 – Рисунок до задачі 4

Для розв'язання задачі не обов'язково зображати трикутник на координатній площині, достатньо намалювати довільний трикутник (рис. 20.8). Однак для контролю отриманих результатів доцільно все ж таки зробити креслення, що відповідає заданим координатам вершин.

1. а) запишемо рівняння сторін трикутника як прямих, що проходять через дві задані точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Зауважимо, що порядок точок неважливий. Для подальших розрахунків рівняння прямих зручно записати у вигляді загальних рівнянь.

(PQ): Нехай $P(x_1; y_1), Q(x_2; y_2)$

$$\frac{x-(-1)}{1-(-1)} = \frac{y-0}{2-0} \quad \text{або} \quad x - y + 1 = 0;$$

$$(QR): \quad \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-4-2} \quad \text{або} \quad 6x + y - 8 = 0;$$

$$(PR): \quad \frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{y-0}{-4-0} \quad \text{або} \quad 4x + 3y + 4 = 0;$$

б) для знаходження рівняння висоти (QH) скористаємось рівнянням (20.4) прямою, що проходить через задану точку

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

та умовою перпендикулярності прямих $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.
Оскільки пряма (QH) проходить через точку Q, можемо записати

$$(QH) : A(x - 1) + B(y - 2) = 0.$$

Координати нормалі та прямої (QH) знайдемо з умови перпендикулярності (QH) і (PR), яке запишеться у вигляді $4A + 3B = 0$. Ще раз підкреслимо, що координати нормалі визначаються з точністю до постійного множника. В цьому разі для виконання необхідної умови найпростіше покласти $A = 3; B = -4$.
Звідси рівняння висоти

$$(QH) : 3(x - 1) - 4(y - 2) = 0 \quad \text{або} \quad 3x - 4y + 5 = 0.$$

Зауваження. На практиці під час знаходження координат нормалі прямої $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, перпендикулярної заданій прямій $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, для виконання умови $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ зручно вважати $A_2 = B_1; B_2 = -A_1$.

в) для знаходження рівняння медіани (PD), знайдемо координати точки D як середини відрізка QR. Маємо

$$x_D = \frac{x_Q + x_R}{2} = \frac{3}{2}; \quad y_D = \frac{y_Q + y_R}{2} = -1.$$

Отже, точка D має координати $(3/2; -1)$.
Далі запишемо рівняння прямої (PD), що проходять через дві задані точки P і D

$$(PD): \quad \frac{x+1}{3/2+1} = \frac{y}{-1} \quad \text{або} \quad 2x + 5y + 2 = 0;$$

г) щоб знайти рівняння бісектриси (RK), скористаємося рівняннями для бісектрис кутів між прямими (20.16)

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Прирівнюючи нормальні рівняння прямих (PR) та (QR), одержимо:

$$\frac{4x + 3y + 4}{5} = \pm\frac{6x + y - 8}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow \sqrt{37}(4x + 3y + 4) = \pm 5(6x + y - 8).$$

Із двох бісектрис l_1 і l_2 кутів між прямими (PR) та (QR)

$$\left[\begin{array}{l} l_1 : (4\sqrt{37} - 30)x + (3\sqrt{37} - 5)y + 4\sqrt{37} + 40 = 0, \\ l_2 : (4\sqrt{37} + 30)x + (3\sqrt{37} + 5)y + 4\sqrt{37} - 40 = 0 \end{array}\right.$$

потрібно вибрати ту, що лежить усередині трикутника PQR. Для цього скористаємося зауваженням, яке дозволяє визначити, чи лежать дві дані точки по одну або різні сторони від цієї прямої.

Підставимо координати точок P і Q в ліву частину рівняння прямої l_1:

$$P : (4\sqrt{37} - 30) \cdot (-1) + (3\sqrt{37} - 5) \cdot 0 + 4\sqrt{37} + 40 = 70 > 0,$$
$$Q : (4\sqrt{37} - 30) \cdot 1 + (3\sqrt{37} - 5) \cdot 2 + 4\sqrt{37} + 40 = 14\sqrt{37} > 0.$$

Отже, точки P і Q лежать з одного боку прямої l_1.

Значить, бісектрисою кута R трикутника PQR є пряма l_2;

д) знайдемо центр описаного кола як точку перетину серединних перпендикулярів до сторін PQ та QR.

Нехай точка – середина сторони PQ. Її координати – напівсума координат кінців відрізка PQ: $E(0; 1)$. Середина відрізка QR – точка $D(3/2; -1)$ (знайдені раніше).

Запишемо рівняння прямих, що проходять через кожну із цих точок і перпендикулярних сторонам трикутника PQR. Для цього скористаємося прийомом, розглянутим у пункті **б)**.

Позначимо l_{PQ}, l_{QR} – серединні перпендикуляри відповідних сторін. Тоді

$$l_{PQ} : A_1(x - 0) + B_1(y - 1) = 0, \quad (PQ) : x - y + 1 = 0, \Rightarrow$$
$$\Rightarrow l_{PQ} : x + y - 1 = 0,$$
$$l_{QR} : A_2(x - 3/2) + B_2(y + 1) = 0, \quad (QR) : 6x + y - 8 = 0, \Rightarrow$$
$$\Rightarrow l_{QR} : x - 6y - 15/2 = 0.$$

Далі розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ x-6y-15/2=0, \end{cases}$$

та знайдемо точку перетину серединних перпендикулярів PQ і QR. Позначимо її O. Її координати $O(27/14; 13/14)$.

Радіус описаного кола дорівнює відстані від точки O до будь-якої з вершин трикутника PQR.

За формулою відстані між точками площини знаходимо

$$|OP| = \sqrt{(27/14+1)^2 + (-13/14)^2} = 5\sqrt{74}/14.$$

Знаючи центр і радіус кола, запишемо рівняння описаного навколо трикутника PQR кола

$$(x-27/14)^2 + (y+13/14)^2 = 925/98.$$

2. а) щоб знайти кут QRP, скористаємося формулою для кутів між прямими

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Знаючи рівняння прямих (QR) та (PR), маємо

$$\cos\varphi = \frac{|6\cdot 4 + 1\cdot 3|}{\sqrt{6^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{27}{5\sqrt{37}}.$$

Отже, $\varphi = \arccos\frac{27}{5\sqrt{37}}$.

б) площу трикутника можна знайти різними способами. Засобами аналітичної геометрії це також можна зробити по-різному. Найменш трудомістким є такий метод:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}|PR| \cdot |QH|.$$

$|PR|$ знаходиться за формулою відстані між точками площини, а $|QH|$ як відстань від точки Q до прямої (PR) за відповідною формулою (20.15).

Маємо $|PR| = \sqrt{(-1-2)^2+4^2} = 5$. Підставляючи координати точки Q в нормальне рівняння прямої (PR), одержимо:

$$|QH| = \rho(Q, (PR)) = \frac{|4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4|}{5} = \frac{14}{5}.$$

Отже,

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{14}{5} = 7.$$

3. На цьому прикладі покажемо зручність використання поняття пучка прямих, що проходять через точку перетину двох даних прямих.

   Рівняння висоти (QH) та медіани (PD) було знайдено раніше.

$$(QH) : 3x - 4y + 5 = 0; \quad (PD) : 2x + 5y + 2 = 0.$$

   Запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через точку перетину прямих (QH) та (PD).

   Координати точки при цьому знаходити не потрібно. Покладемо $\beta = 1$ у рівнянні пучка

$$\alpha(A1_x + B_1 y + C_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0,$$

   виключивши тим самим із цього пучка пряму (QH). Це правомірно, оскільки пряма (QH) явно не є розв'язком задачі.

   Маємо

$$\alpha(3x-4y+5)+(2x+5y+2) = 0 \quad \text{або} \quad (3\alpha+2)x+(-4\alpha+5)y+5\alpha+2 = 0.$$

   Знайдемо параметр α з необхідної в задачі умови паралельності прямої l та сторони $(PQ) : x - y + 1 = 0$.

   Умова паралельності прямих, заданих загальними рівняннями, це пропорційність координат їх нормалей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Звідки

$$3\alpha + 2 = 4\alpha - 5 \Leftrightarrow \alpha = 7$$

   та рівняння шуканої прямої:

$$l : \quad 23x - 23y + 37 = 0.$$

Із розглянутих прикладів видно, що на практиці залежно від завдання доцільно використовувати ту чи іншу форму рівняння прямої на площині. ∎

Список літератури

1. Олійник А. С., Сущанський В. І., Лекції з алгебри : навч. посіб. Київ, 2019.

2. Rudnyeva G. V. Elements of linear algebra and analytic geometry. Kharkiv, 2020.

3. Бохонов Ю. Є. Алгебра та аналітична геометрія : практикум. Київ, 2022.

4. Бохонов Ю. Є. Лінійна алгебра : практикум. Київ, 2022.

5. Веригіна І. В., Єрьоміна Т. О., Поварова О. А. Вища математика. Елементи аналітичної геометрії : практикум. Київ, 2021.

Електронне навчальне видання

Дворниченко Аліна Василівна

АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Конспект лекцій
для здобувачів спеціальності
113 «Прикладна математика»
всіх форм здобуття вищої освіти

У двох частинах
Частина 2

Відповідальний за випуск І. В. Коплик
Редактор О. Ф. Дубровіна
Комп'ютерне верстання А. В. Дворниченко

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 7,21. Обл.-вид. арк. 7,73.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.