

УДК 669:66.095.8, 621.9.048.7:533.9

УКПП

№ держреєстрації 0121U112687

Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет (СумДУ)
40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2; тел. (0542) 33 41 08

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи,
д-р фіз.-мат. наук, проф.

_____ А.М. Черноус

НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЗВІТ

Виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку
«Математичні науки та природничі науки» Сумського державного університету

(проміжний)

Керівник НДР

д-р фіз.-мат. наук, проф.

_____ О.В. Хоменко

2023

Рукопис закінчено 21 грудня 2023 р.

Результати роботи розглянуто науковою радою СумДУ, протокол від 28 грудня 2023 р. № 13

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, головний науковий співробітник, д-р фіз.-мат. наук, професор	О.В. Хоменко 21.12.2023 р. (вступ, підрозділ 2.1, висновки)
Відповідальний виконавець, старший науковий співробітник, канд. фіз.-мат. наук	А.Ю. Бадалян 21.12.2023 р. (підрозділ 2.2, перелік джерел посилання)
Провідний науковий співробітник, д-р фіз.-мат. наук, професор	О.В. Лисенко 21.12.2023 р. (підрозділ 3)
Мол. наук. співроб., Аспірант	С.С. Ільїн 21.12.2023 р. (підрозділ 4.1)
Мол. наук. співроб., Аспірант	Д.Т. Логвиненко 21.12.2023 р. (підрозділ 1.3.1)
Мол. наук. співроб., Аспірант	О.Ю. Шикура 21.12.2023 р. (підрозділ 1.3.1)
Лаборант, Студент	О.О. Пороскун 21.12.2023 р. (підрозділ 2.3)
Лаборант, Студент	Р.Р.Чернущенко 21.12.2023 р. (підрозділ 1.3)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 55 с., 16 рис., 36 джерел.

СИНЕРГЕТИЧНА МОДЕЛЬ, ТЕРТЯ ЛЬОДУ, ОДНОМОВОДЕ НАБЛИЖЕННЯ, АДІАБАТИЧНА ГРАНИЦЯ, РОЗПОДІЛ СТАТИЧНОЇ СИЛИ ТЕРТЯ, СУПЕРГЕТЕРОДИННІ ЛАЗЕРИ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ, ХВИЛІ ПРОСТОРОВОГО ЗАРЯДУ, ТРИХВИЛЬОВІ ПАРАМЕТРИЧНІ ВЗАЄМОДІЇ, ІНКРЕМЕНТ ЗРОСТАННЯ, ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИЙ ОНДУЛЯТОР

На основі системи нелінійних диференціальних рівнянь у одномодовому наближенні та адіабатичній границі, отримали і описали координатну залежність кінетичної та статичної сил тертя, і температури у приповерхневому шарі в'язкопружного льоду. При терті льоду розрізняють три діапазони швидкості ковзання, які визначаються такими процесами. а) Отримано вираз для малої швидкості, за якої дисипація фрикційної енергії ініціює незначне нагрівання льоду, і його плавлення не відбувається. Мають місце повільне (логарифмічне) збільшення статичного тертя з часом стаціонарного контакту завдяки, наприклад, повільному збільшенню контактної області, і логарифмічне зростання кінетичної сили тертя за рахунок тепло-активованої повзучості. б) Визначено вираз для великої швидкості, коли утворюється тонка безперервна водна плівка на межі ковзання за рахунок плавлення льоду, викликаного фрикційним нагріванням. Сила тертя задається в'язкістю та товщиною плівки води, які визначаються комбінованою дією плавлення поверхні льоду і витискування рідини. в) Згідно з теорією контактної механіки Б. Перссона, у проміжному швидкісному інтервалі, фрикційне нагрівання знижує тертя за рахунок теплового розм'якшення поверхні або утворення неоднорідної тонкої поверхневої плівки, що складається з областей льоду і води, які здатні до флуктуацій у просторі і часі. На основі одного з цих припущень пояснюється, чому тертя льоду спадає із збільшенням швидкості ковзання до досягнення її значення, за якого тонкий

однорідний водний шар формується на поверхні. В даному проєкті буде розвинуто синергетичну математичну модель, яка подає розм'якшення тонкого шару поверхні льоду при терті з врахуванням просторової неоднорідності деформації, напружень та температури.

У кубічно-нелінійному наближенні проаналізовано процеси генерації поля електричного накачування пучком електронів та його вплив на підсилення хвиль просторового заряду (ХПЗ) у ділянці підсилення параметричного супергетеродинного лазера на вільних електронах (ЛВЕ). Ми виявили, що амплітуда генерованого електричного поля накачки становить 21...33% від амплітуди зовнішнього електричного поля накачки. Ми показали, що генероване електричне поле накачки знаходиться у фазі із зовнішнім. Це призводить до збільшення приросту ХПЗ; отже, довжина секції підсилення ХПЗ зменшується на 22%. Ми з'ясували, що це поле не руйнує режим підсилення багатогармонійної ХПЗ. Досліджуваний ефект дозволяє створювати ЛВЕ з меншими поздовжніми розмірами та потужними електромагнітними хвилями зі складним мультигармонійним спектром.

У рамках квадратичного нелінійного наближення проаналізовано вплив генерованого електричного поля накачування на підсилювальні властивості параметричного супергетеродинного лазера (ЛВЕ). Високі підсилювальні властивості такого пристрою забезпечуються реалізацією двох взаємопов'язаних трихвильових параметричних резонансів. Показано, що ефект генерації додаткового електричного поля накачки суттєво впливає на приріст другого параметричного резонансу поздовжніх хвиль, збільшуючи його на 33%. Завдяки цьому інкремент зростання всього ЛВЕ збільшується на 28-10% в залежності від параметрів системи. Встановлено, що вплив генерованого електричного поля накачки найбільш ефективний при високих частотах і відносно низьких енергіях електронного пучка, коли підсилення електромагнітного сигналу за рахунок першого параметричного резонансу значно менше, ніж підсилення поздовжнього хвиль за рахунок другого параметричного резонансу.

ЗМІСТ

с.

Вступ	6
1 Синергетична модель розм'якшення поверхні льоду при терті з врахуванням просторової неоднорідності деформації, напружень та температури	9
1.1 Основні рівняння та постановка задачі	9
1.2 Аналітичний розв'язок	10
1.3 Чисельний розв'язок	15
1.3.1 Метод сіток та умови	15
1.3.2 Результати	20
2 Вплив генерованого електричного поля накачки на підсилувальні характеристики супергетеродинного лазера на вільних електронах	27
2.1 Вплив генерованого електричного поля накачки на підсилення мультигармонічних повільної та швидкої хвиль просторового заряду в секції підсилення супергетеродинного лве	28
2.2 Вплив генерованого електричного поля накачки на підсилення вхідного електромагнітного сигналу супергетеродинного лве	42
Висновки	51
Перелік джерел посилання	53

ВСТУП

Розвиток сучасних технологій постійно спрямовує вирішення нових фізичних і технічних проблем, з якими стикається людина. Однією з таких проблем є тертя льоду, що має як практичний досвід людської взаємодії (наприклад, водіння на льоду), так і природні аспекти (наприклад, рух льодовиків). У повсякденному житті моделювання тертя льоду є корисним для людини при вивченні процесів при проектуванні штучних льодових середовищ, таких як вплив руху льодовиків на клімат, а також при дослідженні різних матеріалів і компонентів, що рухаються по льоду, наприклад, при створенні елементів і конструкцій в машинобудуванні та зимових видах спорту [1-7].

Модель представлена системою трьох одновимірних диференціальних параболічних рівнянь в частинних похідних. У цій моделі сили тертя задаються в'язкістю і товщиною плівки, які визначаються комбінованим впливом танення і тиску на поверхню льоду. Згідно з цим підходом, фрикційне нагрівання змінює тертя за рахунок термопом'якшення поверхні або утворення гетерогенної тонкої поверхневої плівки, що складається з просторово і часово змінних кристалів і ділянок розм'якшеного льоду. Ми пояснюємо, чому тертя льоду зменшується зі збільшенням швидкості ковзання, досягаючи значення, при якому на поверхні утворюється тонкий однорідний шар води [8-12].

У цьому дослідженні розглянуто дві фізичні ситуації. Перша - коли верхня і нижня поверхні рухаються в протилежних напрямках з однаковою швидкістю. Друга - коли верхня поверхня рухається вздовж нерухомої нижньої поверхні. На основі явної двошарової різницевої схеми аналітично описано чисельну процедуру розв'язання рівнянь з початковими та граничними умовами. Граничні умови задаються стаціонарними значеннями температури, деформацій і напружень, отриманими для однорідного випадку без урахування градієнтної складової [13-19]. Для різних часових рядів отримано залежності статичних і динамічних сил тертя та температури від координат, нормальних до поверхні. Результати показують, що з часом встановлюється стаціонарний

розподіл сили тертя і температури по товщині приповерхневого шару льоду. Отримані координатні профілі залежності показують, що зміна сили тертя по товщині приповерхневого шару льоду стає більш різкою зі збільшенням температури, тобто відносна швидкість зсуву поверхні тертя зростає [20-21].

Лазери на вільних електронах (ЛВЕ) є потужними джерелами електромагнітного випромінювання терагерцового діапазону у різних сферах діяльності людини, таких як дистанційний моніторинг газів, медичний огляд, візуалізація, громадська безпека тощо [22-27]. Одним з головних їх переваг є зручне налаштування частоти випромінювання в широкому діапазоні і створення потужних вихідних сигналів. Однак слід зазначити, що ці пристрої мають певні недоліки, головні з яких це великі розміри та складність виготовлення конструкції, що в кінцевому підсумку обмежує сферу їх використання. Тому останнім часом дослідники зосереджуються на вдосконаленні існуючих схем таких пристроїв і створенні нових [23, 28-30].

У нашій роботі ми проаналізували фізичні процеси в секції підсилення параметричного супергетеродинного лазера на вільних електронах [26, 27] □ для пошуку оптимальних режимів роботи. Суть роботи супергетеродинних ЛВЕ полягає у використанні додаткового механізму підсилення поряд із традиційним механізмом збільшення приростів амплітуд сигналу. Як додатковий механізм підсилення хвилі можна використовувати двопотокову, плазмово-пучкову, параметричну та інші нестійкості [31]. Коли використовується двопотокова нестабільність, такі пристрої називаються супергетеродинними двопотоковими ЛВЕ. У нашій роботі розглядається параметричний ЛВЕ, який використовує параметричну нестабільність як додатковий механізм підсилення хвиль просторових зарядів (ХПЗ). Супергетеродинні лазери на вільних електронах привабливі з тої точки зору, що вони мають дуже високі швидкості зростання електромагнітних хвиль вхідних сигналів порівняно з традиційними ЛВЕ. Вони також можуть генерувати потужний багатогармонійний сигнал із широким частотним спектром [27, 31 -

36]. Такі багатогармонійні сигнали можна використовувати для дослідження властивостей матеріалів та інших спеціальних застосувань [28].

Раніше в [27] ми проаналізували мультигармонійну взаємодію поздовжніх хвиль у ділянці підсилення параметричних супергетеродинних ЛВЕ. Показано, що в досліджуваній системі реалізуються множинні параметричні резонанси різного типу. Завдяки особливостям досліджуваної системи встановлено, що на початковій стадії взаємодії хвиль швидкості зростання хвиль просторового заряду не залежать від частот підсиленних хвиль. Ця властивість дозволяє створювати потужні багатогармонійні хвилі з широким частотним спектром.

У представленій роботі описано ефект генерованого електричного поля накачки та його вплив на хвилі просторового заряду у секції підсилення ЛВЕ в рамках кубічного нелінійного аналізу, а також на вхідний електромагнітний сигнал в рамках квадратичного нелінійного аналізу. Аналіз показує, що генероване електричне поле накачки має істотний вплив на процеси підсилення хвиль. Цей вплив є можливим завдяки тому, що загальне електричне поле накачки збільшується на 21...33%. Внаслідок цього, довжина секції підсилення може бути зменшена на 22%, що складає значну частину всього ЛВЕ.

1 СИНЕРГЕТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗМ'ЯКШЕННЯ ПОВЕРХНІ ЛЬОДУ ПРИ ТЕРТІ З ВРАХУВАННЯМ ПРОСТОРОВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ ДЕФОРМАЦІЇ, НАПРУЖЕНЬ ТА ТЕМПЕРАТУРИ

1.1 Основні рівняння та постановка задачі

Процес граничного тертя, який відбувається в трибологічних системах на наномасштабі, все більше викликає інтерес багатьох теоретиків та експериментаторів. Зокрема, розглядається атомарно гладка тверда поверхня при наявності ультратонкого шару однорідної крижаної плівки, а також розглядається відносний рух з фіксованою відстанню між поверхнями. Це пов'язано з частим використанням таких систем для створення високоточного обладнання та оснащення.

У цій роботі ми розглядаємо відповідні градієнтні внески напружень, деформацій та температури [20], щоб дослідити загальні просторово неоднорідні випадки, які можливі лише при модифікації базової системи рівнянь[3]:

$$\varepsilon = D_\varepsilon \nabla^2 \varepsilon - \varepsilon + \sigma, \quad (1.1)$$

$$\tau \dot{\sigma} = D_\sigma \nabla^2 \sigma - \sigma + g\varepsilon(T - 1), \quad (1.2)$$

$$\delta \dot{T} = D_T \nabla^2 T + (T_e - T) - \sigma\varepsilon, \quad (1.3)$$

де T_e – температура поверхні тертя,

ε – зсувна складова відносних деформацій (безрозмірна змінна),

σ – зсувна складова відносних напружень (Па),

T – температура поверхні льоду (К), та параметри

$$\tau = \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}, \delta = \frac{\tau_T}{\tau_\varepsilon}, \quad (1.4)$$

де τ_ε – час релаксації деформації (с), τ_σ – час релаксації напружень (с), τ_T – час релаксації температури (с). Константа $g < 1$, чисельно дорівнює відношенню модуля зсуву розм'якшеного приповерхневого шару льоду G до його характерного значення G_0 .

У цьому дослідженні система рівнянь (1.1) - (1.3) описує нелінійну модель в'язкопружних середовищ, яка фізично відображає розм'якшення тонких шарів крижаних поверхонь при терті [21]. Важливо, щоб поверхневий шар розм'якшеного льоду був твердим із щільними дефектами.

Обрана система рівнянь (1.1) - (1.3) описує характеристики поведінки досліджуваних параметрів в гетерогенних системах диференціальних рівнянь, що працюють в екстремальних умовах тертя, приклад яких показаний на рисунку 1.1. Рисунок 1.1 позначає систему, що складається з блоків масою M , розташований поверх шару розм'якшеного матеріалу товщиною h і прикріплений до пружинного блоку жорсткістю k .

До блоку прикладається додаткове навантаження L , і кінець пружини переміщається зі швидкістю V .

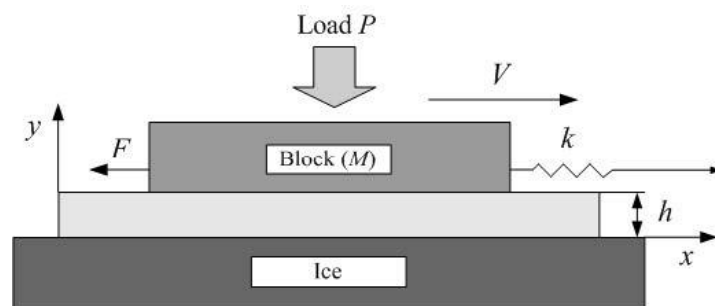


Рисунок 1.1 – Приклад механічного аналогу системи.

1.2 Аналітичний розв'язок

У вихідному формулюванні система рівнянь (1.1) - (1.3) не має рішення, тому ми використовували адіабатичну апроксимацію для вирішення цієї задачі:

$$\tau_\varepsilon \gg \tau_T, \tau_\sigma. \quad (1.5)$$

Цей метод розв'язання задачі фізично обумовлений тим фактом, що він слідує за зміною деформації зсуву $\varepsilon(t)$ в процесі еволюції значень напружень $\sigma(t)$ і температури поверхні льоду $T(t)$.

Також була використана одномодова апроксимація, яка замінила внесок градієнта цим співвідношенням. $\nabla^2 \rightarrow \left(\frac{l}{L}\right)^2$ [22], де L – максимальне значення довжини теплопровідності, l – товщина плівки льоду.

Після проходження попередніх умов і припущень можна приступати до пошуку аналітичних рішень для системи (1.1)– (1.3). У рівняннях (1.2) і (1.3) ми робимо ліву частину рівною нулю і отримуємо рівняння для напруги σ і температури T в залежності від деформації ε .

$$D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 \sigma - \sigma + g\varepsilon(T - 1) = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{g\varepsilon(T - 1)}{\left(1 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2\right)}, \quad (1.6)$$

одразу ж підставимо вираз (1.6) у (1.3)

$$\begin{aligned} D_T \nabla^2 T + (T_e - T) - \frac{g\varepsilon^2(T - 1)}{\left(1 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2\right)} = 0 &\Rightarrow D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 T + T_e - T - D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 T - \\ - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T_e + D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T - \varepsilon^2 g T = -\varepsilon^2 g T; &\Rightarrow \\ \Rightarrow T = \frac{D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T_e - T_e - \varepsilon^2 g}{D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 + D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 - \varepsilon^2 g}. & \quad (1.7) \end{aligned}$$

Крім того, щоб отримати значення напруги σ , яке залежить лише від деформації ε , підставимо (1.7) у (1.6):

$$\sigma = \frac{g\varepsilon \left(1 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2\right) \left(D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T_e - T_e - \varepsilon^2 g - D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 1 + D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 + \varepsilon^2 g\right)}{D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 + D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 - \varepsilon^2 g} \quad (1.8)$$

Для майбутнього чисельного розв'язання системи знайдемо стаціонарні значення напруження σ і температури T . У рівняннях (1.7) та (1.8) прийнемо $\left(\frac{l}{L}\right)^2 = 0$, отримаємо такі вирази:

$$\sigma_0 = \frac{g\varepsilon_0(T - 1)}{1 + \varepsilon_0^2 g}, \quad (1.9)$$

$$T_0 = \frac{T_e + \varepsilon_0^2 g}{1 + \varepsilon_0^2 g}. \quad (1.10)$$

Переходячи до рівняння (1.1), підставимо у нього знайденні вирази (1.7) та (1.8), враховуючи що $\varepsilon^2 \ll 1 + \left(\frac{l}{L}\right)^2$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & D_\varepsilon \nabla^2 \varepsilon - \varepsilon + g\varepsilon \left(1 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2\right) \left(D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T_e - T_e - \varepsilon^2 g - D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 1 + \right. \\ & \left. + D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 + \varepsilon^2 g\right) \times \left(D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 + D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 - \varepsilon^2 g\right) = \\ & \dots = -\varepsilon(1 - g(\varepsilon g - T_e - \varepsilon^2 g T_e + 1)) + \varepsilon \left(\frac{l}{L}\right)^2 (D_\varepsilon + g(2D_\sigma - D_T T_e - 2D_\sigma T_e + \\ & + D_T \varepsilon^2 g + 2D_T - D_\sigma \varepsilon^2 g T_e)) + \varepsilon g \left(\frac{l}{L}\right)^4 (2D_\sigma^2 T_e + 2D_\sigma D_T T_e - 2D_\sigma D_T \varepsilon^2 g - D_T^2 - \\ & - 6D_\sigma D_T - 2D_\sigma^2 + 2D_\sigma^2 \varepsilon^2 g) + \varepsilon g \left(\frac{l}{L}\right)^6 (5D_\sigma^2 D_T - D_\sigma D_T T_e - D_\sigma^3 T_e - D_\sigma^2 D_T T_e + \\ & + D_\sigma^2 D_T \varepsilon^2 g + D_\sigma D_T^2 \varepsilon g + D_\sigma^3) + \varepsilon g \left(\frac{l}{L}\right)^8 (D_\sigma^2 D_T T_e - D_\sigma^2 D_T^2 - D_\sigma^3 D_T) + \\ & + \varepsilon g \left(\frac{l}{L}\right)^{10} D_\sigma^3 D_T^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

У рівнянні (1.11) при зворотному переході від $\left(\frac{l}{L}\right)^2$ до оператору ∇^2 , ми отримуємо, що $gT_e \approx 1$. З цього можна зробити висновок, що в рамках нашої моделі похідна від ∇ додає порядок величини, і, таким чином, коли похідна на порядок більша за другу, вона нехтує значенням деформації ε , тому отримуємо таке рівняння:

$$\dot{\varepsilon} = -\varepsilon - \varepsilon^2 g^2 + \varepsilon T_e g + \varepsilon^3 g^2 T_e - \varepsilon g. \quad (1.12)$$

Щоб знайти стаціонарне значення деформації ε прирівняємо праву частину рівняння (1.12) до нуля та розв'яжемо кубічне рівняння

$$\begin{aligned} -\varepsilon - \varepsilon^2 g^2 + \varepsilon T_e g + \varepsilon^3 g^2 T_e - \varepsilon g &= 0 | : g \Rightarrow \\ \varepsilon^3 - \varepsilon^2 g - \varepsilon(T_e - (1 + g^{-1})) &= 0 \Rightarrow \\ \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_{2,3} &= \frac{g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 - (T_e - (1 + g^{-1}))}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Виходячи з фізичної задачі та її умов, розв'язок $\varepsilon_1 = 0$ не підходить для моделі та чисельного розв'язку задачі. Тому у подальших розрахунках будемо враховувати $\varepsilon_{2,3}$.

Враховуючи попередні перетворення система (1.1) - (1.3) зводиться до залежного від часу рівняння Гінзбурга-Ландау:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\delta V_1}{\delta \varepsilon(y)}, V_1 = \int \left\{ \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} g^2 + \frac{\varepsilon^2}{z} T_e g + \frac{\varepsilon^4}{4} g^2 T_e - \frac{\varepsilon^2}{2} g \right) + \frac{1}{2} (\nabla \varepsilon D_t)^2 \right\} dy, \quad (1.14)$$

де $D_t = (D_\varepsilon + g(2D_\sigma - D_T T_e - 2D_\sigma T_e + D_T \varepsilon^2 g + 2D_T - D_\sigma \varepsilon^2 g T_e))$, що може бути записано в такій формі:

$$\dot{\varepsilon} = \nabla^2 \varepsilon D_t - \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}. \quad (1.15)$$

В (1.15) синергетичний потенціал відповідає такому виразу:

$$V = (g(T_e - 1) - 1) \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} g^2 + \frac{\varepsilon^4}{4} g^2 T_e, \quad (1.16)$$

в якому виконується умова $g < 0.5$.

Якщо температура поверхонь, що труться T_e , менше критичного значення

$$T_c = 1 + g^{-1}, \quad (1.17)$$

тоді потенціал (1.16) приймає значення мінімуму, що відповідає стаціонарному значенню деформації $\varepsilon_0 = 0$, тому плавлення неможливе і відбувається перехід у твердоподібний стан.

В стаціонарному стані $\dot{\varepsilon} = 0$ рівняння (1.15) має перший інтеграл

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varepsilon}{dy} \right)^2 = V + |V_0|. \quad (1.18)$$

Враховується, що в упорядкованій фазі $y = -\infty$ та при виконанні умов $\varepsilon = \varepsilon_0, \nabla \varepsilon = 0$ необхідна рівність константи інтегрування до абсолютного значення синергетичного потенціалу V_0 при упорядкуванні:

$$V_0 \equiv V(\varepsilon_0) \cong -\frac{1}{2} (g(T_e - 1) - 1) \left(g^2 - (T_e - (1 + g^{-1})) \right) - \frac{g^2}{3} \left(-\frac{g}{2} \right)^3 + \\ + \sqrt{\left(\frac{g}{2} \right)^6 - (T_e - (1 + g^{-1}))^3} + \frac{g^2 T_e}{4} \left(g^4 - (T_e - (1 + g^{-1}))^4 \right). \quad (1.19)$$

Розв'язок рівняння (1.15), враховуючи стаціонарні умови показує, що розподіл зсувної деформації представляється

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \tanh\left(\frac{y_0 - y}{\xi}\right), \quad (1.20)$$

$$\xi^2 \equiv \frac{2}{gT_e - (g + 1)}, \quad (1.21)$$

де ξ - довжина кореляції введена для того щоб показати розбіжність при значенні T_c температури поверхні тертя T_e . Константа інтегрування $y_0 \gg \xi$ визначає ширину граничної області, в якій зсувна деформація прямує від стаціонарного значення до нуля. Використовуючи адіабатичну і одномодову апроксимації, знайдені аналітичні солітонні рішення (1.20) одновимірних параболічних рівнянь, графік яких показаний на малюнку. 1.2, що відображає розподіл деформації зсуву.

1.3 Чисельний розв'язок

1.3.1 Метод сіток та умови

Система рівнянь (1.1) - (1.3) являє собою три одновимірних параболічних рівняння в приватних похідних. Їх можна легко вирішити, застосувавши явну двошарову різницеву схему. У цьому випадку вся область простору-часу, необхідна для дослідження, ділиться сіткою і обчислюється за допомогою сіткового методу. Розрахунок проводиться від початкового моменту часу $t = 0$ до часу $t = t_N$, а координата при цьому $y \in [0, y_M]$. Початкові та граничні умови, необхідні для вирішення, вибираються з фізичних уявлень задачі, які представлені чорними крапками на рисунку 1.2. Індексом i будемо позначати шари по координаті, а індексом j – залежність від часу. На малюнку 1.2 показана сітка, яка визначає просторове розділення для чисельного рішення рівняння (1.1)–(1.3) і дає вираз для явної різницевої схеми.

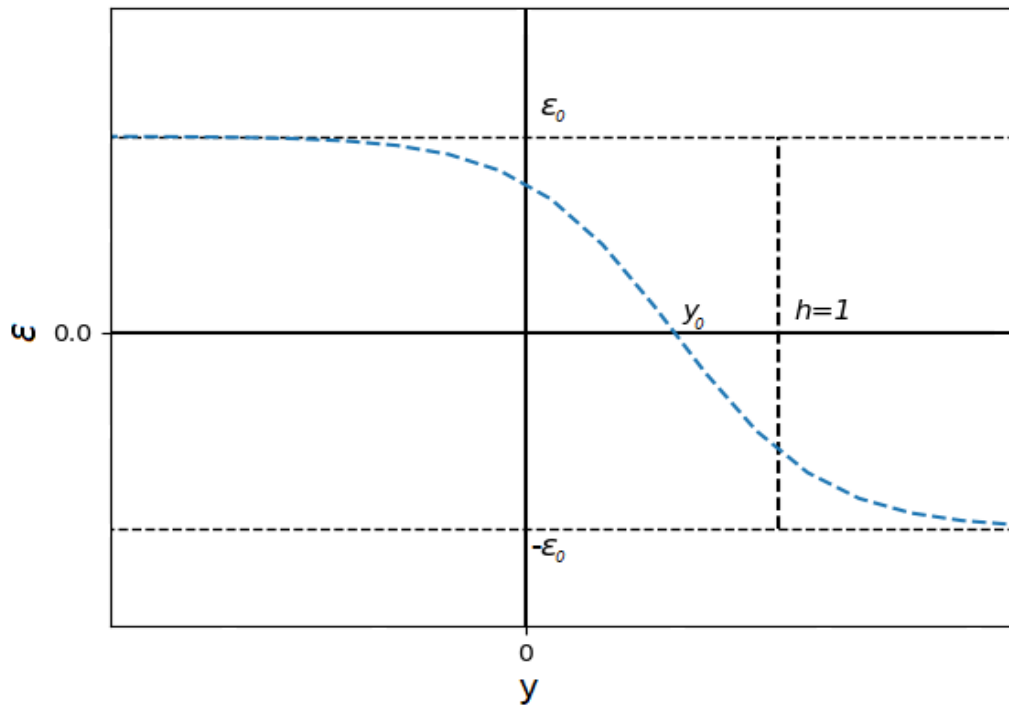


Рисунок 1.2 – Координатна залежність зсувної деформації, отриманої при аналітичному розв'язку (1.20).

Коли ми використали явну схему різниці, похідна апроксимується наступним чином (аналогічно для напруження σ та температури T):

$$\nabla^2 \varepsilon \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon_{i+1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^j}{H^2}, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\Delta}, \quad (1.23)$$

де $\Delta = \frac{t_N}{N}$ – крок за часом,

$H = \frac{y_M}{M}$ – крок по координаті, показує відстань між вузлами сітки по вертикалі та горизонталі,

M – кількість кроків по координаті,

N – кількість кроків по часу. Кінцеві розрахункові співвідношення приймають такий вигляд:

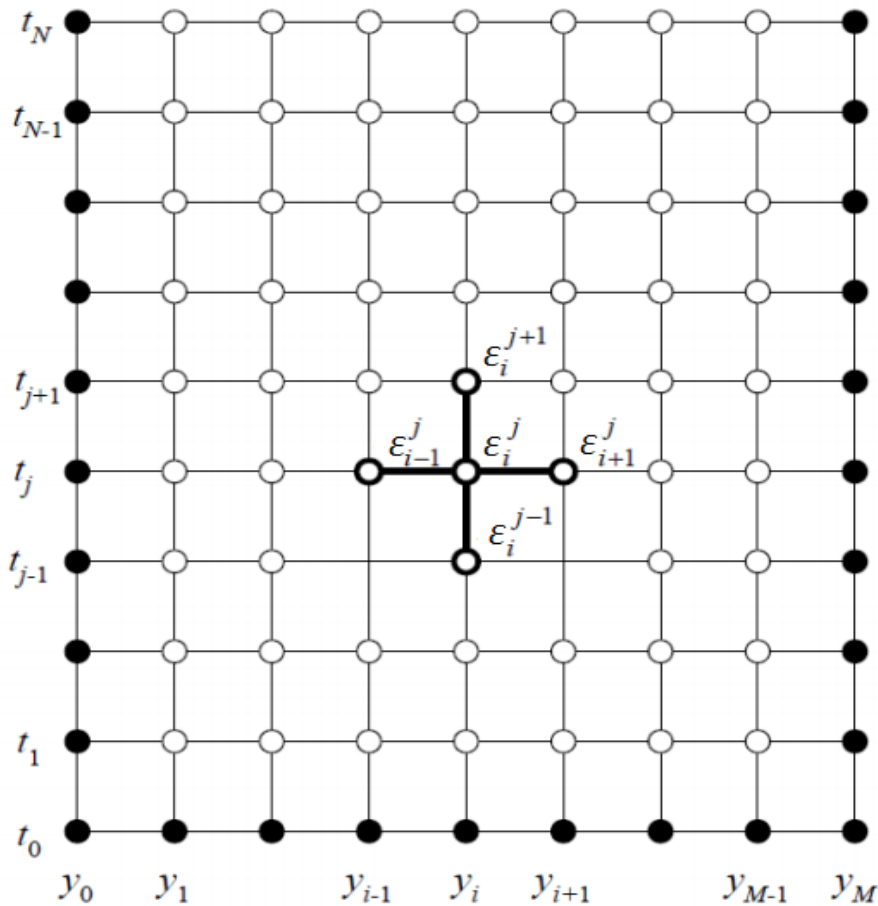


Рисунок 1.3 – Сітка, яка задає просторове розбиття для чисельного розв'язання рівнянь (1.1) - (1.3) на прикладі деформації ϵ .

$$\epsilon_i^{j+1} = \epsilon_i^j + \frac{\Delta}{H^2} [D_\epsilon(\epsilon_{i+1}^j - 2\epsilon_i^j + \epsilon_{i-1}^j) + H^2(-\epsilon_i^j + \sigma_i^j)], \quad (1.24)$$

$$\sigma_i^{j+1} = \sigma_i^j + \frac{\Delta}{\tau H^2} [D_\sigma(\sigma_{i+1}^j - 2\sigma_i^j + \sigma_{i-1}^j) + H^2(-\sigma_i^j + g\epsilon_i^j T_i^j - g\epsilon_i^j)], \quad (1.25)$$

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta}{\delta H^2} [D_\sigma(T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) + H^2(T_e - T_i^j - \sigma_i^j \epsilon_i^j)]. \quad (1.26)$$

Знаючи набір значень на попередньому часовому шарі $\epsilon_i^j, \sigma_i^j, T_i^j$ система рівнянь (1.24) - (1.26) містить $3N(M-1)$ рівнянь і дозволяє знайти $\epsilon_i^{j+1}, \sigma_i^{j+1}, T_i^{j+1}$. Додаючи до (1.24) - (1.26) необхідний набір початкових умов в момент часу $t = 0$, які додають $3(M+1)$ рівнянь, а також граничні умови, що додають

$6N$ рівнянь, таким чином, загальна кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $3(M + 1)(N + 1)$.

При русі поверхонь тертя, відповідно до рівнянь (1.1) - (1.3), в однорідному випадку ($\nabla^2 \equiv 0$) встановлюються стаціонарні значення деформації ε_0 , напруження σ_0 , і температури T_0 :

$$\sigma_0 = \frac{g\varepsilon_0(T - 1)}{1 + \varepsilon_0^2 g}, T_0 = \frac{T_e + \varepsilon_0^2 g}{1 + \varepsilon_0^2 g}, \varepsilon_0 = \frac{g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 - (T_e - (1 + g^{-1}))}. \quad (1.27)$$

Розглянемо 2 найбільш поширених фізичних випадки. У першому з них верхня поверхня з тріщиною рухається зі швидкістю V , в той час як нижня рухається з такою ж швидкістю в протилежному напрямку. У цьому випадку напруга, деформація та температура верхньої поверхні рівні σ_0 , ε_0 і T_0 відповідно. Значення температури біля межі нижньої поверхні також буде дорівнювати T_0 , оскільки згідно з (1.27) $T_0 = T_e$, а T_e представляє температуру поверхонь тертя, які є термостатом (зовнішнім середовищем). Зважаючи на симетрію розглянутої задачі, то напруження і деформація поблизу нижньої поверхні дорівнюють $-\sigma_0$ і $-\varepsilon_0$ відповідно. Отже, виберіть початкові умови для параметрів товщини поверхневого шару льоду наступним чином

$$\varepsilon_i^0 = -\varepsilon_0 + \frac{2i\varepsilon_0}{M}, \sigma_i^0 = -\sigma_0 + \frac{2i\sigma_0}{M}, T_i^0 = T_0, i = 0, 1, \dots, M. \quad (1.28)$$

Граничні умови будуть мати такий вигляд:

$$\varepsilon_0^j = -\varepsilon_0, \varepsilon_M^j = \varepsilon_0, \sigma_0^j = -\sigma_0, \sigma_M^j = \sigma_0, T_0^j = T_M^j = T_0, j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.29)$$

В інших випадках нижня поверхня міцно закріплена і не рухається, а верхня поверхня рухається лише з постійною швидкістю. Напруга, деформація і температура на верхній поверхні також рівні σ_0 , ε_0 і T_0 , а на нижній

виконуватиметься рівність $\sigma_0 = \varepsilon_0 = 0$, через взаємодію поверхневих атомів з атомами поверхневого шару льоду нижній шар прилипає до поверхні. Температура шару льоду поблизу поверхні на нижній межі все ще вибирається як T_0 .

У цій фізичній ситуації початкова умова може бути записана у вигляді:

$$\varepsilon_i^0 = \frac{i\varepsilon_0}{M}, \sigma_i^0 = \frac{i\sigma_0}{M}, T_i^0 = T_0 \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (1.30)$$

а граничні:

$$\varepsilon_0^j = 0, \varepsilon_M^j = \varepsilon_0, \sigma_0^j = 0, \sigma_M^j = \sigma_0, T_0^j = T_M^j = T_0, j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.31)$$

Координату у будемо вимірювати в одиницях товщини приповерхневого шару льоду h , її нижня границя дорівнює 0, а верхня 1. Таким чином, отримуємо замкнену систему рівнянь, що дає можливість на розв'язання поставленої задачі.

Для розв'язання обираємо крок по часу $\Delta = 10^{-6}$ та крок по координаті $H=0.01$. Отримуємо, що координата у ділиться на $M=100$ частин. Для переходу від зсувної деформації ε до статичної сили тертя використаємо формулу

$$F_e(t) = AG_\varepsilon \varepsilon(t), \quad (1.32)$$

де A – контактуюча площа (м^2),

G_ε - релаксований модуль зсуву. Приймаємо, що сила тертя вимірюється в одиницях AG_ε . Подібну формулу використаємо для переходу від напруження σ до кінетичної сили тертя

$$F_v(t) = A\sigma(t). \quad (1.33)$$

1.3.2 Результати

На наступному малюнку показана координатна залежність кінетичної сили тертя, статичної сили тертя і температури в різних часових шарах і еволюція системи до стаціонарного стану. На малюнках 1.4 і 1.5 показані результати чисельного рішення обраного рівняння. Рисунок 1.4 відповідає випадку, коли поверхня тертя зміщується в протилежному напрямку (використовуючи початкову умову (1.28) і граничну умову (1.29)), а рисунок 1.5 відповідає випадку, коли зміщується тільки верхня поверхня, а нижня поверхня нерухома (початкова умова (1.30) і гранична умова (1.29)). гранична умова (1.31), відповідно). На обох графіках зображена еволюція за часом статичної сили тертя F_e , кінетичної сили тертя F_v та температури приповерхневого шару льоду T .

Криві наведені для 4 послідовних моментів часу. Штрихові лінії на рис. 1.4 і 1.5 представляють початкові умови, тобто описують просторовий розподіл величин в момент часу $t = 0$. Тому чим далі від штрихової лінії знаходиться крива на графіку, тим пізнішому моменту часу вона відповідає. Криві на обох малюнках відповідають часовим шарам 5000, 70 000 і 1 000 000. Враховуючи крок інтегрування за часом $\Delta = 10^{-6}$ отримаємо такі значення моменту часу $t = 0.005, 0.07, 1.0$. Остання крива, отримана для моменту часу $t = 1.0$, на обох рисунках з подальшим плином часу не змінює вигляд, тобто представляє стаціонарні значення. Як видно із рис. 1.4, 1.5 і вставок на них, статична сила тертя F_e змінюються з часом повільніше, ніж кінетична сила тертя F_v та температура. Це пов'язано з тим, що час релаксації деформації ε вибрано в 15 разів більшим, ніж часи релаксації двох інших параметрів. У цьому випадку виконується синергетичний принцип підпорядкування, коли зміни напруження σ і температури T йдуть за зміною деформації ε .

Зазначимо, що у рис. 1.4 криві симетричні щодо серединного приповерхневого шару льоду, в області у якій кінетична та статична сили тертя

дорівнюють нулю. Це відбувається за рахунок того, що поверхні, які труться, зсуваються в протилежних напрямках з однаковими швидкостями. При цьому, відповідно до залежності $T(y)$, якщо рухатися від центру приповерхневого шару льоду у напрямку до будь-якої з поверхонь (в перпендикулярному до них напрямку), то температура T спочатку збільшується, а потім знову починає зменшуватись, поки біля поверхонь не прийме значення T_e . Залежності на рис. 2.5 фактично повторюють праву частину графіків, наведених на рис. 1.4 при $y > 0.5$, тобто розподіли, що спостерігаються на рис. 1.4 вище за центр системи. Це цілком зрозуміло, тому що у випадку, показаному на рис. 1.5, нижня поверхня спочиває, і біля неї реалізуються значення $F_e = F_v = 0$, так само як і в серединному приповерхневому шару льоду на рис. 1.4.

Рис. 1.4 і 1.5 при різному наборі параметрів D_σ , D_ε та D_T можуть показувати різну поведінку. Це в тому числі означає, що вид кривої статичної сили тертя F_e змінюється по товщині приповерхневого шару льоду. Рис. 1.4 і 1.5 показують часову еволюцію основних параметрів. Зазначимо, що залежно від початкових умов характер еволюції може бути дуже різним, але при фіксованих параметрах у результаті встановлюються стаціонарні розподіли величин F_e , F_v , T за товщиною приповерхневого шару льоду. Саме вони і визначають у результаті режим тертя.

Для рис. 1.6 та 1.7 був обраний момент часу $t = 1$. На рис. 1.6 наведені стаціонарні розподіли статичної сили тертя F_e за товщиною приповерхневого шару льоду при різних температурах поверхонь T_e . Графіки демонструють той факт, що зі зростанням температури зростає відносна швидкість руху поверхонь, оскільки в'язкість приповерхневого шару льоду зменшується і вона стає рідкішою.

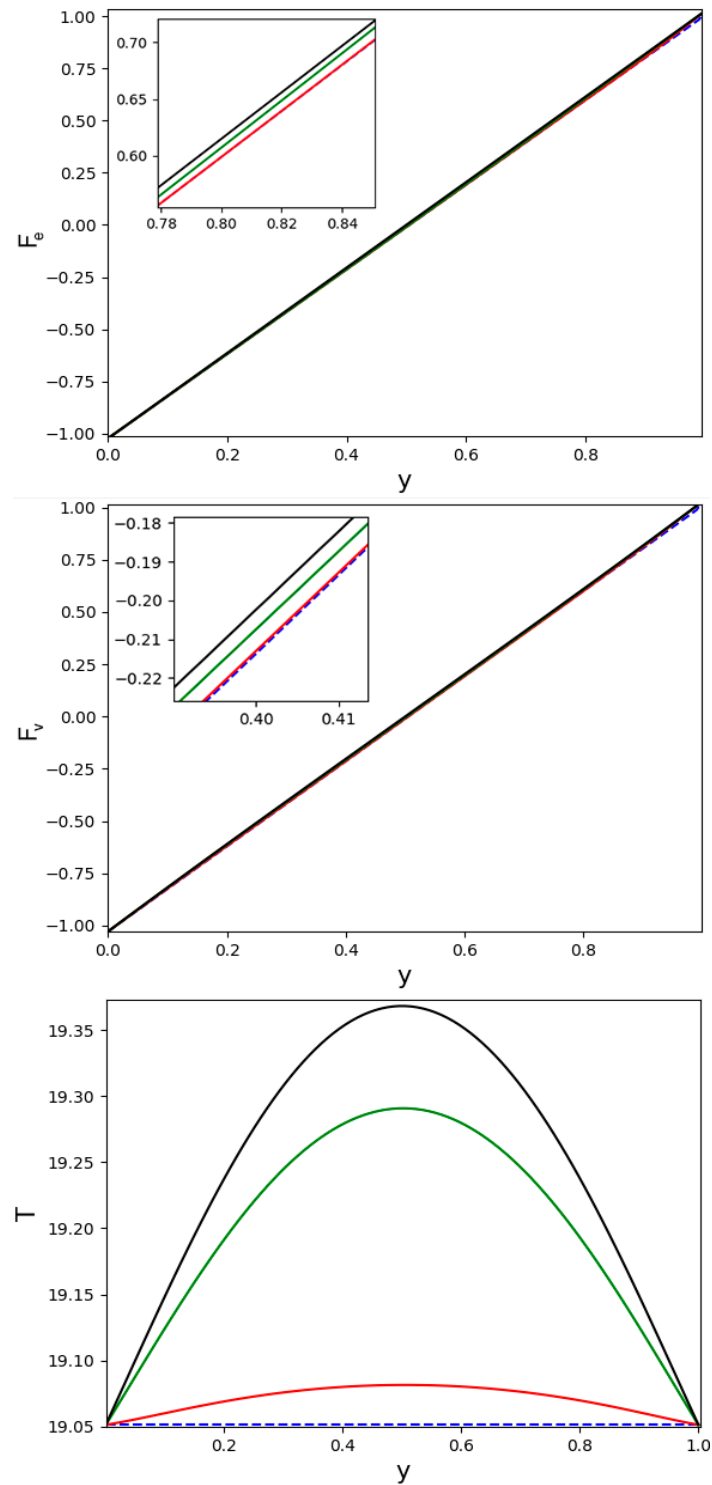


Рисунок 1.4 – Координатні профілі залежності статичної F_e та кінетичної F_v сил тертя, температури T , отримані в результаті чисельного розв'язання рівнянь (1.1) – (1.3) з параметрами $g = 0.05$, $T_e = 20$, $\tau = \delta = 0.15$, $D_e = 0.4$, $D_\sigma = D_T = 0.2$ при початкових та граничних умовах (1.28) та (1.29).

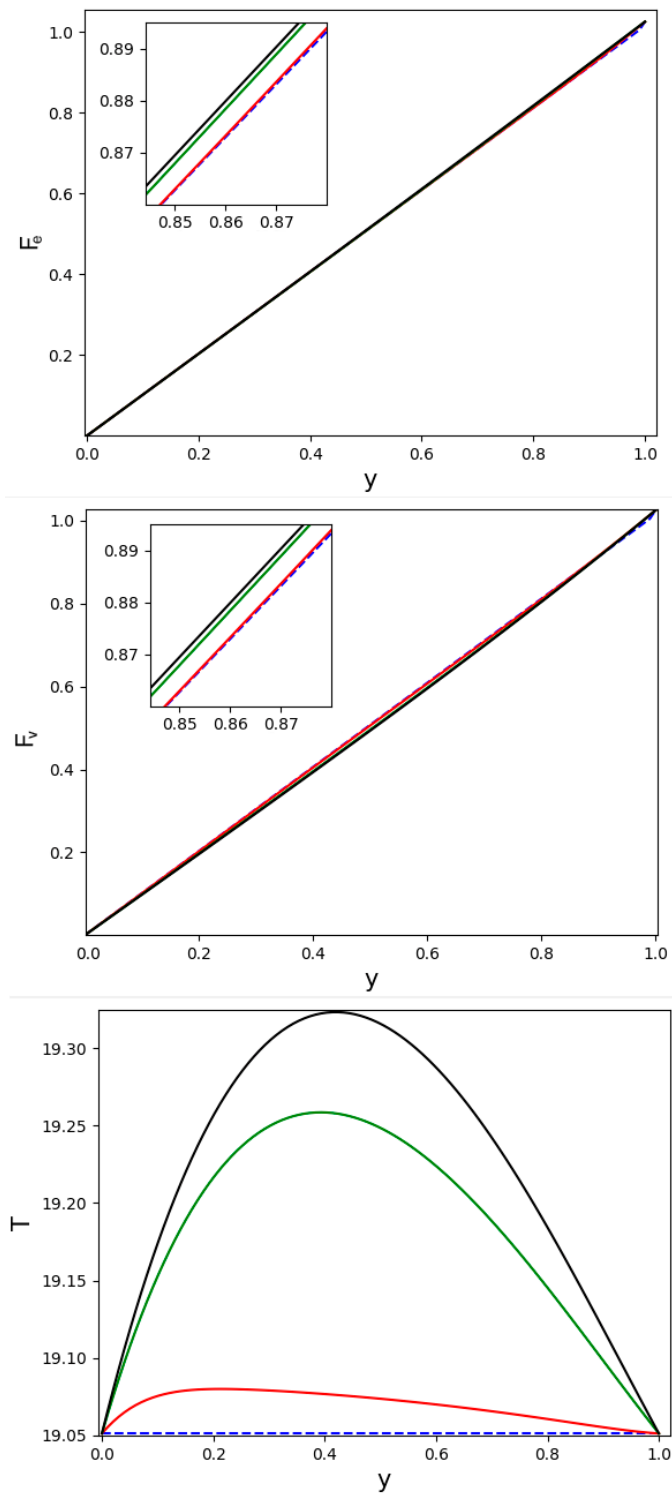


Рисунок 1.5 – Координатні профілі залежності статичної F_e та кінетичної F_v сил тертя, температури T , отримані в результаті чисельного розв'язання рівнянь (1.1) – (1.3) з параметрами $g = 0.05$, $T_e = 20$, $\tau = \delta = 0.15$, $D_e = 0.4$, $D_\sigma = D_T = 0.2$ при початкових та граничних умовах (1.30) та (1.31).

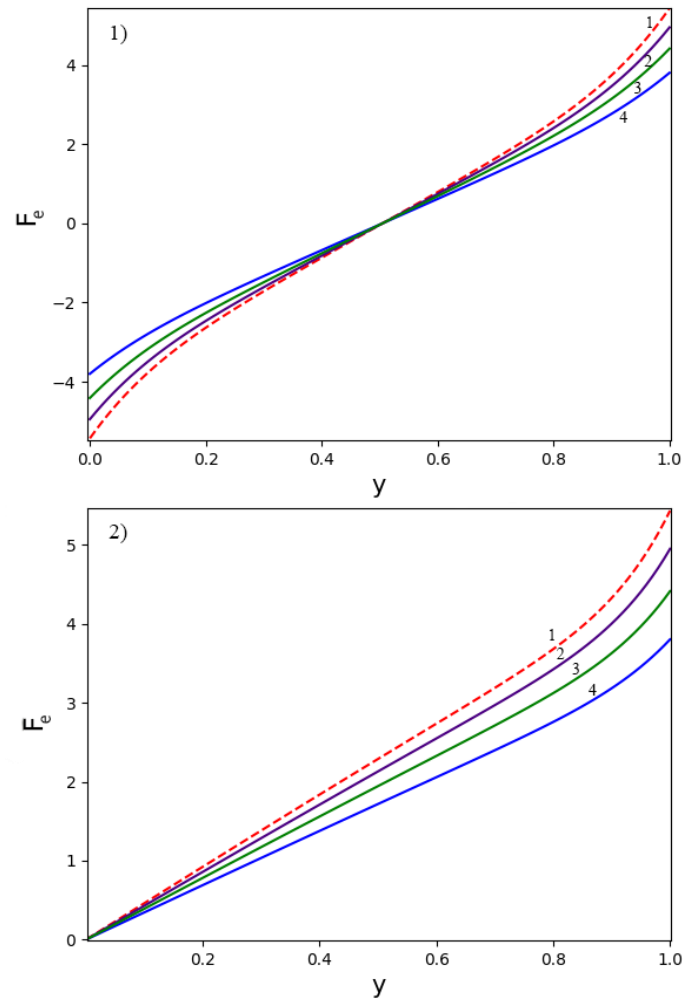


Рисунок 1.6 – Координатна залежність стаціонарних профілів статичної сили тертя $F_e(y)$, отримана з використанням параметрів з рис. 1.3 та $D_e = 0.03$, $D_\sigma = D_T = 0$. Криві 1-4 відповідають температурам $T_e = 5, 10, 15, 20$; 1) початкові та граничні умови (1.28) та (1.29); 2) початкові та граничні умови (1.30) та (1.31).

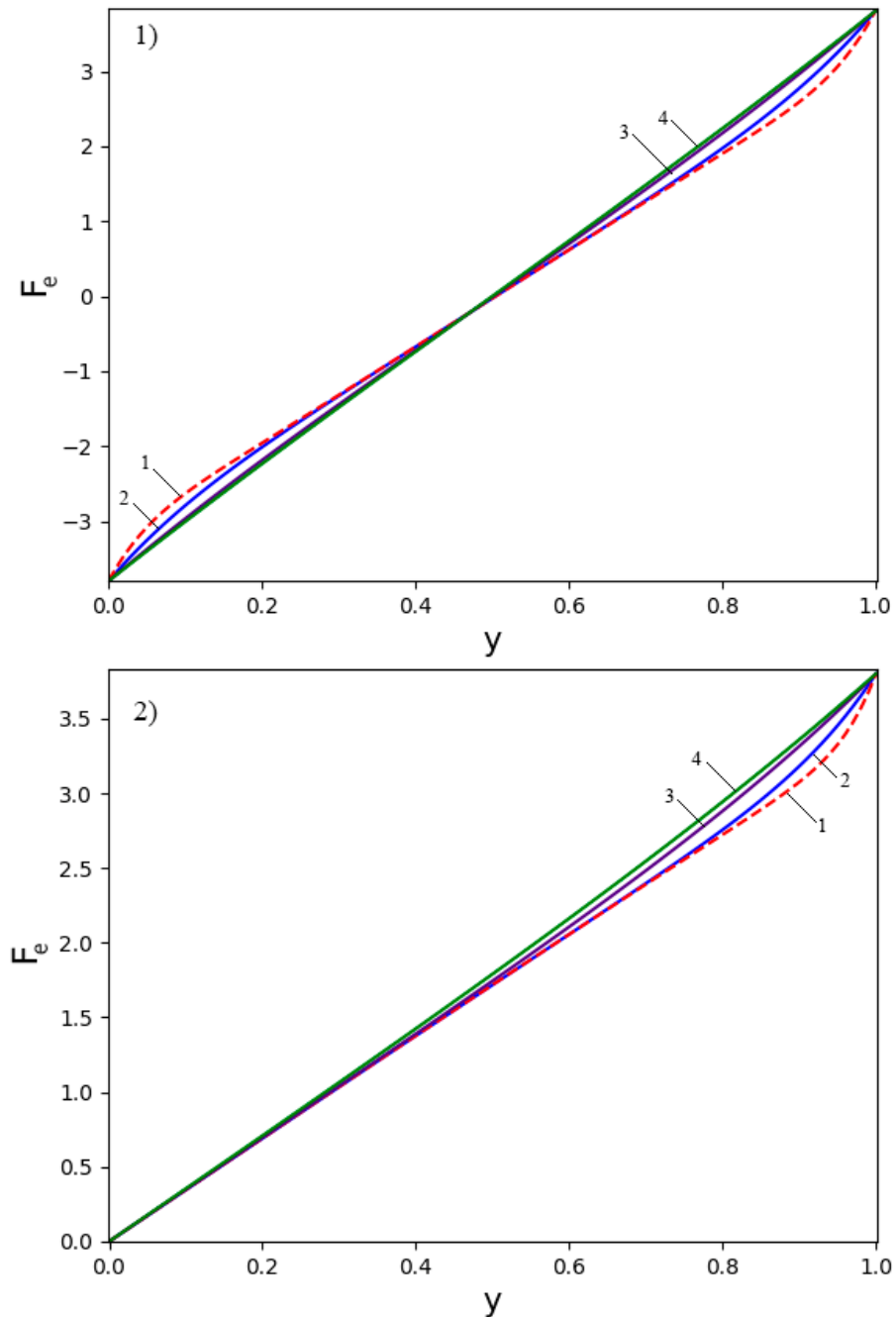


Рисунок 1.7 – Координатна залежність стаціонарних профілів статичної сили тертя $F_e(y)$, отримана з використанням параметрів з рис. 1.3 та $D_\varepsilon = 0.03$, $D_\sigma = D_T = 0$. Криві 1-4 відповідають температурам $T_e = 5, 10, 15, 20$; 1) початкові та граничні умови (1.28) та (1.29); 2) початкові та граничні умови (1.30) та (1.31).

На рис. 1.7 показано вплив на режим тертя коефіцієнта D_ε при $D_\sigma = D_T = 0$. У цьому випадку встановлюються такі самі залежності, як і на попередніх рисунках. На графіках можна побачити, що зі збільшенням коефіцієнта D_ε

приповерхневий шар льоду набуває ньютонівських властивостей, оскільки реалізується відповідна залежність $V(y)$. На рис. 1.7 добре видно, що при зменшенні коефіцієнта D_ε приповерхневий шар льоду твердне, оскільки зі збільшенням D_ε зростає товщина приповерхневого шару, який зсувається зі швидкістю, що дорівнює швидкості руху верхньої поверхні V_0 .

2 ВПЛИВ ГЕНЕРОВАНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ НАКАЧКИ НА ПІДСИЛЮВАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СУПЕРГЕТЕРОДИННОГО ЛАЗЕРА НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ

В рамках нашого дослідження ми вивчаємо ТГц параметричний супергетеродинний ЛВЕ [26, 34]. Цей ЛВЕ для досягнення вищих інкрементів зростання використовує додатковий пристрій накачки, який називається електростатичним ондулятором. Електростатичний ондулятор, використовуючи параметричну нестабільність, додатково підсилює поздовжні хвилі просторового заряду (ХПЗ) у релятивістському електронному пучку [26, 34]. Тому супергетеродинний параметричний ЛВЕ має високі характеристики підсилення.

На рис. 2.1 ми бачимо одну з можливих схем параметричного супергетеродинного ЛВЕ [26]. Електронний пучок 1 проходить уздовж осі Z через нерезонансний модулятор 2, де пучок модулюється і утворюються багатогармонійні хвилі просторового заряду (ХПЗ). Потім створені багатогармонійні ХПЗ підсилюються, проходячи через підсилювальну секцію 3, де розташований ондулятор з поздовжнім періодично змінним електричним полем. На ділянці 4 відбувається прискорення пучка електронів. Секція 5, яка містить поперечне багатогармонічне Н-убітронне магнітне поле, перетворює підсилену та прискорену повільну ХПЗ в мультигармонічну електромагнітну хвилю. Таким чином, такі ЛВЕ можуть формувати потужні електромагнітні сигнали.

Одним із основних елементів досліджуваного ЛВЕ є секція підсилення мультигармонійних ХПЗ (позиція 3, рис. 2.1), в якій реалізується додатковий механізм підсилення. У секції підсилення створюються умови для трихвильового параметричного резонансу між поздовжнім періодично реверсивним електричним полем накачки та швидкою і повільною хвилями просторового заряду електронного пучка. Завдяки параметричній

нестабільності повільна ХПЗ отримує додаткове підсилення, яке потім передається електромагнітній хвилі сигналу.

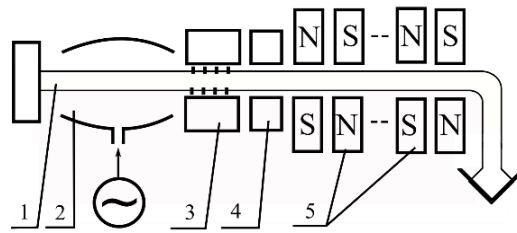


Рисунок 2.1. Схема параметричного супергетеродинного ЛВЕ з поздовжнім електростатичним ондулятором: 1 – електронний пучок; 2 – нерезонансний модулятор; 3 – ділянка підсилення багатогармонічних ХПЗ; 4 – секція прискорення електронного пучка; 5 – Н-убітрон ондулятор

У ході нашого дослідження було виявлено цікавий ефект генерації додаткового електричного поля електронним пучком під дією зовнішнього ондуляторного електричного поля накачки [34]. Ми назвали це поле генерованим електричним полем накачки. Це поле має значну амплітуду і знаходиться в фазі з ондуляторним полем зовнішньої накачки. Тому результуюче поле накачки значно зростає (~ 30% порівняно із зовнішнім полем накачки) [34].

2.1 Вплив генерованого електричного поля накачки на підсилення мультигармонічних повільної та швидкої хвиль просторового заряду в секції підсилення супергетеродинного ЛВЕ

Розглянемо фізичні процеси, що відбуваються в секції підсилення параметричного супергетеродинного лазера на вільних електронах (рис. 4.1, позиція 3). Основним конструктивним елементом у цій секції є електростатичний ондулятор, який утворює поздовжнє періодично реверсивне електричне поле накачки. Вектори електричної напруженості цього поля колінеарні осі Z і колінеарні швидкості релятивістського пучка електронів.

Схеми його реалізації можуть бути різними [26], але створюване таким ондулятором електричне поле накачки має вигляд:

$$\mathbf{E}_{20} = [E_{20} \exp(ip_{2,1}) + c.c.] \mathbf{e}_z, \quad (2.1)$$

де E_{20} – комплексна амплітуда електричної напруженості зовнішнього ондуляторного електричного поля, $p_{2,1} = -k_2 z$ – перша гармоніка його фази, $k_2 = 2\pi / \Lambda$ – його хвильове число, Λ – період ондуляції, \mathbf{e}_z – одиничний вектор осі Z . Зовнішнє електричне поле накачки ондулятора ми вважаємо монохроматичним.

Попередньо модульований релятивістський електронний пучок подається в секцію підсилення, де поширюються поздовжні повільні (α) і швидкі (β) хвилі просторового заряду. Загалом ми вважаємо ці хвилі мультигармонічними, тому їхні електричні поля мають вигляд:

$$\mathbf{E}_\alpha = \sum_{m=1}^N [E_{\alpha,m} \exp(ip_{\alpha,m}) + c.c.] \mathbf{e}_z, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{E}_\beta = \sum_{m=1}^N [E_{\beta,m} \exp(ip_{\beta,m}) + c.c.] \mathbf{e}_z. \quad (2.3)$$

У цих формулах $p_{\alpha,m} = m\omega t - k_{\alpha,m} z$ і $p_{\beta,m} = m\omega t - k_{\beta,m} z$ – фази m -ї гармоніки повільної та швидкої ХПЗ, $k_{\alpha,m}$ і $k_{\beta,m}$ – їх хвильові числа, ω – частота першої гармоніки, $E_{\alpha,m}$ і $E_{\beta,m}$ – комплексні амплітуди електричної сили m -х гармонік ХПЗ.

Параметри досліджуваної системи налаштовані таким чином, що в ній виникає трихвильовий параметричний резонанс між повільною та швидкою хвилями просторового заряду та періодично реверсивним електричним полем накачки. Через це в об'ємі електронного пучка виникає параметрична нестабільність. В результаті повільна і швидка ХПЗ зростають експоненціально і забезпечують додаткове підсилення в параметричному супергетеродинному ЛВЕ. Умова трихвильової параметричної резонансної взаємодії має вигляд:

$$p_{\alpha,m} - p_{\beta,m} = p_2 \text{ або } k_{\alpha,m} - k_{\beta,m} = k_2. \quad (2.4)$$

Ця умова пред'являє деякі вимоги до параметрів електростатичного ондулятора. Як відомо, хвильові числа повільної та швидкої хвиль просторового заряду визначаються як:

$$\begin{aligned} k_{\alpha,m} &= m \cdot \omega / v_0 + \omega_p / (\gamma_0^{3/2} v_0), \\ k_{\beta,m} &= m \cdot \omega / v_0 - \omega_p / (\gamma_0^{3/2} v_0), \end{aligned} \quad (2.5)$$

де ω_p – частота Ленгмюра,

v_0 – постійна (неосцилююча) складова швидкості пучка електронів,

γ_0 – його релятивістський фактор. Підставляючи (2.5) у (2.4), можна побачити, що умови параметричних резонансів (2.4) виконуються, якщо період ондуляції електричного поля накачки дорівнює:

$$\Lambda = \pi \gamma_0^{3/2} v_0 / \omega_p. \quad (2.6)$$

З (2.6) бачимо, що період ондуляції не залежить від номера гармоніки m . Ця особливість означає, що умова параметричного резонансу (2.4) виконується для всіх m -х гармонік. При цьому в усіх резонансних процесах бере участь лише перша гармоніка електричного поля накачки. Іншими словами, багато трихвильових резонансних взаємодій між m -ю гармоніками швидкої та повільної ХПЗ і першою гармонікою електричного поля накачки можуть бути реалізовані одночасно. Як відомо, повільна ХПЗ характеризується негативною енергією, а швидка ХПЗ — позитивною [31]. Таким чином, швидкі та повільні мультигармонійні ХПЗ взаємно підсилюються за рахунок множинних параметричних хвильових резонансів, які отримують енергію від пучка електронів.

Також слід відзначити ще одну цікаву особливість досліджуваної системи. Пучок релятивістських електронів, рухаючись через електричне поле накачки, модулюється ним, в результаті чого він генерує власне електричне поле накачки (генероване електричне поле накачки). Розглянемо це поле більш детально, вважаючи його мультигармонічним. У математичному записі це поле має вигляд:

$$\mathbf{E}_2^g = \sum_{m=1}^N \left[E_{2,m}^g \exp(ip_{2,m}) + c.c. \right] \mathbf{e}_z. \quad (2.7)$$

У цьому рівнянні $p_{2,m} = -m \cdot k_2 z$, $E_{2,m}^g$ — комплексна амплітуда електричної напруженості m -ї гармоніки генерованого поля накачки, N — кількість гармонік електричного поля накачки. Результируюче електричне поле з фазою накачки p_2 має вигляд:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} + \mathbf{E}_2^g = \sum_{m=1}^N \left[E_{2,m} \exp(ip_{2,m}) + c.c. \right] \mathbf{e}_z. \quad (2.8)$$

Як випливає з (2.8), результируюче електричне поле накачки, що складається із зовнішнього та генерованого полів накачки, є мультигармонічним. Далі буде показано, що генероване електричне поле суттєво впливає на процеси багатогармонічного підсилення ХПЗ.

На основі (2.5) знаходимо, що дисперсійні залежності швидкої та повільної ХПЗ є лінійними та зміщеними одна відносно одної на постійну величину. Ця особливість робить можливою трихвильову резонансну взаємодію між m -ою гармонікою повільної та швидкої ХПЗ (умова резонансу (2.4)) та між гармоніками з різними номерами. Як випливає з (2.4) і (2.5), можливі такі множинні параметричні резонансні взаємодії:

$$k_{\alpha, n-m+l} \Big|_{n-m+l>0} = k_{\beta, n} - k_{\beta, m} + k_{\alpha, l},$$

$$\begin{aligned}
k_{\alpha,n-m+l} \Big|_{n-m+l>0} &= k_{\alpha,n} - k_{\alpha,m} + k_{\alpha,l}, \\
k_{\alpha,n+m+l} &= k_{\alpha,n} + k_{\beta,m} + k_{\alpha,l}, \\
k_{\beta,n-m+l} \Big|_{n-m+l>0} &= k_{\alpha,n} - k_{\alpha,m} + k_{\beta,l}, \\
k_{\beta,n-m+l} \Big|_{n-m+l>0} &= k_{\beta,n} - k_{\beta,m} + k_{\beta,l}, \\
k_{\beta,n+m+l} &= k_{\beta,n} + k_{\alpha,m} + k_{\beta,k}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Тут n , m та l є натуральними числами.

У досліджуваній системі реалізується ще один тип резонансної взаємодії. Як зазначалося вище, електронний пучок створює генероване електричне поле накачки \mathbf{E}_2^g (2.7), m -та гармоніка якого має фазу $p_{2,m} = -m \cdot k_2 z$. Тобто фази гармоніки лінійно залежать від номера гармоніки, і, таким чином, між гармоніками генерованого поля накачки виникають численні трихвильові резонансні взаємодії:

$$p_{2,m_1} = p_{2,m_2} + p_{2,m_3}, \tag{2.10}$$

де m_1 , m_2 і m_3 – номери гармонік генерованого поля накачки. Використовуючи співвідношення між фазою та номером гармоніки $p_{2,m} = -m \cdot k_2 z$, умову (2.10) можна записати як

$$m_1 = m_2 + m_3. \tag{2.11}$$

Умова (2.11) може бути виконана різними способами. Наприклад, $5 = 3+2$, $5 = 4+1$, $5 = 6-1$ тощо.

Проаналізуємо підсилення повільної та швидкої багатогармонійних хвиль просторового заряду в секції підсилення, враховуючи трихвильові параметричні резонанси (2.4), (2.9), (2.11) та генерацію генерованого електричного поля накачки \mathbf{E}_2^g в кубічному нелінійному наближенні. Для цього використаємо ієрархічний асимптотичний підхід [31], а саме один із різновидів

цього підходу – метод усереднених характеристик. Загалом, його основний принцип полягає у заміні змінних таким чином, щоб розділити рівняння зі швидкоосцилюючими змінними (наприклад, гармонійні фази), і рівняння з повільноосцилюючими змінними (наприклад, постійні компоненти швидкості та концентрації електронного пучка, амплітуди хвилі). Це дозволяє отримувати аналітичні вирази для першої зазначеної категорії змінних і, одночасно, скласти диференціальні рівняння для других, які не залежать від швидкоосцилюючих змінних, не є жорсткими і можуть бути легко розв’язані стандартними чисельними методами.

Для розв’язання задачі підсилення хвилі просторового заряду в секції підсилення використаємо квазігідродинамічну модель релятивістського електронного пучка, тобто систему з квазігідродинамічного рівняння (руху пучка), рівняння неперервності та одного рівняння Максвелла. У результаті виконання асимптотичних процедур інтегрування [31] отримуємо систему диференціальних рівнянь для повільних змінних. Вони включають амплітуди напруженості електричного поля m -х гармонік повільної та швидкої ХПЗ і генерованого електричного поля накачки, а також неосцилюючі компоненти швидкості та концентрації релятивістського електронного пучка.

$$\begin{aligned} & C_{2,\alpha,m} \frac{d^2 E_{\alpha,m}}{dz^2} + C_{1,\alpha,m} \frac{dE_{\alpha,m}}{dz} + D_{\alpha,m} E_{\alpha,m} = \\ & = C_{3,\alpha,m} E_{\beta,m} E_2^* + F_{\alpha,m}(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & C_{2,\beta,m} \frac{d^2 E_{\beta,m}}{dz^2} + C_{1,\beta,m} \frac{dE_{\beta,m}}{dz} + D_{\beta,m} E_{\beta,m} = \\ & = C_{3,\beta,m} E_{\alpha,m} E_2 + F_{\beta,m}(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & C_{2,2,m} \frac{d^2 E_{2,m}^g}{dz^2} + C_{1,2,m} \frac{dE_{2,m}^g}{dz} + D_{2,m} E_{2,m}^g = \\ & = \left(C_0 E_{20} + \sum_{n=1}^N C_{3,2,n} E_{\alpha,n}^* E_{\beta,n} \right) \delta_{1,m} + \\ & \quad + F_{2,m}(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{dv_0}{dz} = F_v(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2), \quad \frac{dn_0}{dz} = F_n(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2). \quad (2.15)$$

У цих рівняннях функції $F_{\alpha,m} = F_{\alpha,m}(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2)$, $F_{\beta,m} = F_{\beta,m}(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2)$, $F_{2,m} = F_{2,m}(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2)$, $F_v(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2)$, $F_n(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_2)$ залежать від амплітуд мультигармонійних ХПЗ і забезпечують кубічні нелінійні члени, які пов'язані з кількома параметричними резонансами, описаними вище. Зауважимо, що ці функції є громіздкими та обчислюються рекурентною процедурою через відповідні члени першого та другого наближень.

Коефіцієнти диференціальних рівнянь (2.12)-(2.15) мають такий вигляд.

$$\begin{aligned}
 D_{\chi,m} &= -ik_{\chi,m} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(m\omega_\chi - k_{\chi,m}v_0)^2 \gamma_0^3} \right), & (2.16) \\
 C_{1,\chi,m} &= \partial D_{\chi,m} / \partial(-ik_{\chi,m}), \\
 C_{2,\chi,m} &= \partial^2 D_{\chi,m} / \partial(-ik_{\chi,m})^2 / 2, \\
 C_{3,\alpha,m} &= \frac{k_{\alpha,m} \cdot \omega_p^2 e / m_e}{\Omega_{\alpha,m} \Omega_{\beta,m} k_2 v_0 \gamma_0^6} \times \\
 &\times \left(\frac{k_{\alpha,m}}{\Omega_{\alpha,m}} + \frac{k_{\beta,m}}{\Omega_{\beta,m}} - \frac{k_2}{k_2 v_0} - \frac{3v_0 \gamma_0^2}{c^2} \right), \\
 C_{3,\beta,m} &= -k_{\beta,m} C_{3,\alpha,m} / k_{\alpha,m}, \quad C_0 = -ik_2 \omega_p^2 / (\Omega_{2,1}^2 \gamma_0^2), \\
 \Omega_{\chi,m} &= m\omega_\chi - k_{\chi,m} v_0,
 \end{aligned}$$

де індекс « χ » вказує на тип хвилі (α , β або 2), e і m_e – значення заряду електрона та маси електрона, $\omega_2 = 0$, $k_{2,m} = mk_2$, c – швидкість світла у вакуумі; γ_0 – постійний член релятивістського фактора; ω_p – плазмова частота електронного пучка; $\delta_{1,m}$ – символ Кронекера

Зверніть увагу, що повільна та швидка ХПЗ є власними хвилями електронного пучка і, тому $D_{\alpha,m}$ та $D_{\beta,m}$ дорівнюють нулю. Навпаки, періодично реверсивне електричне поле накачки забезпечується виключно електростатичним ондулятором, тобто воно не є власною хвилею електронного пучка, а тому $D_{2,m} \neq 0$.

Проаналізуємо генероване електричне поле накачки, створене електронним пучком. Динаміка цього поля описується рівнянням (2.14). Якщо розглядати лише члени цього рівняння, які є лінійними за амплітудою, ми можемо отримати аналітичний вираз для першої гармоніки генерованого електричного поля накачки.

$$E_{2,1}^g = C_0 E_{20} / D_{2,1}$$

$$\text{або } E_{2,1}^g = E_{20} / \left((k_2^2 v_0^2 \gamma_0^3 / \omega_p^2) - 1 \right) \quad (2.17)$$

На хвильове число k_2 накладаються певні умови. Для виконання умов трихвильового параметричного резонансу (2.4), відповідно до (2.6), k_2 має дорівнювати:

$$k_2 = 2\pi / \Lambda = 2 / (\gamma_0^{3/2} v_0 / \omega_p). \quad (2.18)$$

Підставляючи (2.18) в (2.17), знаходимо, що амплітуда першої гармоніки генерованого електричного поля в секції підсилення становить третину зовнішнього електричного поля накачки і підсилює його! Це призводить до значного збільшення приросту ХПЗ.

Якісно цей ефект можна пояснити наступним чином. Зовнішнє поздовжнє періодично реверсивне електричне поле E_{20} створюється системою електродів, як показано на рис. 2.2,а. Потенціальна енергія електронів пучка має вигляд, зображений на рис. 2.2,б. У цьому випадку електрони мають максимальну потенціальну енергію біля негативних електродів (точки z_1, z_3 на рис. 2.2,б) і мінімальну потенціальну енергію біля позитивних електродів (точки z_2, z_4 на рис. 2.2,б). Відповідно до закону збереження енергії, мінімальна кінетична енергія електронів припадає на точки, де потенційна енергія максимальна, а саме в областях поблизу електродів з негативним потенціалом. Відповідно максимальна кінетична енергія електронів знаходиться в областях поблизу позитивних потенціальних електродів. Враховуючи безперервність

електронного пучка, можна констатувати, що в областях негативного потенціалу, де швидкість електронів зменшується, їх концентрація зростає. Відповідно в області позитивного потенціалу швидкість електрона зростає, а концентрація електронів зменшується. Така зміна концентрації електронів призводить до появи генерованого електричного поля накачки E_2^g , яке посилює результуюче електричне поле накачки. Як впливає з наведених вище міркувань, генероване електричне поле накачки збільшується:

- при збільшенні зовнішнього електричного поля накачки E_{20} (воно визначає рівень потенційної енергії);
- якщо збільшити середню концентрацію електронного пучка $\omega_p^2 \sim n_0$ (більше електронів накопичується біля негативного електрода);
- якщо постійну складову швидкості електронного пучка зменшити (оскільки відносне уповільнення визначає додаткову концентрацію електронів).

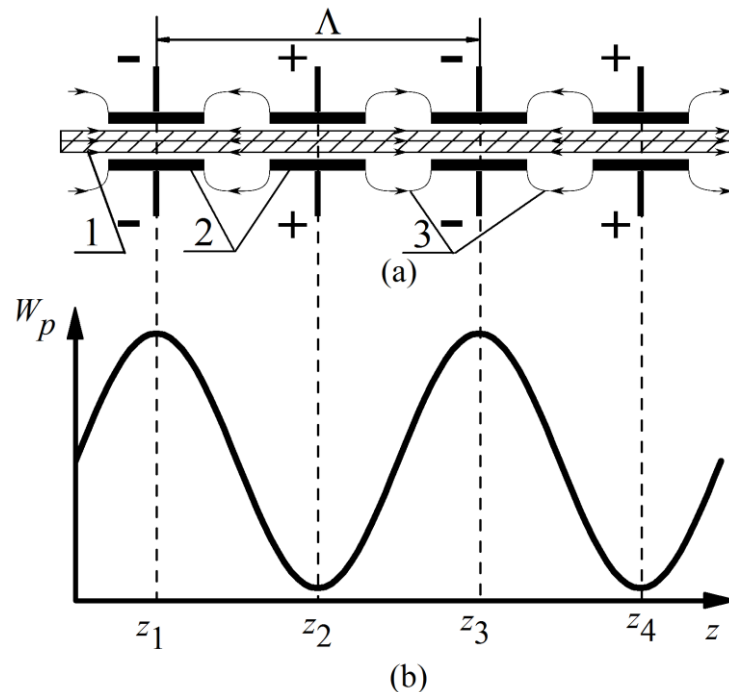


Рисунок 2.2 – Схема секції підсилення ХПЗ: 1 – пучок релятивістських електронів; 2 – електроди електростатичного ондулятора; 3 – електричні силові лінії електричного поля зовнішньої періодичної реверсивної накачки (а); залежність потенціальної енергії електронів пучка W_p у зовнішньому електричному полі накачки E_{20} за поздовжньою координатою z (b)

Те саме впливає із співвідношення (2.18). У разі прольотного режиму руху електронів $k_2^2 v_0^2 \gamma_0^3 / \omega_p^2 \gg 1$ і з (2.18) отримуємо $E_{2,1}^g \sim E_{20} \omega_p^2 / (v_0^2 \gamma_0^3)$.

Проаналізуємо динаміку генерованого електричного поля накачки в рамках кубічної нелінійної апроксимації за допомогою системи диференціальних рівнянь (2.12)-(2.16).

Розглянемо секцію підсилення ЛВЕ з наступними параметрами. Плазмова частота електронного пучка дорівнює $\omega_p = 3,0 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, а релятивістський фактор $\gamma = 3,5$. Відповідно до (24.6) період ондуляції періодично реверсивного поля накачки дорівнює $\Lambda = 2,0 \text{ см}$. Також розглядається підсилення хвилі повільного просторового заряду з десятьма гармоніками, частота першої з яких становить $f_1 = 0,1 \text{ ТГц}$. Як було встановлено раніше [27], досліджувана система характеризується однаковими інкрементами зростання для різних гармонік ХПЗ. Тому вибираємо однакові початкові значення амплітуд усіх десяти гармонік повільної ХПЗ. Початкові амплітудні значення швидких гармонік ХПЗ прийmemo рівними нулю.

На рис. 2.3 показана залежність амплітуди першої гармоніки напруженості генерованого електричного поля накачки, нормованої на амплітуду напруженості зовнішнього електричного поля накачки, від координати z секції підсилення. Ми бачимо, що в області взаємодії амплітуда генерованого електричного поля накачки змінюється від 33% для зовнішнього поля накачки в початковій області підсилення до 21% в області насичення, що зменшує довжину насичення приблизно на 22%. Зменшення амплітуди першої гармоніки напруженості генерованого електричного поля накачки на 12% в області насичення зумовлено нелінійними членами в (2.14). Таким чином, генероване електричне поле накачки є істотним у всій області хвиль взаємодії.

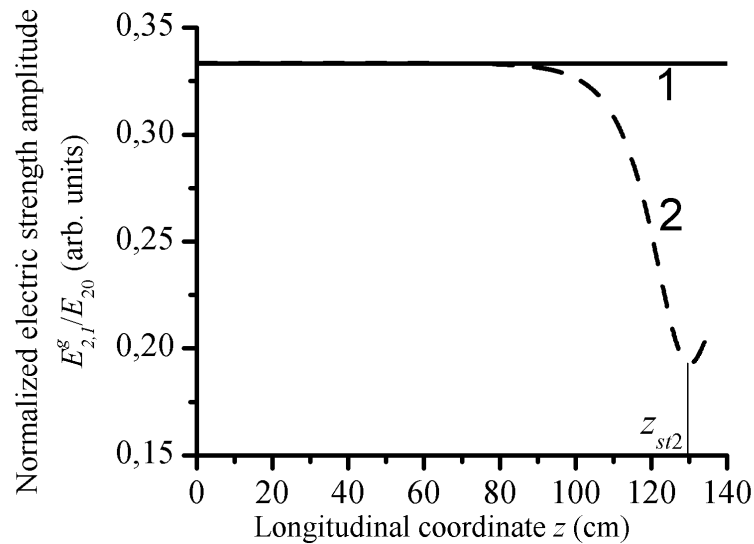


Рисунок 2.3 – Залежність амплітуди першої гармоніки напруженості генерованого електричного поля накачки, нормованої на амплітуду зовнішнього електричного поля накачки, від поздовжньої координати z . Лінія 1 побудована на основі лінійного апроксимаційного рівняння (2.14), а лінія 2 – на основі нелінійного рівняння (2.14)

Слід зазначити, що вищі гармоніки генерованого електричного поля накачки беруть участь у множинних трихвильових параметричних резонансних взаємодіях (2.10). Завдяки цим взаємодіям вони породжуються досліджуваною системою. Аналізуючи динаміку вищих гармонік електричного поля накачки, можна зробити деякі висновки. По-перше, їх амплітуда швидко зменшується. Наприклад, амплітуда другої гармоніки становить $\sim 1\%$ від амплітуди першої, амплітуда третьої гармоніки становить $10^{-2}\%$ від першої і так далі. По-друге, через умови параметричного резонансу вищі гармоніки генерованого електричного поля накачки можуть взаємодіяти лише з гармоніками цього самого поля накачки. Вони не взаємодіють з гармоніками хвиль просторового заряду. Таким чином, можна констатувати, що вищі гармоніки генерованого електричного поля накачки мало впливають на підсилення ХПЗ.

Рівняння (2.12)-(2.15) описують процеси підсилення мультигармонійних ХПЗ і генерації електричного поля накачки електронним пучком, враховуючи хвильові гармоніки з кубічною амплітудою. Тим не менш, можна

проаналізувати поведінку системи в режимі малого сигналу [27]. Подамо його розв'язки у вигляді та знайдемо приріст m -ої гармоніки швидкої та повільної ХПЗ

$$\Gamma = \frac{3|eE_{2,1}|}{4m_e \gamma_0 v_0^2} \quad (2.19)$$

Як випливає з (2.19), приріст m -ої гармоніки ХПЗ не залежить від номера гармоніки m . Це означає, що на початковому етапі підсилення відбувається експоненціальне зростання амплітуд хвиль через параметричну нестабільність, а приріст усіх гармонік ХПЗ однаковий. Тобто відбувається підсилення багатогармонійних повільних і швидких ХПЗ, а їх амплітудний спектр не змінюється. Крім того, для реалізації підсилення мультигармонійних ХПЗ достатньо використовувати лише монохроматичне поле накачки. Припустимо, на вхід секції підсилення подається багатогармонійна ХПЗ, гармоніки якої мають на вході однакові значення амплітуди. У цьому випадку динаміка амплітуд таких гармонік на початковому етапі буде однаковою. В результаті на графіку залежності амплітуд гармоній від довжини ділянки лінії різних гармонік будуть накладатися на одну.

Проаналізуємо динаміку хвиль в секції підсилення, розглядаючи змінне генероване електричне поле накачки в рамках кубічної нелінійної апроксимації за допомогою системи диференціальних рівнянь (2.12)-(2.16). На рис. 2.4 наведено залежності гармонічних амплітуд напруженості електричного поля повільної ХПЗ від координати. Ми розглянемо два випадки: без ефекту генерації генерованого електричного поля накачки (лінії 1 на рис. 2.4) та з ним (лінії 2 на рис. 2.4).

Як показано на рис. 2.4, на початковій ділянці довжиною приблизно 80% від координати насичення лінії залежності амплітуд гармонік від координати накладаються одна на одну. Це вірно для обох випадків з (лінії 2) і без (лінії 1) ефекту генерації генерованого електричного поля накачки. Таким чином, ми підтверджуємо припущення про те, що на початковому етапі підсилення будь-

якої багатогармонійної ХПЗ її амплітудний спектр не змінюється в рамках кубічного нелінійного аналізу.

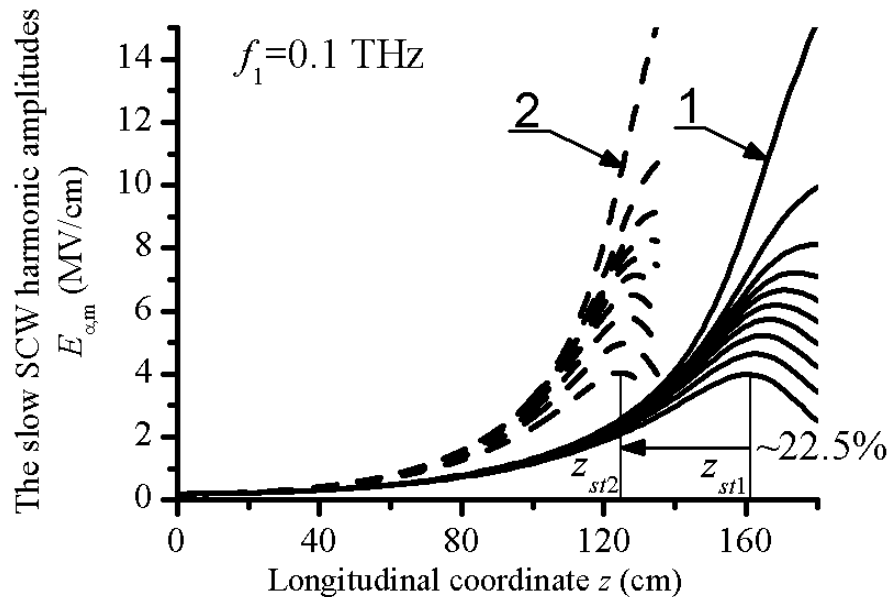


Рисунок 2.4 – Залежності гармонійних амплітуд напруженості електричного поля повільної ХПЗ від координати z . Група ліній 1 показує цю залежність без ефекту генерації генерованого електричного поля накачки, а група ліній 2 – з цим ефектом. Кожна група має десять гармонік з частотою першої 0,1 ТГц

Як впливає з рис. 2.4, генероване електричне поле накачки призводить до збільшення приросту ХПЗ і, отже, до зменшення довжини насичення z_{st} (у нашому випадку приблизно на 22,5 %). Таким чином, генерування генерованого електричного поля накачки може істотно зменшити довжину секції підсилення.

Проаналізуємо динаміку ХПЗ для випадку вищих частот хвиль порівняно з випадком, показаним на рис. 2.4. На рис. 2.5 наведено залежності гармонійних амплітуд напруженості електричного поля повільної ХПЗ від координати z . ХПЗ має десять гармонік з частотою першої гармоніки 0,32 ТГц. Порівняємо діапазони довжин хвиль на рис. 2.4 і 2.5. Ми можемо помітити, що перша гармоніка цього діапазону відповідає четвертій гармоніці ХПЗ на рис. 2.4.

Друга гармоніка цього діапазону ($\lambda_{31,2} = 0.38$ mm) близька до останньої гармоніки ХПЗ, проаналізованої на рис. 2.4. Ефект генерації генерованого електричного поля накачки наглядно показаний на рис 2.5.

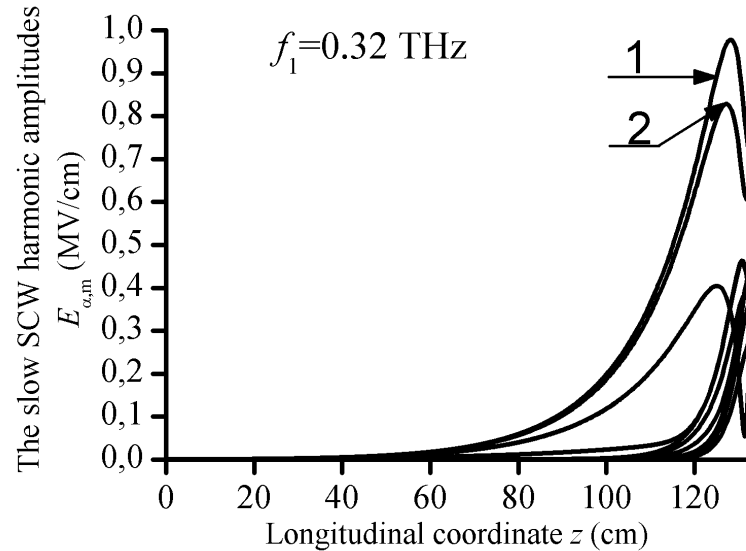


Рисунок 2.5 – Залежність гармонічних амплітуд напруженості електричного поля повільної ХПЗ від координати z . ХПЗ має десять гармонік з частотою першої гармоніки 0,32 ТГц. Лінія 1 відповідає першій гармоніці, а лінія 2 – другій

Залежність амплітуд гармонік напруженості електричного поля повільної ХПЗ від координати наведено на рис.2.5. Порівнюючи рис. 2.5 і 2.4, ми бачимо, що перша і друга гармоніки з рис. 2.5 мають такий же інкремент зростання, як 4-та і 10-та гармоніка на рис. 2.4 відповідно. Інші гармоніки з рис. 2.5 (3-тя, 4-та,..., 10-та) мають набагато менші інкременти зростання. При цьому величина цих інкрементів зростання зменшується зі збільшенням номера гармоніки. Рівні насичення перших двох гармонік приблизно в два рази перевищують рівні насичення 3-10 гармонік. Також збільшується довжина насичення. Зверніть увагу, що область, де різні гармоніки одного ХПЗ мають однаковий приріст зростання, набагато коротша, ніж у попередньому прикладі (див. рис. 2.4).

З останнього випадку можна зробити два важливі висновки. По-перше, підсилення багатогармонійної ХПЗ без спотворення її амплітудного спектру

відбувається лише для конкретних параметрів системи. По-друге, ця система може підсилювати ХПЗ з досить високою частотою в субміліметровому або навіть далекому інфрачервоному діапазоні.

2.2 Вплив генерованого електричного поля накачки на підсилення вхідного електромагнітного сигналу супергетеродинного ЛВЕ

Розглянемо іншу, більш реальну модель супергетеродинного параметричного ЛВЕ, схема якого показана на рис. 2.6. Цей ЛВЕ містить два пристрої накачки: Н-убітронний ондулятор 2 та електростатичний ондулятор 3. Н-убітронний ондулятор створює періодичне магнітне поле \mathbf{V}_2 , індукція якого перпендикулярна до релятивістського електронного пучка (РЕП) (позиція 1, рис. 1). Електростатичний ондулятор створює поздовжнє реверсивне періодичне електростатичне поле \mathbf{E}_{20} , напруженість якого паралельна електронному пучку (позиція 2, рис. 2.1).

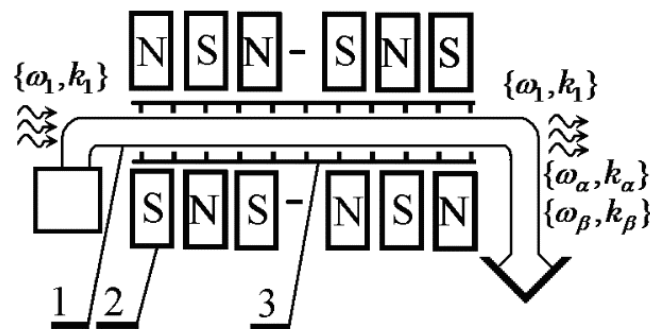


Рисунок 2.6 – Спрощена схема супергетеродинного параметричного ЛВЕ:
1 – релятивістський електронний пучок; 2 – Н-убітронний ондулятор; 3 –
електростатичний ондулятор

Вхідним електромагнітним сигналом є плоска монохроматична електромагнітна хвиля з електричним \mathbf{E}_1 і магнітним \mathbf{V}_1 полями, що поширюється вздовж РЕП.

У досліджуваному ЛВЕ виконуються два трихвильових параметричних резонанси. Перший резонанс включає поперечну електромагнітну хвилю, магнітне поле Н-убітронної накачки \mathbf{B}_2 та поздовжню повільну хвилю просторового заряду \mathbf{E}_α , яка збуджується завдяки цьому резонансу. У другому резонансі беруть участь повільна \mathbf{E}_α та швидка \mathbf{E}_β хвилі просторового заряду та електростатичне поле накачки ондулятора \mathbf{E}_{20} .

Напруженість електричного поля \mathbf{E} та індукція магнітного поля \mathbf{B} , які беруть участь у параметричних резонансах, мають такий вигляд

$$\mathbf{B}_2 = [B_2 \exp(ip_{2,B}) + c.c.] \mathbf{e}_y, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E}_{20} = [E_{20} \exp(ip_{2,E}) + c.c.] \mathbf{e}_z, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{E}_1 = [E_1 \exp(ip_1) + c.c.] \mathbf{e}_x, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{B}_1 = [B_1 \exp(ip_1) + c.c.] \mathbf{e}_y, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{E}_\alpha = \sum_{m=1}^N [E_{\alpha,m} \exp(ip_{\alpha,m}) + c.c.] \mathbf{e}_z \quad (2.24)$$

$$\mathbf{E}_\beta = \sum_{m=1}^N [E_{\beta,m} \exp(ip_{\beta,m}) + c.c.] \mathbf{e}_z \quad (2.25)$$

У цих рівняннях B_2 , E_{20} , E_1 , B_1 , $E_{\alpha,m}$, $E_{\beta,m}$ – комплексні амплітуди відповідних полів, $p_{2,B}$, $p_{2,E}$, p_1 , $p_{\alpha,m}$, $p_{\beta,m}$ – їх фази, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z – орти на відповідній осі, m – номер m -ї гармоніки.

Фази вхідного електромагнітного сигналу p_1 , повільної $p_{\alpha,m}$ та швидкої $p_{\beta,m}$ ХПЗ визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} p_1 &= \omega_1 - k_1 z, \quad p_{2,E} = -k_{2,E} z, \quad p_{2,B} = -k_{2,B} z, \\ p_{\alpha,m} &= m\omega_\alpha - k_{\alpha,m} z, \quad p_{\beta,m} = m\omega_\beta - k_{\beta,m} z. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Хвильові числа вхідного сигналу k_1 , повільна $k_{\alpha,m}$ і швидка $k_{\beta,m}$ ХПЗ визначаються умовою дисперсії.

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\omega_1^2 - \omega_p^2 / \gamma_0^2} / c, \\
k_{\alpha,m} &= m\omega_\alpha / v_{z0} + \omega_p / (\gamma_0^{3/2} v_{z0}), \\
k_{\beta,m} &= m\omega_\beta / v_{z0} - \omega_p / (\gamma_0^{3/2} v_{z0}).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

де ω_p – ленгмюрівська частота,
 v_{z0} – усереднена швидкість електронного пучка,
 γ_0 – його релятивістський фактор.

Як ми вже згадували вище, супергетеродинний ЛВЕ має два трихвильових параметричних резонанси. Перший – це взаємодія між вхідним електромагнітним сигналом і потужним магнітним полем накачки, яке збуджує повільну ХПЗ в електронному пучку. Умовою трихвильового параметричного резонансу цієї взаємодії є співвідношення фаз:

$$P_{\alpha,1} = P_1 + P_{2,B} \tag{2.28}$$

або вважаючи, що $\omega_\alpha = \omega_1$:

$$k_{\alpha,1} = k_1 + k_{2,B} \tag{2.29}$$

Другий параметричний резонанс за участі повільної, швидкої ХПЗ та електростатичного поля накачки докладніше розглянуто у 2.1.

Аналогічно як і при розгляді електростатичного ондулятора в 2.1 за початкові рівняння ми використовуємо рівняння гідродинаміки для опису руху електронів в електричному та магнітному полях, рівняння нерозривності, яке визначає локальну концентрацію заряду пучка, і рівняння Максвелла, яке описує електричну напруженість полів системи. Розв'язуючи цю систему ієрархічним асимптотичним методом [31], ми отримуємо іншу систему диференціальних рівнянь для амплітуд напруженості електричного поля:

$$\begin{aligned}
C_{1,1} \frac{dE_1}{dz} &= C_{3,1,1}^I E_{\alpha,1} B_2^*, \\
C_{1,\alpha,m} \frac{dE_{\alpha,m}}{dz} &= C_{3,\alpha,m}^I E_1 B_2 \cdot \delta_{m,1} + C_{3,\alpha,m}^{II} E_{\beta,m} E_2, \\
C_{1,\beta,m} \frac{dE_{\beta,m}}{dz} &= C_{3,\beta,m}^{II} E_{\alpha,m} E_2^*, \\
C_{1,2} \frac{dE_2^g}{dz} + D_2 E_2^g &= \left(C_0 E_{20} + \sum_{n=1}^N C_{3,2,n} E_{\alpha,n}^* E_{\beta,n} \right) \delta_{m,1}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Коефіцієнти C визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
C_{1,1} &= \frac{\partial D_1}{\partial(-ik_1)}, \\
C_{3,1,m}^I &= \frac{\omega_p^2 m \cdot \omega_1 \cdot e}{2\Omega_{\alpha,m} m_e \gamma_0^4 k_1 k_{2,m} c^3 \nu_{z0}^2} \left(\frac{\nu_{z0}^2 \gamma_0^2}{c^2} - \frac{k_{\alpha,m}}{\Omega_{\alpha,m}} \right), \\
C_{1,\chi,m} &= \frac{\partial D_{\chi,m}}{\partial(-ik_{\chi,m})}, \\
C_{3,\alpha,m}^I &= \frac{\omega_p^2 e k_{\alpha,m}}{\nu_{z0}^2 \Omega_{\alpha,m}^2 m_e \gamma_0^2 c^2 k_{2,m}} \left(\frac{\nu_{z0}}{c} - \frac{k_{\alpha,m} c}{m \cdot \omega_\alpha} \right), \\
C_{3,\alpha,m}^{II} &= \frac{-k_{\alpha,m} \omega_p^2 e / m_e}{\Omega_{\alpha,m} \Omega_{\beta,m} \Omega_{2,m} \gamma_0^6 \nu_{z0}^3} \times \left(\frac{k_{\alpha,m}}{\Omega_{\alpha,m}} + \frac{k_{\beta,m}}{\Omega_{\beta,m}} + \frac{k_{2,m}}{\Omega_{2,m}} - \frac{3\nu_{z0}^2 \gamma_0^2}{c^2} \right), \\
C_{3,\beta,m}^{II} &= -k_{\beta,m} C_{3,\alpha,m}^{II} / k_{\alpha,m}; \\
C_{3,2,m}^{II} &= -k_{2,m} C_{3,\alpha,m}^{II} / k_{\alpha,m}; \\
C_0 &= -ik_2 \omega_p^2 / (\Omega_{2,1}^2 \gamma_0^2)
\end{aligned}$$

Дисперсійні функції D_1 та D_χ визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
D_1 &\equiv \left[k_1^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{\gamma_0 c^2} \right] = 0, \\
D_{\chi,m} &\equiv -ik_{\chi,m} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\Omega_{\chi,m}^2 \nu_{z0}^2 \gamma_0^3} \right).
\end{aligned}$$

Параметри плазмової частоти ω_p , релятивістського фактора γ_0 та $\Omega_{\chi,m}$ визначаються наступним чином

$$\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / m_e, \quad \gamma_0 = 1 / \sqrt{1 - (v_{z0} / c)^2},$$

$$\Omega_{\chi,m} = m\omega_{\chi} / v_{z0} - k_{\chi,m}.$$

Тут $\delta_{m,1}$ – символ Кронекера, χ позначає α, β ; D_1, D_{χ} – дисперсійні рівняння для вхідного сигналу, повільної ($\chi=\alpha, D_{\alpha}=0$), швидкої ($\chi=\beta, D_{\beta}=0$) ХПЗ та генерованого електричного поля накачки ($\chi=2, D_2 \neq 0$) відповідно; n_0 – усереднена концентрація електронів у пучку; c – швидкість світла у вакуумі; $e = -|e|$, m_e – заряд і маса електрона відповідно.

Тепер розгляньмо випадок, коли вхідним сигналом є монохроматична електромагнітна хвиля. Тоді в (2.30) припустимо $m=1$ і $n=1$ і система рівнянь матиме такий вигляд:

$$C_{1,1} \frac{dE_1}{dz} = C_{3,1,1}^I E_{\alpha,1} B_2^*,$$

$$C_{1,\alpha,1} \frac{dE_{\alpha,1}}{dz} = C_{3,\alpha,1}^I E_1 B_2 + C_{3,\alpha,1}^{II} E_{\beta,1} E_2,$$

$$C_{1,\beta,1} \frac{dE_{\beta,1}}{dz} = C_{3,\beta,1}^{II} E_{\alpha,1} E_2^*$$

$$C_{1,2} \frac{dE_2^g}{dz} + D_2 E_2^g = C_0 E_{20} + C_{3,2,1} E_{\alpha,1}^* E_{\beta,1}. \quad (2.31)$$

Для аналізу підсилювальних властивостей досліджуваної моделі ми побудували графіки залежності амплітуди електричної сили сигналу E_1 від поздовжньої координати z (рис. 2.7), інкременту зростання Γ від релятивістського фактора γ_0 (рис. 2.8) та від вхідного частоти монохроматичного електромагнітного сигналу ω_1 (рис. 2.9). Для чисельного розв'язку моделі задаємо початкові значення частоти сигналу $\omega_1 = 3.0 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$, плазмової частоти електронного пучка $\omega_p = 3.0 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$, релятивістського фактора

$\gamma_0 = 3.0$, амплітуда напруженості електричного поля ондуляторної накачки $|E_2| = 56$ кВ/см, амплітуда напруженості магнітного поля ондуляторної накачки $|B_y| = 0,08$ Тл. Спочатку в систему подається тільки електромагнітна хвиля сигналу. Повільна і швидка ХПЗ збуджуються під час взаємодії РЕП з електричним і магнітним полями в секції підсилення.

Використовуючи (2.31), можна проаналізувати залежність амплітуди напруженості електричного поля першої гармоніки сигналу електромагнітної хвилі від поздовжньої координати z . На рис. 2.7 наведено ці залежності за двох умов: без впливу генерованого електричного поля накачки (крива 1) і з таким впливом (крива 2). Ми бачимо, що генероване електричне поле накачки значно збільшує приріст електромагнітного сигналу (крива 2) порівняно з випадком, коли такого ефекту немає (крива 1).

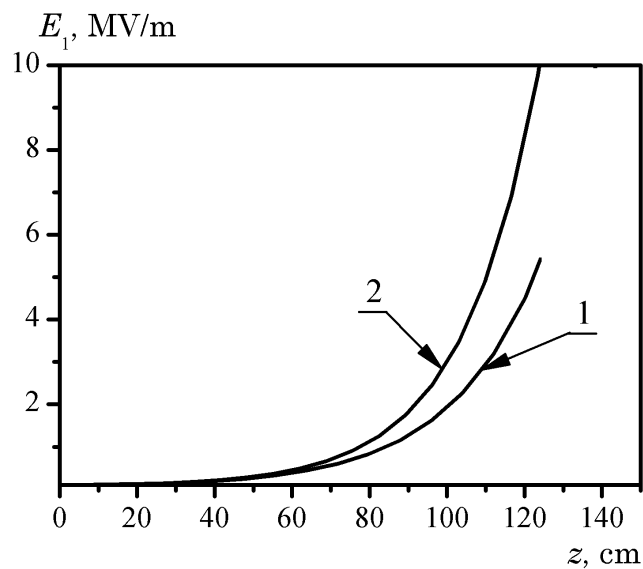


Рисунок 2.7 – Залежність амплітуди електричної напруженості електромагнітного сигналу від поздовжньої координати z за двох умов: без дії генерованого електричного поля накачки (крива 1); та з цим ефектом (крива 2).

З рис. 2.7 бачимо, що зростання електромагнітної хвилі відбувається за експоненціальним законом, тобто $E_1 \sim E_{10} \exp(\Gamma z)$, де Γ – приріст електромагнітної хвилі в ЛВЕ. Використовуючи інформацію з рисунку 2.7, легко розрахувати інкременти зростання електромагнітної хвилі як за наявності

генерованого електричного поля накачки (крива 2), так і без нього (крива 1). Інкремент зростання характеризує підсилювальні властивості супергетеродинного параметричного ЛВЕ, який одночасно використовує два взаємозв'язані параметричні резонанси.

Крім того, використовуючи інкременти зростання, ми можемо оцінити характеристики підсилення кожного з двох параметричних резонансів окремо. Отже, якщо припустити, що напруженість електричного поля накачки, яке створюється електростатичним ондулятором, дорівнює нулю ($E_2 = 0$), то за допомогою системи рівнянь (17) можна побудувати залежності, подібні до наведених на рис. 2.7. З цього рисунка можна отримати приріст електромагнітної хвилі сигналу, який визначає характеристики підсилення трихвильового параметричного резонансу, в якому тільки є електромагнітний сигнал, магнітне поле накачки Н-убітронного ондулятора і повільна хвиля ХПЗ. Такий приріст позначимо Γ^I .

Якщо розглядати випадок, коли індукція магнітного поля Н-убітронної накачки дорівнює нулю ($B_2 = 0$) і на вхід досліджуваного пристрою подається модульований пучок електронів, то за допомогою системи (17) можна побудувати залежність амплітуди сили повільної хвилі ХПЗ за поздовжньою координатою z та визначити приріст (інкремент зростання) цієї хвилі. Цей інкремент зростання визначає характеристики підсилення трихвильового параметричного резонансу, в якому задіяні лише поздовжні повільні та швидкі ХПЗ та поздовжнє електричне поле накачки. Позначимо такий приріст Γ^{II} .

Використовуючи введені інкременти зростання Γ , Γ^I , Γ^{II} , ми далі проаналізуємо характеристики підсилення суперпергетеродинного параметричного ЛВЕ при різних параметрах, як z , так і без впливу генерованого електричного поля накачки.

Розгляньмо та проаналізуємо рисунок 2.8. На цьому рисунку можна бачити залежності інкременту підсилення сигналу та його електричних і магнітних компонент від релятивістського фактору електронного пучка за умов відсутності та присутності генерованого електричного поля накачки. З цих

залежностей можна зробити наступні висновки. Генероване електричне поле накачки суттєво підсилює електричну складову інкремента зростання Γ^{II} , але не впливає на Γ^{I} . В результаті загальний інкремент Γ також збільшується приблизно на 28-10% в діапазоні релятивістського фактора пучка 2,0-4,0. Генероване електричне поле накачки найбільш істотно збільшує інкремент зростання супергетеродинного параметричного ЛВЕ Γ при відносно низьких значеннях релятивістського фактора.

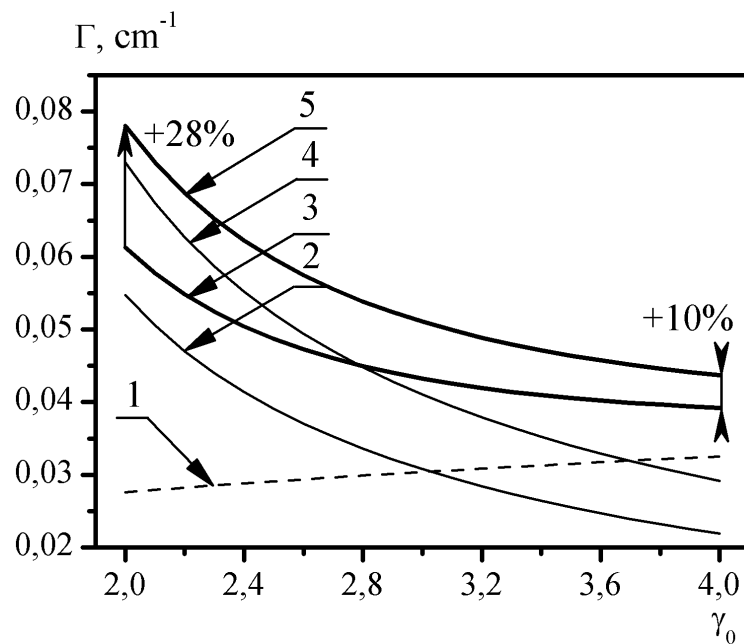


Рисунок 2.8 – Залежності інкрементів зростання електромагнітної хвилі вхідного сигналу (Γ , Γ^{I} , Γ^{II}) від релятивістського фактора γ_0 . Крива 1 відповідає залежності $\Gamma^{\text{I}} = \Gamma^{\text{I}}(\gamma_0)$, криві 2 і 4 відповідають залежностям $\Gamma^{\text{II}} = \Gamma^{\text{II}}(\gamma_0)$, криві 3 і 5 відповідають залежностям $\Gamma = \Gamma(\gamma_0)$. Криві 1, 2, 3 побудовано для випадку відсутності ефекту генерації електричного поля накачки, а криві 4, 5 – для випадку врахування генерованого електричного поля накачки.

На рис. 2.9 показано залежності інкрементів зростання хвилі вхідного сигналу та його магнітної та електричної компонент (Γ , Γ^{I} , Γ^{II}) від частоти сигналу ω_1 за умов відсутності та присутності генерованого електричного поля накачки. Видно, що лише магнітна складова підсилення Γ^{I} обернено пропорційно залежить від частоти вхідного сигналу (крива 1), а складова Γ^{II}

(криві 2, 4) залишається незмінною. Як і у випадку рис. 2.8, генероване електричне поле накачки суттєво підсилює електричну компоненту інкременту зростання Γ^{II} , що дозволяє істотно збільшити загальний інкремент зростання Γ у широкому діапазоні частот вхідного сигналу (рис. 2.9). При частоті сигналу $\omega_1 = 1,5$ ТГц інкремент зростання Γ з генерованим електричним полем накачки на 10% більший, ніж у випадку, коли цей ефект відсутній. Ця різниця зростає зі збільшенням частоти сигналу, досягаючи верхньої межі приблизно 30% для сигналу з області вищих частот.

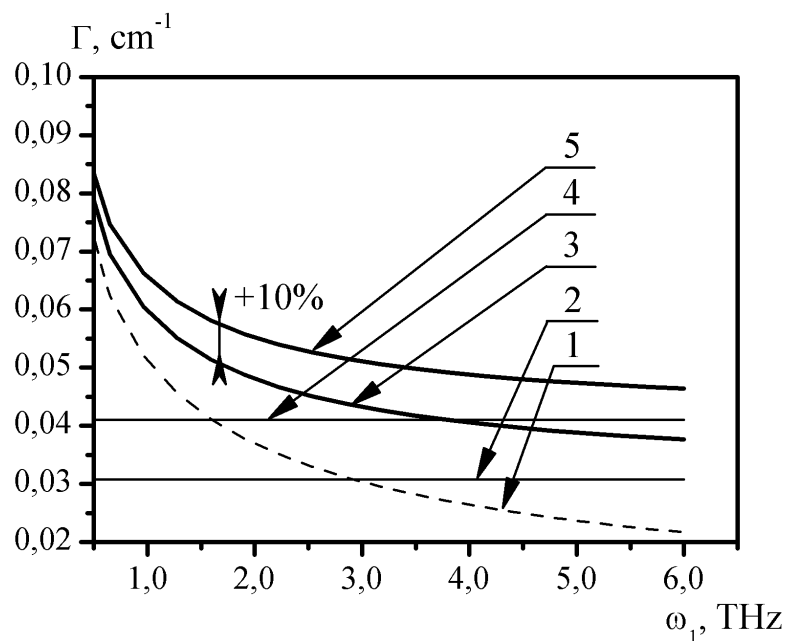


Рисунок 2.9 – Залежності інкрементів зростання хвилі (Γ , Γ^{I} , Γ^{II}) від частоти сигналу ω_1 . Крива 1 відповідає залежності $\Gamma^{\text{I}} = \Gamma^{\text{I}}(\omega_1)$, криві 2 і 4 відповідають залежностям $\Gamma^{\text{II}} = \Gamma^{\text{II}}(\omega_1)$, криві 3 і 5 відповідають залежностям $\Gamma = \Gamma(\omega_1)$. Криві 1, 2, 3 побудовано для випадку відсутності ефекту генерації електричного поля накачки, а криві 1, 4, 5 – для випадку врахування генерованого електричного поля накачки.

ВИСНОВКИ

1. Модель представлена системою трьох одновимірних диференціальних параболічних рівнянь з частинними похідними. Аналітична форма чисельного розв'язку рівнянь, включаючи початкові та граничні умови, описана на основі явної двошарової різницевої схеми.

2. Побудовано розподіли поточних і стаціонарних значень статичних і кінетичних сил тертя та температури; розглянуто два випадки: 1) випадок, коли верхня і нижня поверхні рухаються в протилежних напрямках з постійною швидкістю; 2) випадок, коли верхня поверхня рухається вздовж нерухомої нижньої поверхні.

3. Для різних часових рядів визначено залежність напружень, деформацій і температури від координат, нормальних до поверхні. Результати показують, що з часом встановлюється стаціонарний розподіл сил тертя і температури по товщині приповерхневого шару льоду.

4. Кінетичні та статичні сили тертя в приповерхневому шарі льоду монотонно зростають з віддаленням від поверхні тертя, тоді як залежність температури від координат є немонотонною.

5. Статична сила тертя в приповерхневому шарі льоду зменшується зі збільшенням температури на поверхні тертя, що свідчить про перехід до більш рідкого стану на поверхні, але координатна залежність набуває вигляду монотонно зростаючої.

6. Проаналізовано процеси генерації генерованого електричного поля накачки та його вплив на підсилення хвиль просторового заряду в секції підсилення параметричного супергетеродинного лазера на вільних електронах у кубічно-нелінійному наближенні.

7. Встановлено, що електронний пучок створює сильне генероване електричне поле накачки, амплітуда якого на всій області взаємодії секції підсилення змінюється від 33% до 21% амплітуди зовнішнього електричного поля

накачки. Генероване електричне поле накачки знаходиться у фазі із зовнішнім полем накачки. Це призводить до суттєвого збільшення інкрементів зростання гармонік ХПЗ, і як наслідок довжина підсилувальної системи зменшується на 22%.

8. Виявлено, що генероване електричне поле накачки не руйнує режим підсилення мультигармонійних хвиль просторового заряду. Для підсилення мультигармонійних хвиль ХПЗ з різними частотами достатньо мати монохроматичне поле накачки, яке підсилюється за рахунок генерованого електричного поля накачки.

9. Показано, що досліджувана система може підсилювати ХПЗ досить високої частоти в субміліметровому і навіть далекому інфрачервоному діапазонах.

10. Продемонстровано, що генероване електричне поле накачки суттєво впливає на підсилення поздовжніх хвиль просторового заряду в електростатичному ондуляторі, збільшуючи їх інкремент зростання Γ^{II} на 33%. Завдяки цьому інкремент зростання всього ЛВЕ збільшується на 28-10% в залежності від параметрів системи.

11. З нашого аналізу випливає, що найбільш суттєвий вплив генерованого електричного поля накачки має місце при високих частотах вхідного електромагнітного сигналу та відносно низьких енергіях електронного пучка.

12. В рамках кубічного нелінійного аналізу показано, що ефект генерації генерованого електричного поля накачки значно покращує характеристики секції підсилення. Це дозволяє нам істотно зменшити довжину насичення (приблизно на 20%) та секцію підсилення, отже, розміри всього пристрою.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. A. Khomenko, D. Logvinenko, *Condensed Matter Physics*, V. 24: No. 4 (2021).
2. A. Khomenko, D. Logvinenko, *Physica B: Condensed Matter*, V.618: 413160 (2021).
3. D.T. Logvinenko, A.V. Khomenko, Ya.V. Khyzhnya. *Журнал нано- та електронної фізики*. Вип. 12 (4): с. 04002-1 - 04002-6 (2020).
4. Д. Т. Логвиненко, *Матеріали науково-технічної конференції «Інформатика, математика, автоматика»*, Сумський державний університет: с. 197 (2019).
5. Д. Т. Логвиненко, *Інформатика, математика, автоматика: тези доп. наук.-тех. конф.*, Сумський державний університет: с. 237 (2020).
6. О.В. Хоменко, Д.Т. Логвиненко, К.П. Хоменко, *Матеріали науково-технічної конференції «Інформатика, математика, автоматика»*, Сумський державний університет: с. 191 (2021).
7. D. L. Feltham, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, A363: 1677–1700 (2005).
8. J. Gray, L. W. Morland, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, A347: 219–290 (1994).
9. J. C. King, M. J. Doble, P. R. Holland, *J. Geophys. Res.*, 115: 12030 (2010).
10. W. D. I. Hibler, *J. Phys. Oceanogr.*, 9: 815–846 (1979).
11. H. Heorton, *Jet formation at the sea ice edge. Ph.D. thesis*, University College London: 160 pp. (2013).
12. D.L. Feltham, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 40: 91–112 (2008).
13. M. Tsamados, D.L. Feltham, A.V. Wilchinsky, *J. Geophys. Res. Oceans*, 118: 91–107 (2013).
14. N. Golding, E.M. Schulson, C.E. Renshaw, *Acta Mater.*, 58: 5043–5056 (2010).
15. V. Dansereau, J. Weiss, P. Saramito, *Cryosphere*, 10: 1339–1359(2016).
16. J.K. Hutchings, A. Roberts, C.A. Geiger, *Richter-Menge J.*, (2018).

17. C. Hunke, W. H. Lipscomb, A. K. Turner, N. Jeffery, S. M. Elliott, : *CICE: the Los Alamos sea ice model, Documentation and software, Version 5.0. Technical Report LA-CC-06-012* (2013).
18. A. V. Wilchinsky, D. L. Feltham, M. A. Hopkins, *J. Geophys. Res.* 115: C10002 (2010).
19. A. V. Wilchinsky, D. L. Feltham, M. A. Hopkins, *Ann. Glaciol.* 52: 83–90 (2011).
20. A. Khomenko, *Tribol. Lett.*, 66: 82 (2018).
21. A. V. Khomenko, K. P. Khomenko, V. V. Falko, *Condens. Matter Phys.*, 19(3): 33002 (2016)
22. A. Fisher, Y. Park, M. Lenz, A. Ody, R. Agustsson, T. Hodgetts, A. Murokh, P. Musumeci, *Nature Photonics*, V. 16 issue 6: p. 441-447 (2022).
23. L. Yan, Z. Liu, *Nature Photonics*. v. 16, issue 6: p. 404-405 (2022).
24. K. Kawase, M. Nagai, K. Furukawa, M. Fujimoto, R. Kato, Y. Honda, G. Isoyama, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. v. 960: p. 163582 (2020).
25. N. Sei, T. Sakai, Y. Hayakawa, Y. Sumitomo, K. Nogami, T. Tanaka, K. Hayakawa, *Scientific Reports*. v. 11, issue 1: p. 3433 (2021).
26. V.V. Kulish, O.V. Lysenko, I.V. Gubanov, A.Yu. Brusnik. Patent 87750 (Ukraine). A superheterodyne parametric free electron laser with a longitudinal electric undulator. Publ. 10.08.2009, Bull. № 15.
27. V.V. Kulish, A.V. Lysenko, A.Yu. Brusnik, *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Nuclear Physics Investigations"*, № 3: p. 49-53 (2014).
28. Y.U. Jeong, K.-H. Jang, S. Bae, V. Pathania, J. Mun, K. Lee., *Journal of the Korean Physical Society*, v. 80, issue 5: p. 367-376 (2022).
29. H. P. Freund, M. V. Fazio, P. G. O'Shea, R. B. True, *IEEE Transactions on Plasma Science*, 50: 888 (2023).
30. V. Pathania, S. Bae, K.-H. Jang, K. Lee, Y. U. Jeong, *Opt. Continuum, OPTCON*, 1: 91 (2022).

31. V.V. Kulish. Hierarchic *Electrodynamics and Free Electron Lasers*. Boca Raton, London, New York: CRC Press, (2011).
32. V.V. Kulish, A.V. Lysenko, M.Yu. Rombovsky, V.V. Koval, I.I. Volk. *Acta Physica Polonica A*, v. 131, issue 1: p. 213-221 (2017).
33. A. Lysenko, I. Volk, *Plasma Science and Technology*, v. 20 issue 3: 035002(9) (2018).
34. A.V. Lysenko, *Journal of Nano- and Electronic Physics*, Vol. 15, No 5: P. 05022(5pp) (2023).
35. Lysenko A.V. Influence of Generated Pump Electric Field on Multiharmonic Interaction of Waves in Amplification Section of Superheterodyne FEL / A.V. Lysenko, O.I.Voroshylo, S.S. Ilin // *Problems of atomic science and technology*. – 2023. – No 6 (148). – P. 186–191.
36. Lysenko A.V. Effect of an generated pump electric field on a growth increment of the input signal in the parametric superheterodyne free electron laser in quadratic nonlinear approximation / A.V. Lysenko, S.S. Ilin // *Electronics and Applied Physics : 19th International Conference, October 17–21, 2023 : book of proceeding*. – Kyiv, Ukraine, 2023. – P. 59–60.