

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Сумський державний університет

Факультет електроніки та інформаційних технологій

(повна назва інституту/факультету)

Кафедра комп'ютеризованих систем управління

(повна назва кафедри)

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

Петро ЛЕОНТЬЄВ

(підпис)

(Ім'я та ПРІЗВИЩЕ)

червня _____ 2024р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня бакалавр

(бакалавр / магістр)

зі спеціальності 153 «Мікро- та наносистемна техніка»,

(код та назва)

освітньої програми «Нанотехнології та біомедичні системи»

(назва програми)

на тему "Моделювання процесів фрагментації матеріалів методом фазової площини"

Здобувача групи ФЕ-01 Ноженко Роман Юрійович

(шифр групи)

(прізвище, ім'я, по батькові)

Кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

Роман НОЖЕНКО

(підпис)

(Ім'я та ПРІЗВИЩЕ здобувача)

Керівник доцент кафедри КСУ, к.ф.-м.н., доцент, Ольга ЮЩЕНКО _____

(посада, науковий ступінь, вчене звання, ім'я та ПРІЗВИЩЕ)

(підпис)

Суми – 2024

Сумський державний університет

(назва вузу)

Факультет електроніки та інформаційних технологій

Кафедра комп'ютеризованих систем управління

Спеціальність 153 – «Мікро- та наносистемна техніка»

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедрою КСУ

Петро ЛЕОНТЬЄВ

травня 2024 р.

ЗАВДАННЯ

НА БАКАЛАВРСЬКУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Ноженку Роману Юрійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема проекту (роботи) "Моделювання процесів фрагментації матеріалів методом фазової площини"

затверджена наказом по університету від «27» березня 2024 р. № 0302-VI

2. Термін здачі студентом закінченого проекту (роботи) «04» червня 2024 р.

3. Вхідні дані до проекту (роботи) трипараметрична модель опису процесу фрагментації матеріалу; система трьох диференціальних рівнянь з часовими та просторовими похідними; лінійне наближення для флуктуацій швидкості руху; метод фазової площини; пакет WolphramAlpha

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, що їх належить розробити) 1) опанувати метод фазової площини для аналізу системи диференціальних рівнянь; 2) аналітично сформулювати систему рівнянь еволюції основних параметрів моделі фрагментації матеріалів; 3) проаналізувати кінетику змодельованого процесу на основі фазових портретів

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначення обов'язкових креслень)
Презентація в PowerPoint (15 слайдів)

6. Дата видачі завдання «06» травня 2024 р.

Керівник

(підпис)

Завдання прийняв до виконання

(підпис)

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

Пор. №	Назва етапів дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапів проекту (роботи)	Примітка
	Метод фазової площини для аналізу системи диференціальних рівнянь		виконано
	Систему рівнянь еволюції основних параметрів моделі фрагментації матеріалів		виконано
	Пакет WolframAlpha для побудови фазових портретів		виконано
	Дослідження кінетики змодельованого процесу на основі фазових портретів		виконано
	Аналіз результатів дослідження		виконано
	Оформлення кваліфікаційної роботи		виконано

Студент-дипломник

(підпис)

Керівник проекту

(підпис)

АНОТАЦІЯ

Записка: 48 сторінок., 20 рисунків, 22 використаних джерела.

Об'єкт дослідження — наноструктуровані матеріали під дією зовнішнього навантаження.

Мета роботи — побудувати модель процесу фрагментації матеріалів, проаналізувати вплив зовнішнього навантаження на вказаний процес.

Методи дослідження — метод фазової площини, аналітичні розв'язки системи нелінійних рівнянь

Результати — В роботі були досліджені процеси фрагментації матеріалів в рамках феноменологічного підходу. За основу була взята система трьох диференціальних рівнянь, що описує еволюцію параметра порядку, спряженого та керуючого параметра. Для числового розв'язку рівнянь було використано метод фазової площини в рамках наближення сталого градієнту флуктуацій швидкості. В результаті були проаналізовані стаціонарні стани системи та умови переходу до стану руйнування, побудовані фазові портрети, що демонструють зміни кінетики процесу фрагментації зі зміною зовнішньої зсувної компоненти напружень. Особливо важливим є розуміння цих процесів для подальшого розвитку як фундаментальних, так і прикладних аспектів науки про новітні матеріали.

Ключові слова — НАНОСТРУКТУРОВАНІ МАТЕРІАЛИ, МЕТОД ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ, ФАЗОВІ ПОРТРЕТИ

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1	7
МЕТОДИ ОТРИМАННЯ НАНОСТРУКТУРНИХ МАТЕРІАЛІВ.	
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕНСИВНОЇ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ...7	
1.1. Методи отримання наноструктурних матеріалів	7
1.2. Застосування методів інтенсивної пластичної деформації.....	9
РОЗДІЛ 2	14
МЕТОД ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ ДЛЯ АНАЛІЗУ	
КІНЕТИКИ ПРОЦЕСІВ ЕВОЛЮЦІЇ	
2.1. Загальні відомості. Переваги та недоліки методу ФП.....	14
2.2. Показники стійкості.....	21
2.3. Побудова фазових портретів у віджеті Wolfram Alpha.....	22
РОЗДІЛ 3	25
САМОУЗГОДЖЕНА СИСТЕМА ЕВОЛЮЦІЇ ФРАГМЕНТОВАНОГО	
МАТЕРІАЛУ	
3.1 Початкова система рівнянь	25
3.2 Обезрозмірювання системи рівнянь.....	27
3.3 Наближення	32
3.4 Побудова фазових портретів	33
ВИСНОВКИ.....	45
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	46

ВСТУП

У сучасному світі наукового й технологічного прогресу пошук нових матеріалів, які б мали унікальні властивості, відіграє вирішальну роль у багатьох галузях, починаючи від електроніки та медицини й закінчуючи енергетикою та промисловістю. Одним із ключових напрямків є отримання наноструктурних матеріалів, що відкриває широкі можливості для створення матеріалів зі збільшеними механічними, електричними та тепловими властивостями, порівняно зі звичайними матеріалами.

Методи отримання наноструктурних матеріалів розвиваються стрімко і включають в себе різноманітні технології, такі як хімічне відкладання з парової фази, синтез у розчинниках, механічне подрібнення та багато інших. Кожен із цих методів має свої переваги та обмеження і використовується залежно від конкретних потреб і вимог, що ставляться до матеріалу.

Багато питань, пов'язаних з інтенсивною пластичною деформацією, залишаються відкритими, і сучасні методи дослідження переважно обмежуються узагальненням експериментальних даних. Теоретичні підходи дозволяють розкрити деякі закономірності у процесах деформації та руйнування твердих тіл, але більш повне розуміння цих процесів є актуальною задачею для наукової спільноти. У роботі планується розглянути теоретичну модель процесу фрагментації металів чи сплавів при ПД, що сприятиме у більш повному описі процесу подрібнення полікристалічної структури та формуванні граничної СМК чи НК структури.

РОЗДІЛ 1

МЕТОДИ ОТРИМАННЯ НАНОСТРУКТУРНИХ МАТЕРІАЛІВ. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕНСИВНОЇ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

1.1. Методи отримання наноструктурних матеріалів

Останнім часом спостерігається зростаючий інтерес до дослідження та застосування технологій отримання ультрадрібнозернистих та наноструктурних матеріалів. Це пов'язано з стрімким розвитком сучасних технологічних процесів: збільшенням різних навантажень на матеріал, наявністю різноманітних середовищ експлуатації, високою вартістю виготовлення і т. д. Таким чином, виникла необхідність у вдосконаленні фізико-хімічних властивостей матеріалів, зокрема у підвищенні терміну служби новітніх конструкцій та їх деталей.

Виділяють два основних види отримання наноструктурних матеріалів, які відрізняються технологією виготовлення або одержанням за допомогою використання різноманітних методів обробки. Сутність першого методу полягає в тому, що під час розпаду, осадження або комбінації матеріалу виготовляють різні наночастинки, нанотрубки, покриття, нанопорошки та стиснуті з них матеріали, нанокомпозитні матриці. Другий метод дає змогу провести наноструктурування під сильним впливом на одержані матеріали іншими методами такими як: термічна обробка аморфних сплавів, інтенсивна пластична деформація первинної металевої структури, механо-хімічного формування. В даній ситуації формується композитний матеріал, який має кристалічні та некристалічні структури. Структурний фактор, який вважається одним з найважливіших для матеріалів, - це розмір зерен. Він впливає на практично всі аспекти фізичної, механічної поведінки полікристалічних матеріалів, а також на їхню хімічну реакцію на навколишнє середовище. Керування розмірами зерен є ключовим фактором для виробництва матеріалів з необхідними властивостями.

Використання нанопорошків і їх об'єднання (консолідація) дозволяють отримати зразки заданої форми та розмірів з потрібними структурами та властивостями. При цьому об'єднання має забезпечити, з одного боку, практично повне стиснення структурних елементів зразка (відсутність макро- та мікропор), а з іншого - зберегти нанорозмірність матеріалу (розмір зерен має бути меншим за 100 нм). Проте створення щільних зразків є складною задачею, оскільки пресування нанопорошків може бути недостатнім.

Найрезультативнішим методом отримання нанопорошків різних матеріалів є механічне подрібнення. У ході механічного подрібнення порошок або їхніх сумішей у млині і подальшого стиснення (компактування) здійснюється подрібнення та пластична деформація речовин, підвищується темп масоперенесення, відбувається перенесення компонентів на атомарному рівні (механічне легування). В результаті механічного впливу в рамках взаємодії твердої речовини відбувається сильна пластична деформація. Відновлення виниклих напружень проходить теплове випромінювання, формування нової поверхні, створення дефектів та підвищення активності хімічних реакцій у твердій фазі. Модель механічного подрібнення показана на рисунку 1.1.

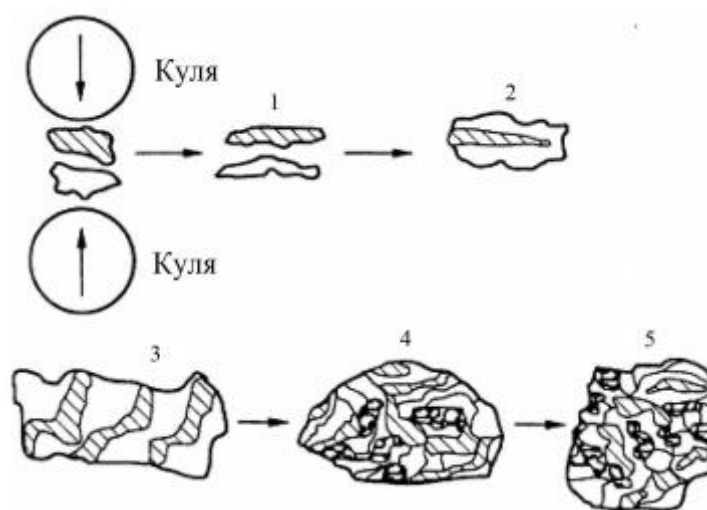


Рисунок 1.1 – Схема впливу на матеріал під час кульового розмелення [1]:
 1-5 – стадії механічного легування двох металів; 2, 3- механічне сплавлення; 4,
 5 – утворення наноструктур і нових сполук

При використанні даних методів можна отримати зразки які мають нанорозмірні зернисті структури, але в деяких випадках виникають проблеми які пов'язані з усуненням остачі пористості у ході стискання, із додаванням домішок протягом їх об'єднання або збільшенням величини зразків та практичним застосуванням цих методів.

У більшості випадків ці проблеми можна розв'язати використовуючи методи інтенсивної пластичної деформації (ІПД). В результаті використання ІПД можна отримати зразки або заготовки з об'ємною наноструктурою для різних металів та сплавів. Також методи ІПД використовують для обробки напівпровідників та композитних матеріалів.

1.2. Застосування методів інтенсивної пластичної деформації

Найефективнішим способом для отримання зразків із металу які мають безпористу субмікрокристалічну (СМК) чи нанокристалічну (НК) структуру є метод інтенсивної пластичної деформації (ІПД). При великих напруженнях і низьких температурах відбувається зменшення розмірів мікроструктури зразка до субмікро- (100-1000 нм) або нанометрових розмірів (< 100 нм), при цьому спостерігається висока кутова розорієнтація кристалічних ґраток між сусідніми зернами (до 20°). Отримані матеріали піддаються механічним випробуванням і, як правило, мають високі фізичні та механічні властивості.

Для отримання наноструктур в об'ємних зразках і заготовках методи інтенсивної пластичної деформації повинні відповідати наступним вимогам:

1. Методи повинні забезпечувати можливість отримання структур з ультрадрібними зернами, що мають переважно висококутові межі зерен, оскільки це сприяє якісній зміні властивостей матеріалів.

2. Методи повинні гарантувати формування однорідних наноструктур по всьому об'єму, що є необхідною умовою для стабільних властивостей матеріалів.

3. Незважаючи на інтенсивну деформацію, зразки не повинні мати механічних пошкоджень або руйнувань.

Досягнення значних рівнів пластичної деформації у зразках є складним завданням через потребу великих витрат на конструкцію установки. Така установка має бути достатньо міцною для витримування повторюваних великих навантажень під час формування матеріалу і, водночас, забезпечувати обробку без руйнування. Використання великих навантажень у методах інтенсивної пластичної деформації відрізняється тим, що не призводить до істотних змін у розмірі зразка. Це досягається за допомогою спеціальних геометричних інструментів, які обмежують вільний потік матеріалу і створюють значний гідростатичний тиск. Наявність цього тиску є ключовим аспектом для досягнення великих деформацій, необхідних для отримання ультрадрібнозернистих структур.

На сьогодні існує кілька методів інтенсивної пластичної деформації, таких як кручення під високим тиском (ІПДК), рівноканальне кутове пресування (РККП), прокатка, багаторазовий вигин і випрямлення смуги, всебічне кування, гвинтова екструзія (ГЕ) та інші. Ці методи базуються на багаторазовій інтенсивній пластичній деформації зсуву, що виникає внаслідок високого гідростатичного тиску, що дозволяє отримувати різноманітні ультрадисперсні матеріали з бажаними високими фізико-механічними властивостями.

1.2.1. Рівноканальне кутове пресування

Метод рівноканального кутового пресування (РККП) є найбільш розвинутою технологією обробки на сьогодні, оскільки дозволяє отримати об'ємні наноструктурні заготовки з різних металевих матеріалів (схема на

рисунку 1.2 [2]). Під час РККП масивні зразки деформуються за допомогою простого зсуву під час прокату через два канали, які мають однакові поперечні перерізи та перетинаються під прямим кутом.

Особливість цього методу полягає в тому, що поперечний розмір заготовки не змінюється до та після обробки, що дозволяє проводити багаторазове пресування і накопичувати великі деформації. Поворот заготовки між проходами дозволяє реалізувати різні варіанти РККП, що призводять до різних мікроструктур та фактур. Таким чином, загальний ступінь деформації залежить від кількості проходів та орієнтації заготовки під час кожного проходу. Зазвичай, зміцнення матеріалу досягається після декількох циклів. При обробці матеріалів, що важко деформуються, деформація може здійснюватися за підвищених температур.

Основні переваги та концепцію методу РККП сформулював В. Сегал у ранніх публікаціях, в яких було враховано механіку екструзії та інші аспекти процесу.

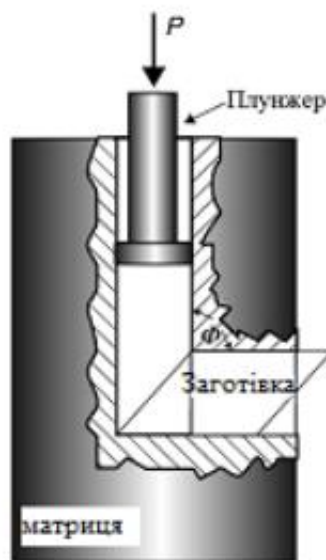


Рисунок 1.2 – Принципова схема методу РККП [2]

1.2.2. Кручення під високим тиском

Метод кручення під високим тиском (ПДК) ґрунтується на концепції наковальні Бріджмена, яка полягає в здійсненні взаємного повороту площин кристалічної структури зразка під кутами від десятків градусів до декількох обертів за умов високого тиску, приблизно 10-15 ГПа (рисунок 1.3 [1]). Цей метод поєднує в собі використання високого тиску (в діапазоні ГПа) з обертальним напруженням, і вважається дуже ефективним для подрібнення зерна.

У процесі ПДК, як показано на схемі, отримані зразки мають форму дисків діаметром від 10 до 20 мм та товщиною 0.2-0.5 мм. Зразок розміщується між бойками та стискається під прикладеним тиском (P) в декілька ГПа. Під час обертання бойків виникають сили поверхневого тертя, що викликають зсувні деформації. Завдяки такій геометричній формі зразків, основний об'єм матеріалу деформується в умовах гідростатичного стиснення під дією прикладеного тиску та тиску, що виникає з боку зовнішніх шарів зразка. Для створення однорідної наноструктури, зазвичай потрібна деформація в декілька обертів. Такі умови деформування дозволяють досягти дуже високого ступеня деформації без руйнування матеріалу. Враховуючи розмір отриманих зразків, вони використовуються переважно для дослідницьких цілей.

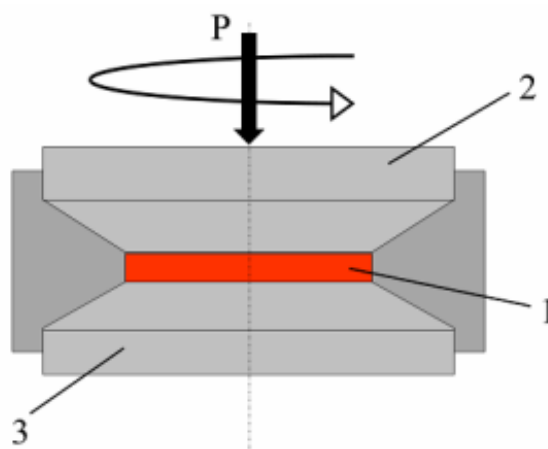


Рисунок 1.3 – Принципова схема методу ПДК [1]: 1 – зразок; 2 – пуансон; 3 – оснащення

1.2.3. Гвинтова екструзія

Гвинтова екструзія є ще одним способом деформації зсуву, який був запропонований Я. Бейгельзімером (схема на рисунку 1.4 [1]). Особливість методу полягає в тому, що він поєднує процеси екструзії і кручення під високим тиском. Під час обробки заготовка пропускається через оснащення з гвинтовою лінією осі каналу. Іншими словами, зразок проходить через матрицю "скручування".

Хоча цей метод має високу пропускну здатність, він також має схожу проблему з методом кручення під високим тиском: деформація, що виникає в матеріалі, є неоднорідною та має найменше значення вздовж осі екструзії. Дослідження Д. Орлова та його колег показали, що для отримання ультрадрібнозернистої структури метод гвинтової екструзії є менш ефективним порівняно з рівноканальним кутовим пресуванням та крученням під високим тиском.

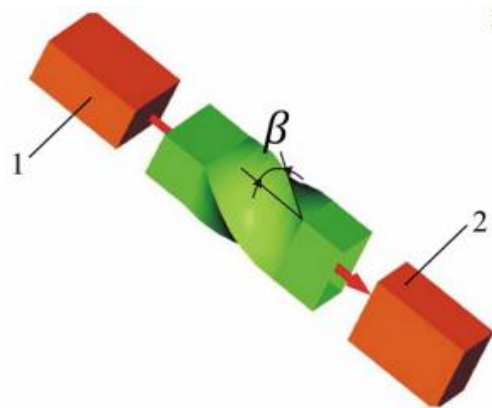


Рисунок 1.4 – Принципова схема методу ГЕ [1]: 1, 2 – зразок відповідно до і після обробки

РОЗДІЛ 2

МЕТОД ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ ДЛЯ АНАЛІЗУ КІНЕТИКИ ПРОЦЕСІВ ЕВОЛЮЦІЇ

2.1. Загальні відомості. Переваги та недоліки методу ФП

Французький вчений Анрі Пуанкаре вперше застосував метод фазової площини для досліджень нелінійних систем. Цей метод полягає в дослідженні характеру вільних рухів нелінійних динамічних систем шляхом побудови їх фазових траєкторій на фазовій площині.

Метод фазової площини має як переваги, так і недоліки.

Переваги методу:

1. Наочність, оскільки результати зазвичай подають у графічній формі, у вигляді фазового портрета.
2. Універсальність у тому сенсі, що метод застосовний як до лінійних, так і до нелінійних систем. Дуже важливо, що нелінійна система може мати будь-яку нелінійність.
3. Можливість аналізу системи в широкому діапазоні початкових умов.

До недоліків, які обмежують застосування методу фазової площини можна віднести той факт, що метод є якісним. За фазовим портретом можна судити про характер руху (коливальний, лімітаційний), але точна поведінка системи в часі залишається невідомою.

Комплекс фазових траєкторій, які відповідають різним початковим умовам, називається фазовим портретом системи.

Створення фазового портрета є необхідним етапом системного аналізу за допомогою методів фазового рівня. Фазовий портрет дозволяє зробити висновки про властивості системи без додаткових пояснень, наприклад:

- кількість положень рівноваги системи,

- характер руху системи навколо кожного положення рівноваги,
- стійкість положення рівноваги,
- наявність або відсутність періодичного руху системи.

До елементів фазового портрету також належать такі елементи, як точка відображення, особлива точка та фазова швидкість. Точка відображення — це точка на фазовій площині, яка відповідає стану системи в певний момент часу. Фазова швидкість — це векторна величина, що має напрямок руху точки відображення. Фазова швидкість має напрямок по дотичній до фазової траєкторії. Фазова швидкість є функцією змінних систем. Особлива точка — це точка на фазовій площині, в якій фазова швидкість дорівнює нулю. Це означає, що фазова траєкторія, як попала в особливу точку, з неї не «виходить». Кожна особлива точка на фазовій площині відповідає певному положенню рівноваги динамічної системи яку досліджують. Якщо початкова точка співпадає з особливою точкою, то вся траєкторія розташовується в цій особливій точці.

Розглянемо на прикладі застосування цього методу для систем другого порядку, коли фазові траєкторії розташовуються на фазовій площині.

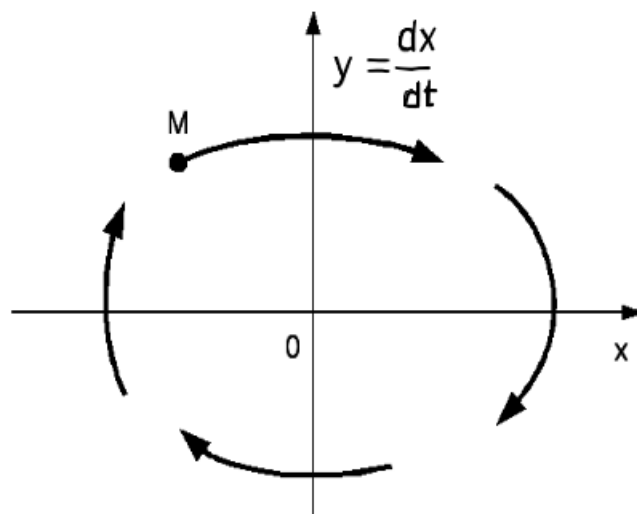


Рисунок 2.1 – Фазова площина XY

Фазова площина — це координатна площина, на горизонтальній осі якої розміщена сама змінна, для якої досліджується перехідний процес, і швидкість зміни (перша похідна) цієї змінної (\dot{x} , можливо, іншої змінної, що характеризує перехідний процес). На рисунку 2.1 зображено фазову площину. По осі абсцис відкладається величина x , яка досліджується, а по осі ординат — її похідна

$$y = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

Стан вторинної системи повністю визначається асоціацією цих двох координат. Кожен стан системи відповідає певній точці на фазовій площині, наприклад точці M на рисунку 2.1. Ця точка називається точкою відображення. Коли в досліджуваній системі відбувається процес, ця точка рухається вздовж площини і прокладає криву, яка називається фазовою траєкторією. Напрямок руху точок зображення на траєкторії прийнято позначати стрілками.

Властивості фазової траєкторії:

1. У верхній півплощині напрямок руху точки відображення може бути тільки зліва направо. Це видно з того, що у верхній півплощині $\dot{x} > 0$ і величина x має збільшуватися. У нижній півплощині точка відображення може переміщатися лише справа наліво.
2. Фазова траєкторія може перетинатися під прямим кутом до горизонтальної вісі. Це видно з того, що в точці перетину похідна $\dot{x} = 0$, і, отже, координата x повинна мати екстремальне значення.
3. Періодичні процеси відповідають замкнутим фазовим траєкторіям.

Розгляну декілька зображень типових процесів на фазовій площині.

1. Затухаючий коливальний процес. Початкова точка процесу (рисунки 2.2. а) має деякі певні значення: $x = x_0$ і $\dot{x} = \dot{x}_0 = y_0$. На фазовій площині (рисунки 2.2 б) вона зобразиться певною точкою $M_0(x_0, y_0)$. У початковій частині процесу до точки 1 величина x збільшується, а похідна $\dot{x} = y$ зменшується. Зображуюча точка на фазовій площині рухатиметься по кривій M_0-1 . У точці 1 має місце максимум величини x , і $\dot{x} = 0$. Потім процес іде зі зменшенням

координати x , тобто з від'ємною похідною $x < 0$. Початок координат показує сталий стан системи ($x = 0, y = 0$).

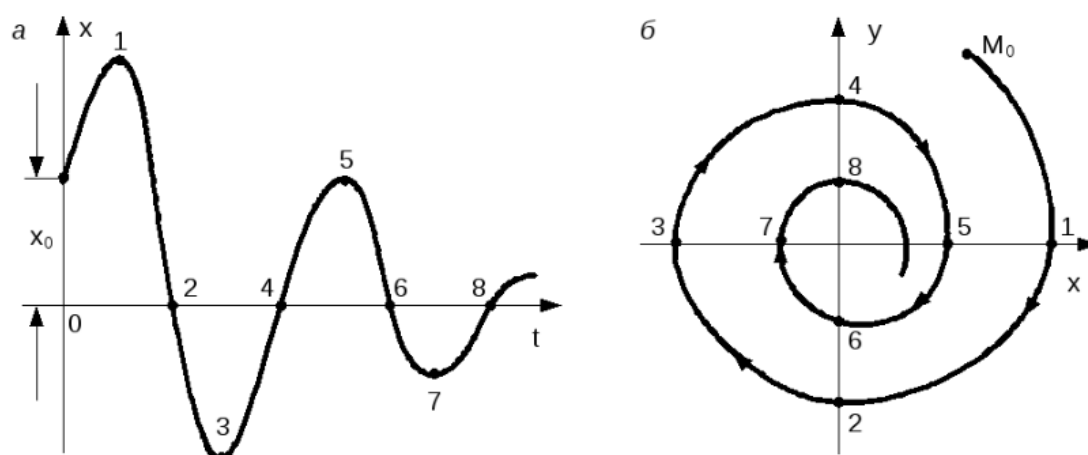


Рисунок 2.2 – Затухаючий коливальний процес

Затухаючі коливання вказують на стійкість цього рівноважного стану. Початок координат фазової площини в цьому випадку є особливою точкою площини, яку називають стійким фокусом (рисунок 2.2 б).

2. Розбіжний коливальний процес, що розходиться. Аналогічним міркуванням можна показати, що фазовим портретом коливань, що розходяться (рисунок 2.3 а), буде спіраль, що віддаляється від початку координат (рисунок 2.3 б).

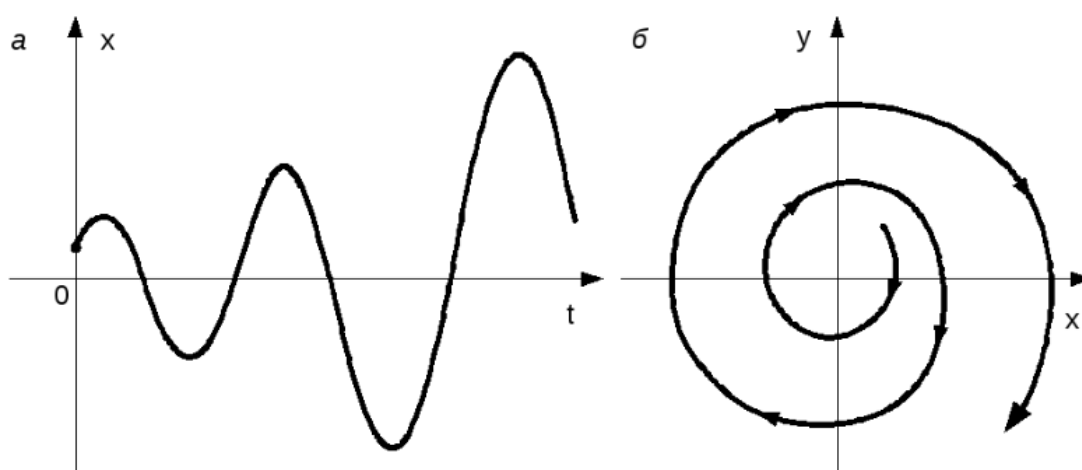


Рисунок 2.3 – Розбіжний коливальний процес

Якщо цей процес має місце при будь-якому малому початковому відхиленні, то це свідчить про нестійкість рівноважного стану ($x = 0, y = 0$).

Початок координат фазової площини в цьому випадку називається нестійким фокусом.

3. Аперіодичний загасаючий процес (рисунок 2.4 а) на фазовій площині зобразиться у вигляді кривої, що вливається в початок координат (рисунок 2.4 б), причому точка, що зображує, рухається цією кривою так, що до початку координат вона наближається за умови $t \rightarrow \infty$. Початок координат називається стійким вузлом. Якщо процес розходиться при будь-якому малому початковому відхиленні, то початок координат називається нестійким вузлом.

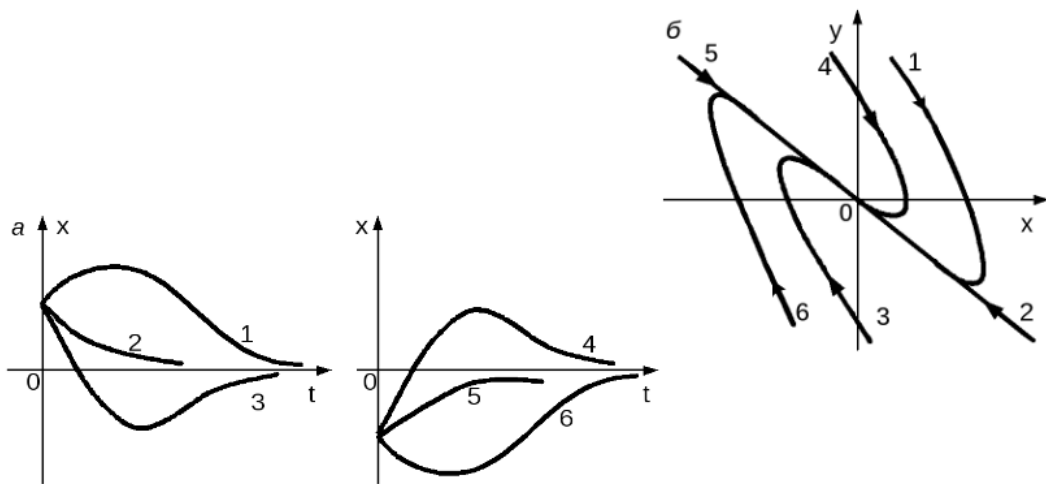


Рисунок 2.4 – Аперіодичний загасаючий процес

4. Періодичний коливальний процес (рисунок 2.5 а) зобразиться на фазовій площині у вигляді замкнутої кривої, циклом (рисунок 2.5 б). Для синусоїдальних коливань цикл має вигляд еліпса, який підбором масштабів по осях може бути перетворений на коло.

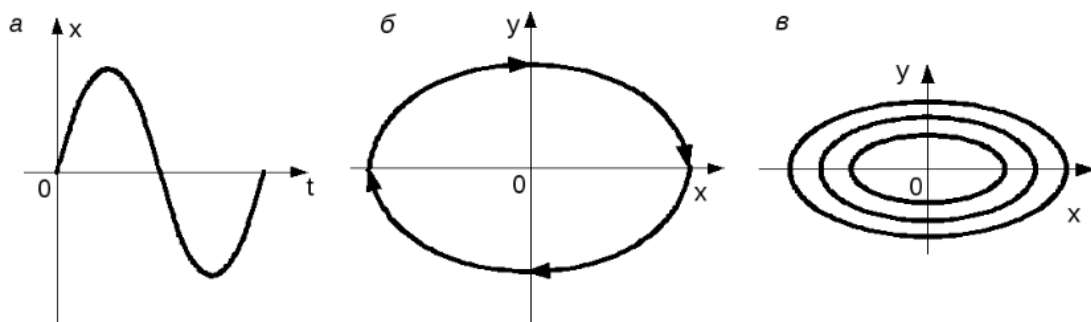


Рисунок 2.5 – Періодичний коливальний процес

Цикл несинусоїдальні коливання має вигляд довільної замкнутої кривої. Якщо цикли оточують початок координат (рисунок 2.5 в), наближаючись до нього нескінченно близько, воно називається особливою точкою "центр".

5. Стійкі автоколивання. Якщо фазова площина має замкнуті фазові траєкторії, то може виникнути така ситуація, яка показана на рисунку 2.6, до якої в межі прагнуть усі фазові траєкторії площини.

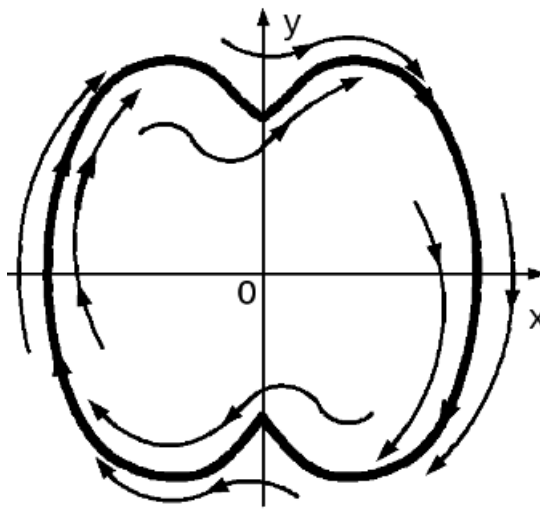


Рисунок 2.6 – Стійкий граничний цикл

Замкнута крива називається стійким граничним циклом. У цьому разі всі фазові траєкторії, що перебувають усередині граничного циклу, відповідають процесу, що розходиться. Ці фазові траєкторії в межі зливаються із замкнутою кривою (граничним циклом). З іншого боку, всі фазові траєкторії, що перебувають зовні граничного циклу, відповідають процесу, що сходиться. При цьому фазові траєкторії навиваються на замкнуту криву, в межі зливаючись із нею.

Така картина відповідає стійким автоколиванням у системі, оскільки будь-яка фазова траєкторія врешті-решт зіллється з граничним циклом, що відповідає періодичному режиму в системі. Амплітуду автоколивань і, отже, максимальне значення досліджуваної величини можна визначити за допомогою кривої граничного циклу.

6. Нестійкі автоколивання. Така ситуація може існувати, якщо на фазовій площині (рисунок 2.7) існує замкнута фазова траєкторія, від якої фазова траєкторія розходиться всередину і назовні. Ця замкнута фазова траєкторія називається нестійким граничним циклом.

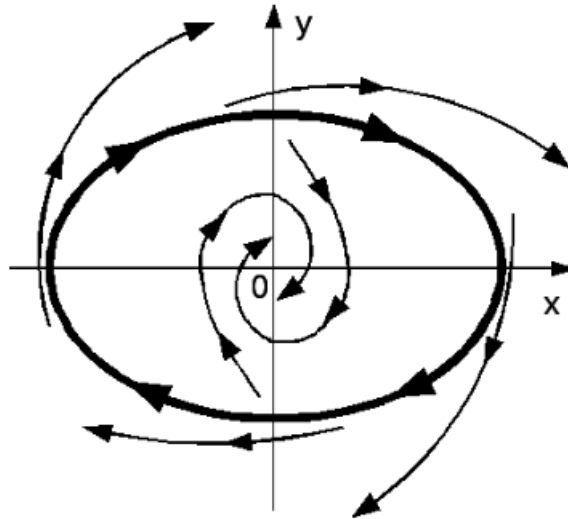


Рисунок 2.7 – Нестійкий граничний цикл

У межах такого граничного циклу фазова прогресія відповідає процесу конвергенції. Отже, якщо початкова точка досліджуваного перехідного процесу $M_0(x_0, x_0)$ знаходиться в межах замкнутої фазової орбіти, система є стабільною в маломасштабному середовищі. За межами нестійкого граничного циклу прогресія фази відповідає дивергентному процесу. Отже, якщо початкова точка процесу $M_0(x_0, x_0)$ знаходиться поза замкнутою фазовою орбітою, система стає нестійкою у великомасштабному середовищі.

Поняття стійкості в нелінійних і лінійних системах дуже відрізняються одне від одного. Стійкість лінійної системи залежить від структури та пропорцій параметрів, а не від початкових умов. Стійкість нелінійних систем також може залежати від початкових умов.

2.2. Показники стійкості

Властивості лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь і стійкість положення рівноваги (одна траєкторія) описують шляхом використання характеристичних показників Ляпунова, які було введено для опису властивостей лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, які характеризували стійкість положення рівноваги, тобто однієї траєкторії. Показники Ляпунова динамічної системи з безперервним часом визначають ступінь віддалення (або зближення) різних, але близьких траєкторій динамічної системи на нескінченності.

Для різних початкових значень числа можуть бути різними. Якщо відповідний показник Ляпунова позитивний, відстань між початково близькими траєкторіями системи з плином часу збільшується, якщо показник від'ємний — близькі траєкторії ще більше зближуються, якщо показник дорівнює нулю — близькі траєкторії залишаються на приблизно однаковій відстані одна від одної. Набір показників Ляпунова (спектр) характеризує загальні закономірності поведінки системи для всіляких початкових умов. Критерієм хаосу слугує лише найбільший показник Ляпунова, що показує, чи розходяться (>0) або сходяться (<0) у середньому сусідні траєкторії. Показники Ляпунова використовують у якісній теорії динамічних систем. Знання показників Ляпунова дає змогу зробити висновок про те, як система розвивається з плином часу. Досить часто достатньо знати знак старшого, тобто найбільшого показника, а також суму показників.

У тривимірному випадку можливі такі варіанти різної поведінки: 1) система прагне до нерухомої точки, тобто до стаціонарного стану, який не залежить від часу; 2) поведінка системи стає періодичною, її траєкторія наближається до замкненої кривої ("граничний цикл"); 3) квазіперіодична поведінка (траєкторії системи перебувають на поверхні двовимірного тора, тобто "бублика"), поведінка системи хаотична. Для систем вищої розмірності набір

варіантів стає ширшим, проте, як і раніше, наявність позитивного показника Ляпунова (за умови від'ємності їхньої суми) тягне за собою хаотичну поведінку.

Показник Ляпунова — інструмент, який використовують для характеристики поведінки динаміки, як окремої траєкторії, так і всієї системи загалом. Показники можуть бути розраховані локально (наприклад, у заданій точці) або глобально для всієї системи. Глобальні показники Ляпунова корисні для опису певної складної поведінки (наприклад, детермінованого хаосу). Показник Ляпунова визначає стійкість топологічної ознаки (наприклад, атратора або репелера), визначає швидкість, з якою система змінюється в бік базового стану або від нього.

Показник вимірює (нескінченно малу) експоненціальну швидкість, за якої прилеглі орбіти розсуваються. Позитивним показником Ляпунова є оперативне визначення хаотичної поведінки. Знак показників Ляпунова особливо важливий для класифікації різних типів динамічної поведінки. Зокрема, наявність позитивного показника Ляпунова свідчить про те, що близькі орбіти експоненціально розходяться у відповідному напрямку. Характеристичний показник Ляпунова — кількісна міра нестійкості кожної траєкторії, що належить хаотичному атратору. Він дає змогу оцінити фрактальну розмірність атратора та ентропію динамічної системи.

2.3. Побудова фазових портретів у віджеті Wolfram Alpha

Фазові площини є потужним інструментом для вивчення динаміки систем диференціальних рівнянь. Вони надають візуальне уявлення про поведінку системи в часі, показуючи траєкторії, які визначаються початковими умовами. Wolfram Alpha є зручним інструментом для аналізу фазових площин завдяки своїм обчислювальним можливостям та простоті використання.

Фазова площина – це графічне представлення розв'язків системи диференціальних рівнянь, де кожна точка відповідає певному стану системи, визначеному змінними x та y . Траєкторії на фазовій площині показують, як система змінюється з часом, тобто як змінюються змінні $x(t)$ та $y(t)$.

Віджет Wolfram Alpha Phase Plane є безкоштовним, що дає великий плюс у його використанні. Для того щоб почати роботу із даним віджетом потрібно перейти на офіційний сайт Wolfram Alpha Phase Plane (Рис. 3.1.).

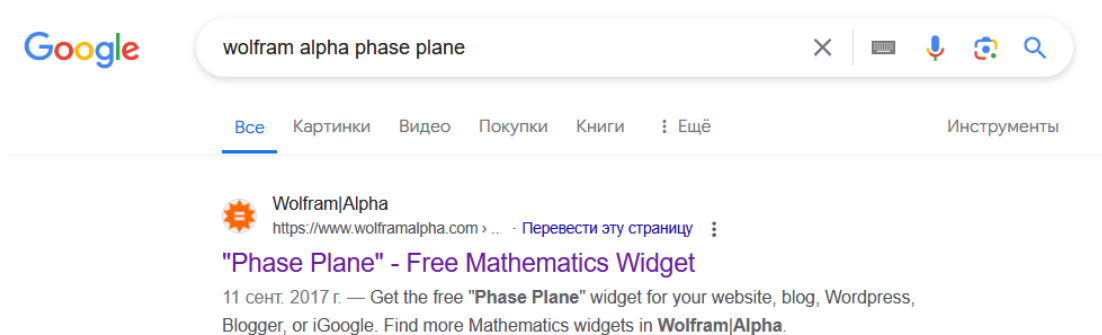


Рисунок 2.8 – Доступ до віджету Wolfram Alpha Phase Plane

Після чого відкриється основне вікно в якому потрібно ввести дані для розрахунку та отримання фазового портрету (Рис 3.2.).

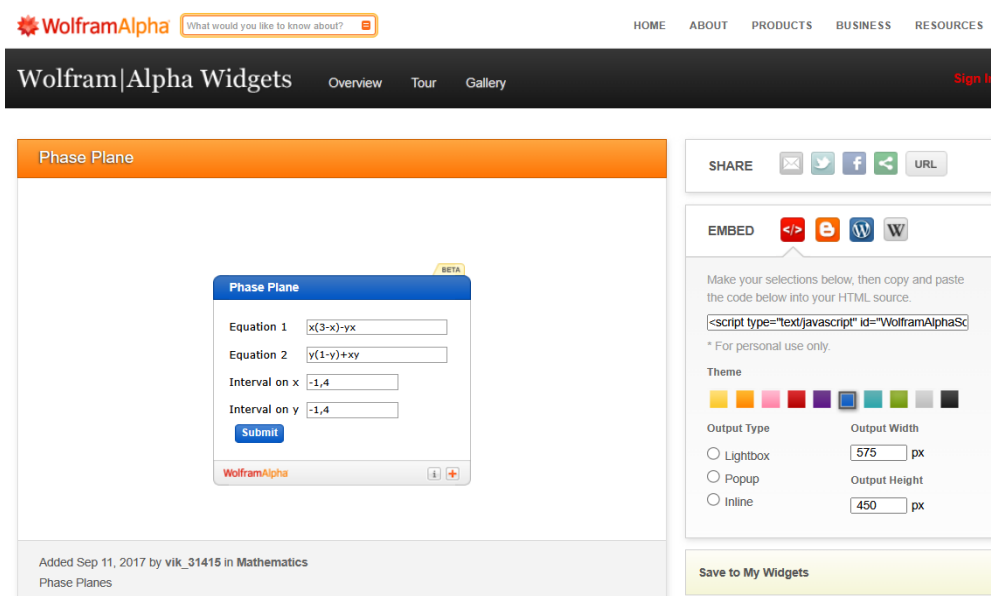


Рисунок 2.9 – Введення правої частини для системи двох диференціальних рівнянь для побудови фазових портретів

У текстове поле під назвою «Equation 1» та «Equation 2» потрібно ввести значення системи, у текстове поле «Interval on x» та «Interval on y» вводяться інтервали фазового портрету. Для прикладу візьмемо такі значення системи:

$$\begin{cases} x(3-x) - yx \\ y(1-y) + xy \end{cases}$$

Інтервали: $x(-1;4)$, $y(-1;4)$.

Після вводу всіх даних на тискаємо кнопку «Submit», після чого відкривається нова сторінка на якій зображено фазовий портрет за заданою системою (Рис. 2.10).

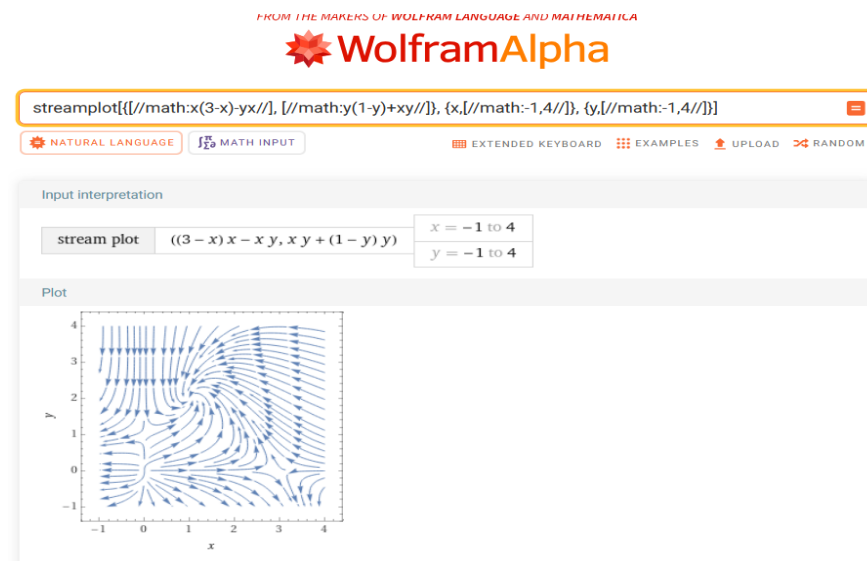


Рисунок 2.10 – Фазовий портрет, побудований під час застосування віджету Wolfram Alpha Phase Plane

РОЗДІЛ 3

САМОУЗГОДЖЕНА СИСТЕМА ЕВОЛЮЦІЇ ФРАГМЕНТОВАНОГО МАТЕРІАЛУ

3.1 Початкова система рівнянь

Під час інтенсивної пластичної деформації відбувається подрібнення нанокристалічного матеріалу, формування зерен різного розміру, які в свою чергу можуть утворювати окремі фрагменти. Також таким ансамблем фрагментів може бути обрано початково порошковий матеріал, що піддається деформації та дії високих температур. В результаті процесу фрагментації утворені частинки (зерна або фрагменти) можуть поводити себе різним чином: залишатися в початковому положенні, здійснювати невеликі коливальні рухи за рахунок зовнішньої дії та наявності вільного простору, тощо.

За основу нашого підходу було взято систему самоузгоджених диференціальних рівнянь, для трьох степеней свободи. У якості параметра порядку

візьмемо $u = \sqrt{\frac{T_{ef}}{m}}$ - середньоквадратичну флуктуація швидкості фрагменту/частинки/гранули, де:

T_{ef} – ефективна температура (в енергетичних одиницях);

m – маса частинки/фрагменту.

Коли фрагмент залишається нерухомим, то такі флуктуації дорівнюють нулю, при наявності вільного простору, або при великих зовнішніх навантаженнях та подальшому подрібненню матеріалу відбуваються зрушення фрагменту, що можна асоціювати з ненульовими флуктуаціями

Для запису рівняння еволюції врахуємо наступні складові розсіяння (дисипації) енергії.

Існує три види дисипації u :

- 1) За рахунок зіткнення: $\dot{u} \propto -\frac{u}{t_u}$

Де: t_u - час релаксації, $\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$.

2) Термічний канал(за рахунок дії температури): $\dot{\mathbf{u}} \propto \chi \nabla^2 \mathbf{u}$

Де: χ – температуропровідність.

3) Гідродинамічний канал: $\dot{\mathbf{u}} \propto \nu \nabla^2 \mathbf{v}$

Де: ν – кінематична в'язкість;

\mathbf{v} – середня швидкість руху гранул.

Останній канал дисипації враховує варіант, коли загальна поведінка фрагментів буде нагадувати поведінку зибучих пісків (гранульований матеріал, де можливою є пластична течія).

Також візьмемо стандартне динамічне рівняння для моменту густини матеріалу:

$$\bar{\rho} \dot{\mathbf{v}} = \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v};$$

$\bar{\rho}$ – середня густина;

η_0 – динамічна в'язкість.

Останнім параметром розглянемо σ – зсувну компоненту внутрішніх напружень.

З одного боку з урахуванням неоднорідності процесу деформації

$$\dot{\sigma} \propto \nu \mathbf{u} \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Далі похідну за координатою можемо спрощено позначити наступним чином

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' \\ \nabla^2 \rightarrow \mathbf{v}'' \end{cases}$$

Загальна система рівняння релаксації, що описує поведінку складових (фрагментів) з урахуванням зовнішнього навантаження, температури та неоднорідностей матиме вигляд

$$\dot{u} = -\frac{u}{t_u} + \chi u'' + g_u v v'' \quad (3.1)$$

$$\dot{v} = -g_v u \sigma + v v'' \quad (3.2)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma_e - \sigma}{t_\sigma} - g_\sigma v u v'' \quad (3.3)$$

Де:

t_u, t_σ – відповідні часи релаксації;

g_u, g_v, g_σ – позитивні константи зв'язку,

$$\eta_0 = v \bar{\rho},$$

σ_e задається зовнішніми умовами (тобто параметр, керуючи яким можна контролювати процес фрагментації).

3.2 Обезрозмірювання системи рівнянь

Система (3.1)-(3.3) має велику кількість констант, що поскладнює як аналітичний, так і числовий розрахунок.

Тому проведемо обезрозмірювання для узагальнених рівнянь релаксації.

Для цього для часу, координати та трьох основних змінних оберемо масштаби вимірювання через константи основної системи. А саме, для початку розділимо на відповідний масштаб 1-ше рівняння

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{u}{t_u} + \chi u'' + g_u v v''}{u_s} &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u}{t_u} + \chi \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g_u v \times \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{t_u} \frac{\partial \left(\frac{u}{u_s}\right)}{\partial \left(\frac{t}{t_u}\right)} = \\ &= -\frac{u}{t_u} \times t_u + \frac{\chi}{u_s} \times t_u \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{g_u v t_u}{u_s} \times \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Де: $\tilde{u} = u/u_s \rightarrow$ безрозмірна u ;

$\tilde{t} = t/t_u \rightarrow$ безрозмірний час t .

Тоді

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\tilde{u} + \chi t_u \times \frac{\partial^2 \left(\frac{u}{u_s}\right)}{\partial x^2} + \frac{g_u v t_u}{u_s} \times \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

де введено масштаб для координати

$$l^2 = \chi t_u \tag{3.4}$$

В результаті перше рівняння модифікується наступним чином

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\tilde{u} + l^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{g_u v}{u_s \chi} \times \chi t_u \times \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Де: $\tilde{\chi} = \frac{\chi}{l}$ – безрозмірна величина теплопровідності

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\tilde{u} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{v_s} \times \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$\tilde{v} = \frac{v}{v_s}$ – безрозмірна швидкість.

$$v_s = \frac{u_s \chi}{g_u v}$$

Тоді кінцевий варіант першого рівняння матиме вигляд

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\tilde{u} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2}$$

Для другого рівняння виконаємо аналогічні дії

$$\begin{aligned} \frac{-g_v u \sigma + v v''}{v_s} : \frac{\partial v}{\partial t} &= -g_v u \sigma + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big| \times \frac{1}{v_s} = \frac{g_u v}{u_s x} \Big| \frac{\partial \left(\frac{v}{v_s} \right)}{\partial t} = \\ &= -\frac{g_v g_u v}{u_s x} \times u \sigma + v \frac{\partial^2 \left(\frac{v}{v_s} \right)}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{t_u}{t_u} \times \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{g_v g_u v}{x} \times \sigma \left(\frac{u}{u_s} \right) + \frac{v l^2}{l^2} \times \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}; \Big| \times \tau$$

Із реології відомо час, за який відбувається релаксація зсувної складової напруги визначається як

$$\tau = \frac{\eta_0}{G} \quad (3.5)$$

Де: η_0 - динамічна в'язкість;

G - модуль зсуву.

Пам'ятаючи співвідношення $\{\eta_0 = v \bar{\rho}\}$, отримаємо

$$\frac{\tau}{t_u} \times \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \left(\frac{t}{t_u} \right)} = -\frac{g_v g_u v \times \tau}{x} \times \sigma \times \tilde{u} + \frac{v \tau}{l^2} \times \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \left(\frac{x}{l} \right)^2};$$

Ввівши позначення для співвідношення характерних часів релаксації

$$\frac{\tau}{t_u} \equiv \alpha, \quad (3.6)$$

отримаємо

$$\alpha \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{g_v g_u t_u \eta_0^2}{G \times x} \times \sigma \times \tilde{u} + \frac{\eta_0 \eta_0}{\bar{\rho} G x t_u} \times \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2};$$

$$\alpha \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{g_v g_u t_u \eta_0^2}{\bar{\rho} G x t_u} \times \sigma \tilde{u} + \frac{\eta_0^2}{\bar{\rho} G x t_u} \times \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} \times \sigma_s = \frac{1}{g_v g_u t_u};$$

Де безрозмірна зсувна компонента внутрішніх напружень

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_s}.$$

Також ввівши співвідношення

$$\gamma^2 \equiv \frac{\eta_0^2}{\bar{\rho} G x t_u} = \frac{v \tau}{l^2} \quad (3.7)$$

Отримаємо друге рівняння у безрозмірному вигляді

$$\alpha \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} = -\gamma^2 \tilde{\sigma} \tilde{u} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2};$$

Аналогічно для 3-го рівняння

$$\frac{\frac{\sigma_e - \sigma}{t_\sigma} - g_\sigma v u v''}{\sigma_s} \times \frac{\partial \sigma}{\sigma_t}$$

$$= \frac{\sigma_e - \sigma}{\sigma_s} - g_\sigma v u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left| \times \frac{t_\sigma}{\sigma_s} \times \frac{t_\sigma}{t_u} \times \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)}{\partial \left(\frac{t}{t_u} \right)} = \frac{\sigma_e - \sigma}{\sigma_s} - \frac{g_\sigma v u t_\sigma l^2 v_s}{\sigma_s v_s l^2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

Також вводимо співвідношення відповідних часів релаксації

$$\beta \equiv \frac{t_\sigma}{t_u} \quad (3.8)$$

Тоді

$$\beta \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\sigma}_e - \tilde{\sigma} - \frac{g_\sigma v t_\sigma v_s}{\sigma_s l^2} \times \mathbf{u} \times \frac{\partial^2 (v/v_s)}{\partial (x/l)^2}.$$

Коефіцієнт в останньому доданку можна перетворити наступним чином

$$\frac{g_\sigma v t_\sigma v_s}{\sigma_s l^2} = \frac{g_\sigma v t_\sigma u_s x}{x t_u g_u v} \times g_v g_u t_u = g_\sigma t_\sigma g_v \times \mathbf{u}_s.$$

Масштаб \mathbf{u}_s можна обрати як: $\mathbf{u}_s = \frac{1}{g_\sigma t_\sigma g_v}$, тоді:

$$\beta \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\sigma}_e - \tilde{\sigma} - \frac{u}{u_s} \times \frac{\partial^2 (v/v_s)}{\partial (x/l)^2};$$

$$\beta \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\sigma}_e - \tilde{\sigma} - \tilde{u} \times \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2}.$$

Далі позначка \sim опускається, але враховується, що всі величини безрозмірні.

Остаточно безрозмірна система рівнянь еволюції матеріалу під час фрагментації набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + u'' + v''; \\ \alpha \dot{v} = \gamma^2 (-\sigma u + v''); \\ \beta \dot{\sigma} = \sigma_e - \sigma - uv''. \end{cases} \quad (3.9)$$

Де введені масштаби:

$$\left. \begin{aligned} u_s &= (g_v g_\sigma t_\sigma)^{-1} \\ v_s &= x(g_u g_v g_\sigma v t_\sigma)^{-1} \\ \sigma_s &= (g_v g_u t_u)^{-1} \\ t_s &= t_u \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

3.3 Наближення

Аналітично проаналізувати систему (3.9) неможливо, тому надалі будемо застосовувати числовий розрахунок та комбінації наближень, щоб проаналізувати наявність стійких станів в рамках методу фазової площини.

Модифікуємо систему (3.9) в рамках наближення

$$\rightarrow \frac{du}{dx} = \mathbf{const}, \text{ тобто сталий градієнт для середньоквадратичної флуктуації } \mathbf{u}.$$

Тоді: $\mathbf{u}' = \mathbf{const}$;

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{0}.$$

Також вважаємо, що середня швидкість руху гранул \mathbf{v} змінюється за гармонійним законом

$$\mathbf{v} = -A \cos(\mathbf{w}x).$$

Де A – амплітуда коливань,

\mathbf{w} – частота.

Знак «-» попереду означає, що спочатку швидкість руху частинок падає, а потім зростає.

Тоді

$$\frac{dv}{dx} = -A(-\sin(\mathbf{w}x)) \times \mathbf{w};$$

Врахуємо, що $|\mathbf{A} \cos(\mathbf{w}x)| = v$, та отримаємо:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = A(\cos(\mathbf{w}x))\mathbf{w} \times \mathbf{w} = A \cos(\mathbf{w}x) \times \mathbf{w}^2 = \mathbf{w}^2 \times v.$$

В рамках вказаного наближення до системи (3.9) підставляємо:

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{w}^2 \times v.$$

В результаті такого наближення ми використали лінійні залежності від швидкості замість похідних по координаті

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{u} + \mathbf{w}^2 \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \frac{\gamma^2}{\alpha} (-\sigma \mathbf{u} + \mathbf{w}^2 \mathbf{v}) \\ \dot{\sigma} = \frac{1}{\beta} (\sigma_e - \sigma - \mathbf{u} \times \mathbf{w}^2 \mathbf{v}) \end{cases} \quad (3.11)$$

3.4 Побудова фазових портретів

Коли $\mathbf{t}_u \rightarrow \mathbf{0}$ похідна $\dot{\mathbf{u}}$ в першому рівнянні (3.11) теж $\rightarrow 0$.

Тому в рамках такого наближення отримаємо систему двох диференціальних рівнянь:

$$1) \quad \begin{cases} \mathbf{0} = -\mathbf{u} + \mathbf{w}^2 \mathbf{v}; \rightarrow (\mathbf{u} = \mathbf{w}^2 \mathbf{v}) \\ \dot{\mathbf{v}} = \frac{\gamma^2}{\alpha} (-\sigma \mathbf{u} + \mathbf{w}^2 \mathbf{v}); \\ \dot{\sigma} = \frac{1}{\beta} (\sigma_e - \sigma - \mathbf{u} \mathbf{v} \times \mathbf{w}^2). \end{cases}$$

В результаті отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\gamma^2}{\alpha} (-\sigma \times w^2 v + w^2 v); \\ \dot{\sigma} = \frac{1}{\beta} (\sigma_e - \sigma - w^2 \times v \times v \times w^2). \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\gamma^2}{\alpha} (1 - \sigma) w^2 v; \\ \dot{\sigma} = \frac{1}{\beta} (\sigma_e - \sigma - w^4 v^2). \end{cases} \quad (3.12)$$

Систему (3.12) зручно проаналізувати методом фазової площини $v - \sigma$,

де $v \rightarrow x$;

$\sigma \rightarrow y$.

Перепишемо систему (3.12) через змінні $x-y$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\gamma^2}{\alpha} (1 - y) w^2 x; \\ \dot{y} = \frac{1}{\beta} (\sigma_e - y - w^4 x^2). \end{cases} \quad (3.13)$$

Координати особливих точок визначимо, коли дорівнюємо похідній за часом в (3.13) нулю, тобто:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\gamma^2}{\alpha} w^2 (1 - y) x; \\ 0 = \frac{1}{\beta} (\sigma_e - y - w^4 x^2). \end{cases}$$

Тоді:

$$\begin{cases} 0 = (1 - y) x; \\ 0 = \sigma_e - y - w^4 x^2; \end{cases}$$

Де: $0 = (1 - y) x \rightarrow x_0 = 0; y_1 = 1$

1) Коли $x_0 = 0$:

$0 = \sigma_e - y - w^4 \times 0$ маємо $y_0 = \sigma_e$.

Тобто перша особлива точка т. $A(0; \sigma_e)$

2) Коли $y_1 = 1$:

$$0 = \sigma_e - 1 - w^4 x^2;$$

$$x^2 = \frac{\sigma_e - 1}{w^4};$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sigma_e - 1}{w^4}} = \frac{\pm \sqrt{\sigma_e - 1}}{w^2}.$$

Оскільки фізичний зміст x це швидкість, яка може набувати від'ємних значень, то треба розглядати обидва розв'язки.

Тобто отримаємо ще дві особливі точки:

$$т.В\left(\frac{-\sqrt{\sigma_e - 1}}{w^2}; 1\right);$$

$$т.С\left(\frac{+\sqrt{\sigma_e - 1}}{w^2}; 1\right).$$

Слід відмітити, що ці точки будуть на фазовому портреті за умови, що $\sigma_e > 1$.

Проаналізувавши систему (3.12) методом фазової площини та підставивши до віджету інтервали відповідно для $x(-2;2)$ та $y(-1;4)$ та отримаємо фазовий портрет, який показаний на рисунку 3.1.

Набір констант в умовних одиницях було обрано наступним

$$w^2 = 1, \gamma^2 = 1, \beta = 1, \alpha = 1, \sigma_e = 2$$

На портреті зображено дві нестійкі точки $(-1;1)$, $(1;1)$ з типом стійкості “сідло” та “стійкий вузол” з координатою в точці $(0;2)$. Таким чином за візуалізованою картиною процес фрагментації реалізується декількома станами, лише один з яких є стійким.

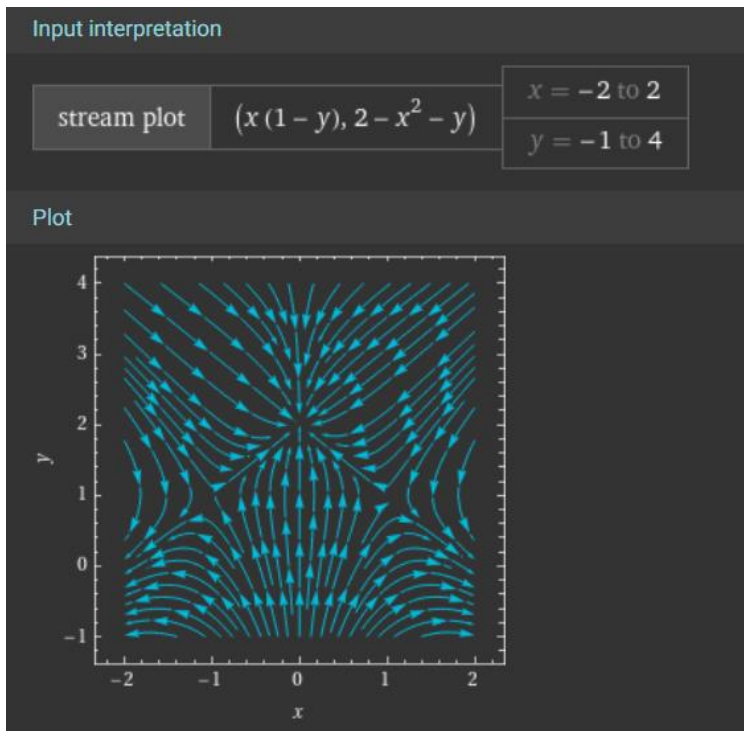
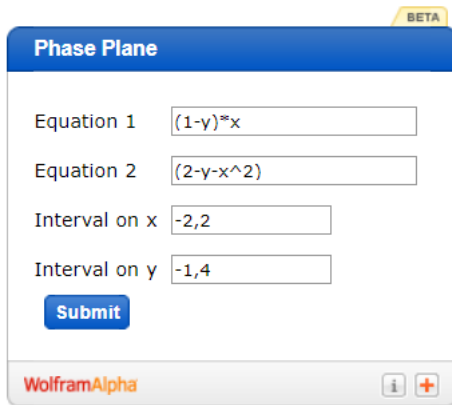


Рисунок 3.1 – Фазовий портрет для системи (3.12) з параметрами $x(-2;2)$, $y(-1;4)$

Якщо дослідити систему (3.12) та підставити інтервали для $x(-2;2)$, $y(-1;3)$ та константи зі значеннями $w^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$, $\sigma_e = 0.5$, то отримаємо фазовий портрет, який показаний на рисунку 3.2, на якому зображено одну нестійку точку $(0; 0,5)$.

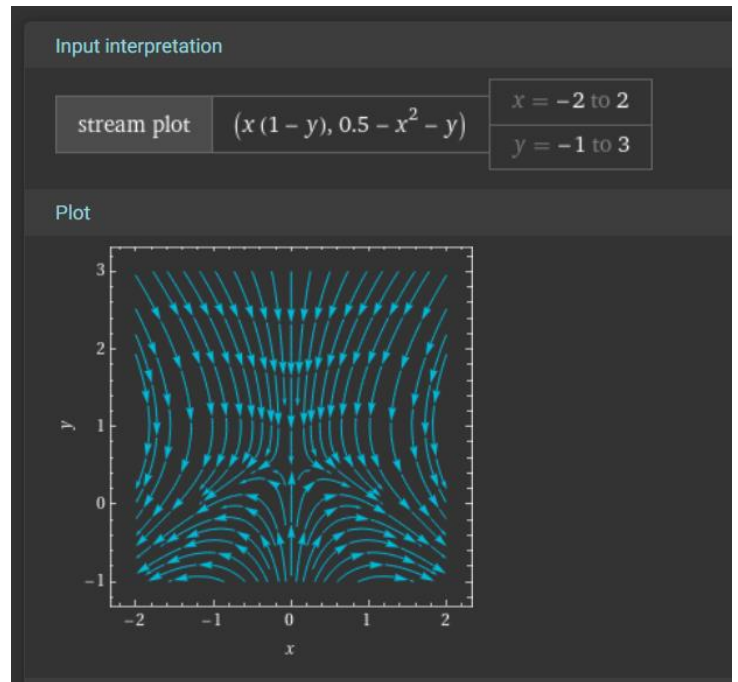
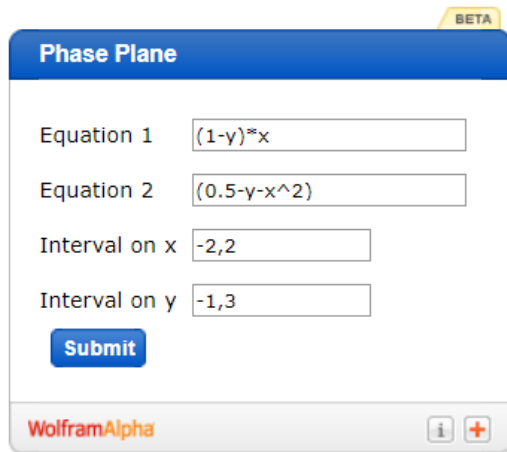


Рисунок 3.2 – Фазовий портрет для системи (3.12) з параметрами $x(-2;2)$, $y(-1;3)$

2) Розглянемо наближення $\dot{v} \rightarrow 0$

Із (3.11) маємо:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + w^2 v \\ 0 = \frac{\gamma^2}{\alpha} (-\sigma u + w^2 v) \\ \dot{\sigma} = \frac{1}{\beta} (\sigma_e - \sigma - u \times w^2 v) \end{cases}$$

Отримаємо:

$$-\sigma u + w^2 v = 0;$$

$$v = \frac{\sigma u}{w^2};$$

Тоді:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + \sigma u; \\ \dot{\sigma} = \frac{1}{\beta} (\sigma_e - \sigma - \sigma u^2) \end{cases} \quad (3.14)$$

Далі аналогічно

$$u \rightarrow x$$

$$\sigma \rightarrow y$$

Перепишемо систему (3.14) через змінні **x-y**:

$$\begin{cases} \dot{x} = -u + \sigma u; \\ \dot{y} = \frac{1}{\beta}(\sigma_e - \sigma - \sigma u^2). \end{cases} \quad (3.15)$$

Координати особливих точок визначимо, коли похідна за часом (3.15) дорівнює нулю, тобто:

$$\begin{cases} 0 = -x + ux; \\ 0 = \frac{1}{\beta}(\sigma_e - y - ux^2). \end{cases}$$

Тоді:

$$\begin{cases} 0 = -x + ux; \\ 0 = \sigma_e - y - ux^2. \end{cases}$$

$$\text{Де: } 0 = -x + ux \rightarrow x_0 = 0; y_1 = 1$$

1) Коли $x_0 = 0$:

$$0 = \sigma_e - y - ux^2 \times 0 \text{ маємо } y_0 = \sigma_e.$$

Тобто перша особлива точка т. **A(0; σ_e)**

2) Коли $y_1 = 1$:

$$0 = \sigma_e - 1 - x^2;$$

$$x^2 = \sigma_e - 1;$$

$$x = \pm\sqrt{\sigma_e - 1}.$$

Оскільки фізичний зміст **x** це швидкість, яка може набувати від'ємних значень, то треба розглядати обидва розв'язки.

Тобто отримаємо ще дві особливі точки:

т.В $(\sqrt{\sigma_e - 1}; 1)$;

т.С $(-\sqrt{\sigma_e - 1}; 1)$.

Дослідивши систему (3.15) та підставивши інтервали для $x(-1,5;1,5)$, $y(0;3)$ та константи зі значеннями $w^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$, $\sigma_e = 2$ отримаємо фазовий портрет, який показаний на рисунку 3.3, на якому зображено два “нестійких вироджених вузла” з точками $(-1;1)$ та $(1;1)$ та “сідло” з центром в точці $(0;2)$.

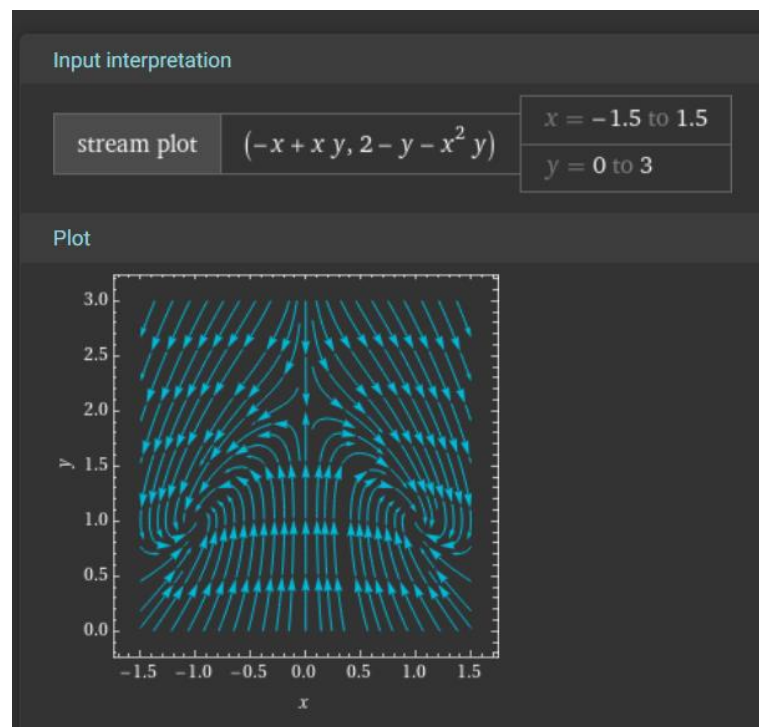
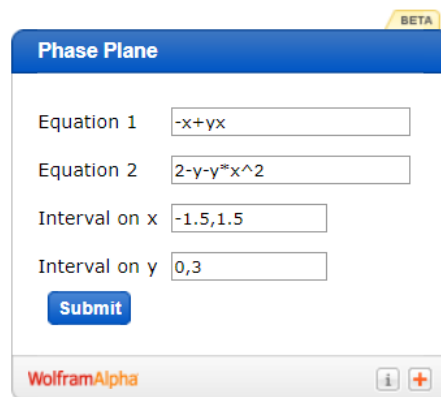


Рисунок 3.3 – Фазовий портрет для системи (3.15) з параметрами $x(-1,5;1,5)$, $y(0;3)$

Якщо проаналізувати систему (3.15) та підставити інтервали для $x(-1,5;1,5)$, $y(0;1)$ та константи зі значеннями $w^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$, $\sigma_e = 0.5$ отримаємо фазовий портрет, який показаний на рисунку 3.4, на якому зображено “стійкий вузол” із координатою центральної точки $(0; 0,5)$.

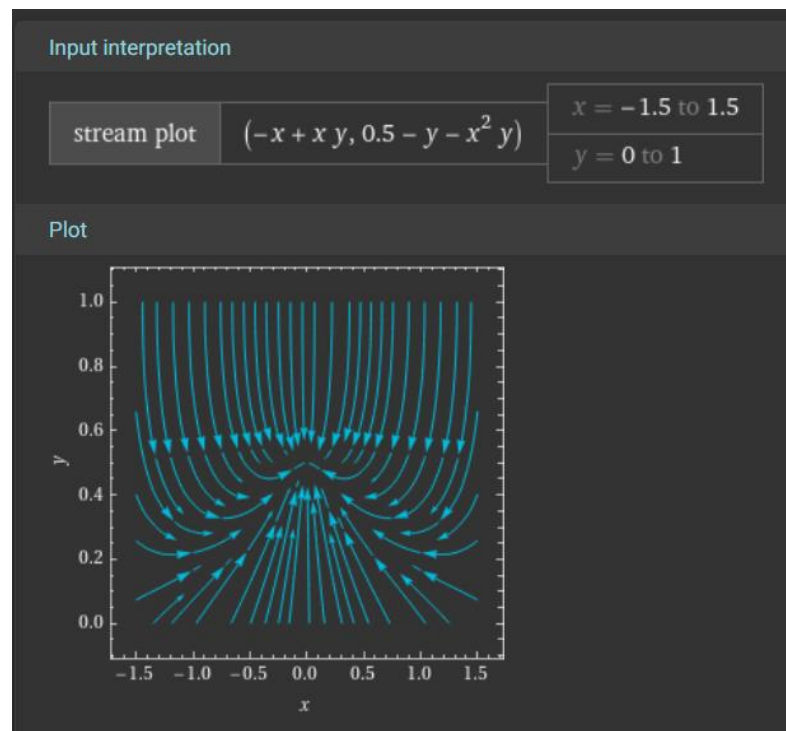
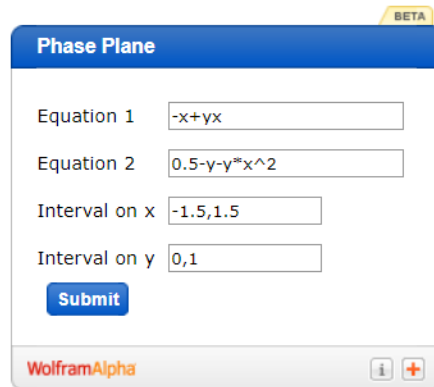


Рисунок 3.4 – Фазовий портрет для системи (3.15) з параметрами $x(-1,5;1,5)$, $y(0;1)$

3) Розглянемо наближення $\delta \rightarrow 0$

Із (3.11) маємо:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + w^2 v \\ \dot{v} = \frac{\gamma^2}{\alpha} (-\sigma u + w^2 v) \\ 0 = \frac{1}{\beta} (\sigma_e - \sigma - u \times w^2 v) \end{cases}$$

$$\sigma = \sigma_e - u \times w^2 v$$

Аналогічно отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + w^2 v; \\ \dot{v} = \frac{\gamma^2}{\alpha} (-(\sigma_e - u \times w^2 v)u + w^2 v). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + w^2 v; \\ \dot{v} = \frac{\gamma^2}{\alpha} (-\sigma_e u + w^2 v(u^2 + \mathbf{1})). \end{cases} \quad (3.16)$$

Систему (3.16) зручно проаналізувати методом фазової площини $u - v$,

де $u \rightarrow x$;

$v \rightarrow y$.

Перепишемо систему (3.16) через змінні $x-y$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + w^2 y; \\ \dot{y} = \frac{\gamma^2}{\alpha} (-\sigma_e x + w^2 y(x^2 + \mathbf{1})). \end{cases} \quad (3.17)$$

Координати особливих точок визначимо, коли дорівнюємо похідній за часом в (3.17) нулю, тобто:

$$\begin{cases} 0 = -x + w^2 y; \\ 0 = \frac{\gamma^2}{\alpha} (-\sigma_e x + w^2 y(x^2 + \mathbf{1})). \end{cases}$$

Тоді:

$$\begin{cases} 0 = -x + w^2 y; \\ 0 = -\sigma_e x + w^2 y(x^2 + 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = w^2 y; \\ 0 = -\sigma_e x + w^2 y(x^2 + 1). \end{cases}$$

$$x = w^2 y; \rightarrow y = \frac{x}{w^2}.$$

$$0 = -\sigma_e x + w^2 \times \frac{x}{w^2} (x^2 + 1);$$

$$0 = -\sigma_e x + x(x^2 + 1);$$

$$0 = x[-\sigma_e + x^2 + 1];$$

1) Якщо $x_0 = 0$, тоді $y_0 = \frac{0}{w^2} = 0$;

т.А (0;0).

2) Якщо $-\sigma_e + x^2 + 1 = 0$;

$$x^2_{1,2} = \sigma_e - 1;$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\sigma_e - 1}, \text{ т.В } (\sqrt{\sigma_e - 1}; \frac{\sqrt{\sigma_e - 1}}{w^2});$$

$$y_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{\sigma_e - 1}}{w^2}, \text{ т.С } (-\sqrt{\sigma_e - 1}; \frac{-\sqrt{\sigma_e - 1}}{w^2}).$$

Проаналізувавши систему (3.17) та підставивши інтервали для $x(-2;2)$, $y(-3;3)$ та константи зі значеннями $w^2 = 1, \gamma^2 = 1, \beta = 1, \alpha = 1, \sigma_e = 2$ отримаємо фазовий портрет, який показаний на рисунку 3.5, на якому зображено “центр” з координатами (0;0), що характеризує наявність коливального режиму та дві нестійкі сідлові точки.

BETA

Phase Plane

Equation 1

Equation 2

Interval on x

Interval on y

WolframAlpha i +

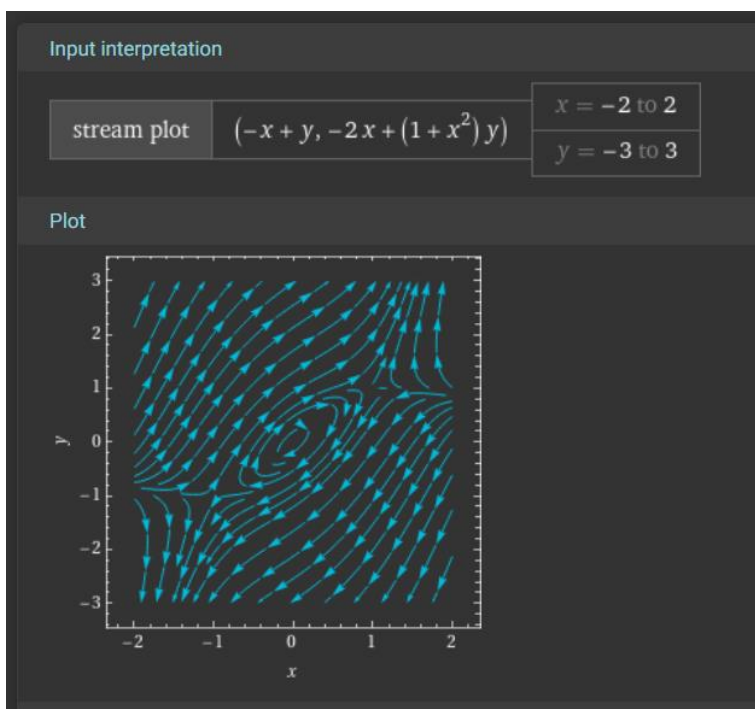


Рисунок 3.5 – Фазовий портрет для системи (3.17) з параметрами $x(-2;2)$, $y(-3;3)$

Якщо для системи (3.17) підставити інтервали для $x(-2;2)$, $y(-3;3)$ та константи зі значеннями $w^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$, $\sigma_e = 0.5$ отримаємо фазовий портрет, який показаний на рисунок 3.6, на якому зображено “сідло” з координатою $(0;0)$.

BETA

Phase Plane

Equation 1

Equation 2

Interval on x

Interval on y

Submit

WolframAlpha i +

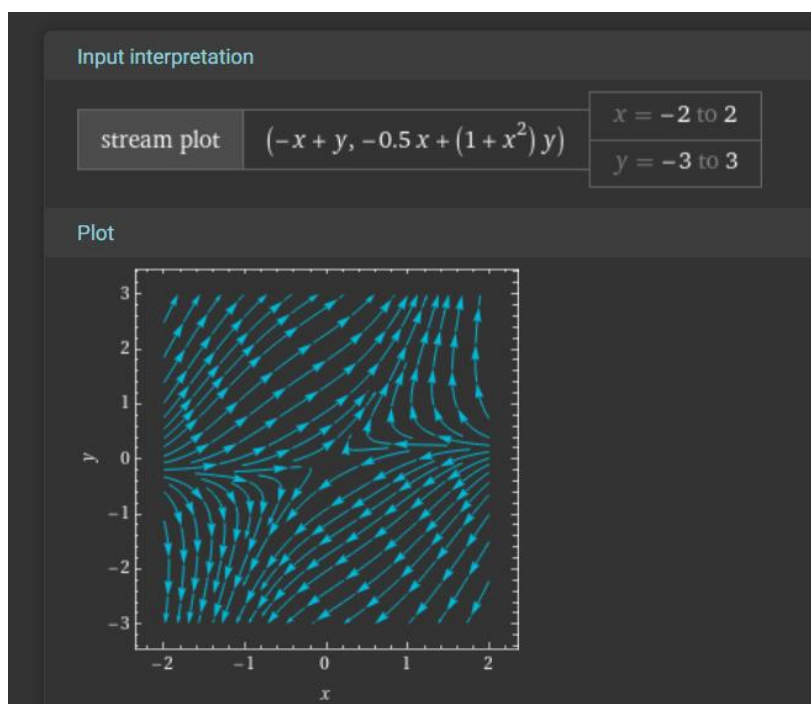


Рисунок 3.6 – Фазовий портрет для системи (3.17) з параметрами $x(-2;2)$, $y(-3;3)$

ВИСНОВКИ

Детальний аналіз літературних джерел вказує на те, що наноструктурні матеріали відзначаються великою стійкістю до руйнування під великими навантаженнями, що робить їх практично застосовними і сприяє активному дослідженню в цій області. Чимало експериментів присвячено вивченню та розробці технологій отримання дрібнозернистих та наноструктурних матеріалів. Методи, такі як електроосадження, розмелювання, інтенсивна пластична деформація (ІПД) і компактування, забезпечують можливість синтезувати метали з розмірами зерен приблизно 100 нм, а в деяких випадках – до 5 нм.

В роботі були досліджені процеси фрагментації матеріалів в рамках феноменологічного підходу з використанням самоузгодженої системи рівнянь самоорганізації матеріалів під дією інтенсивної пластичної деформації. За основу було взято три степені свободи: параметр порядку, що зводиться до флуктуації фрагментованих складових; спряжене поле, яке задається швидкістю руху частинок; та керуючий параметр, що відповідає зсувній компоненті внутрішніх напружень. Для числового розв'язку рівнянь було використано метод фазової площини в рамках наближення сталого градієнту флуктуацій швидкості.

В результаті були проаналізовані стаціонарні стани системи та умови переходу до стану руйнування, побудовані фазові портрети, що демонструють зміни кінетики процесу фрагментації зі зміною зовнішньої зсувної компоненти напружень. Для аналізу кінетики переходів використано метод фазової площини, числовий розрахунок проводився з використанням онлайн-сервісу WolframAlpha

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Хоменко О. В. Інтенсивна пластична деформація: методи та математичні моделі формування наноматеріалів (2020) <https://physics.lnu.edu.ua/jps/2020/2/pdf/2001-20.pdf>
- [2] Балакін В.Ф. Байримов А.О. ВДОСКОНАЛЕННЯ КОНСТРУКЦІЇ ПРИСТРОЮ ДЛЯ РІВНОКАНАЛЬНОГО КУТОВОГО ПРЕСУВАННЯ ДЛЯ ОБРОБКИ ЗАГОТІВОК МАЛИХ ПЕРЕРІЗІВ (2018) https://nmetau.edu.ua/file/ktmp_3737.pdf
- [3] ВПЛИВ ГВИНТОВОЇ ЕКСТРУЗІЇ ТА НАСТУПНОГО ВАЛЬЦЮВАННЯ НА ТЕКСТУРУ ТА МІКРОСТРУКТУРУ СТАЛІ, Кондря Маріанна, 2015, <http://surl.li/fferr>
- [4] Наноматеріали і нанотехнології: Навчальний посібник / Азаренков М. О., Неклюдов І. М., Береснєв В. М., Воєводін В. М., Погребняк О. Д., Ковтун Г. П., Соболев О. В., Удовицький В. Г., Литовченко С. В., Турбін П. В., Чишкала В. О. – 2014. – 323 с https://karazinbook.com/sites/default/files/books/azarenkov_1.pdf
- [5] Y. Estrin, A. Vinogradov, Acta Mater. 61, 782 (2013); <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2012.10.038>
- [4] Наноматеріали і нанотехнології: Навчальний посібник / Азаренков М. О., Неклюдов І. М., Береснєв В. М., Воєводін В. М., Погребняк О. Д., Ковтун Г. П., Соболев О. В., Удовицький В. Г., Литовченко С. В., Турбін П. В., Чишкала В. О. – 2014. – 323 с https://karazinbook.com/sites/default/files/books/azarenkov_1.pdf
- [5] Y. Estrin, A. Vinogradov, Acta Mater. 61, 782 (2013); <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2012.10.038>
- [6] Kaveh Edalati, Etsuo Akiba, Walter J. Botta, Yuri Estrin, Ricardo Floriano, Daniel Fruchart, Thierry Grosdidier, Zenji Horita, Jacques Huot, Hai-Wen Li, Huai-Jun Lin, Ádám Révész, Michael J. Zehetbauer. Journal of Materials Science & Technology Volume 146, 20 May 2023, Pages 221-239 <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1005030222009033?via%3Di> <https://doi.org/10.1016/j.jmst.2023.05.001> [hub](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1005030222009033?via%3Di)

- [7] O. V. Prokof'eva, Y. Y. Beygelzimer, R. Y. Kulagin, Y. Z. Estrin, V. N. Varyukhin, Russ. Metall. 2017, 226 (2017);
<https://link.springer.com/article/10.1134/S0036029517030090>
- [8] A. Vinogradov, Y. Estrin, Prog. Mater. Sci. 95, 172 (2018);
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0079642518300148?via%3Di>
[hub](#)
- [9] A. D. Pogrebnyak et al., J. Alloys Compd. 679, 155 (2016);
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0925838816310180?via%3Di>
[hub](#)
- [10] A. D. Pogrebnyak et al., J. Alloys Compd. 679, 155 (2016);
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0925838816310180?via%3Di>
[hub](#)
- [11] Quentin Bouton, G. Dutier, Nathalie Fabre, Eric Charron, Charles Garcion, Naceur Gaaloul, Lecoffre Julien. Quantum description of atomic diffraction by material nanostructures (Dec. 2023);
 URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.12818>
- [12] Zbigniew Kaszukur, Ilia Smirnov. Nanopowder Diffraction (Dec. 2022);
 URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.06926>
- [13] Fredrik Ohlsson, Johannes G. Borgqvist, Ruth E. Baker. On the correspondence between symmetries of two-dimensional autonomous dynamical systems and their phase plane realizations. *Physica D: Nonlinear Phenomena Volume 461* (2022);
 URL: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134113>
- [14] Sabrina H. Streipert, Gail S.K. Wolkowicz. An augmented phase plane approach for discrete planar maps: Introducing next-iterate operators (Oct. 2022).
 URL: <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2022.108924>
- [15] Edward Crane, Stanislav Volkov. Gaussian consensus processes and their Lyapunov exponents (2024);
 URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.04951>

[16] Mohamad H. Kazma, Ahmad F. Taha. Observability for Nonlinear Systems: Connecting Variational Dynamics, Lyapunov Exponents, and Empirical Gramians. (Feb. 2024);

URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.14711>

[17] Alexander Deich, Nicolás Yunes, Charles Gammie. Lyapunov Exponents to Test General Relativity (Feb. 2024);

URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.07232>

[18] Harish Kumar, Kiran Devade, Durgeshwar Pratap Singh, Jitendra Mohan Giri, Manish Kumar, Vanya Arun. Severe plastic deformation: A state of art. *Materials Today: Proceedings* (2023);

URL: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2023.02.194>

[19] Feng Lin, Valery I. Levitas, Krishan K. Pandey, Sorb Yesudhas, Changyong Park. In-situ study of rules of nanostructure evolution, severe plastic deformations, and friction under high pressure (May 2023); URL: <https://doi.org/10.1080/21663831.2023.2231983>

[20] Edalati K, Bachmaier A, Beloshenko VA, et al. Nanomaterials by severe plastic deformation: review of historical developments and recent advances. *Mater. Res. Lett.* 2022; 10(4):163-256.

[21] Wang, C.Y. The Phase Plane. In: *Essential Perturbation Methods. Synthesis Lectures on Engineering, Science, and Technology.* Springer, Cham. (2023); URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-26545-7_6

[22] Zhigang, X., Kuangdi, X. Plastic Deformation. In: Xu, K. (eds) *The ECPH Encyclopedia of Mining and Metallurgy.* Springer, Singapore. (2023); URL: https://doi.org/10.1007/978-981-19-0740-1_928-1