УДК 681.142

ФОРМИРОВАНИЕ КВАЗИРАВНОВЕСНЫХ КОДОВ НА ОСНОВЕ ДВОИЧНЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

И.А. Кулик*, канд. техн. наук, доцент;*
Е.М. Скордина*, аспирант;*
С.В. Костель*, аспирант,*
Сумский государственный университет, г. Сумы

В статье рассматривается новый метод получения квазиравновесных кодов на основе двоичных биномиальных чисел. Проводится исследование структуры квазиравновесных комбинаций, на базе результатов которого синтезируются алгоритмы прямого и обратного преобразований двоичных биномиальных чисел в квазиравновесный код и наоборот.
Ключевые слова: *Квазиравновесный код, биномиальное число, кодовое преобразование, алгоритм.*

У статті розглянуто новий метод формування квазірівноважних кодів на основі двійкових біноміальних чисел. Проведено дослідження структури квазірівноважних комбінацій, на базі результатів якого синтезуються алгоритми прямого та зворотного перетворень двійкових біноміальних чисел у квазірівноважний код і навпаки.
Ключові слова: *Квазірівноважний код, біноміальне число, кодове перетворювання, алгоритм.*

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одним из подходов к биномиальному кодированию является построение на упорядоченном множестве биномиальных чисел различных кодов, имеющих биномиальную структуру, т.е. структуру, в основе которой лежат биномиальные коэффициенты [1, 2]. Задаваясь правилами комбинирования кодовых признаков (необязательно элементов алфавита) на структуре множества биномиальных чисел, можно получить множество различных кодов.

Среди первых результатов кодирования с использованием двоичных биномиальных чисел является получение равновесных кодов, которые находят широкое применение в системах комбинаторной оптимизации, передачи и шифрования данных [2, 3]. Равновесные кодовые комбинации с параметрами n и k представляют собой сочетания k единиц из n двоичных разрядов. Сложности их формирования заключаются в том, что, к сожалению, отсутствуют простые, регулярные способы получения равновесных кодов с заданными значениями n и k. Применение же двоичных биномиальных чисел в качестве основы для построения равновесных кодовых последовательностей позволяет существенно упростить их генерирование не только в систематическом (лексикографическом) порядке, но и в случайном.

Родственными равновесным кодам являются квазиравновесные, которые допускают несколько значений числа k единиц в n-разрядных комбинациях. Квазиравновесные коды представляют особый интерес не только как отдельный тип комбинаторных конфигураций – сочетаний с переменным числом k единиц, но и как коды, во-первых, обладающие существенно большей мощностью по сравнению с равновесными, а значит, являющиеся более эффективными для передачи с точки зрения информационной избыточности, а во-вторых, как коды, способные адаптироваться к уровню требуемой помехозащищенности за счет изменения количества параметров k и их значений.

Но формирование квазиравновесных комбинаций испытывает ту же трудность, что и формирование равновесных – отсутствие регулярных способов их генерирования, что в полной мере негативно сказывается для кодов большой мощности [4]. И здесь эффективное решение указанной проблемы возможно на пути использования двоичных биномиальных чисел, поскольку квазиравновесные кодовые комбинации имеют также биномиальную структуру.

Таким образом, целью данной работы является получение простоты аппаратно-программной реализации и высокой скорости формирования квазиравновесных комбинаций. Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

– выделить в структуре квазиравновесного кода двоичные биномиальные числа;

– разработать метод и алгоритм формирования квазиравновесных комбинаций на основе биномиальных чисел, использующий числовую функцию двоичной биномиальной системы счисления.

1 ДВОИЧНЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Двоичные биномиальные числа $X_j = \left(x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r\right)$ с параметрами n и k генерируются двоичной биномиальной системой счисления, которая обладает числовой функцией вида

$$F_j = x_1 C_{n-1}^{k-q_1} + \ldots + x_i C_{n-i}^{k-q_i} + \ldots + x_{r-1} C_{n-r+1}^{k-q_{r-1}} + x_r C_{n-r}^{k-q_r} = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{n-i}^{k-q_i} \qquad (1)$$

и системами ограничений для образования множества X биномиальных чисел X_j, $X_j \in X$, $j = \overline{0, N-1}$:

$$\begin{cases} k \le r \le n-1 \\ q = k \\ x_r = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} n-k = r-q \\ 0 \le q \le k-1 \\ x_r = 0 \end{cases}, \qquad (2)$$

где n и k – целочисленные параметры двоичной биномиальной системы счисления;

r – количество разрядов (длина) биномиального числа, $r < n$;

x_i – биномиальная двоичная цифра – 0 или 1;

q – число единиц в биномиальном числе;

q_i – сумма единичных значений x_i, начиная с первого разряда числа до $(i-1)$-го включительно:

$$q_i = \sum_{t=1}^{i-1} x_t , \qquad (3)$$

где $q_1 = 0$, $q_i \le k$;

N – количество двоичных биномиальных чисел X_j или мощность множества X.

Согласно системам ограничений (2) числа $X_j = \left(x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r\right)$ имеют неравномерную длину $\min\left(k, n-k\right) \le r \le n-1$. Если биномиальные числа

$X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1)$ удовлетворяет первой системе ограничений (2) и, следовательно, заканчиваются разрядом $x_r = 1$, то их относят к первому классу биномиальных чисел. Если $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0)$ удовлетворяют второй системе ограничений (2) и вследствие этого заканчиваются разрядом $x_r = 0$, то такие числа относятся ко второму классу биномиальных чисел. При этом первый и второй классы представляют собой непересекающиеся подмножества множества X биномиальных чисел [1].

В качестве весового коэффициента i-го разряда двоичного биномиального числа в числовой функции (1) выступает биномиальный коэффициент $C_{n-i}^{k-q_i}$, который зависит как от позиции $i = \overline{1,r}$ рассматриваемого разряда, так и от суммы q_i предшествующих этому разряду двоичных значений цифр x_i. Таким образом, структуру двоичных биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$ определяет число сочетаний вида $C_{n-i}^{k-q_i}$.

Поскольку количество N двоичных биномиальных чисел X_j с параметрами n и k составляет $N = C_n^k$, то при рассмотрении известной формулы сложения для чисел сочетаний

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \tag{4}$$

можно предположить, что структура биномиальных чисел лежит в основе кодовых комбинаций длины $(n-1)$ разрядов, содержащих k и $(k-1)$ двоичных единиц, т.е. квазиравновесных комбинаций с параметрами n, k и $(k-1)$. Следовательно, на основе двоичных биномиальных чисел X_j возможно взаимно-однозначное отображение

$$\varphi_{кр} : X[n,k] \to Y[n-1,k,k-1]$$

множества X биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$ с параметрами n и k на множество $Y[n-1,k,k-1]$ квазиравновесных комбинаций Y_j длины $(n-1)$ разрядов, содержащих k и $(k-1)$ двоичных единиц. Высказанное предположение обосновывается нижеприведенной теоремой.

Теорема 1. При добавлении со стороны младших разрядов к двоичным неравномерным биномиальным числам $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1)$ первого класса $(n-r-1)$ двоичных нулей, а к числам $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0)$ второго класса $(n-r-1)$ двоичных единиц, формируется квазиравновесный код $Y[n-1,k,k-1]$ длины $(n-1)$ разрядов с количеством двоичных единиц k и $(k-1)$, где n и k – параметры биномиальных чисел X_j, r – число разрядов биномиальных чисел X_j, $\min(k, n-k) \le r \le n-1$.

Доказательство. Как известно, длина двоичных неравномерных биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$ находится в диапазоне $k \le r \le n-1$ для биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1)$ первого класса и $n-k \le r \le n-1$ для биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0)$ второго класса.

Также из систем ограничений (2) следует, что для биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1)$ первого класса количество единиц постоянно и равно k, а для биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0)$ второго класса количество нулей постоянно и равно $l = n-k$. Таким образом, если числа $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1)$ первого класса дополнить нулями до длины $(n-1)$, то, очевидно, количество единиц в них останется постоянным и равным k. Тогда как, дополняя биномиальные числа $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0)$ второго класса единицами до длины $(n-1)$, их количество будет $q = n-1-(n-k) = k-1$.

Следовательно, при дополнении биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1)$ первого класса нулями, а биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0)$ второго класса единицами, до длины $(n-1)$ получаем квазиравновесный код $Y[n-1, k, k-1]$ длины $(n-1)$ разрядов с количеством двоичных единиц k и $(k-1)$.

Теорема доказана.

Из биективности отображения $\varphi_{кр}$ можно сделать вывод, что количество N исходных двоичных биномиальных чисел будет равно мощности $N_{кр}$ квазиравновесного кода.

Теорема 2. Для мощности $N_{кр}$ множества $Y[n-1, k, k-1]$ квазиравновесных комбинаций справедливо следующее равенство:

$$N_{кр} = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно биективности кодового отображения $\varphi_{кр} : X[n,k] \to Y[n-1, k, k-1]$ имеем $N_{кр} = N = C_n^k$. Следовательно, на основании свойства сложения чисел сочетаний

$$N_{кр} = C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}.$$

Теорема доказана.

Для случая, когда исходные биномиальные числа X_j имеют параметры $n = 6$ и $k = 3$, приведем в лексикографическом порядке все квазиравновесные комбинации $Y_j \in Y[5,3,2]$, используя обоснованный в теореме 1 метод формирования квазиравновесного кода (таблица 1).

Количество $N_{кр}$ квазиравновесных комбинаций $Y_j \in Y[5,3,2]$ определяется согласно выражению (5):

$$N_{кр} = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_5^2 + C_5^3 = 10 + 10 = 20 .$$

На основании содержимого разрядов x_r биномиальных чисел $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$ принимается решение о двоичном значении $(5 - r)$ добавляемых кодовых элементов для формирования квазиравновесных комбинаций $Y_j = (y_1 y_2 y_3 y_4 y_5)$, где $3 \le r \le 5$ и $j = \overline{0,19}$. В таблице 1 разряды x_r располагаются слева от дополнительных кодовых элементов, выделенных темным фоном. Условно проведенная граница между светлым и темным областями таблицы будет разделять квазиравновесные комбинации $Y_j = (y_1 y_2 y_3 y_4 y_5)$ и соответствующие им биномиальные числа $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$. Кроме того, на рисунке 1 показана древовидная структура квазиравновесного кода $Y[5,3,2]$, которая повторяет структуру множества биномиальных чисел $X[6,3]$.

Таблица 1 – Квазиравновесный код с параметрами $n = 5$, $k = 3$ и $k = 2$

F_j	***Квазиравновесные комбинации*** $Y_j \in Y[5,3,2]$					F_j	***Квазиравновесные комбинации*** $Y_j \in Y[5,3,2]$				
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	***0***	***0***	***0***	*1*	*1*	***10***	***1***	***0***	***0***	***0***	*1*
1	***0***	***0***	***1***	***0***	*1*	***11***	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***
2	***0***	***0***	***1***	***1***	***0***	***12***	***1***	***0***	***0***	***1***	***1***
3	***0***	***0***	***1***	***1***	***1***	***13***	***1***	***0***	***1***	***0***	***0***
4	***0***	***1***	***0***	***0***	*1*	***14***	***1***	***0***	***1***	***0***	***1***
5	***0***	***1***	***0***	***1***	***0***	***15***	***1***	***0***	***1***	***1***	*0*
6	***0***	***1***	***0***	***1***	***1***	***16***	***1***	***1***	***0***	***0***	***0***
7	***0***	***1***	***1***	***0***	***0***	***17***	***1***	***1***	***0***	***0***	***1***
8	***0***	***1***	***1***	***0***	***1***	***18***	***1***	***1***	***0***	***1***	*0*
9	***0***	***1***	***1***	***1***	*0*	***19***	***1***	***1***	***1***	*0*	*0*

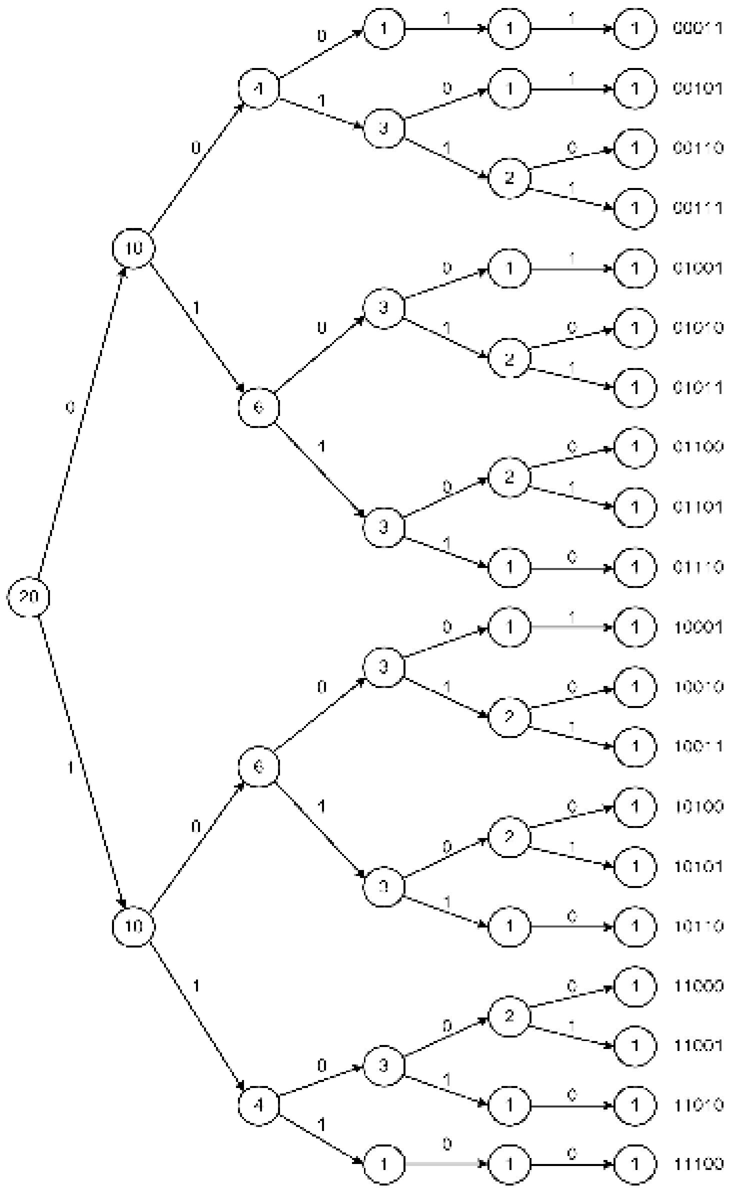

Рисунок 1 – Квазиравновесный код $Y\left[5,3,2\right]$ на структуре множества биномиальных чисел при $n = 6$, $k = 3$, $k = 2$

2 АЛГОРИТМ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Отображение множества биномиальных чисел $X[n,k]$ на множество квазиравновесных комбинаций $Y\left[n-1,k,k-1\right]$, а также обратное преобразование можно реализовать с помощью алгоритмов, использующих весьма простые операции поразрядного сравнения, подсчета и конкатенации.

Общий алгоритм, реализующий прямое отображение $\varphi_{кр}$ для исходных неравномерных биномиальных чисел $X_j = \left(x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r\right)$ с параметрами n и k, выглядит следующим образом:

1. Определение количества r разрядов биномиального числа $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$.

2. Если $r = n - 1$, то биномиальное число $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$ совпадает с соответствующей квазиравновесной комбинацией $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-1})$. В противном случае переходим к шагу 3.

3. Определение значения последнего разряда x_r биномиального числа $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$.

4. Если $x_r = 1$, то число $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1)$ относится к первому классу биномиальных чисел и к нему справа от разряда $x_r = 1$ добавляются $(n - r)$ двоичных нулей для получения квазиравновесной комбинации вида $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{r-1} 100 \ldots 0)$. В противном случае переходим к шагу 5.

5. К числу $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0)$, которое относится ко второму классу биномиальных чисел, справа от разряда $x_r = 0$ добавляем $(n - r)$ двоичных единиц для получения квазиравновесной комбинации вида $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{r-1} 011 \ldots 1)$.

В результате работы алгоритма прямого преобразования получаем искомые квазиравновесные комбинации $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-1})$ длины $(n-1)$ с количеством k или $(k-1)$ единиц, соответствующие исходным неравномерным биномиальным числам $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$. При этом должны выполняться равенства $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_{r-1} = y_{r-1}$.

Обратное отображение

$$\varphi_{кр}^{-1} : Y[n-1, k, k-1] \to X[n, k]$$

квазиравновесных комбинаций $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-1})$ с параметрами $(n-1)$, k и $(k-1)$ на соответствующие биномиальные числа $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$ выполняется с помощью следующего общего алгоритма обратного перехода:

1. Определение значения последнего разряда y_{n-1} квазиравновесной комбинации $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-1})$.

2. Подсчет количества двоичных единиц q и нулей l в исходной квазиравновесной комбинации $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-1})$.

3. Если значение разряда $y_{n-1} = 1$, то переходим к шагу 4. В противном случае выполняется переход к шагу 6.

4. Если количество единиц $q = k$ в комбинации $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-2} 1)$, то квазиравновесная комбинация совпадает с соответствующим биномиальным числом $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1)$. В противном случае переходим к следующему шагу.

5. В исходной комбинации $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{r-1} 011 \ldots 1)$ все последние единичные разряды отбрасываются до появления первого нуля $y_r = 0$, и в результате получается биномиальное число вида $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0)$.

6. Если количество нулей $l = n - k$ в комбинации $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-2} 0)$, то квазиравновесная комбинация совпадает с соответствующим биномиальным числом $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 0)$. В противном случае переходим к следующему шагу.

7. В исходной комбинации $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{r-1} 100 \ldots 0)$ все последние нулевые разряды отбрасываются до появления первой единицы $y_r = 1$, и в результате получается биномиальное число вида $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{r-1} 1)$.

В результате работы алгоритма обратного преобразования получаем искомые неравномерные биномиальные числа $X_j = (x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r)$ длины r с параметрами n и k, соответствующие исходным квазиравновесным комбинациям $Y_j = (y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_{n-1})$. При этом должны выполняться равенства $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ..., $y_{r-1} = x_{r-1}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установленный в данной работе факт, что квазиравновесные комбинации длины $(n-1)$ разрядов, содержащие k и $(k-1)$ двоичных единиц, имеют ту же структуру, что и двоичные биномиальные числа с параметрами n и k, позволил синтезировать алгоритм прямого преобразования биномиальных чисел в квазиравновесный код, а также алгоритм обратного преобразования. Полученные алгоритмы отличаются следующими положительными свойствами:

1) использование простых операций как, например, поразрядного сравнения, подсчета единиц и конкатенации кодовых частей преобразуемых комбинаций;

2) ограниченное количество самих проводимых операций в процессе преобразований, которое изменяется только лишь полиномиально с увеличением длины n комбинаций.

Данные отличительные особенности разработанных алгоритмов приводят к сравнительно небольшому объему аппаратно-программных затрат при их практической реализации, а также обеспечивают высокую скорость их работы, что соответствует поставленной в работе цели научных исследований.

Перспектива дальнейшей научной работы в данном направлении заключается в решении задач перечисления и генерирования квазиравновесных комбинаций, используя полученные в работе алгоритмы как составные части более общего процесса преобразований с использованием биномиальных чисел.

SUMMARY

FORMATION OF QUASI-EQUILIBRIUM CODES BASED ON BINARY BINOMIAL NUMBERS

I.A. Kulyk, E.M. Skordina, S.V. Kostel
Sumy State University, Sumy

The method of forming quasi-equilibrium codes on basis of binary binomial numbers is considered in the paper. Research of quasi-equilibrium combinations *structure is under review. The results of such research underlie development of algorithms of code transformations between binary binomial numbers and quasi-equilibrium combinations.*

Key words: *Quasi-equilibrium code, binomial number, code conversion, algorithm.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенко А.А. Биномиальный счет. Теория и практика: Монография. – Сумы: ИТД "Университетская книга", 2004. – 170 с.
2. Борисенко А.А. Биномиальный счет и счетчики: Монография. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2008. – 152 с.
3. Рейнгольд Э., Нивергельд Ю. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. – М.: Мир, 1980. – 476 с.
4. Цымбал В.П. Теория информации и кодирование. – К.: Вища шк., 1992. – 263 с.

Поступила в редакцию 22 апреля 2010 г.