

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет

# **ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

Навчальний посібник

За загальною редакцією П. В. Леонтєва

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми  
Сумський державний університет  
2024

УДК 681.511.2(075.8)  
Т 33

Авторський колектив:

*П. В. Леонтъев*, кандидат технічних наук;  
*С. В. Соколов*, кандидат фізико-математичних наук, доцент;  
*Г. М. Худолей*, кандидат технічних наук;  
*В. О. Журба*, кандидат фізико-математичних наук, доцент;  
*А. В. Павлов*, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензенти:

*В. В. Москаленко*, кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук Сумського державного університету;  
*І. В. Шелехов*, кандидат технічних наук, доцент кафедри кібернетики та інформатики Сумського національного аграрного університету

*Рекомендовано до видання  
вченою радою Сумського державного університету  
як навчальний посібник  
(протокол № 3 від 10 жовтня 2024 року)*

**Теорія** автоматичного керування : навчальний посібник /  
Т 33 П. В. Леонтъев та ін. ; за заг. ред. П. В. Леонтъєва. – Суми :  
Сумський державний університет, 2024. – 296 с.  
ISBN 978-966-657-987-7

Навчальний посібник спрямований на формування базових знань з аналізу автоматизованих систем керування.

Видання призначене для здобувачів закладів вищої освіти й фахівців у галузі автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

**УДК 681.511.2(075.8)**

ISBN 978-966-657-987-7 © Сумський державний університет, 2024

## ЗМІСТ

С.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ .....	8
ВСТУП .....	10
Тема 1. Загальні відомості та класифікація систем автоматичного керування .....	11
1.1. Основні поняття та терміни .....	11
1.2. Основні елементи системи автоматичного керування .....	13
1.3. Поняття функціональної та структурної схем .....	16
Тема 2. Принципи керування та класифікація систем автоматичного керування .....	19
2.1. Фундаментальні принципи керування в техніці .....	19
2.1.1. Принцип прямого розімкненого керування .....	20
2.1.2. Принцип компенсації (керування за збуренням) .....	20
2.1.3. Принцип зворотного зв'язку (керування за відхиленням) .....	23
2.1.4. Комбінований принцип керування .....	25
2.2. Класифікація систем автоматичного керування .....	25
2.3. Стійкість, якість, надійність .....	29
Тема 3. Поняття моделі та моделювання .....	31
3.1. Основні види математичних моделей .....	31
3.1.1. Фізичні та математичні моделі .....	31
3.1.2. Аналітичні та експериментальні методи побудови математичних моделей .....	33
3.1.3. Математичні моделі статички й динаміки .....	35
3.1.4. Стаціонарні й нестаціонарні математичні моделі .....	35
3.2. Постановка задач аналізу та синтезу. Методика формалізованого опису елементів і систем .....	36
3.3. Лінійні й нелінійні математичні моделі. Лінеаризація .....	37
3.4. Типові сигнали .....	40
Тема 4. Диференціальні рівняння та передатна функція .....	44
4.1. Лінійні диференціальні рівняння автоматичних систем регулювання .....	44

4.1.1. Операторна форма .....	45
4.1.2. Принцип суперпозиції .....	48
4.2. Поняття передатної функції .....	48
4.2.1. Приклад одержання передатної функції .....	50
4.2.2. Зв'язок передатної функції з перетвореннями Лапласа .....	51
4.2.3. Нулі та полюси передатної функції .....	52
Тема 5. Часові характеристики систем автоматичного керування .....	54
5.1. Часові характеристики: перехідна та імпульсна перехідна характеристики .....	54
5.2. Класичний метод розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами .....	56
5.3. Застосування перетворення Лапласа в теорії автоматичного керування .....	57
5.4. Застосування перетворення Лапласа для знаходження часових характеристик .....	60
Тема 6. Частотні характеристики систем автоматичного керування і їхніх елементів .....	62
6.1. Поняття частотної характеристики .....	62
6.2. Зв'язок частотних характеристик із передатними функціями .....	65
6.3. Комплексний передатний коефіцієнт підсилення. Амплітудно-фазова частотна характеристика системи.....	66
6.4. Логарифмічна амплітудно-фазова частотна характеристика .....	68
Тема 7. Типові динамічні ланки та їхні характеристики .....	71
7.1. Поняття типової динамічної ланки .....	71
7.2. Ідеальна підсилювальна ланка .....	76
7.3. Ідеальна інтегрувальна ланка .....	78
7.4. Аперіодична ланка першого порядку .....	80
7.5. Аперіодична, коливальна та консервативна ланки другого порядку .....	83
7.5.1. Аперіодична ланка другого порядку .....	84
7.5.2. Коливальна ланка .....	85
7.5.3. Консервативна ланка .....	87

7.6. Ідеальна ланка, що диференціює .....	88
7.7. Реальна ланка, що диференціює .....	90
7.8. Ідеальна ланка першого порядку, що форсує .....	92
7.9. Трансцендентні та ірраціональні ланки. Ланка чистого запізнювання .....	94
Тема 8. Структурні схеми систем керування та методи їхніх перетворень .....	98
8.1. Поняття структурної схеми та її складові .....	98
8.2. Правила перетворення структурних схем .....	100
8.2.1. Послідовне з'єднання ланок .....	100
8.2.2. Паралельне з'єднання ланок .....	101
8.2.3. Зустрічно-паралельне з'єднання ланок .....	102
8.2.4. Допоміжні правила перетворення структурних схем .....	104
8.3. Передатна функція типової одноконтурної системи автоматичного керування .....	106
Тема 9. Об'єкти керування та їхні властивості .....	110
9.1. Загальні властивості об'єктів регулювання .....	111
9.2. Поняття про типові моделі об'єкта .....	118
Тема 10. Закони керування та автоматичні регулятори .....	123
Тема 11. Аналіз систем автоматичного керування .....	135
11.1. Статична точність систем автоматичного керування .....	136
11.2. Динамічна точність систем автоматичного керування .....	140
Тема 12. Непрямі показники якості систем автоматичного керування .....	147
12.1. Частотні показники якості перехідного процесу .....	147
12.2. Кореневі показники якості перехідного процесу .....	152
12.3. Інтегральні оцінки якості систем автоматичного керування .....	157
Тема 13. Стійкість систем автоматичного керування .....	162
13.1. Загальне поняття стійкості .....	162
13.2. Стійкість руху системи за Ляпуновим .....	164
13.2.1. Поняття фазового простору .....	164
13.2.2. Поняття стійкості руху систем .....	165

13.3. Загальна математична умова стійкості лінійних систем .....	168
Тема 14. Критерії стійкості лінійних систем .....	173
14.1. Алгебраїчні критерії стійкості .....	174
14.2. Критерій стійкості Рауса .....	175
14.3. Критерій стійкості Гурвіца .....	176
14.4. Зони стійкості .....	177
Тема 15. Частотні критерії стійкості .....	181
15.1. Принцип аргументу .....	181
15.2. Частотний критерій стійкості Михайлова .....	184
15.3. Частотний критерій стійкості Найквіста .....	186
Тема 16. Запас стійкості та аналіз за логарифмічними характеристиками .....	196
16.1. Аналіз стійкості за логарифмічними характеристиками .....	196
16.2. Поняття й визначення запасу стійкості системи .....	198
16.3. Стійкість систем керування із запізненням .....	200
Тема 17. Практична робота 1. Визначення передатних функцій елементів систем автоматичного керування .....	204
Тема 18. Практична робота 2. Розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь .....	211
18.1. Теореми та властивості перетворення Лапласа .....	211
18.2. Операційний метод розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами .....	213
18.3. Приклад розв'язання диференціального рівняння .....	214
18.3.1. Розв'язання аналітичним методом .....	215
18.3.2. Розв'язання за допомогою операційного числення .....	216
Тема 19. Практична робота 3. Часові характеристики ланок (систем) автоматичного керування .....	219
19.1. Перехідна функція ланки (системи) $h(t)$ .....	219
19.2. Імпульсна перехідна (вагова) функція ланки (системи) $w(t)$ .....	220

19.3. Визначення оригіналу функції за її зображенням (обернене перетворення Лапласа) .....	221
Тема 20. Практична робота 4. Одержання частотних характеристик .....	229
20.1. Перетворення Фур'є .....	229
20.2. Частотні характеристики .....	230
20.3. Приклади побудови амплітудно-частотної характеристики .....	235
Тема 21. Практична робота 5. Перетворення структурних схем і визначення передатних функцій систем автоматичного керування .....	242
Тема 22. Практична робота 6. Побудова логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи .....	249
Тема 23. Практична робота 7. Оцінювання точності систем автоматичного керування .....	256
Тема 24. Практична робота 8. Оцінювання стійкості систем автоматичного керування .....	259
24.1. Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца .....	260
24.2. Частотний критерій стійкості Михайлова .....	262
24.3. Побудова годографа Михайлова .....	263
<b>ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ</b> <b>ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗДОБУВАЧІВ .....</b>	<b>266</b>
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....</b>	<b>295</b>

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

АР	Автоматичний регулятор.
АСР	Автоматична система регулювання.
АЧХ	Амплітудно-частотна характеристика.
АФХ	Амплітудно-фазова характеристика.
АФЧХ	Амплітудно-фазова частотна характеристика.
ВП	Виконавчий пристрій.
Д	Давач.
Д	Диференціальний.
ДЧХ	Дійсна частотна характеристика.
ЕОМ	Електронна обчислювальна машина.
ЕП	Елемент порівняння.
ЕРС	Електрорушійна сила.
І	Інтегральний.
ККД	Коефіцієнт корисної дії.
КП	Корегувальний пристрій.
ЛАЧХ	Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика.
ЛНДР	Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння.
ЛОДР	Лінійне однорідне диференціальне рівняння.
ЛФЧХ	Логарифмічна фазочастотна характеристика.
ЛЧХ	Логарифмічна частотна характеристика.
ММ	Математична модель.
ОК	Об'єкт керування.
П	Пропорційний.
ПД	Пропорційно-диференціальний.
ПІ	Пропорційно-інтегральний.
ПІД	Пропорційно-інтегрально-диференціальний.
ПК	Пристрій керування.
ППБ	Підсилювально-перетворювальний блок.
РО	Регулювальний орган.



САК	Система автоматичного керування.
САР	Система автоматичного регулювання.
СК	Система керування.
ТАК	Теорія автоматичного керування.
ФЧХ	Фазочастотна характеристика.

## ВСТУП

На сучасному етапі розвитку суспільства важливість певних чинників для прогресу набуває беззаперечного статусу. Серед таких чинників можна виділити збільшення продуктивності й ефективності праці, підвищення технічної потужності та продуктивності машин, підвищення вимог до точності та якості, складність і небезпечність технологічних процесів, а також зростання відповідальності за безпеку як людини, так і навколишнього середовища. Усі ці аспекти диктують потребу в подальшому розвитку автоматизації, головною метою якої є часткове або повне виключення людини з безпосередньої участі у виробничих процесах.

Однією з головних складових автоматизації є системи автоматичного керування, а теоретичною базою для їхнього розроблення та дослідження є теорія керування, зокрема теорія автоматичного керування. Ця наука спеціалізується на розробленні та вивченні методів і інструментів створення систем керування.

Цей навчальний посібник є першою частиною курсу «Теорія автоматичного керування». Він спрямований на ознайомлення з основними поняттями лінійної теорії автоматичного керування, методами аналізу стійкості та якості систем керування. Цей матеріал призначено, насамперед, для здобувачів вищої освіти, які навчаються за спеціальністю «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка». Здобуті знання становлять основу і є важливими для майбутньої роботи у сфері проєктування та експлуатації ефективних і якісних систем керування.

Навчальний посібник складається з 16 тем теоретичного матеріалу для проведення лекційних занять, 8 тем для проведення практичних занять із прикладами розв'язання типових задач і 8 прикладами завдань для самостійної роботи здобувачів вищої освіти.

# Тема 1

## ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

### 1.1. Основні поняття та терміни

Термін «керування» охоплює надзвичайно широке коло понять, що викликано різною природою об'єктів, наприклад, керування технологічним процесом, підприємством або державою. До того ж під поняттям «керування» йдеться також про командування військами, керування транспортними засобами (судном, літаком, автомобілем), диригування оркестром тощо. З цього погляду теорія автоматичного керування (ТАК) – це частина кібернетики, яка вивчає процеси використання інформації та керування в системах різної фізичної природи.

*Автоматизація виробництва* – один із важливих чинників науково-технічного процесу, унаслідок якої відбувається інтенсифікація процесів виготовлення продукції та зменшення витрат енергетичних і матеріальних ресурсів. Сучасні системи керування мають складну багаторівневу (ієрархічну) структуру, у якій використовують обчислювальні мережі різного рівня на основі ЕОМ і мікропроцесорних засобів. У цьому посібнику розглянуто локальні системи автоматичного регулювання, призначені для підтримання необхідних технологічних режимів, що характеризуються певним набором значень технологічних змінних, – температури, рівня, тиску, концентрації тощо. Розглянуто також питання оптимізації технологічних режимів, а також можливості пристосування (адаптації) систем до змінюваних умов роботи. Для складних технологічних об'єктів розробляють системи керування, які також мають достатньо складну структуру та розвинуті зв'язки між окремими частинами (елементами).

*Автоматика* – технічна наука, яка розробляє принципи побудови автоматичних систем і необхідних для них засобів, методи аналізу та синтезу цих систем.

*Механізація* – це заміна ручної праці машинною під час виконання робочих операцій. Наприклад, використання побутової м'ясорубки – це механізація, оскільки в цьому разі ручну (точніше «зубну») працю з подрібнення м'яса перекладено на механізм (м'ясорубку), проте функції керування процесом закріплено за людиною. Лише людина вирішує, коли почати крутити ручку, коли закінчити, з якою швидкістю, а також здійснює контроль безпеки процесу.

*Автоматизація* – це часткове або повне передання (заміна) функцій керування від людини до будь-якого пристрою (спеціалізованого пристрою або обчислювальної машини).

Сукупність машин, знарядь праці, засобів механізації, за допомогою яких забезпечують робочі операції з погляду теорії керування, є *об'єктом керування* (ОК).

*Засоби керування* – це сукупність пристроїв, що забезпечують операції керування.

Сукупність засобів керування та об'єкта керування утворює *систему керування* (СК).

Системи керування, у яких усі робочі операції та операції керування виконують без участі людини, називають *системами автоматичного керування* (САК). Як приклад можна навести систему автопілота, численні верстати-автомати тощо. Варто зазначити, що практично всі процеси життєдіяльності біологічних істот є, фактично, автоматичними системами: підтримання температури тіла, тиску, складу крові тощо.

Якщо частину операцій керування все ж таки передають людині (точніше сказати, залишають за людиною), це називають *автоматизованою системою*. Таких систем

у техніці величезна кількість – вони відрізняються лише ступенем участі людини в процесах керування – від майже повного до так званого режиму порадики.

*Автоматичні системи регулювання* (АСР) – сукупність об'єкта та пристрою керування (автоматичного регулятора), процес функціонування яких характеризують тим, що відомі задані значення регульованих координат  $x_{zd}(t)$ . Допускають також термін «системи автоматичного регулювання» (САР). Далі буде подано, що в процесі регулювання потрібно виконувати вимогу:  $x(t) \rightarrow x_{zd}(t)$ , де  $x(t)$  – поточне значення регульованої координати.

## **1.2. Основні елементи системи автоматичного керування**

Потреба в керуванні виникає тоді, коли нормальний перебіг процесу (робочих операцій) порушується внаслідок впливу на об'єкт керування різних зовнішніх або внутрішніх збурень. У цьому разі необхідно зазначити, що таке збурення в технічних об'єктах більшою чи меншою мірою наявні завжди.

Для здійснення керування й побудови ефективних систем керування необхідні *знання двох видів*:

– *конкретні знання про об'єкт керування* (наприклад, про машину або технологічний процес), тобто про те, яким законам підпорядковуються процеси, що відбуваються в ньому, або його поведінку;

– *знання принципів і методів керування*, які дають можливість установити, що й (або) як потрібно змінювати в системі, щоб у кінцевому підсумку одержати бажаний результат, тобто зберегти нормальний перебіг процесу.

У теорії автоматичного керування зазвичай вважають, що знання першого роду вже одержані, тобто математичний опис об'єкта керування відомий.

Керування технічним процесом – цілеспрямована діяльність, спрямована на досягнення бажаних результатів (одержання прибутку, мінімальної собівартості продукції, забезпечення її якості) на основі одержання та оброблення інформації про стан об'єкта та умови його роботи. У процесі керування виконують набір операцій, які відповідають таким етапам:

- збирання інформації про стан об'єкта та зовнішнє середовище;
- аналіз та оброблення інформації;
- ухвалення рішень на основі необхідної інформації;
- реалізація керувальних впливів за допомогою технічних засобів.

*Об'єкт керування* (регулювання, автоматизації, керований об'єкт) – технологічний процес, агрегат або комплекс, призначений для здійснення впливу на сировину, матеріали для одержання продукту або напівпродукту. У складних системах керування об'єктом може бути виробництво, підприємство, галузь промисловості. У будь-якому разі для досягнення мети функціонування необхідно сформулювати керувальні впливи, які компенсують небажані відхилення від обраного режиму. Зрозуміло, що об'єкти можуть бути різними, мати різне призначення, виконувати різні функції. Водночас систему керування створюють саме для об'єкта, тому його властивості визначають основні характеристики системи керування – її структуру, функції, показники стійкості та якості. Отже, саме об'єкт визначає призначення системи керування, наприклад, автоматизована система керування підприємством, автоматична система керування випарною установкою, автоматична система регулювання температури тощо (рис. 1.1).

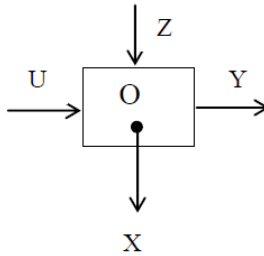


Рисунок 1.1 – Схема об'єкта керування

Для об'єктів керування можна виділити такі змінні об'єкта керування:

– *координати стану*, які визначають стан об'єкта в будь-який момент часу, для АСР – це регульовані координати  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ;

– *вихідні змінні*, які характеризують якість об'єкта керування. Схема об'єкта продукту, продуктивність об'єкта або узагальнені показники, наприклад, коефіцієнт корисної дії (ККД), питомі витрати матеріалів і енергії тощо.  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ ;

– *збурення* – зовнішні та внутрішні чинники, наприклад, змінювання характеристик зовнішнього середовища, параметрів енергоносіїв, якості сировини тощо, вплив яких порушує роботу об'єкта,  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_L\}$ ;

– *керувальний вплив* – цілеспрямовані змінювання матеріальних та енергетичних потоків, що спрямовані на компенсацію збурень  $z$ ,  $U = \{U_1, U_2, \dots, U_m\}$ .

У складних системах керувальні впливи можуть передбачати змінювання структури або навіть кадрові перестановлення.

Вектори  $Y$ ,  $X$ ,  $Z$ ,  $U$  можуть мати довільну кількість складових, а в частинному випадку – це скалярні величини.

*Автоматичний регулятор* – технічний засіб, який реалізує керувальні впливи залежно від стану об'єкта та

зовнішнього середовища  $U_{pez.} = f(x, z, t)$ . Автоматичний регулятор реалізують також програмним способом у мікропроцесорних контролерах або ЕОМ. У складних системах функції керування виконують різні регулятори або спеціальні пристрої.

До складу засобів керування зазвичай входять такі елементи:

– *вимірювальний* (чутливий) *елемент або давач* для фіксації змін вихідної (рідше вхідної, що збурює) змінної та перетворення її в сигнал стандартного типу. Асортимент датчиків, їхні характеристики та принцип дії є предметом вивчення інших дисциплін;

– *пристрій керування* (регулятор, пристрій, що координує), який отримує сигнал від вимірювального елемента та формує за деяким певним законом вихідний сигнал, необхідний для керування об'єктом. Часто пристрій керування одночасно виконує роль підсилювача потужності;

– *виконавчий елемент* (пристрій) дає можливість здійснювати вплив на об'єкт за допомогою зміни керуваної змінної. До таких пристроїв належать різні засувки, вентилі тощо, оснащені відповідними механізмами привода.

Наведений склад засобів керування є характерним практично для будь-яких систем керування. Для прикладу розглянемо як об'єкт керування економіку держави. Тут вимірювальним елементом є органи державної статистики. Верховна Рада України формує закони, тобто є пристроєм керування. І, нарешті, реалізацію ухвалених законів забезпечують виконавчі елементи – органи примусу на місцях: податкова інспекція, поліція, суд і прокуратура.

### **1.3. Поняття функціональної та структурної схем**

Вивчення та аналіз складних систем автоматичного керування істотно полегшується, якщо її попередньо подумки розділити на більш прості (типові) елементи, вияви-



ти фізичні взаємозв'язки між ними й відобразити ці взаємозв'язки схематично в будь-якій умовній формі.

У теорії автоматичного керування здебільшого з цією метою використовують функціональні та алгоритмічні структури (функціональні та структурні схеми). *Функціональні та структурні схеми* складаються з умовних зображень елементів (зазвичай у вигляді прямокутників) і зв'язків між ними, зображуваних у вигляді ліній зі стрілками, що показують напрямок передавання впливів. Кожна лінія відповідає одному сигналу або одному впливу. Біля кожної лінії зазначають фізичну величину, що характеризує цей вплив.

Зазвичай спочатку складають функціональну схему системи автоматичного керування, а потім – структурну схему.

*Функціональна схема* – це структура (схема), що відображає функції (цільові призначення) окремих частин системи автоматичного керування. Як частину функціональної схеми системи розглядають функціональні пристрої. Назви пристроїв указують на виконання певних функцій, наприклад, давач, підсилювач, блок порівняння тощо.

*Структурна схема* – це структура (схема), що являє собою сукупність взаємозв'язаних алгоритмічних ланок (частин алгоритмічної структури системи автоматичного керування відповідно до певного математичного або логічного алгоритму перетворення сигналу) й характеризує алгоритми перетворення інформації в системі. На схемах алгоритмічні ланки зображують прямокутниками, усередині яких записують відповідні оператори перетворення сигналів (математичні вирази). Іноді замість операторів у формульному вигляді наводять графіки залежності вихідної величини від вхідної. Приклади функціональної та структурної схем наведено на рисунках 1.2 та 1.3 відповідно.

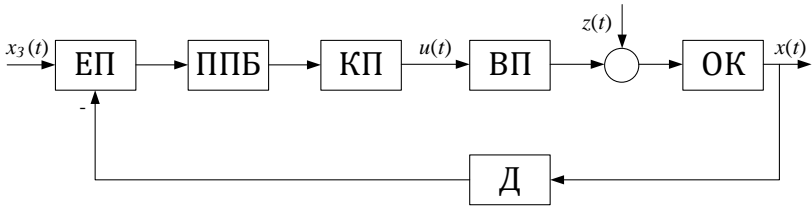


Рисунок 1.2 – Приклад функціональної схеми САК:  
 ЕП – елемент порівняння, КП – корегувальний пристрій;  
 ППБ – підсилювально-перетворювальний блок;  
 ВП – виконавчий пристрій; ОК – об’єкт керування;  
 Д – давач

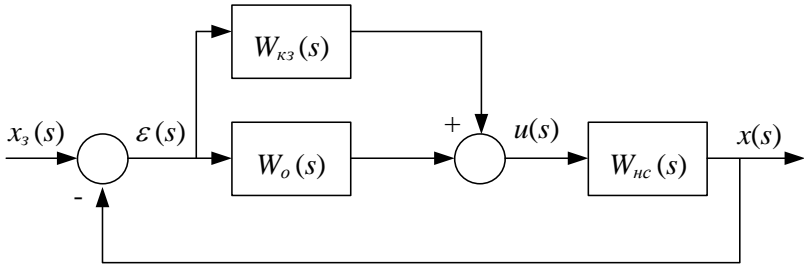


Рисунок 1.3 – Приклад структурної схеми САК

### *Питання для самоперевірки*

1. Які основні поняття теорії автоматичного керування?
2. Які основні елементи системи автоматичного керування?
3. З яких основних впливів складається об’єкт керування?
4. Які основні виходи є в об’єкта керування?

## Тема 2

# ПРИНЦИПИ КЕРУВАННЯ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

### 2.1. Фундаментальні принципи керування в техніці

Знаючи властивості об'єкта керування (математичний опис, математичну модель) та характеристики зовнішніх впливів (збурень), можна спробувати розробити такий алгоритм (закон) керування, який забезпечив би необхідну якість функціонування системи. Проте математична модель об'єкта завжди наближено відображає його справжні властивості, а характеристики впливів, що збурюють, зазвичай задалегідь взагалі невідомі. З цієї причини такий підхід до створення систем керування є непродуктивним.

*Принципи керування*, що використовують у техніці, є однією з ознак класифікації САК, визначених обсягом інформації, що використовує пристрій керування для формування керувальних впливів. Розрізняють *принципи розімкненого керування* (пряме керування й керування за збуренням), *принцип зворотного зв'язку* (керування за відхиленням) і *принцип комбінованого керування*.

*Розімкнена САК* – система, у якій не здійснюють контроль керованої змінної, тобто вхідними впливами її пристрою керування є лише зовнішні (такі, що задаються, та/або такі, що збурюють) впливи.

*Замкнена САК* (зі зворотним зв'язком) – система, у якій вхідними впливами для її пристрою керування є як зовнішні (такі, що задають), так і внутрішні (вихідні змінні або змінні стану) впливи. Керувальний вплив у замкненій системі формується здебільшого у вигляді деякої залежності від величини, знаку та похідних відхилення фактичного значення керованої вихідної змінної від її заданого значення.

### 2.1.1. Принцип прямого розімкненого керування

Функціональна схема прямого розімкненого керування має вигляд, поданий на рисунку 2.1, а алгоритм роботи зображено у вигляді залежності (2.1)

$$u(t) = U[x_3(t)]. \quad (2.1)$$

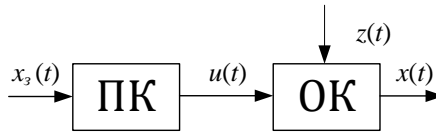


Рисунок 2.1 – Функціональна схема системи прямого розімкненого керування

Оператор  $U$  встановлює функціональний зв'язок між впливом, що є заданим  $x_3(t)$ , і керувальним впливом  $u(t)$ , а сама система в цьому разі здійснює програмне керування (за заданим законом). Близькість значень  $x_3(t)$  і  $x(t)$  забезпечується лише конструкцією та підбиранням закону впливу пристрою керування (ПК).

Системи такого типу працюють із достатньою ефективністю лише за умови, що вплив збурень  $z(t)$  на об'єкт незначний і всі елементи розімкненого ланцюга мають досить стабільні характеристики.

Прикладами таких систем є музична скринька (шарманка), розподільний кулачковий механізм двигуна тощо.

### 2.1.2. Принцип компенсації (керування за збуренням)

У системах керування за збуренням (рис. 2.2) керувальний вплив залежить як від збурювального впливу  $z(t)$ , так і від задавального впливу  $x_3(t)$ , а алгоритм роботи подають у вигляді (2.2)

$$u(t) = U [x_3(t), z(t)]. \quad (2.2)$$

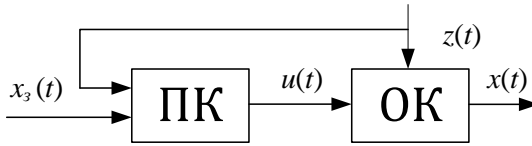


Рисунок 2.2 – Функціональна схема системи керування за збуренням

Зазвичай розімкнені системи керування за збуренням виконують функції стабілізації керованої величини.

*Перевагою розімкнених систем керування за збуренням є їхня швидкодія:* вони компенсують (звідси й назва компенсаційні) вплив збурення ще до того, як воно проявиться на виході об'єкта. Але ці системи застосовують лише тоді, коли на керовану величину впливають одне або два збурення і є можливість вимірювання цих збурень.

Наприклад, порівняно не складно можна вимірювати температуру, витрату води, струм навантаження генератора. Тому якщо ці величини впливають на об'єкт як збурення, то зазвичай намагаються компенсувати їхній вплив за допомогою додаткової системи або ввести в основну систему керування об'єктом сигнал, пов'язаний із таким впливом.

*Класичним прикладом керування за збуренням є схема компаундування генератора постійного струму (рис. 2.3), що забезпечує незмінність вихідної напруги під час коливання струму навантаження. Тут обмотку компаундування якірного ланцюга генератора під'єднано так, що зменшення, наприклад, струму навантаження призводить до збільшення сумарної напруги збудження  $U_{зб}$ , а це, зі свого боку, – до відновлення колишнього значення струму.*

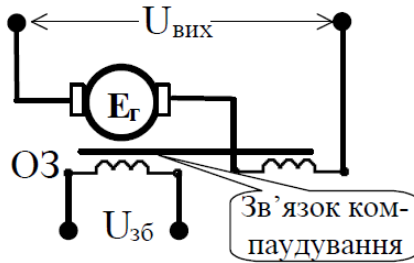


Рисунок 2.3 – Електрична схема системи керування генератором постійного струму

Загальним недоліком розглянутих вище принципів розімкненого керування є незалежність керувальної змінної від стану об'єкта керування, тобто від величини вихідної координати. Характер регулювальних впливів залежить від властивостей об'єкта лише тією мірою, якою вони враховані під час створення пристрою керування. Тому в разі змінення властивостей об'єкта керування або за умови появи інших неврахованих впливів, що збурюють, фактичне значення вихідної змінної може значно відрізнятись від необхідного.

Розімкнені системи працюють за «балістичним» принципом. Так, стрілець, прицілюючись у мішень, може зробити поправку на чинники збурень: вітер, швидкість цілі тощо, але після пострілу вплинути на результат уже не в змозі.

Здебільшого під час практичного застосування немає вичерпної та достовірної інформації ні про властивості об'єкта керування, ні про характеристики впливів, що збурюють, і тому розімкнені системи керування виявляються малоефективними. Значно частіше застосовують більш конструктивно складні, але й більш ефективні замкнені системи.

### 2.1.3. Принцип зворотного зв'язку (керування за відхиленням)

У замкнених системах використовують принцип зворотного зв'язку, наведений на рисунку 2.4.

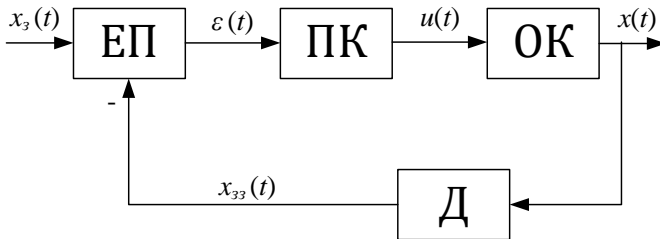


Рисунок 2.4 – Функціональна схема замкненої системи з керуванням за відхиленням зворотного зв'язку

На відміну від розімкнених систем, у замкнених системах обов'язково є вимірювальний елемент (давач) Д і елемент порівняння ЕП. Давач забезпечує вплив вихідної (регульованої) змінної на характер керувального впливу, який формується залежно від величини й знака відхилення фактичного значення керованої величини  $x(t)$  від заданого значення  $x_3(t)$ .

$$u(t) = U[\varepsilon(t)], \quad (2.3)$$

де  $\varepsilon(t) = x_3(t) - x(t)$  – сигнал похибки системи (сигнал неузгодженості).

Тому замкнену систему часто називають *системою керування за відхиленням*.

Сигнал  $x_{зз}(t)$ , зазвичай пропорційний вихідній змінній  $x(t)$ , порівнюють на елементі порівняння (ЕП) із заданим значенням (або з деяким іншим, що подають ззовні)  $x_3(t)$  і лише в разі виникнення неузгодженості  $\varepsilon(t)$  за зако-

ном пристрою керування (ПК) формується сигнал керування  $u(t)$ , який повинен бути таким, щоб забезпечити усунення цієї неузгодженості.

Якщо вплив вихідної величини на вхід системи відбувається зі знаком «-», тобто так, щоб зменшити неузгодженість, це від'ємний зворотний зв'язок, інакше – додатний зворотний зв'язок. Останній не є характерним для систем керування. Додатний зворотний зв'язок зазвичай застосовують у пристроях для генерації коливань.

Велика перевага замкнених систем полягає в тому, що в них контролюють безпосередньо керовану (вихідну) величину й у такий спосіб через неї під час формування керувального впливу побічно враховують впливи всіх збурень. Однак замкнені системи також мають такі недоліки:

- унаслідок наявності ланцюга зворотного зв'язку в цих системах можуть виникати коливання, які в деяких випадках можуть призвести до непрацездатності системи;

- принцип впливу замкнених систем допускає небажані зміни керованої величини: спочатку результат впливу збурення повинен проявитися на виході, система «відчує» відхилення й лише потім виробить керувальний вплив, спрямований на усунення цього відхилення. Така «повільність» (запізнювання сигналу у прямому ланцюзі) знижує ефективність керування.

Однак, незважаючи на наявність певних недоліків, цей принцип керування широко застосовують під час створення САК, оскільки він дає можливість надійно виконувати завдання керування в разі нестачі інформації.

Прикладів замкнених систем дуже багато. Так, наприклад, забезпечення життєдіяльності живих організмів є класичним прикладом використання зворотного зв'язку в природі. Перші регулятори Ползунова й Уатта – також пристрої зі зворотним зв'язком.



#### 2.1.4. Комбінований принцип керування

Комбінована САК – система (рис. 2.5), у якій входними впливами її пристрою керування (ПК) є зовнішні (завдання та збурення) і внутрішні (зворотний зв'язок) впливи.

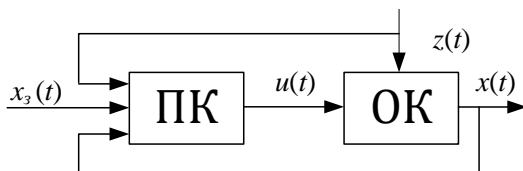


Рисунок 2.5 – Функціональна схема комбінованої системи керування

У комбінованих системах є такі два ланцюги (канали) впливу: за завданням (керуванням) і за збуренням, а керувальний вплив формують згідно із законом (2.4)

$$u(t) = U_1 [\varepsilon(t)] + U_2 [z(t)], \quad (2.4)$$

де  $U_1$  і  $U_2$  – закони створення керувального впливу за каналом керування й за каналом збурення відповідно.

Ефективність роботи комбінованої САК завжди вища, ніж у замкненій системі, що окремо функціонує, або розімкненій.

## 2.2. Класифікація систем автоматичного керування

Існує велика кількість систем автоматичного керування. Щоб якось розібратися в цьому різноманітті, наведемо класифікацію САК за різними ознаками. Класифікацію САК залежно від виду структури (або принципу керування) було розглянуто вище в п. 2.1. На рисунку 2.6 подано ще одну з можливих класифікацій САК.



Рисунок 2.6 – Приклад класифікації САК

Класифікацію САК за основними ознаками наведено нижче.

1. За *виглядом диференціальних рівнянь* (математичної моделі), що описують елементи систем керування, розрізняють такі системи:

– лінійні САК – це системи, усі елементи яких описують лінійними диференціальними та/або алгебраїчними рівняннями, й для яких справедливий принцип суперпозиції;

– нелінійні САК – це системи, у яких хоча б один елемент описують нелійними диференціальними та/або алгебраїчними рівняннями.

2. За *кількістю вихідних координат об'єкта керування* розрізняють такі системи:

– одновимірні САК (скалярні), що мають одну вихідну координату;

– багатовимірні САК (векторні), що, зі свого боку, можуть поділятися на *системи зв'язаного і незв'язаного керування*. У системах зв'язаного керування окремі пристрої керування з'єднані між собою зовнішніми зв'язками. Окрему САК, що входить до складу багатовимірної систе-

ми, називають *автономною*, якщо керована нею вихідна змінна не залежить від значення інших керованих величин.

3. За *призначенням* або за *характером зміни завдання* розрізняють такі системи:

- системи автоматичної стабілізації, алгоритм керування яких містить припис підтримувати значення керованої величини на заданому рівні з деякою точністю. До них належать найпоширеніші САК у промисловій автоматичності;

- системи програмного керування, алгоритм керування яких містить припис змінювати керовану величину відповідно до наперед заданої функції часу. Прикладом програмної САК є система керування активною потужністю синхронного генератора на електричній станції протягом доби за заданим графіком;

- системи, що слідкують, алгоритм керування яких містить припис змінювати керовану величину відповідно до заздалегідь невідомої функції часу.

У стабілізувальних, програмних і таких, що слідкують, САК мета керування полягає в забезпеченні рівності або близькості керованої величини  $x(t)$  до її заданого значення  $x_z(t)$ . Такий особливий випадок керування називають *регулюванням*. Пристрій керування, що здійснює регулювання, називають *регулятором*, а систему – *системою регулювання*.

4. Залежно від *виду сигналів, що діють у САК*, їх поділяють на такі системи:

- безперервні системи, у яких діють безперервні (аналогові) сигнали, визначені в кожен момент часу;

- дискретні системи, у яких діє хоча б один дискретний, визначений лише в окремі моменти часу сигнал. До дискретних систем відносять, наприклад, САК, що мають у своєму складі цифрові обчислювальні пристрої: мікропроцесори, контролери. Водночас дискретні системи поділяють на імпульсні, релейні, цифрові;

– гармонійно модульовані системи.

5. За *характером використовуваної інформації про умови роботи системи* розрізняють такі системи:

а) САК з жорстким законом керування та структурою (безпошукові), у яких керувальний вплив формують унаслідок порівняння дійсного значення керованої величини із завданням. Такі системи застосовують для керування порівняно нескладними об'єктами, характеристики яких досить добре вивчені й для яких заздалегідь відомо, як потрібно змінити керувальний вплив за певного відхилення керованої величини від заданого значення;

б) САК із структурою й законом керування, який змінюється, (пошукові), у яких керувальний вплив формується за допомогою пробних керувальних впливів і подальшого аналізу результатів цих впливів. Таку процедуру пошуку необхідного керувального впливу доводиться застосовувати тоді, коли характеристики об'єкта керування змінюються або відомі не повністю. З цієї причини пошукові системи називають ще системами з неповною інформацією. До таких систем належать:

– системи керування з автоматичним налаштуванням параметрів;

– самонавчальні системи;

– системи, що самоорганізуються.

6. За *ступенем залежності керованої величини в усталеному режимі від величини та вигляду збурення САК* поділяють на такі системи:

– статичні системи, у яких наявна залежність керованої величини в усталеному режимі від величини збурення;

– астатичні системи, у яких відсутня залежність керованої величини в усталеному режимі від величини збурення.

7. Залежно від *джерела енергії*, за допомогою якого створюють керувальний вплив, розрізняють такі САК:

– прямої дії, у яких керувальний вплив створюють за допомогою енергії об'єкта керування. До них належать найпростіші системи стабілізації (рівня, витрати, тиску тощо), у яких вимірвальний елемент безпосередньо (наприклад, через важільну систему) впливає на виконавчий орган (заслінку, клапан тощо);

– непрямої дії, у якій керувальний вплив створюють за допомогою додаткового джерела енергії. Таких систем під час практичного застосування є більшість.

Запропонований перелік не вичерпує всіх можливостей класифікації. Можна зазначити ще системи стаціонарні та нестаціонарні, із зосередженими та розподіленими параметрами, з детермінованим і стохастичним вхідним впливом тощо.

### **2.3. Стійкість, якість, надійність**

Для оцінювання працездатності автоматичних систем керування використовують різні показники, але загальними вимогами є такі:

– *стійкість* – це необхідна, але не достатня умова, яка означає можливість повернення системи в початковий стан після того, як була порушена її рівновага. Для автоматичних систем регулювання це означає збіжність перехідних процесів, тобто обмежений час їхньої тривалості. Оцінювання стійкості АСР здійснюють на початкових етапах аналізу й синтезу, тому що нестійка система не може бути застосована. Зазвичай для забезпечення стійкості необхідно змінити структуру системи або значення параметрів її елементів, насамперед автоматичних регуляторів. Для реальних систем потрібно забезпечувати також додаткову вимогу – запас стійкості під час роботи в різних умовах;

– *якість*, що для АСР характеризується якістю перехідних процесів: відхилення від заданого режиму в статичі та динаміці, коливальність і тривалість перехідних

процесів. Зазвичай якість перехідних процесів оцінюють такими інтегральними показниками:

$$I_1 = \int_0^{t_n} \Delta x dt \rightarrow \min, \quad (2.5)$$

$$I_2 = \int_0^{t_n} (\Delta x)^2 dt \rightarrow \min, \quad (2.6)$$

де  $\Delta x = x_3 - x$ ;

$t_n$  – час перехідного процесу.

Отже, оцінювання якості перехідних процесів АСР дає можливість оцінити її працездатність і можливість застосування в конкретних умовах;

– *надійність*, яку доповнюють додатковими вимогами щодо вартості, зручності науково-технічного рівня тощо.

### ***Питання для самоперевірки***

1. У чому полягає принцип прямого розімкненого керування?
2. У чому полягає принцип компенсації?
3. У чому полягає принцип зворотного зв'язку?
4. У чому полягає комбінований принцип керування?
5. За якими ознаками класифікують системи керування?
6. Як класифікують системи керування за виглядом диференціальних рівнянь?
7. Як класифікують системи керування за виглядом вихідних сигналів?
8. Що називають стійкістю, якістю та надійністю автоматизованих систем керування?

### Тема 3

## ПОНЯТТЯ МОДЕЛІ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

Для аналізу (дослідження поведінки) наявних систем керування й синтезу (створення) нових необхідна наявність їхнього математичного опису (математичної моделі). *Математичною моделлю динамічної системи* називають сукупність математичних співвідношень, що однозначно описують розвиток процесів у системі в часі (часто називають «у русі»). Якщо таке співвідношення пов'язує лише вхідні та вихідні координати системи (об'єкта), то такі моделі називають *математичними моделями «вхід – вихід»*. У сучасній теорії керування поряд із моделями «вхід – вихід» застосовують *математичні моделі в просторі змінних стану* – моделі у векторно-матричному поданні (більш детально буде розглянуто нижче).

*Ідея моделювання заснована на повній або частковій подібності* двох об'єктів однакової або різної природи. *Подібними* називають об'єкти, параметри (змінні) яких, що визначають їхній стан у будь-який момент часу й у будь-якій точці, відрізняються в певну кількість разів. В *об'єктах із неповною подібністю* подібними можуть бути не всі, а лише деякі, найбільш значущі параметри (змінні).

Об'єкт, для якого знаходять або створюють подібний (тобто модель), називають *об'єктом моделювання*. Процес вивчення властивостей об'єкта за допомогою аналізу або дослідження аналогічних властивостей його моделі називають *моделюванням*.

### 3.1. Основні види математичних моделей

#### 3.1.1. Фізичні та математичні моделі

Розрізняють *два види подібності об'єкта й моделі: фізичну та математичну*.

Процеси, що відбуваються у *фізично подібних об'єктах*, зазвичай мають однакову фізичну природу. Наприклад, хімічна реакція в колбі й аналогічний процес у багатотонному реакторі; обтікання повітрям автомобіля й обтікання повітрям його моделі в аеродинамічній трубі тощо.

Моделі, в основу яких покладено принципи фізичної подібності, називають фізичними, а дослідження фізичних моделей – фізичним моделюванням.

*Перевагою фізичного моделювання є природність досліджуваних процесів, недоліками* – необхідність повного комплексу вимірювань і витрат на побудову моделі, інколи небезпека під час проведення експериментів, можливість помилок під час перенесення результатів, одержаних під час дослідження моделі, на реальний об'єкт через вплив засобів вимірювання або зміну геометричних розмірів.

*Математично подібні об'єкти об'єднує* (робить подібними) лише однаковість опису процесів математичними співвідношеннями. У цьому разі фізична природа їх може бути різною. Тому моделі, засновані на математичній подоби, можуть бути найрізноманітнішими, зокрема й поданими у вигляді математичних виразів, які відображають фізичну сутність процесів в об'єкті моделювання. У ТАК застосовують два види моделей, заснованих на математичній подоби: *аналогові та математичні моделі*.

*Ідея аналогових моделей і моделювання* заснована на математичній подібності процесів, що відбуваються в електричних ланцюгах, багатьох інших фізичних процесах і явищах. Тобто аналогова модель – це модель неповної подоби, вона подібна об'єкту лише своїм математичним описом. Аналогове моделювання зберігає всі риси дослідження фізичних моделей.

*Математична модель* не має фізичної реалізації. Це, можна зауважити, віртуальна модель. Вона являє собою одне або декілька математичних співвідношень, що



описують явища, які відбуваються в об'єкті моделювання. З цих причин *математичне моделювання* є дослідженням математичної моделі за допомогою багаторазового розв'язання системи рівнянь за різних вихідних даних.

*Перевагами математичного моделювання* є низька вартість досліджень, безпека проведення експериментів, можливість прогнозування поведінки процесів у граничних станах; *недоліками* – складність і дорожнеча розроблення моделі, необхідність глибоких знань фізичної та хімічної сутності процесів і гарної математичної підготовки розробника.

### *3.1.2. Аналітичні та експериментальні методи побудови математичних моделей*

Математичний опис системи керування залежно від її структури повинен складатися з математичного опису її складових: засобів керування (вимірювальних і виконавчих пристроїв, пристроїв керування (регуляторів)) і об'єкта керування. Зазвичай математичний опис елементів засобів керування через їхню стандартність відомий заздалегідь або є результатом проектування системи керування. З об'єктом керування все значно складніше. Здебільшого математичний опис об'єктів керування існує, але через велику різноманітність технічних процесів таких випадків не так і багато. Та, навіть, наявні математичні моделі процесів із різних причин не завжди виявляються придатними для виконання завдань керування.

*Завдання створення математичної моделі практично не можна формалізувати*, тобто немає такого алгоритму або інструкції, дотримуючись якої будь-який охочий мав змогу розробити математичний опис будь-якого об'єкта. Деякою мірою це є мистецтвом.

Розрізняють *два методи створення математичних моделей*: аналітичний і експериментальний.

*Аналітичний* (теоретичний) *метод побудови математичних моделей* ґрунтується на використанні фундаментальних законів природи (термодинаміки, хімічної кінетики, законів збереження енергії, маси тощо). Для визначення коефіцієнтів (параметрів) таких моделей часто потрібні трудомісткі дослідження. Наприклад, є добре відомим співвідношення, що визначає перенесення енергії у формі теплоти (закон Фур'є)  $-\lambda \frac{dT}{dx} = E$ . Однак для конкретного реального процесу величину  $\lambda$  необхідно визначати окремо (з довідників або експериментально).

*Експериментальний* (статистичний) *метод побудови математичних моделей* заснований на обробленні експериментальних даних, одержаних на об'єкті, унаслідок якого одержують емпіричні або напівемпіричні залежності, що пов'язують між собою змінні та параметри процесу, але зазвичай не відображають його фізичної сутності. Перевага такого підходу полягає в тому, що за мінімальних знань про сутність процесів удається одержати задовільний для цілей практичного застосування математичний опис, проте подальше його використання можливе лише у вузькому, обмеженому умовами проведених досліджень, діапазоні зміни координат.

Наведений поділ не є суворим, тобто під час створення математичної моделі складних процесів можуть бути застосовані різні методи однаковою мірою. У цьому разі завжди необхідно пам'ятати, що математичний опис (модель) є відображенням властивостей об'єкта з більшою або меншою точністю. Тому не потрібно ототожнювати модель і об'єкт.

Нижче буде наведено загальний огляд основних видів математичних описів.

### 3.1.3. Математичні моделі статичної й динамічної системи

Математична модель статичної системи об'єкта керування не враховує його динамічних властивостей (тобто наявності інерційності), навіть якщо вони йому притаманні, й описує залежності між вхідними та вихідними змінними в усталеному режимі. З формального боку математична модель статичної системи не містить у своєму складі звичайних диференціальних рівнянь (диференціальні рівняння в часткових похідних можуть бути наявними). Графічне подання математичної моделі статичної системи називають *статичною характеристикою*.

Якщо математичний опис враховує динамічні властивості об'єкта моделювання, то його називають *математичною моделлю динамічної системи*. У складі математичного опису такої моделі обов'язково наявні диференціальні рівняння першого й вищого порядків (якщо, звісно, об'єкт має інерційні властивості).

Отже, математичний опис статичної системи є окремим випадком математичного опису динамічної системи об'єкта, коли всі похідні за часом у диференціальних рівняннях дорівнюють нулю.

### 3.1.4. Стаціонарні й нестаціонарні математичні моделі

Зазвичай властивості системи керування (засобів та об'єкта керування), що виражаються в коефіцієнтах рівнянь математичного опису  $a(t)$ , змінюються в часі. Наприклад, коефіцієнт теплопередавання в рівнянні математичного опису процесу теплообміну в трубчастому теплообміннику має властивість із часом зменшуватися в разі забруднення внутрішньої поверхні труб накипом. Такі процеси називають *нестаціонарними*. *Нестаціонарні математичні моделі* – це моделі, рівняння математичного опису яких містять коефіцієнти (параметри), залежні від часу. Моделювання таких

процесів є досить складним і вимагає використання особливих математичних методів.

Однак здебільшого залежність коефіцієнтів від часу вкрай слабка (тобто вони змінюються, але досить повільно порівняно з часом процесів керування) й тому з достатньою для практичного застосування точністю нею нехтують. Такі об'єкти називають *квазістаціонарними*.

*Стаціонарними математичними моделями* називають моделі, у рівняннях математичного опису яких містяться лише сталі коефіцієнти.

### **3.2. Постановка задач аналізу та синтезу. Методика формалізованого опису елементів і систем**

Головними задачами теорії автоматичного керування є такі: задачі аналізу та задачі синтезу. У завданні аналізу задають систему та її параметри, а визначити необхідно властивості системи. У завданні синтезу задають вимоги, а необхідно створити систему, яка відповідала б цим вимогам. Друга задача є більш складним і зазвичай не має однозначного розв'язку. Названі задачі розв'язують на основі математичного опису елементів і системи загалом, що дає можливість дослідити усталені та перехідні процеси в них. Одним із підходів одержання математичного опису системи є розбиття її на окремі ланки, для кожної з яких визначають закономірності перетворення вхідного сигналу у вихідний. У цьому разі виділення ланок здійснюють на підставі зручності математичного опису.

Під час формалізованого опису елементів і систем виконують такі положення:

– систему розглядають як ланцюг взаємодійних (фізично та інформаційно) елементів, які характеризуються можливістю передавати фізичні впливи та інформаційні сигнали в одному, чітко визначеному, напрямі;

- кожний конструктивний елемент системи розглядають як перетворювач вхідного впливу у вихідну реакцію;
- на основі апріорних даних щодо фізичної природи кожного елемента й закономірностей його функціонування складають математичну модель, яка відображає найбільш суттєві для цього випадку взаємозв'язки між вхідними та вихідними змінними елемента;
- під час складання математичної моделі елементів або системи загалом завжди виникає необхідність деякої ідеалізації реальних фізичних процесів, певних спрощень фізичних закономірностей, відкидання другорядних чинників. Для цього необхідні глибокі знання процесу (об'єкта), фундаментальних законів та експериментальна перевірка.

### **3.3. Лінійні й нелінійні математичні моделі. Лінеаризація**

Раніше було зазначено (див. п. 2.2), що реальні системи є нелінійними, й тому часто здійснюють операцію *лінеаризації*, тобто наближеної заміни нелінійних залежностей лінійними. Розглянемо приклад лінеаризації статичної характеристики елемента, схему якого подано на рисунку 3.1 а.

У теорії автоматичного керування використовують *аналітичні та графоаналітичні методи лінеаризації*. *Статичною характеристикою елемента або системи* називають графічну залежність виходу від входу в статиці (в усталеному режимі). Саме статична характеристика дає можливість визначити коефіцієнт передавання, тобто пропорційність відхилень вхідних і вихідних змінних.

Лінеаризацію гладких (несуттєво нелінійних) статичних характеристик можна здійснювати за *методом дотичної* (рис. 3.2) або *малих відхилень*.

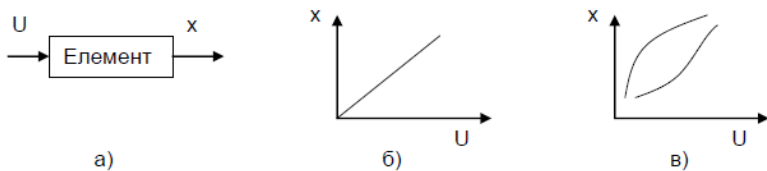


Рисунок 3.1 – Схема елемента (а); статична лінійна характеристика (б); статична нелінійна характеристика (в)

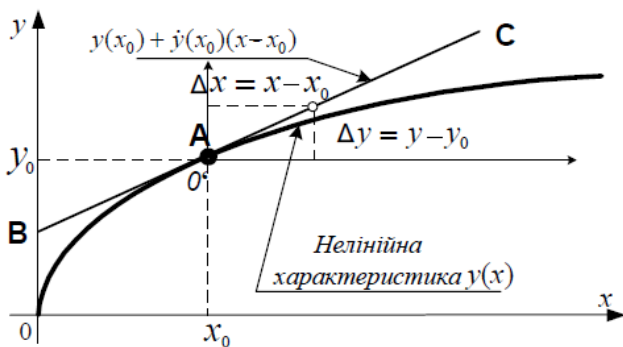


Рисунок 3.2 – Лінеаризація статичної характеристики методом дотичної

Лінеаризація за методом дотичної полягає в розкладанні функції  $y(x)$  в інтервалі навколо деякої робочої точки  $x_0$  у ряд Тейлора та в подальшому урахуванні лише перших лінійних членів одержаного нескінченного ряду (3.1)

$$y(x) \approx y(x_0) + \dot{y}(x_0)(x - x_0), \quad (3.1)$$

де  $\dot{y}(x_0)$  – значення похідної функції  $y(x)$  у заданій точці  $A$  з координатами  $x_0$  і  $y_0$ .

Геометричний зміст такої лінеаризації полягає в заміні кривої  $y(x)$  дотичною  $BC$ , що проведена до кривої в точці  $A$  (див. рис. 3.2).

Під час аналізу систем керування зручно лінійні статичні характеристики розглядати у відхиленнях змінних  $x$  і  $y$  від значень  $x_0$  і  $y_0$ , тобто  $\Delta y = y - y_0$  та  $\Delta x = x - x_0$  (що відповідає перенесенню системи координат). Тоді вираз (3.1) набуде такого вигляду:

$$\Delta y = k \cdot \Delta x, \quad (3.2)$$

де  $k = \dot{y}(x_0)$  – передатний коефіцієнт об'єкта (коефіцієнт підсилення), що характеризує його передатні (підсилювальні) властивості в статичному режимі.

Надалі всі висновки будуть стосуватися лише *лінійних стаціонарних об'єктів* (систем, елементів).

Приклади лінеаризації статичних характеристик наведено на рисунку 3.3.

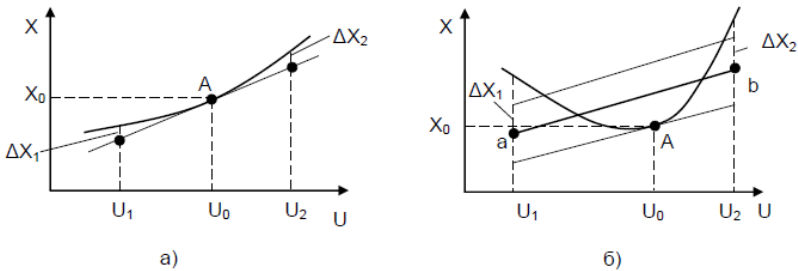


Рисунок 3.3 – Лінеаризація статичних характеристик методом дотичної (а) та січної (б)

Якщо статичні характеристики задано графічно, то лінеаризовану характеристику можна одержати графічними методами. За методом дотичної проводять дотичну до

статичної характеристики в робочій точці  $A (U_0, X_0)$  так, щоб  $\Delta X_1 \approx \Delta X_2$ . Вона й буде лінійною статичною характеристикою в робочому діапазоні  $U_1, U_2$  (див. рис. 3.3 а).

Якщо статична характеристика має вигляд, наведений на рисунку 3.3 б, то застосовують метод січних. Спочатку проводять дотичну до статичної характеристики в робочій точці  $A$  так, щоб  $\Delta X_1 \approx \Delta X_2$ , потім поділяють навпіл відрізки  $\Delta X_1$  та  $\Delta X_2$ , а лінійною характеристикою буде пряма  $ab$ . Для лінійних статичних характеристик коефіцієнт передання набуде такого вигляду:

$$K = \frac{\Delta X}{\Delta U} = \tan \alpha, \quad (3.3)$$

де  $\alpha$  – кут нахилу прямої  $ab$  до осі абсцис.

Здійснюючи лінеаризацію, необхідно оцінити точність заміни нелінійної характеристики лінійною. Наприклад, похибка лінеаризації під час використання методу дотичних буде найбільшою на кінцях робочого діапазону. Необхідно враховувати також, що лінеаризацію здійснюють у робочій точці  $A$ , й під час змінення робочого режиму необхідно повторити лінеаризацію в новій робочій точці.

### 3.4. Типові сигнали

Під час дослідження елементів і систем аналізують проходження вхідних сигналів або, інакше кажучи, визначають реакцію елемента або системи на вхідний сигнал. Для можливості порівняння властивостей систем у ТАК введено поняття «типові сигнали» і саме їх використовують для такої мети. У цьому разі властивості елементів і систем оцінюють у часовій і частотній зонах, що дає можливість оцінити їхню поведінку в статиці й динаміці, тобто визначити їхні статичні й динамічні характеристики.



Залежно від характеру зміни сигналів за часом і формою математичного подання розрізняють такі сигнали:

- регулярні (детерміновані) сигнали, які змінюються за певним законом і описано конкретною функцією часу;
- нерегулярні (випадкові) сигнали, які змінюються з часом випадково, значення в кожний момент часу є ймовірним.

До типових сигналів належать стандартні сигнали, які використовують під час теоретичних і експериментальних досліджень. Їх описують простими математичними залежностями та нескладно відтворити. Використання типових (еталонних) впливів дає можливість уніфікувати розрахунки різних систем і порівнювати їхні передатні властивості.

Основними видами типових регулярних сигналів є такі:

- ступінчастий сигнал (рис. 3.4 *a*). Для такого сигналу характерним є те, що він змінюється стрибкоподібно в момент часу  $t_0$  і зберігає своє значення впродовж експерименту. Оскільки величина стрибка має умовну одиницю, тоді виконується умова (3.3).

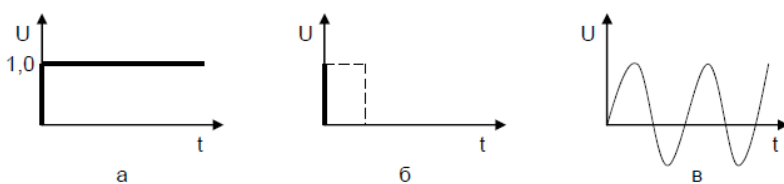


Рисунок 3.4 – Типові сигнали: *a* – ступінчастий;  
*б* – імпульсний; *в* – гармонійний

Ступінчастий сигнал формують під час комп'ютерного моделювання, а для реальних систем його величина, наприклад переміщення регульовального органу, має кін-

цеве значення, а швидкість зміни (стрибок) обмежена. Одиничний ступінчастий сигнал, що подають у момент  $t = t_1$ , позначають « $1(t - t_1)$ ». Стрибкоподібний сигнал використовують для визначення часових характеристик. Він може імітувати змінювання збурення або сигналу завдання. Варто зазначити, що в реальних системах цей сигнал необхідно підтримувати впродовж всього експерименту, що часто призводить до неприпустимих порушень технологічного режиму;

– імпульсний сигнал (рис. 3.4 б) є одиничним імпульсом, який має нескінченно велику висоту та нескінченно малу тривалість, а його площа дорівнює одиниці. Зазвичай імпульсний сигнал є певною ідеалізацією, яка в математиці відома як  $\delta$ -функція Дірака

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.4)$$

Зважаючи на залежність (3.5)

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}, \quad (3.5)$$

можна побачити, що  $\delta$ -функція – це похідна від одиничного стрибка.

Неодиничний імпульс із площею  $a_0$  позначають « $a_0 \delta(t)$ ». Якщо одиничний імпульс діє в момент часу  $t = t_1$ , то йому відповідає зміщена дельта-функція  $\delta(t - t_1)$ .

Основною властивістю дельта-функції є така:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\theta) \delta(\theta - t) d\theta = U(t), \quad (3.6)$$

тобто неодинична імпульсна функція  $U(\theta) \delta(\theta - t)$ , одержана як добуток довільної функції  $U(\theta)$  на зміщену дель-

та-функцію, існує лише в момент часу  $\theta = t$ . Це означає, що дельта-функція має фільтрувальну або вихоплювальну властивість. Цей вираз можна також розглядати як розкладення деякої функції  $U(t)$  на суму нескінченно великої кількості елементарних імпульсів вигляду  $U(\theta) \delta(\theta - t)$ , причому кожний елементарний імпульс діє лише в момент  $\theta = t$  і має площу  $X(\theta) d\theta$ . У реальних системах імпульс має певну величину і тривалість, подану на рисунку 3.3 б пунктиром;

– гармонійний сигнал, який відповідає такому синусоїдальному закону:

$$U(t) = U_m \sin \omega t, \quad (3.7)$$

де  $U_m$  – максимальне значення амплітуди;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$  – кругова частота, що може змінюватися від нуля до нескінченності  $\infty$ ;

$T$  – період;

$U(t)$  – лінійний сигнал, який змінюється за таким законом:

$$U(t) = 1(t)a_1 t, \quad (3.8)$$

де  $a_1$  – коефіцієнт, який характеризує швидкість збільшення сигналу  $U(t)$ .

### ***Питання для самоперевірки***

1. Якими бувають основні види математичних моделей у ТАК?
2. У чому полягає постановка задач аналізу й синтезу?
3. Що називають лінійною математичною моделлю?
4. Що називають нелінійною математичною моделлю?

**Тема 4**  
**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**  
**ТА ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ**

**4.1. Лінійні диференціальні рівняння автоматичних систем регулювання**

Для автоматичних систем регулювання основним режимом є динамічний, який характеризується змінюванням регульованих координат  $X$  за часом  $t$ . АСР увесь час перебуває під впливом збурень або змінюваного сигналу  $X_{зд}$ .

Вигляд перехідного процесу залежить від сигналів, які його викликали, а також від властивостей об'єкта й регулятора. Отже, під час виконання задач аналізу та синтезу АСР необхідно мати математичні моделі елементів і систем загалом, а насамперед – їхні динамічні характеристики. Для цієї мети в теорії автоматичного керування використовують диференціальні рівняння, передатні функції, частотні та часові характеристики.

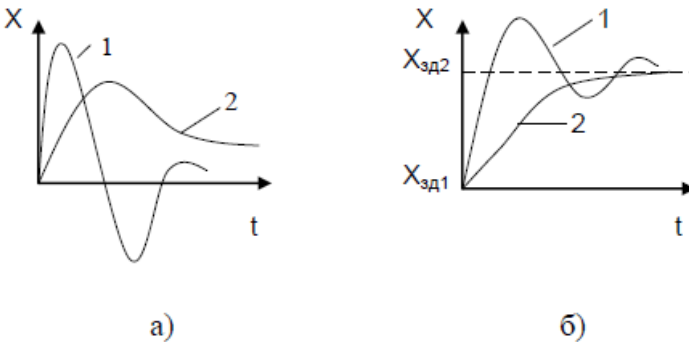


Рисунок 4.1 – Перехідні процеси в АСР:

- а) щодо збурення  $Z_0$ ;
- б) щодо зміни завдання  $X_{зд}$ ;
- 1 – коливальний процес;
- 2 – аперіодичний процес

Загалом динамічні властивості одноконтурної АСР описують диференціальним рівнянням такого вигляду:

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = \\ = b_m \frac{d^m U}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dU}{dt} + b_0 U + \\ + c_l \frac{d^l z}{dt^l} + c_{l-1} \frac{d^{l-1} z}{dt^{l-1}} + \dots + c_1 \frac{dz}{dt} + c_0 z, \end{aligned} \quad (4.1)$$

де  $x$ ,  $U$ ,  $z$  – координата стану (регульована координата) і вхідні змінні: керувальний вплив і збурення;

$a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  – коефіцієнти.

У рівнянні (4.1) необхідно врахувати чинник часу, тобто фактично всі змінні залежать від часу:  $x(t)$ ,  $U(t)$ ,  $z(t)$ . Коефіцієнти диференціального рівняння називають *параметрами*, значення яких визначено конструктивними та режимними особливостями об'єкта, наприклад, швидкістю перебігу процесів, константами теплоти, масообміну, хімічних реакцій. Якщо розглядають нестационарні системи, то коефіцієнти диференціального рівняння залежать від часу:  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $c_i(t)$ .

#### 4.1.1. Операторна форма

Зручною формою запису рівняння (4.1) є операторна або символічна форма. Для цього вводять такий оператор:

$$\frac{d}{dt} = p; \quad \frac{d^i}{dt^i} = p^i. \quad (4.2)$$

З урахуванням (4.2) диференціальне рівняння (4.1) в операторній формі набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) x(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \\ + \dots + b_0) U(p) + (c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0) z(p) \end{aligned} \quad (4.3)$$

або

$$D(p)x(p) = R_1(p)U(p) + R_2(p)z(p), \quad (4.4)$$

де  $D(p)$  – власний оператор;  $R_1(p)$ ,  $R_2(p)$  – оператори впливу.

Лінійні диференціальні рівняння першого, другого, а часом і більш високих порядків записують у *стандартній* (канонічній) *формі*, коли вихідна координата та її похідні розташовано в лівій частині рівняння, вхідні змінні – у правій частині, а коефіцієнт за  $x$  дорівнює одиниці. Наприклад, диференціальне рівняння першого порядку ( $n = 1$ ) записують у такому вигляді:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 U + c_0 z. \quad (4.5)$$

Для подання рівняння в стандартній формі поділимо вираз (4.5) на  $a_0$ , тоді одержимо:

$$T \frac{dx}{dt} + x = K_u U + K_z Z, \quad (4.6)$$

де  $T = \frac{a_1}{a_0}$  – стала часу;

$K_U = \frac{b_0}{a_0}$ ;  $K_Z = \frac{c_0}{a_0}$  – коефіцієнти передавання за керувальним впливом і збуренням відповідно.

Стандартна форма диференціального рівняння дає можливість оцінити деякі важливі показники елементів або всієї системи: стала часу  $T$  завжди має розмірність часу [с, хв.] і визначає інерційність системи, наприклад, тривалість перехідного процесу  $t_n = (3 - 4)T$ . Коефіцієнти передавання також мають важливий фізичний зміст: вони визначають, наскільки змінилася вихідна величина під час

змінення вхідної на одиницю. Наприклад, якщо оцінюють зміни температури під час змінення подання пари, тоді розмірність коефіцієнта передавання буде  $\left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{кг/с}}\right]$ . Часто керувальний вплив оцінюють в одиницях переміщення регульовального органу, його коефіцієнт передавання має розмірність  $\left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\%x_{PO}}\right]$  ( $x_{PO}$  – хід регульовального органу).

Диференціальне рівняння (4.1) описує поведінку системи в динаміці, а його розв'язком є перехідні процеси за різних вхідних впливів і заданих початкових умов

$$x(t) = x_B(t) + x_{уст}(t), \quad (4.7)$$

де  $x_B(t)$  – вільна складова, яка в стійких системах із часом зникає; вона є перехідною складовою;

$x_{уст}(t)$  – змушена, усталена складова; вона відповідає значенню, до якого прямує  $x(t)$  під час  $t \rightarrow \infty$ .

Розв'язок диференціальних рівнянь знаходять за таким алгоритмом: знаходження загального розв'язку однорідного рівняння, частинного й загального розв'язку неоднорідного рівняння та власне розв'язку з числовими значеннями сталих коефіцієнтів. Вільна складова  $x_B(t)$  є розв'язком оператора  $D = 0$  (4.4), який має  $n$  складових ( $n$  – порядок системи)

$$x_B(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda t}, \quad (4.8)$$

де  $C_i$  – сталі інтегрування;  $\lambda$  – корені полінома  $D$ .

З диференціальних рівнянь можна одержати також рівняння статички, дорівнявши похідні до нуля ( $p = 0$ ). Для рівняння (4.6) статична характеристика матиме такий вигляд:

$$x = K_u U + K_z Z. \quad (4.9)$$

#### 4.1.2. Принцип суперпозиції

*Принцип суперпозиції* (принцип накладання) полягає в тому, що кожна вхідна величина створює свою складову вихідної величини незалежно від характеру й наявності інших вхідних величин, а також початкових умов. Інакше кажучи, зміна вихідної величини  $y(t)$ , що виникає внаслідок впливу на елемент суми вхідних сигналів  $x_i(t)$ , дорівнює сумі змін вихідних величин  $y_i(t)$ , викликаних кожним сигналом  $x_i(t)$  окремо (рис. 4.2).

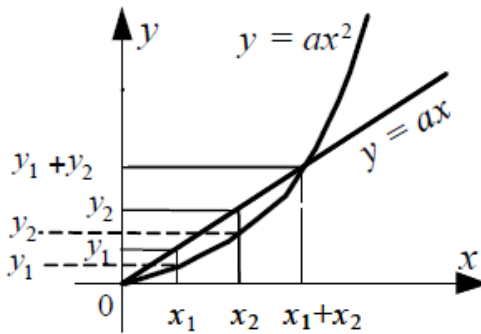


Рисунок 4.2 – Принцип суперпозиції

*Принцип суперпозиції* є справедливим (тобто виконується) виключно для лінійних систем.

#### 4.2. Поняття передатної функції

У теорії автоматичного керування зручною й найбільш наочною формою визначення закономірностей перетворення вхідних сигналів є *передатна функція*. В операторному вигляді – це відношення оператора впливу до вла-



сного оператора, причому кількість передатних функцій дорівнює кількості вхідних сигналів

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (4.10)$$

$$W_1(p) = \frac{R_2(p)}{D(p)} = \frac{c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (4.11)$$

тобто

$$W_1(p) = \frac{x(p)}{U(p)}, W_2(p) = \frac{x(p)}{z(p)}. \quad (4.12)$$

Передатні функції мають нулі (корені рівняння  $R(p) = 0$ ) й полюси (корені рівняння  $D(p) = 0$ ). На основі виразів (4.9)–(4.11) визначають таку фундаментальну залежність:

$$x(p) = W_1(p)U(p) + W_2(p)z(p). \quad (4.13)$$

Отже, передатні функції мають чіткий фізичний зміст: вони визначають, як перетворюється вхідний сигнал (передається із входу на вихід). Передатні функції зручно отримувати з диференціальних рівнянь в операторній формі, наприклад, рівняння (4.6) можна записати так:

$$(Tp + 1)x(p) = K_U U(p) + K_Z z(p). \quad (4.14)$$

Тоді

$$W_1(p) = \frac{K_U}{Tp+1}; W_2(p) = \frac{K_Z}{Tp+1}. \quad (4.15)$$

#### 4.2.1. Приклад одержання передатної функції

Диференціальне рівняння, яке описує поведінку лінійної стаціонарної динамічної системи, може бути записане в такій компактній операторній формі:

$$D(p)x(p) = R_1(p)U(p) + R_2(p)z(p), \quad (4.16)$$

де  $D(p)$  – власний оператор системи;

$R_i(p)$  – оператори впливу.

Оскільки ми розглядаємо лише лінійні стаціонарні системи, для яких виконується принцип суперпозиції, то з метою дослідження доцільно розглядати реакцію системи окремо на сигнал керування й окремо на сигнал збурення (справедливо вважаючи, що реакція на сумарний сигнал буде дорівнювати сумі окремих реакцій). Інакше кажучи, можна спочатку досліджувати поведінку системи під впливом лише сигналу керування

$$D(p)x(t) = R_1(p)u(t), \quad (4.17)$$

припускаючи, що збурення відсутнє, а потім, навпаки, вважаючи, що є лише зовнішнє збурення  $z(t)$ , тобто

$$D(p)x(t) = R_2(p)z(t). \quad (4.18)$$

Якщо поділити праву та ліву частину рівнянь (4.17) і (4.18) на  $D(p)$ , то одержимо такі рівняння відповідно:

$$x(t) = \frac{R_1(p)}{D(p)}u(t); \quad x(t) = \frac{R_2(p)}{D(p)}z(t). \quad (4.19)$$

У правих частинах цих виразів співвідношення перед змінними  $u(t)$  і  $f(t)$  визначають те, як впливають характеристики системи  $D(p)$  і вхідні впливи  $R_i(p)$  на процес

перетворення цих змінних (взагалі – сигналів) у системі, унаслідок чого отримуємо вихідну змінну (сигнал)  $y(t)$ ; інакше кажучи, як передається відповідний сигнал на вихід системи. З цієї причини співвідношення поліномів  $R_i(p)$  і  $D(p)$  називають *передатними функціями* за такими впливами:

– за керувальним впливом  $u(t)$  (або за керуванням), що впливає із рівняння (4.17)

$$W_u(p) = \frac{R_1(p)}{D(p)} = \frac{bp+1}{a_0p^2+a_1p+1}; \quad (4.20)$$

– за збурювальним впливом  $z(t)$  (або за збуренням), що впливає з рівняння (4.18)

$$W_z(p) = \frac{R_2(p)}{D(p)} = \frac{c}{a_0p^2+a_1p+1}. \quad (4.21)$$

Після ділення правої та лівої частин на  $D(p)$  рівняння (4.16) запишемо в такому вигляді:

$$x(t) = W_u(p)u(t) + W_z(p)z(t). \quad (4.22)$$

#### 4.2.2. Зв'язок передатної функції з перетвореннями Лапласа

Поряд з операторною (символічною) формою запису передатної функції використовують запис передатної функції у формі зображень Лапласа. Це є можливим, тому що зображення Лапласа похідних першого й вищих порядків змінної-оригіналу за нульових початкових умов (власність диференціювання оригіналів) із точністю до позначень збігається з її операторною формою запису. Порівняйте форми запису:

– у символічній формі запису  $\frac{dy(t)}{dt} = py(t)$ ;

– зображення Лапласа  $\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow sY(s) - y(0) = |y(0) + 0| = sY(s)$ .

Якщо застосувати перетворення Лапласа до вхідної й вихідної змінних і за умови, що початкові умови є нульовими, то, застосувавши властивість диференціювання оригіналу, одержимо такі рівняння (для спрощення вважаємо, що збурення відсутні)

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx(t)}{dt} + x(t) &= b(t) \frac{du(t)}{dt} + u(t); \quad (4.23) \\ a_0 s^2 X(s) + a_1 s X(s) + X(s) &= bsU(s) + U(s); \\ (a_0 s^2 + a_1 s + 1)X(s) &= (bs + 1)U(s); \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{bs+1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1} = W(s) \rightarrow W(p). \end{aligned}$$

Звідси впливає друге формулювання визначення передатної функції: *передатною функцією* називають відношення зображення за Лапласом вихідної величини до зображення вхідної за нульових початкових умов. Зважаючи, що зазвичай рух системи починають із стану спокою, то *передатну функцію у формі зображень Лапласа* можна одержати з операторної форми формальною заміною  $p$  на  $s$ . Однак варто завжди пам'ятати, що така схожість виключно зовнішня. Описаний підхід може бути застосовано лише для лінійних стаціонарних елементів (об'єктів, систем) і лише за нульових початкових умов.

#### 4.2.3. Нулі та полюси передатної функції

Як бачимо з (4.19) і (4.20), передатна функція є відношенням двох поліномів такого вигляду (у символічній формі запису):

$$W(p) = \frac{R(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (4.24)$$

Значення змінної  $p$ , за якої передатна функція  $W(p)$  обертається в нескінченність, називають *полюсом передатної функції*. Очевидно, що полюсами передатної функції є корені (розв'язки полінома) власного оператора  $D(p)$ .

Значення змінної  $p$ , за якої передатна функція  $W(p)$  обертається в нуль, називають *нулем передатної функції*. Очевидно, що нулями передатної функції є корені (рішення) вхідного оператора (або оператора впливу)  $R(p)$ .

Якщо коефіцієнт  $a_n \neq 0$ , то передатна функція не має нульового полюса ( $p = 0$ ), й таку систему називають *статичною*. Значення передатної функції статичної системи за умови  $p = 0$  (або за умови  $t = \infty$ ), яке не дорівнює нулю  $k = W(0) = b_m / a_n$ , називають *передатним коефіцієнтом* (або коефіцієнтом підсилення). На противагу статичним, *астатичні* системи характеризуються наявністю нульових полюсів ( $p = 0$ ).

Передатна функція, як і диференціальне рівняння, являє собою вичерпну характеристику системи (об'єкта). Однак якщо під час ненульових початкових умов власний оператор і оператор впливу мають однакові корені (множники, які можна скоротити), то за скороченою формою запису передатної функції відновити початковий вигляд диференціального рівняння неможливо.

### ***Питання для самоперевірки***

1. Що називають диференціальним рівнянням?
2. Для чого використовують диференціальні рівняння в ТАК?
3. У чому полягає принцип суперпозиції?
4. Що називають передатною функцією?
5. Для чого в ТАК використовують операторну форму?
6. Який зв'язок передатної функції з перетвореннями Лапласа?

**Тема 5**  
**ЧАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ**  
**СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

**5.1. Часові характеристики: перехідна й імпульсна перехідна характеристики**

*Часова характеристика* – це реакція елемента або системи на типові входні сигнали – стрибкоподібний чи імпульсний (рис. 5.1). Часові функції є наочними, за їхнім виглядом можна оцінити загальні властивості елемента або системи, які визначають їхні динамічні особливості. З математичного погляду часові характеристики є розв’язком диференціального рівняння, яке описує поведінку елемента або системи залежно від виду зовнішнього сигналу (це визначають із правої частини диференціального рівняння) та початкових, зазвичай нульових, умов. Перехідну функцію  $h(t)$  (рис. 5.1 а) визначають як зміну вихідної величини з часом під час подавання на вхід одиничного ступінчастого сигналу за нульових початкових умов.

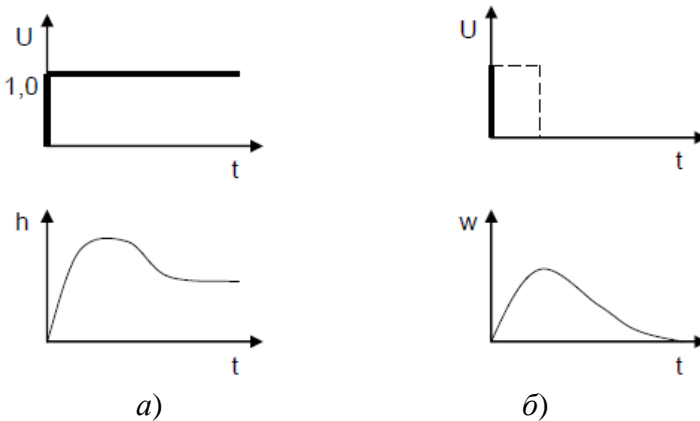


Рисунок 5.1 – Часові характеристики:

а) перехідна функція  $h(t)$ ;

б) імпульсна перехідна функція  $w(t)$

Імпульсну перехідну функцію  $w(t)$  (рис. 5.1 б) визначають як зміну вихідної величини з часом після подання на вхід сигналу у вигляді  $\delta$ -функції. Цю характеристику називають також *ваговою функцією*, або *функцією ваги*.

Перехідні характеристики можна одержати декількома способами:

- з використанням методів операційного обчислення (перетворення Лапласа);

- графоаналітичним методом (останнім часом не застосовують);

- експериментально у виробничих умовах на реальному об'єкті, якщо зафіксувати зміну вихідної змінної під час подавання на вхід ступінчастого впливу (наприклад, дуже швидке відкриття або закриття на деяку величину регулювального вентиля). Однак зазвичай такий вплив не є одиничним, тому одержану характеристику називають «крива розгону», або «розгінна характеристика». З кривої розгону одержують перехідну характеристику нормуванням (поданням її у вигляді одиничного впливу).

Форми одержуваних перехідних характеристик можуть бути різними, але з них можна виділити три найбільш типові форми (рис. 5.2):

- аперіодична;
- що сходиться або розходиться;
- коливальна.

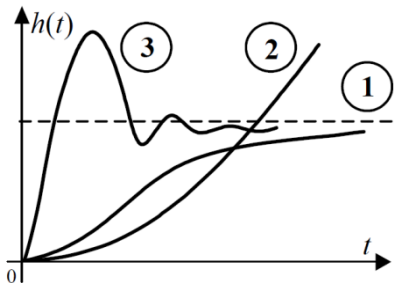


Рисунок 5.2 – Типи перехідних процесів:  
1, 2 – аперіодичний; 3 – коливальний

Якщо на систему впливають декілька сигналів одночасно, то, зважаючи на принцип суперпозиції, можна визначити перехідні характеристики для кожного впливу окремо. У тому разі, якщо вхідний ступінчастий вплив не одиничний, а збільшений в  $a$  разів, тобто  $a \cdot 1(t)$ , де  $a$  – константа, то перехідна функція системи  $h_a(t) = a \cdot h(t)$ .

## 5.2. Класичний метод розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР) другого порядку

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (5.1)$$

За теоремою про структуру розв'язання ЛНДР II порядку загальний розв'язок (5.1) складається із суми загального розв'язку відповідного йому лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР) та часткового розв'язку.

Отже, розв'яжемо ЛОДР II порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (5.2)$$

за допомогою характеристичного рівняння

$$\lambda'' + p\lambda + q = 0. \quad (5.3)$$

Розглянемо три варіанти вибору загального розв'язку:

1) якщо корені рівняння (5.3) дійсні та різні, то загальний розв'язок записують у такому вигляді:



$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}; \quad (5.4)$$

2) якщо корені (5.3) дійсні й однакові, то загальний розв'язок подають у такому вигляді:

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + x c_2); \quad (5.5)$$

3) якщо корені (5.3) є комплексними ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ), то загальний розв'язок наводять у такому вигляді:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x). \quad (5.6)$$

У разі, коли права частина рівняння (5.1) є константою, частковий розв'язок (5.1) можна записати так:

$$y = \bar{y} + c_0, \quad (5.7)$$

де  $\bar{y}$  – загальний розв'язок відповідного ЛОДР.

За відомих початкових умов знаходять першу та другу похідні, а потім разом із знайденою функцією  $y$  із невизначеними коефіцієнтами  $c_i$ , початковими умовами підставляють у (5.1).

### **5.3. Застосування перетворення Лапласа в теорії автоматичного керування**

Рівняння динаміки АСК у символічній формі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y(t) = \\ & = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + a_{m-1} p + b_m) f(t), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$p \equiv \frac{d}{dt}$$

або

$$A(p)y(t) = B(p)f(t). \quad (5.9)$$

Для знаходження інтеграла функції  $y(t)$  потрібно розв'язати таке характеристичне рівняння:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (5.10)$$

Рівняння п'ятого та вище ступенів у радикалах не розв'язують, а розв'язання рівнянь третього та четвертого ступенів є громіздкими. Тому під час аналізу САК переходять від класичних методів розв'язання диференціальних рівнянь до їхніх розв'язань за допомогою перетворень Лапласа.

Перетворення Лапласа – це функціональне перетворення, за якого функцію дійсної змінної  $f(t)$  перетворюють на функцію комплексної змінної  $F(p)$ .

Функцію  $f(t)$  можливо перетворити за Лапласом, якщо вона визначена й однозначна для всієї зони, а також якщо виконується така умова:

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \text{ (кінцевий)}. \quad (5.11)$$

Функцію  $f(t)$  називають *оригіналом*, функцію  $F(p)$  – *зображенням* (за Лапласом). Перетворення оригіналу в зображення називають *прямим перетворенням Лапласа* і здійснюють за допомогою такого інтеграла:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (5.12)$$

Перетворення зображення в оригінал називають *зворотним перетворенням Лапласа* і здійснюють за допомогою такого інтеграла:

$$f(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (5.13)$$

Операції прямого та зворотного перетворень Лапласа позначають « $L$ » і « $L^{-1}$ » відповідно. Зв'язок між оригіналом і зображенням записують так:

$$f(t) = F(p). \quad (5.14)$$

Таблиця 5.1 – Таблиця перетворень Лапласа

$f(t) (t > 0)$	$F(p) = L[f(t)]$
$1(t)$	$1/p$
$\delta(t)$	$1$
$t$	$1/p^2$
$t^n$	$n! / p^{n+1}$
$e^{at}$	$1 / (p - a)$
$e^{-at}$	$1 / (p + a)$
$t \cdot e^{at}$	$1 / (p - a)^2$
$t^n \cdot e^{at}$	$n! / (p - a)^{n+1}$
$\sin(\omega t)$	$\omega / (p^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$p / (p^2 + \omega^2)$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$[\sin(\varphi) \cdot p + \cos(\varphi) \cdot \omega] / (p^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$[\cos(\varphi) \cdot p - \sin(\varphi) \cdot \omega] / (p^2 + \omega^2)$
$e^{at} \cdot \sin(\omega t)$	$\omega / [(p - a)^2 + \omega^2]$
$e^{at} \cdot \cos(\omega t)$	$(p - a) / [(p - a)^2 + \omega^2]$
$e^{at} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$[\sin(\varphi) \cdot (p - a) + \cos(\varphi) \cdot \omega] / [(p - a)^2 + \omega^2]$
$e^{at} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	$[\cos(\varphi) \cdot (p - a) - \sin(\varphi) \cdot \omega] / [(p - a)^2 + \omega^2]$

Тут  $n!$  – факторіал, що дорівнює  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ .

Варто зазначити, що вигляд оригіналу функцій, наведених у таблиці 5.1, визначений лише для  $t > 0$ , тобто значення змінної  $t$  обмежені зоною додатних значень. Для від'ємних  $t$  значення функції  $x(t)$  дорівнює нулю.

#### 5.4. Застосування перетворення Лапласа для знаходження часових характеристик

У задачах аналізу та синтезу використовують різні динамічні характеристики, тому важливо знати ще і зв'язок між ними, який є однозначним, тому що фактично він є відображенням однакових властивостей елемента або системи, але наведеній у різних формах. Водночас це дає можливість використовувати в конкретному завданні саме такі характеристики, які є найбільш зручними. Вище вже було зазначено, що перехідна функція  $h(t)$  є розв'язком диференціального рівняння. Зважаючи, що  $\delta$ -функція й одиничний стрибок зв'язані між собою такою залежністю:

$$\delta(t) = 1'(t), \quad (5.15)$$

то справедливі також залежності

$$w(t) = h'(t), h(t) = \int_0^t w(t)dt \quad (5.16)$$

для зображення за Лапласом одиночного стрибка

$$L[1(t)] = \frac{1}{p}. \quad (5.17)$$

Тому

$$L[h(t)] = \frac{W(p)}{p}, \quad (5.18)$$

$$h(t) = L^{-1} \left[ \frac{W(s)}{s} \right], \quad (5.19)$$

де  $L^{-1}$  – символ зворотного перетворення Лапласа.

Беручи до уваги, що

$$L[\delta(t)] = 1, \quad (5.20)$$

можна записати такий вираз:

$$L[w(t)] = W(p), w(t) = L^{-1}[W(p)]. \quad (5.21)$$

Реакцію елемента або системи на довільний вхідний сигнал визначають за допомогою інтеграла згортки (інтеграла Дюамеля), який має такий вигляд:

$$f(t) = h(t)U(0) + \int_0^t h(t - \tau)U'(\tau)d\tau, \quad (5.22)$$

$$f(t) = h(0)U(t) + \int w(t - \tau)U(\tau)d\tau. \quad (5.23)$$

### ***Питання для самоперевірки***

1. Якими бувають часові характеристики системи в ТАК?
2. Що називають перехідною характеристикою?
3. Що називають імпульсною характеристикою?
4. Як класичним методом розв'язувати диференціальні рівняння?
5. У чому полягає використання перетворень Лапласа?
6. Як застосовують перетворення Лапласа для знаходження часових характеристик?

## Тема 6

# ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ І ЇХНІХ ЕЛЕМЕНТІВ

### 6.1. Поняття частотної характеристики

Вище було розглянуто два типових вхідних впливи: одиничний ступінчастий та імпульсний. Третім найважливішим видом типового вхідного впливу є *гармонійний* або, інакше кажучи, синусоїдальний вплив. Важливість і широке застосування його для дослідження систем керування обумовлено такими чинниками, що підтверджено теоретичними викладками і практичними дослідженнями:

– практично всі реальні вхідні впливи, а отже, й реакція на них елемента або системи можуть бути подані як сума гармонійних сигналів;

– в усталеному режимі (тобто після завершення деякого часу після внесення збурення, необхідного для завершення перехідних процесів) лінійні елементи передають гармонійні сигнали без спотворень;

– гармонійні сигнали нескладно й досить точно (але не завжди дешево) фізично реалізуються в процесі досліджень на реальному об'єкті.

Розглянемо поведінку системи під впливом гармонійного сигналу. Нехай на вхід лінійного стаціонарного елемента (рис. 6.1 *a*) у момент часу  $t = 0$  подано гармонійний вплив із частотою  $\omega$  і з початковою фазою  $\varphi_1$

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (6.1)$$

де  $x_m$ ,  $\omega = 2\pi T$  і  $T$  – амплітуда, кутова частота й період коливань вхідного сигналу.

Після завершення перехідного процесу на виході елемента встановиться режим вимушених коливань, і вихідна величина  $y(t)$  буде змінюватися за однаковим законом, що й вхідна  $x(t)$ , але з іншою амплітудою  $y_m$  й іншим фазовим зсувом за часом щодо вхідного сигналу (рис. 6.2 б)

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (6.2)$$

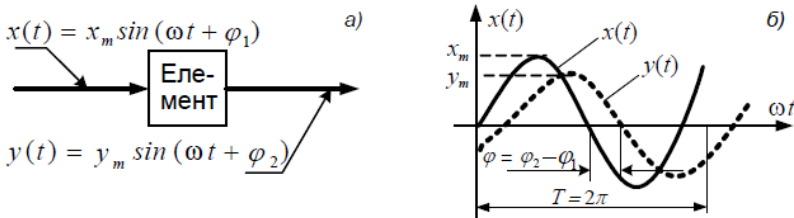


Рисунок 6.1 – Розуміння частотної характеристики

Здійснивши аналогічні дослідження, але вже за іншої частоти, можна переконатися, що амплітуда і фазовий зсув змінилися, тобто *вони залежать від частоти*. Повторюючи подібні дослідження багаторазово для різних частот, можна експериментально одержати таку залежність. Якщо відтворити аналогічні експерименти з іншим елементом, то можна переконатися, що залежності змінних  $y_m$  і  $\varphi_2$  від частоти інші. Отже, такі залежності можуть бути характеристиками динамічних властивостей елементів. Такі характеристики називають *частотними*.

*Залежність відношення амплітуд вихідного та вхідного сигналів від частоти*  $A(\omega) = \frac{y_m}{x_m}$  називають *амплітудно-частотною характеристикою* (АЧХ) елемента (системи). АЧХ демонструє, як елемент пропускає зі входу на вихід сигнали різних частот.

Залежність фазового зсуву (різниці фаз) між вхідним і вихідним сигналами від частоти називають *фазоча-*

стотною характеристикою (ФЧХ) елемента. ФЧХ демонструє, яке відставання або випередження вихідного сигналу за фазою щодо вхідного створює елемент на різних частотах.

Водночас частотні характеристики мають набагато більше значення, ніж просто реакція на гармонічний сигнал. Особливого значення вони набули внаслідок наявності зв'язку з передатними функціями.

Динамічні властивості досліджуваних елементів або систем визначають амплітудно-частотною  $A(\omega)$ , фазочастотною  $\varphi(\omega)$  й амплітудно-фазовою характеристиками (рис. 6.2).

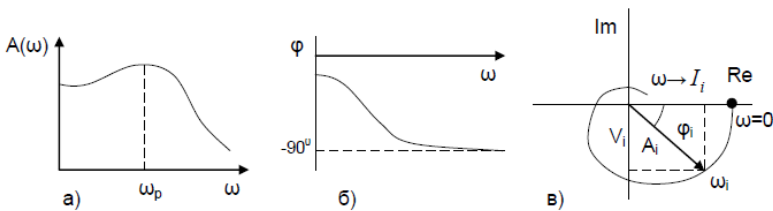


Рисунок 6.2 – Частотні характеристики:

а) амплітудно-частотна (АЧХ);

б) фазочастотна (ФЧХ);

в) амплітудно-фазова (АФХ)

У разі збільшення частоти  $\omega$  амплітудно-фазова характеристика  $A(\omega) \rightarrow 0$ , тобто проявляються інерційні властивості елемента та системи. Чим менша інерційність, тим ширша  $A(\omega)$ , тобто більша смуга (діапазон) частот, що пропускаються. Часто існує *резонансна частота*, за якої АЧХ  $A(\omega)$  має максимальне значення.

Фазочастотна характеристика  $\varphi(\omega)$  є від'ємною, тобто вихідні коливання відстають від вхідних за фазою.



## 6.2. Зв'язок частотних характеристик із передатними функціями

Інтегральне перетворення Фур'є визначають таким виразом:

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (6.3)$$

де  $x(t)$  – будь-яка функція часу, що задовольняє умови застосування перетворення Фур'є. Її можна розглядати як окремий випадок перетворення Лапласа  $X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ , якщо комплексний аргумент  $s = c_0 + j\omega$  є уявним (абсциса збіжності  $c_0$ ). Такий підхід хоч і не є математично обґрунтованим, однак здебільшого він цілком виправданий.

Розглянемо динамічну систему, динаміку якої описують диференціальним рівнянням (6.4), у котрому для простоти не будемо враховувати змінну збурення  $f(t)$

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b \frac{du(t)}{dt} + u(t).$$

Використовуючи властивість лінійності і властивість диференціювання перетворень Фур'є, які є аналогічними відповідним властивостям перетворень Лапласа, виконаємо перетворення Фур'є рівняння (6.4) за таких нульових початкових умов:

$$\begin{aligned} a_0(j\omega)^2 Y(j\omega) + a_0(j\omega) Y(j\omega) + Y(j\omega) &= \\ &= b(j\omega) U(j\omega) U(j\omega); \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} [a_0(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + 1] Y(j\omega) &= [b(j\omega) + 1] U(j\omega); \\ \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} &= \frac{b(j\omega) + 1}{a_0(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + 1} = W(j\omega). \end{aligned} \quad (6.7)$$

У виразах (6.5)–(6.7) змінні  $Y(j\omega)$  та  $U(j\omega)$  називаються *Фур'є-перетворенням* функцій  $y(t)$  та  $u(t)$ , які набувають сенсу спектральних характеристик, відповідних цим змінним сигналам, залежних від частоти  $\omega$ . Відношення  $W(j\omega)$  поліномів називають *частотною передатною функцією комплексної змінної* (або просто *частотною характеристикою*). Оскільки вона відображає відношення величин спектральних характеристик сигналів на виході та вході системи, то її часто називають *комплексним коефіцієнтом підсилення*.

Порівнюючи вираз для передатної функції (4.23) із виразом (6.7), бачимо, що частотну характеристику можна одержати з передатної функції за допомогою формальної заміни комплексної змінної  $s$  на  $j\omega$  і навпаки.

### **6.3. Комплексний передатний коефіцієнт підсилення. Амплітудно-фазова частотна характеристика системи**

За будь-якого значення частоти  $\omega$  функція  $W(j\omega)$  буде комплексною, а отже, як будь-яке комплексне число може бути подана в такій показовій формі:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\Psi(\omega)}. \quad (6.8)$$

Тут *модуль*  $A(\omega)$  має значення *амплітудно-частотної характеристики*, а *аргумент*  $\Psi(\omega)$  – *фазочастотної характеристики*. Як бачимо, частотна передатна функція в показовій формі поєднує в собі АЧХ і ФЧХ, тому її називають *амплітудно-фазовою частотною функцією* (АФЧХ). Оскільки АЧХ і ФЧХ є дійсними функціями частоти  $\omega$ , тому їх нескладно подати графічно (рис. 6.3).

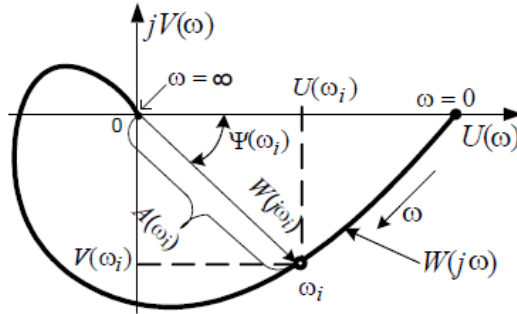


Рисунок 6.3 – Амплітудно-фазова частотна характеристика

Кожному фіксованому значенню частоти  $\omega_i$  відповідає комплексне число  $W(j\omega_i)$ , яке на комплексній площині можна подати у вигляді вектора, що має довжину  $W(\omega_i)$  – модуль і кут повороту  $\Psi(\omega_i)$  – зсув фаз. Від’ємні значення зсуву фаз  $\Psi(\omega)$ , які відповідають відставанню вихідного сигналу від вхідного за часом, відраховують за годинниковою стрілкою від додатного напрямку дійсної осі.

У разі змінення частоти від нуля до нескінченності вектор АФЧХ  $W(j\omega)$  повертається навколо початку координат і одночасно змінюється його довжина. Крива, яку опише кінець цього вектора під час руху, і є АФЧХ. Кожній точці частотної характеристики відповідає певне значення частоти.

Проекції вектора  $W(j\omega)$  на дійсну й уявну осі називають відповідно *дійсною* й *уявною частотними характеристиками* та позначають  $U(\omega)$  і  $V(\omega)$ . З урахуванням цього можна записати АФЧХ у такій алгебраїчній формі:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \quad (6.9)$$

Характеристики  $U(\omega)$  і  $V(\omega)$  можуть бути одержані з частотної передатної функції (6.7) за допомогою нескла-

дних перетворень. Як і для будь-якого комплексного числа або функції, зв'язок між АФЧХ у показовій формі запису (6.8) та виразами для дійсної та уявної частотної характеристики може бути подано у вигляді таких співвідношень:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad (6.10)$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (6.11)$$

#### **6.4. Логарифмічна амплітудно-фазова частотна характеристика**

Істотним недоліком розглянутих вище частотних характеристик є те, що графічно вони, особливо для систем високого порядку й у зоні високих частот, є кривими досить складної форми з нерівномірним розподілом частот, що ускладнює їхню побудову та використання для аналізу систем. Цього недоліку значною мірою позбавлені логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ).

*Логарифмічною амплітудно-частотною характеристикою* (ЛАЧХ) називають криву, побудовану в логарифмічному масштабі частот (рис. 6.4) відповідно до такого виразу:

$$L(j\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|. \quad (6.12)$$

*Логарифмічною фазочастотною характеристикою* (ЛФЧХ) називають фазову частотну характеристику, побудовану в логарифмічному масштабі частот (див. рис. 6.4).

Під час побудови ЛАЧХ і ЛФЧХ на осі абсцис відкладають частоту в логарифмічному масштабі  $\lg(\omega)$ , але на шкалу наносять фактичні значення частоти, тобто наявні одночасно дві шкали. Розташовують обидві характери-

ки так, що вісь ординат ЛАЧХ і вісь ординат ЛФЧХ були сумісними, а вісь частот – спільною, для того, щоб змінення фази нескладно можна було порівняти зі зміненням амплітуди.

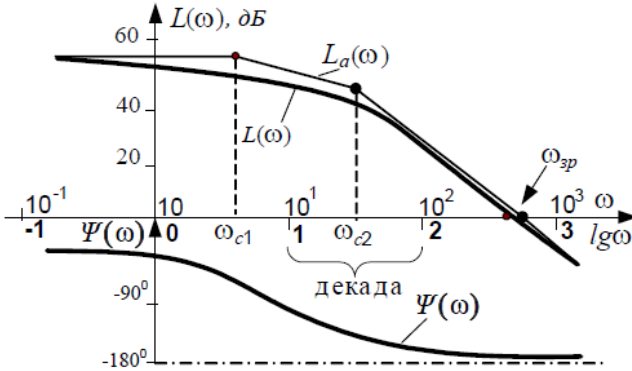


Рисунок 6.4 – Логарифмічна звичайна та асимптотична АФЧХ

Величину  $L(\omega)$  вимірюють у *децибелах*, а  $\Psi(\omega)$  – у *градусах* або *радіанах*. Одиницями вимірювання логарифмічної осі частот є *декади* (рідше *октави*).

*Декадою* називають інтервал частот, що відповідає зміні частоти в десять разів і такий, що дорівнює  $\lg(10) = 1$  (*октава* – зміна частоти вдвічі).

*Бел* (Б) – одиниця вимірювання співвідношення потужностей двох сигналів. Один децибел (дБ) дорівнює 0,1 Бел. Якщо потужність одного сигналу більша (менша) за потужність іншого сигналу в 10 разів, то ці потужності відрізняються на 1 Бел. Але оскільки потужність гармонічного сигналу пропорційна квадрату його амплітуди, то в разі застосування цієї одиниці для вимірювання відношення амплітуд перед логарифмом з'являється множник **2**. Наприклад, якщо на певній частоті амплітуда  $A(\omega) = 100$ ,

то це означає, що потужності вхідного та вихідного сигналів відрізняються у  $100^2$  разів, тобто на  $2 \lg(100) = 4$  Б або на 40 дБ, відповідно, і  $L(\omega) = 20 \lg(A(\omega)) = 40$  дБ.

*Крутизну нахилу АЧХ у напівлогарифмічному масштабі вимірюють у децибелах на декаду (дБ/дек).*

Точка, що відповідає значенню частоти  $\omega = 0$ , розташована зліва в нескінченності, оскільки  $\lg(0) = -\infty$ . Тому під час практичного застосування *вісь ординат проводять через будь-яку точку осі частот* із тих лише міркувань, щоб була справа й частина ЛАЧХ, яку необхідно досліджувати.

Частоту  $\omega_{зр}$ , за якої ЛАЧХ перетинає вісь частот, що відповідає значенню  $A(\omega) = 1$ , називають *частотою зрізу системи*. Інакше кажучи, за такої частоти амплітуда сигналу на вході дорівнює амплітуді сигналу на виході.

ЛАЧХ надає користувачеві такі переваги:

– можливість охоплення в одному графіку найбільш широкого діапазону частот із однаково наочною зміною властивостей у різних діапазонах частот;

– розтягування графіка вздовж логарифмічної осі частот надає йому *асимптотичну властивість*, тобто із достатньою для інженерних цілей точністю можна значні ділянки ЛАЧХ замінити прямими лініями – асимптотами, які завжди мають нахил, кратний 20 дБ/дек.

### ***Питання для самоперевірки***

1. Що називають частотними характеристиками?
2. Якими бувають частотні характеристики?
3. Який є зв'язок передатної функції з частотними характеристиками?
4. Що називають логарифмічними частотними характеристиками?

## Тема 7

# ТИПОВІ ДИНАМІЧНІ ЛАНКИ ТА ЇХНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 7.1. Поняття типової динамічної ланки

Часто буває так, що різні за своєю фізичною природою явища (процеси, об'єкти) можуть бути описані диференціальними рівняннями однакового вигляду (структури, тобто вони мають однакову форму запису рівнянь, але з різними коефіцієнтами). З цієї причини їх можна вважати однаковими динамічними (але не фізичними) елементами (блоками). Так, наприклад, процес нагрівання печі з електричним підігрівом (рис. 7.1 а), зміна напруги на конденсаторі електричного RC-ланцюга (рис. 7.1 б) і процес розігнання електродвигуна (рис. 7.1 в) у першому наближенні можуть бути описані диференціальним рівнянням першого порядку такого виду:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t), \quad (7.1)$$

де  $T$  – стала часу, що визначає теплову, електричну або електромагнітну інерцію відповідного елемента;

$K$  – коефіцієнт підсилення (передавання) елемента в статичному режимі;

$u(t)$ ,  $y(t)$  – вхідна та вихідна змінні, які мають, як це бачимо з рисунка 7.1, різну фізичну природу.

Такі елементи (об'єкти, процеси, явища), які мають різну фізичну природу, але подібний математичний опис, називають *математично подібними*.

Незалежність математичного опису математично подібних елементів (об'єктів, процесів, явищ) від їхньої фізичної природи дає можливість під час розглядання (аналізу, дослідження) абстрагуватися від їхньої сутності й

розглядати їх як деякі абстрактні, ідеальні ланки (іноді називають «кібернетичні блоки»). Отже, надалі будемо розглядати елемент (явище, процес, об'єкт) як деякий «чорний ящик», для якого встановлені (відомі) пов'язані причинно-наслідковими зв'язками вхідні й вихідні сигнали.

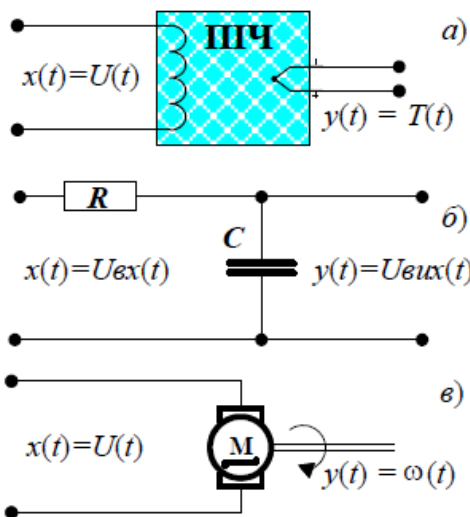


Рисунок 7.1 – Приклади динамічних пристроїв із математичним описом одного вигляду

Різноманітність природних явищ спричиняє й різноманітність ланок – від найпростіших до дуже складних. Однак зазвичай будь-яку складну систему можна навести як сукупність менш складних, з'єднаних між собою. Як приклад розглянемо динамічну систему – генератор постійного струму з незалежним збудженням, який виробляє струм і віддає його навантаженню, яке має активну та реактивну складові (рис. 7.2 а). На рисунку 7.2 б подано принципову еквівалентну електричну схему генератора, а на рисунку 7.2 в – його структурну схему. На останній схемі добре бачимо, як пов'язані між собою й математично описані



окремі структурні елементи та процеси динамічної системи (зліва направо): обмотка збудження (ОЗБ), процес виникнення ЕРС (електрорушійної сили) генератора, якірний ланцюг генератора (М) й електричне навантаження ( $Z_n$ ), а також зв'язки між ними. Як можна побачити з цього прикладу, виявляється краще розглядати властивості різних частин системи окремо; у цьому разі різноманітність математичних описів ланок зменшиться.

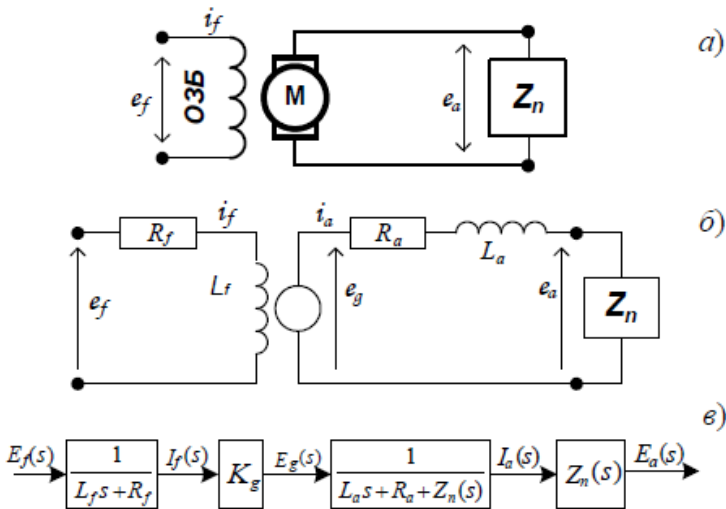


Рисунок 7.2 – Приклад складної динамічної системи

Якщо структура системи та взаємозв'язки між її елементами відомі, то завдання виділення окремих елементів не становить особливих труднощів. Однак іноді відомим є лише загальний опис складної системи як самостійної одиниці.

Досвід доводить, що чим більш детальною є математична модель системи, тим вищий порядок диференціального рівняння. Передатні функції систем високого порядку (зазвичай  $n > 4$ ) виявляються громіздкими та незру-

чними для аналізу. Щоб обійти таку проблему, передатну функцію складної системи подають у вигляді добутку простих співмножників, порядок кожного з яких не перевищує двох ( $n \leq 2$ ).

Нехай динамічну систему описують передатною функцією у вигляді відношення двох поліномів (так здебільшого й відбувається), тобто у вигляді такого дробу:

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (7.2)$$

Відомо, що будь-який правильний дріб можна подати у вигляді добутку простих співмножників (дробів) із поліномами в чисельнику і знаменнику не вище ніж другого порядку. У цьому разі для подання будь-якої передатної функції можна використовувати обмежений набір елементів із математичним описом у вигляді таких виразів:

$$k, s^v, \frac{1}{Ts+1}, \frac{1}{T^2s^2+2T\xi s+1}, \tau s + 1, \tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1, \quad (7.3)$$

де  $k, v, T, \tau, \xi$  – сталі величини, причому  $k > 0$ ;

$v$  – додатне або від’ємне ціле число;

$T > 0, \tau > 0, 0 \leq \xi < 1$ .

Отже, приходимо до розуміння можливості подання будь-якої складної динамічної системи у вигляді сукупності більш простих (елементарних) підсистем (ланок) з обмеженого набору, які в певний спосіб можуть бути пов’язані між собою. Такі найбільш прості підсистеми у складі будь-якої складної динамічної системи, передатні функції яких мають вигляд простих дробів, називають *типовими (або елементарними) динамічними ланками*.

Варто звернути увагу на те, що у випадку, наведеному в прикладі на рисунку 7.2, кожній типовій ланці від-

повідляє реальний фізичний елемент або процес. Зазвичай це не є обов'язковою умовою, тобто ділення (або, інакше кажучи, декомпозиція) складної динамічної системи на сукупність типових (елементарних) ланок може мати виключно умовний характер.

У зв'язку з цим варто зазначити, що *під час аналізу систем керування можуть виникати задачі двох видів:*

– *задача структурного аналізу*, тобто одержання передатної функції системи з типових ланок, у певний спосіб пов'язаних між собою;

– *задача декомпозиції*, тобто подання складної системи на підставі її передатної функції у вигляді сукупності більш простих підсистем (елементів, ланок).

*Типові* (елементарні) *ланки*, крім зовнішніх ознак (подання передатної функції у вигляді найпростіших виразів (7.3)), мають такі *загальні властивості* (рис. 7.3):

– *властивість одновимірності*, що виражають у наявності лише однієї вхідної й однієї вихідної координати;

– *властивість односпрямованості*, яка полягає в тому, що вихідна величина залежить від вхідних впливів, а зворотний вплив виходу на вхід відсутній. Приєднання до виходу такої ланки іншій ланці не змінює передатну функцію першої ланки (ідеалізація).

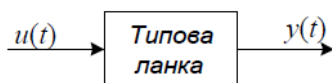


Рисунок 7.3 – Зображення типової ланки

Відповідно до переліку (7.3) розрізняють такі типові ланки: підсилювальну, інтегрувальну, реальну й ідеальну, таку, що диференціює, таку, що форсує, з інерційними властивостями, чистого запізнювання, аперіодичну першого та другого порядків і коливальну ланки, які з урахуванням

деяких загальних властивостей можна поділити на такі групи:

1) *статичні ланки*, у яких статична характеристика відмінна від нуля. До них належать підсилювальні, аперіодичні, коливальні ланки, які (крім підсилювальної ланки) є фільтрами низької частоти і вносять від'ємний фазовий зсув;

2) *ланки, що диференціюють*, у яких статична характеристика дорівнює нулю. До них належать ідеальні та реальні ланки, що диференціюють. У їхню передатну функцію завжди входить співмножник  $s$  (у чисельнику), вони є фільтрами високої частоти та вносять додатний фазовий зсув;

3) *астатичні ланки*, які не мають статичної характеристики. До них належать ланки з інтегрувальними властивостями. У їхню передатну функцію завжди входить хоча б один співмножник вигляду  $1/s$ , вони є фільтрами низької частоти та вносять від'ємний фазовий зсув.

Крім вищезазначених ланок, під час побудови структурних схем складних систем керування використовують такі ланки:

– *арифметичні ланки*, що здійснюють одну з арифметичних операцій: додавання, віднімання, множення або ділення тощо;

– *логічні ланки*, що здійснюють операції логічного додавання або множення тощо.

## 7.2. Ідеальна підсилювальна ланка

Підсилювальна ланка є єдиною з усіх типових ланок, у якої відсутні інерційні (динамічні) властивості. Альтернативними назвами цієї ланки є такі: пропорційна або безінерційна. Як приклади реалізації підсилювальної ланки (з певною мірою ідеалізації, оскільки в природі в чистому вигляді вони не трапляються) можна навести такі пристрої:

електронний підсилювач, «дитячу гойдалку», важільні механізми, зубчасті й інші передачі (редуктори) тощо.

Підсилювальна ланка миттєво й без спотворень передає вхідний сигнал із входу на вихід. Її описують простим лінійним рівнянням  $y(t) = k \cdot u(t)$ , з якого бачимо, що вихідний сигнал змінюється прямо пропорційно вхідному сигналу з коефіцієнтом підсилення  $k$ .

Передатна функція такої ланки є константою  $W(s) = k$ .

До частотних характеристик ідеальної підсилювальної ланки належать такі:

– амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ):  $W(j\omega) = k$  (рис. 7.4 а);

– дійсна та уявна амплітудно-фазові частотні характеристики відповідно:  $U(\omega) = k$ ;  $v(\omega) = 0$ ;

– амплітудно-частотна (АЧХ) та фазочастотна характеристики (ФЧХ):  $A(\omega) = k$ ;  $\Psi(\omega) = 0$ ;

– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ):  $L(\omega) = 20 \lg(k)$  (рис. 7.4 б).

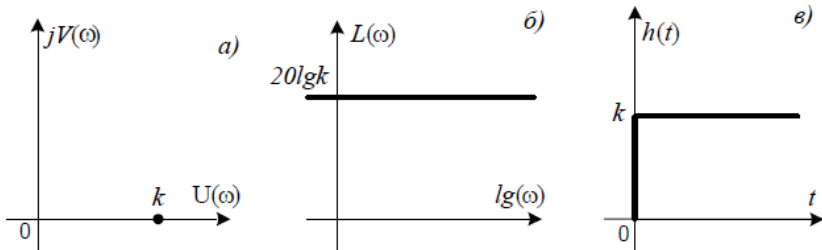


Рисунок 7.4 – Характеристики ідеальної підсилювальної ланки

Частотні характеристики підсилювальної ланки не залежать від частоти, причому ФЧХ тотожно дорівнює нулю, тобто в гармонійних коливаннях, поданих на вхід ланки, на виході змінюється лише амплітуда в  $k$  разів, а фазо-

вий зсув – відсутній. АФЧХ підсилювальної ланки є додатним дійсним числом, і її графік являє собою точку на додатній дійсній півосі (див. рис. 7.4 а).

Часовими характеристиками ідеальної підсилювальної ланки є такі:

- перехідна характеристика:  $h(t) = k \cdot 1(t)$  (рис. 7.4 в);
- імпульсна перехідна (вагова) функція:  $w(t) = \delta(t)$ .

### 7.3. Ідеальна інтегрувальна ланка

Інтегрувальні ланки характеризуються тим, що за умови сталого вхідного впливу величина вихідного сигналу необмежено зростає. Таких ланок у природі не існує, оскільки будь-який сигнал є обмеженим. Як приклади реальних пристроїв або процесів, які з деякими припущеннями можна вважати інтегрувальними ланками, можна навести такі: лічильники, що підсумовують витрату речовини або енергії, процес заряду конденсатора, процес заповнення ємності рідиною, електричний двигун, якщо за вихідну величину взяти число обертів вала тощо.

Математичний опис інтегрувальної ланки є таким:  $y(t) = \frac{1}{T_i} \int u(t) dt$  (в операторній формі запису  $py(t) = \frac{1}{T_i} u(t) = ku(t)$ ), де  $T_i$  – стала часу інтегрування, яка визначає швидкість зростання вихідного сигналу. З математичного опису бачимо, що вихідний сигнал інтегрувальної ланки є інтегралом від вхідного.

Передатна функція інтегрувальної ланки має такий вигляд:  $W(s) = \frac{k}{s}$ .

До частотних характеристик ідеальної інтегрувальної ланки належать такі:

- амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ):  $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}$  (рис. 7.5 а);

– дійсна та уявна амплітудно-фазові частотні характеристики відповідно:  $U(\omega) = 0$ ;  $V(\omega) = -\frac{k}{\omega}$ ;

– амплітудно-частотна (АЧХ) та фазочастотна (ФЧХ) характеристики:  $A(\omega) = \frac{k}{\omega}$ ;  $\psi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ ;

– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)  $L(\omega) = 20 \lg(k) - 20 \lg(\omega)$  (рис. 7.5 б).

Часовими характеристиками ідеальної інтегрувальної ланки є такі:

– перехідна характеристика  $h(t) = k \cdot t$  (рис. 7.5 в);

– імпульсна перехідна (вагова) функція  $w(t) = k$ .

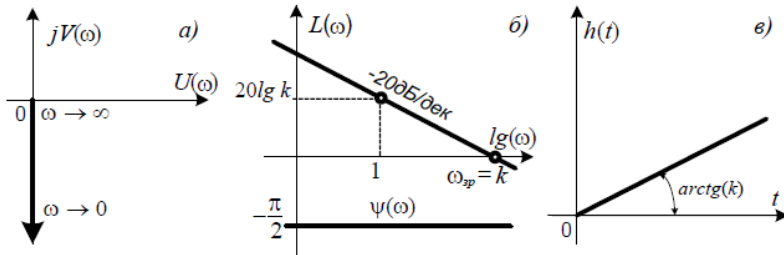


Рисунок 7.5 – Характеристики ідеальної інтегрувальної ланки

АЧХ інтегрувальної ланки є гіперболічною функцією частоти, а ФЧХ від частоти не залежить, тому АФЧХ ланки являє собою уявну функцію частоти. Для додатних значень частоти її графік збігається з від’ємною уявною піввіссю (див. рис. 7.5 а).

Розглядаючи ЛАЧХ (див. рис. 7.5 б), можна відзначити такі дві характерні точки характеристики, які використовують у процесі побудови графіка:

– за значенням логарифмічної амплітуди на частоті 1 Гц визначають сталу часу інтегрування ланки (часто на-

зивають *коефіцієнтом добротності за швидкістю*), тобто  $L(1) = 20 \lg(k)$ ;

– частоту зрізу ланки  $\omega_{зр}$  (точка перетину ЛАЧХ із віссю частот) чисельно дорівнює коефіцієнту добротності за швидкістю.

Як бачимо з рисунка 7.5 в, під час подавання на вхід інтегрувальної ланки сталого сигналу, що не зникає (функції Хевісайда), *вихідний сигнал збільшується до нескінченності зі сталою швидкістю*, тобто перехідна функція за умови  $t \rightarrow \infty$  не має кінцевого значення. Такі ланки (й системи, до складу яких вони входять) називають *ланками без самовирівнювання*. Ця властивість є причиною принципової відмінності астатичних систем керування, що містять у собі інтегрувальні ланки, від статичних систем, які інтегрувальних ланок не містять, а перехідна функція завжди є обмеженою за величиною.

#### 7.4. Аперіодична ланка першого порядку

Аперіодична ланка першого порядку поєднує в собі властивості підсилювальної та інтегрувальної ланок. Інтегрувальна складова зумовлює динаміку або інерційні властивості аперіодичної ланки, тому її ще називають *інерційною*. Прикладом таких ланок є будь-який електричний RC-ланцюжок, теплові об'єкти тощо.

Математичний опис аперіодичної ланки в операторній формі запису має такий вигляд:  $(T \cdot p + 1) \cdot u(t) = k \cdot u(t)$ . Як бачимо, ланку характеризують двома такими параметрами:

$T$  – сталою часу, яка характеризує його інерційні властивості;

$k$  – коефіцієнтом підсилення (передавання) в установленому режимі роботи.



Передатна функція аперіодичної ланки має такий вигляд:  $W(s) = \frac{k}{Ts+1}$ .

До частотних характеристик аперіодичної ланки першого порядку належать такі:

– амплітудно-фазова частотна функція (АФЧХ):  
 $W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k(-Tj\omega+1)}{(Tj\omega+1)(-Tj\omega+1)} = \frac{k(1-j\omega T)}{(T\omega)^2+1}$  (рис. 7.6 а);

– дійсна та уявна амплітудно-фазові частотні функції (характеристики):  $U(\omega) = \frac{k}{(T\omega)^2+1}$ ;  $V(\omega) = \frac{-kT\omega}{(T\omega)^2+1}$  відповідно;

– амплітудно-частотна (АЧХ) та фазочастотна (ФЧХ) характеристики:  $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2+1}}$ ;  $\Psi(\omega) = -\arctg(T\omega)$ ;

– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ):  $L(\omega) = 20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1}$  (рис. 7.6 б).

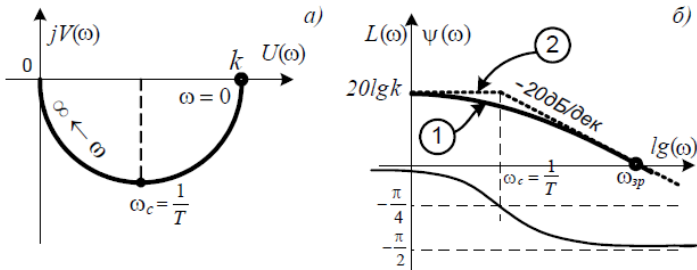


Рисунок 7.6 – Частотні характеристики аперіодичної ланки

АФЧХ аперіодичної ланки першого порядку (див. рис. 7.6 а) являє собою (завжди!) півколо, яке починається на додатній дійсній півосі в точці, що дорівнює коефіцієнту підсилення  $k$ , має характерну точку  $\omega_c = \frac{1}{T}$  у своїй нижній частині й закінчується в початку координат.

Звичайну ЛАЧХ подано на рисунку 7.6 б кривою 1. У разі практичного застосування зазвичай обмежуються побудовою асимптотичної ЛАЧХ, поданої на рисунку 7.6 б пунктирною лінією 2.

Логарифмічна частотна характеристика на частоті сполюки  $\omega_c = \frac{1}{T}$  дорівнює  $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$  й асимптотично наближається до  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  за умови  $\omega \rightarrow \infty$  і до нуля за умови  $\omega \rightarrow 0$ . Ці характеристики є однотипними для всіх аперіодичних ланок і в разі зміни сталої часу можуть бути одержані паралельним зсувом уздовж осі частот.

*Часовими характеристиками* аперіодичної ланки першого порядку є такі:

– перехідна характеристика:  $h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$  (рис. 7.7 а);

– імпульсна перехідна (вагова) функція:  $w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{-t/T}$ . Відповідну їй характеристику подано на рисунку 7.7 б.

Перехідна й імпульсна перехідна характеристики аперіодичної ланки є експонентами, отже, після закінчення певного часу (теоретично в нескінченності) вихідна величина з певною точністю досягає нового усталеного значення для перехідної характеристики або нульового значення для вагової характеристики. Такі ланки (системи) називають *ланками із самовирівнюванням*. Як бачимо з графіка рисунка 7.7 а, усталене значення вихідної змінної залежить від коефіцієнта підсилення  $k$ , а час перехідного процесу – від величини сталої часу  $T$ .

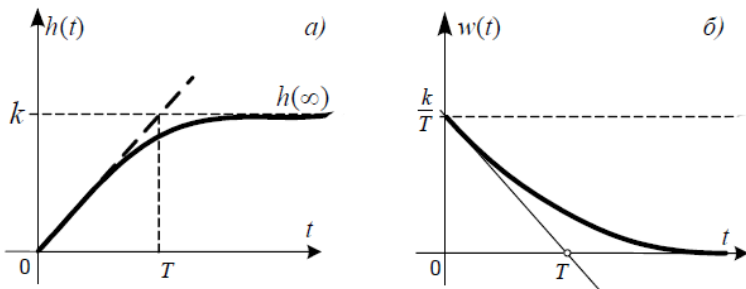


Рисунок 7.7 – Часові характеристики аперіодичної ланки

За перехідною характеристикою нескладно визначити параметри аперіодичної ланки першого порядку, до яких належать такі:

- коефіцієнт підсилення  $k$ , що дорівнює  $h(\infty)$ ;
- стала часу  $T$ , за часом від точки перетину дотичної до перехідної характеристики в початковий момент часу (або в будь-який інший) з лінією усталеного значення (побудова дотичної – у край наближена операція, проте дає гарні результати під час оцінювання інерційних властивостей системи).

Аперіодичні ланки в теорії автоматичного керування мають особливе значення з таких причин:

- вони значною мірою поширені в природі та техніці;
- значна кількість процесів більш складного характеру вдається з достатньою для практичного застосування точністю апроксимувати аперіодичною ланкою першого порядку, що істотно спрощує подальші дослідження.

### 7.5. Аперіодична, коливальна та консервативна ланки другого порядку

Аперіодична, коливальна та консервативна ланки другого порядку мають однаковий математичний опис у вигляді диференціального рівняння другого порядку

$(T_0^2 \cdot p^2 + T_1 + 1) \cdot y(t) = k \cdot u(t)$ , поданого в операторній формі. У такому рівнянні завжди можна замінити змінні  $T = T_0$  й  $\xi = \frac{T_1}{2T}$ , унаслідок чого одержимо таке загальне рівняння:

$$(T^2 p^2 + 2\tau\xi p + 1)y(t) = ku(t). \quad (7.4)$$

Вигляд ланки (аперіодична, коливальна або консервативна), а також вигляд перехідного процесу за такого запису повністю визначено величиною  $\xi$  – коефіцієнтом демпфування:

$\xi \geq 1$  – аперіодична ланка першого порядку;

$0 < \xi < 1$  – коливальна ланка;

$\xi = 0$  – консервативна ланка ( $T \neq 0$ ).

Передатна функція ланки (7.4) загалом має такий вигляд:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1}. \quad (7.5)$$

### 7.5.1. Аперіодична ланка другого порядку

За умови  $\xi \geq 1$  характеристичне рівняння (знаменник виразу (7.5)) має два дійсних корені  $a_1$  і  $a_2$ , тому передатну функцію ланки (7.5) можна завжди перетворити до такого вигляду:

$$W(s) = \frac{k}{(s+a_1)(s+a_2)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (7.6)$$

де  $T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}$ , тобто аперіодична ланка другого порядку фактично не є елементарною, а складається із двох аперіодичних ланок першого порядку.

Отже, АФЧХ аперіодичної ланки другого порядку в показовій формі має вигляд (7.6). Звідси бачимо, що загальний граничний зсув фаз збільшується вдвічі (до мінус  $180^0$ ) і годограф характеристики буде в 4 і 3 квадрантах. Загалом додавання кожної чергової аперіодичної ланки першого порядку збільшує інерційність системи та від'ємний зсув фаз на  $90^0$ .

### 7.5.2. Коливальна ланка

За умови  $0 < \xi < 1$  характеристичне рівняння (знаменник рівняння (7.5)) має два комплексно спряжених корені  $\alpha \pm j\beta$ . З цієї причини подальше розкладання на прості множники стає неможливим в зоні дійсних чисел і тому коливальну ланку розглядають як елементарну.

Частотна передатна функція (АФЧХ) після підстановки в (7.5)  $s = j\omega$  і нескладних перетворень набуває вигляду  $W(j\omega) = \frac{k}{(1-T^2\omega^2)+j2T\xi\omega}$ , звідки можна одержати інші частотні характеристики:  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$ ,  $\Psi(\omega)$  і  $A(\omega)$ . З огляду на громіздкість їх тут не наводимо.

Один із графіків АФЧХ коливальної ланки подано на рисунку 7.8 а. Порівнюючи АФЧХ коливальної ланки та АФЧХ аперіодичної ланки першого порядку, можна помітити, що для обох графіків характерне зменшення амплітуди зі збільшенням частоти від значення, що відповідає коефіцієнту підсилення аж до нуля (тобто вони виконують функцію фільтрів низьких частот), і притаманна наявність від'ємного фазового зсуву (динамічне запізнювання).

Водночас наявні такі дві істотні відмінності:

– граничний від'ємний фазовий зсув коливальної ланки вдвічі більший і становить  $-\pi$ . Можна помітити зв'язок граничного фазового зсуву з порядком полінома в знаменнику передатної функції: збільшення порядку на одиницю збільшує зсув на  $2\pi$  (за незмінного полінома в чисельнику);

– АФЧХ коливальної ланки має ділянку, на якій амплітуда має величину, більшу за початкове значення (явище резонансу).

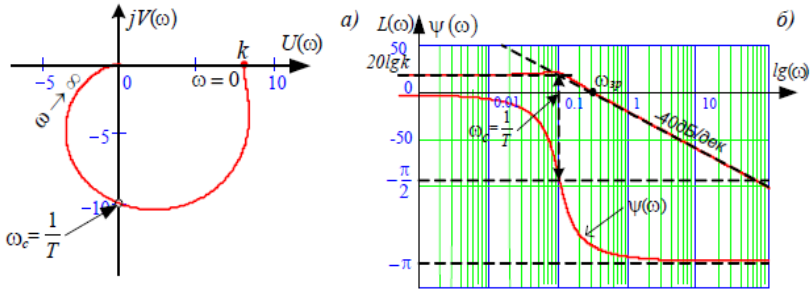


Рисунок 7.8 – Частотні характеристики коливальної ланки

Характерна точка частоти сполуки  $\omega_c = \frac{1}{T}$  АФЧХ коливальної ланки розташована на перетині характеристики з уявною віссю.

Логарифмічну АФЧХ подано на рисунку 7.8 б. Вираз для логарифмічної амплітудно-частотної характеристики має такий вигляд:

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{k}{\sqrt{(1 - (T\omega)^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}} \right), \quad (7.7)$$

або

$$L(\omega) = 20 \lg(k) - 20 \lg \sqrt{(1 - (T\omega)^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}. \quad (7.8)$$

Отже, можна одержати вираз для асимптотичної ЛАЧХ у такому вигляді:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg(k), & \text{за умови } \omega < \omega_c; \\ 20 \lg(k) - 40 \lg(T\omega), & \text{за умови } \omega \geq \omega_c. \end{cases}$$

Як бачимо, побудова асимптотичної ЛАЧХ майже не відрізняється від побудови ЛАЧХ аперіодичної ланки

першого порядку, за винятком нахилу другої асимптоти, який у цьому разі становить мінус 40 дБ/дек.

Як і для аперіодичної ланки першого порядку, найбільшу відмінність (похибку) асимптотичної ЛАЧХ від точної спостерігають у зоні частоти сполуки  $\omega_c$ , причому вона збільшується із зменшенням коефіцієнта демпфування  $\zeta$  та стає суттєвою за умови  $\zeta < 0,3$ .

Часовими характеристиками коливальної ланки є такі:

– перехідна функція

$$h(t) = k\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0)\right), \quad \text{де } \alpha = \frac{\xi}{T};$$

$\beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}; \varphi_0 = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$ . Характерний вигляд перехідної характеристики коливальної ланки подано на рисунку 7.9 а;

– характерний вигляд імпульсної перехідної (вагової) характеристики подано на рисунку 7.9 б.

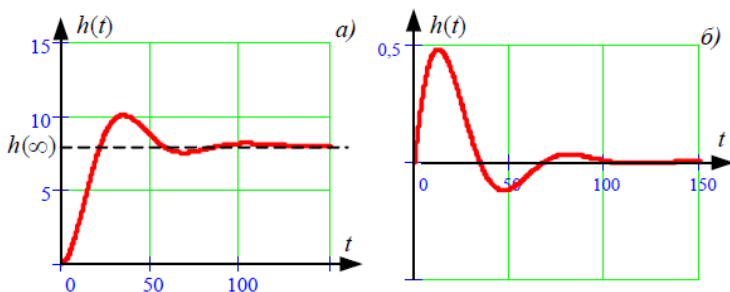


Рисунок 7.9 – Часові характеристики коливальної ланки

### 7.5.3. Консервативна ланка

Консервативна ланка є виродженим випадком коливальної ланки, для якої передатна функція (7.5) набуває вигляду  $W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}$ .

До частотних характеристик консервативної ланки належать такі:

- амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ):  $W(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 1} = \frac{k}{1 - (T\omega)^2}$  (рис. 7.10 а);
- дійсна та уявна амплітудно-фазові частотні функції (характеристики) відповідно:  $U(\omega) = \frac{k}{1 - (T\omega)^2}$ ;  $V(\omega) = 0$ ;
- амплітудно-частотна та фазочастотна функції (характеристики):  $A(\omega) = \frac{k}{1 - (T\omega)^2}$ ;  $\Psi(\omega) = 0$ ;
- логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ):  $L(\omega) = 20 \lg(k) - 20 \lg \sqrt{1 - (T\omega)^2}$  (рис. 7.10 б).

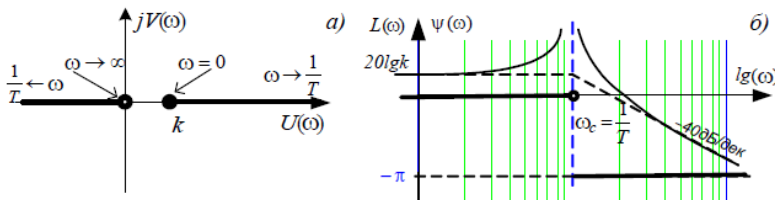


Рисунок 7.10 – Частотні характеристики консервативної ланки

Варто зауважити, що на частоті сполюки  $\omega = \frac{1}{T}$  частотна характеристика консервативної ланки має розрив.

Перехідна характеристика консервативної ланки являє собою графік гармонічних коливань, описуваних перехідною функцією  $h(t) = k \cdot (1 - \cos(\omega_c t))$ , з частотою, що дорівнює частоті сполюки  $\omega_c$ .

## 7.6. Ідеальна ланка, що диференціює

Ланки, що диференціюють, це такі ланки, що реагують лише на швидкість зміни вхідного сигналу, а не на його величину (відхилення). Наприклад, якщо вхідний сигнал є сталим або збільшується зі сталою швидкістю, то вихідний сигнал буде відсутнім або матиме стале значення. Ідеальних ланок, що диференціюють, у чистому вигляді



в природі не існує. Класичним прикладом наближення моделі ланки, що диференціює, може бути послідовно під'єднаний в електричній ланцюг конденсатор, проте в реальному конденсаторі завжди існують струми витоку, які спотворюють ідеалізовану передатну функцію.

Математичний опис такої ланки має вигляд у формі диференціального рівняння  $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$  і в операторній формі запису  $y(t) = k \cdot p \cdot u(t)$ , з яких бачимо, що вихідний сигнал прямо пропорційний швидкості (тобто першій похідній) зміни вхідного сигналу.

Передатну функцію ідеальної ланки, що диференціює, записують так:  $W(s) = k \cdot s$ .

До частотних характеристик ідеальної ланки, що диференціює, належать такі:

– амплітудно-фазова частотна функція (АФЧХ):  $W(j\omega) = jk\omega = k\omega e^{+j\pi/2}$  (рис. 7.11);

– дійсна та уявна амплітудні фазочастотні функції відповідно:  $U(\omega) = 0$ ;  $V(\omega) = k\omega$ ;

– амплітудно-частотна (АЧХ) та фазочастотна (ФЧХ) функції:  $A(\omega) = k\omega$ ;  $\Psi(\omega) = +\frac{\pi}{2}$ ;

– логарифмічна амплітудно-частотна функція (ЛАЧХ):  $L(\omega) = 20 \lg(k) + 20 \lg(\omega)$  (див. рис. 7.11).

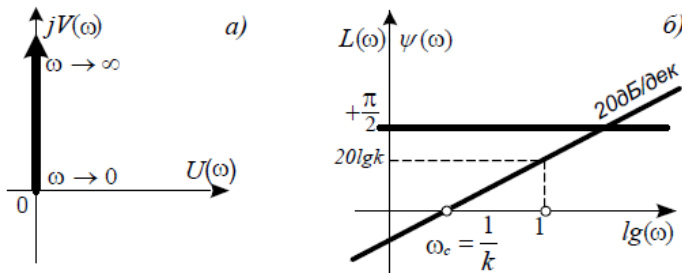


Рисунок 7.11 – Частотні характеристики ідеальної ланки, що диференціює

Часовими характеристиками ідеальної ланки, що диференціює, є такі:

- перехідна функція:  $h(t) = \delta(t)$  (рис. 7.12);
- імпульсна перехідна (вагова) функція:  $w(\omega) = \frac{d\delta(t)}{dt}$ .

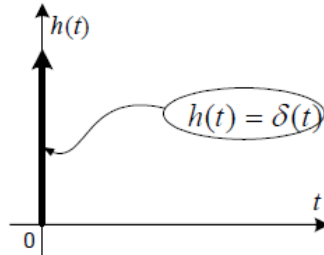


Рисунок 7.12 – Перехідна характеристика ланки, що диференціює

Аналізуючи АФЧХ ланки, що диференціює (див. рис. 7.11 а), можна помітити, що за умови  $\omega \rightarrow \infty$  амплітуда вихідного сигналу нескінченно збільшується, але будь-який реальний об'єкт під час практичного застосування фільтрує (не пропускає) високі частоти. Це підтверджує, що в природі ідеальних ланок, що диференціюють, не може бути. Нездійсненність ідеальної ланки, що диференціює, бачимо також із виразу для імпульсної перехідної функції, що дорівнює похідній від дельта-функції.

### 7.7. Реальна ланка, що диференціює

Якщо ланка реагує на похідну вхідного сигналу, але в цьому разі додатково має інерційні властивості, то така ланка є реальною ланкою, що диференціює, математичний опис якої в операторній формі запису такий:  $(T \cdot p + 1) \times u(t) = k \cdot y(t)$ . Схожі ланки трапляються в природі. Як

приклад можна вже без припущень навести реальний електричний RC-ланцюг із конденсатором, під'єднаним послідовно.

Передатну функцію реальної ланки, що диференціює, записують так:  $W(s) = \frac{ks}{Ts+1}$ .

До частотних характеристик реальної ланки, що диференціює, належать такі:

– амплітудно-фазова частотна функція (АФЧХ):

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega}{Tj\omega+1} = \frac{k\omega}{\sqrt{(T\omega)^2+1}} e^{j(\frac{\pi}{2}-\text{arctg}T\omega)} \quad (\text{рис. 7.13 а});$$

– дійсна та уявна амплітудно-фазові частотні функції відповідно:  $U(\omega) = \frac{kT\omega^2}{(T\omega)^2+1}$ ;  $V(\omega) = \frac{k\omega}{(T\omega)^2+1}$ ;

– АЧХ і ФЧХ:  $A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{(T\omega)^2+1}}$ ;  $\Psi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\omega T)$ ;

– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ):  $L(\omega) = 20\lg \frac{k}{T} + 20\lg\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$  (рис. 7.13 б).

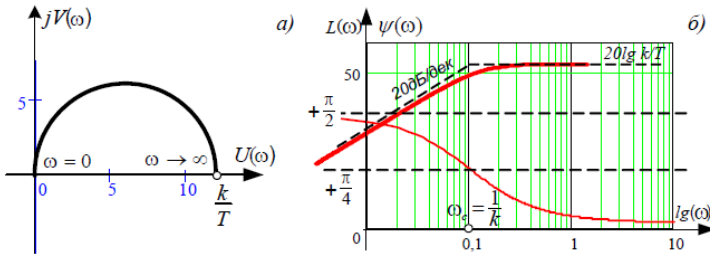


Рисунок 7.13 – Частотні характеристики реальної ланки, що диференціює

Часовими характеристиками реальної ланки, що диференціює, є такі:

– перехідна функція  $h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$ , яка має стрибок у початковий момент часу, такий, що дорівнює  $k/T$ , після чого сигнал затухає по експоненті (рис. 7.14);

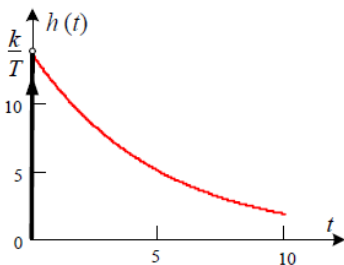


Рисунок 7.14 – Перехідна характеристика реальної ланки, що диференціює

– імпульсна перехідна функція:  $w(t) = -\frac{k}{T^2} e^{-t/T}$ .

### 7.8. Ідеальна ланка першого порядку, що форсує

*Ланкою, що форсує*, називають ланку, що диференціює, з властивостями підсилювальної ланки з математичним описом в операторній формі запису  $y(t) = k(T \cdot p + 1) \cdot u(t)$ , вихідний сигнал якої пропорційний як самому вхідному сигналу, так і його похідній.

Передатну функцію ланки, що форсує, записують так:  $W(s) = k \cdot (T \cdot s + 1)$ .

До *частотних характеристик* ланки, що форсує, належать такі:

– амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ):  $W(j\omega) = k(Tj\omega + 1)$  (рис. 7.15 а);

– дійсна та уявна амплітудно-фазові частотні функції відповідно:  $U(\omega) = k$ ;  $V(\omega) = kT\omega$ ;

– амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики:  $A(\omega) = k\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$ ;  $\psi(\omega) = \text{arctg}(\omega T)$ ;

– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ):  $L(\omega) = 20 \lg(k) + 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$  (рис. 7.15 б).

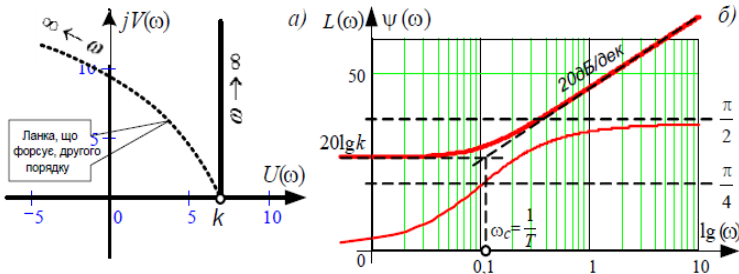


Рисунок 7.15 – Частотні характеристики ланки, що форсує, першого порядку

Розглядаючи частотні характеристики ланки, що форсує, першого порядку можна помітити, що ця ланка деякою мірою є повною протилежністю аперіодичній ланці першого порядку, а саме: граничний зсув фаз  $90^\circ$ , але зі знаком «плюс», нахил асимптоти в зоні високих частот –  $20$  дБ/дек, але з протилежним знаком.

*Часовими характеристиками* ланки, що форсує, є такі функції:

– перехідна функція  $h(t) = k \cdot (T \cdot \delta(t) + 1(t))$  є сумою масштабованої дельта-функції й одиничного ступінчастого сигналу;

– імпульсна перехідна функція, яку визначають як похідну від перехідної функції; вона не має фізичної реалізації.

Частотні характеристики ланки, що форсує, другого порядку деякою мірою нагадують розглянуті вище (див. рис. 7.15 а) ланки першого порядку, однак додатний зсув фаз збільшується до  $180^\circ$ , а додатний нахил логарифмічної АЧХ у зоні високих частот стає таким, що дорівнює  $40$  дБ/дек.

Ідеальних ланок, що форсують (як і таких, що диференціюють), у природі не існує – усі вони мають певною мірою інерційні властивості, що виражається в наявності інтегрувальної складової. Прикладом є *ізодромна ланка*, яку використовують у промислових регуляторах (ПІ-регулятор), з таким математичним описом в операторній формі запису:  $p \cdot y(t) = k \cdot (\tau \cdot p + 1) u(t)$ .

### 7.9. Трансцендентні й ірраціональні ланки. Ланка чистого запізнювання

Системи, що мають у своєму складі ланки із трансцендентними й ірраціональними передатними функціями, не є лінійними. Проте для їхнього дослідження часом можуть бути використані логарифмічні частотні характеристики.

Найбільш поширеним прикладом трансцендентної ланки є ланка чистого (транспортного) запізнювання, сигнал на виході якої з'являється без зміни, але з деяким запізненням  $\tau$ . Як приклади таких ланок можна навести переміщення матеріалу вздовж транспортера, переміщення газів і рідин уздовж довгих трубопроводів тощо. Зважаючи на їхню фізичну сутність, такі ланки часто називають *ланками транспортного запізнювання*.

Математичний опис ланки чистого запізнювання має такий вигляд:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{за умови } 0 \leq t < \tau; \\ ku(t), & \text{за умови } t \geq \tau. \end{cases}$$

Передатну функцію ланки чистого запізнювання записують так:  $W(s) = ke^{-\tau s}$ , де  $\tau$  – час запізнювання.

До *частотних характеристик* ланки чистого запізнювання належать такі функції:

– амплітудно-фазова частотна функція (АФЧХ):  $W(s) = ke^{-j\tau\omega} = k(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau)$  (рис. 7.16 а);

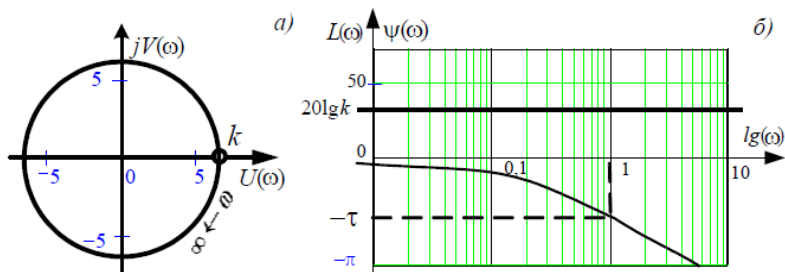


Рисунок 7.16 – Частотні характеристики ланки чистого запізнювання

– дійсна та уявна амплітудно-фазові частотні функції відповідно:  $U(\omega) = k \cos \tau \omega$ ;  $V(\omega) = -k \sin \omega \tau$ ;

– амплітудно-частотна та фазочастотна функції (характеристики):  $A(\omega) = k$ ;  $\psi(\omega) = -\omega \tau$ ;

– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ):  $L(\omega) = 20 \lg(k)$  (рис. 7.16 б).

*Часовими характеристиками* ланки чистого запізнювання є такі:

– перехідна функція:  $h(t) = k \cdot 1(t - \tau)$  (рис. 7.17);

– імпульсна перехідна (вагова) функція:  $w(t) = k \cdot \delta(t - \tau)$ .

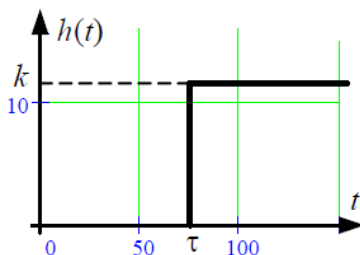
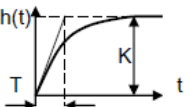
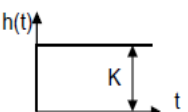
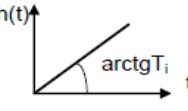
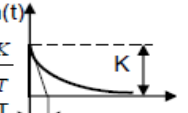


Рисунок 7.17 – Перехідна характеристика ланки чистого запізнювання

У складі передатних функцій ірраціональних ланок наявні нелінійні ірраціональні операції, наприклад, взяття квадратного кореня. Прикладом ірраціональної ланки може бути передатна функція напівінерційної ланки першого порядку  $W(s) = \frac{k}{\sqrt{T_s+1}}$ .

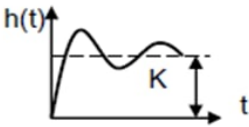
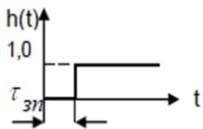
Підсумовуючи типові динамічні ланки, доцільно навести їхні математичні описи у вигляді загальної таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Характеристика типових елементарних ланок

№ пор.	Ланка й перехідна функція	Рівняння	Передатна функція
1	2	3	4
1	<p>Аперіодична</p> 	$T \frac{dx}{dt} + x = KU$	$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}$
2	<p>Підсилювальна</p> 	$x = KU$	$W(p) = K$
3	<p>Інтегрувальна</p> 	$x = \frac{1}{T_i} \int_0^t U dt$	$W(p) = \frac{1}{T_i p}$
4	<p>Що диференціює</p> 	$x = K \frac{dU}{dt}$	$W(p) = Kp$



Продовження таблиці 7.1

1	2	3	4
5	<p>Коливальна</p> 	$T_1^2 \frac{d^2 x}{dt^2} +$ $+ T_2 \frac{dx}{dt} +$ $+ x = KU$	$W(p) =$ $= \frac{K}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$
6	<p>Із запізнюванням</p> 	$x = U(t - \tau_{3n})$	$W(p) = e^{-p\tau_{3n}}$

**Питання для самоперевірки**

1. Що називають типовою динамічною ланкою?
2. Якими бувають типові динамічні ланки?
3. Що називають підсилювальною ланкою та чим її характеризують?
4. Що називають інтегрувальною ланкою та чим її характеризують?
5. Що називають аперіодичною ланкою першого порядку та чим її характеризують?
6. Що називають аперіодичною ланкою другого порядку та чим її характеризують?
7. Що називають ланкою, що диференціює, та чим її характеризують?
8. Що називають ланкою, що форсує, та чим її характеризують?

## Тема 8

# СТРУКТУРНІ СХЕМИ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇХНІХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

### 8.1. Поняття структурної схеми та її складові

Під час виконання аналізу та синтезу систем автоматичного керування часто застосовують структурний аналіз, основними завданнями якого є такі:

- вивчення впливу ланок і способів їхнього з'єднання на властивості системи загалом;
- перетворення багатоконтурних структурних схем до еквівалентних одноконтурних схем із метою визначення передатних функцій для подальшого аналізу їхньої стійкості та якості перехідних процесів.

*Структурна схема* – це умовне графічне зображення САК (або її частини), на якому умовними знаками наносять усі ланки, зовнішні впливи та зв'язки ланок між собою. Структурну схему створюють на підставі аналізу передатної функції або функціональної схеми системи. В останньому випадку назву кожного елемента схеми замінюють його математичним описом (передатною функцією). Елемент структурної схеми не завжди відповідає елементу функціональної схеми – він може відповідати декільком елементам і навпаки.

Головною *перевагою* структурної схеми, як і будь-якого графічного зображення, є *високий ступінь наочності*.

Елементами структурної схеми є ланки, що зображують у вигляді прямокутників (рис. 8.1 а), усередині яких записують передатну функцію ланки (рідше диференціальне рівняння). Взаємозв'язки впливу на схемі зазначають лініями зв'язку зі стрілками, над якими вказують фізичну величину (змінну)  $y_i(t)$  або її зображення за Лапласом  $Y_i(s)$ , як це подано на рисунку 8.1 б. Оскільки на ланку може впливати лише одна величина, то коли ланок декілька, ви-

користуються арифметичну ланку – суматор (рис. 8.1 *в*) для додавання сигналів однакової фізичної природи та елемент порівняння (рис. 8.1 *з*) для віднімання. Точки на схемі, у яких відбувається розгалуження сигналу, називаються *вузлами* (рис. 8.1 *д*). У кожній ланці сигнал поширюється лише від входу до виходу.

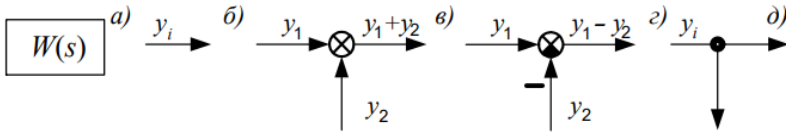


Рисунок 8.1 – Елементи структурної схеми САК

Структурна схема демонструє будову САК, наявність зовнішніх впливів і точки їхнього прикладання, напрями поширення сигналів і вихідну величину. За структурною схемою можна скласти математичний опис САК, тобто її передатну функцію, спираючись на передатні функції ланок. Наприклад, нехай є структурна схема деякої системи, наведеної на рисунку 8.2. Зображення вихідного сигналу за Лапласом, зважаючи на наявність суматора, дорівнює  $Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$ . Зображення сигналів на виході кожної з динамічних ланок системи може бути визначено як  $Y_1(s) = W_1(s) \cdot X_1(s)$  і  $Y_2(s) = W_2(s) \cdot X_2(s)$ .

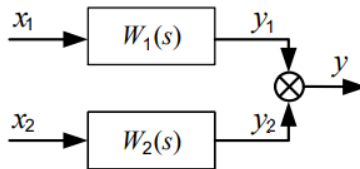


Рисунок 8.2 – Приклад структурної схеми

Підставивши ці останні вирази в перший, одержуємо співвідношення для визначення зображення вихідного сигналу з огляду на зображення вхідних сигналів і переда-

тні функції:  $Y(s) = W_1(s) \cdot X_1(s) + W_2(s) \cdot X_2(s)$ . Під час складання структурних схем САК необхідно дотримуватися такого правила: починати складання структурної схеми необхідно із зображення сигналу завдання та розміщувати динамічні ланки, з яких складається прямий ланцюг системи, зліва направо до вихідної величини. Тоді зворотні зв'язки будуть спрямовані навпаки – справа наліво.

## 8.2. Правила перетворення структурних схем

### 8.2.1. Послідовне з'єднання ланок

Знайдемо передатну функцію  $W(s)$  ланки (рис. 8.3 б), що є еквівалентною послідовному з'єднанню ланок  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$ , ...,  $W_n(s)$  (рис. 8.3 а).

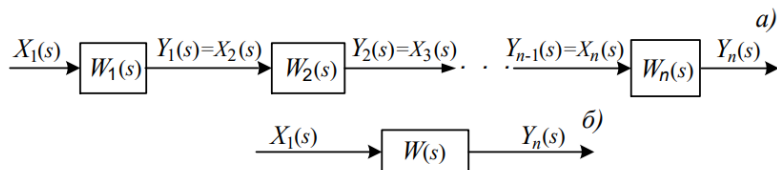


Рисунок 8.3 – Еквівалентне перетворення послідовного з'єднання ланок

Зображення вихідних сигналів кожної ланки має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 Y_1(s) &= W_1(s) \cdot X_1(s); \\
 Y_2(s) &= W_2(s) \cdot X_2(s); \\
 &\dots \\
 Y_n(s) &= W_n(s) \cdot X_n(s).
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

Вихідний сигнал останньої ланки є вихідним сигналом усієї системи, а еквівалентна передатна функція всієї системи за визначенням  $W(s) = \frac{Y_n(s)}{X_1(s)}$ . За послідовного

з'єднання вихідний сигнал кожної попередньої ланки є вхідним для наступної ланки. Виконуючи послідовну підстановку виразів (8.1) у вираз для передатної функції еквівалентної ланки, одержимо таку шукану передатну функцію:

$$W(s) = \frac{Y_n(s)}{X_1(s)} = \frac{W_n(s) \cdot X_n(s)}{X_1(s)} = \frac{W_n(s) \cdot Y_{n-1}(s)}{X_1(s)} = \dots = W_n(s) \cdot W_{n-1}(s) \cdot \dots \cdot W_1(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s). \quad (8.2)$$

Отже, *передатна функція системи послідовно з'єднаних ланок дорівнює добутку передатних функцій ланок, що входять до такого з'єднання.*

### 8.2.2. Паралельне з'єднання ланок

Знайдемо передатну функцію  $W(s)$  ланки (рис. 8.4 б), що є еквівалентною паралельному з'єднанню ланок  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$ , ...,  $W_n(s)$  (рис. 8.4 а).

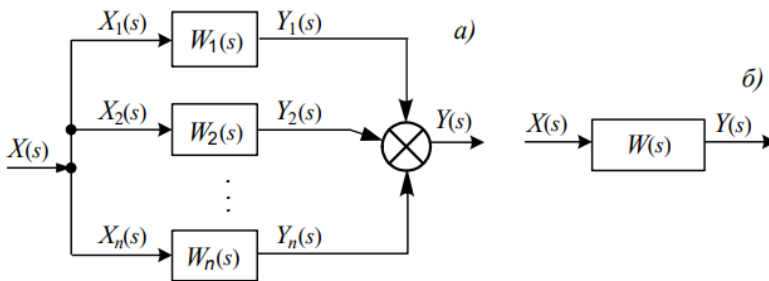


Рисунок 8.4 – Еквівалентне перетворення паралельного з'єднання ланок

Зображення вихідних сигналів кожної ланки паралельного з'єднання (рис. 8.4 а) з урахуванням  $X(s) = X_1(s) = \dots = X_n(s)$  набуде такого вигляду:

$$Y_1(s) = W_1(s) \cdot X(s);$$

$$Y_2(s) = W_2(s) \cdot X(s); \quad (8.3)$$

$$Y_n(s) = W_n(s) \cdot X(s).$$

За паралельного з'єднання вхідні сигнали всіх ланок є однаковими, а вихідний сигнал дорівнює сумі вихідних сигналів кожної з ланок. Тоді з урахуванням (8.2) можна записати такий вираз:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s) = \\ &= W_1(s)X(s) + W_2(s)X(s) + \dots + W_n(s)X(s) = \\ &= X(s)(W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_n(s)) = \\ &= X(s) \sum_{i=1}^n W_i(s). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Звідси випливає, що *передатна функція паралельного з'єднання ланок дорівнює сумі передатних функцій окремих ланок*

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{i=1}^n W_i(s). \quad (8.5)$$

### 8.2.3. Зустрічно-паралельне з'єднання ланок

Знайдемо передатну функцію  $W(s)$  ланки (рис. 8.5 б), що є еквівалентною зустрічно-паралельному з'єднанню ланок (ланка, що охоплена зворотним зв'язком) (рис. 8.5 а).

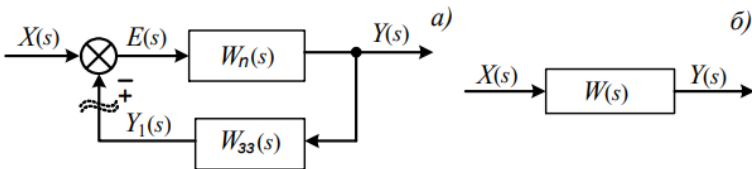


Рисунок 8.5 – Еквівалентне перетворення зустрічно-паралельного з'єднання ланок

Зворотним зв'язком називають передавання сигналу з виходу ланки на її вхід, де його алгебраїчно складають із вхідним сигналом або віднімають від вхідного сигналу. Систему, охоплену зворотним зв'язком, називають *замкненою системою*. Елементи системи від входу до виходу являють собою *прямий ланцюг* із загальною передатною функцією  $W_n(s)$ . Якщо зворотний зв'язок розірвати, як це умовно подано на рисунку 8.5 а, то ланцюжок елементів від входу до точки розриву становить *розімкнений ланцюг* системи, що описують виразом  $W_p(s) = W_n(s) \cdot W_{зз}(s)$ .

Якщо сигнал зворотного зв'язку  $Y_1(s)$  віднімають від вхідного впливу (тобто надходить на суматор зі знаком «мінус»),  $E(s) = X(s) - Y_1(s)$ , то такий зворотний зв'язок називають *від'ємним*, якщо  $E(s) = X(s) + Y_1(s)$  – це *додатний зворотний зв'язок*.

Для одержання передатної функції зустрічно-паралельного з'єднання з від'ємним зворотним зв'язком запишемо вирази для зображень вихідних сигналів кожної ланки

$$\begin{aligned} Y(s) &= W_n(s)E(s); & (8.6) \\ Y_1(s) &= W_{зз}(s)Y(s); \\ E(s) &= X(s) - Y_1(s). \end{aligned}$$

Останнє рівняння в системі (8.6) часто називають *рівнянням замикання системи*.

Виключивши проміжні величини методом підстановки, одержимо такий вираз:

$$\begin{aligned} Y(s) &= W_n(s) \cdot (X(s) - W_{зз}(s) \cdot Y(s)); & (8.7) \\ (1 + W_n(s) \cdot W_{зз}(s)) \cdot Y(s) &= W_n(s) \cdot X(s). \end{aligned}$$

Оскільки передатна функція еквівалентної ланки  $W(s)$  є відношенням зображення вихідного сигналу за Лапласом  $Y(s)$  до вхідного  $X(s)$ , то остаточно одержимо таку передатну функцію:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_n(s)}{1+W_n(s) \cdot W_{зз}(s)} = \frac{W_n(s)}{1+W_p(s)}. \quad (8.8)$$

Якщо зворотний зв'язок додатний, то внаслідок аналогічних перетворень можна одержати такий вираз:

$$W(s) = \frac{W_n(s)}{1-W_p(s)}, \quad (8.9)$$

який відрізняється лише знаком у знаменнику.

За *одиночного зворотного зв'язку*, тобто коли  $W_{зз}(s) = 1$ , передатну функцію замкненої системи визначають так:

$$W(s) = \frac{W_n(s)}{1 \pm W_p(s)}. \quad (8.10)$$

#### 8.2.4. Допоміжні правила перетворення структурних схем

Часто під час перетворення структурної схеми складної системи за допомогою нескладних допоміжних перетворень – перестановок удається звести її (або її частини) до однієї з типових схем-з'єднань елементів: послідовного, паралельного або зустрічно-паралельного. Такі операції підпорядковуються нескладним правилам і зведені в таблиці 8.1.



Таблиця 8.1 – Допоміжні правила перетворення структурних схем

№ пор.	Операція	Вихідна схема	Перетворена схема
1	Переставлення вузлів розгалуження		
2	Переставлення суматорів		
3	Перенесення вузла розгалуження через ланку вперед		
4	Перенесення вузла розгалуження через ланку назад		
5	Перенесення суматора через ланку вперед		
6	Перенесення суматора через ланку назад		

Основний принцип переставлення елементів структурних схем полягає в тому, щоб усі вхідні та вихідні величини вихідної та перетвореної ділянок залишалися незмінними (тотожними). У цьому разі можуть утворюватися

ділянки нееквівалентності, що на кінцевий результат перетворення ніяк не впливає.

### 8.3. Передатна функція типової одноконтурної системи автоматичного керування

Під *типовою одноконтурною системою автоматичного керування* йдеться про систему, узагальнену структурну схему якої наведено на рисунку 8.6. Замкнену систему називають *одноконтурною*, якщо під час її розмикання одержують ланцюжок із послідовно з'єднаних ланок без наявності паралельних з'єднань і зворотних зв'язків.

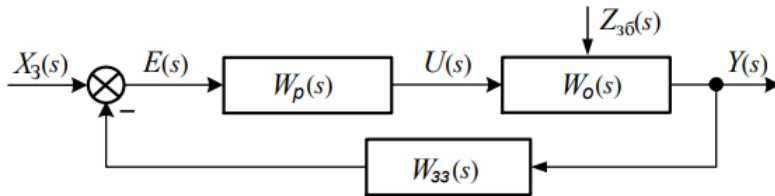


Рисунок 8.6 – Структурна схема типової одноконтурної САК

Розглянемо об'єкт керування з передатною функцією  $W_o(s)$ , який характеризують однією керованою вихідною змінною  $Y(s)$ , що необхідно стабілізувати на заданому рівні  $X_3(s)$ . На вихідну змінну  $Y(s)$  за допомогою об'єкта керування впливає збурення  $Z_{36}(s)$ . Відхилення змінної  $Y(s)$ , викликане таким збуренням, компенсують у системі цілеспрямованою зміною керувального впливу  $U(s)$ , який створює регулятор (пристрій керування) із передатною функцією  $W_p(s)$ . На вході регулятора діє сигнал неузгодженості (помилки)  $E(s)$ , що формується внаслідок порівняння (алгебраїчного підсумовування) завдання  $X_3(s)$  і керованої величини  $Y(s)$ , перетвореної в ланцюгові зворотного зв'язку відповідно до передатної функції  $W_{33}(s)$ .

Для типової одноконтурної САК, поданої на рисунку 8.6, можна скласти декілька таких передатних функцій: за завданням, за збуренням і за відхиленням (за неузгодженості).

*Передатну функцію за завданням* (за каналом впливу завдання) визначають як відношення зображення за Лапласом вихідного сигналу  $Y(s)$  до зображення сигналу завдання  $X_3(s)$  за відсутності впливу збурення  $Z_{3\bar{o}}(s) = 0$  і з урахуванням правил структурних перетворень зустрічно-паралельних з'єднань та від'ємності зворотного зв'язку подають у такому вигляді:

$$W_{XY}(s) = \frac{Y(s)}{X_3(s)} = \frac{W_p(s)W_o(s)}{1+W_p(s)W_o(s)W_{33}(s)}. \quad (8.11)$$

За *одиночного* від'ємного зворотного зв'язку ( $W_{33}(s) = 1$ ) вираз (8.11) спрощують до такого вигляду:

$$W_{XY}(s) = \frac{W_p(s)W_o(s)}{1+W_p(s)W_o(s)} = \frac{W_n(s)}{1+W_n(s)}, \quad (8.12)$$

де  $W_n(s)$  – передатна функція прямого ланцюга САК.

*Передатну функцію за неузгодженості* (за помилкою) визначають як відношення зображення за Лапласом вихідного сигналу  $Y(s)$  до зображення сигналу неузгодженості  $E(s)$  за відсутності впливу збурення  $Z_{3\bar{o}}(s) = 0$  та подають у такому вигляді (без доведення):

$$W_{EY}(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{1+W_p(s)W_o(s)W_{33}(s)}. \quad (8.13)$$

*Передатна функція за збуренням*, що визначають як відношення зображення за Лапласом вихідного сигналу  $Y(s)$  до зображення сигналу збурення  $Z_{зб}(s)$  за відсутності впливу завдання  $X_3(s)$ , істотно залежить від місця прикладання впливу збурення. Її не можна визначити загалом.

*Багатоконтурні системи керування* (або системи підпорядкованого керування) у разі розмикання утворюють паралельні з'єднання або мають зворотні зв'язки, які називають *місцевими* (внутрішніми) й можуть бути перехресними.

Для одержання передатної функції складної багатоконтурної системи керування необхідно, насамперед, перетворенням вузлів і суматорів досягти виключення перехресних зв'язків, а потім, використовуючи три основні правила перетворення структурних схем, перетворити її в типову одноконтурну САК.

### ***Питання для самоперевірки***

1. Що наносять на структурну схему САУ умовними знаками?
2. У чому полягає головна перевага структурної схеми?
3. Який елемент використовують у структурній схемі для підсумовування двох сигналів?
4. Який елемент використовують у структурній схемі для порівняння двох сигналів?
5. Яка передатна функція послідовно з'єднаних ланок?
6. Яка передатна функція паралельно з'єднаних ланок?
7. Яка передатна функція ланки, охопленої зворотним зв'язком?

8. У чому полягає основний принцип, якого необхідно дотримуватися під час переставлення елементів структурних схем?

9. Які дії необхідно виконати під час переставлення вузлів структурної схеми?

10. Що роблять, щоб структурну схему багатоконтурної системи перетворити на структурну схему одноконтурної САК?

## Тема 9

### ОБ'ЄКТИ КЕРУВАННЯ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

У п. 1.2 було зазначено, що в широкому розумінні термін «об'єкт керування» може означати як елементарні процеси перетворення речовини та енергії, так і технологічний комплекс або підприємство загалом. Тут розглянуто елементарні об'єкти автоматичного регулювання, для яких важливо підтримувати необхідний режим роботи із заданими показниками стійкості та якості перехідних процесів. У задачах аналізу та синтезу використовують математичні моделі об'єктів у вигляді залежностей вихідної змінної (регульованої координати) від вхідних змінних. Для оцінювання властивостей об'єктів також застосовують різні динамічні характеристики. Математичні моделі об'єктів використовують для розроблення системи стабілізації технологічних режимів, оптимізації їх у статиці та динаміці. Один і той же самий об'єкт можна описати декількома математичними моделями залежно від розв'язуваної задачі та ступеня деталізації моделей. Під час цього враховують такі особливості об'єктів, як зосередженість або розподіленість параметрів, нелінійність, нестационарність, запізнювання.

*Математичні моделі (ММ) статички* об'єктів із зосередженими параметрами описують таким виразом:

$$X = f(u, z, a), \quad (9.1)$$

де  $f$  – вектор-функція;

$u, z$  – вхідні змінні (керування та збурення);

$a$  – вектор параметрів моделі, який урахує особливості процесів, режимів і конструкції об'єкта.

Зосередженість параметрів означає, що технологічні змінні в різних точках об'єкта мають однакові значення. Це можливо під час інтенсивного перемішуванні робочого

середовища об'єкта, наприклад, у мішалках. Вектор  $a$  в ММ у явному вигляді може бути відсутнім.

Якщо значення змінних у різних точках об'єкта, наприклад у трубопроводі, відрізняються між собою, то статика враховує *розподіленість* параметрів

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, z, a), \quad (9.2)$$

де  $l$  – просторова координата.

Динаміку об'єкта із зосередженими параметрами описують таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, z, a). \quad (9.3)$$

Тут беруть, що швидкість змінювання координати  $x$  у будь-якій точці об'єкта однакова.

Динаміку об'єктів із *розподіленими* параметрами описують диференціальними рівняннями в частинних похідних для урахування змінювання  $x$  за часом  $t$  та за просторовою координатою  $l$

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} = f(x, u, z, a). \quad (9.4)$$

Для нестационарних об'єктів ураховують змінювання їхніх властивостей за часом, тоді диференціальні рівняння мають змінні коефіцієнти.

### 9.1. Загальні властивості об'єктів регулювання

Об'єкти мають різне призначення, у них протікають різні процеси, вони відрізняються конструкцією, але з погляду процесу керування ними можна виділити деякі загальні особливості та властивості:

– самовирівнювання – властивість об’єкта переходити самостійно з одного рівноважного стану в інший під впливом певного вхідного сигналу, збурення. Прикладами можуть бути теплообмінні процеси, що під час змінювання навантаження самостійно переходять з одного стану рівноваги в інший із різними температурами середовища, або збірники, у яких відбувається вільний витік рідини. Самовирівнювання – це наслідок внутрішнього від’ємного зворотного зв’язку в стійкому об’єкті, що проявляється як вплив значення регульованої координати на приплив та (чи) витік речовини або енергії. Ця властивість об’єкта полегшує процес регулювання, зменшує відхилення регульованих координат;

– інерційність, що проявляється в тривалості перехідних процесів і яку оцінюють сталими часу  $T$ . Як було зазначено вище, тривалість перехідного процесу можна визначити за таким виразом:  $t_n = (3 - 4)T$ ;

– ємність – кількість речовини або енергії, яку може накопичувати та витратити об’єкт у процесі регулювання. Прикладом для гідравлічних об’єктів може бути маса речовини, для теплових – кількість теплоти, для рухомих – момент інерції;

– запізнювання – це час між надходженням вхідного сигналу та моментом появи вихідної змінної. Розрізняють транспортне (чисте) ( $\tau_{zn} = \frac{l}{v}$ , де  $l$  – довжина шляху,  $v$  – швидкість), перехідне або ємнісне запізнювання.

*Методи одержання математичних моделей об’єктів* можна поділити на деякі класи, унаслідок чого використовують такі математичні моделі (ММ):

– аналітичні ММ (неформальні). Під час їхнього вивчення використовують фундаментальні закони перетворення речовини й енергії, тепло- й масообміну, гідродинаміки тощо. Унаслідок цього отримують ММ, які описують



клас об'єктів, що є універсальними, і саме в цьому полягає їхня значущість і перевага порівняно з іншими моделями. Водночас одержання аналітичних ММ потребує розкриття природи та механізмів процесів, що призводять до громіздких і незручних для використання математичних моделей. До того ж під час виведення аналітичних ММ не можна обійтися без певних спрощень, що зменшує цінність цих ММ. У теорії автоматичного керування аналітичні моделі розробляють для елементарних об'єктів і зводять до зручного вигляду, наприклад, до стандартної форми диференціальних рівнянь;

– формальні моделі, для одержання яких використовують метод «чорного ящика», коли не розкривають природу процесів, що відбуваються в об'єкті, а шукають такі математичні залежності, які з прийнятною точністю описують зв'язок між вхідними та вихідними змінними. Формальні моделі отримують експериментальним шляхом і перевіряють їх методами комп'ютерного моделювання;

– комбіновані моделі, які певною мірою об'єднують аналітичні та формальні методи, наприклад структуру моделі, визначають завдяки вивченню природи об'єкта, а параметри моделі оцінюють експериментально.

*Порядок одержання аналітичних ММ* для елементарних об'єктів може бути таким:

– вивчають загалом природу об'єкта, процеси, що відбуваються в ньому, визначають регульовані координати, збурення й можливі впливи керування, складають параметричну схему. Кількість регульованих координат визначає порядок математичної моделі;

– складають рівняння матеріального й енергетичного балансів, визначають математичні моделі для розкриття складових цих балансів;

– виконують процедури лінеаризації нелінійних залежностей, роблять припущення, які можуть спростити ММ, наприклад щодо зосередженості параметрів, сталих значень констант процесів тощо;

– розглядають порушення балансів і роблять припущення, що швидкість змінювання регульованих координат пропорційна величині небалансу. Диференціальні рівняння зводять, за можливості, до стандартної форми;

– аналізують одержані математичні моделі, складають структурні схеми, здійснюють комп'ютерне моделювання.

Аналітичні ММ мають бути адекватними (відповідними) об'єкту та завданню, з необхідною точністю відтворювати статичні та динамічні властивості, бути зручними, наочними та, за можливості, простими.

Розглянемо приклади одержання аналітичних ММ елементарних об'єктів.

**Приклад 9.1.** Нехай математичну модель збірника як об'єкта регулювання рівня  $H$  наведено на рисунку 9.1 *a*.

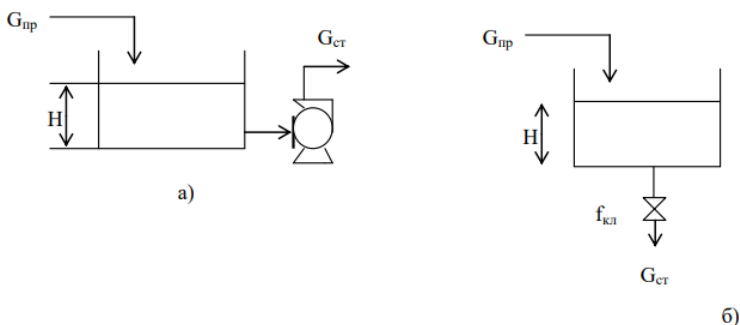


Рисунок 9.1 – Збірники рідини як об'єкти регулювання рівня  $H$

Характерною особливістю роботи об'єкта є те, що витрату речовини з нього здійснюють насосом, продуктивність якого не залежить від рівня  $H$ .

Матеріальний баланс визначає рівність потоків на вході та виході збірника так:

$$\begin{aligned} G_{\text{пр}} &= G_{\text{см}}; \\ H &= \text{const}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Порушення балансу призводить до змінювання рівня рідини  $H$

$$\Delta G_{\text{пр}} - \Delta G_{\text{см}} = F \frac{d(\Delta H)}{dt}. \quad (9.6)$$

Рівняння (9.6) записано у відхиленнях змінних від їхнього номінального (розрахункового) значення. Помножимо рівняння (9.6) на величину  $\frac{H_0}{G_{\text{см}0}}$

$$\frac{F \cdot H_0}{G_{\text{см}0}} \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} = \frac{H_0}{G_{\text{см}0}} \cdot \Delta G_{\text{пр}} - \frac{H_0}{G_{\text{см}0}} \cdot \Delta G_{\text{см}} \quad (9.7)$$

або

$$T \frac{d(\Delta H)}{dt} = K_1 \cdot \Delta G_{\text{пр}} - K_2 \cdot \Delta G_{\text{см}}, \quad (9.8)$$

де  $T$  – стала часу;

$K_1, K_2$  – коефіцієнти передавання;

індекс «0» означає номінальне значення змінної (розрахунковий режим).

Рівняння (9.8) відповідає елементарній інтегральній ланці. Під час одержання ММ було зроблено припущення, що площа поперечного перерізу збірника  $F$  за висотою є

сталою, інакше ММ необхідно доповнити рівнянням для визначення  $F = f(H)$ .

Структурна схема (рис. 9.2 а) складається із двох передатних функцій (інтегральних ланок), а часова характеристика (рис. 9.2 б) доводить, що збірник не має самовирівнювання.

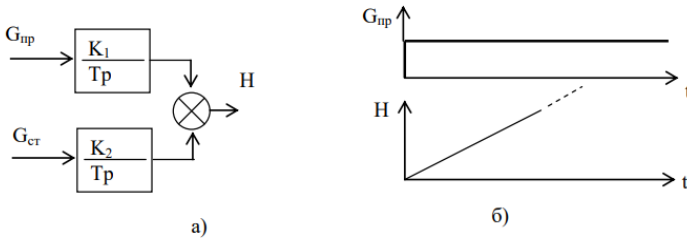


Рисунок 9.2 – Структурна схема (а) та часова характеристика (б) збірника

**Приклад 9.2.** Для збірника, схему якого подано на рисунку 9.1 б, рівняння матеріального балансу та його порушення (9.5), (9.6) мають однаковий вигляд, але величина стоку  $G_{ст}$  залежить від рівня і її визначають за допомогою рівнянням Бернуллі

$$G_{ст} = \mu \cdot f_{кл} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}, \quad (9.9)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт витрати;

$f_{кл}$  – площа поперечного перерізу клапана;

$g$  – прискорення вільного падіння.

Залежність (9.9) є нелінійною, оскільки регульована координата розташована під знаком кореня та є добутком двох змінних  $H$  і  $f_{кл}$ . Лінеаризацію цього виразу можна здійснити за нульових умов, використовуючи таке рівняння:

$$\Delta G_{cm} = \left(\frac{\partial G_{cm}}{\partial H}\right)_0 \cdot \Delta H + \left(\frac{\partial G}{\partial f_{кл}}\right)_0 \cdot \Delta f_{кл}. \quad (9.10)$$

Унаслідок цього одержимо такий вираз:

$$\Delta G_{пр} = \frac{G_{cm_0}}{2 \cdot H_0} \cdot \Delta H + \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0} \cdot \Delta f_{кл}. \quad (9.11)$$

У (9.11) вираз  $G_{cm} = \mu \cdot f_{кл} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$  одержано після взяття похідної та множення чисельника і знаменника на  $\sqrt{H_0}$ .

Підставимо (9.11) у (9.6)

$$\Delta G_{пр} - \frac{G_{cm_0}}{2 \cdot H_0} \cdot \Delta H - \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0} \cdot \Delta f_{кл} = F \frac{d(\Delta H)}{dt}. \quad (9.12)$$

Зведемо вираз (9.12) до стандартного вигляду, для чого перенесемо регульовану координату  $\Delta H$  у ліву частину й поділимо на коефіцієнт  $\frac{G_{cm_0}}{2 \cdot H_0}$

$$\frac{2H_0 F}{G_{cm_0}} \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} + \Delta H = \frac{2H_0}{G_{cm_0}} \cdot \Delta G_{пр} - \frac{2H_0 \mu \sqrt{2gH_0}}{G_{cm_0}} \cdot \Delta f_{кл} \quad (9.13)$$

або остаточно

$$T \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} + \Delta H = K_1 \Delta G_{пр} - K_2 \Delta f_{кл}. \quad (9.14)$$

Структурну схему та часову характеристику збірника подано на рисунку 9.3.

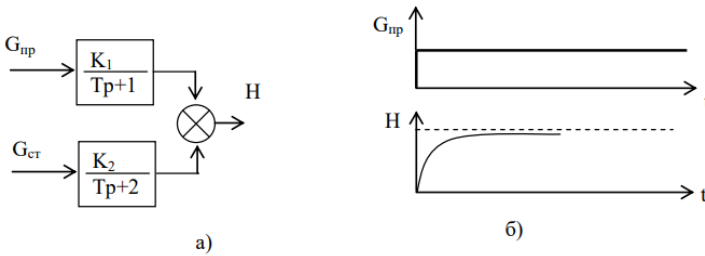


Рисунок 9.3 – Структурна схема (а) та часова характеристика (б) збірника

Головною особливістю цього об'єкта є наявність самовирівнювання, тобто здатність переходити самостійно в новий усталений стан після нанесення збурення. Наявність самовирівнювання в передатних функціях відображає одиниця в знаменнику.

## 9.2. Поняття про типові моделі об'єкта

Інколи під час математичного моделювання конкретних апаратів можна скористатися типовими моделями, до яких зазвичай відносять такі моделі:

- ідеального витіснення;
- ідеального змішування;
- однопараметричну дифузійну;
- коміркувату;
- комбіновані.

*Модель ідеального витіснення.* За таку модель беруть поршневу течію рідини без перемішування вздовж потоку за рівномірного розподілу речовини (енергії) у напрямку, перпендикулярному рухові. Час перебування всіх часток у системі є однаковим і дорівнює відношенню об'єму до об'ємної витрати рідини. Рівняння моделі має такий вигляд:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -W \frac{\partial c}{\partial X}, \quad (9.15)$$

де  $C$  – концентрація речовини;  
 $W$  – лінійна швидкість;  
 $X$  – координата.

Прикладом моделі ідеального витіснення є модель трубчастого апарату за відношення довжини труби до діаметра більшого за 100.

*Модель ідеального змішування.* За таку модель беруть рівномірний розподіл речовини (енергії) в потоці

$$\frac{dc_{\text{вих}}}{dt} = \frac{V_c}{V} \cdot (C_{\text{вх}} - C_{\text{вих}}), \quad (9.16)$$

де  $V_c$  – об'ємна швидкість потоку;  $V$  – об'єм системи.

Прикладами моделі ідеального змішування є модель коротких трубопроводів, циліндричних апаратів з інтенсивним перемішуванням.

*Однопараметрична дифузійна модель.* Її основою є модель ідеального витіснення, тобто поршневий потік, але за наявності зворотного перемішування, яке формально визначають законом дифузії. Під час складання моделі роблять такі припущення:

- зміна концентрації речовини (енергії) є неперервною функцією координати (відстані);
- концентрація в поперечному перерізі є незмінною;
- об'ємна швидкість потоку та коефіцієнт поздовжнього перемішування не змінюється по довжині та перерізу потоку й набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -w \cdot \frac{\partial c}{\partial X} + D_L \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial X^2}, \quad (9.17)$$

де  $D_L$  – коефіцієнт турбулентного перемішування (дифузії), що знаходять експериментально.

Прикладом однопараметричної дифузійної моделі є модель структури потоків в апаратах, не розділених на ступені (наприклад, у масообмінних апаратах із неперервним контактом).

*Коміркувата модель.* Відповідно до моделі апарат умовно поділяють на декілька послідовно з'єднаних комірок, у кожній із них здійснюють повне перемішування потоку, а перемішування між комірками відсутнє. Параметром такої моделі є кількість комірок. Прикладом коміркуватої моделі є каскад апаратів із мішалками.

*Комбіновані моделі.* Під час математичного моделювання апаратів із байпасними та циркуляційними потоками, застійними зонами лише одну модель використати не вдається. Тому використовують деяке з'єднання типових моделей.

Під час експериментального визначення статичних і динамічних характеристик об'єктів використовують стрибкоподібний, імпульсний або гармонічний вхідні сигнали. Часто багатосмісні об'єкти з невідомими характеристиками подають у вигляді простих передатних функцій, наприклад для об'єкта із самовирівнюванням (рис. 9.4 а), задають таку структуру передатною функцією (9.18):

$$W(p) = \frac{K}{T_{p+1}} \cdot e^{-p\tau_{zn}}, K = \frac{\Delta X}{\Delta U}, \quad (9.18)$$

що відповідає послідовному з'єднанню аперіодичної ланки та ланки запізнювання.

У точці перегину  $A$  проводять дотичну, що дає можливість одержати оцінки сталої часу  $T$  та часу запізнювання  $\tau_{zn}$ , а коефіцієнт передавання визначають за відношенням  $\Delta X$  до  $\Delta U$ , тобто за зміною вихідного сигналу (ре-



гульованої координати) щодо вхідного. Властивості об'єктів без самовирівнювання (рис. 9.4 б) можна оцінювати послідовним з'єднанням інтегральної ланки й ланки запізнювання

$$W(p) = \frac{\varepsilon}{p} \cdot e^{-p\tau_{zn}}, \quad (9.19)$$

де  $\varepsilon$  – швидкість розігнання,  $\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha$ ;

$\frac{1}{\varepsilon} = T_a$  – час розігнання.

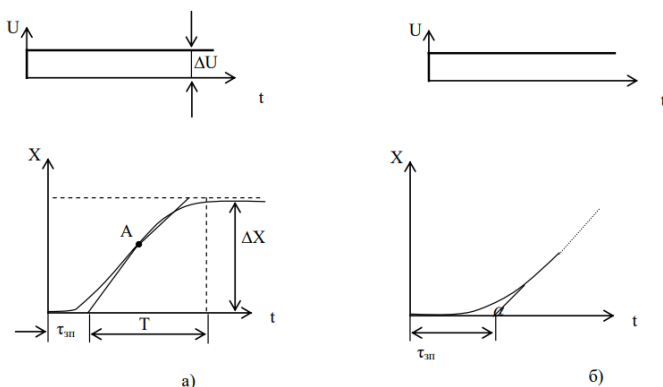


Рисунок 9.4 – Часові характеристики об'єктів:  
а) із самовирівнюванням; б) без самовирівнювання

Використовують також інші передатні функції

$$W = \frac{K \cdot e^{-p\tau_{zn}}}{(Tp + 1)^n}, \quad W(p) = \frac{K \cdot e^{-p\tau_{zn}}}{\prod_{k=1}^n (T_k p + 1)}, \quad (9.20)$$

для яких експериментально визначають кількість ланок  $n$ , коефіцієнти  $T$  і  $K$ .

Одним із методів експериментального визначення характеристик об'єкта є пасивний метод, коли використовують дані, що характеризують роботу об'єкта в режимі

нормальної експлуатації, без внесення додаткових сигналів. Ці методи об'єднують в окремий напрям – *ідентифікацію*. Використовують також спеціальні методи планування експериментів.

### ***Питання для самоперевірки***

1. Що називають математичною моделлю об'єкта? У чому полягають особливості математичних моделей об'єктів із зосередженими та розподіленими параметрами?

2. Які загальні властивості мають об'єкти різної природи?

3. Як класифікують математичні моделі об'єктів і яка методика одержання аналітичних моделей елементарних об'єктів?

4. Якими є типові математичні моделі і яка зона їхнього застосування?

5. Які особливості експериментальних методів визначення динамічних характеристик об'єктів? Які передавальні функції використовують для опису об'єктів?

## Тема 10

# ЗАКОНИ КЕРУВАННЯ ТА АВТОМАТИЧНІ РЕГУЛЯТОРИ

У попередніх розділах було визначено, що в автоматичних системах завжди формуються керувальні впливи, спрямовані на забезпечення бажаного режиму функціонування об'єкта з урахуванням збурень, що діють, і характеристик об'єкта й зовнішнього середовища. Пристрій керування, а в автоматичних системах керування – автоматичний регулятор повсякчас перетворює одержану інформацію в сигнал керування, який залежить загалом від відхилення  $\Delta X$ , збурення  $Z$ , а також від інтегральних показників і похідної регульованої координати. Таку залежність називають *законом регулювання (керування)*. У теорії автоматичного керування використовують два підходи до вибору та застосування автоматичних регуляторів:

– визначення необхідного закону керування на підставі властивостей об'єкта та вимог до якості системи. У цьому разі закон керування є математичною залежністю, яка може бути довільної форми будь-якої складності. У технічній літературі процедури одержання необхідного закону керування називають *аналітичним конструюванням регуляторів*;

– застосування типових законів керування. У цьому разі для конкретного випадку обирають один із них і здійснюють підбір параметрів (налаштування) для конкретних умов, тобто виконують *параметричний синтез* автоматичних регуляторів.

Під час реалізації законів керування технічними засобами автоматичні регулятори можуть бути неперервними (аналоговими) та дискретними. У неперервних регуляторах вхідні та вихідні сигнали є неперервними функціями часу, у дискретних регуляторах, до яких належать релейні (пози-

ційні), імпульсні та цифрові регулятори, вихідний сигнал має стрибкоподібну форму або є послідовністю імпульсів.

До типових неперервних законів керування належать такі закони:

– пропорційний (статичний)

$$U_{\text{рег}} = K_{\text{рег}} \cdot \Delta X, \quad (10.1)$$

де  $K_{\text{рег}}$  – коефіцієнт передавання регулятора;

$$\Delta X = X_{\text{зд}} - X(t);$$

– інтегральний (астатичний)

$$U_{\text{рег}} = K_{\text{рег}}^{\text{ін}} \int_0^{t_n} \Delta X dt; \quad (10.2)$$

– диференціальний

$$U_{\text{рег}} = K_{\partial} \frac{d(\Delta X)}{dt}; \quad (10.3)$$

– пропорційно-диференціальний

$$U_{\text{рег}} = K_{\text{рег}} \cdot \Delta X + K_{\partial} \frac{d(\Delta X)}{dt}; \quad (10.4)$$

– пропорційно-інтегральний

$$U_{\text{рег}} = K_{\text{рег}} \cdot \Delta X + K_{\text{рег}}^{\text{ін}} \int_0^{t_n} \Delta X dt; \quad (10.5)$$

– пропорційно-інтегрально-диференціальний

$$U_{\text{рег}} = K_{\text{рег}} \Delta X + \frac{K_{\text{рег}}}{T_i} \int_0^{t_n} \Delta X dt + K_{\partial} \frac{d(\Delta X)}{dt}, \quad (10.6)$$

де  $K_\delta$  – коефіцієнт диференціювання, часом його замінюють добутком  $K_\delta \cdot T_\delta$  ( $T_\delta$  – час диференціювання);

$T_i$  – час інтегрування (ізодрому).

Відповідно до наведених законів автоматичні регулятори називають П-, І-, Д-, ПД-, ПІ- та ПІД-регуляторами. Ці закони керування та відповідні їм автоматичні регулятори є певною мірою універсальними, тобто можуть бути застосовані до різних об'єктів, у різних системах. Універсальність їм надає можливості змінювати в певних межах сталі коефіцієнти рівнянь (10.1)–(10.6), які називають *параметрами налаштування*. Відповідно до цих параметрів налаштуваннями є такі параметри:  $K_{рег}$ ,  $K_{рег}^{ін}$ ,  $K_\delta$ ,  $T_i$ . У сучасних технічних засобах, зокрема в мікропроцесорних контролерах, передбачають можливість використання найбільш універсального ПІД-регулятора, який може реалізувати й більш прості закони, наприклад, за умови  $T_i \rightarrow \infty$  і  $K_\delta = 0$  ПІД-регулятор перетворюється в П-регулятор.

Як було зазначено раніше, динамічні властивості автоматичної системи регулювання визначають як за характеристиками об'єкта, так і автоматичного регулятора. З рівнянь (10.1)–(10.6) бачимо, що типові закони керування можна описати елементарними ланками (підсилювальною, інтегральною, диференціальною) та їхнім сполученням. У цьому разі необхідно враховувати, що наведені залежності відображають ідеалізовані закони регулювання. У задачах аналізу та синтезу використовують передатні функції автоматичних регуляторів, які відповідають рівнянням (10.1)–(10.6):

– пропорційний регулятор

$$W_{рег}^П(p) = K_{рег}; \quad (10.7)$$

– інтегральний регулятор

$$W_{\text{рег}}^i(p) = \frac{K_{\text{рег}}^{im}}{p}; \quad (10.8)$$

– диференціальний регулятор

$$W_{\text{рег}}^D(p) = K_{\partial} \cdot p; \quad (10.9)$$

– пропорційно-диференціальний регулятор

$$W_{\text{рег}}^{\text{ПД}}(p) = K_{\text{рег}} + K_{\partial} \cdot p; \quad (10.10)$$

– пропорційно-інтегральний регулятор

$$W_{\text{рег}}^{\text{ПІ}}(p) = K_{\text{рег}} + \frac{K_{\text{рег}}}{T_i \cdot p}; \quad (10.11)$$


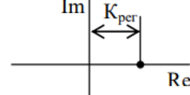
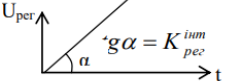
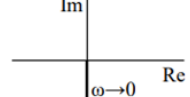

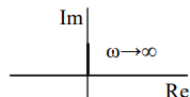
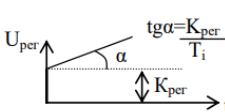
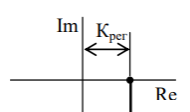
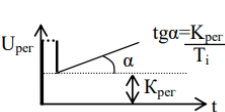
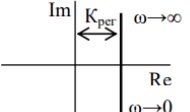
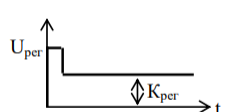
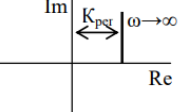
– пропорційно-інтегрально-диференціальний регулятор

$$W_{\text{рег}}^{\text{ПІД}}(p) = K_{\text{рег}} + \frac{K_{\text{рег}}}{T_i \cdot p} + K_{\partial} \cdot p. \quad (10.12)$$

Для кожного з цих регуляторів можна розглядати також часові та частотні характеристики, частину з них для прикладу наведено в таблиці 10.1.

Аналізуючи процес регулювання з різними регуляторами, необхідно звернути увагу на такі головні показники, як точність, наприклад підтримання  $X_{zd}$  і тривалість перехідних процесів.

Таблиця 10.1 – Характеристики типових автоматичних регуляторів

№ пор.	Регулятор	Перехідна функція, $h(t)$	Частотна характеристика
1	2	3	4
1	Пропорційний		
2	Інтегральний		
3	Диференціальний		
4	Пропорційно-інтегральний		
5	Пропорційно-інтегрально-диференціальний		
6	Пропорційно-диференціальний		

Пропорційний регулятор характеризують високою швидкістю, він практично безінерційний. Запишемо його рівняння в такому вигляді:

$$\frac{dU_{\text{per}}}{dt} = K_{\text{per}} \frac{d(\Delta X)}{dt}. \quad (10.13)$$

Отже, процес регулювання починається одразу: коли  $\frac{d(\Delta X)}{dt} \neq 0$ , тоді  $\frac{dU_{\text{per}}}{dt} \neq 0$ . Але процес регулювання закінчується, якщо  $\frac{d(\Delta X)}{dt} = 0$ , а це може бути за  $\Delta X = \text{const}$ , тобто  $X(t) \neq X_{\text{зд}}$ . Таке явище називають *статичною похибкою*  $\Delta X_{\text{ст}}$  (рис. 10.1).

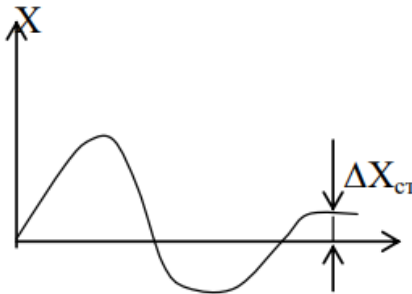


Рисунок 10.1 – Перехідний процес у системі з П-регулятором

У такій системі можлива множина станів рівноваги, тому її називають *статичною*. Саме цим і визначають зону застосування П-регуляторів: якщо статична похибка перевищує допустиме значення, то такі регулятори не застосовують. Особливо важливим є оцінювання процесу регулювання під час різних навантажень об'єкта: у статичних системах  $\Delta X_{\text{ст}}$  збільшується під час збільшення навантаження (статична нерівномірність).



Аналогічно аналізують роботу інших регуляторів:

– І-регулятор забезпечує в системі єдину точку рівноваги, але процес керування розпочинається пізніше, ніж із П-регулятором. Це можна бачити з виразу (10.14)

$$\frac{dU_{\text{per}}}{dt} = K_{\text{per}}^{\text{инт}} \Delta X. \quad (10.14)$$

У цьому разі єдина точка рівноваги можлива лише за умови  $\Delta X = 0$ , тобто  $X(t) = X_{30}$ , відсутня статична похибка, система є *астатичною*. Водночас тривалість перехідного процесу збільшується й, до того ж, І-регулятор не можна застосовувати на об'єктах без самовирівнювання;

– Д-регулятор починає реагувати під час прискорення сигналу похибки

$$\frac{dU_{\text{per}}}{dt} = K_{\partial} \frac{d^2(\Delta X)}{dt^2}, \quad (10.15)$$

тобто процес регулювання розпочинається ще раніше, ніж у системі з П-регулятором, але закінчується перехідний процес за умови  $\frac{d^2(\Delta X)}{dt^2} = 0$ , отже, Д-регулятор не реагує на сталі відхилення  $\Delta X$ . Цей регулятор використовують лише як допоміжний пристрій для введення сигналу за похідною регульованої координати сигналу, що фокусує, який діє лише на початку перехідного процесу;

– ІІІ-регулятор розпочинає роботу так само швидко, як П-регулятор, але процес регулювання закінчується за умови  $\Delta X = 0$ , тому час перехідного процесу буде більшим, ніж у системі з П-регулятором. Параметри налаштування ІІІ-регулятора можна визначити за його часовою характеристикою (рис. 10.2).

З рисунка 10.2 бачимо, що в точці  $t = 0$   $K_{\text{per}} = \frac{U_{\text{per}}}{\Delta X}$ , а  $T_i$  є проекцією на вісь часу лінії, яка відповідає подвоєнню

$(K_{рег} \cdot \Delta X)$ , тому  $T_i$  ще називають *часом подвоєння* П-складової;

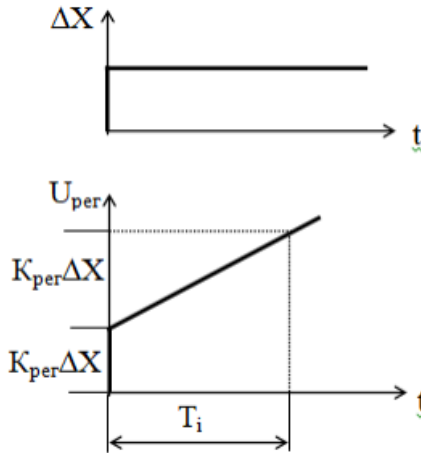


Рисунок 10.2 – Часова характеристика ПІ-регулятора

– ПІД-регулятор разом із ПІ-регулятором є найбільш поширеними внаслідок того, що змінювання налаштувань дає можливість застосовувати ці регулятори з найбільшою ефективністю. У разі використання ПІД-регулятора можна забезпечити необхідну точність і тривалість перехідного процесу, але знаходження оптимальних значень  $K_{рег}$ ,  $T_i$ ,  $K_d$  є досить складним завданням.

Під час комп'ютерного моделювання використовують структурні схеми ПІ- та ПІД-регуляторів (рис. 10.3).

Під час технічної реалізації автоматичних регуляторів типові закони керування формують завдяки введенню необхідних *зворотних зв'язків*, за винятком І-регулятора, який не має зворотного зв'язку. Для визначення типу зворотного зв'язку автоматичний регулятор (АР) подають у вигляді двох частин із передатними функціями регульовального блока  $W_{рб}(p)$  та зворотного зв'язку  $W_{зз}(p)$  (рис. 10.4).

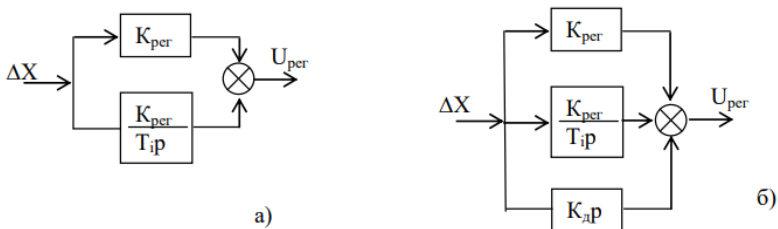


Рисунок 10.3 – Структурні схеми:  
 а) ПІ-регулятора; б) ПІД-регулятора

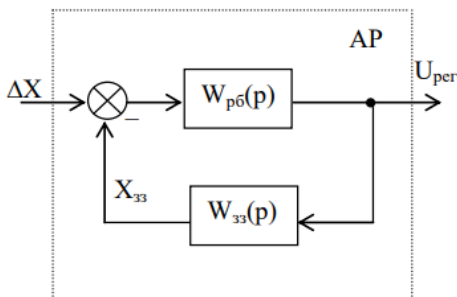


Рисунок 10.4 – Структурна схема  
 автоматичного регулятора

У цьому разі передатна функція регулятора матиме такий вигляд:

$$W_{\text{per}}(p) = \frac{W_{\text{p6}}(p)}{1 + W_{\text{p6}}(p) \cdot W_{\text{33}}(p)} \quad (10.16)$$

або

$$W_{\text{per}}(p) = \frac{1}{W_{\text{p6}}(p) + W_{\text{33}}(p)}. \quad (10.17)$$

Якщо взяти досить великим коефіцієнт передавання регулятора ( $K_{\text{рег}} \rightarrow \infty$ ), то можна записати таку передатну функцію:

$$W_{\text{рег}}(p) \approx \frac{1}{W_{\text{зз}}(p)}. \quad (10.18)$$

Отже, властивості регулятора визначено характером зворотного зв'язку, звідки можна записати

$$W_{\text{зз}}(p) = \frac{1}{W_{\text{рег}}(p)}. \quad (10.19)$$

Цей вираз дає можливість зробити такі висновки для різних автоматичних регуляторів щодо зворотних зв'язків у них:

– П-регулятор описують такими виразами:

$$W_{\text{зз}}(p) = \frac{1}{K_{\text{рег}}}, \quad (10.20)$$

$$X_{\text{зз}}(p) = \frac{1}{K_p} \cdot U_{\text{рег}}, \quad (10.21)$$

що відповідає підсилювальній ланці, яка реалізує жорсткий від'ємний зворотний зв'язок;

– ІІІ-регулятор описують так:

$$W_{\text{зз}}(p) = \frac{1}{K_{\text{рег}} + \frac{K_{\text{рег}}}{T_i p}} = \frac{T_i p}{T_i p + 1}; \quad (10.22)$$

$$T_i \frac{dX_{\text{зз}}}{dt} + X_{\text{зз}} = \frac{T_i}{K_{\text{рег}}} \cdot \frac{dU_{\text{рег}}}{dt}. \quad (10.23)$$

Це реальна диференціальна ланка, яка реалізує *гну-чкий* від'ємний зворотний зв'язок (ізодромний). Характер-

ною особливістю цього зворотного зв'язку є те, що з часом його вплив зменшується до нуля ( $X_{33} \rightarrow 0$  за умови  $t \rightarrow \infty$ );

– ПД-регулятор

$$W_{33} = \frac{1}{K_{\text{пер}} + K_{\partial} p} = \frac{\frac{1}{K_{\text{пер}}}}{1 + \frac{K_{\partial}}{K_{\text{пер}}} p}; \quad (10.24)$$

$$\frac{K_{\partial}}{K_{\text{пер}}} \cdot \frac{dX_{33}}{dt} + X_{33} = \frac{1}{K_{\text{пер}}} U_{\text{пер}}. \quad (10.25)$$

Цей зв'язок називають *інерційним жорстким* від'ємним зворотним зв'язком, який реалізує аперіодична ланка;

– ПД-регулятор

$$\begin{aligned} W_{33} &= \frac{1}{K_{\text{пер}} + \frac{K_{\text{пер}}}{T_i p} + K_{\partial} p} = \frac{p}{K_{\text{пер}} p + \frac{K_{\text{пер}}}{T_i} + K_{\partial} p^2} = \\ &= \frac{\frac{T_i}{K_{\text{пер}}} \cdot p}{\frac{T_i}{K_{\text{пер}}} \cdot K_{\partial} p^2 + T_i p + 1}; \end{aligned} \quad (10.26)$$

$$\frac{T_i}{K_{\text{пер}}} \cdot K_{\partial} \frac{d^2 X_{33}}{dt^2} + T_i \frac{dX_{33}}{dt} + X_{33} = \frac{T_i}{K_{\text{пер}}} \cdot \frac{dU_{\text{пер}}}{dt}. \quad (10.27)$$

Цей зворотний зв'язок відповідає послідовному з'єднанню реальної диференціальної та аперіодичної ланок, це *інерційний гнучкий* від'ємний зворотний зв'язок.

Наведені закони керування відповідають ідеальним регуляторам, але реальні регулятори мають відхилення від наведених залежностей унаслідок неточного відтворення математичних моделей, можливі нелінійності тощо. Допускають відхилення характеристик реальних регуляторів від ідеальних за модулем – до 100 %, а за фазою – до 15 % на робочій частині.

### *Питання для самоперевірки*

1. Які є типові закони регулювання, їхні рівняння, передавальні функції, часові та частотні характеристики автоматичних регуляторів?

2. Які особливості процесів керування з різними регуляторами? Що називають органами налаштування автоматичних регуляторів?

3. Основні параметри П-регулятора. Особливості роботи П-регулятора, параметри перехідних процесів.

4. Основні параметри ІІ-регулятора. Особливості роботи ІІ-регулятора, параметри перехідних процесів.

5. Основні параметри ІІД-регулятора. Особливості роботи ІІД-регулятора, параметри перехідних процесів.

6. Що називають статичною похибкою?

7. Чим характеризують зворотні зв'язки в автоматичних регуляторах? Які їхні рівняння й передавальні функції?

## Тема 11

### АНАЛІЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

У теорії автоматичного керування розрізняють дві основні задачі: *задачу аналізу та задачу синтезу систем*.

Під час розв'язання *задачі аналізу* вважають, що система керування існує й працездатна. Потрібно лише оцінити параметри якості процесу керування, які характеризують точність і плавність проходження перехідного процесу. Через певні особливості задачу аналізу відносять до *прямих задач*, яка завжди має лише один розв'язок.

Задача синтезу системи автоматичного керування є зворотною задачею. Вона полягає у визначенні алгоритму керування й виборі структури, що реалізує цей алгоритм, і параметрів, що задовольняють заданим показникам якості. Задача синтезу, на відміну від задачі аналізу, зазвичай має *безліч розв'язків*.

Роботу будь-якої системи автоматичного керування оцінюють *стійкістю та якістю керування*. Питання стійкості системи автоматичного керування буде розглянуто дещо пізніше (див. п. 13.2).

Поняття якості системи автоматичного керування охоплює оцінки її *статичних і динамічних властивостей*, виражених у кількісній формі, які називають *показниками якості процесу керування*. Такими показниками якості є *точність в усталеному режимі* (статична точність) і *якість перехідного процесу* (динамічна точність).

Розглянемо структурну схему найпростішої типової системи автоматичного керування (рис. 11.1). За умови довільної зміни сигналу завдання на вході  $g(t)$  сигнал на виході системи  $y(t)$  є загальним розв'язком диференціального рівняння, що описує динаміку системи, і складається із двох доданків

$$y(t) = y_{BH}(t) + y_{BM}(t), \quad (11.1)$$

де  $y_{BH}(t)$  – вільна складова розв'язку, що для працездатних (стійких) систем із часом прямує до нуля;

$y_{BM}(t)$  – вимушена складова розв'язку, вигляд і величина якої визначає сигнал завдання  $g(t)$ .

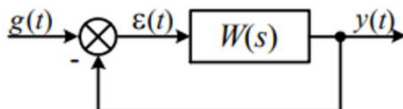


Рисунок 11.1 – Типова САК

Відповідно до цього розрізняють дві групи показників якості роботи системи:

– *точність в усталеному режимі*, яку оцінюють за наявністю та величиною помилки неузгодженості між заданим  $g(t)$  і фактичним усталеним значенням вихідної змінної  $y_{BM}(t)$ ;

– *група показників якості перехідного процесу*, які одержують за зовнішнім виглядом  $y_{BM}(t)$ . Єдиного показника якості перехідного процесу не існує. Для її оцінювання використовують або деяку множину окремих показників чи критеріїв, або формують узагальнені інтегровані показники.

### 11.1. Статична точність систем автоматичного керування

Розглянемо показники якості, що характеризують вимушену складову помилки слідкування  $\varepsilon_{BM}(t)$  стійкої системи (див. рис. 11.1) під час порівняно повільного змінення сигналу  $g(t)$ , що є характерним для слідкувальних систем і систем програмного керування. Усталену похибку неузгодженості системи визначають так:  $\varepsilon_{BM}(t) = g(t) - y_{BM}(t)$ .



Передатну функцію замкненої системи щодо помилки неузгодженості, викликаной впливом завдання, одержують у такому вигляді:

$$W_{ge}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1+W(s)}. \quad (11.2)$$

Вираз (11.2) завжди можна подати у вигляді відношення поліномів

$$W_{ge}(s) = \frac{R(s)}{s^N Q(s)}, \quad (11.3)$$

де поліноми  $R(s)$  і  $Q(s)$ , які ніколи не перетворюються на нуль за умови  $s = 0$ ;

$N$  – кількість вільних інтеграторів (інтегровальних ланок, що не входять до будь-якого внутрішнього контуру), яка визначає тип системи керування, що буде подано нижче.

З урахуванням рівняння (11.2) зображення за Лапласом сигналу помилки неузгодженості можна записати так:

$$E(s) = \frac{1}{1+W(s)} G(s) = W_{ge}(s) \cdot G(s). \quad (11.4)$$

Передатну функцію  $W_{ge}(s)$  у (11.4) можна розкласти в ряд Тейлора за зростаючими ступенями  $s$  поблизу точки  $s = 0$ , що відповідає великим значенням часу ( $t \rightarrow \infty$ ), тобто значенню усталеної помилки під час заданого значення  $g(t)$ . Тоді (11.4) набуде такого вигляду:

$$E(s) = \left( C_0 + C_1 s + \frac{1}{2!} C_2 s^2 + \dots + \frac{1}{m!} C_m s^m \right) \cdot G(s). \quad (11.5)$$

Якщо  $W_{ge}(s)$  є дробово-раціональною функцією (тобто має вигляд відношення двох поліномів, що здебіль-

шого й буває під час практичного застосування), то розкладання можна виконати діленням чисельника на знаменник, розміщуючи члени за зростанням ступенів.

Перейшовши в (11.5) від зображень до оригіналів, одержимо вираз для помилки як функцію *вхідного сигналу завдання*

$$\varepsilon_B(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2!} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots + \frac{1}{m!} C_m \frac{d^m g(t)}{dt^m}. \quad (11.6)$$

Коефіцієнти  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m$  називають *коефіцієнтами помилок*. Їх визначають за формулами розкладання функції  $W_{ge}(s)$  у ряд Тейлора як часткові похідні такого вигляду:

$$C_0 = [W_{ge}(s)]_{s=0}; \quad (11.7)$$

$$C_1 = \left[ \frac{W_{ge}(s)}{\partial s} \right]_{s=0}, \dots, C_m = \left[ \frac{\partial^m W_{ge}(s)}{\partial s^m} \right]_{s=0}.$$

Якщо  $g(t) = 1(t)$  (тобто *сигнал є незмінним*), то всі похідні  $\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \dots = \frac{d^m g(t)}{dt^m} = 0$ . Тоді  $C_0 = W_{ge}(0)$ , а  $C_1 \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{2!} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \dots = \frac{1}{m!} C_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} = 0$ .

З урахуванням (11.6)  $C_0$  набуває значення усталеної помилки в замкненій системі (оскільки  $g(t) = 1(t)$ ).

Якщо  $g(t) = t$  (тобто *сигнал є лінійним*), то  $\frac{dg(t)}{dt} = 1$ , а всі інші похідні дорівнюють нулю. Тоді  $C_0 = W_{ge}(0)$ ,  $C_1 = \left[ \frac{\partial W_{ge}(s)}{\partial s} \right]_{s=0}$ , а  $\frac{1}{2!} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \dots = \frac{1}{m!} C_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} = 0$  тощо.

Коефіцієнт  $C_0$  називають *коефіцієнтом статичної або позиційної помилки*; коефіцієнт  $C_1$  – *коефіцієнтом*

швидкісної помилки;  $C_2$  – коефіцієнтом помилки щодо прискорення.

*Зауваження 1.* Часто передатна функція замкненої системи є складною для диференціювання, тоді коефіцієнти помилок можна визначити за такою рекурентною формулою:

$$C_k = \frac{1}{a_0} (b_k - \sum_{r=1}^k C_{k-1} \cdot a_r), \quad (11.8)$$

де  $a_r$  – коефіцієнти полінома в знаменнику; за умови  $r > n$   $a_r \equiv 0$  ( $n$  – порядок полінома знаменника);

$a_0$  – вільний член;

$b_k$  – коефіцієнти полінома в чисельнику; за умови  $k > m$   $b_k \equiv 0$  ( $m$  – порядок полінома чисельника).

*Зауваження 2.* Використовуючи наведену вище методику, можна одержати коефіцієнти помилок щодо зовнішнього збурення. За такої умови зміниться лише вигляд передатної функції системи.

*Зауваження 3.* Величину усталеної помилки можна визначити із властивостей перетворень Лапласа, використовуючи теорему щодо кінцевого значення (граничну теорему)

$$\varepsilon_B(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (11.9)$$

за умови, що межа існує, тобто похибка  $\varepsilon_B(t)$  має кінцеве значення (обмежена).

Систему, у якій будь-який (навіть незмінний) зовнішній вплив  $g(t)$  створює помилку в усталеному режимі, називають *статичною*. У статичних системах відсутні інтегрувальні ланки, а коефіцієнт  $C_0$  (а також, можливо, й інші) є відмінним від нуля.

Систему, яка незмінний зовнішній вплив  $g(t) = const$  (або додатково ще й лінійний, квадратичний та інші впливи) відтворює без помилки в усталеному режимі, називають *астатичною*. Зовнішньою ознакою астатичної системи є наявність у її складі інтегрувальних ланок. Кількість інтегрувальних ланок визначає порядок астатизму. У системах з *астатизмом 1-го порядку* є одна інтегрувальна ланка; коефіцієнт  $C_0 = 0$ , а всі інші коефіцієнти – відмінні від нуля. У системах з *астатизмом 2-го порядку* наявні дві інтегрувальні ланки; коефіцієнти  $C_0 = C_1 = 0$ , а інші коефіцієнти – відмінні від нуля. Зі збільшенням порядку астатизму (кількості інтегрувальних ланок) збільшується кількість коефіцієнтів помилок таких, що дорівнюють нулю, тобто все більш складні вхідні сигнали відтворюються системою без помилки, але водночас усе важче стає забезпечити її стійкість і якість керування в динаміці.

Якщо на систему додатково до завдання впливає і збурення, то астатизм системи істотно залежить від місця під'єднання інтегрувальної ланки. За такої умови система, астатична за каналом завдання, може бути статичною за збуренням або навпаки.

## **11.2. Динамічна точність систем автоматичного керування**

Точність систем автоматичного керування в перехідному режимі оцінюють за допомогою прямих і непрямих показників (критеріїв) якості.

*Прямі показники якості* визначають за кривою перехідного процесу, що виникає в системі за типового зовнішнього впливу (зазвичай за перехідною характеристикою).

*Непрямі показники якості* визначають, використовуючи частотні характеристики системи або розміщення коренів характеристичного рівняння.

Перехідний процес у динамічній системі залежить не лише від її властивостей, але й від характеру прикладеного зовнішнього впливу. Для можливості порівняння динамічних характеристик різних систем керування використовують типові впливи: одиничний східчастий, імпульсний або гармонійний. Під час практичного застосування для аналізу здебільшого використовують *одиничний східчастий вплив*, що забезпечує найбільш складні умови випробування системи, оскільки знаючи показники якості системи в таких умовах, можна бути впевненими, що в інших, більш легких умовах, якість її роботи буде кращою.

З часом важливість прямих показників якості значно збільшилося. Це обумовлено тим, що розроблені й набули широкого використання потужні засоби комп'ютерного моделювання систем керування, які дають можливість просто, точно та швидко розрахувати перехідні характеристики практично будь-якої системи, й тому непрямі показники якості зараз більшою мірою відіграють ілюстративну роль.

На рисунку 11.2 продемонстровано різні типи перехідних процесів системи керування, що є реакцією на зміну сигналу завдання у вигляді ступінчастого впливу  $g(t) = 1(t)$ . Розрізняють коливальні (1), аперіодичні (2) та монотонні (3) перехідні процеси.

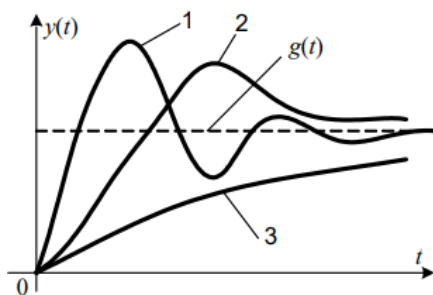


Рисунок 11.2 – Типи перехідних процесів

Розглянемо основні прямі показники якості керування щодо типової одноконтурної системи керування (див. рис. 11.1) під час ступінчастої зміни впливу завдання  $g(t)$  (рис. 11.3). За початок відліку для керованої величини  $y(t)$  узято значення  $y(-0)$ , тобто те, яке було до подання ступінчастого впливу.

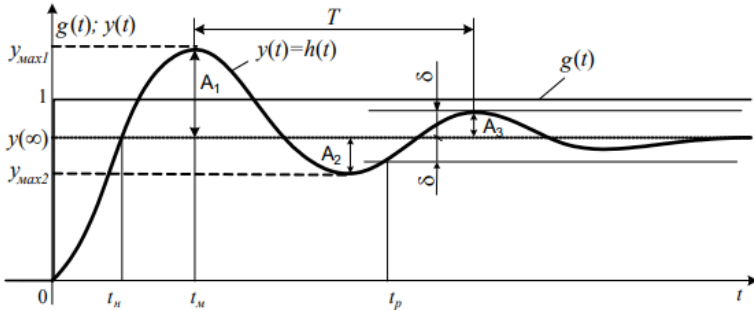


Рисунок 11.3 – Перехідний процес системи керування за каналом впливу завдання

Використовують такі *показники якості*:

– *перерегулювання*  $\sigma$  – величина, що дорівнює відношенню першого максимального відхилення  $y_{max1}$  керованої величини  $y(t)$  від її усталеного значення  $y(\infty)$  до усталеного значення

$$\sigma = \frac{y_{max1} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{y(\infty)} \cdot 100 \%. \quad (11.10)$$

Якість керування вважають задовільною, якщо *перерегулювання* не перевищує 30–40 %. Однак у деяких системах *перерегулювання* може бути взагалі неприпустиме;

– *тривалість перехідного процесу* (час регулювання)  $t_p$  – інтервал часу від моменту початку дії ступінчастого впливу до моменту, після якого відхилення керованої

(вихідної) величини  $y(t)$  від нового усталеного значення  $y(\infty)$  стане меншим за деяке задане число  $\delta$ , тобто до того моменту, після якого виконується така умова:

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \delta. \quad (11.11)$$

Здебільшого під час практичного застосування величину  $\delta$  беруть такою, що дорівнює 5 % (для особливо точних систем вона може бути меншою) від усталеного значення  $y(\infty)$  [ $\delta = 0,05 y(\infty)$ ]. Необхідно пам'ятати, що в статичних системах (як подано на рисунку 11.3) нове усталене значення не досягає заданого, тобто існує статична помилка.

Розглянуті вище два показники якості перехідних процесів прийнятні для будь-якого типу перехідних процесів.

Для *коливальних процесів* додатково до цього іноді застосовують такі показники:

– *ступінь загасання*, що визначають за формулою

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}, \quad (11.12)$$

яка визначає інтенсивність загасання коливального процесу в системі. Інтенсивність загасання вважають задовільною, якщо  $\psi = 0,75 - 0,95$ .

Застосовувати формулу (11.12) для визначення ступеня загасання перехідного процесу безпосередньо за видом перехідної характеристики для систем, що описуються диференціальними рівняннями, вищими за другий порядок, необхідно з обережністю, оскільки в таких системах не зберігається сталою різниця двох сусідніх амплітуд коливань. Однак, як доводить досвід, з практичного погляду системи з однаковою величиною  $\psi$  мають схожі перехідні процеси, незалежно від виду математичного опису;

– *коливальність*  $N$  – кількість переходів керованої величини  $y(t)$  з огляду на її усталене значення  $y(\infty)$  за час перехідного процесу  $t_p$ . Припустимим значенням під час практичного застосування є 3–4 коливання;

– *частота коливань*  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , де  $T$  – період коливань;

– *час наростання* перехідного процесу  $t_n$  – це час до перетину графіка  $y(t)$  з лінією усталеного значення  $y(\infty)$ ;

– *час досягнення першого максимуму*  $t_m$ .

Для перехідних процесів, викликаних зовнішнім впливом збурення  $f(t)$  на об'єкт керування (рис. 11.4), тобто для перехідних процесів, у яких із плином часу вертаються до початкового стану, вводять такі показники якості:

– *тривалість перехідного процесу* (час регулювання)  $t_n$  визначають за методикою, аналогічною розглянутій вище;

– *перерегулювання*  $\sigma$  (коливання) визначають як величину, що дорівнює відношенню другого (від'ємного) максимального відхилення  $A_2$  керованої величини  $y(t)$  від усталеного значення  $y(\infty)$  до першого максимального відхилення  $A_1$

$$\sigma = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100 = \frac{A_2}{y_m - y(\infty)} \cdot 100 \% \quad (11.13)$$

– *динамічний коефіцієнт регулювання*  $R_D$  – величина, що дорівнює відношенню першого максимального відхилення  $y_m$  до передатного коефіцієнта підсилення об'єкта керування  $k_0$

$$R_D = \frac{y_m}{k_0} \cdot 100 \% \quad (11.14)$$

Коефіцієнт  $R_D$  свідчить, наскільки ефективний вплив регулятора на об'єкт керування.



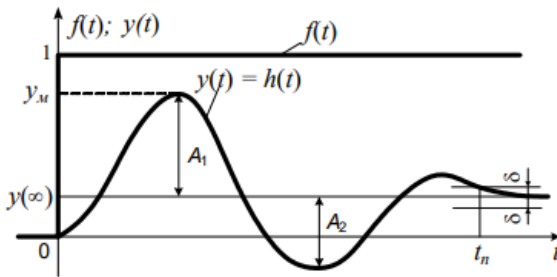


Рисунок 11.4 – Перехідний процес системи керування за каналом збурення

Два головних показники якості – перерегулювання  $\sigma$  і тривалість перехідного процесу  $t_p$  тісно пов'язані між собою. Обидва вони залежать від параметрів системи, але найбільш сильно – від передатного коефіцієнта  $k$  розімкненої системи. Причому із збільшенням цього коефіцієнта *максимальне відхилення вихідної змінної (перерегулювання) за каналом збурення завжди зменшується, а максимальне відхилення за каналом завдання завжди збільшується* (рис. 11.5), також зазвичай *збільшується і тривалість перехідного процесу*. Знаходження оптимального компромісу між цими двома суперечливими тенденціями є однією із задач синтезу САК.

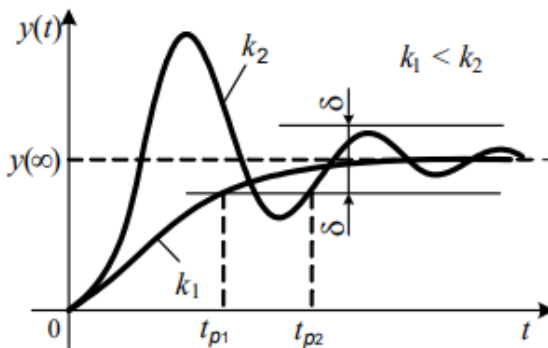


Рисунок 11.5 – Вплив параметрів системи на перехідні процеси

Прямі показники якості найбільш зручно використовувати тоді, коли перехідну характеристику («криву розгону») можна одержати експериментально на реальному об'єкті керування або за допомогою імітаційного моделювання на ЕОМ на підставі наявної математичної моделі.

### *Питання для самоперевірки*

1. Які існують два основних завдання ТАК?
2. За якими двома основними показниками оцінюють роботу будь-якої САК?
3. Які дві групи показників якості процесу управління використовують для стійких систем?
4. Чим оцінюють точність САК в усталеному режимі?
5. За якою складовою розв'язку диференціального рівняння визначають якість перехідного процесу САК?
6. Як називають систему, у якій незмінний зовнішній вплив створює помилку в усталеному режимі?
7. Як називають систему, у якій незмінний зовнішній вплив відтворюють без помилки в усталеному режимі?
8. Як називають систему, у якій є хоча б одна інтегрувальна ланка?
9. Як називають систему, у якій відсутні інтегрувальні ланки?
10. У яких системах (статичних або астатичних) відсутня помилка за незмінного впливу завдання на вході?

## Тема 12

# НЕПРЯМІ ПОКАЗНИКИ ЯКОСТІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Найбільш вичерпне уявлення про якість перехідного процесу дає перехідна характеристика. Однак іноді під час розроблення систем автоматичного керування виникає потреба мати уявлення про деякі показники якості перехідного процесу без побудови перехідної характеристики, а за деякими непрямими ознаками, які можна визначити більш просто та за якими можна безпосередньо знайти зв'язок між прямими показниками якості та значеннями параметрів системи керування. Такі ознаки називають *непрямими показниками якості перехідного процесу*, серед яких широкого застосування набули *частотні й кореневі показники*.

### 12.1. Частотні показники якості перехідного процесу

Застосування частотних показників якості засноване на можливості оцінювання якості перехідного процесу за частотними характеристиками завдяки наявності прямої аналітичної залежності між перехідною характеристикою  $h(t)$  та дійсною  $U(\omega)$  або уявною  $V(\omega)$  частотними характеристиками *для мінімально-фазових систем*.

Відомо, що розкладання в ряд Фур'є одиничного ступінчастого впливу може бути подано у вигляді додатку сталої складової та нескінченної кількості синусоїд частотою  $\omega$  й амплітудою  $\frac{d\omega}{\pi\omega}$  під час змінювання  $\omega$  від нуля до нескінченності  $\infty$

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (12.1)$$

Якщо такий сигнал подати на вхід динамічної системи, то кожній частоті вхідних синусоїдальних коливань  $x_{\text{вх}_i}(t) = \frac{d\omega}{\pi\omega_i} \sin\omega_i t$  буде відповідати гармонічне коливання на виході з тією самою частотою, але зі зміненими амплітудою та фазою, залежними від властивостей системи та вираженими в їхній амплітудно-частотній  $A(\omega)$  і фазочастотній  $\varphi(\omega)$  характеристиках, тобто

$$x_{\text{вх}_i}(t) = \frac{A(\omega)d\omega}{\pi\omega_i} \sin(\omega_i t + \varphi(\omega)). \quad (12.2)$$

Результуюче значення вихідної величини (підсумування вихідних сигналів за всіма частотами) є перехідною характеристикою (властивість суперпозиції)

$$h(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{A(\omega)}{\omega} \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \quad (12.3)$$

і з урахуванням того, що  $\sin(\omega t + \varphi(\omega)) = \sin(\omega t) \times \cos(\varphi(\omega)) + \cos(\omega t) \sin(\varphi(\omega))$ , а  $A(\omega) \cos(\varphi(\omega)) = U(\omega)$ ;  $A(\omega) \sin(\varphi(\omega)) = V(\omega)$  одержимо

$$h(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{U(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{V(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega. \quad (12.4)$$

Оскільки ступінчастий вплив  $1(t)$  подають у момент часу  $t = 0$  за умови  $t < 0$ , то маємо такі вирази:

$$h(t) = 0; \sin(-\omega t) = -\sin(\omega t); \cos(-\omega t) = \cos(\omega t). \quad (12.5)$$

Рівняння (12.4) у разі підстановки ( $t = -t$ ) набуде такого вигляду:

$$0 = \frac{A(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega. \quad (12.6)$$

Віднімаючи від (12.4) вираз (12.6), одержимо таке рівняння для визначення вихідного сигналу за умови  $t > 0$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega. \quad (12.7)$$

Аналогічним способом можна виразити перехідну характеристику через уявну частотну функцію  $V(\omega)$

$$h(t) = U(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega. \quad (12.8)$$

Здебільшого під час практичного застосування для одержання перехідної характеристики використовують формулу (12.7). Вираз для дійсної частотної характеристики  $U(\omega)$  (ДЧХ) часто є складною функцією, інтегрування якої можливо лише наближено за допомогою чисельних методів на ЕОМ або з використанням попередньої апроксимації  $U(\omega)$  у вигляді суми трапецій або трикутників (графоаналітичний метод побудови перехідного процесу).

Водночас наявність функціонального зв'язку (12.7) дає можливість за виглядом дійсної частотної характеристики (рис. 12.1) скласти попереднє наближене уявлення про якість перехідного процесу, що можна виразити у вигляді таких властивостей:

– *властивість лінійності*. Якщо ДЧХ можна подати у вигляді суми  $U_i(\omega)$ , тобто  $U(\omega) = \sum_{i=1}^n U_i(\omega)$ , то й пере-

хідний процес також можна подати сумою складових

$$h(t) = \sum_{j=1}^n h_j(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} \frac{U_j(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega;$$

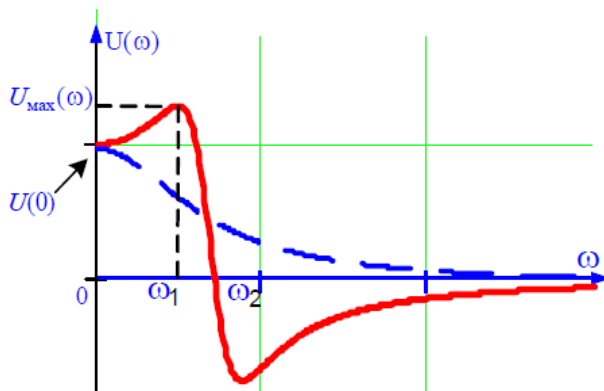


Рисунок 12.1 – Дійсна амплітудно-частотна характеристика

– *усталене значення перехідної характеристики*  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty)$  визначають початковим значенням ДЧХ, тобто  $U(0) = h(\infty)$ ;

– *початкове значення перехідної характеристики*  
 визначають кінцевим значенням ДЧХ, тобто  $h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} U(\omega)$ ;

– *відповідність масштабів по осі ординат* для  $U(\omega)$  та  $h(t)$ . Якщо помножити значення  $U(\omega)$  на сталий множник  $\alpha$  (рис. 12.2 а), то значення  $h(t)$  також множиться на  $\alpha$  (рис. 12.2 б);

– *відповідність масштабів по осі абсцис* для  $U(\omega)$  та  $h(t)$ . Якщо аргумент  $\omega$  ДЧХ  $U(\omega)$  помножити на сталий множник  $\alpha$  (рис. 12.3 а), то аргумент перехідної характеристики  $t$  змінюється у зворотній пропорції ( $t / \alpha$ ) (рис. 12.3 б);

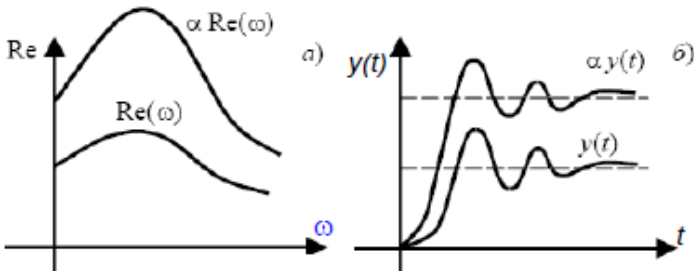


Рисунок 12.2 – Відповідність масштабів по осі ординат

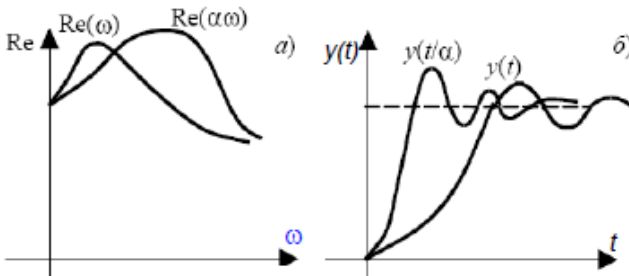


Рисунок 12.3 – Відповідність масштабів по осі абсцис

– *розриви безперервності ДЧХ*, які свідчать про те, що система перебуває на межі стійкості, зокрема:

а) якщо розрив безперервності відбувається на частоті  $\omega = 0$  – це аперіодична межа стійкості, яка відповідає наявності нульового полюса;

б) якщо розрив безперервності відбувається на частоті  $\omega \neq 0$  – це коливальна межа стійкості, що відповідає наявності лише уявних коренів характеристичного рівняння системи;

– *гострий пік ДЧХ на частоті  $\omega_1$*  свідчить про наявність на перехідній характеристиці повільно загасаючих коливань із частотою  $\omega_1$  (див. рис. 12.1);

– умовою монотонного перебігу перехідного процесу є додатність, безперервність і неопуклість ДЧХ, тобто  $U(\omega) > 0$ ,  $\left| \frac{dU(\omega)}{d\omega} \right| < 0$  (пунктирна крива на рисунку 12.1);

– наявність на перехідній характеристиці перерегулювання  $\sigma \leq 18\%$  відповідає додатній незростальній ДЧХ, тобто  $U(\omega) > 0$ ,  $\frac{dU(\omega)}{d\omega} \leq 0$ ;

– наявність на ДЧХ максимуму  $U_{max}(\omega)$  відповідає перехідному процесу з перерегулюванням  $\sigma \leq \sigma_{max}$ , де величину  $\sigma_{max}$  визначають за такою формулою:

$$\sigma_{max} = \frac{1,18 \cdot U_{max}(\omega) - U(0)}{U(0)} \cdot 100\% \quad (12.9)$$

Якщо на ДЧХ ще є й мінімум  $U_{min}(\omega)$ , то перерегулювання  $\sigma_{max}$  набуде такого виразу:

$$\sigma_{max} = \frac{1,18 \cdot U_{max}(\omega) + 0,277 \cdot U_{min}(\omega) - U(0)}{U(0)} \cdot 100\% \quad (12.10)$$

Для ДЧХ із максимумом розроблені спеціальні номограми, за допомогою яких за частотою  $\omega_2$  й максимальним значенням  $U_{max}(\omega)$  (див. рис. 12.1) можна оцінити величину перерегулювання  $\sigma$  і час перехідного процесу  $t_p$ ;

– оцінювання часу регулювання. Якщо ДЧХ за виглядом близька до трапецеїдальної кривої з максимальною частотою  $\omega_2$  і коефіцієнтом нахилу  $\chi = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ , то час перехідного процесу може бути оцінено за такою умовою:  $\frac{\pi}{\omega_2} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_2}$  (див. рис. 12.1).

## 12.2. Кореневі показники якості перехідного процесу

Кореневі показники якості використовують для аналізу тих динамічних властивостей систем автоматичного



керування, які безпосередньо пов'язані з вільним рухом системи, на основі аналізу значень полюсів і нулів її передатної функції (розміщення їх на комплексній площині).

Розв'язок однорідного диференціального рівняння, яке описує вільний рух системи й зображення якого є дрібно-раціональною функцією, може бути одержано за допомогою формул розкладання Хевісайда. Запишемо вираз для перехідної характеристики системи з передатною функцією  $W(s)$  для простих (некратних) коренів

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} W(s) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{R(s)}{sQ(s)} \right\} = \\ &= \frac{R(0)}{Q(0)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R(s_i)}{s_i \cdot \dot{Q}(s_i)} e^{s_i t}, \end{aligned} \quad (12.11)$$

де  $n$  – порядок характеристичного рівняння;

$s_i$  – корені характеристичного рівняння

$(s_i = \alpha_i \pm j\beta_i; i = \overline{1, n})$ ;

$\dot{Q}$  – похідна від полінома в знаменнику передатної функції.

В окремому й дуже поширеному під час практичного застосування випадку *передатна функція не має нулів* (чисельник передатної функції є константою) і тоді динаміку системи повністю визначають розміщенням полюсів. Розглянемо саме цей випадок.

Перехідний процес у стійкій (працездатній) системі керування повинен бути згасаючим. З цієї причини всі складові виразу (12.11) повинні мати множник  $e^{s_i t}$ , що є експонентою, у якій дійсна складова кореня  $\alpha_i$  має від'ємне значення, тобто корені характеристичного рівняння повинні бути в лівій півплощині комплексної площини коренів.

Кореневими показниками якості перехідного процесу є ступінь стійкості, ступінь коливальності, кореневий годограф.

Ступінь стійкості  $\eta$  характеризує інтенсивність загасання тієї складової перехідного процесу (12.11), що найбільш повільно змінюється. Нехай, наприклад, характеристичне рівняння системи має два від'ємних дійсних корені  $s_1 = -\alpha_1$  і  $s_2 = -\alpha_2$ , причому  $|\alpha_1| < |\alpha_2|$  (див. рис. 12.4 а). Їм відповідають дві складові вільного руху  $y_1(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t}$  і  $y_2(t) = C_2 e^{-\alpha_2 t}$  (див. рис. 12.4 б).

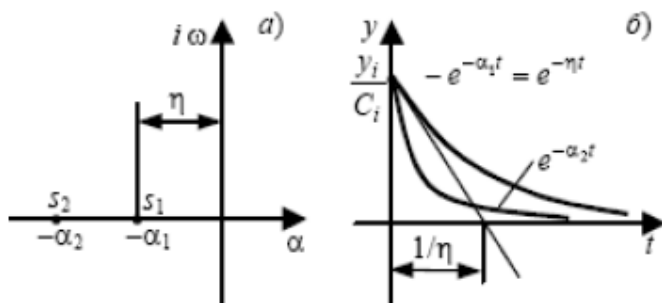


Рисунок 12.4 – Поняття ступені стійкості монотонних процесів

Як бачимо з графіків перехідних процесів, чим меншим є абсолютне значення кореня, тим повільніше загасає відповідна йому складова. Оскільки результуючий перехідний процес можна одержати як суму перехідних характеристик, і в разі цього складові, що більш швидко змінюються, чинять вплив на нього лише в зоні малих значень часу, то інтенсивність загасання загалом визначають складовою, яка найбільш повільно затухає, або найменшим за абсолютним значенням коренем характеристичного рівняння, тобто  $\eta = \min_i |\alpha_i|, i = 1, 2, \dots$

Якщо характеристичне рівняння має комплексно зв'язані корені (рис. 12.5 а), то складові перехідного процесу матимуть коливальний характер  $y_i(t) = C_i e^{-\alpha_i t} \cos(\omega t)$  (рис. 12.5 б), а дійсна частина кореня, що є фактично пока-

зником ступеня стійкості  $\eta = \alpha$ , характеризує експоненту, яка огинає коливальний процес.

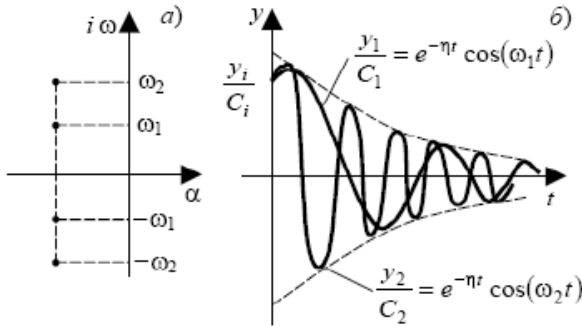


Рисунок 12.5 – Поняття ступеня стійкості коливальних процесів

Ступінь стійкості можна використовувати для оцінювання часу тривання монотонних перехідних процесів. Дотична до експоненти  $\frac{y}{c} = e^{-\eta t}$  у точці  $t = 0$  відсікає на осі абсцис відрізок  $\frac{1}{\eta}$  (див. рис. 12.4 б). Водночас час регулювання визначають як  $t_p \leq \frac{3}{\eta}$  за прийнятої угоди щодо величини коридору  $\delta = 5\%$ .

Як бачимо з рисунка 12.5, два коливальних процеси з однаковою дійсною частиною комплексного кореня мають різну частоту коливальних, але однакову криву огинання, тобто за однакового ступеня стійкості якість перехідних процесів істотно відрізняється. Це вказує на те, що одного цього показника для оцінювання якості є недостатньо.

*Ступінь* (показник) *коливальності*  $\mu$  дає кількісну оцінку коливальних властивостей системи. Виділимо на комплексній площині коренів характеристичного рівняння (рис. 12.6)  $2\psi$  сектор розміром  $s_i$ , у якому будуть розміщені

всі полюси системи, й розглянемо ті з них, які розміщуються в межах (обмежені сектором)  $s_i = -\alpha \pm j\beta$ .

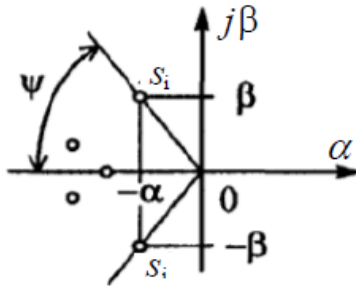


Рисунок 12.6 – Поняття ступеня коливальності

*Ступенем коливальності* називають додатне число, що чисельно дорівнює тангенсу кута, утвореного від'ємною дійсною піввіссю і прямою, що проходить через початок координат і максимально віддалений від дійсної півосі полюс

$$\mu = \operatorname{tg}\psi = \max \left\{ \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right| \right\}. \quad (12.12)$$

Ступінь коливальності  $\mu$  пов'язаний з оцінкою загасання перехідного процесу  $\psi$  (див. (11.12)) таким співвідношенням  $\psi = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\mu}\right)$ , яке нескладно одержати підстановкою у (12.11) відповідних значень амплітуд.

Отже, динамічні властивості стійкої системи пов'язані з розміщенням її полюсів на комплексній площині. Водночас необхідно зауважити, що зазвичай не потрібно знати точні значення всіх полюсів системи, а достатньо визначити межі зоні розміщення коренів: за найближчим «лівим» коренем і за максимально віддаленим від дійсної осі коренем.

Загалом на якість перехідного процесу впливають і нулі системи. Зокрема додатні корені многочлена в чисельнику передатної функції призведуть до збільшення коливальності, а від'ємні – до затягування перехідних процесів.

*Поняття кореневого годографа.* Кореневим годографом називають сукупність траєкторій, описуваних на комплексній площині коренями характеристичного рівняння системи під час зміни одного з параметрів (коефіцієнтів) від 0 до  $\infty$ . Кореневі годографи використовують для оцінювання впливу параметрів системи (насамперед параметрів налаштувань регуляторів) на якість перехідних процесів, а також вони є основою деяких методів синтезу систем керування.

### **12.3. Інтегральні оцінки якості систем автоматичного керування**

Кожен із розглянутих вище прямих і непрямих показників якості характеризує лише одну ознаку (показник якості) перехідного процесу. Водночас усі показники пов'язані з параметрами регулятора (або системи) складними залежностями, які зазвичай мають суперечливий характер: зміна будь-якого з параметрів призводить до покращання одних показників якості та погіршення інших. Ця обставина істотно ускладнює вибір параметрів регулятора. Тому в інженерній практиці широко використовують інтегральні показники (оцінки) якості, що відображають (або інтегрують у собі) одночасно багато з розглянутих вище показників.

*Інтегральною оцінкою якості* називають визначений інтеграл за часом (від 0 до  $\infty$ ) від деякої функції керованої величини  $x(t)$  або, здебільшого, сигналу помилки  $\varepsilon(t)$

$$J = \int_0^{\infty} f[x(t), t] dt. \quad (12.13)$$

Підінтегральну функцію  $f[x(t), t]$  вибирають так, щоб інтеграл якнайкраще характеризував якість і найпростіше виражався через коефіцієнти передатної функції замкненої системи. Щоб інтеграл був таким, що сходиться, тобто мав обмежене значення, у функцію  $f[x(t), t]$  вводять не абсолютні значення  $x(t)$  або  $\varepsilon(t)$ , а їхнє відхилення від кінцевих усталених значень.

Інтегральна оцінка (12.13) ураховує як величину динамічного відхилення, так і тривалість перехідних процесів. Чим менша за величиною оцінка, тим краща якість перехідного процесу.

Найпростішою інтегральною оцінкою є *лінійна інтегральна оцінка*  $J_L$ . Якщо перехідна характеристика є монотонною, то можна очікувати, що якість перехідного процесу тим краща, чим менша площа, обмежена кривою перехідного процесу й усталеним значенням керованої величини (рис. 12.7 а). У цьому сенсі лінійна інтегральна оцінка чисельно дорівнює площі, що обмежена кривою зміни вільної складової керованої величини та лінією рівня нового усталеного значення  $x(\infty)$

$$J_L = \int_0^{\infty} [(\infty) - x(t)] dt. \quad (12.14)$$

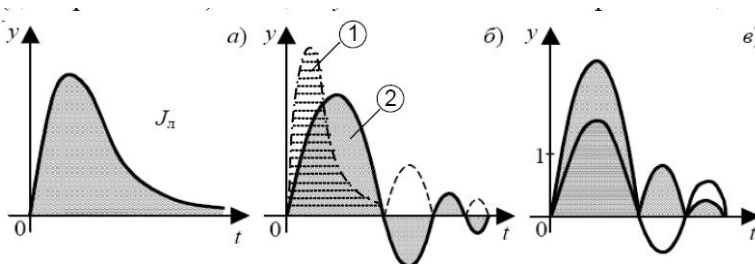


Рисунок 12.7 – Інтегральні оцінки якості перехідних процесів: а) лінійна; б) модульна; в) квадратична

Недоліком лінійної інтегральної оцінки  $J_L$  є те, що її можна застосовувати лише для аперіодичних перехідних процесів. Інтеграл (12.14), обчислений для аперіодичної кривої **1** (на рисунку 12.7 б горизонтальне штрихування), явно менший за інтеграл, обчислений для знакозмінної кривої **2** (хоча якість перехідного процесу **2** за перерегулюванням краща), крім того, для незгасаючого гармонійного процесу, який відповідає вкрай незадовільному перехідному процесу,  $J_L = 0$ , що дає мінімальну оцінку якості (якнайкращу якість перехідного процесу).

На підставі цього для коливальних перехідних процесів бажано застосовувати такі інтегральні оцінки, знакозмінність підінтегральної функції яких усунуто. Такою оцінкою є, наприклад, *модульна інтегральна оцінка* (на рисунку 12.7 б – пунктирна крива), яка має такий вигляд:

$$J_M = \int_0^{\infty} |x(\infty) - x(t)| dt. \quad (12.15)$$

Під час практичного застосування використання модульної інтегральної оцінки обмежено труднощами аналітичного обчислення інтеграла від модуля. Тому більшого поширення через її вибірковість і відносну нескладність визначення одержала *квадратична інтегральна оцінка* такого вигляду:

$$J_{20} = \int_0^{\infty} [x(\infty) - x(t)]^2 dt, \quad (12.16)$$

геометричну інтерпретацію якої подано на рисунку 12.7 в.

Як можна побачити, різні за величиною ординати перехідного процесу входять у критерій із різною вагою (завдяки піднесенню до квадрата), унаслідок чого вигляд початкової ділянки перехідної характеристики значно більше впливає на величину інтеграла, ніж її «хвіст». Мен-

шому значенню квадратичного критерію відповідають перехідні процеси з меншим перерегулюванням, однак водночас можна спостерігати повільне загасання. З метою усунення цього недоліку застосовують різні покращені модифікації квадратичного критерію, які використовують інформацію не лише про змінну, але й про її похідні, наприклад, такого вигляду:

$$J_{21} = \int_0^{\infty} \Delta x(t)^2 + \theta \Delta \dot{x}(t)^2 dt, \quad (12.17)$$

де  $\theta$  – ваговий коефіцієнт, який вибирають відповідно до бажаного часу наростання перехідного процесу.

Як лінійну, так і квадратичну оцінку якості можна обчислити й без побудови перехідного процесу за частотною характеристикою системи та перетворенням Фур'є вхідного сигналу з використанням формули Релея. Однак цей метод дуже трудомісткий і зараз не має застосування.

Необхідно зазначити, що абсолютні значення будь-якої інтегральної оцінки самі собою не є цікавими. Їх, насамперед, застосовують для *зіставлення якості перехідних процесів під час різних варіантів налаштувань* однієї і тієї ж самої або подібних за структурою систем.

Усі розглянуті інтегральні показники також використовують для *визначення оптимальних значень параметрів регулювальних пристроїв систем автоматичного керування*. Оптимальними параметрами вважають такі, що відповідають мінімуму значення інтегрального показника.

### ***Питання для самоперевірки***

1. Які є групи непрямих показників якості перехідних процесів?
2. За якими характеристиками можуть бути одержані частотні показники якості?



3. Про що свідчить наявність розриву на дійсній частотній характеристиці?
4. Якою повинна бути дійсна частотна характеристика для монотонного перехідного процесу?
5. Якою повинна бути дійсна частотна характеристика, щоб перерегулювання не перевищувало 18 %?
6. Якщо перехідний процес у системі загасає, то яким значенням коренів характеристичного рівняння це відповідає?
7. За яким із коренів характеристичного рівняння визначають ступінь стійкості?
8. Якому значенню дорівнює кореневий показник ступеня стійкості перехідного процесу?
9. Що характеризує кореневий показник якості – ступінь стійкості?
10. Що характеризує кореневий показник якості – ступінь коливальності?
11. Як називають траєкторію, яку описують корені характеристичного рівняння на комплексній площині під час змінювання одного з параметрів системи?
12. Чим викликана необхідність застосування інтегральних оцінок якості?
13. Чому дорівнює лінійна інтегральна оцінка для незгасаючого перехідного процесу?
14. Який основний недолік лінійних інтегральних оцінок усувають модульна та квадратична оцінки?
15. Для яких систем доцільно використовувати інтегральні оцінки якості?

## Тема 13

# СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Практичну придатність систем автоматичного керування визначають стійкістю (тобто працездатністю) та прийнятною якістю керування за різних зовнішніх збурень, що можуть порушувати перебіг їхньої нормальної роботи. Правильно спроектована система має стійко працювати за будь-яких або, принаймні, досить великих зовнішніх збурень, тому під час дослідження системи керування насамперед з'ясовують її стійкість, як мінімум стійка система або не стійка, а в кращому разі – визначають запас стійкості. За цих обставин часто виникає окреме завдання визначення зон стійкості, тобто тих значень параметрів системи (переважно параметрів регулятора), за яких вона буде, безумовно, стійкою.

### 13.1. Загальне поняття стійкості

У найпростішому разі поняття *стійкості системи* пов'язано з її здатністю з певною точністю повертатися в початковий стан після припинення зовнішнього впливу. Зазвичай за цих обставин вважають, що система піддається керуванню (керована), тобто вона буде завжди передбачувано реагувати на вхідний вплив. Якщо система *нестійка*, вона ніколи не повертається до стану рівноваги, з якої за деяких причин вона вийшла. Прикладом нестійкої фізичної системи є автомобіль, що рухається слизькою дорогою.

Щодо стійкості розрізняють три типи систем:

– *стійкі* – це системи, які завжди після зняття збурення повертаються в початковий стан рівноваги;

– *нейтральні* – це системи, які після зняття збурення повертаються в інший стан рівноваги, який відрізняється від початкового стану;

– *нестійкі* – це системи, у яких після зняття збурення не встановлюється новий стан рівноваги.

Таку класифікацію систем добре ілюструє приклад механічної системи «куля – поверхня» (рис. 13.1).

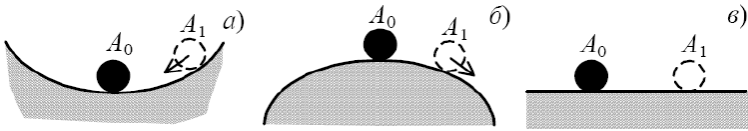


Рисунок 13.1 – Ілюстрація поняття стійкості систем:  
а) стійка; б) нестійка; в) нейтральна

Тут положення рівноваги кулі характеризує точка  $A_0$ . Під час відхилення в положення  $A_1$  за умови стійкої системи (рис. 13.1 а) куля, безумовно, намагається повернутися до початкового стану; за умови нестійкої системи (рис. 13.1 б) куля не повертається до початкового стану ніколи, а за умови нейтральної системи (рис. 13.1 в) стан кулі є байдужим. Більш складний випадок стану рівноваги ілюструє рисунок 13.2, на якому у випадку а) тип системи визначають величиною початкового відхилення, а у випадку б) – напрямом відхилення. Такі стани рівноваги називають *напівстійкими*. Вони характерні для нелінійних систем.

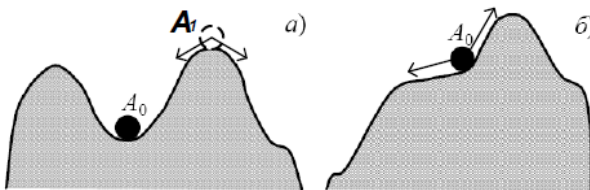


Рисунок 13.2 – Напівстійкий стан рівноваги

На підставі цього для нелінійних систем вводять такі поняття щодо стійкості:

– *система стійка «у малому»*, коли лише констатують факт наявності стійкості (рис. 13.2 б), але межі зони стійкості не визначено;

– *система стійка «у великому»*, коли межі стійкості визначено (рис. 13.2 а), тобто відомі величини початкових відхилень, за яких система повертається до початкового стану;

– *система стійка «загалом»*, коли вона повертається до вихідного стану за будь-яких початкових відхилень (див. рис. 13.1 а). Для деяких класів систем стійкість «загалом» називають *абсолютною стійкістю*.

## 13.2. Стійкість руху системи за Ляпуновим

### 13.2.1. Поняття фазового простору

Під час розглядання стійкості руху дуже корисним виявилось введення деяких наочних понять та уявлень геометричного характеру, основним із яких є поняття фазового простору, уведені академіком Андроновим.

*Фазовим простором* називають такий простір, у якому прямокутними координатами точки є величини, що визначають миттєвий стан системи й називаються *фазовими координатами*.

Метод фазового простору може бути ефективно застосовано як для лінійних, так і для нелінійних систем.

Будь-яке диференціальне рівняння  $n$ -го порядку можна записати у вигляді системи  $n$  лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (у нормальній формі Коші)  
 $y_i = f_i(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m); i = \overline{1, n}; y \in R^n, x \in R^m$ , що описує перехідний процес за наявності збурень  $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , і деякого початкового стану  $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ .

Фазовими координатами зазвичай обирають вихідну координату системи  $y_1$  та її похідні.

Точку фазового простору, що відповідає стану системи в певний момент часу  $t$ , називають *точкою*, що зображує.

Зміна стану системи в часі буде відповідати руху точки, що зображує, у фазовому просторі за певною траєкторією, яку називають *фазовою траєкторією*.

Кожному перехідному процесу в системі, який визначають конкретні початкові умови, а отже координати початкової точки, відповідає певна фазова траєкторія у фазовому просторі й навпаки.

Сукупність фазових траєкторій для всіх можливих у цій системі початкових умов називають *фазовим портретом*.

Метод фазового простору дістав найбільшого поширення під час дослідження систем другого порядку. За таких умов фазовим простором є площина.

### 13.2.2. Поняття стійкості руху систем

Поняття стійкості можна поширити й у разі руху системи (під рухом йдеться про зміну вихідної координати) уздовж деякої заданої траєкторії. Аналогом стану рівноваги за цих обставин є *незбурений рух*  $y(t)$ , викликаний лише керувальним впливом і властивостями системи (рис. 13.3). Зовнішнє збурення, що впливає на систему, може викликати в деякий момент відхилення від заданої траєкторії руху (переміщення з точки **A** в точку **B**). Фактичний рух системи з цього моменту  $y^*(t)$  називають *збуреним рухом*.

Незбурений рух  $y(t)$  називають стійким, якщо після короткочасного впливу зовнішніх сил збурений рух  $y^*(t)$  після закінчення деякого часу увійде в задану зону  $|y(t) - y^*(t)| \leq \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – будь-яка мала величина. Потрібно

пам'ятати, що близькість траєкторій не є достатньою умовою досягнення стійкості. Це ілюструє рисунок 13.3, де точки траєкторії  $t_1$  і  $t_2^*$ , незважаючи на близькість у просторі, відповідають різним моментам часу.

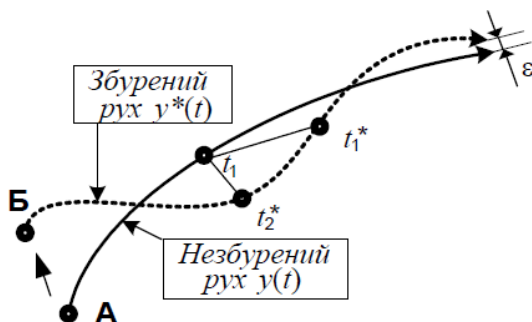


Рисунок 13.3 – Збурений і незбурений рух системи

Нехай вільний рух системи (тобто такий, що залежить лише від властивостей системи) описано системою диференціальних рівнянь у формі Коші

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \quad (13.1)$$

де  $y_i$  – узагальнені координати системи, що характеризують її поточний стан і які однозначно визначаються початковим станом у момент часу  $t_0$  – початковими умовами  $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ .

Кожній сукупності початкових умов відповідає єдине (окреме) рішення системи рівнянь (13.1) для всіх  $t > t_0$  (теорема Коші)

$$y_i(t) = y_i(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, t). \quad (13.2)$$

З іншого боку, розв'язок (13.2) описує деякий рух системи, який визначає лише початковий стан. Це і є *незбурений рух системи*.

Щоб одержати *збурений рух*, необхідно змінити початкові значення змінних  $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ , надавши їм невеликі за модулем прирости  $\varepsilon_i$ , тобто  $y_{i0}^* = y_{i0} + \varepsilon_i$ . Отже, будь-який інший рух системи, відмінний від незбуреного, є збуреним.

Введемо нові змінні, що дорівнюють різниці між вихідними координатами системи в збуреному та незбуреному станах, які називають *відхиленнями* або *варіаціями*

$$x_i(t) = y_i^*(t) - y_i(t). \quad (13.3)$$

За такої умови початкове значення відхилень  $\varepsilon_i$  (хоча б одне з них) називають збуренням  $\varepsilon_i = x_{i0}$ .

З урахуванням введених понять можна сформулювати *визначення стійкості руху системи за Ляпуновим*: незбурений рух називають стійким щодо варіацій  $x_i(t)$ , якщо для будь-якого довільно заданого додатного  $\varepsilon$ , яким би малим воно не було, можна знайти інше таке додатне число  $\delta(\varepsilon)$ , що за будь-яких збурень  $x_{i0}$ , коли  $\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 \leq \delta$ , та за будь-якого  $t \geq t_0$  буде виконуватися нерівність  $\sum_{i=1}^n x_i^2(t) \leq \varepsilon$ , інакше рух є нестійким.

Практично це означає, що якщо під впливом на систему досить малих початкових збурень, збурений рух, у підсумку, буде як завгодно мало відрізнятися від незбуреного, то це означає, що незбурений рух є стійким. В іншому разі, якщо будь-які скільки завгодно малі збурення призводять до великих неузгоджень між збуреним і незбуреним рухом, то незбурений рух буде нестійким.

Інакше кажучи, *система є стійкою, якщо її реакція, на обмежена за величиною збурення, теж є обмеженою*.

Якщо також виконується умова  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ , то незбурений рух називають *асимптотично стійким*.

### 13.3. Загальна математична умова стійкості лінійних систем

Як було зазначено вище, стійкість визначається характером руху системи після припинення дії зовнішнього збурення, що вивело її із стану рівноваги. Такий рух системи називають вільним. Він відбувається завдяки внутрішній енергії системи й залежить лише від її властивостей (параметрів).

*Вільний рух* лінійної або лінеаризованої системи автоматичного керування описують загалом *однорідним диференціальним рівнянням* (з нульовою правою частиною) такого вигляду:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = 0, \quad (13.4)$$

де  $y(t)$  – вільна складова вихідної (керуваної) величини системи, яка за початкових умов  $y(0) = y_0$ ;  $y'(0) = y'_0$ ; ...;  $y^{n-1}(0) = y_0^{m-1}$ .

Вимушена складова вихідної величини, що залежить від вигляду зовнішнього впливу й від вигляду правої частини рівняння (13.4), на стійкість системи не впливає.

Розглядаючи вільний рух із математичного погляду, можна дати такі визначення поняття стійкості з урахуванням поведінки вільної складової  $y(t)$ :

– *система стійка*, якщо вільна складова  $y(t)$  із часом наближається до нуля;

– *система нестійка*, якщо вільна складова  $y(t)$  із часом необмежено збільшується;

– *система є на межі стійкості*, якщо вільна складова  $y(t)$  із часом не прямує ні до нуля, ні до нескінченності.



Загальним розв'язком диференціального рівняння (13.4) є сума доданків, які повністю визначено значеннями коренів його характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (13.5)$$

де коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_n$  залежать лише від параметрів елементів системи й способу їхнього з'єднання. Їх можна записати в такому вигляді:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}, \quad (13.6)$$

де  $C_k$  – сталі (константи), які залежать від початкових умов;

$p_k$  – корені характеристичного рівняння (13.5), які можуть бути дійсними ( $p_k = a_k$ ), уявними ( $p_k = j\beta_k$ ) або комплексно зв'язаними ( $p_k = a_k \pm j\beta_k$ ).

Перехідна складова рівняння (13.6) за умови, що час  $t \rightarrow \infty$  наближається до нуля лише в тому разі, якщо кожний доданок  $C_k e^{p_k t} \rightarrow 0$ . Характер кожної  $k$ -ї функції часу (експоненти) повністю залежить від виду кореня  $p_k$ . На рисунку 13.4 зображено можливі випадки розміщення коренів  $p_k$  на комплексній площині, а графіки відповідних їм функцій подано всередині кіл.

Аналіз рисунку 13.4 дає можливість сформулювати загальну математичну умову стійкості: для стійкості лійної системи автоматичного керування необхідно й достатньо, щоб дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння системи були від'ємними (інакше кажучи, щоб усі корені характеристичного рівняння системи розміщувалися в лівій частині комплексної площини, як часто кажуть, були «лівими»).

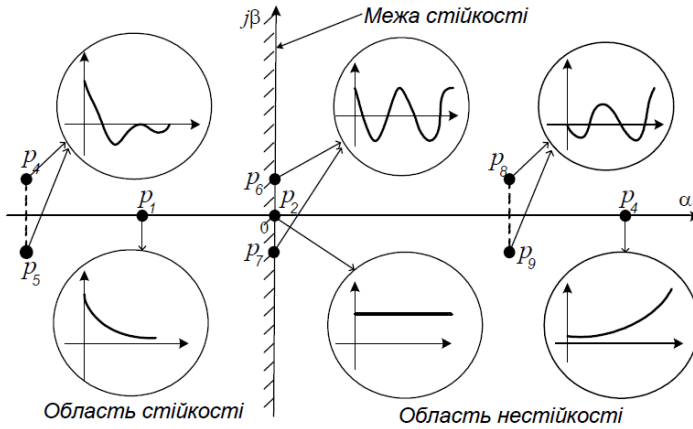


Рисунок 13.4 – Вплив коренів характеристичного рівняння на складові його вільного руху

Стійкість системи залежить лише від вигляду й розміщення коренів характеристичного рівняння й не залежить від характеру зовнішніх впливів на систему, тобто стійкість – це внутрішня властивість системи, що не залежить від зовнішніх умов.

Оскільки будь-який доданок розв'язку (13.6) за додатних коренів характеристичного рівняння необмежено зростає, то якщо хоча б один корінь має додатну дійсну частину (тобто розміщується в правій частині комплексної площини), то система загалом буде нестійкою.

Уявна вісь  $j\beta$  є межею стійкості на комплексній площині коренів. Якщо характеристичне рівняння має пару чисто уявних коренів ( $p_{k, k+1} = \pm j\beta_k$ ), а всі інші корені розміщено в лівій частині комплексної площини, то в системі встановлюються незгасаючі гармонійні коливання з круговою частотою  $\omega = |\beta_k|$ .

За таких умов кажуть, що система перебуває на *критичній межі стійкості*.

Якщо характеристичне рівняння має нульовий корінь ( $p_k = 0$ ), то система перебуває на *аперіодичній межі стійкості*. Якщо таких коренів два, то система є *нестійкою*.

Застосовуючи сформульовану вище умову для оцінювання стійкості реальних систем автоматичного керування, не потрібно забувати, що лінійні диференціальні рівняння вигляду (13.4) зазвичай одержують унаслідок спрощень і лінеаризації вихідних нелінійних рівнянь. Виникають такі питання: якою мірою оцінка стійкості за лінеаризованим рівнянням буде справедливою для реальної системи і чи не вплинуть суттєво на результат аналізу відкинуті під час лінеаризації члени розкладання? Відповідь на них дав математик А. М. Ляпунов у 1892 р. у роботі «Загальна задача про стійкість руху». Він сформулював і довів таку *теорему*: якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має хоча б один нульовий корінь або одну пару уявних коренів, то зробити висновки про стійкість реальної системи, спираючись на лінеаризоване рівняння, не можна. Відкинуті під час лінеаризації малі члени можуть зробити систему нестійкою, і тому казати про стійкість реальної системи в таких випадках необхідно лише на основі аналізу початкового нелінійного рівняння. В усіх інших випадках загальна умова стійкості справедлива як для лінійних, так і для лінеаризованих систем.

### ***Питання для самоперевірки***

1. Що насамперед необхідно з'ясувати під час дослідження САК?
2. Яка основна ознака нестійкої системи в найпростішому разі?
3. Як поводить себе нейтральна система після припинення впливу збурення?

4. Як називають стан системи, для якої стійкість системи залежить від величини зовнішнього збурення або напрямку його відхилення?

5. Якщо рух САК є незбуреним, то які впливи діють на систему?

6. Яка причина виникнення збуреного руху в системі керування?

7. До чого буде прямувати із плином часу збурений рух системи, якщо система є стійкою?

8. Яке диференціальне рівняння описує вільний рух системи?

9. Від чого залежить характер вільного руху системи?

10. Якими є необхідна й достатня математична умова стійкості системи?

11. Чи залежить властивість лінійної системи бути стійкою від характеру та величини зовнішніх збурень?

12. Яким кореням характеристичного рівняння відповідає коливальна межа стійкості, а яким – аперіодична?

## Тема 14

# КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Основним недоліком використання загальної математичної умови стійкості є необхідність визначення всіх коренів (точніше сказати, їхніх знаків) характеристичного рівняння досліджуваної системи. У разі нескладного виразу або за наявності сучасних засобів обчислювальної техніки це, загалом, є нескладним завданням. Водночас під час практичного застосування можуть виникати випадки (до деякого часу це було основною причиною), коли можливість використання ЕОМ відсутня або немає математичного опису системи, а є лише результати експериментальних досліджень.

Для таких випадків було розроблено численні методи, які дають можливість відносно простими способами й багато коли, що важливо, без допомоги ЕОМ із мінімальними витратами праці встановлювати факт стійкості системи, а інколи навіть з'ясовувати, як впливають на стійкість ті або інші параметри системи, не вдаючись до обчислення коренів. Такі методи називають *критеріями стійкості*.

Необхідно зазначити, що історія становлення критеріїв стійкості бере свій початок ще у XVIII столітті й пов'язана не з теорією автоматичного керування, а з математикою, а точніше, з питаннями дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

Залежно від того, за якими характеристиками здійснюють оцінювання стійкості, усі критерії стійкості поділяють на такі дві групи:

- *алгебраїчні*, ґрунтовані на аналізі характеристичного рівняння досліджуваної системи;
- *частотні*, які дають можливість надати оцінку стійкості системи за виглядом частотних характеристик.

З математичної погляду всі критерії є еквівалентними. Вибір і використання будь-якого з них – це питання доцільності в конкретних умовах.

### 14.1. Алгебраїчні критерії стійкості

Ця група критеріїв дає можливість робити висновки щодо стійкості системи за коефіцієнтами її характеристичного рівняння (поліномом у знаменнику передатної функції)

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (14.1)$$

Необхідною умовою стійкості системи будь-якого порядку є додатність (однаковість) усіх коефіцієнтів її характеристичного рівняння (14.1), тобто  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ , ...,  $a_{n-1} > 0$ ,  $a_n > 0$ .

Доведення цієї умови впливає з теореми Безу щодо можливості подання будь-якого многочлена вигляду (14.1) у вигляді добутку співмножників

$$D(s) = a_0 (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = 0, \quad (14.2)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – корені многочлена (полюси передатної функції).

Якщо система стійка, то всі корені мають бути або дійсними від'ємними, або комплексно зв'язаними з від'ємною дійсною частиною. У першому випадку  $\lambda_i = -\alpha$ , тоді  $s - \lambda_i = s + \alpha$ ; у другому випадку  $\lambda_{i, i+1} = -\alpha \pm j\omega$  і  $(s - \lambda_i) \cdot (s - \lambda_{i+1}) = (s + \alpha + j\omega) \cdot (s + \alpha - j\omega) = (s + \alpha)^2 + \omega^2$ .

Нескладно помітити, що після розкриття дужок у (14.2) усі одержані коефіцієнти будуть додатними. З цих міркувань впливає, що наявність хоча б одного від'ємного коефіцієнта можлива лише за умови наявності коренів із додатною дійсною частиною.

*Додатність* (однаковість) усіх коефіцієнтів характеристичного рівняння є загалом необхідною умовою стійкості. І лише для систем 1-го та 2-го порядків вона є одночасно й достатньою умовою.

Для одержання необхідних і достатніх умов стійкості систем будь-якого порядку розроблено такі алгебраїчні критерії: Рауса, Гурвіца, Льєнара – Шіпара, Неймарка.

## 14.2. Критерій стійкості Рауса

Критерій запропоновано у вигляді деякого правила або алгоритму формування з коефіцієнтів характеристичного рівняння (14.2) у вигляді таблиці 14.1.

Таблиця 14.1 – Правила заповнення таблиці коефіцієнтів Рауса

$r_i$	$i / k$	1	2	3	4
–	1	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$	...
–	2	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$	...
$r_3 =$ $= c_{11}/c_{12}$	3	$c_{13} =$ $= c_{21} - r_3 c_{22}$	$c_{23} =$ $= c_{31} - r_3 c_{32}$	$c_{33} =$ $= c_{41} - r_3 c_{42}$	...
$r_4 =$ $= c_{12}/c_{13}$	4	$c_{14} =$ $= c_{22} - r_4 c_{23}$	$c_{24} =$ $= c_{32} - r_4 c_{33}$	$c_{34} =$ $= c_{42} - r_4 c_{43}$	...
...	...	...	...	...	...

*Критерій Рауса формулюють так:* щоб система була стійкою, необхідно й достатньо, щоб коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots$  були однакового знака. Якщо ця умова не виконується, то система є нестійкою, а кількість змін знака в першому стовпці дорівнює кількості прaviх коренів.

*Перевагою критерію* є простота застосування незалежно від порядку характеристичного рівняння. Він також

зручний для програмування на ЕОМ. Недоліками є мала наочність і складність аналізу ступеня стійкості системи.

### 14.3. Критерій стійкості Гурвіца

Критерій ґрунтований на аналізі визначників, складених у певний спосіб із коефіцієнтів характеристичного рівняння системи (14.2).

Спочатку будують головний визначник Гурвіца за таким правилом (рис. 14.1):

- уздовж головної діагоналі зліва направо виставляють усі коефіцієнти характеристичного рівняння, починаючи з  $a_1$  до  $a_n$  (важливо: не з  $a_0$ , а з  $a_1$ !);
- від кожного елемента діагоналі вгору й униз добудовують стовпці визначника так, щоб індекси зменшувалися зверху вниз;
- на місце коефіцієнтів з індексами, меншими за нуль або більшими за  $n$ , ставлять нулі.

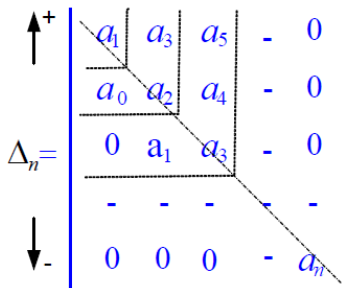


Рисунок 14.1 – Головний визначник Гурвіца

Виділяючи в головному визначнику діагональні мінори, як це подано на рисунку 14.1, одержують визначники Гурвіца

$$\Delta_1 = a_1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$



Кількість визначників Гурвіца дорівнює порядку характеристичного рівняння  $n$ , а номер визначають за старшим коефіцієнтом на діагоналі.

*Критерій стійкості Гурвіца формулюють так:* щоб система була стійкою, необхідно й достатньо, щоб всі визначники Гурвіца мали знак, що збігається зі знаком першого коефіцієнта характеристичного рівняння, тобто щоб за умови  $a_0 > 0$  вони всі були додатними

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0; \dots, \Delta_n > 0. \quad (14.3)$$

Якщо всі визначники більше за нуль, а  $\Delta_n = 0$ , то система перебуває на межі стійкості (якщо  $a_n = 0$  – аперіодична межа стійкості;  $\Delta_{n-1} = 0$  – коливальна межа стійкості).

Критерій Гурвіца застосовують до порядку  $n \leq 5$ . За великих порядків  $n$  збільшується кількість визначників, і процес розрахунків стає трудомістким.

*Недоліком критерію Гурвіца є мала наочність; перевагою* – зручність для реалізації на ЕОМ і можливість одержання аналітичних виразів для визначників, що дає можливість використовувати критерій для дослідження впливу параметрів системи на стійкість.

#### **14.4. Зони стійкості**

Часто під час проектування та налаштування САК виникає окреме завдання аналізу стійкості – визначення допустимих (за умовою стійкості) меж зміни деяких параметрів системи. Як такі параметри зазвичай розглядають коефіцієнти і сталі часу пристрою керування (параметри регулятора), які можна цілеспрямовано змінювати під час налаштування системи. Ці параметри однозначно пов'язані з коефіцієнтами характеристичного рівняння системи й тому можуть бути параметрами варіювання.

Допустимі межі варіювання параметрів системи визначають за допомогою побудови *зон стійкості* – зон у просторі варійованих параметрів системи керування, кожній точці якої відповідають лише ті корені характеристичного рівняння, що розміщені в лівій частині комплексної площини.

Поверхню, що обмежує зону стійкості, називають *межею зони стійкості*. Вигляд зони стійкості й вигляд її межі визначають кількістю варійованих параметрів. Так, за одного параметра варіювання  $\alpha$  зоною стійкості є відрізок прямої, а межею – точки  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  на кінцях цього відрізка (рис. 14.2 а). За умови двох варійованих параметрів  $\alpha$  і  $\beta$  зоною стійкості є частина площини, а межею – наприклад, лінія  $OA$  і додатна вісь параметра  $\beta$  (рис. 14.2 б). Межу з боку зони стійкості штрихують.

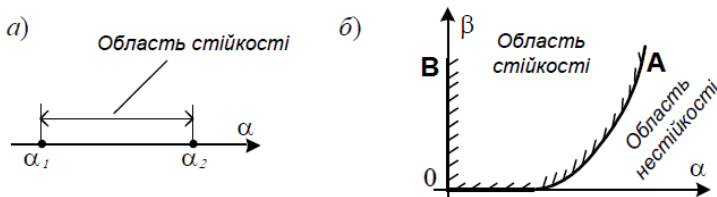


Рисунок 14.2 – Приклади зон стійкості:  
а) за одного параметра; б) за двох параметрів

Для знаходження межі зони стійкості зручно користуватися критерієм Гурвіца (хоча можна й іншими способами, наприклад, методом  $D$ -розбиття). Як приклад розглянемо систему з таким характеристичним поліномом:

$$p^3 + 3p^2 + \beta p + \alpha = 0. \quad (14.4)$$

Згідно з критерієм Гурвіца для стійкості цієї системи повинні виконуватися умови (14.3), які може бути подано (з урахуванням  $a_0 = 1 > 0$ ) у вигляді таких виразів:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = 3 > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3\beta - 1 \cdot \alpha > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 > 0. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Аналіз одержаних виразів доводить, що визначник  $\Delta_1$  завжди буде більший за нуль, а визначник  $\Delta_3$ , зважаючи додатні значення коефіцієнтів рівняння, визначають величиною  $\Delta_2$ , а лише знак  $\Delta_2$  залежить від значень варійованих параметрів. За такої умови межу стійкості визначають за рівнянням  $\Delta_2 = 0$ , звідки нескладно одержати залежність  $\beta = \alpha / 3$ . Графічне подання зони стійкості подано на рисунку 14.3.

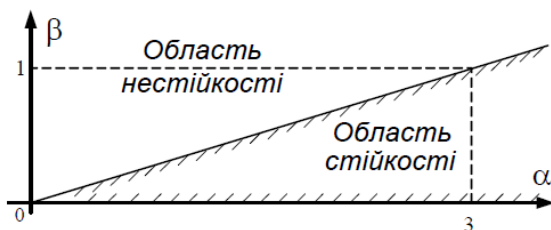


Рисунок 14.3 – Зона стійкості системи

Такий графічний підхід є одним із найефективніших очних методів розмежування параметрів між стійким і нестійким станами системи.

### *Питання для самоперевірки*

1. Який основний недолік загальної математичної умови стійкості систем?
2. На які два основні види поділяють критерії стійкості?
3. На аналізі чого засновано алгебраїчні критерії стійкості?
4. У чому полягає необхідна умова стійкості з погляду алгебраїчного критерію?
5. На аналізі чого заснований алгебраїчний критерій Гурвіца?
6. Які коефіцієнти характеристичного рівняння вписують уздовж діагоналі головного визначника Гурвіца?
7. Які за знаком повинні бути всі визначники Гурвіца для стійкої системи?
8. У чому переваги алгебраїчного критерію Гурвіца?
9. У координатах яких змінних будують зоні стійкості систем?
10. Яким кореням характеристичного рівняння відповідає будь-яка точка в зоні стійкості?

## Тема 15

### ЧАСТОТНІ КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ

Частотні методи дослідження стійкості ґрунтуються на зв'язку розміщення коренів характеристичного рівняння  $D(s)$  із графіком комплексної функції  $D(j\omega)$  за умови змінення частоти від 0 до  $\infty$ . Це графоаналітичні методи, що дають можливість за виглядом частотних характеристик САК зробити висновки щодо їхньої стійкості. Їхніми перевагами є нескладність геометричної інтерпретації, наочність і відсутність обмежень на порядок диференціального рівняння.

В основу всіх частотних критеріїв покладено наслідок із відомого в теорії функцій комплексної змінної принципу аргументу.

#### 15.1. Принцип аргументу

Нехай  $\epsilon$  комплексний поліном  $n$ -го ступеня (14.1). Відповідно до теореми Безу його можна навести в такому вигляді:

$$D(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0, \quad (15.1)$$

де  $s_i = \alpha_i + j\omega_i$  – корені рівняння (14.1);

$s$  – довільна точка на комплексній площині.

Кожен  $i$ -й корінь на комплексній площині (рис. 15.1) геометрично зображують вектором, що виходить із початку координат і закінчується в точці  $s_i = \alpha_i + j\omega_i$ . Його довжина дорівнює модулю комплексного числа  $|s_i|$ , а кут із додатним напрямком дійсної осі – аргументу або фази  $\arg(s_i)$ .

Оскільки довільна точка  $s$  на комплексній площині є вектором із довільним, нефіксованим положенням кінця, то за такої умови будь-яка різниця  $s - s_i$  є різницею векто-

рів, яку зображують на комплексній площині так, як це подано на рисунку 15.2.

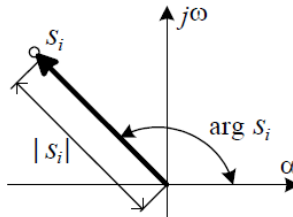


Рисунок 15.1 – Зображення вектора кореня

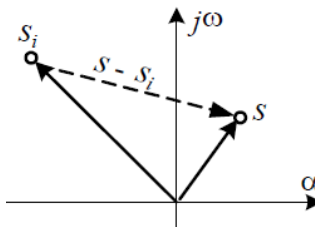


Рисунок 15.2 – Геометричне зображення різниці векторів

Якщо змінювати значення  $s$  довільно, то кінець вектора  $s - s_i$  буде переміщуватися вздовж комплексної площини, а його початок буде залишатися нерухомим, оскільки  $s_i$  – це конкретне незмінне значення (один із коренів рівняння). Якщо на вхід системи подавати гармонійні коливання з частотою  $\omega$ , то  $s = j\omega$ , а характеристичний поліном (15.1) набуде такого вигляду:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n) = 0. \quad (15.2)$$

За такої умови кінці різниць векторів  $j\omega - s_i$  будуть перебувати на уявній осі (рис. 15.3). Якщо змінювати час-

тоту  $\omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ , то кожен елементарний вектор  $j\omega - s_i$  буде повертатися щодо свого початку  $s_i$  на кут  $+\pi$  для «лівих» і  $-\pi$  для «правих» коренів (рис. 15.4).

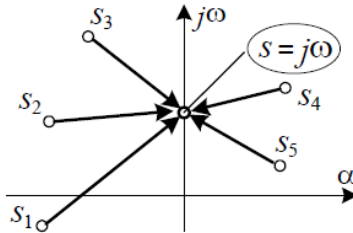


Рисунок 15.3 – Ілюстрація різниці векторів рівняння

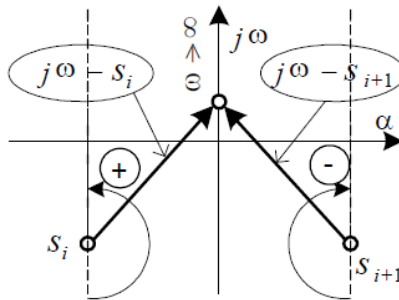


Рисунок 15.4 – Пояснення принципу аргументу

Нехай із  $n$  коренів  $m$  – розташовано в правій півплощині, а в лівій півплощині їх  $(n - m)$ , тоді кут повороту вектора  $D(j\omega)$  під час змінювання частоти  $\omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ , зважаючи на чинник додавання аргументів під час перемноження векторів, дорівнює такому виразу:

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{+\infty} = \pi(n - m) - \pi m = \pi(n - 2m). \quad (15.3)$$

Цей вираз визначає *принцип аргументу*: змінення аргументу вектора характеристичного полінома  $D(j\omega)$  під час змінювання частоти від  $-\infty$  до  $+\infty$  дорівнює різниці  $(n - m)$

коренів рівняння  $D(j\omega) = 0$ , що лежать у лівій півплощині, й кількістю  $m$  коренів цього самого рівняння, що лежать у правій півплощині, помноженій на  $\pi$ .

Якщо змінювати частоту від  $0$  до  $+\infty$ , то змінення аргументу буде вдвічі меншим.

Оскільки кількість коренів рівняння  $D(j\omega) = 0$  й те, які вони за знаком, апіорі невідомо, то частотні критерії використовують висновки з принципу аргументу для аналізу зовнішнього вигляду частотних характеристик систем.

## 15.2. Частотний критерій стійкості Михайлова

Це є, фактично, геометричною інтерпретацією принципу аргументу (15.3), відповідно до якого маємо, що якщо всі корені характеристичного рівняння системи розташовано в лівій півплощині, тобто  $m = 0$ , то

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2} (n - 2m) = \frac{\pi}{2} n. \quad (15.4)$$

*Критерій стійкості Михайлова формулюють так:* для того щоб система була стійкою, необхідно, щоб вектор  $D(j\omega) = 0$  у разі змінювання частоти від  $0$  до  $+\infty$  повернувся на кут  $\frac{\pi}{2}n$ , ніде не обертаючись на нуль. За такої умови кінець вектора опише на площині криву, яку називають *годографом Михайлова*. Для побудови годографа вираз (14.1) записують із заміною  $s$  на  $j\omega$  у такому вигляді:

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n = \\ &= X(\omega) + jY(\omega), \end{aligned} \quad (15.5)$$

де  $n$  – порядок полінома  $D(s)$ ;

$X(\omega)$ ;  $Y(\omega)$  – дійсна та уявна частини функції Михайлова відповідно.

*Для стійкої системи* годограф починається на додатній півосі за умови  $D(0) = a_n$ , і під час змінювання частото-



ти від 0 до  $+\infty$  послідовно проходить проти годинникової стрілки вздовж спіралі  $n$  квадрантів комплексної площини з переходом у нескінченність у  $n$ -му квадранті. Приклади годографів Михайлова для стійких систем (1 – 4)-го порядків наведено на рисунку 15.5 *a*.

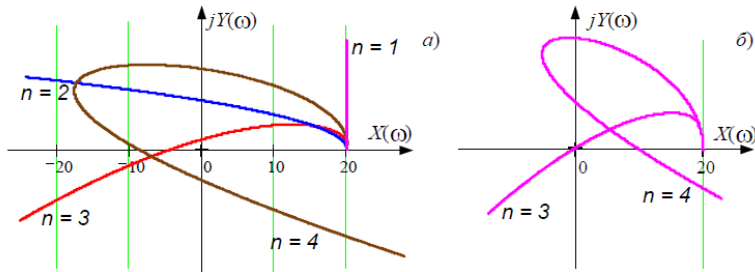


Рисунок 15.5 – Приклади годографів Михайлова: *a*) стійких систем (1 – 4)-го порядків; *б*) нейтральної системи 3-го порядку й нестійкої системи 4-го порядку

Якщо це правило порушують (наприклад, кількість квадрантів, які проходить крива, не дорівнює  $n$  або порушують послідовність проходження квадрантів (рис. 15.5 *б*)), то така система є нестійкою. Якщо годограф проходить через початок координат, то система перебуває на межі стійкості (див. рис. 15.5 *б*).

Критерій зручний своєю наочністю. Його використовують, якщо є можливим одержати математичний опис замкненої системи автоматичного керування.

Аналіз поведінки годографа Михайлова для стійких систем свідчить, що під час послідовного проходження його через квадранти координатної площини дійсна й уявна осі перетинаються ним по черзі (послідовно). Точки перетину (рис. 15.6) є коренями таких рівнянь:

$$X(\omega) = 0; Y(\omega) = 0. \quad (15.6)$$

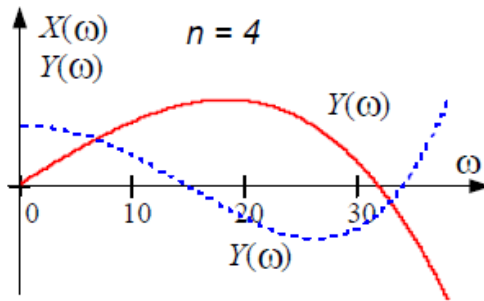


Рисунок 15.6 – Корені, що перемежуються

З цієї причини *критерій Михайлова* формулюють так: система буде стійкою тоді, коли дійсна  $X(\omega)$  та уявна  $Y(\omega)$  частини функції Михайлова, прирівняні до нуля, матимуть усі дійсні корені й такі, що перемежуються, загальна кількість яких дорівнює  $n$  (див. рис. 15.6). За  $\omega = 0$  повинні виконуватися такі умови:  $X(0) > 0$ ;  $Y(0) = 0$ .

### 15.3. Частотний критерій стійкості Найквіста

Цей критерій заснований на зв'язку властивості стійкості замкненої системи з поведінкою амплітудно-фазової частотної характеристики (АФЧХ) розімкненої системи, у яку входять послідовно з'єднані ланки від входу системи до точки замикання зворотного зв'язку (рис. 15.7), тобто можна робити висновок щодо стійкості замкненої системи за поведінкою АФЧХ розімкненої системи. Цим критерій Найквіста принципово відрізняється від частотного критерію Михайлова, який, як відомо, дає ознаки стійкості власне досліджуваної системи. Саме в цьому є його головна перевага, оскільки дослідження розімкненої системи автоматичного керування більш просте, ніж замкненої системи, і його можна проводити експериментально.

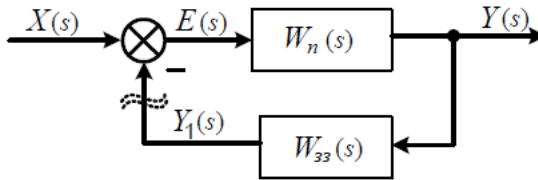


Рисунок 15.7 – Структурна схема замкненої системи

Водночас на застосування критерію Найквіста накладають такі *обмеження*:

- ступінь чисельника передатної функції розімкненої системи не повинен перевищувати ступеня знаменника (для реальних фізичних систем таку умову виконують завжди);
- система повинна бути охоплена одиничним зворотним зв'язком.

Нехай передатна функція розімкненої системи за умови одиничного від'ємного зворотного зв'язку  $W_{33}(s) = 1$  має вигляд співвідношення двох поліномів

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{R(s)}{Q(s)}, n \geq m. \quad (15.7)$$

Передатну функція замкненої системи за каналом керування можна записати так:

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{R(s)/Q(s)}{1+R(s)/Q(s)} = \frac{R(s)}{R(s)+Q(s)}. \quad (15.8)$$

Характеристичне рівняння розімкненої системи (яке має порядок  $n$ ) визначають як  $Q(s) = 0$ , а замкненої системи –  $R(s) + Q(s) = 0$ . За такої умови характеристичне рівняння замкненої системи матиме той самий порядок  $n$ , що й у розімкненої системи, за умови, що впливає з (15.8).

Розглядаючи вираз  $1 + W(s)$  у знаменнику передатної функції замкненої системи, можна побачити, що він є відношенням характеристичних поліномів замкненої та розімкненої систем

$$1 + W(s) = 1 + \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{Q(s)+R(s)}{Q(s)} = \frac{D_z(s)}{D_p(s)} = D(s). \quad (15.9)$$

Отже, вектор частотної характеристики виразу  $D(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ , який іноді називають *вектором Найквіста*, містить у собі властивості розімкненої та замкненої систем. З іншого боку, це є фактично АФЧХ розімкненої системи, яка зміщена на одиницю вправо вздовж дійсної осі.

Нехай характеристичне рівняння замкненої системи має  $m$  «правих» і  $(n - m)$  «лівих» коренів, а характеристичне рівняння розімкненої системи має  $k$  «правих» і  $(n - k)$  «лівих» коренів.

Під час змінювання частоти  $\omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$  змінення кута повороту вектора відповідно до принципу аргументу визначають за таким виразом:

$$\begin{aligned} \Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} &= \Delta \arg D_z(j\omega) - \Delta \arg D_p(j\omega) = \\ &= \pi(n - 2m) - \pi(n - 2k) = 2\pi(k - m). \end{aligned} \quad (15.10)$$

Оскільки для стійкої замкненої системи  $m = 0$ , то за такої умови сумарний поворот вектора  $D(j\omega)$  навколо початку координат можна описати таким виразом:

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\pi k, \quad (15.11)$$

де  $k$  – кількість «правих» коренів характеристичного рівняння розімкненої системи.

Під час змінювання частоти  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  одержимо таке рівняння:

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi k = 2\pi \frac{k}{2}. \quad (15.12)$$

З рівняння (15.12) бачимо, що поведінка вектора Найквіста  $D(j\omega)$  буде суттєво залежати від стійкості розімкненої системи.

*Загальне формулювання критерію стійкості Найквіста* таке: щоб після замикання одиничним зворотним зв'язком система була стійкою, необхідно й достатньо, щоб вектор Найквіста (15.9) під час змінення частоти від 0 до  $+\infty$  повернувся навколо початку координат (охопив початок координат) у додатному напрямку (за годинниковою стрілкою)  $k/2$  разів. Зокрема, якщо розімкнена система є стійкою, то сумарний кут повороту вектора Найквіста має становити  $0^\circ$  (оскільки  $k = 0$ ).

Під час практичного застосування досліджують поведінку не вектора Найквіста  $D(j\omega)$ , а АФЧХ розімкненої системи  $W(j\omega)$ , зважаючи на те, що відповідно до (15.9) визначають виразом  $W(j\omega) = D(j\omega) - 1$ .

На рисунку 15.8 а подано криву, яку описує кінець вектора Найквіста в разі змінювання частоти від 0 до  $+\infty$  для стійкої в розімкненому стані системи. Неважко переконатися, що вектор Найквіста опише кут, що дорівнює нулю лише тоді, коли його годограф не охоплює початок координат. Перенесемо умовно початок координат у точку з координатами  $[1; j0]$  (рис. 15.8 б). За такої умови змінення аргументу вектора Найквіста буде дорівнювати нулю, якщо АФЧХ розімкненої системи не буде охоплювати точку з координатами  $[-1; j0]$ , яку називають *критичною точкою*.

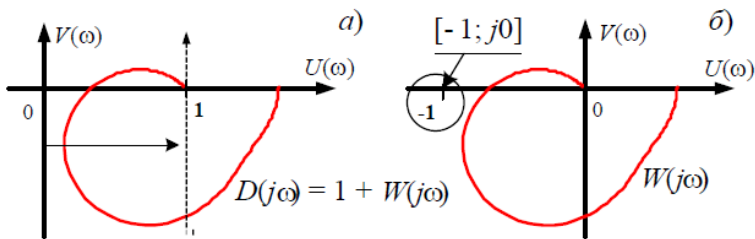


Рисунок 15.8 – Перетворення годографа вектора Найквіста

З урахуванням умови (15.10) розрізняють три випадки застосування критерію Найквіста:

1) *розімкнена система є стійкою*. Такій системі відповідає умова

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi k = 0. \quad (15.13)$$

*Критерій стійкості формулюють так:* для стійкості замкненої системи необхідно й достатньо, щоб АФЧХ розімкненої стійкої системи під час змінювання частоти від 0 до  $+\infty$  **НЕ** охоплювала критичну точку з координатами  $[-1; j0]$ .

Різні варіанти поведінки АФЧХ системи, яка є стійкою в розімкненому стані, після замикання її одиничним зворотним зв'язком подано на рисунку 15.9.

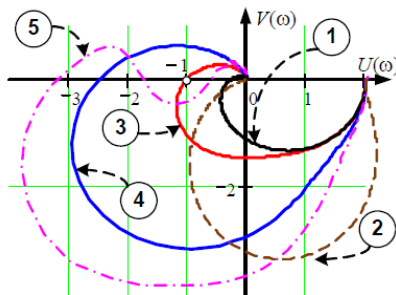


Рисунок 15.9 – Варіанти поведінки АФЧХ стійкої в розімкненому стані системи

З рисунка 15.9 бачимо таке:

- замкнена система буде стійкою;
- замкнена система буде абсолютно стійкою за будь-яких змін параметрів системи;
- замкнена система буде на межі стійкості (АФЧХ проходить через критичну точку з координатами  $[-1; j0]$ );
- замкнена система буде нестійкою;
- 2) розімкнена система на межі стійкості (наявність нульових або чисто уявних коренів).

Цей випадок характерний особливостями, що виникають унаслідок виникнення нульових полюсів. Подамо передатну функцію розімкненої системи в такому вигляді:

$$W(s) = \frac{D(s)}{s^{\nu}Q(s)}, \quad (15.14)$$

де  $\nu$  – порядок астатизму (кількість нульових полюсів), що має всі корені на лівій півплощині.

За умови  $\omega = 0$  АФЧХ розімкненої системи  $W(j\omega) = \infty$  і простежити поведінку кривої АФЧХ в околі цієї точки неможливо. Під час змінювання частоти від  $-\infty$  до  $+\infty$  спостерігають рух годографа кривої вздовж уявної осі знизу вгору, а за умови  $\omega = 0$  відбувається нескінченний розрив. У процесі такого руху обійдемо нульовий корінь (рис. 15.10) уздовж півкола нескінченно малого радіуса  $\rho$  так, щоб цей корінь залишився ліворуч, тобто уявно віднесемо його до лівої півплощини. Під час руху вздовж цього півкола в додатному напрямку незалежна змінна змінюється за таким законом (за умови  $\nu = 1$ ):

$$s = \rho e^{j\Psi(\omega)}, \quad (15.15)$$

де фаза змінюється від  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ .

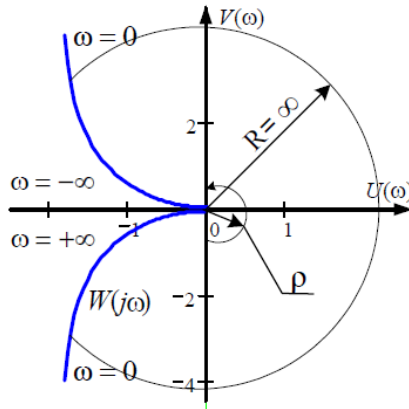


Рисунок 15.10 – Обхід розриву АФЧХ

Підставивши вираз (15.15) у передатну функцію (15.14) замість множника  $s$  у знаменнику, одержимо таке:

$$W(s) = \frac{D(s)}{\rho Q(s)} e^{j\psi(\omega)} = R \frac{D(s)}{Q(s)} e^{j\psi(\omega)}, \quad (15.16)$$

де  $R \rightarrow \infty$ , якщо  $\rho \rightarrow 0$ , а фаза  $\psi(\omega)$  змінюється від  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ .

Отже, в околиці нульового кореня годограф  $W(j\omega)$  є частиною кола (дуга) нескінченно великого радіуса, рух уздовж якого відбувається під час збільшення частоти у від'ємному напрямку.

*Критерій стійкості формулюють так:* для оцінювання стійкості замкненої системи, у разі якщо розімкнена система нейтрально стійка, необхідно АФЧХ  $W(j\omega)$  розімкненої системи доповнити дугою нескінченно великого радіуса на ділянці розриву, починаючи з менших частот, у від'ємному напрямку (проти годинникової стрілки) й після одержання замкненої кривої для визначення стійкості пот-



рібно скористатися варіантом критерію Найквіста для систем, стійких у розімкненому стані.

На рисунку 15.11 подано варіанти використання критерію Найквіста для нейтральних у розімкненому стані систем. Після замикання система буде: 1 – стійкою; 2 – на межі стійкості; 3 – нестійкою;

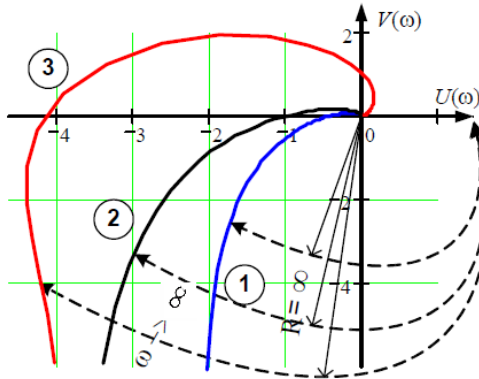


Рисунок 15.11 – Варіанти поведінки АФЧХ нейтральної в розімкненому стані системи

3) *розімкнена система нестійка* (наявність  $k$  «правих» коренів).

За цієї умови сумарний поворот вектора годографа розімкненої системи описують таким виразом:

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = (\pi - 2k) \frac{\pi}{2}. \quad (15.17)$$

Якщо замкнена система стійка, то відповідно до (15.17) АФЧХ розімкненої системи охоплює критичну точку в додатному напрямку  $k/2$  разів.

*Критерій стійкості Найквіста формулюють так:* система, нестійка в розімкненому стані, буде стійкою в замкненому стані, якщо АФЧХ  $W(j\omega)$  розімкненої системи

під час змінювання частоти від 0 до  $+\infty$  охоплює критичну точку в додатному напрямку  $k/2$  разів, де  $k$  – кількість правих полюсів розімкненої системи.

Визначення кількості обхватів критичної точки є непростим завданням, особливо в разі систем високого порядку. Тому в практичних додатках застосовують інше формулювання критерію Найквіста, засноване на аналізі переходів характеристики через дійсну вісь: система, нестійка в розімкненому стані, буде стійкою в замкненому стані, якщо різниця між кількістю додатних і від'ємних переходів АФЧХ розімкненої системи через дійсну вісь дорівнює  $k/2$ .

*Правило визначення переходів (за Ципкіним)* формують так: перехід годографа  $W(j\omega)$  через відрізок дійсної півосі  $(-\infty; -1)$ , тобто лівіше критичної точки, у разі збільшення частоти зверху вниз вважається додатним, а знизу вгору – від'ємним.

Якщо годограф  $W(j\omega)$  починається на відрізку  $(-\infty; -1)$  за умови  $\omega = 0$  або закінчується за умови  $\omega = -\infty$ , то це вважають за половину переходу.

### ***Питання для самоперевірки***

1. Який принцип покладено в основу використання частотних критеріїв?
2. На який кут повернеться годограф вектора на комплексній площині в разі змінювання частоти від 0 до  $+\infty$ , якщо корінь розміщений у лівій півплощині?
3. На який кут повернеться годограф вектора на комплексній площині під час змінювання частоти від 0 до  $+\infty$ , якщо корінь розміщений у правій півплощині?
4. Де повинен починатися й у якому напрямку повертатися годограф Михайлова?
5. У чому важлива перевага критерію Михайлова?

6. Що можна зазначити про стійкість системи 4-го порядку, якщо годограф Михайлова послідовно проходить через 1, 2, 1 і закінчується на 4-му квадранті?

7. Стійкість якої системи визначають за критерієм Найквіста?

8. Яка основна перевага критерію Найквіста?

9. Які два обмеження необхідно врахувати під час застосування критерію Найквіста?

10. Чи можна використовувати критерій Найквіста за умови замикання системи одиничним зворотним зв'язком?

## Тема 16 ЗАПАС СТІЙКОСТІ Й АНАЛІЗ ЗА ЛОГАРИФМІЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

### 16.1. Аналіз стійкості за логарифмічними характеристиками

Частотний критерій Найквіста також можна використовувати щодо логарифмічних характеристик (ЛАЧХ). Привабливість цього способу полягає в тому, що побудова логарифмічної АЧХ, зокрема асимптотичної, є значно простішою, ніж звичайної АФЧХ.

Як було подано вище, стійкість замкненої системи тісно пов'язана з кількістю переходів АФЧХ розімкненої системи  $W(j\omega)$  через відрізок  $(-\infty; -1)$  від'ємної дійсної півосі. Ця піввісь у звичайній АФЧХ відповідає фазовому зсуву  $(-\pi i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Тому момент переходу звичайної АФЧХ через відрізок  $(-\infty; -1)$  відповідає перетину ЛФЧХ однієї з ліній  $\pm\pi(2i + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (рис. 16.1).

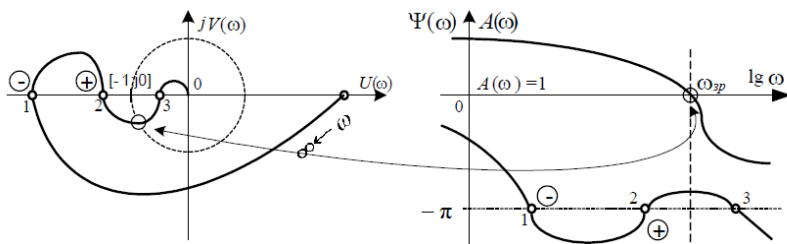


Рисунок 16.1 – Відповідність між звичайною та логарифмічною АФЧХ

З погляду стійкості ці переходи безпечні, якщо відбуваються праворуч від точки  $[-1; j0]$ , тобто коли модуль амплітуди АФЧХ менший за одиницю  $W(j\omega) < 1$ . За такої умови ординати ЛАЧХ є від'ємними ( $A(\omega) < 1$ ). Отже, для дослідження стійкості достатньо побудувати ЛАЧХ у діа-

пазоні додатних значень  $A(\omega)$  (тобто меншим за частоту зрізу  $\omega_{зр}$ ).

*Формулювання критерію стійкості* таке: якщо розімкнена система стійка або нейтральна (на межі стійкості), то для її стійкості в замкненому стані необхідно й достатньо, щоб кількість переходів ЛФЧХ через лінію  $-\pi$  за додатних значень ЛАЧХ була парною (зокрема й такою, що дорівнює нулю).

Варіанти логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи подано на рисунку 16.2. Тут частотна характеристика **1** відповідає абсолютно стійкій системі в замкненому стані, оскільки кількість переходів ЛФЧХ через лінію в межах додатних значень дорівнює нулю, характеристика **2** умовно відповідає стійкій системі в замкненому стані (кількість переходів 2), характеристика **3** відповідає знаходженню замкненої системи на межі стійкості, а характеристика **4** відповідає нестійкій системі в замкненому стані.

За таких обставин перехід ЛФЧХ через лінію  $-\pi$  знизу вгору вважають додатним, а навпаки – від’ємним.

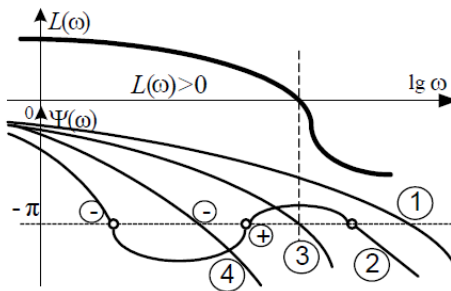


Рисунок 16.2 – Визначення стійкості за логарифмічною АФЧХ

За умови нестійкої розімкненої системи ( $k$  «правих» коренів) необхідно й достатньо, щоб різниця між кількістю

додатних і від'ємних переходів через лінію  $-\pi v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  дорівнювала  $k/2$ .

За наявності нульових коренів (нейтральна в розімкненому стані система) ЛФЧХ доводять до рівня  $0^\circ$  дугою нескінченно великого радіуса, після чого використовують формулювання критерію для стійкої розімкненої системи.

## **16.2. Поняття й визначення запасу стійкості системи**

Для нормальної роботи будь-яка система керування повинна мати достатній запас стійкості для того, щоб компенсувати можливі похибки розрахунків її налаштувань, викликані такими чинниками:

- ідеалізація і спрощення рівнянь математичного опису;
- лінеаризація рівнянь математичного опису;
- помилки визначення параметрів математичної моделі (коефіцієнтів) і їхній технологічний розкид;
- змінення параметрів реальних систем унаслідок старіння тощо.

Запас стійкості можна оцінити за розміщенням коренів характеристичного рівняння – чим далі вони розташовані в лівій півплощині від уявної осі, тобто від межі стійкості, тим більший запас. Водночас для визначення запасу стійкості можна використати також і критерії стійкості. Форма кількісної оцінки запасу стійкості залежить від того, який із критеріїв використовують. Здебільшого з інженерною метою *для визначення запасу стійкості використовують критерій Найквіста* (у звичайному та логарифмічному варіантах).

Щодо величини запасу стійкості за умови використання критерію Найквіста судять за віддаленням кривої годографа АФЧХ розімкненої системи від критичної точки

з координатами  $[-1; j0]$  за такими двома показниками (рис. 16.3):

- запасом стійкості за фазою  $\gamma$ ;
- запасом стійкості за модулем  $h$ .

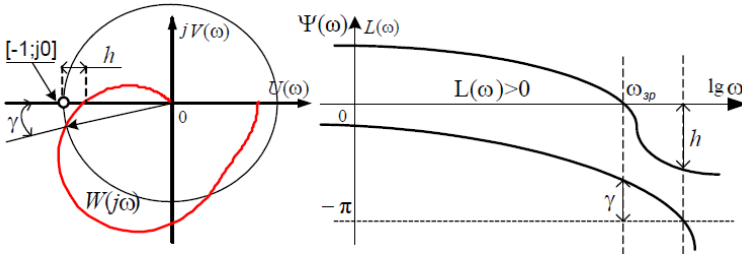


Рисунок 16.3 – Визначення запасу стійкості

*Запас стійкості за фазою* визначають як величину кута (фазового зсуву)  $\gamma = \pi - |\Psi(\omega)_{зр}|$  на частоті зрізу системи  $\omega_{зр}$ , за якої  $|W(j\omega)| = 1$ .

*Запас стійкості за амплітудою* – це величина відрізка на осі абсцис  $h$  між критичною точкою з координатами  $[-1; j0]$  і годографом АФЧХ розімкненої системи.

На вигляд графіка АФЧХ, а отже, й на величину запасу стійкості різні параметри системи впливають різною мірою. Водночас вплив коефіцієнта підсилення розімкненої системи  $K$ , безумовно, є однозначним – змінення  $K$  ніяк не впливає на фазу, а лише на величину амплітуди (модуль). З цієї причини під час практичного застосування часто для змінення величини запасу стійкості використовують саме цей параметр.

*Критичний коефіцієнт підсилення* – коефіцієнт підсилення розімкненої системи  $K$ , за якого АФЧХ пройде через критичну точку з координатами  $[-1; j0]$ , тобто вийде на межу стійкості.

Для деяких систем керування (зазвичай із внутрішніми зворотними зв'язками) втрата стійкості може відбутися як у разі збільшення коефіцієнта підсилення, так і за умови його зменшення (рис. 16.4).

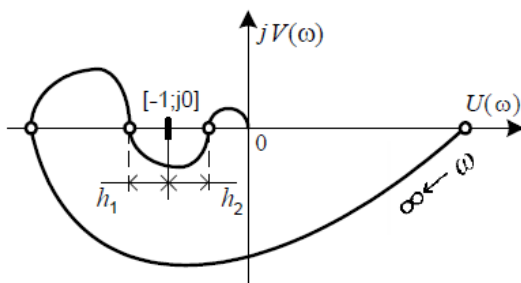


Рисунок 16.4 – Дзьобоподібна АФЧХ

Щоб система мала необхідний запас стійкості за заданими значеннями  $\gamma$  і  $h$ , навколо критичної точки з координатами  $[-1; j0]$  будують деяку «заборонену зону» у вигляді сектора (рис. 16.5), куди АФЧХ розімкненої проектованої системи не повинна заходити.

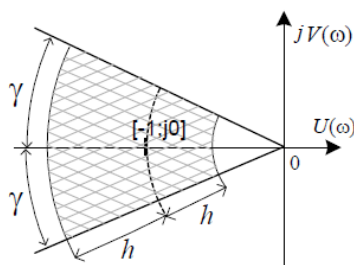


Рисунок 16.5 – «Заборонена зона»

Геометрію «забороненої зони» у певних розрахунках, наприклад, під час коригування системи керування можна використовувати як опорну конструкцію за умови формування бажаної результуючої АФЧХ-системи.



### 16.3. Стійкість систем керування із запізненням

Як уже було згадано раніше (див. п. 7.9), передатна функція ланки чистого (транспортного) запізнювання має вигляд  $W(s) = ke^{-\tau \cdot s}$ , де  $\tau$  – час запізнювання. Системи, що містять такі ланки, називають *системами із запізнюванням*.

Розглянемо систему (рис. 15.7), до прямого ланцюга якої під'єднана ланка чистого запізнювання. Передатна функція розімкненої системи із запізнюванням має вигляд

$$W_{p\tau}(s) = W(s)W_{\tau}(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} e^{-\tau s}, \quad (16.1)$$

а передатна функція замкненої системи

$$W_{3\tau}(s) = \frac{W_{p\tau}(s)}{1 + W_{p\tau}(s)} = \frac{R(s)e^{-\tau s}}{Q(s) + R(s)e^{-\tau s}} = \frac{R_{\tau}(s)}{D_{\tau}(s)}. \quad (16.2)$$

Як бачимо з (16.2), характеристичне рівняння системи через наявність множника  $e^{-\tau \cdot s}$  є не поліномом, а трансцендентною функцією оператора  $s$  і має безліч коренів, що добре бачимо під час розкладання останнього в нескінченний ряд

$$e^{-\tau \cdot s} = 1 - s\tau + \frac{s^2\tau^2}{2!} - \frac{s^3\tau^3}{3!} + \dots \quad (16.3)$$

Знаходження коренів виразу з таким множником є складним і тому критерії Рауса й Гурвіца в їхній звичайній формі непридатні. Крім того, додатні значення коефіцієнтів рівнянь навіть 1-го й 2-го порядків уже не є достатньою умовою стійкості системи загалом.

У цьому разі можна використати частотні критерії, але з урахуванням деяких особливостей. Так, зокрема,

умова стійкості Найквіста для подібних систем справедлива, але вигляд АФЧХ значно складніший.

Розглянемо АФЧХ системи із запізненням

$$\begin{aligned} W_{\tau}(j\omega) &= W(j\omega)e^{-\tau j\omega} = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}e^{-j\tau\omega} = \\ &= A(\omega)e^{j(\psi(\omega)-\tau\omega)}. \end{aligned} \quad (16.4)$$

З (16.4) бачимо, що наявність ланки запізнювання не змінює модуля системи, а лише вносить додатковий від'ємний фазовий зсув, пропорційний частоті  $\tau\omega$ .

Це дає можливість спочатку побудувати АФЧХ системи без запізнювання, а потім кожен вектор модуля  $A(\omega_i)$  повернути на кут  $\tau\omega_i$ , як це подано на рисунку 16.6. Тут спостерігають ефект закручування спіралі, що загальною погіршує умови стійкості.

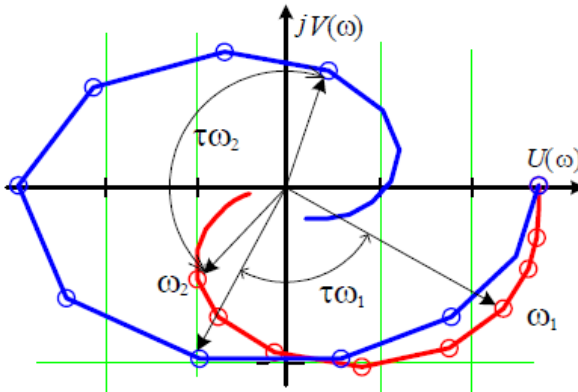


Рисунок 16.6 – Побудова АФЧХ системи із запізнюванням

На підставі цього можна визначити *поняття* «критичного» запізнювання  $\tau_{кр}$  як такого, під час якого система виходить на межу стійкості.

### *Питання для самоперевірки*

1. На якому відрізку дійсної осі визначають знак переходу за правилом Ципкіна?
2. Як визначають переходи за правилом Ципкіна на звичайній АФЧХ?
3. Як визначають переходи за правилом Ципкіна на логарифмічній АФЧХ?
4. Що називають запасом стійкості за фазою на звичайній АФЧХ?
5. Що називають запасом стійкості за модулем на звичайній АФЧХ?
6. Що називають запасом стійкості за фазою на логарифмічній АФЧХ?
7. Що називають запасом стійкості за модулем на логарифмічній АФЧХ?
8. Через яку точку проходить АФЧХ розімкненої системи в разі критичного коефіцієнта підсилення?
9. Якими параметрами визначають «заборонену зону» для забезпечення необхідного запасу стійкості?
10. Як впливає під'єднання ланки запізнювання на стійкість системи?
11. Як зміниться фазовий зсув системи після під'єднання ланки чистого запізнювання?

## Тема 17. ПРАКТИЧНА РОБОТА 1. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

У ТАК елементи автоматичних систем щодо їхніх динамічних властивостей подають за допомогою динамічних ланок. Під *динамічною ланкою* йдеться про математичну модель штучно виділеної частини системи, яку характеризують певним (найпростішим) алгоритмом передавання сигналу зі входу ланки на її вихід (рис. 17.1).



Рисунок 17.1 – Схематичне зображення динамічної ланки

Вхідну величину ланки позначають  $x_{вх}(t)$  або  $x_1(t)$ , а вихідну величину –  $x_{вих}(t)$  або  $x_2(t)$ .

Вхідна та вихідна величини відповідають фізичним величинам, що відображають вплив попередньої ланки на цю ланку ( $x_{вх}(t)$ ) і вплив цієї ланки на наступну ( $x_{вих}(t)$ ). Передавання сигналу ланкою відбувається лише в одному напрямку – сигнал передається зі входу ланки на її вихід. Вихід однієї ланки може бути входом іншої ланки. Рівняння динаміки елемента системи (ланки) визначає залежність його вихідної величини  $x_{вих}(t)$  від вхідної величини  $x_{вх}(t)$ . Його зазвичай подають у диференціальній формі. Ланкою САК може бути технічний пристрій будь-якої фізичної природи, конструкції та призначення. Тому складання рівняння динаміки конкретної ланки є предметом відповідної галузі технічних наук (механіки, електротехніки, теплотехніки тощо), до яких потрібно звертатися щоразу. Якщо відомі динамічні ланки (математичні моделі окремих частин системи) і їхні зв'язки між собою, то можна одержати

математичну модель (рівняння динаміки) системи автоматичного керування.

Якщо задано диференціальне рівняння, що описує залежність вихідної величини елемента від вхідної, то передатну функцію ланки  $W(p)$  визначають за допомогою перетворення Лапласа за нульових початкових умов.

Розглянемо визначення передатної функції ланки на прикладі диференціального рівняння електричного  $RL$ -ланцюга (рис. 17.2)

$$T \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + U_{\text{вих}}(t) = kU_{\text{вх}}(t), \quad (17.1)$$

де  $T = L / (R1 + R2)$  – стала часу;

$k = R2 / (R1 + R2)$  – коефіцієнт підсилення ланки.

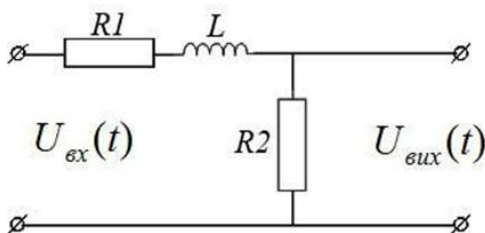


Рисунок 17.2 – Електричний  $RL$ -ланцюг

Запишемо початкове диференціальне рівняння в операційній формі (тобто в зображеннях за Лапласом), використовуючи такі теореми перетворення Лапласа:

– теорему про додавання (лінійність перетворення)

$$L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 L\{f_1(t)\} + a_2 L\{f_2(t)\};$$

– теорему про інтегрування

$$L\left\{\int_0^t f(r) dr\right\} = \frac{F(p)}{p};$$

– теорему про диференціювання (за нульових початкових умов)

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p).$$

Тут  $F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$  – зображення за Лапласом функції часу  $f(t)$ ;  $p = \sigma + j\omega$  – комплексна змінна перетворення Лапласа.

Відповідно до наведених теорем функції часу, що входять до диференціального рівняння, замінюють на їхнє зображення за Лапласом, а операції диференціювання (інтегрування) за нульових початкових умов – множенням (діленням) на комплексну змінну  $p$  зображень функцій, від яких беруть похідну (інтеграл).

Диференціальне рівняння (17.1) в операційній формі за нульових початкових умов має такий вигляд:

$$(Tp + 1)U_{\text{вих}}(p) = kU_{\text{вх}}(p). \quad (17.2)$$

*Передатну функцію ланки (системи)  $W(p)$  визначають як відношення зображень за Лапласом вихідної  $X_{\text{вих}}(p)$  та вхідної  $X_{\text{вх}}(p)$  величин за нульових початкових умов*

$$W(p) = \frac{X_{\text{вих}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}, \quad (17.3)$$

тобто передатну функцію можна визначити із рівняння динаміки ланки, записаного в операційній формі, і рівняння (17.3) набуде такого вигляду:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (17.4)$$

Якщо елемент системи має дві вхідні величини, потрібно визначити дві передатні функції (за кожним входом).

Нехай диференціальне рівняння елемента подано в такому вигляді:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_1 x(t) - k_2 f(t), \quad (17.5)$$

де  $y(t)$  – вихідна величина;

$x(t)$ ,  $f(t)$  – відповідно регулювальний і збурювальний впливи (знак « $-$ » свідчить, що під час збільшення  $f(t)$  відбувається зменшення  $y(t)$ ).

Покладаємо, що  $y = y_x - y_f$ . Тоді рівняння (17.5) розбиваємо на два рівняння

$$T \frac{dy_x(t)}{dt} + y_x(t) = k_1 x(t); \quad (17.6)$$

$$T \frac{dy_f(t)}{dt} + y_f(t) = k_2 f(t), \quad (17.7)$$

яким відповідають такі дві передатні функції:

$$W_{y_x}(p) = \frac{y_x(p)}{x(p)} = \frac{k_1}{Tp+1}; \quad (17.8)$$

$$W_{y_f}(p) = \frac{y_f(p)}{f(p)} = \frac{k_2}{Tp+1}, \quad (17.9)$$

де  $y_x$  – вихідна величина, що зумовлена регулювальним впливом  $x$  за умови  $f = 0$ ;

$y_f$  – вихідна величина, зумовлена збурювальним впливом  $f$  за умови  $x = 0$ .

**Приклад 17.1.** Визначити передатну функцію  $W(p)$  елемента системи автоматичного керування за заданим рівнянням динаміки

$$\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} = k \cdot x_1(t).$$

*Розв'язання:* передатну функцію динамічної ланки (моделі елемента системи) визначають як відношення зображення за Лапласом вихідної величини до зображення за Лапласом вхідної величини ланки за нульових початкових умов  $W(p) = X_2(p) / X_1(p)$ . Для визначення передатної функції необхідно часові функції замінити їхніми зображеннями за Лапласом

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow X_1(p); & x_2(t) &\rightarrow X_2(p); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &\rightarrow pX_2(p); & \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} &\rightarrow p^2X_2(p). \end{aligned}$$

Запишемо рівняння динаміки у формі зображень за Лапласом

$$p^2X_2(p) + pX_2(p) = k \cdot X_1(p),$$

звідки отримаємо вираз для передатної функції

$$W(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{k}{p(p+1)}.$$

**Приклад 17.2.** Визначити передатну функцію  $W(p)$  елемента системи автоматичного керування за заданим рівнянням динаміки

$$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = k \cdot \int x_1(t) dt.$$

*Розв'язання:* передатну функцію динамічної ланки (моделі елемента системи) визначають як відношення зо-



ображення за Лапласом вихідної величини до зображення за Лапласом вхідної величини ланки за нульових початкових умов  $W(p) = X_2(p) / X_1(p)$ . Для визначення передатної функції необхідно часові функції замінити їхніми зображеннями за Лапласом

$$\int x_1(t) dt \rightarrow \frac{X_1(p)}{p}; \quad x_2(t) \rightarrow X_2(p); \quad \frac{dx_2(t)}{dt} \rightarrow pX_2(p).$$

Запишемо рівняння динаміки у формі зображень за Лапласом

$$TpX_2(p) + X_2(p) = \frac{k \cdot X_1(p)}{p},$$

звідки отримаємо вираз для передатної функції

$$W(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{k}{p(Tp+1)}.$$

**Приклад 17.3.** Визначити передатну функцію  $W(p)$  елемента системи автоматичного керування за заданим рівнянням динаміки

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + \int x_1(t) dt.$$

*Розв'язання:* передатну функцію динамічної ланки (моделі елемента системи) визначають як відношення зображення за Лапласом вихідної величини до зображення за Лапласом вхідної величини ланки за нульових початкових умов  $W(p) = X_2(p) / X_1(p)$ . Для визначення передатної функції необхідно часові функції замінити їхніми зображеннями за Лапласом

$$\int x_1(t)dt \rightarrow \frac{X_1(p)}{p}; x_1(t) \rightarrow X_1(p); \frac{dx_2(t)}{dt} \rightarrow pX_2(p).$$

Запишемо рівняння динаміки у формі зображень за Лапласом

$$pX_2(p) = X_1(p) + \frac{X_1(p)}{p},$$

звідки отримаємо вираз для передатної функції

$$W(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{p+1}{p^2}.$$

**Тема 18**  
**ПРАКТИЧНА РОБОТА 2.**  
**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ**  
**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Деякі теоретичні відомості описано в пп. 5.2, 5.3.

**18.1. Теореми та властивості перетворення Лапласа**

Основними теоремами і властивостями перетворення Лапласа є такі:

1) теорема лінійності

$$Laf(t) = aLf(t), a = \text{const}; \quad (18.1)$$

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = LF^{(n)}(p) = (-t)^n f(t)Lf_2(t); \quad (18.2)$$

2) теорема щодо кінцевого й початкового значення оригіналу

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p); \quad (18.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p); \quad (18.4)$$

3) теорема запізнення оригіналу. Якщо функцію  $f(t)$  змістити на величину  $\tau$  від початку координат (рис. 18.1), то таку функцію називають функцією з аргументом, що запізнюється, й записують як  $f(t - \tau)$ .

Зображення функції з аргументом, що запізнюється, має такий вигляд:

$$Lf(t - \tau) = e^{-\tau p} F(p); \quad (18.5)$$

4) теорема зміщення

$$Le^{\pm \alpha} f(t) = F(p \mp \alpha), \quad (18.6)$$

де  $\alpha$  – величина зміщення в комплексній площині;

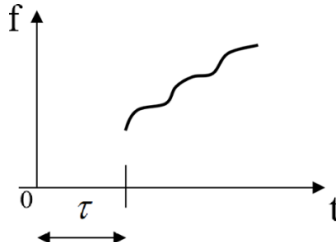


Рисунок 18.1 – Графік функції з аргументом, що запізнюється

5) теорема подібності

$$Lf(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), a = \text{const}; \quad (18.7)$$

$$Lf\left(\frac{t}{a}\right) = aF(ap), a = \text{const}; \quad (18.8)$$

6) диференціювання оригіналу за нульових початкових умов

$$L \frac{d^n f(t)}{dt^n} = Lf^{(n)}(t) = p^n F(p), \quad (18.9)$$

де  $n$  – порядок похідної;

7) інтегрування оригіналу за нульових початкових умов

$$L \int_0^t f^{(-n)}(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p}; \quad (18.10)$$

8) диференціювання зображення зводиться до множення оригіналу на  $(-t)^n$

$$F^{(n)}(p) = (-t)^n f(t); \quad (18.11)$$

9) інтегрування зображення

$$L \frac{f(t)}{t} = \int_p^\infty F(p) dp; \quad (18.12)$$

10) теорема згортки оригіналів. Якщо

$$f_1(t) = F_1(p) \text{ і } f_2(t) = F_2(p), \quad (18.13)$$

то

$$F_1(p)F_2(p) = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau) d\tau, \quad (18.14)$$

де  $\tau$  – змінна інтегрування.

У таблиці 6.1 наведено перетворення Лапласа для основних функцій, що найбільш часто трапляються під час аналізу систем автоматичного керування.

## **18.2. Операційний метод розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами**

Розглянемо ЛНДР II порядку.

$$a_2x'' + a_1x' + a_0x = f(t), \quad (18.15)$$

де  $a_i$  – сталі коефіцієнти;  $x = x(t)$  – невідома функція;  $x(t)$  і  $f(t)$  є оригіналами.

На підставі перетворень Лапласа та теореми про диференціювання оригіналу (18.9) одержимо

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(p); \\ x'(t) &\rightarrow pX(p) - x(0); \\ x''(t) &\rightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0). \end{aligned} \quad (18.16)$$

Початковими умовами є такі:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1; \quad (18.17)$$

$$f(t) \rightarrow F(p). \quad (18.18)$$

Якщо підставити (18.16) і (18.18) у (18.15) і замінити початкові умови на значення з (18.16), то одержимо таке операторне рівняння:

$$a_2(p^2X(p) - px_0 - x_1) + a_1(pX(p) - x_0) + a_0(X(p)) = F(p). \quad (18.19)$$

Знайдемо розв'язок операторного рівняння (18.19)

$$X(p) = \frac{F(p) + a_2(px_0 + x_1) + a_1x_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0}. \quad (18.20)$$

За формулами і правилами операційного числення від зображення  $X(p)$  переходимо до оригіналу  $x(t)$ , який є розв'язком рівняння (18.15) з початковими умовами (18.17), тобто розв'язком задачі Коші.

### **18.3. Приклад розв'язання диференціального рівняння**

Нехай об'єкт керування описано диференціальним рівнянням і має такі граничні умови:

$$0,1y'' + 0,2y' + 0,5y = 0,8x, y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad (18.21)$$

Розв'язати диференціальне рівняння аналітичним методом і за допомогою операційного числення.

### 18.3.1. Розв'язання аналітичним методом

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку (18.21). Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння

$$0,1y'' + 0,2y' + 0,5y = 0. \quad (18.22)$$

Цьому рівнянню відповідає таке характеристичне рівняння:

$$0,1\lambda^2 + 0,2\lambda + 0,5 = 0. \quad (18.23)$$

Знайдемо корені рівняння (18.23)

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-0,2 \pm \sqrt{0,04 - 4 \cdot 0,1 \cdot 0,5}}{2 \cdot 0,1} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{0,16}}{0,2} = \\ &= \frac{-0,2 \pm 0,4i}{0,2} = -1 \pm 2i; \\ \lambda_1 &= -1 - 2i; \\ \lambda_2 &= -1 + 2i. \end{aligned}$$

Отже, рівняння (18.23) має два комплексних корені. Тоді розв'язок рівняння (18.22) можна записати в такому вигляді:

$$y_0(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t), \quad (18.24)$$

де  $y_0(t)$  – розв'язок відповідного рівнянню (18.21) однорідного рівняння.

Частинний розв'язок рівняння (18.21) має такий вигляд:

$$y_{\text{ч}}(t) = A. \quad (18.25)$$

Тоді  $y'_{\text{ч}}(t) = y''_{\text{ч}}(t) = 0$ . Підставляємо значення  $y_{\text{ч}}(t)$ ,  $y'_{\text{ч}}(t)$  та  $y''_{\text{ч}}(t)$  до (18.21) й одержуємо

$$\begin{aligned} 0,1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot A &= 0,8; \\ A &= \frac{0,8}{0,5} = 1,6. \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (18.21) має такий вигляд:

$$y_3(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 1,6. \quad (18.26)$$

Визначимо  $C_1$  та  $C_2$  із початкових умов

$$\begin{aligned} y'_3(t) &= C_1(-e^{-t} \cos 2t - 2e^{-t} \sin 2t) + \\ &+ C_2(-e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t), \end{aligned} \quad (18.27)$$

$$\begin{cases} y_3(0) = C_1 + 1,6 = 0; \\ y'_3(0) = -C_1 + 2C_2 = 0. \end{cases}$$

$$C_1 = -1,6; C_2 = -0,8.$$

У підсумку загальний розв'язок рівняння (18.21) має такий вигляд:

$$y_3(t) = e^{-t}(-1,6 \cos 2t - 0,8 \sin 2t) + 1,6. \quad (18.28)$$

*18.3.2. Розв'язання за допомогою операційного числення*

Нехай  $y(t) \doteq Y(p)$ , тоді

$$\begin{aligned} y'(t) &\doteq p \cdot Y(p) - y(0); \\ y''(t) &\doteq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0); \end{aligned} \quad (18.29)$$



$$0,8 \doteq \frac{0,8}{p}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння (18.21), одержимо таке рівняння:

$$0,1 \cdot p^2 \cdot Y(p) + 0,2 \cdot p \cdot Y(p) + 0,5 \cdot Y(p) = \frac{0,8}{p}, \quad (18.30)$$

звідки маємо такий вираз:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{0,8}{(0,1p^2+0,2p+0,5)p} = \frac{Ap+B}{0,1p^2+0,2p+0,5} + \frac{C}{p} = \\ &= \frac{Ap^2+Bp+0,1Cp^2+0,2Cp+0,5C}{(0,1p^2+0,2p+0,5)p}. \end{aligned} \quad (18.31)$$

За методом невизначених коефіцієнтів складемо систему рівнянь і розв'яжемо її

$$\begin{cases} A + 0,1C = 0; \\ B + 0,2C = 0; \\ 0,5C = 0,8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -0,16; \\ B = -0,32; \\ C = 1,6. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-0,16p-0,32}{0,1p^2+0,2p+0,5} + \frac{1,6}{p} = \frac{-0,16(p+2)}{0,1(p^2+2p+5)} + \frac{1,6}{p} = \\ &= -1,6 \left( \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{1}{(p+1)^2+2^2} \right) + \frac{1,6}{p}. \end{aligned} \quad (18.32)$$

Отже,  $y(t)$  набуде такого вигляду:

$$y(t) = -1,6 \left( e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \right) + 1,6; \quad (18.33)$$

або

$$y(t) = e^{-t} (-1,6 \cos 2t - 0,8 \sin 2t) + 1,6. \quad (18.34)$$

**Тема 19**  
**ПРАКТИЧНА РОБОТА 3.**  
**ЧАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛАНОК (СИСТЕМ)**  
**АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

**19.1. Перехідна функція ланки (системи)  $h(t)$**

Перехідною функцією ланки (системи)  $h(t)$  називають реакцію ланки (системи) на одиничний ступінчастий вплив (рис. 19.1 а), тобто це перехідний процес на виході  $x_{вих}(t)$  за одиничного стрибка на вході  $x_{вх}(t)$  за нульових початкових умов.

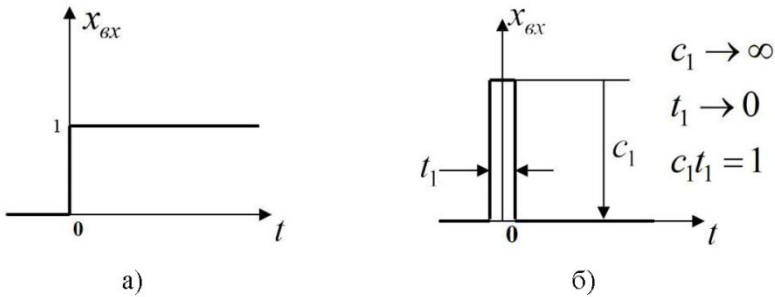


Рисунок 19.1 – Графічне зображення  
 одиничного ступінчастого впливу (а)  
 та одиничного миттєвого імпульсу (б)

Вхідний одиничний ступінчастий вплив  $x_1(t) = 1 [t]$  описують функцією Хевісайда  $\sigma(t)$

$$1[t] = \sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Перехідну функцію  $h(t)$  можна визначити розв'язанням диференціального рівняння ланки (системи) звичайним або операційним методами. Для визначення  $h(t)$

операційним методом у рівняння (17.3) підставимо зображення одиничної ступінчастої функції  $X_{\text{вх}}(t) = L\{1(t)\} = \frac{1}{p}$  та знайдемо зображення перехідної функції

$$H(p) = X(p) = \frac{W(p)}{p}. \quad (19.1)$$

Отже, зображення перехідної функції ланки (системи) дорівнює передатній функції, поділеній на комплексну змінну перетворення Лапласа  $p$ . Перехідну функцію  $h(t)$  визначають як обернене перетворення Лапласа (тобто оригінал) від зображення  $H(p)$

$$h(t) = L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\frac{W(p)}{p}. \quad (19.2)$$

Для розглянутого прикладу ланки з передатною функцією (17.4) перехідну функцію визначаємо з такого виразу:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{p(Tp+1)}\right\}. \quad (19.3)$$

Методи визначення оригіналу функції за відомим її зображенням наведено в п. 19.3.

## **19.2. Імпульсна перехідна (вагова) функція ланки (системи) $w(t)$**

Ваговою функцією  $w(t)$  називають реакцію ланки (системи) на одиничний миттєвий імпульс  $\delta(t)$  на вході ланки (системи), тобто на миттєвий імпульс нескінченно великої амплітуди й одиничної площі, який називають дельта-функцією або функцією Дірака.

Оскільки одиничний імпульс  $\delta(t)$  може бути одержаний диференціюванням одиничного стрибка  $\delta(t) = d 1 [t] / dt$  або в операційній формі  $\delta(t) = p \cdot L \{1 [t]\} = p / p = 1$ , то зображення вагової функції ланки (системи) дорівнює відповідній передатній функції

$$L\{w(t)\} = W(p) \cdot \delta(p) = W(p). \quad (19.4)$$

Отже, для одержання вагової функції  $w(t)$  потрібно знайти оригінал (обернене перетворення Лапласа), що відповідає передатній функції

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}, \quad (19.5)$$

де  $L^{-1}\{W(p)\}$  – знак оберненого перетворення Лапласа.

Для ланки з передатною функцією (17.4) вираз для визначення вагової функції (19.5) запишемо в такому вигляді:

$$w(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{T_{p+1}}\right\}. \quad (19.6)$$

### **19.3. Визначення оригіналу функції за її зображенням (обернене перетворення Лапласа)**

Розглянемо деякі способи оберненого перетворення Лапласа, які дають можливість під час практичного застосування нескладно визначати оригінал функції за її зображенням, тобто такі, що є простими інженерними методами визначення перехідної  $h(t)$  та вагової  $w(t)$  функцій ланки (системи) за відомою передатною функцією  $W(p)$ .

Найпростіше оригінал функції можна визначити за таблицею перетворень Лапласа, якщо зображення є табличним. У таблиці 5.1 наведено оригінали та зображення Ла-

пласа для деяких простих функцій, що здебільшого трапляються в задачах ТАК.

Якщо зображення за Лапласом є дробово-раціональною функцією  $p$ , то таку функцію можна розкласти на елементарні дроби й, скориставшись теоремою про додавання, обмежитись оберненим перетворенням Лапласа елементарних зображень, наведених у таблиці 5.1.

#### *Використання теореми про розкладання*

Початкове зображення може бути подано в такому вигляді:

$$y(p) = \frac{B(p)}{D(p)},$$

де  $B(p)$  – поліном чисельника;

$D(p)$  – поліном знаменника (характеристичний поліном).

Якщо рівняння  $D(p) = 0$  не має нульових коренів, а корені є дійсними й некротними, то оригінал функції визначають за такою формулою:

$$y(p) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (19.7)$$

де  $p_i$  – корені характеристичного рівняння  $D(p_i) = 0$ ;

$$B(p_i) = B(p) \Big|_{p=p_i}; \quad D'(p_i) = \frac{dD(p)}{dp} \Big|_{p=p_i}.$$

Для знаходження оригіналу з виразу (19.7) необхідно виконати такі дії:

- знайти корені  $p_1, p_2, \dots, p_n$  знаменника ( $D(p_i) = 0$ );
- знайти похідну  $D'(p_i)$ ;

- підставити послідовно корені  $p_1, p_2, \dots, p_n$  в  $D'(p_i)$  і  $B(p_i)$  та знайти значення дробів  $B(p_i) / D'(p_i)$ ;
- скласти суму (19.7).

*Знаходження оригіналу за наявності комплексних коренів*

Якщо серед коренів рівняння  $D(p_i) = 0$  є комплексні спряжені корені  $p_k = \alpha + j\beta$  та  $p_{k+1} = \alpha - j\beta$ , то підставляємо їхні значення у  $D'(p_i)$  і  $B(p_i)$  та для кожної пари комплексно спряжених коренів знаходимо відношення

$$\frac{B(p_k)}{D'(p_k)} = \frac{a+jb}{c+jd} = r + jq;$$

$$\frac{B(p_{k+1})}{D'(p_{k+1})} = \frac{a-jb}{c-jd} = r - jq.$$

Запишемо комплексні числа в показниковій (векторній) формі

$$\frac{B(p_k)}{D'(p_k)} = Ae^{j\varphi}$$

та

$$\frac{B(p_{k+1})}{D'(p_{k+1})} = Ae^{-j\varphi},$$

де  $A = \sqrt{r^2 + q^2}$ ;  $\varphi = \text{arctg } q/r$ , тоді серед доданків у сумі (19.7) будуть міститися доданки такого вигляду:

$$Ae^{j\varphi} e^{(\alpha+j\beta)t} + Ae^{-j\varphi} e^{(\alpha-j\beta)t}.$$

Скориставшись тотожністю Ейлера  $e^{jz} = \cos(z) + j \sin(z)$ , одержимо такі вирази:

$$e^{j(\beta t + \varphi)} = \cos(\beta t + \varphi) + j \sin(\beta t + \varphi);$$

$$e^{-j(\beta t + \varphi)} = \cos(\beta t + \varphi) - j \sin(\beta t + \varphi).$$

Отже, після математичних перетворень одержимо такий вираз:

$$\begin{aligned} & Ae^{j\varphi} e^{\alpha t + j\beta t} + Ae^{-j\varphi} e^{\alpha t - j\beta t} = \\ & = Ae^{\alpha t} [e^{j(\beta t + \varphi)} + e^{-j(\beta t + \varphi)}] = 2Ae^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi). \end{aligned}$$

Якщо характеристичний поліном  $D(p)$  має  $n$  дійсних коренів і  $s$  пар комплексно-спряжених коренів, то вираз для оригіналу функції (19.7) набуде такого вигляду:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^s 2C_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \varphi_k), \quad (19.8)$$

де  $n$  – кількість дійсних коренів;

$p_i$  – дійсні корені;

$s$  – кількість пар комплексно спряжених коренів;

$\alpha_k$  і  $\beta_k$  – відповідно дійсна та уявна частини пари комплексно спряжених коренів  $p_k$ ;

$$C_i = \frac{B(p_i)}{D'(p_i)}; \quad C_k = \frac{1}{\sqrt{r_k^2 + q_k^2}}; \quad \varphi_k = \arctg q_k / r_k;$$

$r_k$  і  $q_k$  – відповідно дійсна та уявна частини виразу  $B(p_k) / D'(p_k)$  за комплексно-спряжених коренів.

Якщо, крім розглянутих вище, *характеристичний поліном має нульовий корінь*, тобто  $D(p) = p \cdot D_1(p)$ , то вираз (19.7) набуває такого вигляду:

$$y(t) = \frac{B(0)}{D_1(0)} + \sum_i \frac{B(p_i)}{p_i D_1'(p_i)} e^{p_i t},$$

де  $p_i$  – корені рівняння  $D_1(p) = 0$ ;

$B(0) = B(p)$  за умови  $p = 0$ ;

$D_1(0) = D_1(p)$  за умови  $p = 0$ .



**Приклад 19.1.** Визначити вагову функцію  $w(t)$  ланки із такою передатною функцією:

$$W(p) = \frac{1}{p(p+a)}. \quad (19.9)$$

*Розв'язання:* вагову функцію відповідно до (19.5) визначають з такого виразу:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+a)}\right\}. \quad (19.10)$$

У цьому прикладі для наочності використаємо зображення табличної функції. Початкове зображення подаємо у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{1}{p(p+a)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+a} = \frac{p(A+B)+aA}{p(p+a)},$$

де коефіцієнти  $A$  і  $B$  підлягають визначенню.

Для виконання останньої рівності потрібно прирівняти чисельники початкового та результуючого дробів:

$$p(A+B) + aA = 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти за однакових ступенях комплексної змінної  $p$  правої та лівої частин одержаної рівності

$$\begin{aligned} p^1 : A + B &= 0; \\ p^0 : aA &= 1 \end{aligned}$$

та отримаємо систему алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів  $A$  і  $B$

$$A = 1 / a;$$

$$B = -A = -1 / a.$$

Початкове зображення запишемо в такому вигляді:

$$\frac{1}{p(p+a)} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} \right).$$

Оригінали елементарних зображень у правій частині рівності знаходимо за таблицею 5.1 і, використовуючи теорему про додавання, запишемо шуканий вираз для вагової функції

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p+a)} \right\} = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}).$$

**Приклад 19.2.** Визначити вагову функцію  $w(t)$  ланки з такою передатною функцією:

$$W(p) = \frac{p^2 - p + 3}{(p+1)(p^2+1)}.$$

*Розв'язання:* запишемо вираз для знаходження вагової характеристики

$$w(t) = L^{-1} \{W(p)\} = L^{-1} \left\{ \frac{p^2 - p + 3}{(p+1)(p^2+1)} \right\}.$$

Початкове зображення подамо у вигляді суми елементарних зображень, оригінали яких є в таблиці 5.1.

$$\begin{aligned} \frac{p^2 - p + 3}{(p+1)(p^2+1)} &= \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} = \\ &= \frac{p^2(A+B) + p(B+C) + A+C}{(p+1)(p^2+1)}. \end{aligned}$$

Привівнявши чисельники початкового й результуючого дробів, одержимо систему алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів  $A$ ,  $B$  і  $C$

$$\begin{aligned} p^2 - p + 3 &= p^2(A + B) + p(B + C) + A + C; \\ p^2 : A + B &= 1; \\ p^1 : B + C &= -1; \\ p^0 : A + C &= 3, \end{aligned}$$

звідки  $A = 2,5$ ;  $B = -1,5$ ;  $C = 0,5$ .

Отже, розкладання  $W(p)$  на суму елементарних дробів має такий вигляд:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{p^2 - p + 3}{(p+1)(p^2+1)} = \\ &= 2,5 \frac{1}{p+1} - 1,5 \frac{p}{p^2+1} + 0,5 \frac{1}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Знаходимо з таблиці 5.1 оригінали зображень елементарних функцій і записуємо вираз для вагової функції

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = 2,5e^{-t} - 1,5 \cos t + 0,5 \sin t.$$

**Приклад 19.3.** Визначити оригінал функції за таким зображенням:

$$y(p) = \frac{p+3}{p^2+6p+5},$$

де  $B(p) = p + 3$ ,  $D(p) = p^2 + 6p + 5$ .

*Розв'язання:* оригінал функції за заданим зображенням знаходимо відповідно до вищевикладеної методики:

– знаходимо корені знаменника  $D(p) = 0$

$$p_1 = -1; p_2 = -5;$$

- знаходимо похідну:  $D'(p) = 2p + 6$ ;
- підставляємо  $p_1$  і  $p_2$  в  $D'(p)$  та  $B(p)$  і знаходимо значення дробів:

$$\frac{B(p_1)}{D'(p_1)} = \frac{(-1)+3}{2(-1)+6} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{B(p_2)}{D'(p_2)} = \frac{(-5)+3}{2(-5)+6} = -\frac{1}{2}.$$

- складаємо суму (19.7)

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-5t}.$$

**Тема 20**  
**ПРАКТИЧНА РОБОТА 4.**  
**ОДЕРЖАННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК**

**20.1. Перетворення Фур'є**

В основі перетворення Фур'є лежить надзвичайно проста ідея – майже будь-яку періодичну функцію можна подати сумою окремих гармонійних складових (синусоїд і косинусоїд із різними амплітудами  $A$ , періодами  $T_i$ , частотами  $\omega$ ). Приклад однієї з таких функцій  $S(t)$ , що складається з гармонік  $C_i(t)$ , наведено на рисунку 20.1.

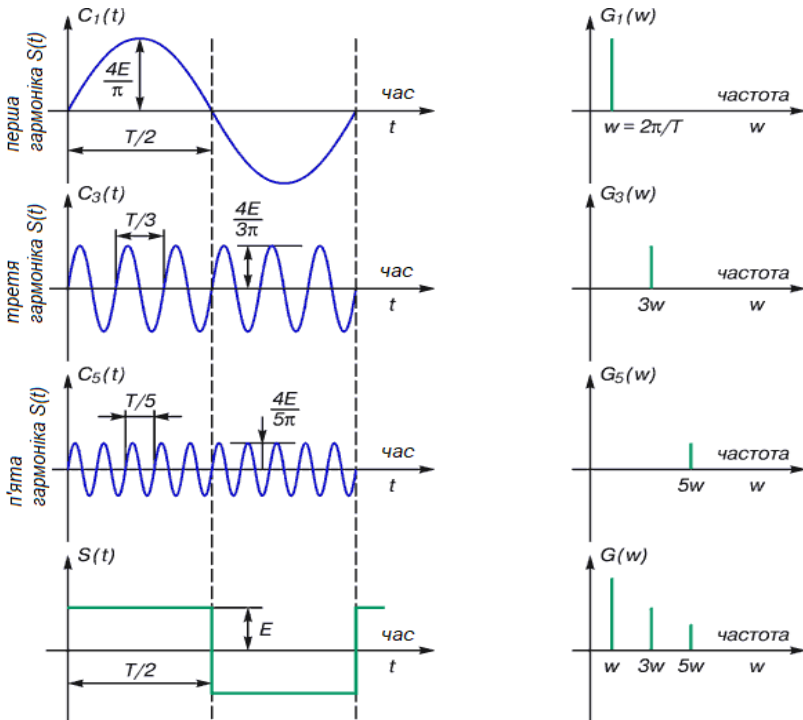


Рисунок 20.1 – Подання прямокутного імпульсу сумою гармонійних складових

Поняття «зобразити в частотній області деяку функцію від часу» і «намалювати спектр цієї функції» – рівнозначні. Якщо подивитися на рисунок 20.1 уздовж горизонталі зліва направо, то відбувається перехід від функції часу до її спектра завдяки перетворенню Фур'є. Нижня частина рисунка є ілюстрацією одного з основних принципів перетворення Фур'є: спектр сумарної функції часу дорівнює сумі спектрів її гармонійних складових.

Безперервне перетворення Фур'є (інтеграл Фур'є) має такий вигляд:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (20.1)$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (20.2)$$

де  $S(\omega)$  – спектр сигналу  $s(t)$ .

## 20.2. Частотні характеристики

Частотні характеристики описують усталені вимушені коливання на виході ланки, викликані гармонійним збуренням на вході. Розглянемо коливальний режим.

Нехай на вхід ланки подано таке гармонійне збурення:

$$x = x_{max} \cdot \sin(\omega t), \quad (20.3)$$

де  $x_{max}$ ,  $\omega$  – амплітуда та кутова частота цього збурення.

Після закінчення перехідного процесу на виході ланки будуть існувати гармонійні коливання з тією ж самою частотою, що й вхідні коливання, але відрізнятимуться загалом за амплітудою й фазою. Тобто в сталому режимі вихідна величина ланки має такий вигляд:

$$y = y_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (20.4)$$

де  $y_{max}$  – амплітуда вихідних сталих коливань.

У разі фіксованої амплітуди вхідних коливань амплітуда й фаза сталих коливань на виході ланки залежать від частоти коливань. Якщо поступово збільшувати від нуля частоту коливань і визначати значення, що встановилися для амплітуди та фази вихідних коливань для різних частот, можна одержати залежність від частоти відношення амплітуд  $A$  та зсуву фаз  $\varphi$  вихідних і вхідних сталих коливань. Такі залежності називають, відповідно,  $A(\omega)$  – амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) та  $\varphi(\omega)$  – фазочастотною характеристикою (ФЧХ).

Типовий вигляд АЧХ і ФЧХ для звичайних інерційних ланок подано на рисунку 20.2 а і б відповідно.

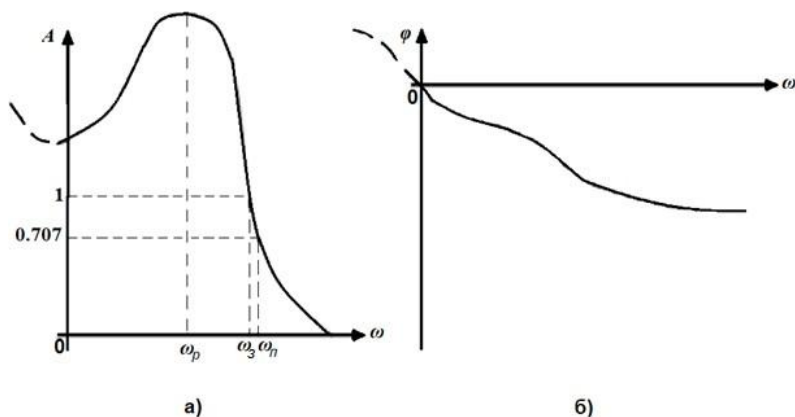


Рисунок 20.2 – Частотні характеристики: а) АЧХ; б) ФЧХ

У таких ланках через їхню інерційність АЧХ зі збільшенням частоти зрештою зменшується до нуля. За таких обставин чим менша інерційна ланка, тим довша її амплітудно-частотна характеристика, тобто тим більша смуга частот, що пропускає ланка, або, інакше кажучи, його *смуга пропускання*.

Спектр частотної характеристики можна розглядати в межах від 0 до  $\infty$ , але практично смугу пропускання об-

межують значенням частоти, за якої значення амплітуди становить  $A(\omega) = 0,707 A(0)$ . Вважають, що в діапазоні від  $-\omega_{\Pi}$  до  $+\omega_{\Pi}$  елемент системи керування пропускає гармонійний сигнал без помітного ослаблення. Отже, смуга пропускання  $-\Delta\omega_{\Pi} = 2\omega_{\Pi}$ . Наявність максимуму в АЧХ свідчить про резонансні властивості ланки. Частоту, що відповідає максимуму амплітудної характеристики, називають *резонансною* ( $\omega_p$ ). Частоту, на якій коефіцієнт підсилення вхідного сигналу дорівнює одиниці, називають *частотою зрізу*  $\omega_z$ .

Фазочастотна характеристика демонструє фазові зміщення, що вносить елемент системи керування на різних частотах. У звичайних інерційних ланках за додатних значень частоти  $\omega$  ФЧХ завжди є від'ємною ( $\varphi < 0$ ), тобто вихідні коливання відстають за фазою від вхідних, і це відставання збільшується зі збільшенням частоти.

Звичайні амплітудна й фазова частотні характеристики можуть бути об'єднані в одну характеристику – амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ), використовуючи  $A(\omega)$  і  $\varphi(\omega)$  як полярні координати (рис. 20.3). Будують її на комплексній площині. Кожна точка АФЧХ відповідає певному значенню частоти  $\omega$ . Сукупність усіх точок під час змінювання частоти від нуля до нескінченності є безперервною лінією (яку називають *годографом*), що відповідає частотній передавальній функції  $W(j\omega)$ . Значення  $\omega$  для кінцевої кількості точок характеристики наносять уздовж характеристики, як подано на рисунку 20.2. Маючи АФЧХ, можна по цих точках побудувати характеристики  $A(\omega)$  і  $\varphi(\omega)$ .

АФЧХ будують як для додатних, так і для від'ємних частот. Якщо в передатній функції  $W(j\omega)$  замінити « $j\omega$ » на « $\omega$ », то одержимо спряжену комплексну величину. Тому АФЧХ для від'ємних частот є дзеркальним відображенням АФЧХ для додатних частот щодо дійсної осі. На рисунку



ку 20.3 АФЧХ для від'ємних частот подано пунктирною лінією.

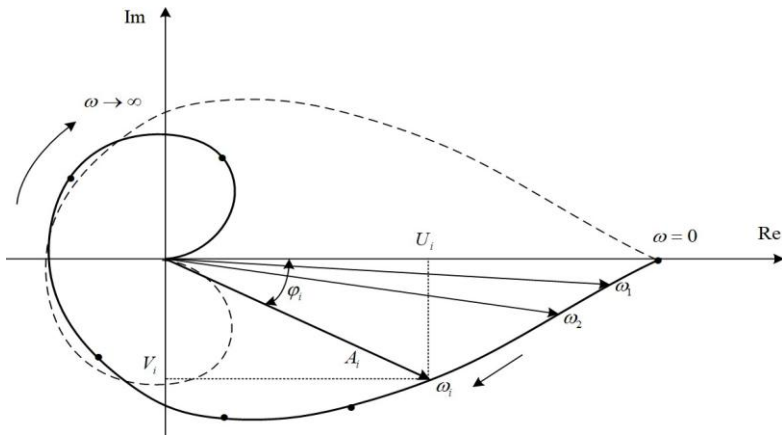


Рисунок 20.3 – Годограф амплітудно-фазової частотної характеристики (АФЧХ)

АФЧХ можна будувати і в прямокутній системі координат, тобто в комплексній площині. За таких умов координатами будуть подані на рисунку 20.3 проєкції  $U$  і  $V$  вектора  $A$  на відповідні осі. Залежності  $U(\omega)$  і  $V(\omega)$  називають відповідно дійсною й уявною частотними характеристиками.

Аналітичні вирази для розглянутих вище частотних характеристик можна нескладно одержати з передавальної функції. Якщо у вираз функції передавальної ланки  $W(s)$  підставити  $s = j\omega$ , то одержимо комплексну величину  $W(j\omega)$ , яка є функцією від частоти  $\omega$  та є амплітудно-фазовою частотною (або просто частотною) характеристикою ланки. Її модуль є амплітудно-частотною характеристикою  $A(\omega)$ , а аргумент – фазочастотною характеристикою  $\varphi(\omega)$ .

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (20.5)$$

Вираз (20.5) визначає шуканий зв'язок передавальної функції з частотними характеристиками ланки, зазначеними вище: модулем частотної функції  $W(j\omega) \in A(\omega)$ , а аргументом –  $\varphi(\omega)$ .

Якщо подати  $W(j\omega)$  не в показниковій, а в алгебраїчній формі, то можна записати таке:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (20.6)$$

де  $U(\omega)$  і  $V(\omega)$  – дійсна й уявна частотні характеристики, які є координатами амплітудно-фазової характеристики в комплексній площині.

Відповідно до (20.5) і (20.6) зв'язок між наведеними вище частотними характеристиками має такий вигляд:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad (20.7)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \quad (20.8)$$

$$U(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega); \quad (20.9)$$

$$V(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega). \quad (20.10)$$

Порядок одержування виразу для перерахованих вище частотних характеристик за передатною функцією ланки нескладний. Після підстановки до виразу для передавальної функції  $s = j\omega$  одержуємо

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)}, \quad (20.11)$$

де індексами  $R$  і  $Q$  позначено частини відповідних комплексних величин у чисельнику та знаменнику.

Позбувшись комплексності у знаменнику, остаточно маємо

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{[U_R(\omega) + jV_R(\omega)][U_Q(\omega) - jV_Q(\omega)]}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)} = \\ &= U(\omega) + jV(\omega), \end{aligned} \quad (20.12)$$

де

$$U(\omega) = \frac{U_R(\omega)U_Q(\omega) + V_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)}; \quad (20.13)$$

$$V(\omega) = \frac{V_R(\omega)U_Q(\omega) - U_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)}. \quad (20.14)$$

### 20.3. Приклади побудови амплітудно-частотної характеристики

**Приклад 20.1.** Нехай диференціальне рівняння і граничні умови, що описують об'єкт, мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} 0,1y'' + 0,2y' + 0,5y &= 0,8x; \\ y(0) = 0; y'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (20.15)$$

Визначити амплітудно-фазові характеристики об'єкта. Побудувати амплітудно-фазову, амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики.

*Розв'язання:* можна перейти до функції передання, оскільки є заданими нульові початкові умови

$$y'(t) \doteq p \cdot Y(p); \quad (20.16)$$

$$y''(t) \doteq p^2 \cdot Y(p); \quad (20.17)$$

$$x \doteq X(p). \quad (20.18)$$

Підставивши ці вирази у (20.15), одержимо таке рівняння:

$$0,1 \cdot p^2 \cdot Y(p) + 0,2 \cdot p \cdot Y(p) + 0,5 \cdot Y(p) = 0,8X(p); \quad (20.19)$$

$$Y(p) = \frac{0,8X(p)}{0,1p^2 + 0,2p + 0,5}; \quad (20.20)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{0,8}{0,1p^2 + 0,2p + 0,5}; \quad (20.21)$$

$$p \doteq j\omega, \quad (20.22)$$

де  $j$  – уявна одиниця.

Передатну функцію  $W(j\omega)$  подаємо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{0,8}{0,1(i\omega)^2 + 0,2j\omega + 0,5} = \frac{0,8}{-0,1\omega^2 + 0,2j\omega + 0,5} = \\ &= \frac{0,8((0,5 - 0,1\omega^2) - 0,2j\omega)}{0,8((0,5 - 0,1\omega^2) + 0,2j\omega)((0,5 - 0,1\omega^2) - 0,2j\omega)} = \\ &= \frac{0,4 - 0,08\omega^2}{(0,5 - 0,01\omega^2)^2 + 0,04\omega^2} - j \frac{0,16\omega}{(0,5 - 0,01\omega^2)^2 + 0,04\omega^2}. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Визначимо дійсну  $Re(\omega)$  та уявну  $Im(\omega)$  частини

$$Re(\omega) = \frac{0,4 - 0,08\omega^2}{(0,5 - 0,01\omega^2)^2 + 0,04\omega^2}; \quad (20.24)$$

$$Im(\omega) = \frac{-0,16\omega}{(0,5 - 0,01\omega^2)^2 + 0,04\omega^2}. \quad (20.25)$$

Звідси АЧХ ( $A(\omega)$ ) і ФЧХ ( $\varphi(\omega)$ ) набудуть такого вигляду:

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{((0,5 - 0,01\omega^2)^2 + 0,04\omega^2)}}{(0,5 - 0,01\omega^2)^2 + 0,04\omega^2}; \quad (20.26)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}\right) = \arctg\left(\frac{-0,16\omega}{0,4 - 0,08\omega^2}\right), \quad (20.27)$$

де  $\varphi$  – кут повороту.

За одержаними виразами побудуємо АФЧХ (рис. 20.4), АЧХ (рис. 20.5) і ФЧХ (рис. 20.6).

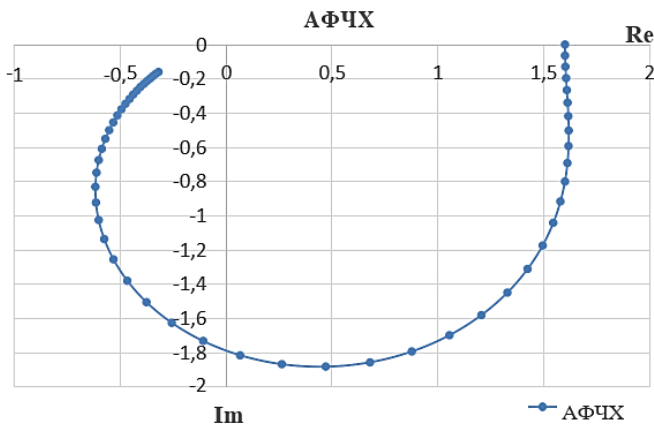


Рисунок 20.4 – Годограф амплітудно-фазової частотної характеристики

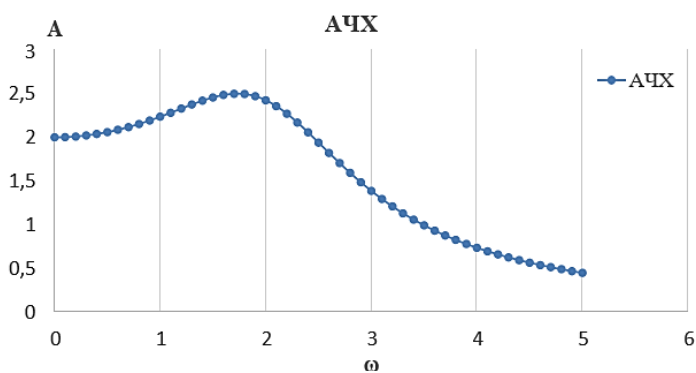


Рисунок 20.5 – Амплітудно-частотна характеристика

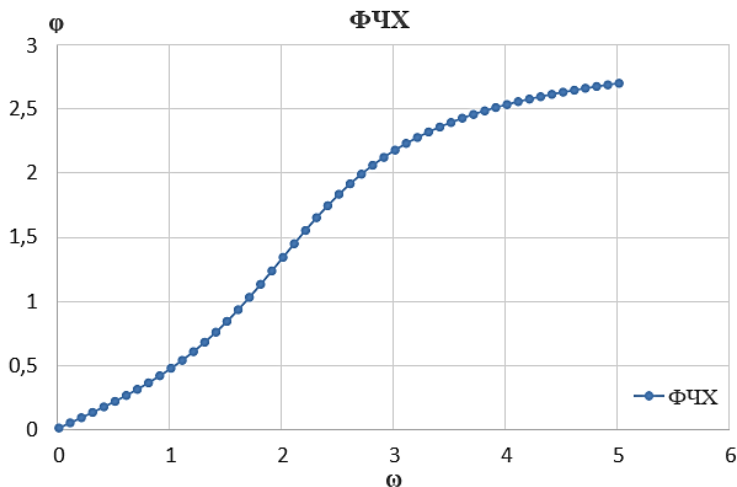


Рисунок 20.6 – Фазочастотна характеристика

**Приклад 20.2.** Нехай диференціальне рівняння і граничні умови, що описують об'єкт, мають такий вигляд:

$$0,1y'' + 0,2y' = 0,8x; \quad (20.28)$$

$$y'(0) = 0.$$

Визначити амплітудно-фазові характеристики об'єкта. Побудувати амплітудно-фазову, амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики.

*Розв'язання:* можна перейти до функції передання за формулою (20.16), оскільки є заданими нульові початкові умови.

Підставивши ці вирази в (20.28), одержимо таке рівняння:

$$0,1 \cdot p^2 \cdot Y(p) + 0,2 \cdot p \cdot Y(p) = 0,8X(p); \quad (20.29)$$

$$Y(p) = \frac{0,8X(p)}{0,1p^2 + 0,2p}; \quad (20.30)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{0,8}{0,1p^2 + 0,2p}; \quad (20.31)$$

$$p \doteq j\omega, \quad (20.32)$$

де  $j$  – уявна одиниця.

Передатну функцію  $W(j\omega)$  подаємо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} W(i\omega) &= \frac{0,8}{0,1(i\omega)^2 + 0,2j\omega} = \frac{0,8}{-0,1\omega^2 + 0,2j\omega} = \\ &= \frac{0,8(-0,1\omega^2 - 0,2j\omega)}{(-0,1\omega^2 + 0,2j\omega)(-0,1\omega^2 - 0,2j\omega)} = \\ &= \frac{-0,08\omega^2}{0,01\omega^4 + 0,04\omega^2} - j \frac{0,16\omega}{0,01\omega^4 + 0,04\omega^2}. \end{aligned} \quad (20.33)$$

Визначимо дійсну  $Re(\omega)$  та уявну  $Im(\omega)$  частини

$$Re(\omega) = \frac{-0,08\omega^2}{0,01\omega^4 + 0,04\omega^2}; \quad (20.34)$$

$$Im(\omega) = \frac{-0,16\omega}{0,01\omega^4 + 0,04\omega^2}. \quad (20.35)$$

Звідси АЧХ ( $A(\omega)$ ) і ФЧХ ( $\varphi(\omega)$ ) набудуть такого вигляду:

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{0,01\omega^4 + 0,04\omega^2}}{0,01\omega^4 + 0,04\omega^2}; \quad (20.36)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{-0,16\omega}{-0,08\omega^2}\right) = \arctg\left(\frac{2}{\omega}\right). \quad (20.37)$$

За одержаними виразами побудуємо АФЧХ (рис. 20.7), АЧХ (рис. 20.8) та ФЧХ (рис. 20.9).

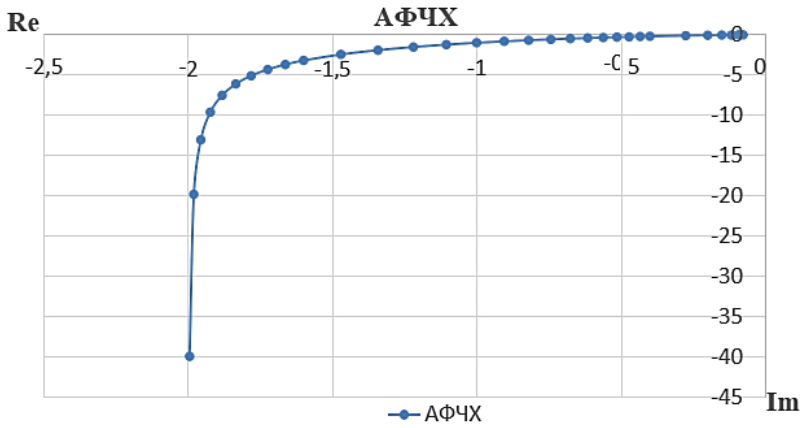


Рисунок 20.7 – Годограф АФЧХ для рівняння (20.28)

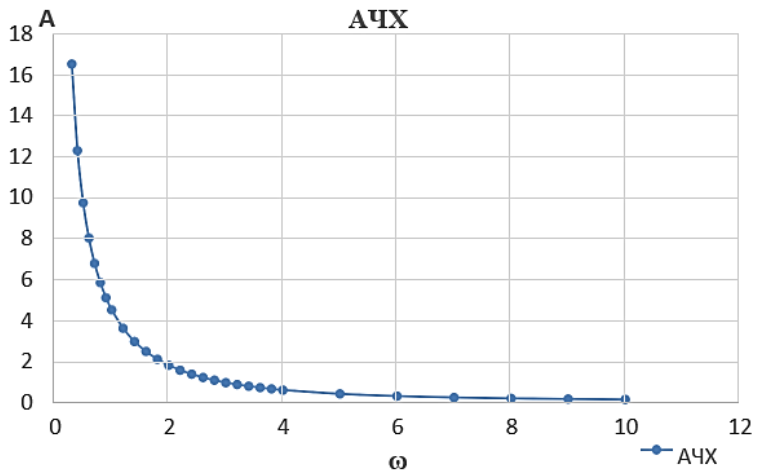


Рисунок 20.8 – Амплітудно-частотна характеристика для рівняння (20.28)



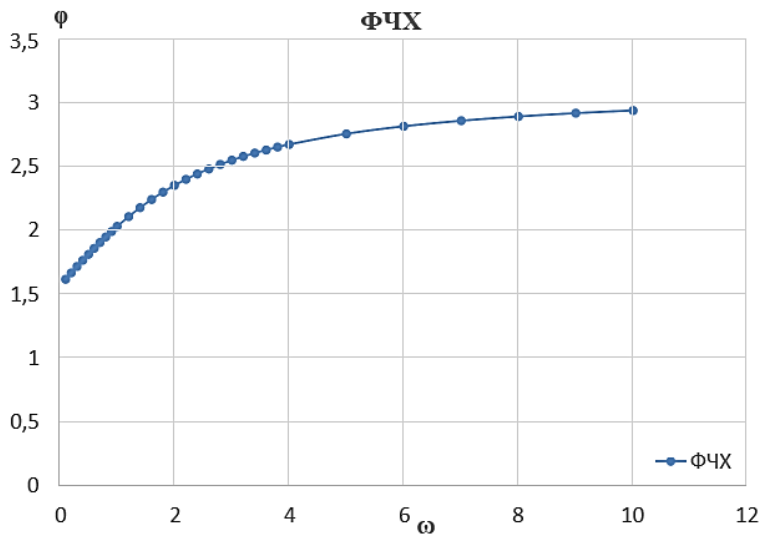


Рисунок 20.9 – Фазочастотна характеристика для рівняння (20.28)

Маючи графіки АЧХ і ФЧХ системи можна переходити до подальшого аналізу властивостей системи, наприклад, дослідженню її стійкості або оцінюванню непрямих показників якості.

**Тема 21**  
**ПРАКТИЧНА РОБОТА 5.**  
**ПЕРЕТВОРЕННЯ СТРУКТУРНИХ СХЕМ**  
**І ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ**  
**СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

*Структурною схемою* називають графічне зображення математичної моделі САК у вигляді сполучення ланок, яка демонструє, з яких динамічних ланок складається система і як вони пов'язані між собою. Структурна схема в найбільш наочній формі демонструє математичний бік перетворення змінних за часом сигналів окремими елементами та всією системою загалом. Структурну схему САК можна одержати з функціональної схеми, якщо відомі передатні функції та параметри всіх елементів системи.

Часто САК мають складну структуру і є багатоконтурними, що ускладнює операцію визначення передатних функцій системи, а отже, і аналіз її динаміки. Для зручності розрахунків характеристик автоматичних систем необхідно перетворити структурну схему системи до будь-якого бажаного вигляду, здебільшого – до одноконтурної схеми. Для цього використовують спеціальні правила перетворення структурних схем.

Наведемо найпростіші перетворення структурних схем, використовуючи правила визначення передатних функцій для таких типових сполучень ланок:

– послідовне сполучення

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p); \quad (21.1)$$

– паралельне сполучення

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p); \quad (21.2)$$

– ланка, що охоплена зворотним зв'язком

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_{33}(p)}, \quad (21.3)$$

де  $W_1(p)$  – передатна функція ланки, охопленої зворотним зв'язком;

$W_{33}(p)$  – передатна функція ланки в каналі зворотного зв'язку;

знак « $\pm$ » відповідає додатному зворотному зв'язку, знак « $+$ » – від'ємному.

*Передатна функція розімкненої системи  $W_{роз}(p)$  дорівнює добутку передатних функцій усіх ланок, що входять до замкнутого контуру*

$$W_{роз}(p) = W_{пр}(p) \cdot W_{33}(p), \quad (21.4)$$

а для системи з одиничним зворотним зв'язком ( $W_{роз}(p) = 1$ )

$$W_{роз}(p) = W_{пр}(p). \quad (21.5)$$

Після визначення передатної функції розімкненої системи знаходять такі *передатні функції замкнутої системи*:

– за вхідним впливом

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{пр}(p) \cdot W_{33}(p)} = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{роз}(p)} \quad (21.6)$$

або для ( $W_{33}(p) = 1$ )

$$\Phi(p) = \frac{W_{роз}(p)}{1 + W_{роз}(p)}; \quad (21.7)$$

– за помилкою системи

$$\Phi_{\delta}(p) = \frac{\delta(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + W_{\text{роз}}(p)}; \quad (21.8)$$

– за збуренням

$$\Phi_f(p) = \frac{Y(p)}{f(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W_{\text{роз}}(p)}. \quad (21.9)$$

Вирази (21.6)–(21.9) мають однакові знаменники, які визначають характеристичне рівняння  $D(p)$  замкненої системи. Якщо загалом передатну функцію розімкненої системи записати в такому вигляді:

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

то для одержання характеристичного рівняння потрібно до знаменника передатної функції розімкненої системи додати її чисельник

$$D(p) = R(p) + Q(p).$$

**Приклад 21.1.** Визначити передатну функцію ланцюга з послідовним з'єднанням ланок



якщо передатні функції кожної з ланок мають такий вигляд:

$$W_1(p) = k_1; W_2(p) = \frac{T_1 p + 1}{p}; W_3(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}.$$

*Розв'язання:* передатну функцію послідовного з'єднання ланок визначають добутком (21.1) передатних функцій ланок, які входять до послідовного з'єднання

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p).$$

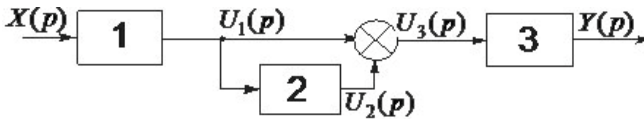
Підставимо вирази для  $W_i(p)$

$$W(p) = k_1 \cdot \frac{T_1 p + 1}{p} \cdot \frac{k_2}{T_2 p + 1} = \frac{k_1 \cdot k_2 (T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)}.$$

Позначимо  $k_1 = k_2 = k$ , тоді одержимо, що

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)}.$$

**Приклад 21.2.** Визначити передатну функцію ланцюга з послідовним і паралельним з'єднанням ланок,



якщо передатні функції кожної з ланок мають такий вигляд:

$$W_1(p) = k; W_2(p) = \frac{1}{p}; W_3(p) = \frac{1}{T p + 1}.$$

*Розв'язання:* спочатку визначимо передатну функцію паралельного з'єднання ланок за формулою (21.2)

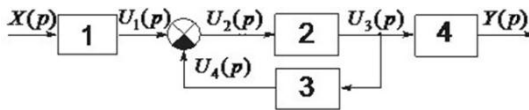
$$W_{\text{пар}}(p) = 1 + \frac{1}{p} = \frac{p + 1}{p}.$$

Зараз ланцюг є послідовним з'єднанням ланок із передатними функціями  $W_1(p)$ ,  $W_{нар}(p)$  та  $W_3(p)$ .

Відповідно до формули (21.1) запишемо остаточний вираз для передатної функції ланцюга

$$W(p) = k \cdot \frac{p+1}{p} \cdot \frac{1}{Tp+1} = \frac{k(p+1)}{p(Tp+1)}.$$

**Приклад 21.3.** Визначити передатну функцію ланцюга з послідовним з'єднанням ланок і з ланкою, що охоплена зворотним зв'язком,



якщо передатні функції кожної з ланок мають такий вигляд:

$$W_1(p) = k_1; W_2(p) = k_2; W_3(p) = \tau p; W_4(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}.$$

*Розв'язання:* спочатку визначимо передатну функцію ланки, що охоплена від'ємним зворотним зв'язком, за формулою (21.3)

$$W_{лзз}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)} = \frac{k_2}{1 + k_2 \tau p} = \frac{k_2}{T_3 p + 1},$$

де введено позначення  $T_3 = k_2 \cdot \tau$ .

Зараз ланцюг є послідовним з'єднанням ланок із передатними функціями  $W_1(p)$ ,  $W_{лзз}(p)$  і  $W_3(p)$ . Відповідно до формули (21.1) запишемо остаточний вираз для передатної функції ланцюга

$$W(p) = k_1 \cdot \frac{k_2}{T_3 p + 1} \cdot \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} = \frac{k_1 \cdot k_2 (T_1 p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Подібним до наведених прикладів перетворенням паралельних і місцевих зворотних зв'язків структурну схему САК перетворюють на одноконтурну (рис. 21.1), що дає змогу нескладно визначити передатні функції САК.

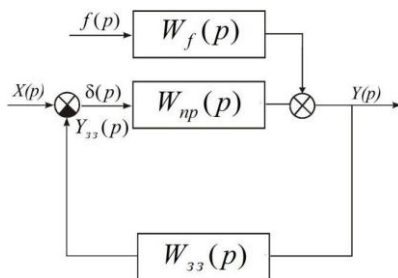


Рисунок 21.1 – Приклад одноконтурної структурної схеми САК

На рисунку 21.1 наведено такі позначення:

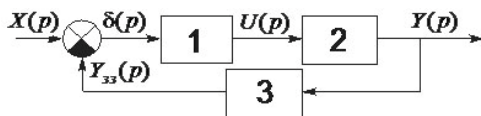
$W_{np}(p)$  – передатна функція ланок у прямому ланцюзі керування;

$W_{33}(p)$  – передатна функція ланок у зворотному зв'язку;

$W_f(p)$  – передатна функція в каналі збурення;

$\delta(p) = X(p) - Y_{33}(p)$  – зображення сигналу розбіжності (помилка системи).

**Приклад 21.4.** Визначити передатну функцію розімкненої системи  $W_{роз}(p)$ , передатну функцію замкненої системи за входнім впливом  $\Phi(p)$  і передатну функцію замкненої системи за помилкою  $\Phi_\delta(p)$ , якщо структурна схема САК має такий вигляд:



Передатні функції кожної з ланок мають такий вигляд:

$$W_1(p) = k_1; W_2(p) = \frac{T_1 p + 1}{p}; W_3(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}.$$

*Розв'язання:* структурна схема САК є одноконтурною, тому без попередніх перетворень визначимо передатну функцію розімкненої системи за формулою (21.4)

$$W_{\text{роз}}(p) = k_1 \cdot \frac{T_1 p + 1}{p} \cdot \frac{k_2}{T_2 p + 1} = \frac{k_1 \cdot k_2 (T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)} = \frac{k_{\text{роз}}(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)},$$

де  $k_{\text{роз}} = k_1 \cdot k_2$ .

Зворотний зв'язок САК не є одиничним, тому передатну функцію замкненої системи за вхідним впливом визначимо за формулою (21.6)

$$\Phi(p) = \frac{W_{\text{пр}}(p)}{1 + W_{\text{роз}}(p)} = \frac{\frac{k_1 \cdot (T_1 p + 1)}{p}}{1 + \frac{k_{\text{роз}} \cdot (T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)}} = \frac{k_1 \cdot (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_2 p + 1) + k_{\text{роз}} \cdot (T_1 p + 1)}.$$

Передатну функцію замкненої системи за похибкою визначимо за формулою (21.8)

$$\Phi_{\delta}(p) = \frac{1}{1 + W_{\text{роз}}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{k_{\text{роз}} \cdot (T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)}} = \frac{p(T_2 p + 1)}{p(T_2 p + 1) + k_{\text{роз}} \cdot (T_1 p + 1)}.$$

Якщо структурна схема САК має типові з'єднання ланок (послідовне, паралельне або місцеві зворотні зв'язки), спочатку необхідно виконати перетворення структурної схеми, щоб перетворити її до одноконтурної, а потім – визначити передатні функції розімкненої та замкненої систем.



**Тема 22**  
**ПРАКТИЧНА РОБОТА 6.**  
**ПОБУДОВА ЛОГАРИФМІЧНИХ ЧАСТОТНИХ**  
**ХАРАКТЕРИСТИК РОЗІМКНЕНОЇ СИСТЕМИ**

Розглянемо одержання частотних характеристик на прикладі передатної функції розімкненої системи

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}(T_1 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \zeta p + 1)}, \quad (22.1)$$

де  $k_{\text{роз}} = 10 \text{ с}^{-1}$ ;  $T_1 = 0,1 \text{ с}$ ;  $T_2 = 0,5 \text{ с}$ ;  $T_3 = 0,01 \text{ с}$ ;  $\zeta = 0,7$ .

За наведеного значення  $\zeta$  можна не враховувати горба амплітудно-частотної характеристики коливальної ланки, величина якого не перевищує 3 дБ.

Амплітудну й фазову частотні характеристики розімкненої системи визначають за такими виразами:

$$N(\omega) = \frac{k_{\text{роз}}}{\omega} \sqrt{\frac{1 + T_1^2 \omega^2}{(1 + T_2^2 \omega^2)[(1 - T_3^2 \omega^2)^2 + 4T_3^2 \zeta^2 \omega^2]}}; \quad (22.2)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctg T_1 \omega - \arctg T_2 \omega - \arctg \frac{2\zeta T_3 \omega}{1 - T_3^2 \omega^2}. \quad (22.3)$$

Логарифмічну амплітудно-частотну характеристику (ЛАЧХ) розімкненої системи визначають такою сумою:

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega), \quad (22.4)$$

де  $L_i(\omega)$  – ЛАЧХ  $i$ -ї ланки системи.

Одиницею виміру  $L(\omega)$  є децибел (відкладають на осі ординат), а на осі абсцис відкладають частоту  $\omega$  [ $\text{с}^{-1}$ ] у логарифмічному масштабі.

Вираз для ЛФЧХ (зберігається у вигляді (22.3) без змін) також запишемо у вигляді алгебраїчної суми

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega), \quad (22.5)$$

де  $\varphi_i(\omega)$  – ЛФЧХ  $i$ -ї ланки.

Під час побудови ЛФЧХ відлік кутів  $\varphi$  іде за віссю ординат у звичайному масштабі в кутових градусах або радіанах. За віссю абсцис відкладають частоту в логарифмічному масштабі.

Характеристики  $L(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$  будують на одному бланку, водночас  $\varphi(\omega)$  розташовують точно під  $L(\omega)$ .

ЛАЧХ і ЛФЧХ можна побудувати за виразами (22.2)–(22.4) або безпосередньо за заданою передатною функцією, використовуючи відомі асимптотичні характеристики окремих ланок.

Розглянемо *методику побудови асимптотичних характеристик* за заданою передатною функцією розімкненої системи (рис. 22.1).

1. Визначити частоти спряження  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , де  $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ , та відкласти їхні значення вздовж осі частот.

2. На частоті  $\omega = 1$  відкласти ординату, яка дорівнює  $20 \lg(k_{роз})$ , де  $k_{роз}$  – коефіцієнт підсилення розімкненої системи, позначивши задану точку  $A$ .

3. Через точку  $A$  провести пряму з нахилом  $(-v \text{ дБ/дек})$ , де  $v$  – порядок астатизму системи від осі ординат до першої частоти спряження. Цей відрізок є низькочастотною асимптотою ЛАЧХ. Якщо перша частота спряження менша за одиницю (тобто лежить зліва від частоти  $\omega = 1$  на осі частот), то через точку  $A$  пройде продовження низькочастотної асимптоти.

4. Після кожної частоти спряження необхідно змінювати нахил ЛАЧХ:

– на  $-20$  дБ/дек, якщо частота спряження визначається сталою часу ланки першого порядку у знаменнику  $W_{роз}(p)$  (аперіодична ланка);

– на  $+20$  дБ/дек, якщо частота спряження визначається сталою часу ланки першого порядку в чисельнику (форсувальна ланка);

– на  $\pm 40$  дБ/дек для ланок другого порядку (аперіодична другого порядку, коливальна) (знак «+», якщо ланка розміщена в чисельнику  $W_{роз}(p)$ , знак «-», якщо ланка розміщена у знаменнику).

5. Для побудови точної ЛФЧХ розрахунок потрібно робити за формулою (22.3), а дані розрахунку звести в таблицю 22.1, за результатами розрахунку побудувати графік сумарної характеристики.

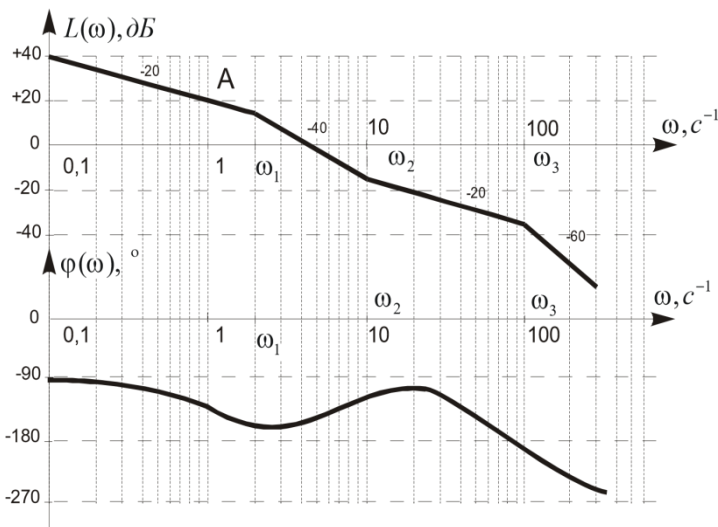


Рисунок 22.1 – Приклад побудови асимптотичних логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи

Таблиця 22.1 – Результати розрахунку для побудови ЛФЧХ

$\omega$	$\varphi_1 = -90^\circ$	$\varphi_2 =$ $= \arctg T_1 \omega$	$\varphi_3 =$ $= -\arctg T_2 \omega$	$\varphi_4 =$ $= -\arctg \frac{2\zeta T_3 \omega}{1 - T_3^2 \omega^2}$	$\varphi_{\text{роз}}(\omega) =$ $= \sum \varphi_i(\omega)$
----------	-------------------------	--	---	---	--

**Приклад 22.1.** Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи, якщо передатна функція розімкненої системи має такий вигляд:

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}}{(p + 1)(Tp + 1)},$$

де  $k_{\text{роз}} = 10^{-1}$  с;  $T = 0,05$  с.

*Розв'язання*

1. Визначимо та відкладемо на осі абсцис частоти спряження:  $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_2 = 20 \text{ с}^{-1}$ .

2. Визначимо ординату точки *A*: на частоті  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$  відкладаємо ординату  $20 \lg(k_{\text{роз}}) = 20$  дБ.

3. Визначаємо початковий нахил: порядок астатизму  $\nu = 0$ , тому початковий нахил буде дорівнювати 0 дБ/дек; через точку *A* проводимо пряму, паралельну осі частот, від осі ординат до першої частоти спряження  $\omega_1$ .

4. На частоті спряження  $\omega_1$  змінюємо нахил на  $-20$  дБ/дек, оскільки частота  $\omega_1$  визначається сталою часу ланки першого порядку  $(p + 1)$  у знаменнику передатної функції розімкненої системи.

5. На частоті спряження  $\omega_2$  знову змінюємо нахил на  $-20$  дБ/дек, оскільки частота  $\omega_2$  визначається сталою часу ланки першого порядку  $(p + 1)$  у знаменнику передатної функції розімкненої системи, результуючий нахил буде дорівнювати  $-40$  дБ/дек.

Побудова ЛФЧХ:  $\varphi(\omega) = -\arctg \omega - \arctg T \omega$ .

Графіки асимптотичних ЛАЧХ та ЛФЧХ наведено на рисунку 22.2.

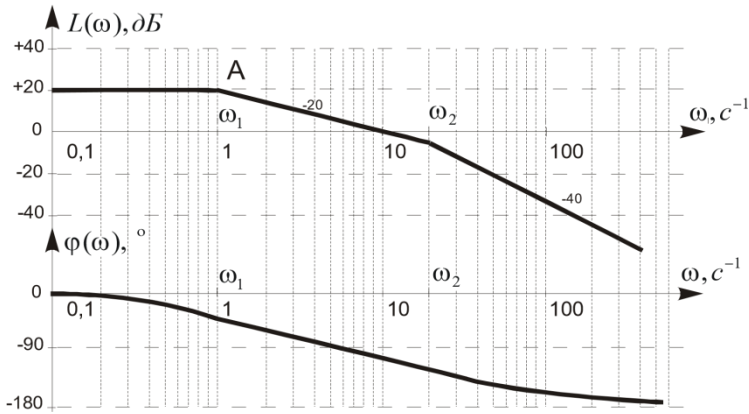


Рисунок 22.2 – Графіки асимптотичних ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої системи

**Приклад 22.2.** Визначити початковий нахил (дБ/дек) логарифмічної амплітудно-частотної характеристики та початкове значення фазочастотної характеристики  $\varphi_{роз}(\omega)$  розімкненої системи з такою передатною функцією:

$$W_{роз}(p) = \frac{10(0,5p + 1)(p + 1)}{p^2(0,01p^2 + 0,12p + 1)(0,05p + 1)}$$

*Розв'язання:* початковий нахил логарифмічної амплітудно-частотної характеристики залежить від порядку астатизму системи й визначається за виразом  $-v$  20 дБ/дек, де  $v$  – порядок астатизму системи.

Для заданої передатної функції порядок астатизму  $v = 2$ , тому початковий нахил характеристики буде  $-40$  дБ/дек.

Система містить інтегровальну ланку другого порядку, аперіодичну ланку першого порядку, коливальну ланку та дві ланки, що форсують. Фазочастотну характеристику (ФЧХ) розімкненої системи визначають сумою фазочастотних характеристик ланок, що входять до розімкненої системи:  $\varphi_{роз}(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$ . Початковими значеннями ФЧХ для інтегровальної ланки другого порядку є  $2 \cdot (-90^0) = -180^0$ ; для аперіодичної ланки першого порядку  $-0^0$ ; для коливальної ланки  $-0^0$ ; для ланки, що форсує,  $-0^0$ .

Початкове значення  $\varphi_{роз}(\omega) = -180^0 + 0^0 + 0^0 + 0^0$ .

**Приклад 22.3.** Визначити кінцеве значення, до якого прямує фазочастотна характеристика розімкненої системи  $\varphi_{роз}(\omega)$ , якщо розімкнена система є послідовним з'єднанням динамічних ланок із такими передатними функціями:

$$W_1(p) = \frac{15(0,5p + 1)}{0,1p^2 + 0,3p + 1};$$

$$W_2(p) = \frac{p + 1}{p}; \quad W_3(p) = \frac{0,2p + 1}{5p + 1}.$$

*Розв'язання:* передатну функцію розімкненої системи з послідовним з'єднанням ланок визначають за таким виразом:

$$W_{роз}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \dots \cdot W_n(p);$$

$$W_{роз}(p) = \frac{15(0,5p + 1)}{(0,1p^2 + 0,3p + 1)} \cdot \frac{p + 1}{p} \cdot \frac{0,2p + 1}{5p + 1} =$$

$$= \frac{15(0,5p + 1)(p + 1)(0,2p + 1)}{(0,1p^2 + 0,3p + 1)(5p + 1)}.$$

Система містить інтегровальну ланку, аперіодичну ланку, коливальну ланку й три ланки, що форсують. Фазочастотну характеристику розімкненої системи визначають

сумою фазочастотних характеристик ланок, що входять до розімкненої системи:  $\varphi_{роз}(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$ .

Значеннями, до яких прямують ФЧХ окремих ланок, є такі: для інтегрувальної ланки ( $-90^\circ$ ); для аперіодичної ланки першого порядку ( $-90^\circ$ ); для коливальної ланки ( $-180^\circ$ ); для кожної ланки, що форсує, ( $+90^\circ$ ).

Кінцеве значення має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\varphi_{роз}(\omega) &= -90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ) = \\ &= -90^\circ.\end{aligned}$$

**Тема 23**  
**ПРАКТИЧНА РОБОТА 7.**  
**ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ**  
**СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

У ТАК зазвичай точність автоматичних систем оцінюють за усталеними помилками, тобто за помилками в усталеному режимі, який настає після завершення перехідного процесу.

Усталені похибки САК визначають, використовуючи теорему щодо кінцевого значення функції

$$\delta_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi_{\delta}(p) X(p), \quad (23.1)$$

де  $\Phi_{\delta}(p)$  – передатна функція замкненої системи за помилкою;  $X(p)$  – зображення вхідного впливу.

Якщо визначають усталену помилку системи, зумовлену збуренням  $f(t)$ , то у формулі (23.1) використовують відповідно передатну функцію за збуренням  $\Phi_f(p)$  і зображення збурення  $F(p)$ .

За сталого вхідного впливу  $x(t) = x_0 = const$  і, отже,  $X(p) = \frac{x_0}{p}$  за формулою (23.1) визначимо статичну помилку САК  $\delta_{ст}$ .

Якщо на вхід системи подати вплив, що змінюється зі сталою швидкістю  $x(t) = x_1 \cdot t$ , то  $X(p) = \frac{x_1}{p^2}$  і кінцеве усталене значення (23.1) називають *швидкісною помилкою* САК  $\delta_{ув}$ .

*Динамічною помилкою* САК  $\delta_{дин}$  називають кінцеве усталене значення (23.1) за подання на вхід впливу, який змінюється зі сталим прискоренням  $x(t) = x_2 \cdot t^2$  і, отже,  $X(p) = \frac{2x_2}{p^3}$ .



**Приклад 23.1.** Визначити швидкісну помилку САК із передатною функцією такої розімкненої системи:

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1) + k}.$$

*Розв'язання:* передатну функцію замкненої системи за помилкою визначимо за формулою

$$\Phi_{\delta}(p) = \frac{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1) + k}$$

і підставимо її та зображення вхідного впливу  $X(p) = \frac{x_1}{p^2}$  у формулу (23.1)

$$\delta_{\text{шв}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1) + k} \cdot \frac{x_1}{p^2} = \frac{x_1}{k}.$$

Якщо на вхід САК подати гармонічне вхідне збудження

$$x(t) = A_m \sin \omega_x t, \quad (23.2)$$

де  $A_m$ ,  $\omega_x$  – відповідно амплітуда та частота вхідного впливу, то помилка САК також матиме гармонічний характер

$$\delta(t) = \delta_m \sin(\omega_x t + \varphi_{\delta}), \quad (23.3)$$

де  $\delta_m$ ,  $\varphi_{\delta}$  – відповідно амплітуда й фаза помилки.

Інколи визначають лише амплітуду помилки  $\delta_m$ . Для вхідного впливу (23.2), частота якого  $\omega_x$  є у смузі низьких і середніх частот, де підсилення розімкненої системи більше за одиницю, тобто  $|W_{\text{роз}}(j\omega_x)| > 1$ , доцільно використовувати наближений вираз для визначення амплітуди  $\delta_m$ . Пе-

редатну функцію замкненої системи за помилкою в цьому разі запишемо в такому наближеному вигляді:

$$\Phi_{\delta}(j\omega_x) = \frac{1}{1 + W_{\text{роз}}(j\omega_x)} \approx \frac{1}{W_{\text{роз}}(j\omega_x)}. \quad (23.4)$$

Тоді з урахуванням (23.2) і (23.4) амплітуду помилки  $\delta_m$  визначимо за таким виразом:

$$\delta_m(j\omega_x) = A_m |\Phi_{\delta}(j\omega_x)| = \frac{A_m}{|W_{\text{роз}}(j\omega_x)|}. \quad (23.5)$$

Величину  $|W_{\text{роз}}(j\omega_x)|$  можна визначити аналітичним шляхом, або, використовуючи ЛАЧХ розімкненої системи  $L(\omega)$ , за таким виразом:

$$|W_{\text{роз}}(j\omega_x)| = 10^{\frac{L(\omega_x)}{20}},$$

де  $L(\omega_x)$  – ордината ЛАЧХ на частоті вхідного впливу  $\omega_x$ .

**Тема 24**  
**ПРАКТИЧНА РОБОТА 8.**  
**ОЦІНЮВАННЯ СТІЙКОСТІ**  
**СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

*Стійкість* – це властивість систем повертатися в попередній стан рівноваги після виведення системи з нього й після припинення змінювання вхідного впливу (збурення). Лінійна система, яка є стійкою за малих впливів (збурень), буде стійкою й під час великих впливів (збурень). Нелінійна система може бути стійкою за малих впливів і нестійкою за умови великих впливів.

*Умовою стійкості* лінійних неперервних САК є наявність від’ємних дійсних коренів або комплексно-спряжених коренів із від’ємними дійсними частинами характеристичного рівняння (характеристичного полінома) замкненої системи. Тобто щоб визначити, чи стійка система, необхідно прирівняти характеристичний поліном замкненої системи до нуля, знайти його корені. Залежно від знаків коренів можна зробити такі висновки:

- якщо всі корені розташовані в лівій напівплощині комплексної площини коренів, система є стійкою;
- якщо є хоча б один корінь у правій напівплощині, – система є нестійкою;
- якщо є хоча б одна пара коренів на уявній осі комплексної площини коренів (пара уявних коренів), система розташована на межі стійкості.

Під час практичного застосування зручно користуватися непрямими, без знаходження коренів характеристичного рівняння, методами оцінювання стійкості, які називають *критеріями стійкості*.

## 24.1. Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца

Для оцінювання стійкості використовують характеристичний поліном замкненої системи. Стійкість оцінюють за коефіцієнтами характеристичного полінома.

Розглянемо такий характеристичний поліном замкненої системи:

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \dots a_1 p + a_0 = 0.$$

*Необхідною умовою стійкості є додатність усіх коефіцієнтів характеристичного полінома  $a_i > 0$  за умови  $a_n > 0$ .*

*Достатню умову стійкості формулюють так: замкнена система буде стійкою, якщо за умови  $a_i > 0$ , усі  $n$  визначників Гурвіца будуть додатними, де  $n$  – порядок характеристичного полінома  $\Delta_n > 0$ ;  $\Delta_{n-1} > 0$ ; ...;  $\Delta_1 > 0$ .*

Якщо хоча б один визначник буде від'ємним, система буде нестійкою. Якщо хоча б один визначник дорівнює нулеві, система буде на межі стійкості.

Отже, для оцінювання стійкості потрібно записати  $n$  визначників Гурвіца й перевірити їхній знак. Визначники Гурвіца складають із *коефіцієнтів характеристичного полінома* замкненої системи.

Для оцінювання стійкості спочатку записуємо *головний визначник Гурвіца  $n$ -го порядку* за такими правилами:

– за головною діагоналлю записуємо коефіцієнти характеристичного полінома, починаючи з другого ( $a_{n-1}$ ) і далі зі зменшенням індексів до  $a_0$  включно;

– стовпці вгору від головної діагоналі заповнюють коефіцієнтами з індексами, що зменшуються, а стовпці вниз від діагоналі – коефіцієнтами з індексами, що збільшуються;

– місця відсутніх коефіцієнтів заповнюють нулями.

Визначники більш низького порядку одержують із визначників більш високого порядку, викреслюючи один рядок знизу й один стовпчик справа.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

**Приклад 24.1.** Нехай передатна функція розімкненої системи має такий вигляд:

$$W_{роз}(p) = \frac{k_{роз}}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)}.$$

Параметри САК мають такі значення:  $k_{роз} = 10 \text{ с}^{-1}$ ;  $T_1 = 0,1 \text{ с}$ ;  $T_2 = 0,05 \text{ с}$ .

Характеристичний поліном має такий вигляд:

$$\begin{aligned} D(p) &= p(T_1p + 1)(T_2p + 1) + k_{роз} = \\ &= a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0; \\ a_3 &= T_1 \cdot T_2 = 0,005; \\ a_2 &= T_1 + T_2 = 0,15; \\ a_1 &= 1; \\ a_0 &= k_{роз} = 10. \end{aligned}$$

Необхідна умова стійкості виконується, оскільки  $a_i > 0$ .

Достатня умова

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_3a_1a_0 - a_3a_0a_0 =$$

$$\begin{aligned}
 &= a_0(a_2a_1 - a_3a_0); \\
 \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_1 - a_0a_3 = \\
 &= 0,15 \cdot 1 - 10 \cdot 0,005 = 0,15 - 0,05 = 0,1 > 0.
 \end{aligned}$$

Для головного визначника  $\Delta_n$  і визначника  $\Delta_{n-1}$  виконується умова  $\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$ , тому якщо виконується необхідна умова ( $a_0 > 0$ ) та умова  $\Delta_2 > 0$ , то й головний визначник буде додатним  $\Delta_3 > 0$ . Це означає, що система є стійкою.

## 24.2. Частотний критерій стійкості Михайлова

Для оцінювання стійкості використовують характеристичний поліном замкненої системи, записаний у комплексній формі,  $D(j\omega)$  – комплексний вектор. У разі змінювання частоти від 0 до  $+\infty$  будуть змінюватися модуль (довжина вектора) та аргумент (фазовий кут) комплексного вектора  $D(j\omega)$  так, що кінець комплексного вектора буде описувати на комплексній площині криву, яку називають *годографом Михайлова*.

Система буде стійкою, якщо під час змінювання частоти від 0 до  $+\infty$  годограф Михайлова проходить послідовно  $n$  квадрантів проти годинникової стрілки, починаючи з дійсної додатної осі, де  $n$  – порядок характеристичного рівняння (рис. 24.1).

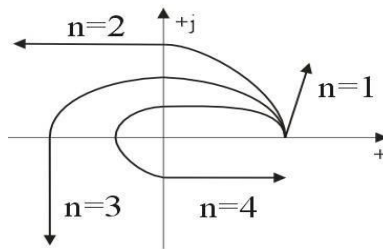


Рисунок 24.1 – Годограф Михайлова за різних  $n$

Якщо зазначена умова не виконується, *система не є стійкою*. Якщо крива проходить через початок координат, система є на межі стійкості.

### 24.3. Побудова годографа Михайлова

Для побудови годографа Михайлова потрібно виконати такі дії:

1) записати характеристичний поліном

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \dots a_1 p + a_0 = 0;$$

2) записати характеристичний поліном у комплексному вигляді, підставивши  $p = j\omega$

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} \dots a_1 (j\omega) + a_0 = 0;$$

3) записати дійсну та уявну частини комплексного характеристичного полінома

$$\begin{aligned} P(\omega) &= a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - a_6 \omega^6 + \dots; \\ Q(\omega) &= a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - a_7 \omega^7 + \dots; \end{aligned}$$

4) визначити частоти, на яких годограф перетинає дійсну та уявну осі:

–  $Q(\omega) = 0 \rightarrow \omega_{\text{дійсн}}$  – годограф перетинає дійсну вісь ( $\omega_0; \omega_2; \omega_4; \dots$ );

–  $P(\omega) = 0 \rightarrow \omega_{\text{уявн}}$  – годограф перетинає уявну вісь ( $\omega_1; \omega_3; \omega_5; \dots$ ).

За таких умов використовують лише дійсні додатні значення частоти. Якщо визначене значення частоти є уявним, то годограф не перетинає цієї осі;

5) визначити значення дійсної та уявної частин, що відповідають таким визначеним частотам:

–  $\omega_0 ; \omega_2 ; \omega_4 ; \dots \Rightarrow P(\omega)$  – визначаємо абсциси графіка;

–  $\omega_1 ; \omega_3 ; \omega_5 ; \dots \Rightarrow Q(\omega)$  – визначаємо ординати графіка.

Якщо система стійка, то відповідно до визначення стійкості за критерієм Михайлова годограф почергово перетинає то дійсну, то уявну вісь.

*Наслідок критерію стійкості Михайлова:* система буде стійкою, якщо частоти, на яких годограф Михайлова перетинає то дійсну, то уявну вісь, задовольняють нерівності:  $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots < \omega_n$ .

**Приклад 24.2.** Розглянемо приклад 24.1.

$$\begin{aligned}
 W_{\text{роз}}(p) &= \frac{k_{\text{роз}}}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}; \\
 D(p) &= p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_{\text{роз}} = \\
 &= a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0; \\
 a_3 &= T_1 \cdot T_2 = 0,005; \\
 a_2 &= T_1 + T_2 = 0,15; \\
 a_1 &= 1; \\
 a_0 &= k_{\text{роз}} = 10.
 \end{aligned}$$

Відповідно до наведеної вище методики запишемо

$$\begin{aligned}
 D(p) &= a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0; \\
 D(j\omega) &= a_3 (j\omega)^3 + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0; \\
 P(\omega) &= a_0 - a_2 \omega^2; \quad Q(\omega) = a_1 \omega - a_3 \omega^3.
 \end{aligned}$$

Визначаємо частоти, на яких годограф перетинає дійсну та уявну осі

$$\begin{aligned}
 Q(\omega) &= 0 \rightarrow \omega_{\text{дійс}}; \\
 a_1 \omega - a_3 \omega^3 &= \omega(a_1 - a_3 \omega^2) = 0; \quad \omega_0 = 0;
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\omega_2 &= \sqrt{a_1/a_2} = 14,14; \\ P(\omega) &= 0 \rightarrow \omega_{\text{уявн}}; \\ a_0 - a_2\omega^2 &= 0; \omega_1 = \sqrt{a_0/a_2} = 8,17.\end{aligned}$$

Наслідок критерію Михайлова такий:

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 \rightarrow 0 < 8,17 < 14,14.$$

Отже, умова стійкості виконується, і система є стійкою.

## ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

**Завдання 1.** Визначити передатну функцію  $W(p)$  елемента системи за заданим рівнянням динаміки, де  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  – відповідно вхідна та вихідна величини відповідно до варіанта.

Варіант	Рівняння динаміки	Значення параметрів
1	2	3
1	$T \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} = k \cdot x_1(t)$	$T = 0,01 \text{ с};$ $k = 10 \text{ с}^{-1}$
2	$T_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 0,1 \text{ с};$ $T_2 = 10 \text{ с}$
3	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = k \frac{dx_1(t)}{dt}$	$T = 10 \text{ с};$ $k = 10 \text{ с}^{-1}$
4	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = k \int x_1(t) dt$	$T = 0,5 \text{ с};$ $k = 100 \text{ с}^{-1}$
5	$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = T \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 1 \text{ с}$
6	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 10 \text{ с}$

Продовження таблиці

1	2	3
7	$T_2 \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 0,05 \text{ c}$
8	$T \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 5 \text{ c}$
9	$T_2^2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2(t)}{dt} +$ $+ x_2(t) = k \cdot x_1(t)$	$T_1 = 1,25 \text{ c};$ $T_2 = 0,5 \text{ c};$ $k = 10 \text{ c}^{-1}$
10	$T_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} =$ $= T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 2 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c}$
11	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= k \frac{dx_1(t)}{dt}$	$T = 5 \text{ c};$ $k = 5 \text{ c}^{-1}$
12	$\frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= x_1(t) + \int x_1(t) dt$	—
13	$T \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} k =$ $= x_1(t)$	$T = 1 \text{ c};$ $k = 10 \text{ c}^{-1}$
14	$T_2^2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2(t)}{dt} +$ $+ x_2(t) = x_1(t)$	$T_1 = 0,2 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c}$
15	$T \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 0,1 \text{ c}$

Продовження таблиці

1	2	3
16	$T \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 0,5 \text{ c}$
17	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= k_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + k_2 \cdot x_1(t)$	$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 5 \text{ c}^{-1};$ $T = 10 \text{ c}$
18	$T_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} =$ $= T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c}$
19	$x_2(t) =$ $= x_1(t) + \int x_1(t) dt$	<p style="text-align: center;">-</p>
20	$T_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= \tau \frac{dx_1(t)}{dt}$	$T_1 = 2 \text{ c};$ $T = 0,3 \text{ c}$
21	$T \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= x_1(t) + \int x_1(t) dt$	$T = 0,02 \text{ c}$
22	$T_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c}$
23	$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} =$ $= T \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 0,5 \text{ c}$
24	$T_2 \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= T_1 x_1(t) + \int x_1(t) dt$	$T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 0,05 \text{ c}$
25	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= x_1(t) + \int x_1(t) dt$	$T = 0,01 \text{ c}$

**Завдання 2.** Знайти розв'язок двох диференціальних рівнянь аналітичним методом і за допомогою операційного числення за таких умов:

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0; X(t) = 1(t).$$

Варіант	Рівняння 1	Рівняння 2
1	2	3
1	$3 \frac{d^2y}{dt^2} + 21 \frac{dy}{dt} + 30y = 6x$	$3 \frac{d^2y}{dt^2} + 21 \frac{dy}{dt} = 5x$
2	$25 \frac{d^2y}{dt^2} + 20 \frac{dy}{dt} + 20y = 15x$	$25 \frac{d^2y}{dt^2} + 20 \frac{dy}{dt} = 5x$
3	$0,1 \frac{d^2y}{dt^2} + 0,2 \frac{dy}{dt} + 0,5y = 0,8x$	$0,1 \frac{d^2y}{dt^2} + 0,2 \frac{dy}{dt} = 0,8x$
4	$0,2 \frac{d^2y}{dt^2} + 0,7 \frac{dy}{dt} + 0,3y = x$	$0,2 \frac{d^2y}{dt^2} + 0,8 \frac{dy}{dt} = x$
5	$0,5 \frac{d^2y}{dt^2} + 0,4 \frac{dy}{dt} + 0,08y = 3x$	$0,5 \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 3x$
6	$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 28 \frac{dy}{dt} + 100y = 3x$	$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} = 3x$
7	$\frac{d^2y}{dt^2} + 1,1 \frac{dy}{dt} + 0,3y = 3x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} = 33x$
8	$0,5 \frac{d^2y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 32y = 0,25x$	$0,5 \frac{d^2y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} = 0,25x$
9	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 9,25y = 4x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} = 4x$
10	$3 \frac{d^2y}{dt^2} + 45 \frac{dy}{dt} + 168y = 0,9x$	$3 \frac{d^2y}{dt^2} + 45 \frac{dy}{dt} = 0,9x$
11	$10 \frac{d^2y}{dt^2} + 16 \frac{dy}{dt} + 8,9y = 5x$	$10 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = 5x$
12	$5 \frac{d^2y}{dt^2} + 27 \frac{dy}{dt} + 34y = 4x$	$5 \frac{d^2y}{dt^2} + 9 \frac{dy}{dt} = x$
13	$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 8y = 7x$	$3 \frac{d^2y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} = 7x$

Продовження таблиці

1	2	3
14	$5 \frac{d^2y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 2y = 5x$	$7 \frac{d^2y}{dt^2} + 15 \frac{dy}{dt} = 8x$
15	$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 20 \frac{dy}{dt} + 17y = 8x$	$0,3 \frac{d^2y}{dt^2} + 1,8 \frac{dy}{dt} = 1,1x$
16	$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 16 \frac{dy}{dt} + 16y = 9x$	$9 \frac{d^2y}{dt^2} + 34 \frac{dy}{dt} = 17x$
17	$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 56 \frac{dy}{dt} + 200y = x$	$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} = 3x$
18	$0,4 \frac{d^2y}{dt^2} + 0,8 \frac{dy}{dt} + 0,2y = 0,3x$	$11 \frac{d^2y}{dt^2} + 27 \frac{dy}{dt} = 9x$
19	$10 \frac{d^2y}{dt^2} + 40 \frac{dy}{dt} + 40y = 7x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} = 2x$
20	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 5x$	$0,7 \frac{d^2y}{dt^2} + 1,3 \frac{dy}{dt} = 0,5x$
21	$7 \frac{d^2y}{dt^2} + 17 \frac{dy}{dt} + 13y = 10x$	$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} = 12x$
22	$6 \frac{d^2y}{dt^2} + 24 \frac{dy}{dt} + 24y = x$	$5 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = 6x$
23	$\frac{d^2y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 10y = 5x$	$5 \frac{d^2y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} = 6x$
24	$\frac{d^2y}{dt^2} + 1,9 \frac{dy}{dt} + 0,7y = 0,7x$	$3 \frac{d^2y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} = 5x$
25	$\frac{d^2y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 7x$	$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 17 \frac{dy}{dt} = 9x$
26	$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 16y = 5x$	$7 \frac{d^2y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} = 2x$
27	$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} + 8y = 6x$	$9 \frac{d^2y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} = 3x$
28	$\frac{d^2y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} + 12y = 9x$	$8 \frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} = x$
29	$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 3y = x$	$11 \frac{d^2y}{dt^2} + 33 \frac{dy}{dt} = 121x$
30	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 5x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = x$

**Завдання 3.** Визначити вагову  $w(t)$  та перехідну  $h(t)$  характеристики елемента системи за заданим рівнянням динаміки, де  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  – вхідна та вихідна величини відповідно згідно з варіантом.

Варіант	Рівняння динаміки	Значення параметрів
1	$T \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 5 \text{ с}$
2	$T_2^2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = k \cdot x_1(t)$	$T_1 = 1,25 \text{ с};$ $T_2 = 0,5 \text{ с};$ $k = 10 \text{ с}^{-1}$
3	$T_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 2 \text{ с};$ $T_2 = 0,1 \text{ с}$
4	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = k \frac{dx_1(t)}{dt}$	$T = 5 \text{ с};$ $k = 5 \text{ с}^{-1}$
5	$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + \int x_1(t) dt$	–
6	$T \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} k = x_1(t)$	$T = 1 \text{ с};$ $k = 10 \text{ с}^{-1}$
7	$T_2^2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = x_1(t)$	$T_1 = 0,2 \text{ с};$ $T_2 = 0,1 \text{ с}$

Продовження таблиці

1	2	3
8	$T \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 0,1 \text{ c}$
9	$T \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 0,5 \text{ c}$
10	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= k_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + k_2 \cdot x_1(t)$	$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 5 \text{ c}^{-1};$ $T = 10 \text{ c}$
11	$T_2 \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} =$ $= T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c}$
12	$x_2(t) =$ $= x_1(t) + \int x_1(t) dt$	<p style="text-align: center;">-</p>
13	$T_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= \tau \frac{dx_1(t)}{dt}$	$T_1 = 2 \text{ c};$ $T = 0,3 \text{ c}$
14	$T \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= x_1(t) + \int x_1(t) dt$	$T = 0,02 \text{ c}$
15	$T_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c}$
16	$\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} =$ $= T \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 0,5 \text{ c}$



Продовження таблиці

1	2	3
17	$T_2 \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= T_1 x_1(t) + \int x_1(t) dt$	$T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 0,05 \text{ c}$
18	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= x_1(t) + \int x_1(t) dt$	$T = 0,01 \text{ c}$
19	$T \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= k \cdot x_1(t)$	$T = 0,01 \text{ c};$ $k = 10 \text{ c}^{-1}$
20	$T_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 10 \text{ c}$
21	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= k \frac{dx_1(t)}{dt}$	$T = 10 \text{ c};$ $k = 10 \text{ c}^{-1}$
22	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= k \int x_1(t) dt$	$T = 0,5 \text{ c};$ $k = 100 \text{ c}^{-1}$
23	$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} =$ $= T \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 1 \text{ c}$
24	$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) =$ $= \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T = 10 \text{ c}$
25	$T_2 \frac{dx_2(t)}{dt} =$ $= T_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t)$	$T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 0,05 \text{ c}$

**Завдання 4.** Визначити амплітудно-фазові характеристики об'єкта за варіантом. Побудувати амплітудно-фазову, амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики.

Варіант	Рівняння 1	Рівняння 2
1	$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 16 \frac{dy}{dt} + 16y = 9x$	$9 \frac{d^2y}{dt^2} + 34 \frac{dy}{dt} = 17x$
2	$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 56 \frac{dy}{dt} + 200y = x$	$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} = 3x$
3	$0,4 \frac{d^2y}{dt^2} + 0,8 \frac{dy}{dt} + 0,2y = 0,3x$	$11 \frac{d^2y}{dt^2} + 27 \frac{dy}{dt} = 9x$
4	$10 \frac{d^2y}{dt^2} + 40 \frac{dy}{dt} + 40y = 7x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} = 2x$
5	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 5x$	$0,7 \frac{d^2y}{dt^2} + 1,3 \frac{dy}{dt} = 0,5x$
6	$7 \frac{d^2y}{dt^2} + 17 \frac{dy}{dt} + 13y = 10x$	$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} = 12x$
7	$6 \frac{d^2y}{dt^2} + 24 \frac{dy}{dt} + 24y = x$	$5 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = 6x$
8	$\frac{d^2y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 10y = 5x$	$5 \frac{d^2y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} = 6x$
9	$\frac{d^2y}{dt^2} + 1,9 \frac{dy}{dt} + 0,7y = 0,7x$	$3 \frac{d^2y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} = 5x$
10	$\frac{d^2y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 7x$	$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 17 \frac{dy}{dt} = 9x$
11	$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 16y = 5x$	$7 \frac{d^2y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} = 2x$
12	$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} + 8y = 6x$	$9 \frac{d^2y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} = 3x$
13	$\frac{d^2y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} + 12y = 9x$	$8 \frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} = x$
14	$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 3y = x$	$11 \frac{d^2y}{dt^2} + 33 \frac{dy}{dt} = 121x$

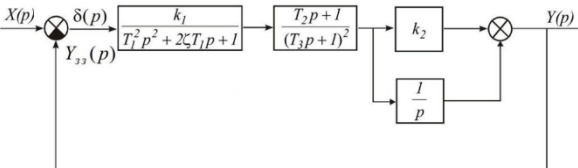
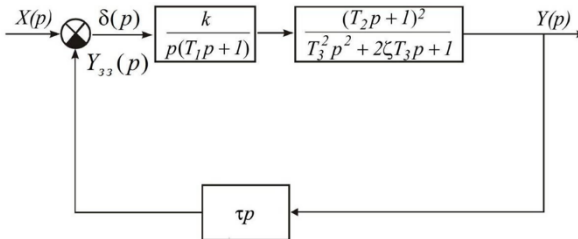
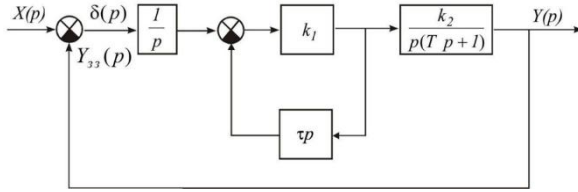
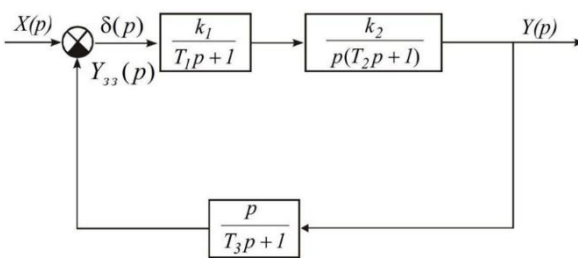
Продовження таблиці

1	2	3
15	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 5x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = x$
16	$3\frac{d^2y}{dt^2} + 21\frac{dy}{dt} + 30y = 6x$	$3\frac{d^2y}{dt^2} + 21\frac{dy}{dt} = 5x$
17	$25\frac{d^2y}{dt^2} + 20\frac{dy}{dt} + 20y = 15x$	$25\frac{d^2y}{dt^2} + 20\frac{dy}{dt} = 5x$
18	$0,1\frac{d^2y}{dt^2} + 0,2\frac{dy}{dt} + 0,5y = 0,8x$	$0,1\frac{d^2y}{dt^2} + 0,2\frac{dy}{dt} = 0,8x$
19	$0,2\frac{d^2y}{dt^2} + 0,7\frac{dy}{dt} + 0,3y = x$	$0,2\frac{d^2y}{dt^2} + 0,8\frac{dy}{dt} = x$
20	$0,5\frac{d^2y}{dt^2} + 0,4\frac{dy}{dt} + 0,08y = 3x$	$0,5\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 3x$
21	$2\frac{d^2y}{dt^2} + 28\frac{dy}{dt} + 100y = 3x$	$2\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} = 3x$
22	$\frac{d^2y}{dt^2} + 1,1\frac{dy}{dt} + 0,3y = 3x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} = 33x$
23	$0,5\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 32y = 0,25x$	$0,5\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} = 0,25x$
24	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 9,25y = 4x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} = 4x$
25	$3\frac{d^2y}{dt^2} + 45\frac{dy}{dt} + 168y = 0,9x$	$3\frac{d^2y}{dt^2} + 45\frac{dy}{dt} = 0,9x$
26	$10\frac{d^2y}{dt^2} + 16\frac{dy}{dt} + 8,9y = 5x$	$10\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = 5x$
27	$5\frac{d^2y}{dt^2} + 27\frac{dy}{dt} + 34y = 4x$	$5\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} = x$
28	$2\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 8y = 7x$	$3\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} = 7x$
29	$5\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = 5x$	$7\frac{d^2y}{dt^2} + 15\frac{dy}{dt} = 8x$
30	$4\frac{d^2y}{dt^2} + 20\frac{dy}{dt} + 17y = 8x$	$0,3\frac{d^2y}{dt^2} + 1,8\frac{dy}{dt} = 1,1x$

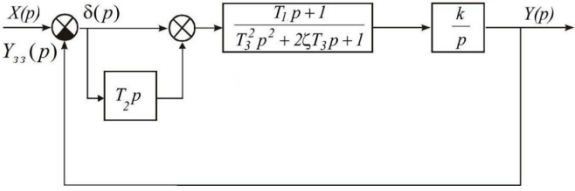
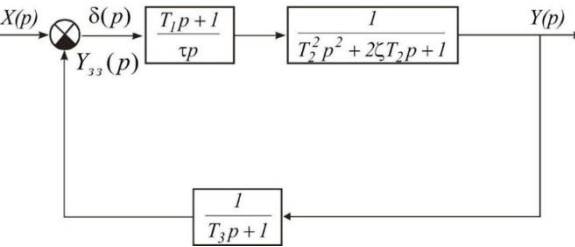
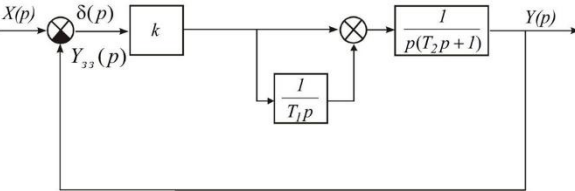
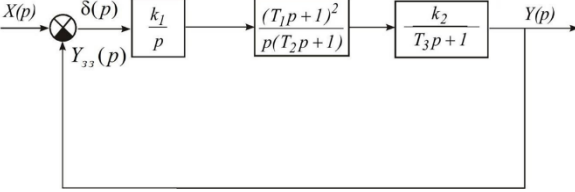
**Завдання 5.** Визначити передатну функцію розімкненої системи  $W_{роз}(p)$ , передатну функцію замкненої системи за задавальним впливом  $\Phi(p)$  і передатну функцію замкненої системи за помилкою  $\Phi_{\delta}(p)$  відповідно до варіанта.

Варіант	Структурна схема САК	Значення сталої часу та коефіцієнта підсилення
1	<b>2</b>	<b>3</b>
1		$k = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,02 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c};$ $T_4 = 0,1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$
2		$k = 1 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,5 \text{ c};$ $T_3 = 1 \text{ c};$ $T_4 = 0,01 \text{ c}$
3		$k = 1 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,5 \text{ c};$ $T_3 = 1 \text{ c};$ $T_4 = 0,01 \text{ c}$

Продовження таблиці

1	2	3
4		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,5 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,01 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$
5		$k = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c};$ $\tau = 0,01 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$
6		$k_1 = 0,1 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 10 \text{ c}^{-1};$ $\tau = 0,2 \text{ c};$ $T = 0,1 \text{ c}$
7		$k_1 = 2 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 50 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$

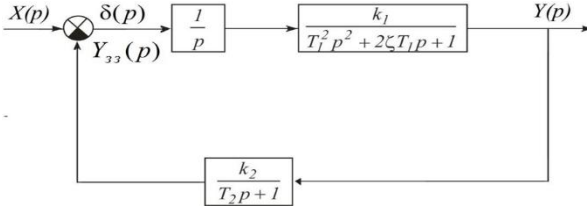
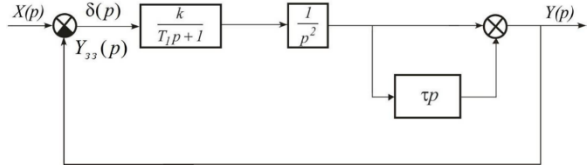
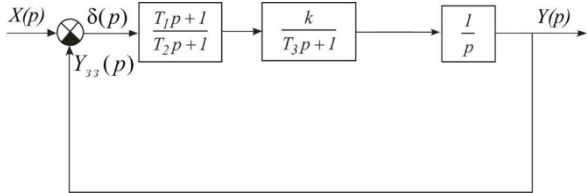
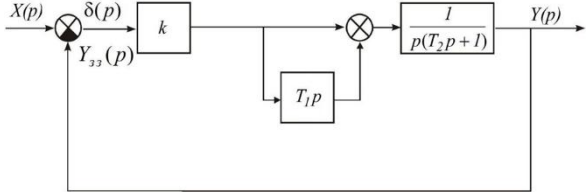
Продовження таблиці

1	2	3
8		$k = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,01 \text{ c};$ $T_2 = 0,02 \text{ c};$ $T_3 = 1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$
9		$T_1 = 0,01 \text{ c};$ $T_2 = 1 \text{ c};$ $\tau = 0,1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$
10		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,02 \text{ c}$
11		$k_1 = 2 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 5 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,25 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$

Продовження таблиці

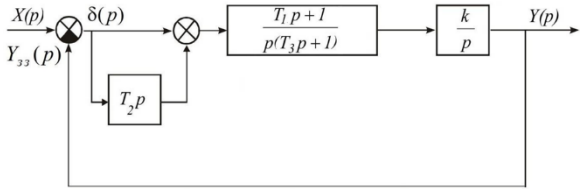
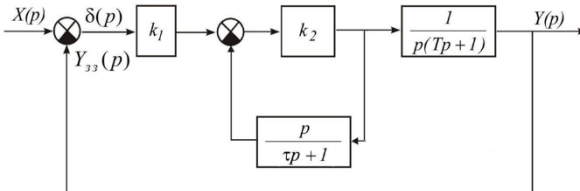
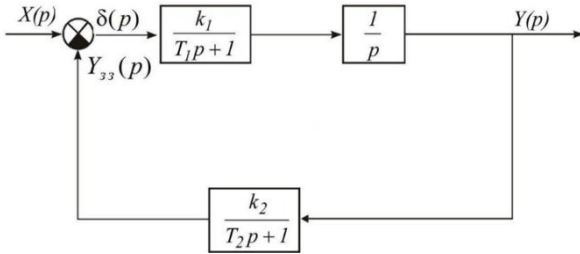
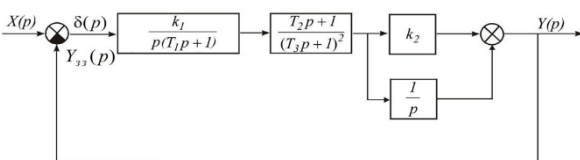
1	2	3
12		$k_1 = 100 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,1 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,02 \text{ c}$
13		$k_1 = 100 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,1 \text{ c}^{-1};$ $\tau = 0,1 \text{ c};$ $T = 0,2 \text{ c}$
14		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 5 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c};$ $T_4 = 0,02 \text{ c}$
15		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 5 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c};$ $T_4 = 0,02 \text{ c}$

Продовження таблиці

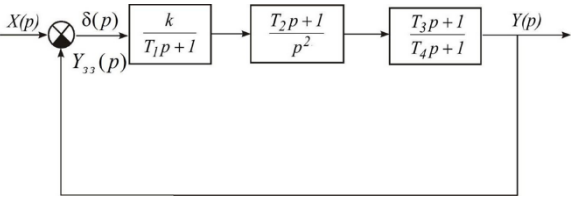
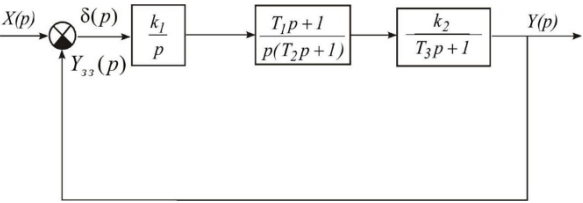
1	2	3
16		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,01 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$
17		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ c};$ $\tau = 1 \text{ c}$
18		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$
19		$k = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,5 \text{ c};$ $T_2 = 0,01 \text{ c}$



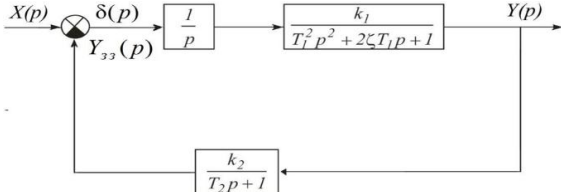
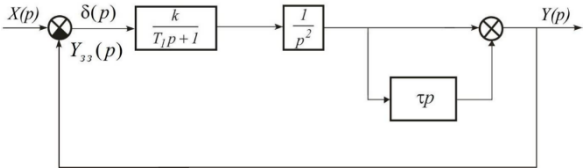
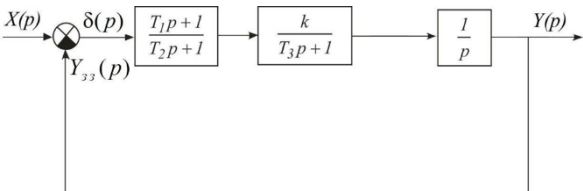
Продовження таблиці

1	2	3
20		$k = 1 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,5 \text{ c};$ $T_2 = 0,01 \text{ c};$ $T_3 = 0,1 \text{ c}$
21		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,1 \text{ c}^{-1};$ $T = 0,01 \text{ c};$ $\tau = 0,1 \text{ c}$
22		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 5 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,02 \text{ c};$ $T_2 = 1 \text{ c}$
23		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,5 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 0,05 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$

Продовження таблиці

1	2	3
24		$k = 10 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ с};$ $T_2 = 2 \text{ с};$ $T_3 = 0,02 \text{ с};$ $T_4 = 0,01 \text{ с}$
25		$k_1 = 50 \text{ с}^{-1};$ $k_2 = 2 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ с};$ $T_2 = 0,1 \text{ с};$ $T_3 = 0,01 \text{ с}$

**Завдання 6.** Побудувати ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої системи, використовуючи структурні схеми і значення параметрів САК, відповідно до варіанта.

Варіант	Структурна схема САК	Значення сталої часу та коефіцієнта підсилення
1	2	3
1		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,01 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$
2		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ c};$ $\tau = 1 \text{ c}$
3		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$

Продовження таблиці

1	2	3
4		$k = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,5 \text{ c};$ $T_2 = 0,01 \text{ c}$
5		$k = 1 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,5 \text{ c};$ $T_2 = 0,01 \text{ c};$ $T_3 = 0,1 \text{ c}$
6		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,1 \text{ c}^{-1};$ $T = 0,01 \text{ c};$ $\tau = 0,1 \text{ c}$
7		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 5 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,02 \text{ c};$ $T_2 = 1 \text{ c}$

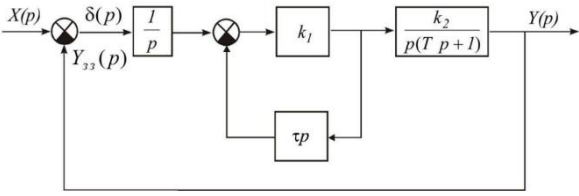
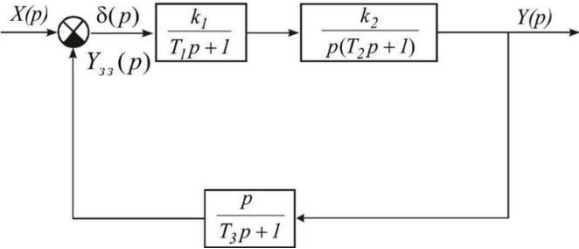
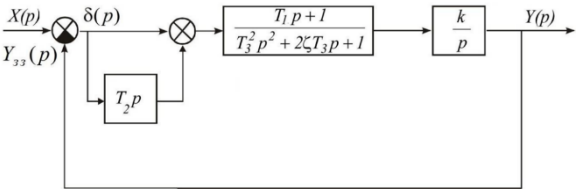
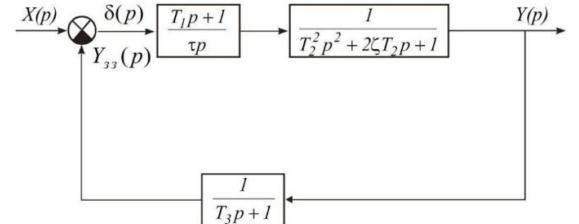
Продовження таблиці

1	2	3
8		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,5 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 0,05 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$
9		$k = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 2 \text{ c};$ $T_3 = 0,02 \text{ c};$ $T_4 = 0,01 \text{ c}$
10		$k_1 = 50 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 2 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$
11		$k = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,02 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c};$ $T_4 = 0,1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$

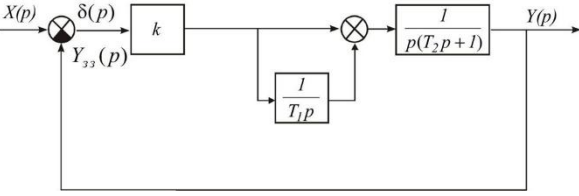
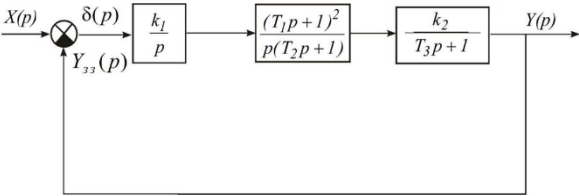
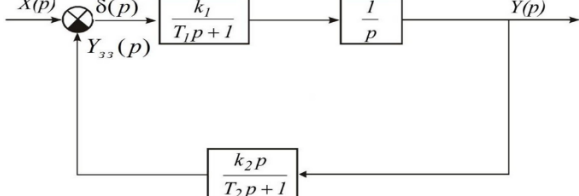
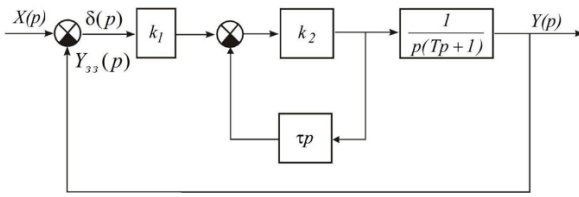
Продовження таблиці

1	2	3
12		$k = 1 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,5 \text{ c};$ $T_3 = 1 \text{ c};$ $T_4 = 0,01 \text{ c}$
13		$k = 1 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,5 \text{ c};$ $T_3 = 1 \text{ c};$ $T_4 = 0,01 \text{ c}$
14		$k_1 = 10 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,5 \text{ c}^{-1}$ $T_1 = 0,01 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$
15		$k = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c};$ $\tau = 0,01 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$

Продовження таблиці

1	2	3
16		$k_1 = 0,1 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 10 \text{ c}^{-1};$ $\tau = 0,2 \text{ c};$ $T = 0,1 \text{ c}$
17		$k_1 = 2 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 50 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$
18		$k = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,01 \text{ c};$ $T_2 = 0,02 \text{ c};$ $T_3 = 1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$
19		$T_1 = 0,01 \text{ c};$ $T_2 = 1 \text{ c};$ $\tau = 0,1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$

Продовження таблиці

1	2	3
20		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,02 \text{ c}$
21		$k_1 = 2 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 5 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,05 \text{ c};$ $T_2 = 0,25 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$
22		$k_1 = 100 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,1 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,02 \text{ c}$
23		$k_1 = 100 \text{ c}^{-1};$ $k_2 = 0,1 \text{ c}^{-1};$ $\tau = 0,1 \text{ c};$ $T = 0,2 \text{ c}$



Продовження таблиці

1	2	3
24		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 5 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c};$ $T_4 = 0,02 \text{ c}$
25		$k = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 5 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c};$ $T_4 = 0,02 \text{ c}$

**Завдання 7.** Визначити усталені помилки САК, якщо задано передаточну функцію розімкненої системи й вигляд задавального впливу, відповідно до варіанта.

Варіант	Передатна функція розімкненої системи	Значення сталої часу, коефіцієнта підсилення	Заданий вхідний вплив
1	2	3	4
1	$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$k_{\text{роз}} = 100 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 5 \text{ с};$ $T_2 = 0,01 \text{ с}^{-1};$ $T_3 = 10 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 5 + 10t +$ $+ 0,2t^2$
2	$W_{\text{роз}}(p) =$ $= \frac{k_{\text{роз}}(T_1 p + 1)}{p^2(T_2 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T\zeta p + 1)}$	$k_{\text{роз}} = 10 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ с};$ $T_2 = 5 \text{ с};$ $T_3 = 0,01 \text{ с};$ $\zeta = 0,7$	$x(t) = 2,5t^2$
3	$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$k_{\text{роз}} = 10 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ с};$ $T_2 = 0,05 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 1,5 \sin 0,5t$
4	$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$k_{\text{роз}} = 60 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ с};$ $T_2 = 10 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 100 + 50t$
5	$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}(T_1 p + 1)^2}{p(T_2^2 p^2 + 2T_2 \zeta p + 1)}$	$k_{\text{роз}} = 50 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 0,5 \text{ с};$ $T_2 = 1 \text{ с};$ $\zeta = 0,7$	$x(t) =$ $= 0,5t + 2t^2$
6	$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}} p(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$k_{\text{роз}} = 0,1 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ с};$ $T_2 = 10 \text{ с};$ $T_3 = 0,2 \text{ с}$	$x(t) = 10$
7	$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}} p(T_1 p + 1)}{p^2(T_2 p + 1)^2}$	$k_{\text{роз}} = 30 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 2 \text{ с};$ $T_2 = 0,01 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 5t + 0,7t^2$
8	$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)^2}$	$k_{\text{роз}} = 25 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 5 \text{ с};$ $T_2 = 0,1 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 1,5 \sin 0,5t$

Продовження таблиці

1	2	3	4
9	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 50 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,2 \text{ c};$ $T_2 = 1 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c}$	$x(t) =$ $= 5 + 1,5t$
10	$W_{\text{поз}}(p) =$ $= \frac{k_{\text{поз}}}{p^2(T_1 p + 1)(T_2^2 p^2 + 2T_2 \zeta p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 10 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,2 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$	$x(t) =$ $= 0,75t$
11	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 100 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 0,7 \text{ c};$ $T_3 = 1 \text{ c};$ $T_4 = 0,05 \text{ c}$	$x(t) =$ $= 3,5 + 15t$
12	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)^2}{p^2(T_2 p + 1)^2}$	$k_{\text{поз}} = 70 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 2 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c}$	$x(t) =$ $= 1,5t +$ $+ 10t^2$
13	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}} p}{(T_1 p + 1)^2(T_2 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 20 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,05 \text{ c}$	$x(t) = 0,5$
14	$W_{\text{поз}}(p) =$ $= \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \zeta p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 15 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ c};$ $T_2 = 5 \text{ c};$ $T_3 = 0,01 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$	$x(t) =$ $= 0,25 +$ $+ 1,5t$
15	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)}{p^2(T_2 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 50 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 5 \text{ c};$ $T_2 = 0,05 \text{ c}$	$x(t) =$ $= 15t + 8t^2$
16	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)^2}$	$k_{\text{поз}} = 120 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,5 \text{ c};$ $T_2 = 0,01 \text{ c}$	$x(t) =$ $= 30 + 50t$
17	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)}{p(T_2^2 p^2 + 2T_2 \zeta p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 25 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ c};$ $T_2 = 0,1 \text{ c};$ $\zeta = 0,7$	$x(t) =$ $= 0,5 \sin 0,3t$
18	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 40 \text{ c}^{-1};$ $T_1 = 0,2 \text{ c};$ $T_2 = 5 \text{ c};$ $T_3 = 0,05 \text{ c}$	$x(t) =$ $= \sin 0,1t$

Продовження таблиці

1	2	3	4
19	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)^2}$	$k_{\text{поз}} = 1 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ с};$ $T_2 = 2 \text{ с};$ $T_3 = 0,01 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 8 + 0,1t$
20	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p^2(T_3 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 10 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 0,2 \text{ с};$ $T_2 = 0,01 \text{ с};$ $T_3 = 0,05 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 0,5t +$ $+ 0,1t^2$
21	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 100 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 0,1 \text{ с};$ $T_2 = 1 \text{ с};$ $T_3 = 0,01 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 0,2 \sin 0,8t$
22	$W_{\text{поз}}(p) =$ $\frac{k_{\text{поз}}}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 10 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ с};$ $T_2 = 0,01 \text{ с};$ $T_3 = 0,1 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 5t +$ $+ 0,01t^2$
23	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)}{p^2(T_2 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 50 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 1 \text{ с};$ $T_2 = 0,05 \text{ с};$ $T_3 = 1 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 5 \sin 2t$
24	$W_{\text{поз}}(p) = \frac{k_{\text{поз}}(T_1 p + 1)^2}{p(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 10 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 0,01 \text{ с};$ $T_2 = 0,05 \text{ с};$ $T_3 = 1 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 15 + 3t$
25	$W_{\text{поз}}(p) =$ $\frac{k_{\text{поз}}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$k_{\text{поз}} = 20 \text{ с}^{-1};$ $T_1 = 0,01 \text{ с};$ $T_2 = 0,05 \text{ с};$ $T_3 = 0,01 \text{ с}$	$x(t) =$ $= 1,5 \sin 10t$

**Завдання 8.** Оцінити стійкість САК, якщо задано передатну функцію розімкненої системи, відповідно до варіанта за критерієм Гурвіца – варіанти 1–12; за критерієм Михайлова – варіанти 13–25.

Варіант	Передатна функція розімкненої системи
<b>1</b>	<b>2</b>
1	$W_{роз}(p) = \frac{10}{(0,02p+1)(p+1)(0,5p+1)}$
2	$W_{роз}(p) = \frac{100(0,1p+1)}{p(0,02p+1)(p+1)}$
3	$W_{роз}(p) = \frac{30(p+1)}{p^2(0,01p+1)}$
4	$W_{роз}(p) = \frac{10(0,5p+1)(p+1)}{(0,01p^2+0,12p+1)(0,5p+1)}$
5	$W_{роз}(p) = \frac{10(0,1p+1)}{p(0,05p^2+0,1p+1)}$
6	$W_{роз}(p) = \frac{(0,02p+1)(0,01p+1)}{(0,05p^2+0,12p+1)(0,02p+1)}$
7	$W_{роз}(p) = \frac{2(0,1p+1)^2}{p(p+1)(2p+1)}$
8	$W_{роз}(p) = \frac{10}{(0,02p+1)(p+1)(0,5p+1)}$
9	$W_{роз}(p) = \frac{30(0,1p+1)(5p+1)}{p^2(0,02p+1)}$
10	$W_{роз}(p) = \frac{20(0,5p+1)}{p(0,02p+1)(p+1)}$
11	$W_{роз}(p) = \frac{40(0,01p+1)}{(0,05p^2+0,12p+1)(0,02p+1)}$
12	$W_{роз}(p) = \frac{10(0,1p+1)}{(p+1)^2(0,05p+0,1)}$

Продовження таблиці

1	2
13	$W_{p03}(p) = \frac{10(0,5p+1)}{p(0,01p^2+0,12p+1)}$
14	$W_{p03}(p) = \frac{20(p+1)^2}{(0,01p^2+0,02p+1)(3p+1)}$
15	$W_{p03}(p) = \frac{30(3p+1)}{p(0,1p+1)(0,5p+1)}$
16	$W_{p03}(p) = \frac{15(0,1p+1)}{p^2(0,05p+1)}$
17	$W_{p03}(p) = \frac{10(0,1p+1)(5p+1)}{p(0,1p+1)(p+1)}$
18	$W_{p03}(p) = \frac{15(0,2p+1)(0,01p+1)}{(0,5p^2+0,1p+1)(0,05p+1)}$
19	$W_{p03}(p) = \frac{10}{(0,02p+1)(p+1)(0,5p+1)}$
20	$W_{p03}(p) = \frac{20(0,1p+1)^2}{p(p+1)(0,02p+1)}$
21	$W_{p03}(p) = \frac{100(0,1p+1)}{(p+1)^2(0,05p+0,1)}$
22	$W_{p03}(p) = \frac{50(0,1p+1)}{p(p+1)(0,01p+1)}$
23	$W_{p03}(p) = \frac{10(p+1)(0,5p+1)}{p^2(0,01p+1)}$
24	$W_{p03}(p) = \frac{40(p+1)}{p(0,01p+1)(2p+1)}$
25	$W_{p03}(p) = \frac{10(0,01p+1)}{(0,02p+1)(p+1)(0,15p+1)}$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія автоматичного керування»: навчальний посібник : у 2 ч. / А. П. Гуров, С. І. Ольшевський, О. О. Черно, Л. І. Бугрім. – Миколаїв : НУК, 2018. – Ч. 1. – 111 с.

2. Ладанюк А. П. Теорія автоматичного керування : курс лекцій / А. П. Ладанюк. – Київ : НУХТ, 2004. – 174 с.

3. Теорія автоматичного управління. Нелінійні та дискретні системи [Електронний ресурс] : навчальний посібник / О. Й. Штіфзон, П. В. Новіков. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 98 с. – Режим доступу : <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/47637>.

4. Теорія автоматичного управління : навчальний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. / О. Й. Штіфзон, П. В. Новіков, В. П. Бунь. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 144 с. – Режим доступу : <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41587>.

5. Худолей Г. М. Теорія автоматичного управління : конспект лекцій : у 2 ч. Ч. 1. Аналіз лінійних систем автоматичного управління / Г. М. Худолей. – Суми : Сумський державний університет, 2016. – 179 с.

6. Попович М. Г. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Київ : Либідь, 2007. – 656 с.

7. Теорія автоматичного управління. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Н. І. Бурау, Д. О. Півторак. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 57 с. – Режим доступу : <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42076>.

Електронне навчальне видання

**Леонтъєв** Петро Володимирович та ін.

# **ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

Навчальний посібник

За загальною редакцією П. В. Леонтъєва

Художнє оформлення обкладинки П. В. Леонтъєва  
Редакторка І. О. Кругляк  
Комп'ютерне верстання: П. В. Леонтъєв, С. В. Соколов

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 17,21. Обл.-вид. арк. 12,50.

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Харківська, 116, м. Суми, 40007

Свідоцтво про внесення суб'єкта господарювання до Державного реєстру видавців,  
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 8193 від 15.10.2024.