УДК 519.2

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОГО ТРЕНДУ ЗА УМОВ ДІЇ ЕКСЦЕСНИХ ЗАВАД МЕТОДОМ МАКСИМІЗАЦІЇ ПОЛІНОМА

С.В. Заболотній, В.О. Селін
Черкаський державний технологічний університет

Розглянуто синтез алгоритмів оцінювання параметрів лінійного тренду на фоні завад із симетричним розподілом із застосуванням методу максимізації полінома. Досліджено точнісні характеристики оцінок, що отримуються, та проведено порівняльний аналіз їх ефективності з методом найменших квадратів.

ВСТУП

Часові ряди, які трапляються в багатьох дослідженнях, поряд з флуктуаціями і нерегулярностями мають деяку загальну тенденцію змін, яку в загальному випадку називають трендом. У багатьох ситуаціях, коли теорія не може назвати явний вид тренду як функції часу, тим не менш існує можливість наблизити тренд поліномом достатньо низької степені. В найпростішому випадку рівномірного зростання або спадання значень ряду адекватне представлення тренда може дати поліном першої степені, тобто лінійна функція [1].

Лінійний тренд є однією із найпоширеніших моделей, яка трапляється в прикладних задачах різноманітних галузей. Зокрема, в радіофізиці тренд застосовується для апроксимації і прогнозу ходу добової кривої напруженості поля на дальніх іоносферних трасах та для контролю стану озонного шару; в радіотехніці - при оцінюванні завадостійкості алгоритмів опрацювання сигналів в системах, що моделюються; в автоматичному управлінні – для корекції керуючого впливу на систему на підставі аналізу її нестаціонарного стану; в економічних розрахунках - при виділенні основних тенденцій розвитку ринків і видаленні результатів дії випадкових чинників і т.д.

Серед комплексу проблем, що трапляються при опрацюванні нестаціонарних сигналів, важливою є задача інтерполяції (відновлення) значень корисного сигналу (тренду), що береться на тлі завад. Одним з можливих шляхів її розв'язання є відновлення форми сигналу на основі оцінювання його параметрів. При цьому традиційним способом розв'язання задачі оцінювання є застосування методу найменших квадратів. Проте оцінки параметрів, які отримують у цьому випадку, є ефективними лише тоді, коли випадкова складова розподілена за нормальним (гаусовим) законом [2].

Відповідно проблема оцінювання параметрів лінійного тренду за умови дії негаусових завад залишається актуальною.

ПОСТАВЛЕННЯ ЗАДАЧІ

Нехай спостерігається випадковий процес з дискретним часом, який можна записати у вигляді

$$y_n = S_n + x_n, \quad n \in \overline{0,(N-1)}, \tag{1}$$

де S_n – відліки систематичної складової (корисного сигналу, тренду); x_n – адитивна завадова складова; N – об'єм вибірки.

До апріорної інформації належать два припущення:

– тренд добре апроксимується лінійною функцією, тобто $S_n = a_0 + a_1 nT$, де T – період дискретизації;

– x_n – некорельовані відліки симетрично-розподіленого негаусового (ексцесного) стаціонарного випадкового процесу, який описуються дисперсією χ_2 і кумулянтними 4-го γ_4 (коефіцієнтом ексцесу) та 6-го порядків γ_6.

Метою роботи є відшукання оцінок векторного параметру $\vartheta = \{a_0, a_1\}$ лінійного тренду за заданими вибірковими значеннями y_n об'єму N та аналіз їх точності. Для розв'язання поставленої задачі застосуємо метод максимізації полінома (метод Кунченко) [3] при степенях $s = 1-4$.

РЕЗУЛЬТАТИ

Оцінювання методом найменших квадратів

Як уже зазначалося, класичне розв'язання задачі оцінювання параметрів лінійного тренду, яка в такому поставленні є еквівалентною оцінюванню параметрів лінійної регресії, базується на застосуванні методу найменших квадратів. Результуючі оцінки тоді записуються [4] у вигляді

$$\hat{a}_1 = \frac{N\sum(nT)y_n - \sum nT \sum y_n}{N\sum(nT)^2 - \left[\sum(nT)\right]^2}, \quad \hat{a}_0 = \frac{\sum y_n - \hat{a}_1 \sum(nT)}{N}. \tag{2}$$

Для уніфікації та кращого сприйняття подальших результатів застосуємо такі спрощення:

$$\sum_{n=0}^{N-1} C = CN; \quad \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2}; \quad \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}. \tag{3}$$

Із урахуванням виразів (3), оцінки (2) набудуть такого вигляду:

$$\hat{a}_1 = \frac{6[2\sum n y_n - (N-1)\sum y_n]}{(N^2-1)NT}, \quad \hat{a}_0 = \frac{2[(2N-1)\sum y_n - 3\sum n y_n]}{N(N+1)}. \tag{4}$$

Оцінювання методом максимізації полінома при s=1

Лінійна оцінка векторного параметру $\vartheta = \{a_0, a_1\}$ методом максимізації полінома при мінімальній степені $s = 1$ знаходиться [3] із розв'язання системи двох рівнянь:

$$\sum_{n=0}^{N-1} k_{1a_j}^{(n)}(\vec{\vartheta})[y_n - S_n]\Big|_{\vec{\vartheta}=\hat{\vec{\vartheta}}} = 0; \quad j = 0,1 \tag{5}$$

де оптимальні коефіцієнти $k_{1a_0}^{(n)}(\vec{\vartheta})$ і $k_{1a_1}^{(n)}(\vec{\vartheta})$ визначаються як

$$k_{1a_j}^{(n)}(\vec{\vartheta}) = \frac{\frac{\partial}{\partial a_j} m_{1n}(\vec{\vartheta})}{F_{(1,1)n}(\vec{\vartheta})}, \qquad j = 0,1 \,,$$

де $m_{1n}(\vec{\vartheta})$ - початкові, а $F_{(i,j)n}(\vec{\vartheta}) = m_{(i+j)n}(\vec{\vartheta}) - m_{in}(\vec{\vartheta})m_{jn}(\vec{\vartheta})$ – так звані [3], кореляційні моменти випадкової послідовності y_n.

Знайшовши похідні початкових і кореляційні моменти, легко отримати кінцеві вирази для вагових коефіцієнтів рівнянь (5):

$$k_{1a_0}^{(n)}(\vec{\vartheta}) = \frac{1}{\chi_2}, \qquad k_{1a_1}^{(n)}(\vec{\vartheta}) = \frac{nT}{\chi_2}. \tag{6}$$

Після підстановки коефіцієнтів (6) у відповідні рівняння максимізації полінома (5), і з врахуванням співвідношень (3), система двох рівнянь для знаходження оцінок двох параметрів може бути записана у вигляді

$$\hat{a}_0 + \hat{a}_1 T \frac{N-1}{2} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_n\,, \qquad \hat{a}_0 \frac{N-1}{2} + \hat{a}_1 T \frac{(N-1)(2N-1)}{6} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} n y_n\,. \tag{7}$$

Розв’язуючи дану систему рівнянь методом Крамера, отримуємо в аналітичному вигляді оцінки параметрів тренду:

$$\hat{a}_0 = \frac{2[(2N-1)\sum y_n - 3\sum n y_n]}{N(N+1)}, \quad \hat{a}_1 = \frac{6[2\sum n y_n - (N-1)\sum y_n]}{(N^2-1)NT}. \tag{8}$$

Порівнюючи вирази (8) і (4), можемо констатувати їх цілковиту ідентичність, що свідчить про те, що оцінки, отримані методом максимізації полінома при $s = 1$, повністю збігаються з результатами, які отримуються методом найменших квадратів.

Дослідимо властивості цих оцінок.

Відповідно до методу максимізації полінома [3] для знаходження дисперсій оцінок параметрів спочатку необхідно сформувати матрицю кількості добутої інформації вигляду

$$J_{sN} = \begin{Vmatrix} J_{sN}^{(1,1)} & J_{sN}^{(1,2)} \\ J_{sN}^{(2,1)} & J_{sN}^{(2,2)} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Елементи цієї матриці в загальному вигляді визначаються як

$$J_{sN}^{(p,m)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{n=0}^{N-1} k_{i\vartheta_p}^{(n)}(a_0, a_1)\frac{\partial m_{in}(a_0, a_1)}{\partial \vartheta_m}. \tag{10}$$

Тоді асимптотичні дисперсії оцінок параметрів a_0 та a_1 при їх сумісному оцінювані будуть лежати на головній діагоналі варіаційної матриці оцінок, яка дорівнює оберненій матриці кількості добутої інформації, тобто

$$V_{sN} = J_{sN}^{-1}, \qquad \sigma^2_{(a_0)s} = V_{sN}^{(1,1)}, \qquad \sigma^2_{(a_1)s} = V_{sN}^{(2,2)}. \tag{11}$$

Використовуючи вирази (6) для коефіцієнтів $k_{1\vartheta_p}^{(n)}(a_0, a_1)$, $p = 1,2$, а також похідні моментів за відповідними параметрами, можна знайти елементи матриці кількості добутої інформації

$$J_{1N}^{(1,1)} = \frac{N}{\chi_2}, \; J_{1N}^{(1,2)} = J_{1N}^{(2,1)} = \frac{NT(N-1)}{2\chi_2}, \; J_{1N}^{(2,2)} = \frac{NT^2(N-1)(2N-1)}{6\chi_2}. \tag{12}$$

Знаючи елементи матриці кількості добутої інформації, на основі (11) легко знайти елементи варіаційної матриці оцінок, а відповідно і аналітичні вирази асимптотичних дисперсій оцінок параметрів a_0 та a_1:

$$\sigma^2_{(a_0)1} = \frac{2(2N-1)\chi_2}{N(N+1)}, \qquad \sigma^2_{(a_1)1} = \frac{12\chi_2}{NT^2(N^2-1)}. \tag{13}$$

Вирази вигляду (13) будемо використовувати далі для порівняння точнісних характеристик різних алгоритмів оцінювання параметрів тренду.

Оцінювання методом максимізації поліному при s=2

Сумісна оцінка параметрів a_0 та a_1 при другій степені стохастичного полінома обчислюється з розв'язання системи двох рівнянь вигляду:

$$\sum_{n=0}^{N-1} k_{1a_j}^{(n)}(\vec{\vartheta})[y_n - S_n] + \sum_{n=0}^{N-1} k_{2a_j}^{(n)}(\vec{\vartheta})[y_n^2 - S_n^2 - \chi_2]\Big|_{\vec{\vartheta}=\hat{\vec{\vartheta}}} = 0; \;\; j = 0,1. \tag{14}$$

Оптимальні коефіцієнти рівнянь системи (14) будуть мати вигляд

$$k_{1a_0}^{(n)}(a_0, a_1) = \frac{1}{\chi_2}, \quad k_{2a_0}^{(n)}(a_0, a_1) = 0. \tag{15}$$

$$k_{1a_1}^{(n)}(a_0, a_1) = \frac{nT}{\chi_2}, \quad k_{2a_1}^{(n)}(a_0, a_1) = 0. \tag{16}$$

Враховуючи той факт, що вагові коефіцієнти $k_{1\vartheta_p}^{(n)}(a_0, a_1)$, рівнянь максимізації полінома (5) і (14) збігаються, а коефіцієнти $k_{2\vartheta_p}^{(n)}(a_0, a_1)$, тотожні нулю, можна зробити висновок, що рівняння для знаходження оцінок при $s = 2$ будуть збігатися з оцінками, знайденими при $s = 1$ і з оцінками методу найменших квадратів. Відповідно однаковою буде і точність цих оцінок (величина їх дисперсій).

Оцінювання методом максимізації поліному при s=3

При степені полінома $s = 3$ оцінка векторного параметру $\vartheta = \{a_0, a_1\}$ знаходиться з розв'язку системи рівнянь максимізації поліному вигляду:

$$\sum_{n=0}^{N-1} k_{1a_j}^{(n)}(\vec{\vartheta})[y_n - S_n] + \sum_{n=0}^{N-1} k_{2a_j}^{(n)}(\vec{\vartheta})[y_n^2 - S_n^2 - \chi_2] + \\ + \sum_{n=0}^{N-1} k_{3a_j}^{(n)}(\vec{\vartheta})[y_n^3 - S_n^3 - 3S_n\chi_2]\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = 0; \quad j = 0,1 \tag{17}$$

Коефіцієнти 1-го рівняння описуються виразами:

$$k_{1a_0}^{(n)}(a_0, a_1) = \frac{(\gamma_6 + 12\gamma_4 + 6) - 3S_n^2\gamma_4}{\chi_2^2(\gamma_6 - \gamma_4^2 + 9\gamma_4 + 6)}, \quad k_{2a_0}^{(n)}(a_0, a_1) = \frac{3S_n\gamma_4}{\chi_2^2(\gamma_6 - \gamma_4^2 + 9\gamma_4 + 6)},$$

$$k_{3a_0}^{(n)}(a_0, a_1) = -\frac{\gamma_4}{\chi_2^2(\gamma_6 - \gamma_4^2 + 9\gamma_4 + 6)}. \tag{18}$$

Коефіцієнтів 2-го рівняння можуть бути подані через коефіцієнти 1-го таким чином:

$$k_{ia_1}^{(n)}(a_0, a_1) = k_{ia_0}^{(n)}(a_0, a_1)nT, \quad i = \overline{1,3} \tag{19}$$

З'ясуємо, яку точність мають нові оцінки.

Використовуючи вагові коефіцієнти вигляду (18) і (19) на основі формули (10), знайдемо елементи матриці кількості добутої інформації при $s = 3$:

$$J_{3N}^{(1,1)} = \frac{N}{\chi_2}q_3, \quad J_{3N}^{(1,2)} = J_{3N}^{(2,1)} = \frac{NT(N-1)}{2\chi_2}q_3,$$

$$J_{3N}^{(2,2)} = \frac{NT^2(N-1)(2N-1)}{6\chi_2}q_3 \tag{20}$$

де $q_3 = [1 + \frac{9\gamma_4^2}{\gamma_6 - \gamma_4^2 + 9\gamma_4 + 6}]$.

Порівнюючи вирази вигляду (20) і (12), можемо відзначити, що кількість добутої інформації при $s = 3$ змінюється у порівнянні з $s = 1$ на величину, яка визначається множником у квадратних дужках.

Як і раніше, знаючи елементи матриці кількості добутої інформації J_{3N}, легко знайти варіаційну матрицю V_{3N} оцінок, діагональні елементи якої визначають величину асимптотичних дисперсій оцінок $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$:

$$\sigma_{(a_0)3}^2 = \frac{2(2N-1)\chi_2}{N(N+1)}g_3, \quad \sigma_{(a_1)3}^2 = \frac{12\chi_2}{NT^2(N^2-1)}g_3, \tag{21}$$

де $g_3 = 1 - \frac{\gamma_4^2}{\gamma_6 + 9\gamma_4 + 6}$.

З виразів (21) і (22) видно, що на відміну від випадку $s=2$, при степені полінома $s=3$ дисперсія оцінок зменшується щодо дисперсії методу найменших квадратів і залежить від величини кумулянтних коефіцієнтів γ_4 та γ_6.

На рис.1 наведені графіки залежності коефіцієнта зменшення дисперсії g_3 від коефіцієнта ексцесу γ_4 при фіксованих значеннях γ_6. Зазначимо, що діапазон зміни кумулянтних коефіцієнтів обмежено їх областю допустимих значень [3]. Наведені залежності ілюструють ступінь ефективності оцінок параметрів a_0 і a_1, які знаходяться методом максимізації полінома при $s=3$ щодо класичних оцінок, знайдених за допомогою методу найменших квадратів. Аналізуючи ці залежності, можна зробити висновок, що точність обох методів збігається лише в одному випадку, коли завада є гаусовою (при $\gamma_4=\gamma_6=0$). При збільшенні ступеня негаусовості, тобто величини кумулянтних коефіцієнтів, точність оцінок зростає. Особливо значним стає це зростання (дисперсія оцінок асимптотично прагне до нуля) при наближенні величини кумулянтних коефіцієнтів до меж своїх областей допустимих значень.

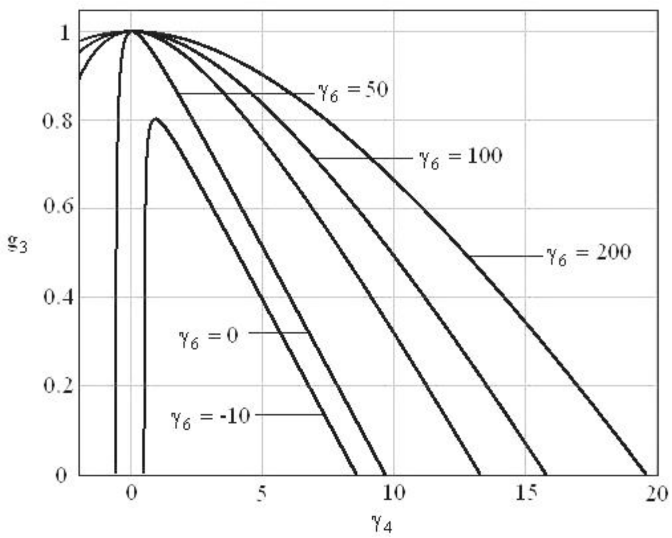

Рисунок 1 – Залежності коефіцієнта зменшення дисперсії g_3 від параметрів ексцесної завади

Оцінювання методом максимізації полінома при s=4

Результати досліджень, отримані при застосуванні четвертої степені, показують, що алгоритми оцінювання при степенях $s=3$ і $s=4$ збігають, а відповідно однаковими є і величини дисперсій цих оцінок. Як і у випадку з еквівалентністю оцінок $s=1$ і $s=2$ подібна властивість обумовлена тотожністю нулю парних оптимальних коефіцієнтів рівнянь максимізації полінома, що є наслідком рівності нулю непарних початкових моментів ексцесних випадкових величин з симетричним розподілом.

ВИСНОВКИ

Головним результатом проведених досліджень є отримання принципово нового способу знаходження оцінок параметрів лінійного тренду в умовах дії завад із симетричним розподілом. Нелінійні оцінки, отримані із застосуванням методу максимізації полінома, характеризуються підвищеною, у порівнянні з класичними оцінками методу найменших квадратів, точністю. Зменшення дисперсії оцінок відбувається лише у тому випадку, коли завадова складова має розподіл, відмінний від нормального. Фізичний зміст зростання точності полягає у оптимальному врахуванні тонкої структури завади у вигляді апріорних значень кумулянтних коефіцієнтів вищих порядків, що досягається за рахунок додаткових нелінійних перетворень і деякого ускладнення алгоритму оцінювання.

SUMMARY

ESTIMATION OF LINEAR TREND PARAMETERS AT THE ACTION OF KURTOSIS NOISES BY THE METHOD OF POLYNOMIAL MAXIMIZATIONS

S.V. Zabolotnyi, V.O. Selin

The synthesis of algorithms of estimation linear trend parameter on the background of noises with symmetrical distribution with the use of the Method of Polynomial Maximizations is considered. Precise features of received estimation are researched and comparative analysis of their efficiency with Least Square Method is made.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / Под ред. Ю.К. Беляева. – М.: Мир, 1976 – 609 с.
2. Дж. Бендат, А. Пирсол. Прикладной анализ случайных данных / Под ред. И.Н. Коваленко. – М.: Мир, 1989. – 358 с.
3. Кунченко Ю.П. Полиномиальные оценки параметров, близких к гауссовским случайным величинам. Часть 1. Стохастические полиномы, их свойства и применение для нахождения оценок параметров. – Черкассы: ЧИТИ, 2001. – 133 с.
4. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М: Наука, 1985. – 640 с.

С.В. Заболотній, канд. техн. наук, Черкаський державний технологічний університет;
В.О. Селін, аспірант, Черкаський державний технологічний університет

Надійшла до редакції 6 червня 2007 р.