

УДК 519.711/.854

СИНТЕЗ ДВОИЧНЫХ СЧЕТЧИКОВ ГРЕЯ

А.Я. Белецкий, Е.А. Белецкий

Национальный авиационный университет, г. Киев

Приведена методика аналитического вычисления функций возбуждения JK-триггеров n-разрядных двоичных счетчиков Грея.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Коды Грея, предложенные в 1953 году в ответ на запросы инженерной практики относительно построения оптимальных по критерию минимума ошибки неоднозначности преобразователей типа “угол-код” [1], на заре своего появления привлекли к себе внимание не только исследователей-математиков, но и широкого круга разработчиков разнообразной электронной аппаратуры. Отличительная особенность кодов Грея состоит в том, что в двоичном пространстве (или в двоичной системе счисления) при переходе от изображения одного числа к изображению соседнего старшего или соседнего младшего числа происходит изменение цифр (1 на 0 или наоборот) только в одном разряде числа. Такие коды относят к группе двоичных кодов с единичным расстоянием по Хэммингу [2]. Код Грея не единственный в этой группе, но его применение в технике связи [3], вычислительной технике и цифровых динамических системах [4], цифровой обработки сигналов [5], теории помехоустойчивого кодирования [6] и в других областях становилось предпочтительным в силу ряда причин, среди которых отметим следующие. Во-первых, смена значений в каждом разряде при переходе от одной кодовой комбинации к другой происходит вдвое реже, чем в простом коде. Это свойство позволяет повысить быстродействие счетчиков, основанных на преобразованиях Грея, или при том же быстродействии достигать более высокой точности кодирования, чем с использованием простого кода. Во-вторых, при сложении двух соседних кодовых комбинаций по модулю два образуется число, содержащее всего лишь одну единицу, вне зависимости от числа разрядов исходной кодовой последовательности, что может быть использовано, в частности, для контроля работы счетчиков Грея.

Основная задача, достижение которой ставится в данной работе, состоит в разработке простых аналитических соотношений, необходимых для синтеза функций возбуждения JK-триггеров, выбранных в качестве элементов построения многоразрядных двоичных счетчиков Грея.

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

К алгоритмам функционирования двоичных счетчиков Грея приходим на основании достаточно простых логических рассуждений. Составим таблицу четырехразрядных кодов Грея (табл. 1), в которой приняты обозначения: Дсч – десятичные числа; Двч – двоичные числа; КГ – прямой код Грея, отвечающий выбранному Двч.

Таблица 1

Дсч	Двч	КГ	Дсч	Двч	КГ
0	0000	0000	8	1000	1100
1	0001	0001	9	1001	1101
2	0010	0011	10	1010	1111
3	0011	0010	11	1011	1110
4	0100	0110	12	1100	1010
5	0101	0111	13	1101	1011
6	0110	0101	14	1110	1001
7	0111	0100	15	1110	1000

Введем ряд обозначений. Пусть $G^{(i)}$ – двоичный n -разрядный код Грея некоторого десятичного числа, который образован в счетчике Грея на i -м шаге, причем

$$G^{(i)} = g_{n-1} g_{n-2} \dots g_k 1_{k-1} 0_{k-2} \dots 0_0, \quad (1)$$

где g – бинарная величина, т. е. $g \in [0, 1]$. Соотношением (1) задано, что первая единица находится в $(k-1)$ -м разряде счетчика. Обозначим дополнительно через D_i число единиц, содержащихся в двоичной кодовой комбинации $G^{(i)}$.

Из анализа данных табл. 1 легко приходим к таким выводам относительно суммирующих счетчиков (к вычитающим счетчикам Грея обратимся несколько позже). Во-первых, если на некотором i -м шаге все разряды счетчика содержат нечетное число единиц, причем первая единица кодовой комбинации $G^{(i)}$ находится в $(k-1)$ -м разряде, то на $(i+1)$ -м шаге состояние k -го разряда счетчика обновляется по правилу

$$g_k^{(i+1)} = g_k^{(i)} \oplus 1, \quad (2)$$

где \oplus есть оператор сложения по mod 2, а состояния остальных разрядов сохраняются неизменными. Верхние индексы в преобразовании (2) означают номер шага счета. И, во-вторых, если на i -м шаге параметр D_i является нечетным числом, то в кодовой комбинации $G^{(i+1)}$ происходит изменение только в нулевом разряде кода $G^{(i)}$, т.е.

$$g_0^{(i+1)} = g_0^{(i)} \oplus 1. \quad (3)$$

Выражения (2) и (3) позволяют записать преобразования в суммирующем счетчике в виде системы равенств

$$G_s^{(i+1)} = \begin{cases} G_s^{(i)} \oplus 1_0, & \text{если } D_i - \text{четно}; \\ G_s^{(i)} \oplus 1_k, & \text{если } D_i - \text{нечетно}, \end{cases} \quad (4)$$

в которых нижний индекс s означает, что данный алгоритм относится к суммирующему счетчику Грея, а индексы 0 и k определяют номера разрядов кода $G^{(i)}$, в которые на $(i+1)$ -м шаге добавляется (по схеме XOR) единица.

Легко убедиться в том (обратившись, например, к табл. 1), что для вычитающего счетчика Грея (здесь мы используем нижний индекс r)

$$G_r^{(i+1)} = \begin{cases} G_r^{(i)} \oplus 1_0, & \text{если } D_i - \text{ нечетно ;} \\ G_r^{(i)} \oplus 1_k, & \text{если } D_i - \text{ четно .} \end{cases} \quad (5)$$

Соотношениями (2) – (5) мы отметили важнейшую особенность счетчиков Грея, которая состоит в том, что вне зависимости от порядка разрядности n на каждом шаге счета происходит изменение состояния только в одном разряде счетчика, что обеспечивает возможность достичь существенно большее быстродействие, чем в счетчиках, основанных на простой двоичной системе счисления.

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ СЧЕТЧИКОВ ГРЕЯ

В качестве элементов памяти счетчиков Грея выберем широко используемые для этих целей JK -триггеры, матрица переходов которых отображена в табл. 2.

Таблица 2

$Q \rightarrow Q^+$		J	K
0	0	0	–
0	1	1	–
1	0	–	1
1	1	–	0

Воспользовавшись табл. 2, составим кодированную таблицу переходов (табл. 3) суммирующего двухразрядного счетчика Грея.

Таблица 3

Z	Q_2	Q_1	Q_2^+	Q_1^+	J_2	K_2	J_1	K_1
0	0	0	0	1	0	–	1	–
1	0	1	1	1	1	–	–	0
2	1	1	1	0	–	0	–	1
3	1	0	0	0	–	1	0	–

Карты Карно для функций возбуждения первого триггера показаны на рис. 1 и 2.

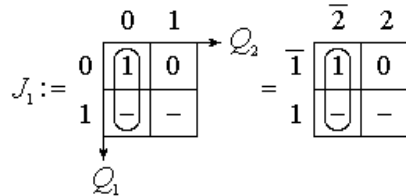


Рисунок 1

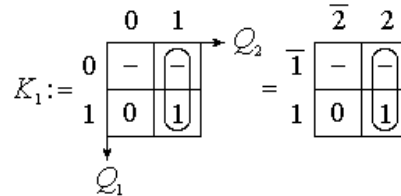


Рисунок 2

В дальнейшем будем пользоваться правыми формами карт Карно без указания их осей координат. Минимальные дизъюнктивные нормальные формы (МДНФ) функций, отвечающие диаграммам, представленным на рис. 1 и 2, имеют вид

$$J_1 = \bar{Q}_1 ; \quad K_1 = Q_2 .$$

Аналогичным образом для второго триггера получим

$$J_2 = Q_1 ; \quad K_2 = \bar{Q}_1 .$$

Обратимся к функциям возбуждения JK -триггеров трехразрядных счетчиков Грея. Кодированная таблица переходов такого счетчика приведена в табл. 4.

Таблица 4

Z	Q_3	Q_2	Q_1	Q_3^+	Q_2^+	Q_1^+	J_3	K_3	J_2	K_2	J_1	K_1
0	0	0	0	0	0	1	0	-	0	-	1	-
1	0	0	1	0	1	1	0	-	1	-	-	0
2	0	1	1	0	1	0	0	-	-	0	-	1
3	0	1	0	1	1	0	1	-	-	0	0	-
4	1	1	0	1	1	1	-	0	-	0	1	-
5	1	1	1	1	0	1	-	0	-	1	-	1
6	1	0	1	1	0	0	-	0	0	-	-	1
7	1	0	0	0	0	0	-	1	0	-	0	-

Опираясь на данные табл. 4, составим карты Карно для функций возбуждения первого триггера трехразрядного суммирующего счетчика Грея.

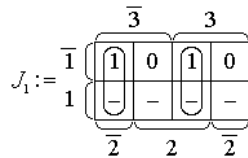


Рисунок 3

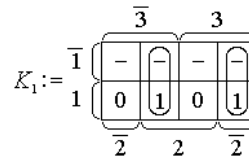


Рисунок 4

Склеивая булевские переменные карт Карно, представленных на рис. 3 и 4, получим

$$J_1 = \overline{32} \vee \overline{3} \overline{2} ; \quad K_1 = \overline{32} \vee \overline{32} . \quad (6)$$

Соотношения (6) легко могут быть свернуты, если воспользоваться известными в булевой алгебре эквивалентными преобразованиями

$$\begin{aligned} \overline{xy} \vee \overline{xy} &\equiv x \oplus y ; \\ \overline{xy} \vee x \overline{y} &= x \oplus y , \end{aligned} \quad (7)$$

первое из которых носит название *операции неравнозначности*, а второе – *равнозначности*.

На основании соотношений (6) и (7) получим

$$J_1 = \overline{3 \oplus 2} ; \quad K_1 = 3 \oplus 2 .$$

Для функций возбуждения второго триггера карты Карно выглядят следующим образом:

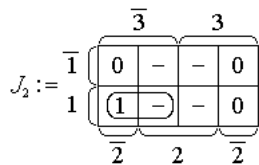


Рисунок 5

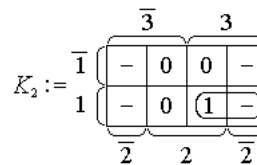


Рисунок 6

Согласно рис. 5 и 6 имеем

$$J_2 = \bar{3} \ 1 ; \quad K_2 = 3 \ 1 .$$

Для третьего триггера

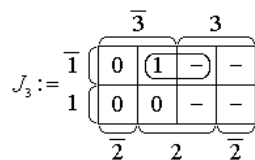


Рисунок 7

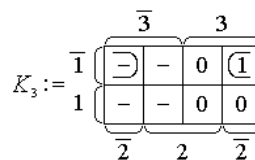


Рисунок 8

Следовательно,

$$J_3 = 2 \ \bar{1} ; \quad K_3 = \bar{2} \ \bar{1} .$$

Для установления закономерности формирования функций возбуждения JK -триггеров n -разрядных счетчиков вычислим эти функции для четырехразрядного двоичного суммирующего счетчика Грея классическим способом. Граф переходов состояний счетчика показан на рис. 9.

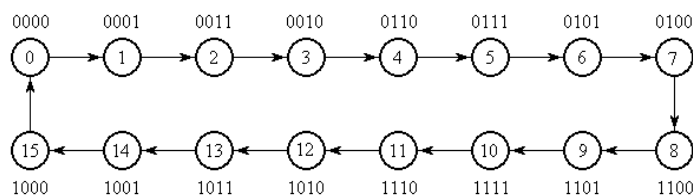


Рисунок 9

В соответствии с графом, представленным на рис. 9, и на основании данных, приведенных в табл. 2, составим кодированную таблицу переходов суммирующего счетчика Грея (табл. 5).

Таблица 5

Z	Q_4	Q_3	Q_2	Q_1	Q_4^+	Q_3^+	Q_2^+	Q_1^+	J_4	K_4	J_3	K_3	J_2	K_2	J_1	K_1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-	0	-	0	-	1	-
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	-	0	-	1	-	-	0
2	0	0	1	1	0	0	1	0	0	-	0	-	-	0	-	1
3	0	0	1	0	0	1	1	0	0	-	1	-	-	0	0	-
4	0	1	1	0	0	1	1	1	0	-	-	0	-	0	1	-
5	0	1	1	1	0	1	0	1	0	-	-	0	-	1	-	0
6	0	1	0	1	0	1	0	0	0	-	-	0	0	-	-	1
7	0	1	0	0	1	1	0	0	1	-	-	0	0	-	0	-
8	1	1	0	0	1	1	0	1	-	0	-	0	0	-	1	-
9	1	1	0	1	1	1	1	1	-	0	-	0	1	-	-	0
10	1	1	1	1	1	1	1	0	-	0	-	0	-	0	-	1
11	1	1	1	0	1	0	1	0	-	0	-	1	-	0	0	-
12	1	0	1	0	1	0	1	1	-	0	0	-	-	0	1	-
13	1	0	1	1	1	0	0	1	-	0	0	-	-	1	-	0
14	1	0	0	1	1	0	0	0	-	0	0	-	0	-	-	1
15	1	0	0	0	0	0	0	0	-	1	0	-	0	-	0	-

Для определения МДНФ функций возбуждения триггеров J_i и K_i ($i = \overline{1, 4}$) воспользуемся картами Карно для четырех переменных Q_i в форме, представленной на рис. 10.

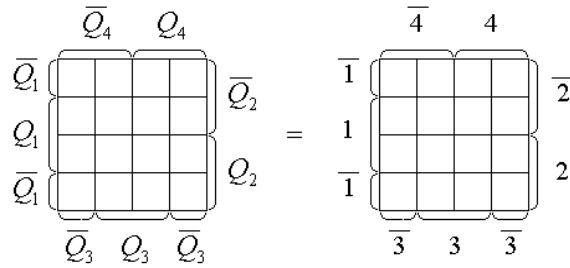


Рисунок 10

Карты Карно, к которым мы приходим на основании данных табл. 5 для функций J_1 и K_1 , показаны на рис. 11 и 12 соответственно.

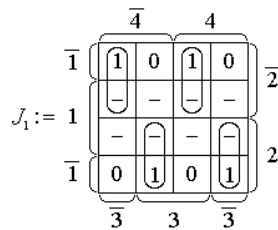


Рисунок 11

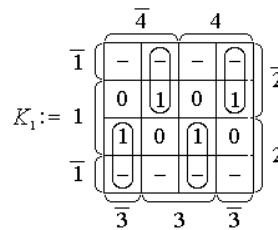


Рисунок 12

Выполнив склеивание переменных в картах Карно на рис. 11 и 12, приходим к выражениям

$$J_1 = \overline{432} \vee \overline{432} \vee \overline{432} \vee \overline{432} ;$$

$$K_1 = \overline{432} \vee \overline{432} \vee \overline{432} \vee \overline{432} ,$$

в которых для простоты вместо переменных Q_i или \overline{Q}_i оставлены лишь их индексы i и \overline{i} соответственно. Воспользовавшись преобразованиями (7), получим

$$J_1 = \overline{4(3 \oplus 2)} \vee 4(3 \oplus 2) = \overline{4 \oplus 3 \oplus 2} ; \quad (8)$$

$$K_1 = \overline{4(3 \oplus 2)} \vee 4(\overline{3 \oplus 2}) = 4 \oplus 3 \oplus 2 . \quad (9)$$

Карты Карно, соответствующие функциям возбуждения второго триггера четырехразрядного суммирующего счетчика Грея, показаны на рис. 13 и 14.

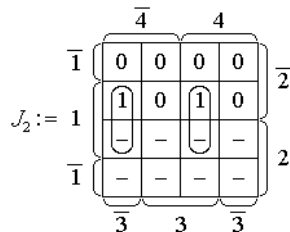


Рисунок 13

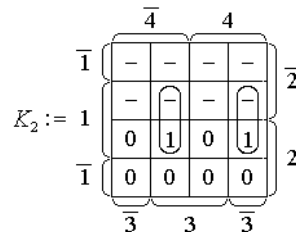


Рисунок 14

На основании рис. 13 и 14 составим булевские функции

$$J_2 = \overline{43}1 \vee 431 ;$$

$$K_2 = \overline{43}1 \vee 4\overline{3}1 ,$$

которые после элементарных преобразований по формулам (7) приводим к виду

$$J_2 = 1(\overline{43} \vee 43) = 1(\overline{4 \oplus 3}) ; \quad (10)$$

$$K_2 = 1(\overline{43} \vee 4\overline{3}) = 1(4 \oplus 3) . \quad (11)$$

И наконец, карты Карно для функций возбуждения третьего триггера суммирующего счетчика Грея представлены на рис. 15 и 16, а для функций J_4 и K_4 – на рис. 17 и 18 соответственно.

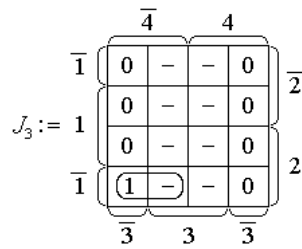


Рисунок 15

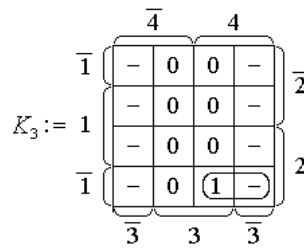


Рисунок 16

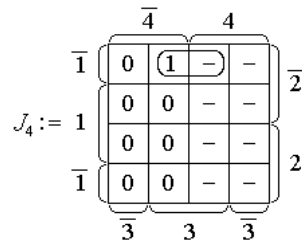


Рисунок 17

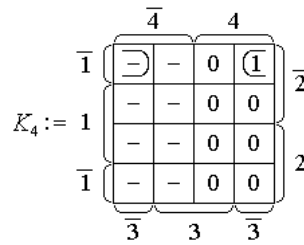


Рисунок 18

Аналитические выражения для функций возбуждения, карты Карно которых показаны на рис. 15–18, имеют вид

$$J_3 = \overline{4}2\overline{1} ; \quad K_3 = 42\overline{1} ; \quad (12)$$

$$J_4 = 3\overline{2}\overline{1} ; \quad K_4 = \overline{3}2\overline{1} , \quad (13)$$

Логическая схема четырехразрядного суммирующего двоичного счетчика Грея, построенная на основании соотношений (8)–(13), показана на рис. 19.

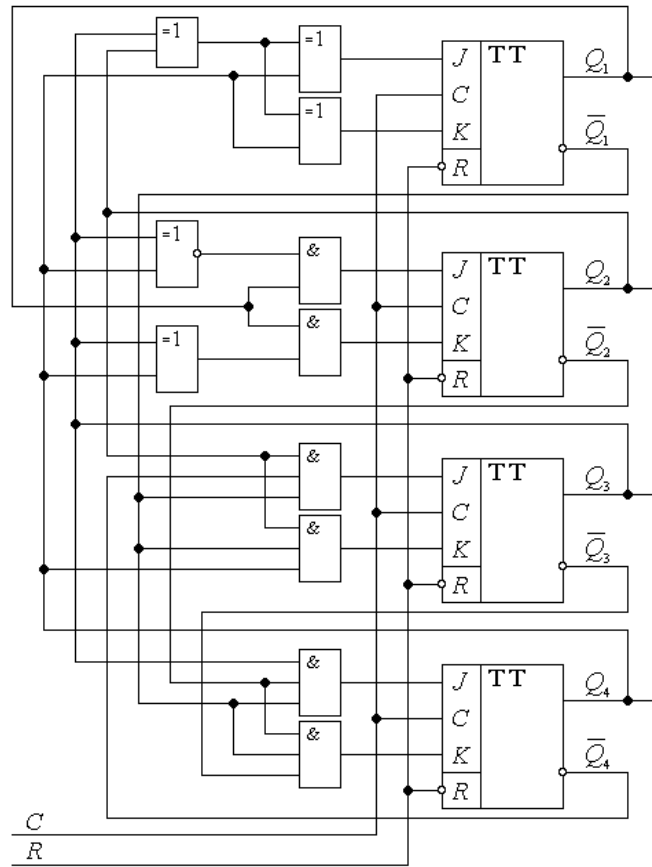


Рисунок 19

Переходим к синтезу комбинационной схемы четырехразрядного двоичного *вычитающего* счетчика Грея, граф переходов которого показан на рис. 20.

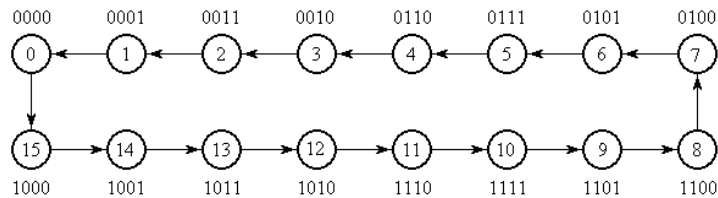


Рисунок 20

Граф вычитающего счетчика Грея (рис. 20) подобен графу суммирующего счетчика (рис. 9) с точностью до направления обхода узлов графа. Если в суммирующем счетчике узлы графа обходят (начиная с нулевого состояния) по часовой стрелке, то для вычитающего счетчика обход узлов графа осуществляется против часовой стрелки. Такая дисциплина обхода узлов состояний графа вычитающего счетчика Грея однозначно определяет его кодированную таблицу переходов (табл. 6). В качестве элементов памяти (как и для суммирующего счетчика) выбран *JK* - триггер, матрица переходов которого задана табл. 2.

Таблица 6

z_i	Q_4	Q_3	Q_2	Q_1	Q_4^+	Q_3^+	Q_2^+	Q_1^+	J_4	K_4	J_3	K_3	J_2	K_2	J_1	K_1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-	0	-	0	-	0	-
15	1	0	0	0	1	0	0	1	-	0	0	-	0	-	1	-
14	1	0	0	1	1	0	1	1	-	0	0	-	1	-	-	0
13	1	0	1	1	1	0	1	0	-	0	0	-	-	0	-	1
12	1	0	1	0	1	1	1	0	-	0	1	-	-	0	0	-
11	1	1	1	0	1	1	1	1	-	0	-	0	-	0	1	-
10	1	1	1	1	1	1	0	1	-	0	-	0	-	1	-	0
9	1	1	0	1	1	1	0	0	-	0	-	0	0	-	-	1
8	1	1	0	0	0	1	0	0	-	1	-	0	0	-	0	-
7	0	1	0	0	0	1	0	1	0	-	-	0	0	-	1	-
6	0	1	0	1	0	1	1	1	0	-	-	0	1	-	-	0
5	0	1	1	1	0	1	1	0	0	-	-	0	-	0	-	1
4	0	1	1	0	0	0	1	0	0	-	-	1	-	0	0	-
3	0	0	1	0	0	0	1	1	0	-	0	-	-	0	1	-
2	0	0	1	1	0	0	0	1	0	-	0	-	-	1	-	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-	0	-	0	-	-	1

Карты Карно для определения МДНФ функций возбуждения первого триггера вычитающего счетчика Грея, составленные на основании табл. 6, показаны на рис. 21 и 22 соответственно.

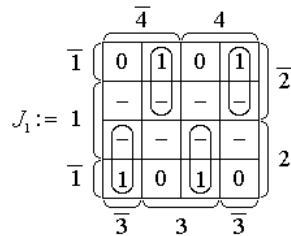


Рисунок 21

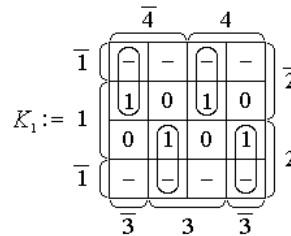


Рисунок 22

Выполнив склеивание переменных, получим

$$J_1 = \overline{432} \vee \overline{43\bar{2}} \vee 432 \vee 4\bar{3}\bar{2};$$

$$K_1 = \overline{43\bar{2}} \vee \overline{432} \vee 43\bar{2} \vee 4\bar{3}\bar{2}.$$

После элементарных преобразований по формулам (7) приходим к компактным выражениям

$$J_1 = 4 \oplus 3 \oplus 2; \tag{14}$$

$$K_1 = \overline{4 \oplus 3 \oplus 2}. \tag{15}$$

Карты Карно функций возбуждения второго триггера вычитающего счетчика представлены на рис. 23 и 24.

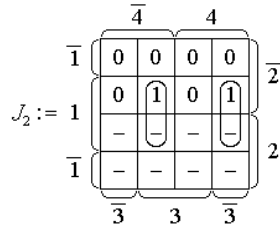


Рисунок 23

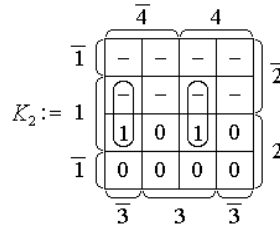


Рисунок 24

На основании рис. 23 и 24, а также системы преобразований (7), приходим к значениям

$$J_2 = \bar{4}31 \vee 4\bar{3}1 = 1(4 \oplus 3); \quad (16)$$

$$K_2 = \bar{4}\bar{3}1 \vee 431 = 1(\bar{4} \oplus 3). \quad (17)$$

На рис. 25–28 отображены карты Карно для функций возбуждения третьего и четвертого триггеров счетчика.

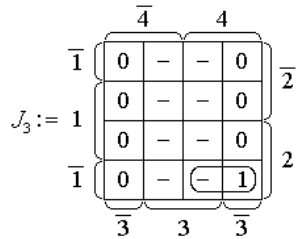


Рисунок 25

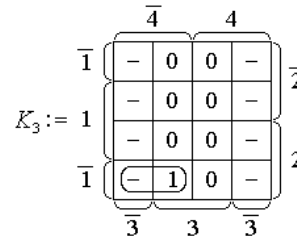


Рисунок 26

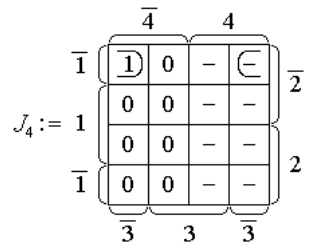


Рисунок 27

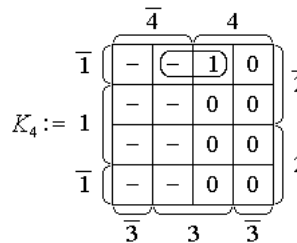


Рисунок 28

Функции возбуждения, отвечающие картам Карно, показанным на рис. 25–28, имеют вид

$$J_3 = 42\bar{1}; \quad K_3 = \bar{4}2\bar{1}; \quad (18)$$

$$J_4 = \bar{3}2\bar{1}; \quad K_4 = 32\bar{1}. \quad (19)$$

Из сопоставления функций возбуждения триггеров суммирующего четырехразрядного двоичного счетчика Грея, заданных выражениями (8)–(13), с соответствующими выражениями (14)–(19), определяющими функции возбуждения вычитающего счетчика, следует, что суммирующий счетчик может быть преобразован в вычитающий и наоборот. С этой целью достаточно перекоммутировать входы J и K в каждом триггере счетчика. Отмеченная особенность суммирующих и

вычитающих счетчиков предоставляет возможность достаточно легко построить реверсивные счетчики Грея, в которых требуемая коммутация входов J и K триггеров может осуществляться посредством стандартных мультиплексорных схем. Впрочем, предлагаемый вариант синтеза реверсивных счетчиков Грея находится в полном соответствии с полученными выше аналитическими соотношениями (4) и (5), отвечающими суммирующему и вычитающему счетчикам Грея соответственно.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ФУНКЦИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Попробуем установить закономерности в алгоритмах формирования функций возбуждения JK -триггеров n -разрядных двоичных счетчиков Грея. С этой целью сведем в единую табл. 7 выражения для J - и K -функций двух-, трех- и четырехразрядных счетчиков.

Таблица 7

Разрядность счетчика, (n)	Функции возбуждения JK -триггеров	
2	$J_1 = \bar{2}$	$K_1 = 2$
	$J_2 = 1$	$K_2 = \bar{1}$
3	$J_1 = \overline{3 \oplus 2}$	$K_1 = 3 \oplus 2$
	$J_2 = \bar{3} 1$	$K_2 = 3 1$
	$J_3 = 2 \bar{1}$	$K_3 = \bar{2} \bar{1}$
4	$J_1 = \overline{4 \oplus 3 \oplus 2}$	$K_1 = 4 \oplus 3 \oplus 2$
	$J_2 = (\overline{4 \oplus 3}) 1$	$K_2 = (4 \oplus 3) 1$
	$J_3 = \bar{4} 2 \bar{1}$	$K_3 = 4 2 \bar{1}$
	$J_4 = 3 \bar{2} \bar{1}$	$K_4 = \bar{3} \bar{2} \bar{1}$

Из анализа данных табл. 7 не представляет труда составить алгоритм синтеза функций возбуждения JK -триггеров двоичного n -разрядного счетчика Грея, который мы проиллюстрируем на примере $n=5$.

1 Функция возбуждения K_1 образуется в результате суммирования по $\text{mod } 2$ состояний Q_i всех JK -триггеров счетчика, за исключением состояния Q_1 первого триггера, т.е.

$$K_1 = 5 \oplus 4 \oplus 3 \oplus 2,$$

в то время как

$$J_1 = \overline{K_1} = \overline{5 \oplus 4 \oplus 3 \oplus 2}.$$

2 Функции возбуждения J_2 и K_2 образуются из функций J_1 и K_1 соответственно, при этом следует, во-первых, исключить из функций J_1 и K_1 состояние Q_2 второго триггера счетчика и, во-вторых, оставшиеся суммы умножить на состояние Q_1 первого триггера, т.е.

$$J_2 = (\overline{5 \oplus 4 \oplus 3}) 1;$$

$$K_2 = (5 \oplus 4 \oplus 3) 1.$$

3 Функции возбуждения J_3 и K_3 образуются из функций J_2 и K_2 соответственно, при этом необходимо, во-первых, исключить из функций J_2 и K_2 состояние Q_3 третьего триггера счетчика и, во-вторых, оставшиеся суммы умножить на состояние Q_2 второго триггера, а множитель Q_1 заменить на \bar{Q}_1 , т.е.

$$J_3 = (\bar{5} \oplus 4) \bar{2} \bar{1};$$

$$K_3 = (5 \oplus 4) \bar{2} \bar{1}.$$

4 Функции возбуждения J_4 и K_4 образуются из функций J_3 и K_3 соответственно, при этом следует, во-первых, исключить из функций J_3 и K_3 состояние Q_4 четвертого триггера счетчика и, во-вторых, оставшиеся суммы умножить на состояние Q_3 третьего триггера, а множитель Q_2 заменить на \bar{Q}_2 , т.е.

$$J_4 = \bar{5} \bar{3} \bar{2} \bar{1};$$

$$K_4 = 5 \bar{3} \bar{2} \bar{1}.$$

5 Функции возбуждения J_5 и K_5 последнего (пятого) триггера пятиразрядного счетчика Грея удовлетворяют соотношениям

$$J_5 = 4 \bar{3} \bar{2} \bar{1};$$

$$K_5 = \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{1}.$$

Придерживаясь изложенного алгоритма, составим, для примера, функции возбуждения JK -триггеров (табл. 8) восьмиразрядного счетчика Грея.

Таблица 8

$J_1 = 8 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 4 \oplus 3 \oplus 2$	$K_1 = 8 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 4 \oplus 3 \oplus 2$
$J_2 = (\bar{8} \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 4 \oplus 3) \bar{1}$	$K_2 = (8 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 4 \oplus 3) \bar{1}$
$J_3 = (\bar{8} \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 4) \bar{2} \bar{1}$	$K_3 = (8 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 4) \bar{2} \bar{1}$
$J_4 = (\bar{8} \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5) \bar{3} \bar{2} \bar{1}$	$K_4 = (8 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5) \bar{3} \bar{2} \bar{1}$
$J_5 = (\bar{8} \oplus 7 \oplus 6) \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{1}$	$K_5 = (8 \oplus 7 \oplus 6) \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{1}$
$J_6 = (\bar{8} \oplus 7) \bar{5} \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{1}$	$K_6 = (8 \oplus 7) \bar{5} \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{1}$
$J_7 = \bar{8} \bar{6} \bar{5} \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{1}$	$K_7 = 8 \bar{6} \bar{5} \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{1}$
$J_8 = 7 \bar{6} \bar{5} \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{1}$	$K_8 = \bar{7} \bar{6} \bar{5} \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{1}$

Полученные выражения для функций возбуждения JK -триггеров легко обобщаются для произвольного значения разрядности n бинарного счетчика Грея и приобретают такой вид:

$$J_1 = \bigoplus_{j=0}^{n-2} (n-j) = n \oplus (n-1) \oplus \dots \oplus 3 \oplus 2; \quad K_1 = \bigoplus_{j=0}^{n-2} (n-j) = n \oplus (n-1) \oplus \dots \oplus 3 \oplus 2;$$

$$J_2 = \left[\bigoplus_{j=0}^{n-3} (n-j) \right] \bar{1}; \quad K_2 = \left[\bigoplus_{j=0}^{n-3} (n-j) \right] \bar{1};$$

для $3 \leq i < n$

$$J_i = \left[\begin{array}{c} n-1-i \\ \oplus \\ j=0 \end{array} (n-j) \right] (i-1) \prod_{j=1}^{i-2} \bar{j} ; \quad K_i = \left[\begin{array}{c} n-1-i \\ \oplus \\ j=0 \end{array} (n-j) \right] (i-1) \prod_{j=1}^{i-2} \bar{j} ;$$

и наконец, для $i = n$ имеем

$$J_n = n \prod_{j=1}^{n-1} \overline{(n-j)} ; \quad K_n = \prod_{j=0}^{n-1} \overline{(n-j)} .$$

Таким образом, нами получены достаточно простые аналитические соотношения, позволяющие получать выражения для функций возбуждения JK -триггеров n -разрядных двоичных счетчиков Грея без привлечения кодированных таблиц переходов и карт Карно.

ВЫВОДЫ

Схемотехника преобразований Грея ограничивалась до настоящего времени в основном разработкой логических схем и соответствующей аппаратной реализацией устройств, осуществляющих прямое и обратное классическое преобразование Грея (в двоичном пространстве). На основании исследований, проведенных в данной работе, получены обобщенные аналитические соотношения, посредством которых в достаточно простой форме представлены преобразования в суммирующем и вычитающем счетчиках Грея. Опираясь на известные методы синтеза и минимизации булевских функций, в работе в законченной форме построена логическая схема четырехразрядного суммирующего счетчика Грея и показано, что посредством коммутации (инверсии) функций возбуждения J - и K - входов всех триггеров суммирующий счетчик преобразуется в вычитающий и наоборот. А это означает, что если суммирующий (вычитающий) счетчик Грея дополнить мультиплексором, то он может выполнять функции реверсивного счетчика.

SUMMARY

The technique of analytical function evaluation of excitation of JK-triggers of Gray n-digit binary counters is suggested.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gray F. Pulse code communication. – Pat USA. – № 2632058. – 1953.
2. Хэмминг Р. В. Теория кодирования и теория информации. – М.: Радио и связь, 1983. – 176 с.
3. Бернанд С. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
4. Бохмант Д., Постков Х. Двоичные динамические системы. – М.: Атомэнергоиздат, 1986. – 400 с.
5. Белецкий А. Я. Комбинаторика кодов Грея. – К.: КВЦ, 2003. – 506 с.
6. Бородин Л. Ф. Введение в теорию помехоустойчивого кодирования. – М.: Сов.радио, 1968. – 408 с.

А.Я. Белецкий, профессор, НАУ, г. Киев;
Е.А. Белецкий, аспирант, НАУ, г. Киев

Поступила в редакцию 10 октября 2007 г.