

**ЧИСЛЕННО–АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ  
ВОЛНОВОДНОЙ ВОЛНЫ НА Т–РАЗВЕТВЛЕННИИ В  
ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКОМ**

**В. Н. Мизерник\*, А. А. Шматько\*\***

*\*Харьковский научный физико-технологический центр,  
пл. Свободы, 2, 61077*

*\*\*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, 61077,*

*e-mail: [Alexandr.A.Shmatko@univer.kharkov.ua](mailto:Alexandr.A.Shmatko@univer.kharkov.ua)*

*В работе получено аналитическое решение задачи рассеяния волноводной волны на магнитодиэлектрическом слое, помещенном в Т-образном разветвлении волноводов, при произвольных параметрах задачи. Показано на основе полученного решения область допустимых параметров, при которых справедливо одноволновое и двухволновое приближения.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Как правило, при рассмотрении задач дифракции волн на различных неоднородностях основным результатом являлось получение системы линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов Фурье разложения искомого решения. В лучшем случае удавалось свести такое решение к бесконечной системе линейных уравнений 2-го рода, что обеспечивало единственность решения и получение относительно простого алгоритма численного решения системы линейных уравнений. Для ряда практических применений целесообразным являлось получение простых, хотя и приближенных, аналитических решений. Чаще такое приближение было связано с адекватным физическим явлением, например, с одноволновым распространением волн в соответствующей выделенной области. Однако распространение такого алгоритма на другие, важные для практики ситуации, испытывало значительные затруднения в силу громоздкости решения и неадекватного соответствия применяемого приближения с физической природой происходящих явлений. В настоящей работе с общих позиций без нарушения единственности решения получено аналитическое решение задачи с контролируемой наперед точностью для произвольных соотношений между длиной волны и параметрами задачи, которое непосредственно связано с известными резонансными явлениями в рассматриваемой структуре.

Резонансные явления, возникающие в различных СВЧ-трактах, а именно в области связи разветвленных волноводов, могут быть как полезными, так и вредными. Например, СВЧ-устройства на запертых модах могут использоваться для создания различных частотно-селективных устройств различного диапазона. Особую ценность эта возможность приобретает в миллиметровом диапазоне волн. В частности, такие явления используются для создания СВЧ-фильтров с диэлектрическими резонаторами и прогнозируемыми характеристиками. В этой связи важным представляется развитие численно-аналитических методов решения задач рассеяния и дифракции на различных неоднородностях в СВЧ-устройствах с целью адекватного физического рассмотрением и анализом происходящих волновых процессов теории с последующим конструированием новых СВЧ устройств различных частотных диапазонов, особенно для развития и освоения современной микроволновой техники.

В данной статье на примере одной задачи рассеяния волноводной волны на магнитоэлектрическом слое в Т-разветвлении волноводов продемонстрирован новый алгоритм нахождения аналитического решения задачи при произвольном соотношении между длиной волны и параметрами задачи с контролируемой наперед точностью.

## 1 ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Физическая модель Т-образного сочленения с магнитоэлектрическим слоем и заданными значениями магнитной и электрической проницаемостей  $\varepsilon$  и  $\mu$  представлена на рис. 1.

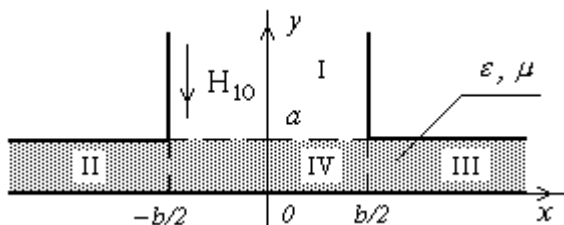


Рисунок 1 - Модель исследуемой волноводной структуры

Для определенности будем рассматривать задачу рассеяния  $H_{p0}$  волноводной волны на такой неоднородности в двумерном приближении ( $\partial/\partial z = 0$ ).

Первоначально необходимо найти строгое решение задачи рассеяния основной волноводной волны, набегающей на область связи Т-образного сочленения с материальной магнитоэлектрической средой [1],[2] и соответствующими граничными условиями на металлических поверхностях и границах выделенных частичных областей. Решение задачи представляется, как известно, в виде разложения по собственным функциям дифференциального оператора Гельмгольца в каждой выделенной области с заданными граничными условиями на металлических поверхностях и границах раздела областей. Использование граничных условий позволяет получить функциональные уравнения для неизвестных амплитуд волноводных волн, которые с помощью известной процедуры сводятся к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд собственных функций оператора Гельмгольца.

Согласно выбранного метода решения краевой задачи – метода частичных областей с выделением области связи [1], [3], решение уравнения Гельмгольца в подводящих волноводах (области I-III) представляется в виде:

$$E_z^I = \delta_n^p \psi_{pb}(x) e^{-i\gamma_{pb}(y-a)} + \sum_n S_{np}^{(11)-} \psi_{nb}(x) e^{i\gamma_{nb}(y-a)} ; \quad (1)$$

$$E_z^{II} = \sum_m S_{mp}^{(21)+} \psi_{ma}(y) e^{-i\Gamma_{ma}(x+b/2)} ; \quad (2)$$

$$E_z^{III} = \sum_m S_{mp}^{(31)+} \psi_{ma}(y) e^{i\Gamma_{ma}(x-b/2)} , \quad (3)$$

а в области связи – в виде суперпозиции полей, пересекающихся волноводов:

$$E_z^{IV} = \sum_m \psi_{ma}(y) \left[ S_{mp}^{(41)-} e^{-i\Gamma_{ma}x} + S_{mp}^{(41)+} e^{i\Gamma_{ma}x} \right] - \sum_n S_{np}^{(41)} \psi_{nb}(x) \frac{\sin(\Gamma_{nb}y)}{\sin(\Gamma_{nb}a)}, \quad (4)$$

где  $S_{np}^{(ij)}$ ,  $S_{mp}^{(ij)}$  – неизвестные амплитуды  $H_{n0}$  и  $H_{m0}$  волн соответственно в  $i$ -м плече тройника, возбуждаемые  $H_{p0}$ -волнами единичной амплитуды из  $j$ -го плеча;  $\psi_{ma}(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$ ,  $\psi_{nb}(x) = \sin\frac{m\pi}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right)$  – собственные функции электрического поля;  $\Gamma_{ma} = \sqrt{k^2\varepsilon\mu - (\pi m/a)^2}$ ,  $\Gamma_{nb} = \sqrt{k^2\varepsilon\mu - (\pi n/b)^2}$  – постоянные распространения волноводных волн в ферритовых областях II-IV;  $\gamma_{ma} = \sqrt{k^2 - (\pi m/a)^2}$ ;  $\gamma_{nb} = \sqrt{k^2 - (\pi n/b)^2}$  – постоянная распространения волноводных волн в незаполненной области I подводящего волновода В;  $\varepsilon$ ,  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости магнитоэлектрического слоя;  $a$ ,  $b$  – ширина главного и бокового волноводов соответственно;  $\delta_n^p$  – символ Кронекера;  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве. Суммирование ведется по всем положительным целым индексам.

Использование условий непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах частичных областей приводит к системе функциональных уравнений для неизвестных амплитуд волноводных волн. В результате применения метода Фурье получена система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) 2-го рода для нахождения амплитуд волноводных волн бокового волновода в области связи  $S_{np}^{(41)}$

$$S_{ip}^{(41)} - \frac{1}{W_{tb}} \sum_n Q_{tn} \left[ 1 + (-1)^n (-1)^t \right] S_{np}^{(41)} = \delta_t^p D_t. \quad (5)$$

где введены следующие обозначения:

$$W_{tb} = 0.5 b \left[ i\mu_{\perp} \gamma_{tb} - \Gamma_{tb} \operatorname{ctg}(\Gamma_{tb}a) \right]; \quad Q_{tn} = \sum_m \frac{1 - (-1)^t e^{i\Gamma_{ma}b}}{ia\Gamma_{ma}} L_{tm} K_{mn};$$

$$L_{tm} = (-1)^m \frac{m\pi}{a} \frac{t\pi}{b} \frac{1}{\left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 - \Gamma_{ma}^2}; \quad K_{mn} = (-1)^m \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \Gamma_{mb}^2}; \quad D_t = \frac{ib\mu \gamma_{tb}}{W_{tb}},$$

$$\alpha_{tn} = \begin{cases} \frac{2tn}{n^2 - t^2}, & t+n = 2, 4, 6, \dots; \\ 0, & t+n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

СЛАУ (5) пригодна для численного нахождения амплитудных коэффициентов волноводных волн  $S_{np}^{(41)}$  при произвольных материальных параметрах среды, соотношениях между длиной волны и

геометрическими размерами волноводов. Коэффициенты отражения  $S_{np}^{(11)-}$  и прохождения  $S_{mp}^{(21)+}$ ,  $S_{mp}^{(31)+}$  падающей волны определяются через коэффициенты системы уравнений (5)  $S_{np}^{(41)}$  по следующим пересчетным формулам:

$$S_{mp}^{(21)+} = \frac{1}{ia\Gamma_{ma}} \sum_n \left[ 1 - (-1)^n e^{i\Gamma_{ma}b} \right] K_{mn} S_{np}^{(41)};$$

$$S_{mp}^{(31)+} = \frac{1}{ia\Gamma_{ma}} \sum_n \left[ e^{i\Gamma_{ma}b} - (-1)^n \right] K_{mn} S_{np}^{(41)};$$

$$S_{np}^{(11)-} = S_{np}^{(41)} - \delta_n^p.$$

## 2 ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Поскольку алгоритм получения аналитического решения системы алгебраических уравнений второго рода практически одинаков для задач дифракции волн на различных неоднородностях в волноводных линиях передачи, то рассмотрим такую систему в обобщенном виде, а именно:

$$X_n + \sum_s X_s A_{ns} = \gamma_n, \quad (6)$$

где  $X_n$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению;  $A_{ns}$  — матричные коэффициенты,  $\gamma_n$  — известные коэффициенты задачи, связанные определенным образом с исходным падающим на неоднородность полем. Как правило, матричные коэффициенты  $A_{ns}$  представляют собой сумму произведений двух величин такого типа  $A_{ns} = \sum_m a_n^m b_s^m$ , каждый из которых зависит от одного из индексов  $n$  или  $s$  для каждого индекса суммирования  $m$ . Физически индекс  $m$  определяет одну из волноводных волн какой-либо выделенной области. При приближенном решении такой системы уравнений обычно ограничиваются одной распространяющейся волной, определяемой индексом  $m$  (для данной задачи  $m=1$ ). В этом случае система становится вырожденной ( $A_{ns} = a_n^1 b_s^1$ ), решение которой может быть найдено в аналитическом виде. Для нахождения решения исходной системы уравнений в общем виде воспользуемся следующим приемом. Перепишем данную систему уравнений (6) в другом виде

$$X_n + \sum_s X_s \sum_m a_n^m b_s^m = X_n + \sum_m a_n^m \sum_s X_s b_s^m = \gamma_n. \quad (7)$$

Отсюда следует, что неизвестные коэффициенты  $X_n$  могут быть найдены в явном виде по формуле

$$X_n = \gamma_n - \sum_m a_n^m c_m, \quad (8)$$

Здесь  $c_m = \sum_s X_s b_s^m$  — постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Оказывается, для этих коэффициентов можно получить

систему линейных алгебраических уравнений, не связанную с неизвестными коэффициентами  $X_n$  задачи. Действительно, если умножить уравнение (7) на величину  $b_n^i$  и просуммировать полученное выражение по индексу  $n$ , то получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных введенных коэффициентов  $c_i$

$$c_i + \sum_m c_m \sum_n a_n^m b_n^i = \sum_n \gamma_n b_n^i. \quad (9)$$

Решение этой системы строится стандартным образом, а именно:

$$c_m = \frac{\det\{c_{mM}\}}{\det\{c_M\}},$$

где знаменатель этого выражения определяет детерминант редуцированной системы  $\det\{c_M\}$  с количеством строк и столбцов равных числу  $M$ , а числитель определяет детерминант системы  $\det\{c_{mM}\}$ , где вместо вектор-столбца с номером  $m$  стоит вектор-столбец правых частей системы уравнений (9), а именно:  $\sum_n \gamma_n b_n^i$ . Отметим, что количество

коэффициентов  $c_m$ , необходимых для достижения требуемой точности найденного решения  $X_n$  (8) зависит от количества учитываемых волн в выделенной области пространства. Как правило, достаточно учитывать лишь распространяющиеся волны в этой области, число которых всегда ограничено и связано с соотношением между длиной волны, геометрическими размерами волноводов и значениями материальных параметров среды. Так, например, при учете лишь одной распространяющейся волны в магнитоэлектрическом слое в выражении (8) достаточно учитывать один коэффициент  $c_1$ , величина которого определяется из уравнений (9) и равна

$$c_1 = \frac{\sum_n \gamma_n b_n^1}{1 + \sum_n a_n^1 b_n^1}. \quad (10)$$

При учете двух волн  $m = 1, 2$  необходимо в формуле (8) брать два коэффициента  $c_1, c_2$ , которые легко находятся из системы линейных уравнений (9) второго порядка, а именно:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_n \gamma_n b_n^1 & \sum_n a_n^2 b_n^1 \\ \sum_n \gamma_n b_n^2 & 1 + \sum_n a_n^2 b_n^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \sum_n a_n^1 b_n^1 & \sum_n a_n^2 b_n^1 \\ \sum_n a_n^1 b_n^2 & 1 + \sum_n a_n^2 b_n^2 \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + \sum_n a_n^2 b_n^2 & \sum_n \gamma_n b_n^1 \\ \sum_n a_n^1 b_n^2 & \sum_n \gamma_n b_n^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \sum_n a_n^1 b_n^1 & \sum_n a_n^2 b_n^1 \\ \sum_n a_n^1 b_n^2 & 1 + \sum_n a_n^2 b_n^2 \end{vmatrix}}, \quad (11)$$

Отметим также то, что если рассматриваются задачи на собственные значения и соответствующие им собственные функции оператора Гельмгольца, то в этом случае уравнение (6) становится однородным, а собственные значения в одноволновом случае находятся из уравнения

$$1 + \sum_n a_n^1 b_n^1 = 0, \quad (12)$$

или в двухволновом приближении – из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 + \sum_n a_n^1 b_n^1 & \sum_n a_n^2 b_n^1 \\ \sum_n a_n^1 b_n^2 & 1 + \sum_n a_n^2 b_n^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Эту процедуру можно продолжать и далее, если учитывать следующие распространяющиеся или затухающие волны для  $m \geq 3$ . В этом случае ранг определителя увеличивается при определении каждого из коэффициентов системы  $c_m$  за счет учитываемого количества волн в структуре и равен числу учитываемых волн в одной из областей при этом, как следствие, повышается точность решения (8). Отметим также тот факт, что в другой из областей рассматриваемой структуры можно учитывать произвольное количество волн. Такое аналитическое решение позволяет достаточно ясно физически интерпретировать получаемые результаты в особенности наблюдаемые резонансы.

### 3 ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Продemonстрируем эффективность численно-аналитического решения на примере задачи о рассеянии волноводной волны на Т-разветвлении прямоугольных волноводов с магнито-диэлектрическим заполнением (рис.1).

Для этой цели воспользуемся системой линейных алгебраических уравнений второго рода (5) для определения неизвестных коэффициентов  $S_{np}^{(41)}$ .

Фактически на практике довольно часто соотношения между материальными параметрами среды, длиной волны и толщиной пленки таковы, что в области связи волноводных разветвлений, а также в волноводе, заполненном магнито-диэлектрической средой, может распространяться одна или две волноводные волны. В подводящем волноводе учитываются все волны. Такая ситуация позволяет рассмотреть независимо случаи одноволнового или двухволнового приближения при получении аналитического решения систем алгебраических уравнений, что оказывается достаточным для вычисления с заданной наперед точностью модуля и фазы коэффициента отражения волны от исследуемого образца. В этих случаях матричные коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений, как указывалось выше, могут быть представлены в виде произведения двух слагаемых, каждый из которых зависит только от одного из индексов  $n$  или  $t$ , что позволяет найти ее аналитическое решение. Для этих случаев двух случаев из системы линейных алгебраических уравнений (10) получим аналитические выражения для комплексного коэффициента  $S_{tp}^{(41)}$  при произвольных соотношениях материальных параметров магнито-диэлектрического слоя и длины волны:

- для одномодового распространения волн:

$$S_{tp}^{(41)} = D_t \left( \delta_t^p + \frac{2L'_{t1}K_{1t}}{W_{tb}Q_{11}} \right); \quad (14)$$

- для двухмодового распространения волн:

$$S_{tp}^{(41)} = D_t \left( \delta_t^p + \frac{2K_{11}}{Q_\Delta W_{tb}} [L'_{t1}Q_{33} - L'_{t3}Q_{13}] + \frac{2K_{13}}{Q_\Delta W_{tb}} [L'_{t3}Q_{11} - L'_{t1}Q_{13}] \right), \quad (15)$$

Здесь

$$Q_{11} = 1 - 2 \sum_s \frac{L'_{s1}K_{1s}}{W_{sb}}; \quad Q_{13} = 2 \sum_s \frac{L'_{s3}K_{1s}}{W_{sb}};$$

$$Q_{33} = 1 - 2 \sum_s \frac{L'_{s3}K_{3s}}{W_{sb}}; \quad Q_\Delta = Q_{11}Q_{33} - Q_{13}Q_{31}.$$

Результаты расчета модуля коэффициента отражения  $|S_{11}^{(11)}|$  в диапазоне безразмерного частотного параметра  $0 < a < 1$  и двух значений материальных параметров магнитоэлектрической среды приведены на рис.2: рис. 2а –  $\varepsilon = 4$  и  $\mu = 1$  (диэлектрик), рис. 2б –  $\varepsilon = 4$  и  $\mu = 1.4$  (магнитоэлектрик). Ясно, что при таких значениях материальных параметров  $\varepsilon, \mu$  среды в вспомогательном волноводе могут распространяться, как показывает анализ продольного волнового числа

$\Gamma_{ma} = \sqrt{k^2\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{a^2\varepsilon\mu - m^2}$ , больше одной волноводной волны ( $m > 1$ ). На рис. 2а-2б вертикальными пунктирными линиями отмечены такие значения частотного параметра  $a$ , при которых появляется очередная волноводная волна, т.е.  $\Gamma_{ma} = \frac{\pi}{a} \sqrt{a^2\varepsilon\mu - m^2} = 0$  или

$\Gamma_{nb} = \frac{\pi}{b} \sqrt{\frac{a^2\varepsilon\mu}{\theta^2} - n^2} = 0$ . Сплошной линией на графиках обозначено значение модуля коэффициента отражения, полученное на основании численного решения исходной системы уравнений (5).

Штриховыми линиями (11) помечены значения модуля коэффициента отражения, полученные на основе аналитического решения для одноволнового приближения, а пунктирными линиями (12) – для двухволнового приближения. Как следует из представленных графиков, при приближении частотного параметра  $a$  к значению, при котором появляется следующая волноводная волна ( $\Gamma_{nb} = 0$ ), точность одноволнового приближения начинает ухудшаться. Однако при двухволновом приближении практически во всем частотном диапазоне наблюдается достаточно хорошее соответствие между приближенным и точными решениями. Это указывает на высокую эффективность предложенного численно-аналитического решения системы линейных алгебраических уравнений. Как показывает анализ решения его точность

можно увеличивать за счет учитываемых волн в другой из рассматриваемых областей.

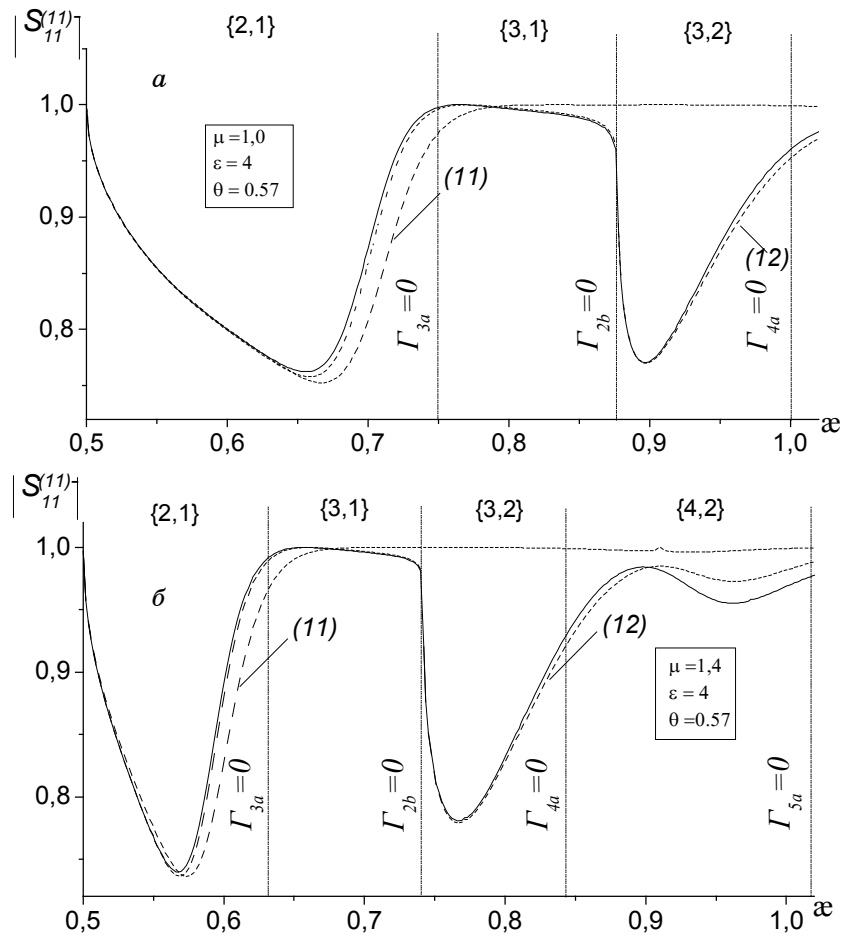


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика T-разветвления волноводов с диэлектрической (а) и магнитодиэлектрической (в) средой для точного и приближенных решений

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в данной статье новый численно-аналитический подход для решения систем линейных алгебраических уравнений второго рода пригоден для широкого круга задач дифракции волн на различных неоднородностях в волноводах и открытых электродинамических структурах, который обладает своей универсальностью, высокой сходимостью и наглядностью интерпретации результатов.



## SUMMARY

### NUMERICAL AND ANALYTICAL SOLUTION OF THE TASK ON CHARACTERISTIC WAVE DISPERSION ON T-BRANCHING IN RECTANGULAR WAVEGUIDE WITH MAGNETIC INSULATOR

*V. Mizernik\**, *A. Shmatko\*\**

*\*Scientist Center of Physics and Techniques,  
Freedom Square, 2, Kharkov, 61077*

*\*Kharkiv National University,  
Freedom Square, 4, Kharkov, 61077*

e-mail: [Alexandr.A.Shmatko@univer.kharkov.ua](mailto:Alexandr.A.Shmatko@univer.kharkov.ua)

*The analytical solution of a problem of the waveguide wave scattering on the magnetodielectric layer located in ramifying of waveguides is in-process gained, at the arbitrary parameters of a problem. It is shown on the basis of the gained solution area of admissible parameters, at which validly one-wave and two-waves approach.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермак Г. П., Мизерник В. Н., Шматько А. А. Определение материальных параметров промышленных тонкопленочных ферритовых образцов //Тр. 12-й Международн. Крымск. конф. "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии" (КрыМиКо'2002).- Севастополь, Украина, 2002. - С.575-576.
2. V. N. Mizernik, N. I. Pyatak. Resonance dissipation electromagnetic wave in T-shaped branching of rectangular waveguides with a transversely magnetized ferrite //Telecommunications and Radio Engineering. – 2003. -V.58, № 11-12. – P. 44-55.
3. Мизерник В. Н., Шматко А. А. Собственные колебания волноводных разветвлений с ферритовым флором и резонатором // Вісник СумДУ. Серія: Фізика, матем., механіка.- 2006.-№ 6 (90). -С.104-114.

***В.Н. Мизерник**, научный сотрудник,  
Харьковский научный физико-  
технологический центр;  
**А.А. Шматько**, доктор физико-  
математических наук, профессор, ХНУ  
им. В.Н. Каразина*

*Поступила в редакцию 11 февраля 2007 г.*