

УДК 519.711/.854

**ПЕРЕСТАНОВЧНЫЕ КОДЫ ГРЕЯ**

**А.Я. Белецкий, Е.А. Белецкий**

*Национальный авиационный университет, г. Киев*

*Вводится расширение грееподобных кодов, обеспечиваемое разнообразными перестановками разрядов операндов схемы преобразования, формирующей классический код Грея двоичных  $n$ -последовательностей.*

**ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Важнейшее свойство классического преобразования Грея состоит в том, что в двоичном пространстве код Грея образует последовательность чисел, расположенных в таком порядке, что соседние кодовые комбинации отличаются значением только в одном разряде числа.

Известно большое число двоичных кодов, у которых две соседние кодовые комбинации (обычно называемые кодовыми векторами, или кодовыми словами) будут различаться символом только в одном разряде. Все эти коды относятся к группе кодов с *единичным расстоянием по Хеммингу* [1], т.е. в них кодовые комбинации, служащие для изображения двух соседних чисел натурального ряда, различаются только одной переменной или только одним символом. Для примера в табл. 1 и 2 представлено полное множество, состоящее из 12 последовательностей двоичных трехразрядных чисел таких, что расстояние по Хеммингу между соседними кодовыми комбинациями равно единице [2].

*Таблица 1*

Номер последовательности					
1	2	3	4	5	6
000	000	000	000	000	000
001	100	100	001	010	010
011	110	101	101	110	011
010	010	001	100	100	001
110	011	011	110	101	101
111	111	111	111	111	111
101	101	110	011	011	110
100	001	010	010	001	100

*Таблица 2*

Номер последовательности					
1	2	3	4	5	6
000	000	000	000	000	000
100	001	010	010	001	100
101	101	110	011	011	110
111	111	111	111	111	111
110	011	011	110	101	101
010	010	001	100	100	001
011	110	101	101	110	011
001	100	100	001	010	010

Обозначим разряды числа, представленного в позиционном коде, через  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0$  (старший разряд слева), а разряды того же числа, выраженного в классическом коде Грея, через  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1, y_0$ , где  $n$  – число разрядов в кодовых векторах  $x$  и  $y$ . Процесс отображения кодового вектора  $x$  в вектор  $y$  будем называть прямым преобразованием Грея, а отображение вектора  $y$  в вектор  $x$  – обратным преобразованием Грея.

Введем обозначение  $g_k(m, n)$  для  $k$ -го оператора (матрицы) преобразования Грея  $n$ -го порядка в  $m$ -й системе счисления. Обратимся к структурно-логическим схемам формирования классических (левосторонних) кодов Грея и сопряженных им (правосторонним) кодам [2]. Граф, соответствующий алгоритму формирования прямого левостороннего кода Грея  $g_2(m, n)$  третьего порядка для произвольного основания системы счисления (модуля)  $m$ , показан на рис. 1.

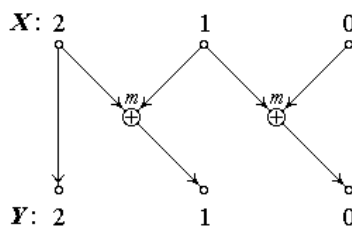


Рисунок 1

Матрица преобразования ( $g_2$ , или просто 2), отвечающая рис. 1, имеет вид

$$g_2(m, 3) = 2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

С целью получения матрицы преобразования, соответствующей элементарному (простому) оператору (коду)  $g_4(m, 3)$ , сопряженному коду  $g_2(m, 3)$ , развернем граф, отвечающий прямому левостороннему коду  $g_2(m, 3)$ , представленный на рис.1, на  $180^\circ$  относительно вертикальной центральной оси, сохраняя неизменными положение компонентов операндов  $X$  и  $Y$ , как это показано на рис. 2 [3].

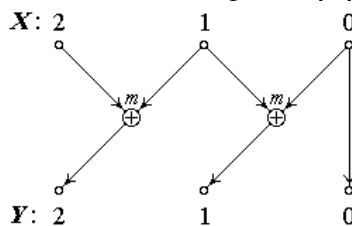


Рисунок 2

Матрица преобразования ( $g_4$ , или 4), соответствующая преобразованию, представленному на рис. 2, такова:

$$g_4(m, 3) = 4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Вместе с тем матрицу (2), сопряженную матрице (1), можно получить из графа, изображенного на рис. 1, если произвести в последнем инверсию операндов  $X$  и  $Y$  (рис. 3).

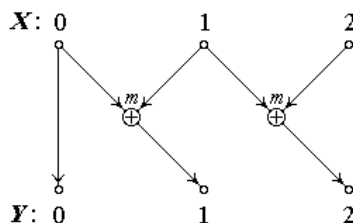


Рисунок 3

Полученный результат естественным образом приводит нас к мысли о возможности формирования разнообразных вариантов простых кодов Грея за счет различных перестановок компонентов (разрядов) операндов  $X$  и  $Y$  структурных схем преобразований Грея. А из этого следует, что дерево правостороннего преобразования Грея является излишним, так как требуемое сопряженное преобразование может быть получено из дерева левостороннего преобразования соответствующей перестановкой входных и выходных операндов. Кроме того, при переходе от левостороннего преобразования Грея к правостороннему достаточно проинвертировать в графе формирования кодов Грея отсчеты входных и выходных операндов преобразования.

Вышеприведенные обобщения являются следствием фундаментальной леммы Грея [2,3], согласно которой пара сопряженных преобразований  $g$  и  $g^*$  связаны соотношением

$$g^* = 1g1,$$

где  $1$  – оператор инверсной перестановки, который для  $n = 3$  имеет вид

$$1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Основная задача, которая решается в данной статье, состоит в разработке алгоритмов построения перестановочных двоичных кодов Грея. *Перестановочными кодами Грея* будем называть коды, порождаемые различными перестановками входных и выходных операндов преобразования при условии, что структурная схема дерева преобразования сохраняется неизменной.

Данное определение позволяет вводить (см. табл. 3) перестановочные коды Грея (ПКГ) для различных классов преобразований: лево- и правосторонних, прямых и обратных преобразований.

Таблица 3

Обозначение	Выполняемая функция
${}^n_m GL\left(\frac{X}{Y}\right)$	Прямые левосторонние ПКГ
${}^n_m GR\left(\frac{X}{Y}\right)$	Прямые правосторонние ПКГ
${}^n_m \overline{GL}\left(\frac{Y}{X}\right)$	Обратные левосторонние ПКГ
${}^n_m \overline{GR}\left(\frac{Y}{X}\right)$	Обратные правосторонние ПКГ

В том случае, когда речь идет о прямом или обратном ПКГ безотносительно к направлению преобразования, буквы  $L$  (Left) и  $R$  (Right) будем опускать. Для начала положим  $n = 3$  и построим деревья, отвечающие преобразованиям  ${}^3G\left(\frac{X}{Y}\right)$ , представленные на рис. 4.

Крестиками на данном рисунке отмечены различные варианты перестановок операндов (кодовых комбинаций)  $X$  и  $Y$ .

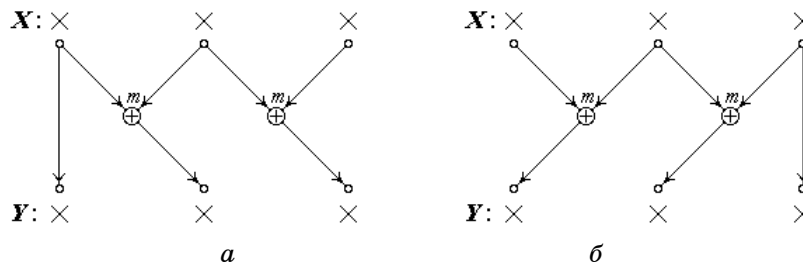


Рисунок 4

Совершенно очевидно, что, во-первых, мощность множества матриц преобразования, порождаемых правосторонними перестановочными кодами Грея, совпадает с мощностью множества матриц, образуемых левосторонними ПКГ. Различие этих множеств состоит лишь в порядке следования элементов, составляющих эти множества. Поэтому для дальнейшего анализа выберем конструкции деревьев преобразований, соответствующих левосторонним ПКГ, обозначая их  ${}^nG\left(\frac{X}{Y}\right)$  – для

прямых и  ${}^n\bar{G}\left(\frac{Y}{X}\right)$  – для обратных простых перестановочных кодов

Грея. И, во-вторых, используя канонические формы матриц обратных преобразований ПКГ, мы можем абстрагироваться от основания (модуля) системы счисления  $m$ , поскольку канонические формы матриц преобразования ПКГ инвариантны к  $m$  [3]. Тогда если значение  $n$  известно из контекста, то мы будем пользоваться упрощенными обозначениями:  $G(X/Y)$  – для прямых и  $\bar{G}(Y/X)$  – для обратных перестановочных кодов Грея.

### ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ КОДЫ ГРЕЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Очевидно, что всего существует  $n!$  перестановок операндов  $X$  и  $Y$ , где  $n$  – порядок входных и выходных кодовых комбинаций. Поэтому трехрядные перестановочные коды Грея образуют квадратную таблицу шестого порядка. Каждый элемент таблицы (назовем ее *таблицей перестановок*) представляет собой квадратную матрицу третьего порядка, отвечающую выбранным значениям перестановок операндов  $X$  и  $Y$  деревьев преобразования, показанных на рис. 4.

Условимся размещать перестановки  $Y$  на оси абсцисс, а перестановки  $X$  – на оси ординат таблицы перестановок (ТП). Начало координат разместим в левом верхнем углу ТП. Нам необходимо выработать некое рациональное правило (алгоритм) организации перестановок операндов  $X$  и  $Y$ . Обратим внимание на те перестановки, которые уже использовались ранее. Назовем исходной (натуральной) перестановкой трехрядных кодовых комбинаций последовательность чисел 2, 1, 0, т.е. младший разряд кодовой комбинации располагается справа.

Инверсной к натуральной перестановке является последовательность чисел 0, 1, 2. В общем случае если  $X$  есть некоторая перестановка из выбранных нами чисел, то через  $\tilde{X}$  обозначим последовательность чисел, инверсную к последовательности  $X$ . Будем говорить, что последовательности  $X$  и  $\tilde{X}$  находятся в *отношении инверсности* и отображаются так:

$$X \xrightarrow{1} \tilde{X}.$$

Введем также обозначение

$$M_1 \leftrightarrow^* M_2$$

для матриц, связанных отношением сопряженности, т.е.  $M_2 = M_1^*$ ,  $M_1 = M_2^*$ .

Составим двухпараметрическую таблицу второго порядка (табл. 4) с упоминавшимися выше перестановками  $X$ ,  $Y$  и разместим в ней матрицы, отвечающие прямому левостороннему (перестановка  $G \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 210 \\ 210 \end{pmatrix}$ , рис. 4а) и правостороннему (перестановка  $G \begin{pmatrix} 012 \\ 012 \end{pmatrix}$ , рис. 4б) кодам Грея.

Таблица 4

X	Y	
	210	012
210	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
012		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Незаполненные клетки табл. 4 отвечают перестановкам  $G_1(210/012)$  – верхний правый элемент табл. 4 и  $G_2(012/210)$  – нижний левый элемент табл. 4. Замещая операнды  $X$  и  $Y$  графа преобразования (рис. 4а) перестановками, соответствующими пустым элементам табл. 4, получим полную таблицу матриц преобразования (табл. 5).

Таблица 5

X	Y	
	210	012
210	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
012	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Из анализа таблицы перестановок 5 приходим к таким выводам. Во-первых, диагонально связанные элементы (матрицы преобразования) таблицы являются сопряженными. Таблицы перестановок второго порядка, в которых диагонально связанные элементы находятся в отношении сопряженности, назовем *таблицами сопряженности* (ТС). Во-вторых, матрицы, расположенные в строках таблицы сопряженности, связаны друг с другом оператором инверсной перестановки столбцов. Это означает, что если выбрана некоторая матрица ТС (обозначим ее через

$M_1$ ), то соседняя с ней в строке матрица  $M'_2$  определяется произведением  $M_1 \cdot 1$ , т.е.

$$M'_2 = M_1 \cdot 1.$$

И, наконец, в-третьих, матрицы  $M''_2$ , расположенные в столбцах таблицы сопряженности, связаны оператором инверсной перестановки строк, который реализуется умножением исходной матрицы  $M_1$  слева на оператор  $1$ , т.е.

$$M''_2 = 1 \cdot M_1.$$

Проведенный анализ таблицы сопряженности (в данном случае это табл. 5) позволяет нам сформулировать общее правило составления подобных таблиц, которое отображено в табл. 6.

Таблица 6

	×	
×	$M$	$M \cdot 1$
	$1 \cdot M$	$1M1$

Из табл. 6 непосредственно следует, что матрицы, расположенные на главной диагонали, являются сопряженными по определению. Покажем, что матрицы, находящиеся на вспомогательной диагонали табл. 6, также являются сопряженными. В самом деле, выберем одну из них, например матрицу  $1M$ , и по общему правилу найдем сопряженную к ней матрицу. Имеем

$$(1M)^* = 1 \cdot (1M) \cdot 1 = M1,$$

(так как квадрат матрицы  $1$  равен единичной матрице), т.е. матрицы  $1M$  и  $M1$ , расположенные на вспомогательной диагонали табл. 6, находятся в отношении сопряженности

$$1M \leftrightarrow M1,$$

что и требовалось доказать.

Вычислим определители  $\Delta$  матриц таблицы сопряженности 5, разместив их в табл. 7.

Таблица 7

$X$	$Y$	
	210	012
210	+	-
012	-	+

Для простоты в табл. 7 оставлены лишь знаки определителей, причем  $+\Rightarrow \Delta = 1$ ;  $-\Rightarrow \Delta = (-1)_m$ , где запись  $a \Rightarrow b$  читается так: «из  $a$  следует  $b$ ».

Сохраняя неизменной перестановку входного операнда  $X = 210$  дерева преобразования, показанного на рис. 4,  $a$ , поставим в соответствие каждой из четырех перестановок  $Y = \{201, 120, 021, 102\}$ , не вошедших в табл. 5, свою таблицу сопряженности, в которой роль  $M$  (вершина главной диагонали таблицы) играет матрица

$$M := G\left(\frac{210}{Y}\right)$$

и, кроме того, вычислим отвечающие ТС таблицы определителей. Такая задача решается достаточно просто, если обратимся к дереву преобразования, представленному на рис. 5.

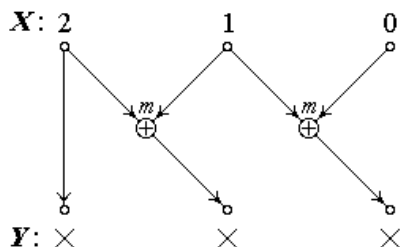


Рисунок 5

Последовательно замещая на рис. 5 крестики перечисленными выше значениями операнда  $Y = \{201, 120, 021, 102\}$ , получим

Таблица 8

$$\left( \begin{array}{c} 210 \\ 201 \end{array} \right) \Rightarrow$$

X	Y		
	201	$Y_1$	
210	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow \begin{array}{ c c } \hline - & + \\ \hline + & - \\ \hline \end{array}$ ;
012	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Таблица 9

$$\left( \begin{array}{c} 210 \\ 120 \end{array} \right) \Rightarrow$$

X	Y		
	120	$Y_2$	
210	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow \begin{array}{ c c } \hline - & + \\ \hline + & - \\ \hline \end{array}$ ;
012	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	

Таблица 10

$$\left( \begin{array}{c} 210 \\ 021 \end{array} \right) \Rightarrow$$

X	Y		
	021	$Y_3$	
210	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow \begin{array}{ c c } \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$ ;
012	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Таблица 11

$$\left( \begin{array}{c} 210 \\ 102 \end{array} \right) \Rightarrow$$

X	Y		
	102	$Y_4$	
210	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow \begin{array}{ c c } \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$ .
012	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	

Из сопоставления таблиц сопряженности 8–11 следует, что матрицы табл. 8 инверсны по отношению к соответствующим матрицам табл. 10, а матрицы табл. 9 – по отношению к матрицам табл. 11. Следовательно, любая пара таблиц сопряженности (8 и 9) или (10 и 11) может быть выбрана для завершения формирования двух верхних строк таблицы перестановок. Отдадим предпочтение последним двум таблицам, так как таблицы их определителей совпадают с таблицей определителей, соответствующей базовой таблице сопряженности 5. Избыточные таблицы 8 и 9, тем не менее, дают возможность уточнить перестановки  $Y_3$  и  $Y_4$ , равные соответственно 201 и 120. В результате мы приходим к окончательным формам выбранных таблиц сопряженности.

Таблица 12

X	Y		
	021	201	
210	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
012	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Таблица 13

X	Y		
	102	120	
210	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
012	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	

После того как определилась пара таблиц сопряженности (а это табл. 12 и 13), необходимо решить вопрос об их ранжировании, т.е. установления последовательности размещения в одном ряду с опорной (базовой) таблицей сопряженности (табл. 5). Из анализа табл. 5, 12 и 13 представляется рациональным такое размещение (табл. 14), в котором вслед за табл. 5 ставится табл. 13, а затем табл. 12.

Таблица 14

X	Y					
	210	012	102	120	021	201
210	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
012	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Матрицы преобразования, разделенные в табл. 14 сплошной линией, назовем *смежными матрицами*. Таковыми, например, являются матрицы, расположенные в верхнем ряду табл. 16 и отвечающие перестановкам

$$\begin{pmatrix} 210 \\ 012 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 210 \\ 102 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Смежными являются также аналогичные матрицы нижнего ряда табл. 16.

Мы легко можем установить такие особенности смежных матриц, заданных соотношениями (3). Во-первых, их первые (левые) столбцы совпадают и, во-вторых, оставшиеся два столбца матриц инверсны по отношению друг к другу. Относительно смежных матриц будем говорить, что они *склеиваются* левыми столбцами.



Сохраним в таблице матриц преобразования порядок следования перестановок операнда  $X$  таким же, как и для операнда  $Y$ . Правило склеивания строк смежных матриц в столбцах ТМП подобно склеиванию столбцов смежных матриц в строках таблицы. Особенность склеивания смежных матриц такова. Если смежные матрицы, расположенные в строках таблицы перестановок, склеиваются левыми столбцами, а оставшиеся столбцы инверсны в соседних матрицах, то смежные матрицы, расположенные в столбцах таблицы, склеиваются верхними строками, а оставшиеся строки инверсны по отношению друг к другу.

Следуя выбранным правилам склеивания смежных матриц в строках и столбцах ТМП, легко составить полную таблицу, отвечающую прямым перестановочным кодам Грея третьего порядка (табл. 15).

Таблица 15

X	Y					
	210	012	102	120	021	201
210	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
012	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
102	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
120	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
021	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
201	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Все матрицы таблицы перестановок взаимно связаны. А это означает, что, зная любую их них, по правилу склеивания смежных матриц в столбцах и строках таблицы можно однозначно восстановить всю таблицу. Разработанные алгоритмы заполнения элементов таблицы перестановок справедливы также и для обратных преобразований Грея.

#### ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ КОДЫ ГРЕЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Перестановочным кодам Грея четвертого порядка присущ ряд свойств, которые отсутствуют в кодах третьего порядка. В частности, определители всех четырех матриц, входящих в таблицы сопряженности, одинаковы (но принимают значение  $+$  или  $-$ ), тогда как для  $n = 3$  значения определителей матриц, расположенных на разных диагоналях таблицы сопряженности, различны. И, что еще более важно, в ПКГ четвертого порядка, как и для порядков  $n > 4$ , наблюдается цикличность перестановок. Для устранения цикличности (с целью формирования полного набора перестановок операндов  $X$  и  $Y$ ) предлагается ряд мер, которые мы обсудим далее по тексту.

Дерево прямого ПКГ-преобразования четвертого порядка показано на рис. 6.

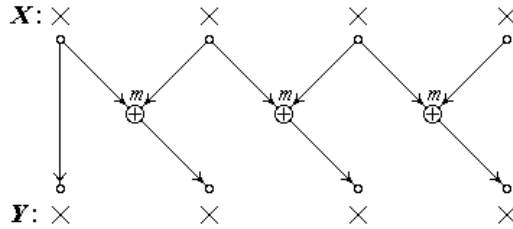


Рисунок 6

Обозначим цифрами 3, 2, 1, 0 номера столбцов (младший номер справа) матрицы четвертого порядка, отвечающей базовой перестановке операндов для схемы преобразования, приведенной на рис. 6:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3210 \\ 3210 \end{pmatrix}.$$

Составим базовую матрицу преобразования, соответствующую этим перестановкам, и перенумеруем столбцы матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3210 \\ 3210 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Осуществим перестановки цифр 3210, символизирующие номера столбцов матрицы (4), по схеме, которая была принята при организации перестановки столбцов матриц преобразования третьего порядка. Получим цепочку перестановок

$$3210 \overset{1}{\underline{0123}} | \overset{1}{\underline{0321}} \overset{1}{\underline{1230}} | \overset{1}{\underline{1032}} \overset{1}{\underline{2301}} | \overset{1}{\underline{2103}} \overset{1}{\underline{3012}} |, \quad (5)$$

в которой 1 означает инверсию последовательности, а вертикальная черта разделяет смежные перестановки. Левые склеивающиеся номера столбцов матриц отмечены в (5) связью  $\underline{\quad}$ .

Кодовая комбинация, расположенная справа от вертикальной линии, образуется из смежной комбинации (слева от разделительной черты) по следующей схеме: старшая (слева стоящая) цифра смежной комбинации сохраняет свою позицию, а остальные цифры инверсируют.

Обратимся к последовательности перестановок (5). Если попытаться сформировать перестановку, смежную последней перестановке 3012 ряда (5), то получим перестановку 3210, являющуюся стартовой для этой же последовательности. Следовательно, выбранная схема организации перестановок оказалась циклической с периодом цикла, равным восьми перестановкам, а точнее – четырем парам ( $n = 4$ ) перестановок. Назовем последовательность перестановок (5) *блоком* перестановок. Для того чтобы устранить цикличность перестановок, поступим следующим образом. В первой перестановке второго блока сохраним две левые цифры смежной перестановки (3012) на своих позициях, а оставшиеся две цифры инверсируем. Следуя алгоритму (5), сформируем второй блок перестановок

$$\underline{3012} \mid \underline{3021} \overset{1}{\mid} \underline{1203} \mid \underline{1302} \overset{1}{\mid} \underline{2031} \mid \underline{2130} \overset{1}{\mid} \underline{0312} \mid \underline{0213} \overset{1}{\mid} \underline{3120} \mid \quad (6)$$

В последовательности перестановок (6) слева от пунктирной линии стоит перестановка, замыкающая справа последовательность перестановок (5).

В блоке (6) мы сталкиваемся с той же проблемой цикличности, что и в первом блоке перестановок (5). В самом деле, если мы попытаемся образовать перестановку, смежную перестановке 3120 (последняя в ряду (6)), то приходим к перестановке 3021, являющейся базовой (первой) перестановкой блока (6). Применяв ту же самую схему устранения цикличности перестановок, которая была выбрана выше, получим последний (третий) блок перестановок

$$\underline{3120} \mid \underline{3102} \overset{1}{\mid} \underline{2013} \mid \underline{2310} \overset{1}{\mid} \underline{0132} \mid \underline{0231} \overset{1}{\mid} \underline{1320} \mid \underline{1023} \overset{1}{\mid} \underline{3201} \mid \quad (7)$$

Двадцать четыре элемента блоков (5)–(7) однозначно определяют все перестановки цифр (столбцов базовой матрицы преобразования (5)) четырехразрядных кодовых комбинаций (так как  $4! = 24$ ). Сформируем базовую таблицу сопряженности, отвечающую базовым перестановкам операндов  $X$  и  $Y$ , равным 3210 и 0123. Воспользовавшись общим правилом составления таблиц сопряженности, схема которого отображена в табл. 6, приходим к табл. 16.

Таблица 16

$X$	$Y$	
	$Y_1 = 3210$	$Y_2 = 0123$
3210	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
0123	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

На основании последовательностей, заданных соотношениями (5)–(7), и табл. 16 легко можно построить полную таблицу матриц преобразования, отвечающую перестановочным кодам Грея четвертого порядка.

Перестановочные коды Грея, порядок которых превышает четыре (т.е. для  $n \geq 5$ ), будем относить к кодам высших порядков. Основная проблема, решаемая при синтезе перестановочных кодов Грея высших порядков, состоит в определении такой последовательности перестановок  $n$ -разрядных чисел, характеризующих операнды  $X$  и  $Y$   $n$ -точечного графа ПКГ, которая обеспечивала бы формирование полной логически связанной последовательности перестановок [3]. После этого процедура заполнения таблицы матриц преобразования ПКГ становится тривиальной.

## ВЫВОДЫ

К основным результатам исследования данной работы можно отнести следующие. Во-первых, получена точная оценка  $L$  числа грееподобных

$n$ -последовательностей, которая составляет значение  $L = 2n!$ , причем половине из них отвечают перестановочные матрицы преобразования Грея, занимающие (для  $n=3$ ) верхнюю строчку табл. 15 перестановочных матриц (соответствующие им последовательности представлены в табл. 1), а вторую группу  $n$ -последовательностей (см. табл. 2) можно составить за счет инверсии последовательностей первой группы при сохранении положения нулевой кодовой комбинации. Отметим дополнительно, что для второй группы  $n$ -последовательностей не существует образующих матриц, подобных образующим матрицам первой группы. Во-вторых, отмеченную выше первую группу  $n$ -последовательностей можно сформировать с помощью суммирующих счетчиков Грея, тогда как вторую группу – вычитающими счетчиками. И, наконец, в-третьих, из анализа табл. 1 и 2 следует, что  $n$ -последовательности, образованные перестановочными матрицами Грея (табл. 1), принадлежат классу отраженных кодов, тогда как соответствующие им инверсные последовательности (табл. 2) в класс отраженных кодов не входят, так как не существует линии, разделяющей последовательности на две зеркально связанные подпоследовательности.

## SUMMARY

*Gray similar code extension, ensured by manifold permutations of operands digits in the translation circuit, which forms the classic Gray code of double  $n$ -sequences, is to be discussed.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хэмминг Р.В. Теория кодирования и теория информации. – М.: Радио и связь, 1983. – 176 с.
2. Белецкий А.Я., Белецкий А.А., Белецкий Е.А. Преобразования Грея. Т.1. Основы теории. – К.: Изд-во НАУ, 2007. – 412 с.
3. Белецкий А.Я. Комбинаторика кодов Грея. – К.: Изд-во «КВИЦ», 2003. – 506 с.

**Белецкий А.Я.**, д-р техн. наук, профессор,  
Национальный авиационный университет,  
г. Киев;

**Белецкий Е.А.**, аспирант, Национальный  
авиационный университет, г. Киев

*Поступила в редакцию 7 ноября 2007 г.*