УДК 537.874.6

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ВОЛН СОСКАЛЬЗЫВАНИЯ И ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С АНИЗОТРОПНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ

А.А. Звягинцев, А.И. Иванов, Д.В. Катков
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077
e-mail: alexei.i.ivanov@univer.kharkov.ua

В работе получено решение задачи по отысканию высокочастотной асимптотики собственных мод волн шепчущей галереи и волн соскальзывания криволинейной поверхности с анизотропным поверхностным импедансом. Окружающая поверхность среды считается неоднородной, с малым изменением параметров на длине волны. Решение задачи производится сведением уравнений Максвелла к уравнению второго порядка с последующим применением метода эталонной задачи.

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач электродинамики с помощью лучевых асимптотических методов зачастую возникает необходимость вычисления полей вблизи гладких криволинейных тел. Лучевое поле, касающееся тела, на выпуклых участках поверхности возбуждает волны соскальзывания, а на вогнутых – волны шепчущей галереи. Поскольку поверхность тела является для этих волн каустикой, традиционные лучевые методы неприменимы для отыскания электромагнитного поля вблизи нее. В работе [1] получены двумерные скалярные равномерные асимптотические разложения для собственных мод волн соскальзывания и шепчущей галереи, а также показано, что поле вблизи поверхности может быть представлено в виде ряда по собственным модам соответствующего типа. Эти результаты в работе [2] обобщены на случай трехмерной векторной задачи для поверхности, расположенной в однородной среде. В данной работе рассматривается задача отыскания собственных волн соскальзывания и шепчущей галереи поверхности с анизотропным поверхностным импедансом, расположенной в слабонеоднородной среде.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу: гладкая поверхность без кромок расположена в слабонеоднородной среде. Эффективный радиус кривизны поверхности считается положительным для всей рассматриваемой области поверхности в случае отыскания собственных волн шепчущей галереи и отрицательным в случае отыскания волн соскальзывания. Он имеет вид

$$P = \left(\rho_t^{-1} + \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \mu^2 + \mu \frac{\partial \mu}{\partial n} \varepsilon^2 \right)_{n=0} \right)^{-1},$$

где n - расстояние от поверхности до точки наблюдения, а ρ_t - наибольший из главных радиусов кривизны поверхности. Будем искать решения однородных уравнений Максвелла в комплексной форме, сосредоточенные вблизи поверхности и удовлетворяющие принципу предельного поглощения. Будем также считать, что волновое число

$k \to \infty$, а величины ε и μ являются медленно меняющимися на длине волны функциями. Будем считать, что

$$\vec{\delta}_\mu = \nabla\mu(\vec{r})/\mu(\vec{r}) = o\left(k^{-1+\sigma}\right),\ \vec{\delta}_\varepsilon = \nabla\varepsilon(\vec{r})/\varepsilon(\vec{r}) = o\left(k^{-1+\sigma}\right),$$

где σ - стремящаяся к нулю положительная величина. Импедансные условия на поверхности имеют вид

$$\vec{H}_\tau = W \cdot \vec{n} \times \vec{E}_\tau\ , \tag{1}$$

где W - тензор поверхностного импеданса, $\vec{H}_\tau$, $\vec{E}_\tau$ - касательные к поверхности компоненты векторов $\vec{H}$, $\vec{E}$, а $\vec{n}$ - нормаль к поверхности.

Введем систему координат *(n,s,t)*, где *n* – длина нормали к поверхности, проведенной из точки наблюдения, *s=const* и *t=const* - координатные кривые на поверхности, причем кривые *t=const* являются геодезическими, а *s=const* - перпендикулярными им линиями. Кроме того, координаты *s,t* будем считать натуральными параметрами координатных кривых.

Энергия рассматриваемых волн в основном сосредоточена в полосе порядка $O\left(k^{-2/3}\right)$ вблизи поверхности. Учитывая этот факт, пренебрежем членами, учитывающими влияние кручения координатных кривых на метрический тензор системы. В данном приближении полученная система координат ортогональна и имеет коэффициенты Ламе:

$$h_n = 1;\ h_s = 1 + n/\rho_s;\ h_t = 1 + n/\rho_t\ ,$$

где ρ_s, ρ_t - главные радиусы кривизны поверхности, причем ρ_t - наибольший из них.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Уравнения Максвелла после исключения вектора $\vec{H}$ принимают вид

$$\Delta\vec{E} + k^2\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})\vec{E} + \left[\vec{\delta}_\mu, \operatorname{rot}\vec{E}\right] + \operatorname{grad}\left(\vec{E}\vec{\delta}_\varepsilon\right) = 0\,.$$

В системе координат (n,s,t) получаем систему уравнений

$$\frac{1}{h_s h_t}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(h_s h_t \frac{\partial E_j}{\partial n}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{h_t}{h_s}\frac{\partial E_j}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_s}{h_t}\frac{\partial E_j}{\partial t}\right)\right] + k^2\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})E_j + \delta E_j = 0\,, \tag{2}$$

где индекс *j* обозначает проекцию на одну из координат *(n,s,t)*, а член δE_j учитывает неоднородность среды. Так, для проекции δE_n имеем

$$\delta E_n = \frac{1}{\mu h_t^2}\left[\frac{\partial E_n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial n}\left(h_t E_t\right)\right]\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{1}{\mu h_s^2}\left[\frac{\partial E_n}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial n}\left(h_s E_s\right)\right]\frac{\partial\mu}{\partial s} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n}\left[E_n\frac{\partial\varepsilon}{\partial n} + \frac{1}{h_s}E_s\frac{\partial\varepsilon}{\partial s} + \frac{1}{h_t}E_t\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right].$$

Система (2) разрешима с помощью метода малого параметра вследствие малости величин $\left|\delta_\varepsilon\right|$, $\left|\delta_\mu\right|$ [3]. Поэтому далее будем рассматривать решение каждого из уравнений системы в отдельности, считая слагаемые δE_j заданными. Поле каждой из компонент вектора E_j будем аналогично двумерному случаю [1] искать в виде

$$E_j = \exp\left(i \sum_{m=-3}^{M} \alpha_m \left(s,t,\nu\right) k^{-\frac{m}{3}} \right) \cdot f\left(\sum_{m=0}^{M} \beta_m \left(s,t,\nu\right) k^{-\frac{m}{3}} \right), \tag{3}$$

где $\alpha_m\left(s,t,\nu\right)$, $\beta_m\left(s,t,\nu\right)$ – подлежащие определению коэффициенты; $f\left(z\right)$ – функция Эйри-Фока, целая константа M зависит от требуемой точности, а $\nu = nk^{2/3}$. Для удовлетворения принципа предельного поглощения функция $f\left(z\right)$ в случае выпуклой поверхности должна быть равна функции Эйри-Фока $w_1(z)$, а в случае вогнутой поверхности - функции Эйри-Фока $v(z)$. Подставляя выражение (3) в (2) и собирая члены при функции Эйри-Фока и ее производной, получаем уравнение

$$f\left(\sum_{m=0}^{M} \beta_m k^{-\frac{m}{3}} \right) \bullet \sum_{m=-6}^{M-1} a_m k^{-\frac{m}{3}} + f'\left(\sum_{m=0}^{M} \beta_m k^{-\frac{m}{3}} \right) \bullet \sum_{m=-b}^{M-1} b_m k^{-\frac{m}{3}} = 0, \tag{4}$$

где коэффициенты a_m, b_m являются известными дифференциальными операторами над коэффициентами $\alpha_m\left(s,t,\nu\right)$, $\beta_m\left(s,t,\nu\right)$. Поскольку функции $f\left(z\right)$ и $f'\left(z\right)$ линейно независимы, а уравнение (4) должно выполняться тождественно относительно k, все коэффициенты a_m и b_m должны быть равны нулю, что позволяет рекурсивно вычислять коэффициенты $\alpha_m\left(s,t,\nu\right)$, $\beta_m\left(s,t,\nu\right)$. Так, из первых уравнений этой системы следует, что коэффициент α_{-3} не зависит от координаты n и удовлетворяет уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial t} \right)^2 = \chi_0\left(s,t\right), \tag{5}$$

где $\chi_0\left(s,t\right)$ есть квадрат показателя преломления на поверхности – нулевой член разложения

$$\varepsilon\left(\vec{r}\right)\mu\left(\vec{r}\right) = \chi_0\left(s,t\right) + \chi_1\left(s,t\right)n + \chi_2\left(s,t\right)n^2 + \ldots$$

Таким образом, если окружающая поверхность среды однородна, собственные волны распространяются по геодезическим линиям на поверхности. В общем случае уравнение (5) решается методом характеристик аналогично уравнению эйконала геометрической оптики. Далее будем считать, что его характеристики (лучи) известны и заданы в параметрическом виде: $s = s\left(\tau\right)$, $t = t\left(\tau\right)$, где τ - натуральный параметр характеристики. Пусть волна распространяется в направлении увеличения τ, тогда

$$\alpha_{-3} = \int \sqrt{\chi_0\left(\tau\right)} d\tau .$$

Таким образом, коэффициент $\alpha_{-3}\left(s,t\right)$ представляет собой оптическую длину пути от источника до точки наблюдения по поверхности.

Аналогично двумерному случаю [1] можно доказать, что коэффициенты $\alpha_m(s,t,\nu)$, $\beta_m(s,t,\nu)$ в выражении (4) являются полиномами относительно переменной ν:

$$\alpha_m(s,t,\nu) = \alpha_{m0}(s,t) + \alpha_{m1}(s,t)\nu + \ldots \; ;$$

$$\beta_m(s,t,\nu) = \beta_{m0}(s,t) + \beta_{m1}(s,t)\nu + \ldots$$

Степени этих полиномов при четном $m \geq 0$ равны $m/2$ и $m/2+1$ для коэффициентов $\alpha_m(s,t,\nu)$ и $\beta_m(s,t,\nu)$ соответственно. При нечетном $m > 0$ они равны $(m+3)/2$ и $(m-1)/2$ [1].

Правая часть уравнения (2) может быть приближенно представлена в виде

$$\delta E_j \approx e^{\sum\limits_{m=-3}^{M} \alpha_m k^{-\frac{m}{3}}} \sum_{m=-3}^{M} \sum_{n=0}^{N} \left[\xi_{mn}(s,t) \upsilon \left(\sum_{m=0}^{M} \beta_m k^{-\frac{m}{3}} \right) + \zeta_{mn}(s,t) \upsilon' \left(\sum_{m=0}^{M} \beta_m k^{-\frac{m}{3}} \right) \right] \nu^n k^{-\frac{m}{3}},$$

где коэффициенты ζ_{mn}, ξ_{mn} определяются из дифференциальных выражений для величин δE_j.

Последующие члены асимптотического ряда (3) имеют такой вид:

$$\alpha_{-2} = 0; \;\; \alpha_{-1} = \alpha_{-10} = \frac{1}{2} \int \gamma \beta_{00} \beta_{01}^2 d\tau;$$

$$\beta_0 = \beta_{00} + \beta_{01}\nu; \;\; \beta_{01} = -\sqrt[3]{\frac{2}{\rho_s}\left(\frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial s}\right)^2 + \frac{2}{\rho_t}\left(\frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial t}\right)^2 + \chi_1}; \;\; \beta_1 = \beta_{10};$$

$$\alpha_0 = \alpha_{00} = \frac{1}{2} \int \gamma \left(i \frac{\partial^2 \alpha_{-3}}{\partial t^2} + i \frac{\partial^2 \alpha_{-3}}{\partial s^2} + 2i\alpha_{12} + \beta_{10}\beta_{01}^2 + \xi_{00} \right) d\tau;$$

$$\alpha_{12} = -\frac{1}{2\beta_{01}} \left[\frac{\partial \beta_{01}}{\partial s} \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial s} + \frac{\partial \beta_{01}}{\partial t} \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial t} - \frac{i\zeta_{01}}{2} \right];$$

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{\beta_{01}} \left[\frac{\partial \beta_{00}}{\partial s} \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial s} + \frac{\partial \beta_{00}}{\partial t} \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial t} - \frac{i\zeta_{00}}{2} \right],$$

где $\gamma = \left[\left(\frac{\partial s}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial s} + \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial \alpha_{-3}}{\partial t} \right]^{-1}$.

Коэффициенты $\beta_{m0}(s,t,n)$ не могут быть найдены из уравнения (2), для их отыскания необходимо подставить выражение (3) в граничные условия (1). При этом, для проекций вектора E_j получается система

$$\left. \begin{cases} \dfrac{i}{k\mu h_t} \left[\dfrac{\partial E_n}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial n}(h_t E_t) \right] = W_{11} E_t - W_{12} E_s; \\ \dfrac{i}{k\mu h_s} \left[\dfrac{\partial E_n}{\partial s} - \dfrac{\partial}{\partial n}(h_s E_s) \right] = -W_{21} E_t + W_{22} E_s, \end{cases} \right|_{\nu=0} \tag{6}$$

где $W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$ – компоненты тензора поверхностного импеданса.

При подстановке в систему (6) выражений (3), разлагая функцию Эйри-Фока и ее производную по степеням $k^{-m/3}$ [1], получаем систему для определения коэффициентов $\beta_{m0}(s,t,n)$. Каждое из уравнений этой системы представляет собой сумму быстроосциллирующих экспонент умноженных на ряды по степеням $k^{-m/3}$. Поэтому для того чтобы компоненты E_j удовлетворяли системе (6) тождественно относительно k, необходимо, чтобы множители при одинаковых быстроосциллирующих экспонентах в правой и левой частях уравнений компенсировали друг друга. Каждый из членов E_j имеет три множителя в экспонентах при положительных степенях k. Коэффициенты α_{-3} идентичны для всех членов, коэффициенты α_{-2} тождественно равны нулю, а коэффициенты α_{-1}, вообще говоря, различны. Предположим, что компоненты тензора W_{11} и W_{22} имеют один порядок малости либо обе являются величинами порядка $o\left(k^{-1/3}\right)$. Тогда коэффициенты α_{-1} компонент E_s и E_t равны, и система (6) сводится к рекуррентной системе для $\beta^s_{m0}, \beta^t_{m0}$, а также к уравнениям для β^n_{m0}. Так, для первых членов β_{m0} при $W_{11} = O(1)$, $W_{22} = O(1)$ имеем:

$$\begin{cases} W_{11} e^{i\alpha_o^t} f\left(\beta^t_{00}\right) = W_{12} e^{i\alpha_o^s} f\left(\beta^s_{00}\right); \\ W_{21} e^{i\alpha_o^t} f\left(\beta^t_{00}\right) = W_{22} e^{i\alpha_o^s} f\left(\beta^s_{00}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{11} e^{i\alpha_o^t} f'\left(\beta^t_{00}\right)\beta^t_{10} - W_{12} e^{i\alpha_o^s} f'\left(\beta^s_{00}\right)\beta^s_{10} = \dfrac{i}{\mu} f'\left(\beta^t_{00}\right)\beta^t_{01} e^{i\alpha_o^t}; \\ W_{21} e^{i\alpha_o^t} f'\left(\beta^t_{00}\right)\beta^t_{10} - W_{22} e^{i\alpha_o^s} f'\left(\beta^s_{00}\right)\beta^s_{10} = -\dfrac{i}{\mu} f'\left(\beta^s_{00}\right)\beta^s_{01} e^{i\alpha_o^s}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha^n_{-3}}{\partial s} f\left(\beta^n_{00}\right) = 0; \\ \dfrac{\partial \alpha^n_{-3}}{\partial t} f\left(\beta^n_{00}\right) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha^n_{-3}}{\partial s} f'\left(\beta^n_{00}\right)\beta^n_{10} = 0; \\ \dfrac{\partial \alpha^n_{-3}}{\partial t} f'\left(\beta^n_{00}\right)\beta^n_{10} = 0. \end{cases}$$

Из этих систем получаем

$$\beta^s_{00} = \beta^t_{00} = \beta^n_{00} = z_p;\ \beta^s_{10} = \Delta_s / \Delta;\ \beta^t_{10} = \Delta_t / \Delta;\ \beta^n_{10} = 0,$$

где z_p - p-й нуль уравнения $f\left(z_p\right) = 0$, а также:

$$\Delta = e^{i\alpha_o^t + i\alpha_o^s}\left(W_{12}W_{21} - W_{11}W_{22}\right);$$

$$\Delta_t = -\frac{i}{\mu}\left(\beta^t_{01} e^{i\alpha_o^t + i\alpha_o^s} W_{22} + \beta^s_{01} e^{2i\alpha_o^s} W_{12}\right);$$

$$\Delta_s = -\frac{i}{\mu}\left(\beta^s_{01} e^{i\alpha_o^t + i\alpha_o^s} W_{11} + \beta^t_{01} e^{2i\alpha_o^t} W_{21}\right).$$

Аналогично могут быть получены коэффициенты $\beta^s_{m0}, \beta^t_{m0}$ при других порядках малости величин $W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$. В частности, если элементы тензора поверхностного импеданса имеют порядок $o\left(k^{-1/3}\right)$, получаем

$$\beta^s_{00} = \beta^t_{00} = z'_p; \ \beta^n_{00} = z_p; \ \beta^n_{10} = 0;$$
$$\beta^s_{10} = \frac{-i}{\beta^s_{00}\beta^s_{01}}\left(\alpha^s_{11} - i\mu W_{22} + i\mu W_{21} e^{i\alpha^t_0 - i\alpha^s_0}\right);$$
$$\beta^t_{10} = \frac{-i}{\beta^t_{00}\beta^t_{01}}\left(\alpha^t_{11} + i\mu W_{11} - i\mu W_{12} e^{i\alpha^s_0 - i\alpha^t_0}\right),$$

где z'_p - p-й нуль уравнения $f'\left(z'_p\right) = 0$.

Таким образом, при подстановке выражения (3) в уравнение второго порядка (2) и в граничное условие (1) можно получить неизвестные коэффициенты в этом разложении с произвольной точностью. Однако вследствие того что в данном приближении не учитываются эффекты, связанные с кручением координатных кривых на поверхности, вычисление членов порядка $O\left(k^{-2/3}\right)$ и менее нецелесообразно. Для замкнутых траекторий распространения собственных мод могут быть вычислены собственные частоты из условия $\vec{E}\left(\tau\right) = \vec{E}\left(\tau + L\right)$, где L – длина замкнутой траектории.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим влияние неоднородностей, расположенных в непосредственной близости от поверхности, на поле собственных волн соскальзывания. Для этого рассмотрим распространение волн соскальзывания вдоль идеально проводящей сферы, если показатель преломления у ее поверхности имеет вид

$$\chi_0\left(\varphi,\theta\right) = \chi_{00} + \chi_{01}\exp\left(-\sigma_\varphi\left(\varphi-\varphi_0\right)^2 - \sigma_\theta\left(\theta-\theta_0\right)^2\right),$$

где величины χ_{00}, χ_{01} задают показатель преломления вдали от неоднородности и в ее центре соответственно; $\sigma_\varphi, \sigma_\theta$ - декременты затухания вдоль координат φ и θ; φ_0, θ_0 - координаты центра неоднородности. Если параметр χ_{01} равен нулю, волны соскальзывания распространяются вдоль геодезических – больших окружностей на сфере. При $\chi_{01} > 0$ показатель преломления в неоднородности выше, чем в окружающем пространстве. При этом лучи втягиваются в неоднородность. Амплитуда волн соскальзывания при этом внутри неоднородности возрастает вследствие уменьшения поперечных сечений лучевых трубок. При $\chi_{01} < 0$ лучи, напротив, выталкиваются из области неоднородности и амплитуда волн соскальзывания в ней уменьшается. На рис. 1,2 представлены лучи уравнения (5) для случаев $\chi_{01} = 0$, $\chi_{01} = -0.6$ при $\chi_{10} = 1$, $\sigma_\varphi = \sigma_\theta = 5$, $\varphi_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = \pi/4$.

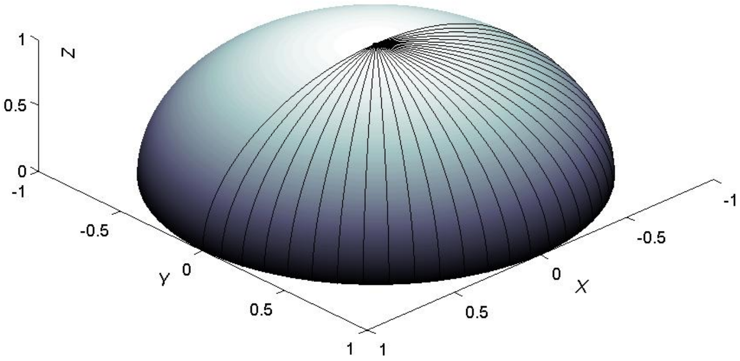

Рисунок 1 – Лучи волн соскальзывания при $\chi_{01} = 0$

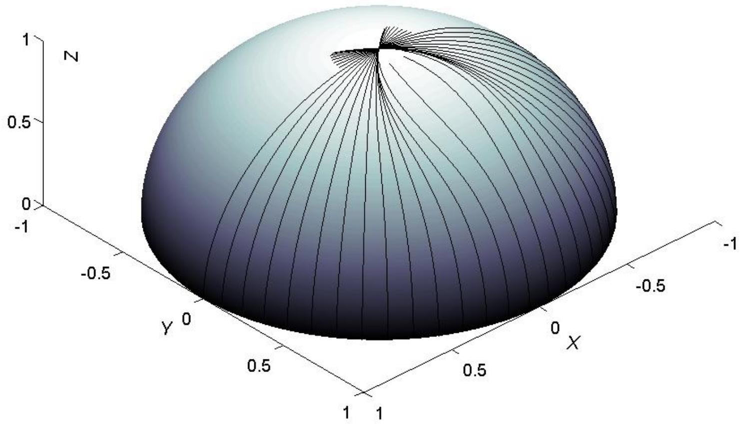

Рисунок 2 – Лучи волн соскальзывания при $\chi_{01} < 0$

Рассмотрим далее влияние неоднородностей, расположенных в слое $O\left(k^{-2/3}\right)$, на собственную частоту волн шепчущей галереи, распространяющихся в цилиндрическом резонаторе. Внутреннюю поверхность резонатора будем приближенно считать идеально проводящей. Пусть волна распространяется по окружности в плоскости, перпендикулярной оси резонатора, а величина χ_1, характеризующая поведение показателя преломления в слое $O\left(k^{-2/3}\right)$ вблизи поверхности, имеет вид $\chi_1 = \chi_{10} + \chi_{11}\exp\left(-\sigma\left(s - s_0\right)^2\right)$. На рис. 3 представлены зависимости разности $\lambda - \lambda_0$, приведенной к радиусу резонатора R, от величины χ_{11}, где λ, λ_0 - собственные длины волн при наличии неоднородности и при ее отсутствии. Вычисления производились для одиннадцати значений $q = 20, 21, \ldots, 30$, где q – число целых длин волн вдоль траектории движения.

Из рисунка видно, что изменение длины волны составляет десятые и сотые доли процента и уменьшается с ростом q, поскольку при этом уменьшается толщина слоя распространения волны. Изменения показателя преломления, находящиеся вне слоя $O\left(k^{-2/3}\right)$, практически не оказывают влияния на распространение волн шепчущей галереи. От них зависят асимптотически малые члены ряда (3), начиная с β_2, α_2.

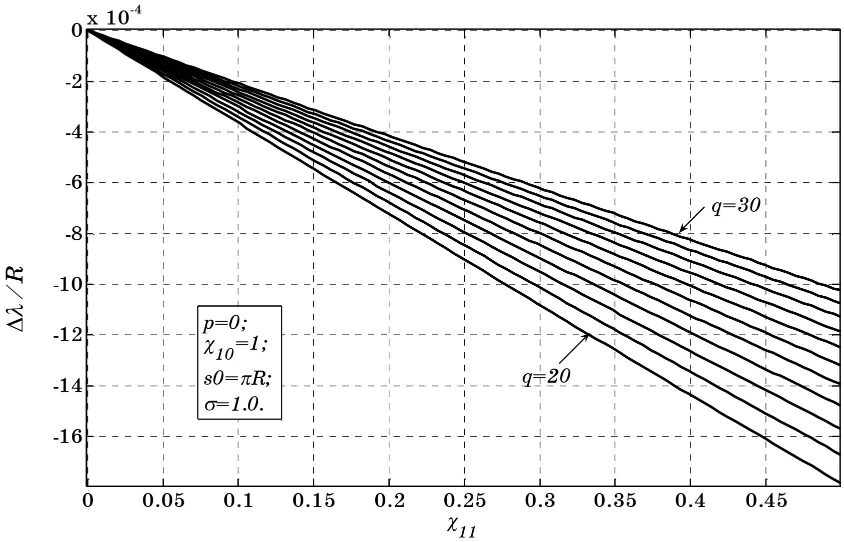

Рисунок 3 – Изменение собственной длины волны с ростом χ_{11}

На рис. 4 представлена зависимость приведенной к радиусу R собственной длины волны в зависимости от порядка собственной функции p. Вычисления производились при фиксированной величине $\chi_{11} = 0.5$, однако при разных размерах неоднородности $\sigma = 0, 1, 2$. Из рисунка видно, что с увеличением порядка собственной функции увеличивается и влияние на нее показателя преломления в слое $O\left(k^{-2/3}\right)$.

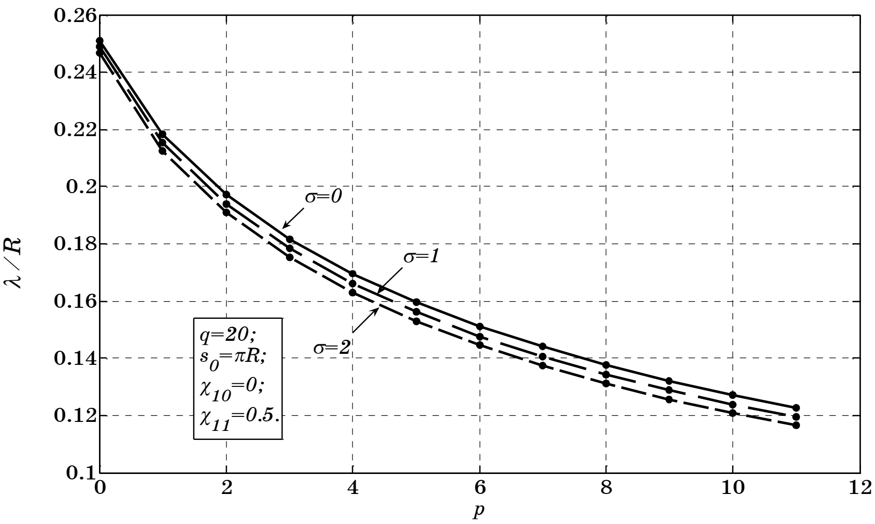

Рисунок 4 – Зависимость собственной длины волны от параметра p

Таким образом, используя резонансные свойства волн шепчущей галереи, можно оценивать величину и размеры неоднородностей показателя преломления среды, а также удаление этих неоднородностей от вогнутой границы раздела сред, вдоль которой распространяются волны шепчущей галереи.

Рассмотрим далее влияние недиагональных членов тензора поверхностного импеданса на поле волны шепчущей галереи. На рис. 5 представлены зависимости амплитуды компоненты E_t от расстояния вдоль луча, приведенного к главному радиусу кривизны, для пяти значений членов $W_{12} = W_{21} = 1,3,5,7,9$. При этом диагональные члены $W_{11} = W_{22} = 10$.

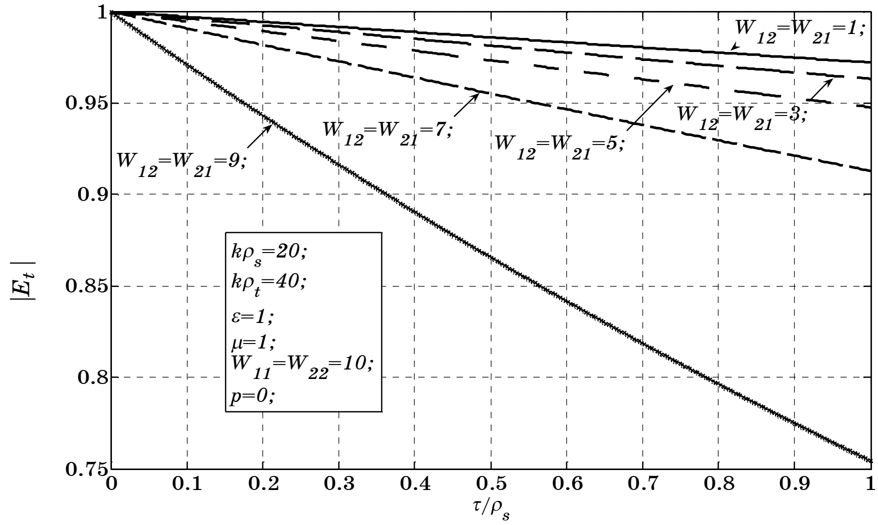

Рисунок 5 – Зависимость амплитуды волны от пройденного пути

Как видно из рисунка, затухание волны существенно зависит от недиагональных членов. Их наличие приводит к перераспределению энергии между компонентами E_t и E_s. Если разность $W_{12}W_{21} - W_{11}W_{22}$ стремится к нулю при сохранении условия $W_{11}W_{22} = O(1)$, затухание резко возрастает. Этот случай требует дополнительного исследования, поскольку система уравнений для компонент $\beta_{10}^{s,t}$ при этом плохо обоснована.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к задаче отыскания собственных мод криволинейных поверхностей позволяет учитывать неоднородность среды, окружающей поверхность, а также анизотропию поверхностного импеданса. Показано, что в общем случае волны соскальзывания и шепчущей галереи распространяются не вдоль геодезических линий на поверхности, а вдоль характеристик уравнения (5) в зависимости от коэффициента преломления окружающей среды на поверхности. Также показано, что свойства волн шепчущей галереи могут быть использованы для определения параметров неоднородностей показателя преломления.

SUMMARY

The problem of finding high frequency whispering gallery and creeping eigenmodes of a surface with anisotropic surface impedance is considered. The outer medium is supposed to be weakly inhomogeneous. The solution is obtained by reducing Maxwell equations to a second-order vector equation, and by subsequent applying of the method of reference problem.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. – М.: Наука, 1972. – 456 с.
2. I. Andronov, D. Bouche and F. Molinet. Asymptotic and hybrid methods in electromagnetics. – London: Institution of Electrical Engineers, 2005. – 249 P.
3. A.A. Zvyagintsev, A.I. Ivanov, D. V. Katkov. Whispering gallery eigenmodes of a curvilinear impedance surface – analysis by the method of reference problem // Proc. International Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkiv. – 2006. – P. 236 - 238.

Звягинцев А.А., доцент, кандидат физ.-мат. наук, ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков;
Иванов А.И., младший научный сотрудник, ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков;
Катков Д.В., младший научный сотрудник, ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков

Поступила в редакцию 20 августа 2007 г.