



УКРАЇНА

(19) UA (11) 46868 (13) U  
(51) МПК (2009)  
G01H 11/00

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ  
І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ДЕПАРТАМЕНТ  
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ  
ВЛАСНОСТІ

## ОПИС ДО ПАТЕНТУ НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ

видається під  
відповідальність  
власника  
патенту

### (54) СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНОЇ ДИСИПАТИВНОЇ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

1

2

(21) u200907048

(22) 06.07.2009

(24) 11.01.2010

(46) 11.01.2010, Бюл.№ 1, 2010 р.

(72) ПУЗЬКО ІГОР ДАНИЛОВИЧ

(73) СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

(57) Спосіб визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи, за яким формують два режими вимушених коливань нелінійної коливальної системи, в першому режимі частоту сигналу вимушеної дії змінюють із постійною швидкістю  $V_1$ , в другому режимі - із постійною швидкістю  $V_2$ , в обох режимах початкові значення амплітуд задають постійними і однаковими і кінцеві значення амплітуд задають постійними і однаковими і не рівними початковим значенням, вимір першого часового інтервалу і числа циклів в цьому інтервалі проводять при зміні частоти сигналу вимушеної дії із першою постійною швидкістю  $V_1$ , вимір другого часового інтервалу і числа циклів в цьому часовому інтервалі проводять при зміні частоти сигналу вимушеної дії із другою постійною швидкістю  $V_2$  ( $V_2 < V_1$  або  $V_2 > V_1$ ), який **відрізняється**

тим, що додатково формують "2N-2" режими вимушених коливань нелінійної дисипативної коливальної системи, в кожному режимі задають постійне початкове і постійне кінцеве значення амплітуд вимушених коливань, в кожному із "2N-2" режимів проводять вимір часового інтервалу і числа циклів у відповідному часовому інтервалі при зміні частоти сигналу вимушеної дії в кожному із "2N-2" часових інтервалів із постійною, але різною швидкістю  $V_{2N-2}$ , а визначення оцінки параметра (частоти вільних коливань) проводять по співвідношенню:

$$\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi \sum_{i=1}^{2N} (n_i - n_{i+1}) (\Delta_i t - \Delta_{i+1} t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} (V_i \Delta_i^2 t - V_{i+1} \Delta_{i+1}^2 t) (\Delta_i t - \Delta_{i+1} t)}{\sum_{i=1}^{2N} (\Delta_i t - \Delta_{i+1} t)^2}$$

де:  $\hat{\omega}_0$  - оцінка частоти вільних коливань лінійної породжувальної системи;  $\Delta_i t, \Delta_{i+1} t$  - часові інтервали;  $n_i, n_{i+1}$  - числа циклів у відповідних часових інтервалах  $\Delta_i t, \Delta_{i+1} t$ ;  $V_i, V_{i+1}$  - швидкості зміни частоти сигналу вимушеної дії.

Корисна модель відноситься до області машинобудівної, авіаційної і ракетнокосмічної техніки, транспортного і енергетичного машинобудування, а саме, до способів визначення параметрів нелінійних дисипативних коливальних систем із кінцевим числом ступенів вільності і коливальних систем із розподіленими параметрами.

Відомий спосіб визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи, за яким задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних коливань нелінійної дисипативної коливальної системи, вимірюють перший часовий інтервал і число циклів коливань в цьому часовому інтервалі при такій зміні амплітуди вільних коливань, задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних коливань, вимірюють другий часовий інтервал при такій зміні амплітуди вільних коливань і число циклів коливань в цьому інтервалі, після чого змінюють інер-

ційність нелінійної дисипативної коливальної системи і приводять вищевказану сукупність операцій для коливальної системи із іншою інерційністю, а визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи проводять при урахуванні зміни амплітуди вільних коливань, відповідних часових інтервалів і чисел циклів коливань, що вимірюються (Ав. св. СССР №1703990, МПКG01H 11/00, 1992).

Недолік відомого способу визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи є недостатня точність визначення параметрів системи, що пояснюється неврахуванням похибок виміру, фіксації та запам'ятовування величин часових інтервалів і чисел циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних коливань від її першого початкового до першого кінцевого значень, від другого початкового до другого кінцевого значень відповідно, а також недо-

(13) U

(11) 46868

(19) UA

статнім по множині інформаційним масивом даних по часових інтервалах і числах циклів коливань для формування регресійної залежності і застосування метода найменших квадратів для зменшення похибок при визначенні параметрів шляхом усереднення.

За прототип вибрано спосіб визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи, за яким формують два режими коливань коливальної системи, в кожному режимі задають початкове і кінцеве значення амплітуди коливань нелінійної дисипативної коливальної системи, вимірюють перший і другий часові інтервали і число циклів коливань в першому і другому часових інтервалах при зміні амплітуди коливань в кожному часовому інтервалі від початкового до кінцевого значення, формують два режими вимушених коливань нелінійної коливальної системи, в першому, з яких частоту сигналу збуджувальної дії змінюють із постійною швидкістю  $V_1$ , а в другому - із постійною швидкістю  $V_2$ , в режимах вимушених коливань початкові значення амплітуд коливань задають однаковими і кінцеві значення амплітуд коливань задають однаковими, вимір першого часового інтервалу і числа циклів коливань в цьому інтервалі проводять при зміні частоти сигналу вимушеної дії із першою постійною швидкістю  $V_1$ , вимір другого часового інтервалу і числа циклів коливань в цьому часовому інтервалі проводять при зміні частоти сигналу вимушеної дії із другою постійною швидкістю  $V_2$  ( $V_2 \neq V_1$ ,  $V_2 < V_1$  або  $V_2 > V_1$ ), а визначення параметра  $\omega_0$  проводять із співвідношення:

$$\omega_0 = \frac{\left[ 2\pi(n_1 - n_2) \mp \frac{1}{2}(V_1 \Delta_1^2 t - V_2 \Delta_2^2 t) \right]}{V_1 t - \Delta_2 t}$$

де:  $\omega_0$  - частота вільних коливань лінійної породжувальної системи;

$\Delta_1 t, \Delta_2 t$  - перший і другий часові інтервали відповідно;

$n_1, n_2$  - числа циклів в першому і другому часових інтервалах відповідно (Патент України на корисну модель № 41550, МПК G01H 11/00, 2009).

Недоліком відомого способу визначення параметра  $\omega_0$  нелінійної дисипативної коливальної системи є недостатня точність визначення параметра, що пояснюється неврахуванням похибок виміру, фіксації та запам'ятовування значень часових інтервалів та чисел циклів коливань у відповідних інтервалах при зміні амплітудних значень коливань в залежності від величин швидкостей розгортки частоти сигналу збуджувальної дії.

В основу корисної моделі поставлене завдання удосконалення способу визначення параметра нелінійної дисипативної коливальної системи за рахунок підвищення точності визначення параметра шляхом врахування похибок при проведенні вимірювань, фіксації і запам'ятовування множини часових інтервалів і чисел циклів коливань в кожному часовому інтервалі, а також формуванні достатнього по множині інформаційного масиву часо-

вих інтервалів і чисел циклів коливань для реалізації можливості формування регресійної залежності і застосування метода найменших квадратів, що і забезпечує збільшення точності визначення параметра, а саме, частоти вільних коливань лінійної породжувальної коливальної системи.

Поставлене завдання вирішується тим, що в способі визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи, за яким формують два режими вимушених коливань нелінійної коливальної системи, в першому режимі частоту сигналу вимушеної дії змінюють із постійною швидкістю  $V_1$ , в другому режимі - із постійною швидкістю

$V_2$ , в обох режимах початкові значення амплітуд задають постійними і однаковими і кінцеві значення амплітуд задають постійними і однаковими і не рівними початковим значенням, вимір першого часового інтервалу і числа циклів в цьому інтервалі проводять при зміні частоти сигналу вимушеної дії із першою постійною швидкістю  $V_1$ , вимір другого часового інтервалу і числа циклів в цьому часовому інтервалі проводять при зміні частоти сигналу вимушеної дії із другою постійною швидкістю  $V_2$  ( $V_2 < V_1$  або  $V_2 > V_1$ ), згідно корисної моделі, додатково формують "2N-2" режиму вимушених коливань нелінійної дисипативної коливальної системи, в кожному режимі задають постійне початкове і постійне кінцеве значення амплітуд вимушених коливань, в кожному із "2N-2" режимів проводять вимір часового інтервалу і числа циклів у відповідному часовому інтервалі при зміні частоти сигналу вимушеної дії в кожному із "2N-2" часових інтервалів із постійною, але різною швидкістю  $V_{2N-2}$ , а визначення оцінки параметра (частоти вільних коливань) проводять по співвідношенню:

$$\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi \sum_{i=1}^{2N} (n_i - n_{i+1}) \mp \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} (V_i \Delta_i^2 t - V_{i+1} \Delta_{i+1}^2 t)}{\sum_{i=1}^{2N} (V_i t - \Delta_{i+1} t)}$$

де:  $\hat{\omega}_0$  - оцінка частоти вільних коливань лінійної породжувальної системи;  $\Delta_i t, \Delta_{i+1} t$  - часові інтервали;  $n_i, n_{i+1}$  - числа циклів у відповідних часових інтервалах  $\Delta_i t, \Delta_{i+1} t$ ;  $V_i, V_{i+1}$  - швидкості зміни частоти сигналу вимушеної дії.

Застосування запропонованого способу визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи разом з усіма суттєвими ознаками, включаючи відмінні, забезпечує підвищення точності визначення параметрів, а тому і області застосування за рахунок проведення додаткових технологічних операцій по вимірюванню і реєстрації масиву часових інтервалів і масиву чисел циклів коливань, які формують розширений інформаційний масив, що дає підставу для формування нового алгоритму алгебраїчних перетворень і застосуванню метода найменших квадратів, що і призводить до зменшення ступеня впливу похибок вимірювання і реєстрації на кінцевий результат визначення оцінок параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи.

Розробка нового алгоритму визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи базується на наступних теоретичних перетвореннях.

Розглянемо коливальну систему із однією ступінню вільності, яка знаходиться під дією зовнішніх періодичних сил, що явно залежать від часу (Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М: Физматгиз, 1974. - с. 277-294) для якої диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(\omega t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (1)$$

де:  $\omega_0^2 = cm^{-1}$ ,  $c$  - коефіцієнт жорсткості,  $m$  - маса коливальної системи;  $\varepsilon > 0$  - малий позитивний параметр,  $f\left(\omega t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  - функція, що має періодичний характер по відношенню до  $\omega t$  із періодом  $2\pi$ .

Рівняння (1) інтерпретують як рівняння коливань деякої механічної системи одиничної маси із частотою  $\omega_0$  вільних коливань, яка знаходиться під дією малого нелінійного збудження  $\varepsilon f\left(\omega t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ , що залежить від часу  $t$ .

При заданні рішення (1) у вигляді ряду

$$x = X_a \cos\left(\frac{p}{q}\omega t + \psi\right) + \varepsilon u_1 \langle \omega, \psi \rangle + \varepsilon^2 u_2 \langle \omega, \psi \rangle + \dots, \quad (2)$$

де  $X_a$  і  $\psi$  визначають із системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_a}{dt} &= \varepsilon A_1 \langle \omega, \psi \rangle + \varepsilon^2 A_2 \langle \omega, \psi \rangle + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \frac{p}{q}\omega + \varepsilon B_1 \langle \omega, \psi \rangle + \varepsilon^2 B_2 \langle \omega, \psi \rangle + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

де  $p, q$  - взаємно прості числа.

Для отримання першого наближення розглядають головну гармоніку

$$x = X_a \cos \Theta, \Theta = \frac{p}{q}\omega t + \psi \quad (4)$$

а система рівнянь (3) для першого наближення має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_a}{dt} &= \varepsilon A_1 \langle \omega, \psi \rangle \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \frac{p}{q}\omega + \varepsilon B_1 \langle \omega, \psi \rangle \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для головного резонансу  $p = q = 1$ , а система (5) набуває вигляду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_a}{dt} &= \varepsilon A_1 \langle \omega, \psi \rangle \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \omega + \varepsilon B_1 \langle \omega, \psi \rangle \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Проведемо нескладні перетворення (6), для виключення  $\varepsilon$ :

1) проведемо операцію ділення

$$\frac{\frac{d\psi}{dt} - \omega_0 + \omega}{\frac{dX_a}{dt}} = \frac{B_1 \langle \omega, \psi \rangle}{A_1 \langle \omega, \psi \rangle} \quad (7)$$

2) проведемо алгебраїчне перетворення (7)

$$d\psi + \omega dt - \omega_0 dt = \frac{B_1 \langle \omega, \psi \rangle}{A_1 \langle \omega, \psi \rangle} dX_a. \quad (8)$$

При умові, якщо частота  $\omega$  сигналу зовнішньої дії залежить від часу лінійно, тобто  $\omega = Vt$ , де  $V$  - постійна швидкість зміни частоти, і після операції інтегрування лівої і правої частин рівняння (8), отримуємо таке співвідношення

$$2\pi n + \frac{1}{2}V\Delta^2 t - \omega_0 \Delta t = \int_{X_{a1}}^{X_{a2}} \frac{B_1 \langle \omega, \psi \rangle}{A_1 \langle \omega, \psi \rangle} dX_a, \quad (9)$$

де  $n$  - число циклів коливань в часовому інтервалі  $\Delta t$ , значення амплітуди коливань на початку часового інтервалу дорівнює  $X_{a1}$ , значення амплітуди коливань на кінці часового інтервалу дорівнює  $X_{a2}$ .

Приймаючи до уваги той факт, що часові інтервали  $\Delta t$ , числа циклів  $n$  коливань і амплітуди значення  $X_a$  коливань вимірюють і фіксують при наявності похибок вимірювань для підвищення точності визначення параметрів необхідно сформулювати інформаційні масиви множини часових інтервалів чисел циклів коливань і амплітудних значень коливань, сформулювати регресійну залежність і застосувати метод найменших квадратів.

На підставі рівняння (9) сформуємо мінімізуючу функцію  $S$ .

$$S = \sum_{i=1}^{2N} \left[ \omega_0 \langle \omega_i t - \Delta_{i+1} t \rangle - 2\pi \langle n_i - n_{i+1} \rangle - \frac{1}{2} \langle V_i \Delta_i^2 t - V_{i+1} \Delta_{i+1}^2 t \rangle \right]^2, \quad (10)$$

де  $\hat{\omega}_0$  - оцінка параметра  $\omega_0$  - частоти вільних коливань лінійної породжувальної системи;  $\Delta_i t, \Delta_{i+1} t$  - часові інтервали;  $n_i, n_{i+1}$  - числа циклів у відповідних часових інтервалах;  $V_i, V_{i+1}$  - швидкості зміни частоти сигналу вимушеної дії.

Після формування частинної похідної  $\frac{\partial S}{\partial \hat{\omega}_0}$

отримаємо таке рівняння для визначення оцінки  $\hat{\omega}_0$  параметра  $\omega_0$ .

$$\hat{\omega}_0 \sum_{i=1}^{2N} \langle \omega_i t - \Delta_{i+1} t \rangle^2 - 2\pi \sum_{i=1}^{2N} \langle n_i - n_{i+1} \rangle \langle \omega_i t - \Delta_{i+1} t \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \langle V_i \Delta_i^2 t - V_{i+1} \Delta_{i+1}^2 t \rangle \langle \omega_i t - \Delta_{i+1} t \rangle = 0 \quad (11)$$

Із рівняння (11) отримаємо аналітичне співвідношення для визначення оцінки  $\hat{\omega}_0$  параметра  $\omega_0$

$$\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi \sum_{i=1}^{2N} \langle n_i - n_{i+1} \rangle \langle \omega_i t - \Delta_{i+1} t \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \langle V_i \Delta_i^2 t - V_{i+1} \Delta_{i+1}^2 t \rangle \langle \omega_i t - \Delta_{i+1} t \rangle}{\sum_{i=1}^{2N} \langle \omega_i t - \Delta_{i+1} t \rangle^2} \quad (12)$$

Спосіб визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи реалізують на підставі наступного алгоритму.

1) Формують режим вимушених коливань досліджувальної нелінійної коливальної системи. В цьому режимі частоту сигналу збуджувальної дії змінюють із першою постійною швидкістю  $V_1$ . За-

дають початкове  $X_{a1}$  і кінцеве  $X_{a2}$  значення амплітуд вимушених коливань.

2) Вимірюють і реєструють перший часовий інтервал  $\Delta_1 t$  і число  $n_1$  циклів в цьому часовому інтервалі при зміні амплітуди вимушених коливань від початкового значення  $X_{a1}$  до кінцевого значення  $X_{a2}$ .

3) Повторюють "2N-1" разів, де  $N=2,3,\dots$  формування режиму вимушених коливань досліджувальної нелінійної коливальної системи. В кожному із "2N-1" режимів частоту сигналу збуджувальної дії змінюють із різною, але постійною швидкістю  $V_{2N-1}$ . В кожному із "2N-1" режимів задають постійне початкове  $X_{a1}$  і постійне кінцеве  $X_{a2}$  значення амплітуд коливань.

4) Вимірюють і реєструють в кожному із "2N-1" режимів вимушених коливань досліджувальної коливальної системи часовий інтервал  $\Delta_{2N-1} t$  і число  $n_{2N-1}$  циклів коливань у відповідному часовому інтервалі при зміні амплітуди вимушених коливань від постійного початкового значення  $X_{a1}$  до постійного кінцевого значення  $X_{a2}$ .

Новим в алгоритмі є проведення "2N-2" разів операцій вимірювання, реєстрації і запам'ятовування значень часових інтервалів і чисел циклів коливань у відповідних часових інтервалах при реалізації "2N-2" режимів вимушених коливань при виконанні умови зміни частоти сигналу збуджувальної дії із постійними, але різними швидкостями і при умові реєстрації зміни амплітуди вимушених

коливань від постійного початкового значення  $X_{a1}$  до постійного кінцевого значення  $X_{a2}$ .

Спосіб визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи реалізується наступним чином.

1) Установлюють досліджувальний об'єкт на рухомій платформі вібростенда електродинамічного типу.

2) Послідовно реалізують "2N" режимів вимушених коливань досліджувального об'єкта, в кожному з яких фіксують і реєструють постійне початкове значення амплітуди вимушених коливань об'єкта і постійне кінцеве значення амплітуди вимушених коливань об'єкта.

3) При реалізації "2N" режимів вимушених коливань по п. 2 установлюють в кожному режимі постійну, але різну для різних режимів швидкість  $V_{2N}$  розгортки частоти сигналу збуджувальної дії.

4) В кожному із "2N" режимів вимірюють і реєструють величину часового інтервалу  $\Delta_{2N} t$  і число циклів  $n_{2N}$  коливань при виконанні умови зміни амплітуди вимушених коливань від постійного початкового значення  $X_{a1}$  до постійного кінцевого значення  $X_{a2}$ .

5) За допомогою вимірювально-обчислювального комплексу проводять обробку інформаційних масивів множин часових інтервалів, чисел циклів коливань, швидкостей розгортки частоти сигналу збуджувальної дії і на підставі отриманих аналітичних співвідношень визначають оцінку значення частоти вільних коливань лінійної породжувальної коливальної системи.